

В. С. ЧУВИКОВСКИЙ, О. М. ПАЛИЙ, В. Е. СПИРО

ОБОЛОЧКИ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

(Новые методы решения линейных
и нелинейных задач)

920

360194

УЧЕБНЫЙ ОТДЕЛ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «СУДОСТРОЕНИЕ»

Ленинград

1966

В книге изложены новые методы решения динамических, статических и статистических линейных задач теории оболочек, рассмотрены в судовой конструкции. Эти методы позволяют рассмотреть многие не решаемые ранее конструктивные задачи сшитой оболочки, а также существенно уточнить ряд инженерных решений. Приведены примеры расчета сложных оболочек. Изложены приложения к практическим исследованиям.

Книга рассчитана на инженеров-кораблестроителей, студентов старших курсов кораблестроительных институтов и аспирантов, она может быть также полезна специалистам других областей техники, занимающимся теорией оболочек.

$$\frac{3-18-5}{135-66}$$

МУХОМОВСКИЙ ВЛАДИСЛАВ СЕРГЕЕВИЧ, ДАВЫДОВ ОЛЕГ МАКОВИЧ,
СИНЮ ВЛАДИМ СЕРГЕЕВИЧ

ОБОЛОЧКИ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ
(НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ)

Б. 3, 1966 г., № 12

Рецензенты: Секция строительной механики и конструкции корпуса корабля НТО Судпрома им. А. Н. Крылова и канд. техн. наук В. Т. Голосинский

Научный редактор С. В. Соколовский Редактор А. А. Соколовский

Технический редактор Ю. М. Коренько

Корректоры: М. М. Иванова и С. Л. Осиповская

Оформление: прикладная и сувенирная художница Е. А. Родченко

Сдано в набор 24.11.1965 г. 18 17/18 Печать окончена в печать 1.07.1966 г.
Формат издания 60х90/16 Печ. л. 11,5 Уд. л. 11,5
Изд. № 130-45 Тираж 300 экз. Цена 9 коп. Заказ № 3272
Надпечатки: 300 экз. Ленинград, Д-85, ул. Тихова, 5

Ленинградская конструкторская № 4 Генеральштабная Комиссия по печати при Совете Министров СССР, Специализированная, 14

ОТ АВТОРОВ

Нет нужды обосновывать значение теории оболочек для судостроения, судовой машиностроения и других областей техники. Оно лучше всего демонстрируется примерами практики, которая выдвигает все новые проблемы проектирования и расчета оболочечных конструкций.

Опубликованы учебники и монографии [4-6, 19], где изложены классические методы этой теории; однако до сих пор еще нет достаточно точных решений ряда сложных и актуальных в практическом отношении задач. Вместе с тем необходимость решения таких задач резко возрастает в связи с ужесточением условий эксплуатации сооружений и машин, тенденцией к повышению запасов прочности конструктивных элементов, а также внедрением высокопрочных, но малопластичных материалов.

В предлагаемой книге рассмотрены разработанные авторами методы исследования линейных и нелинейных деформаций упругих и неупругих систем. Они уже начинают с успехом применяться специалистами, и потому наперед необходима их систематического изложения. Этими методами удастся существенно уточнить многие известные решения, а главное проанализировать новые вопросы упругости, колебаний, устойчивости, пластичности, ползучести, термоупругости и термопластичности оболочек.

Кроме анализа физического и аналитического существа методов, даны расчетные формулы, алгоритмы и зависимости для конкретных конструкций. Если большое число разных случаев можно рассмотреть в дальнейшем на основе приведенных расчетных схем.

Нельзя, конечно, ожидать, что рекомендуемые методы сэкономят той преславленной панацеей, которая освободит исследователей от всех бед и позволит решить любую задачу о деформациях любой оболочки. Однако есть основания думать, что некоторые из них будут все же с их помощью ликвидированы, а круг решенных вопросов — расширен. Цель книги — именно этому.

В своих исследованиях авторы исходили из общих методических предположений, отвечающих современному периоду развития строительной механики [37, 38] и хорошо выраженным известным математиком Р. Беллманом: «Только в том случае, если мы очень ясно

представили себе различные аспекты возникающих задач, можно надеяться, что мы выберем разумные математические модели и применим осмысленные математические методы. Как мы в дальнейшем будем неоднократно подчеркивать, понятия играют столь же важную роль, что и уравнения, а создание и интерпретация математических моделей даже важнее тех частных уравнений, к которым они приводятся.

Именно модели и обсуждению разных сторон изучаемых явлений уделено в книге главное внимание. Примеры имеют важное, но все же вспомогательное значение.

Основы использованных представлений и подходов заложены в работах [39, 40, 41], а затем обобщены математически и развиты применительно к теории пластичности и ползучести, а также теории оболочек в нескольких совместных докладах авторов на научно-технических конференциях по строительной механике корабля (памяти академика Ю. А. Шиманского; Ленинград, 1963 и 1965 гг.). Содержание книги служило предметом лекций и семинаров, проведенных В. С. Чудиновским для инженеров и аспирантов, занятых изучением прочности судовых конструкций. Часть решений в примеров, с необходимыми ссылками, взята из диссертационных работ, выполненных или выполняемых под его руководством.

Ясно, что новые научные результаты не возникают внезапно сами по себе подобно богине Афродите, которая родилась просто из морской пены. Они всегда базируются на каких-то родственниках последованиях, ассимилируют идеи предшественников и замечания заинтересованных современников. Так было и в данном случае. Авторы глубоко благодарны всем, кто прямо или косвенно помог им.

Отзывы о книге просьба направлять по адресу Издательства: Ленинград, Д-65, ул. Гоголя, д. 8.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ. ПРЕДЛАГАЕМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Прежде чем приступить к исследованию деформаций оболочек, т. е. главному предмету книги, нужно обязательно уточнить некоторые понятия и представления — они широко используются в дальнейшем, но не являются общепонятными. Особенно это относится к ряду аспектов динамики конструкций.

Кроме того, целесообразно детально проанализировать существо предлагаемых расчетных методов, рассмотрев для этого более простые и потому более наглядные примеры.

Хотя изложенные в первом разделе вопросы могут показаться не слишком интересными специалисту в области теории оболочек, особенно со «статическим уклоном», он должен помнить, что связанное ниже так или иначе лежит прямое применение в дальнейших разделах. В частности, сведения на динамику, помимо их прямого назначения, необходимы для единого подхода к статическим и динамическим задачам, а также для выявления ряда особенностей рекомендуемых численных алгоритмов.

Большинство задач, приведенных в данном разделе, имеет незначительное самостоятельное значение. С ними может ознакомиться более широкий круг читателей, чем предназначенный для всей книги в целом.

Глава I

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

§ 1. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ И МОДЕЛИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПОЛЕЖАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Рассмотрим сосредоточенную массу m , соединенную с упругой конструкцией, например с висячей упругой балкой (рис. 1, а). Пусть, далее, конструкция совершает свободные или вынужденные гармонические колебания частотой ω , а масса m вследствие этого перемещается по закону $y = y_0 \sin(\omega t + \theta)$. Тогда на конструкцию со стороны массы будет действовать сила инерции $P_a = -m\ddot{y} = -m\omega^2 y_0 \sin(\omega t + \theta)$. Следовательно, при изучении

гармонических колебаний конструкции мы можем интерпретировать и как некую безынерционную упругую связь (пружину), которая направлена вдоль оси y и обладает отрицательной жесткостью $K = -m\omega^2$; величина жесткости зависит от частоты ω .

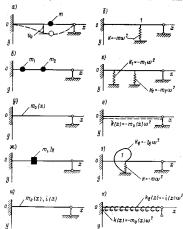


Рис. 1.

Таким образом, систему рис. 1, а не трудно представить в квазистатическом виде (рис. 1, б). При любых нагибах балки и отклонениях точки I от нулевого положения связь K будет прилагать силу, стремящуюся это больше отклонить балку.

Аналогично могут быть сконструированы квазистатические модели невесомых конструкций с несколькими сосредоточенными массами (рис. 1, в и г), а также невесомых конструкций с распределенной массой (рис. 1, д и е). Распределенная масса интерпретируется как

упругое основание с отрицательным коэффициентом жесткости $k(x) = -m_0(x)\omega^2$, где $m_0(x)$ — переменная по координате распределенная масса.

Если сосредоточенная масса обладает инерцией вращения, то она заменяется не одной, а двумя связями (рис. 1, ж и з). Жесткость второй связи равна $K_0 = -I_0\omega^2$, где I_0 — момент инерции массы относительно оси вращения. Инерция вращения распределенных масс отображается распределенными связями $k_0(x) = -i(x)\omega^2$, где $i(x)$ — момент инерции этих масс, отнесенный к единице длины (рис. 1, а и к).

2. Испытывая квазистатическую аналогию между массами и упругими связями, эти непосредственно сводим задачи о линейных

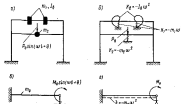


Рис. 2.

установившиеся вынужденные колебания, происходящих всегда с частотами возмущающих сил, к статическим задачам строительной механики. Так, скажем, рассчитать набранно невесомую конструкцию (рис. 2, а) с дискретными массами — это значит просто раскрыть статическую неопределенность рамы, показанной на рис. 2, б. Никаких специфических приемов динамики здесь не требуется. Прогиб в любой момент t равен, естественно, статическому прогибу под действием силы P_0 , умноженному на $\sin(\omega t + \varphi)$.

Правда, иногда стандартные статические решения нужно кое-что немного перестраивать. Например, рассчитывая колебания балки рис. 2, в, мы свели ее к балке на упругом основании (рис. 2, г), но смена знака у коэффициента жесткости основываясь на статическом расчете некорректирует обычные расчетные формулы. Впрочем, корректировка не может существовать.

3. Заметим, что отрицательные жесткости связей, соединяемых с конструкцией, не являются какими-то абстракциями, необходимыми только для обоснования квазистатической аналогии. Они

ассимилируют самым непосредственным образом в целом ряде чисто статических задач.

Рассмотрим плоское перекрытие с одной перекрестной связью (рис. 3, а). Балки главного направления сжаты силами T_0 , а перекрестная связь нагружена в точке C сосредоточенной силой P_0 , нормальной к плоскости конструкции. Тria кромки перекрытия свободно оперты, четвертая — жестко заделана.

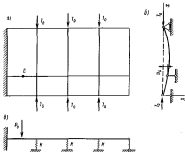


Рис. 3.

Если решить задачу о балке главного направления, опертой в пролете на жесткую опору, которую затем сместить на величину $v = v_0$ (рис. 3, б), то реакция балки, передаваемая опоре, очевидно будет

$$R = -Kv_0. \quad (1.1)$$

Здесь K — некоторый коэффициент, который положительн при $T_0 < T_0^*$, равен нулю при $T_0 = T_0^*$ и отрицателен при $T_0 > T_0^*$.

Иными словами, в случае $T_0 < T_0^*$ балка устойчива и стремится устоять со стороны опоры, чтобы дать ей передвигаемое v_0 , в случае $T_0 > T_0^*$ балка неустойчива, и при перемещении v_0 опоры поддерживает балку, которая стремится увеличить прогиб. Равенство $T_0 = T_0^*$ означает, что балка находится в состоянии нейтрального равновесия и на опору не действуют никакие силы.

Определив коэффициент K , нетрудно представить перекрестную связь в виде, показанном на рис. 3, в. Жесткости упругих опор могут быть как положительными, так и отрицательными. При большом числе опор получим упругое основание положительной или отрицательной жесткости.

Аналогичным путем нетрудно построить статические модели связей отрицательной жесткости, помогающих решению соединенных с ними сечений конструкций.

4. Квазистатическая интерпретация поддается и любая задача о свободных колебаниях линейной механической системы. При этом она сводится к задаче устойчивости.

Пусть системе (рис. 1, а) дано какое-то отклонение от начального положения, вызывающее перемещения $v(x_{01}) = v_1$ и $v(x_{02}) = v_2$ точек m_1 и m_2 с координатами x_{01} и x_{02} . Пружина K_1 и K_2 прикладывают силы, которые стремятся еще больше изогнуть балку. Если силы упругости балки окажутся больше сил этих пружин, то балка вернется в начальное положение; если, наоборот, силы упругости будут меньше сил, передаваемых пружинами, то отклонения станут увеличиваться и произойдет типичная потеря устойчивости первоначальной прямолинейной формы равновесия. Наконец, может быть случай безразличного равновесия, когда силы упругости равны силам пружин и возможны любые амплитуды прогиба по некоторой его форме.

Последний вариант как раз и представляет аналог свободных колебаний, при которых силы инерции, независимо от амплитуд, всегда точно уравновешиваются силами упругости.

Уравнения безразличного равновесия системы рис. 1, а имеют вид

$$\begin{cases} -K_1 v_1 A_{11} - K_2 v_2 A_{21} = v_1 \\ -K_1 v_1 A_{21} - K_2 v_2 A_{22} = v_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь A_{ij} — коэффициент податливости балки, равный прогибу в точке i от действия единичной силы, приложенной в точке j . В силу известной теоремы взаимности $A_{11} = A_{22}$.

Подставим в (1.2) значения $K_1 = -m_1 \omega^2$ и $K_2 = -m_2 \omega^2$, где ω — неизвестная пока частота свободных колебаний системы, приходим к уравнениям

$$\begin{cases} (1 - m_1 A_{11} \omega^2) v_1 - m_2 A_{12} \omega^2 v_2 = 0 \\ -m_1 A_{21} \omega^2 v_1 + (1 - m_2 A_{22} \omega^2) v_2 = 0 \end{cases} \quad (1.3, 4)$$

Это обычные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы [42].

Отметим, что если решать однородные уравнения (1.2, 4) assuming только при обращении в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} (1 - m_1 A_{11} \omega^2) & -m_2 A_{12} \omega^2 \\ -m_1 A_{21} \omega^2 & (1 - m_2 A_{22} \omega^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.5)$$

Раскрытие (1.3) дает квадратное уравнение относительно λ^2

$$m_1 m_2 (A_{12} A_{22} - A_{21}^2) \lambda^4 - (m_1 A_{11} + m_2 A_{22}) \lambda^2 + 1 = 0. \quad (1.4)$$

Значения λ_1 и λ_2 , найденные из (1.4), можно подставить в любое из уравнений (1.2, а) и определить два значения соотношения $\alpha = v_1/v_2$, которые дают две формы главных свободных колебаний системы.

Первую форму главных свободных колебаний конструкции рис. 1, е естественно трактовать как первую эйлерову форму потери устойчивости конструкции рис. 1, а, а вторую форму свободных колебаний — как вторую эйлерову форму.

5. При исследовании многих вопросов вибрация удобно оперировать понятием динамической жесткости, которая представляет аналог обычной жесткости линейной системы под действием статических сил.

Динамическая жесткость есть величина, равная отношению усилия, возбуждающего гармонические колебания, к перемещению в точке приложения этого усилия. Она зависит от частоты колебаний.

Величина, обратная динамической жесткости, носит название динамической податливости. Она равна амплитуде перемещения в точке приложения усилия, когда амплитуда самого усилия равна единице. Через динамическую податливость выражаются матрицы системы на внешнее воздействие.

Пусть, например, мы возьмем систему, представленную на рис. 4, а. Очевидно, что перемещение массы m в установившихся колебаниях имеет вид

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \theta) = P_0 A \cos(\omega t + \theta) = (P_0 : K) \cos(\omega t + \theta).$$

Здесь A — динамическая податливость, K — динамическая жесткость.

Если рассматривать (рис. 4, б) колебания шарнирно опертой балки постоянного момента инерции площади поперечного сечения I в постоянной погонной массе m_0 под действием гармонического момента $M(t) = M_0 \sin(\omega t + \theta)$, то угол поворота на опоре $x = l$ будет

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{x=l} = M_0 B \sin(\omega t + \theta).$$

Здесь B — динамическая податливость, равная

$$B = \frac{l}{2EI} \cdot \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{m_0 l} - \frac{1}{m_0 l^3} \right); \quad \omega = l \sqrt{\frac{\rho E \omega^4}{EI}}.$$

Пользуясь понятием динамической жесткости или динамической податливости, мы как бы заменили всю рассматриваемую реальную систему некоторой условной безинерционной упругой связью. Скажем, по отношению к силе $P_0 \cos(\omega t + \theta)$ вся система рис. 4, а

представляет, в сущности, безинерционную пружину рис. 4, а, а балка рис. 4, б по отношению к моменту $M_0 \sin(\omega t + \theta)$ — безинерционную связь рис. 4, в, где $K_0 = 1/B$.

6. Заметим, что понятие о динамической жесткости тесно связано с понятием об акустическом и акустическом импедансах, которые широко используются в электродинамике и акустике (английское *impedance* от латинского *impedire* — препятствие).

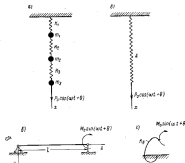


Рис. 4.

Электрический импеданс Z — коэффициент пропорциональности между переменным электрическим напряжением u и силой тока I , т. е. $Z = u/I$. Поскольку уравнения теории цепей переменного тока по своему виду тождественны уравнениям теории колебаний механических систем, причем напряжение соответствует возмущающей силе, а сила тока — скорости движения, то можно говорить о механическом импедансе, если понимать под ним отношение гармонического возмущающего усилия к скорости перемещения в точке его приложения. Легко видеть, что механический импеданс в случае гармонических движений пропорционален динамической жесткости.

Акустический импеданс представляет отношение звукового давления к скорости частиц среды. Связь его с механическим импедансом и динамической жесткостью также очевидна.

1. Внешние и внутренние неупругие сопротивления, связанные с рассеиванием энергии при колебаниях конструкций, часто оказываются пропорциональными скоростям перемещений и деформаций.

В отношении внешних сопротивлений дело обстоит сравнительно просто — внешняя среда непосредственно сопротивляется движению тела. Природа внутренних сопротивлений более сложна. В частности, она зависит от структуры внутренних неупругих элементов материала.

Пусть тело совершает гармонические колебания. Согласно теории упругости напряжения σ в любом элементе тела меняются линейно в пределах от σ_0 до $-\sigma_0$ когда относительные деформации ϵ находятся в интервале от ϵ_0 до $-\epsilon_0$ (рис. 5). Однако на самом деле зависимость $\sigma(\epsilon)$ образует узкую петлю, имеющую форму гистерезиса. Площадь, заключенная внутри петли, характеризует рассеивание энергии за каждый цикл деформирования. Согласно так называемой гипотезе Фохта предполагается зависимость

$$\sigma = E\epsilon + \nu E \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (1.5)$$

где E , как обычно, — модуль упругости, ν — коэффициент сопротивления.

Ее можно интерпретировать так: в системе по-прежнему точно удовлетворяется линейный закон Гука, но кроме сил упругости возникают также силы внутренних сопротивлений, пропорциональные скорости деформирования.

Ясно, что вместо σ и ϵ в зависимости (1.5) можно рассматривать касательные напряжения и угол сдвига.

2. Часто оказывается, однако, что сопротивления связаны не со скоростью деформации, а с самой деформацией.

Е. С. Сорокин [30, 31] рационально заменил гипотезу Фохта и предположил, что силы сопротивления пропорциональны первой степени деформации, причем форма петли в случае изменения ϵ по гармоническому закону остается эллиптической (гипотеза Сорокина)

$$\sigma = E\epsilon + \nu_0 E \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}}, \quad (1.6)$$

где ν_0 — коэффициент сопротивления, ϵ_0 — амплитуда деформации.

Для гармонических колебаний гипотезы Сорокина и Фохта формально (до, конечно, не физически) почти совпадают.

В самом деле, пусть $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t + \theta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} &= \omega \epsilon_0 \cos(\omega t + \theta) = \omega \epsilon_0 \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \theta)} = \\ &= \omega \epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следовательно,

$$\sigma = E\epsilon + E\nu_0 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}} = E\epsilon + \frac{\nu_0}{\omega} E \frac{d\epsilon}{dt} = E\epsilon + \nu E \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (1.8)$$

где $\nu = \nu_0/\omega$ — коэффициент сопротивления по гипотезе Фохта.

Из (1.8) ясно, что при гармоническом колебании силы сопротивления по гипотезе Сорокина равны силам упругости, умноженным на ν , и сдвинутым по фазе на $\pi/2$.

При использовании гипотезы Сорокина в случае произвольного движения следует разделить это произвольное движение на ряд или интеграл Фурье, а потом применить (1.6) ко всем гармоническим составляющим.

3. Помимо рассеивания энергии, в материале имеется так называемое конструктивное рассеивание, присущее самой конструкции. Оно обусловлено местными резонансами, взаимным трением отдельных элементов, входящих в конструкцию (скажем, трение вольфрамовых стержней, трение трубефицированных стержней), и т. п. Его можно рассматривать согласно тем же гипотезам типа (1.5) и (1.6), определяя соответствующие коэффициенты чисто экспериментальным путем.

Спыт показывает [43], что гипотезы Фохта и Сорокина применительно к большим конструкциям даже более удовлетворительны, чем для отдельных образцов.

4. Учет линейных сопротивлений удобно производить с помощью комплексной формы зависимостей теории колебаний, которая получила широкое распространение в электротехнике, акустике [11, 16], а сейчас применяется и в динамике сооружений [30, 31, 32]. Имея в виду неоднократно использовать комплексную форму, напомним кратко ее сущность, дополнив уже известные из литературы выводы новыми деталями и доказательствами.

Обобщенные формулы

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t \\ Ae^{j(\omega t - \theta)} &= Ae^{j\theta} e^{j\omega t} = A \cos(\omega t + \theta) + \\ &+ jA \sin(\omega t + \theta) = \bar{A} e^{j\omega t} \\ \bar{A} = Ae^{j\theta} &= a + jb, \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctg \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь и в дальнейшем буквы с чертой надверху обозначают комплексные числа (в отличие от вещественных).

Из формул (1.9) следует, что функцию $A \cos(\omega t + \theta)$ можно трактовать как вещественную часть $Ae^{i\omega t} = Ae^{i\omega t}$.

Поскольку в общих буквенных зависимостях гораздо удобнее оперировать с $Ae^{i\omega t}$, чем с $A \cos(\omega t + \theta)$, то возникает естественный вопрос, нельзя ли вместо всех функций $A_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$, входящих в исходные уравнения какой-либо задачи теории колебаний, подставить $A_n e^{i\omega_n t}$, затем получить решение уравнений, а в окончательном результате взять только вещественную часть. Это вполне возможно, если, удовлетворяя исходные уравнения в комплексной форме, мы одновременно удовлетворим их порою для вещественных значений частей содержащихся там величин.

Учтем зависимости

$$\begin{aligned} (a + ib) \pm (c + id) &= (a \pm c) + i(b \pm d) \\ a(c \pm id) &= ac \pm iad \\ \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} &= \\ = \frac{\partial^n [U(x_1, x_2, \dots, x_n) + iV(x_1, x_2, \dots, x_n)]}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} &= \\ = \frac{\partial^n U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + i \frac{\partial^n V}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из них легко усмотреть справедливость равенства

$$L[\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n] = L[U_1 + iV_1, U_2 + iV_2, \dots, U_n + iV_n] = \\ = L[U_1, U_2, \dots, U_n] + iL[V_1, V_2, \dots, V_n],$$

где L — любой линейный дифференциально-алгебраический оператор с вещественными коэффициентами.

Следовательно, указанный прием решения задач теории колебаний применим к любым задачам о гармонических колебаниях линейных систем, так как они описываются именно линейными операторами относительно $A_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$.

Совершенно аналогично можно представить все выражения вида $A_n \sin(\omega_n t + \theta_n)$ как мнимую часть $A_n e^{i\omega_n t}$. Заменяя в уравнениях теории колебаний все функции $A_n \sin(\omega_n t + \theta_n)$ на $A_n e^{i\omega_n t}$, следует брать в окончательных результатах только мнимые части.

5. Особенно удобна комплексная форма зависимостей для исследования колебаний линейных систем при наличии линейных сопротивлений.

В самом деле, рассмотрим для примера изгибные колебания одностороннего балки (рис. 6, а). Внешнее и внутреннее сопротивления пропорциональны первой степени перемещений и деформаций.

Дифференциальное уравнение движения записывается в виде

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3 \partial t} + K_0 \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} = q(x) \cos(\omega t + \theta), \quad (1.11)$$

где γ — коэффициент внешнего сопротивления.

Граничные условия имеют вид

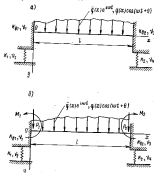


Рис. 6.

при $x=0$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3 \partial t} - K_0 \frac{\partial y}{\partial x} + \gamma K_0 \frac{\partial y}{\partial t} \\ EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3 \partial t} = - (K_1 y + \gamma K_1 \frac{\partial y}{\partial t}) \end{aligned}$$

при $x=l$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3 \partial t} = - (K_n \frac{\partial y}{\partial x} + \gamma K_n \frac{\partial y}{\partial t}) \\ EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3 \partial t} = K_2 y + \gamma K_2 \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Коэффициенты K_0, K_n — жесткости упругих заделок и опор, γ — коэффициенты сопротивлений в заделках и опорах.

Интегрируя уравнение (1.11) в известных переменных, необходимо искать установившиеся колебания как сумму

$$q(x, t) = F_1(x) \sin(\omega t + \theta) + F_2(x) \cos(\omega t + \theta), \quad (1.12)$$

так как одна функция вида $F(x) f(t)$ не может дать искомого решения (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой).

Выражение (1.12) после его подстановки в (1.11) дает два уравнения четвертого порядка, решение которых связано с большими аналитическими трудностями.

Если перейти к комплексной форме, то (1.11) примет вид

$$EI \frac{\partial^4 \bar{q}}{\partial x^4} + \nu EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} + m_0 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial t^2} + \nu^2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} - \bar{q}(x) e^{i\omega t} = 0, \quad (1.14)$$

$$\text{где } \bar{q}(x) = q(x) e^{i\theta}.$$

Разлагая \bar{q} в виде $\bar{q} = \bar{q}_0(x) e^{i\omega t}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \nu \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} &= i\omega \bar{q}_0(x) e^{i\omega t} = -i \frac{\sqrt{\omega}}{\omega} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} \\ \nu EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} &= i\omega \nu EI \frac{\partial^2 \bar{q}_0}{\partial x^2}(x) e^{i\omega t} = i\omega \nu EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Отсюда можно представить (1.14) так:

$$EI \frac{\partial^4 \bar{q}}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial t^2} - \bar{q}(x) e^{i\omega t} = 0, \quad (1.16)$$

где

$$E = E(1 + i\nu\omega), \quad m_0 = m_0(1 - i \frac{\sqrt{\omega}}{\omega}). \quad (1.17)$$

Граничные условия (1.12) представятся теперь зависящими при $x=0$

$$EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} = \bar{K}_1 \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}; \quad EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} = -\bar{K}_1 \bar{q} \quad (1.18)$$

при $x=l$

$$EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} = -\bar{K}_2 \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}; \quad EI \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} = \bar{K}_2 \bar{q}$$

причем $\bar{K}_1 = K_1(1 + i\nu\omega)$; $\bar{K}_2 = K_2(1 + i\nu\omega)$;

$\sqrt{\omega}$ — коэффициент ν , соответствующий K_1 , $\sqrt{\omega}$ — коэффициент ν , соответствующий K_2 .

Уравнение (1.16) и его граничные условия (1.18) совпадают по своему виду с аналогичными условиями и уравнениями при отсутствии каких бы то ни было сопротивлений. Формальные буквенные

операции с комплексными величинами производятся по тем же правилам, что и с действительными. Поэтому решение задачи распадается на два этапа: а) определение колебаний в случае отсутствия сопротивлений; б) подстановка в полученные разветвленные зависимости комплексных значений жесткостей и масс с последующим разделением действительных и мнимых частей окончательных выражений.

Использование комплексной формы решения дает возможность чрезвычайно упростить все выкладки и учесть сопротивления на второй этап.

6. Сделанные выводы могут быть распространены на общий случай установившихся колебаний любой линейной системы с сопротивляющимися, пропорциональными скоростям перемещений и деформаций.

Пусть колебания системы определяются любыми линейными дифференциально-алгебраическими соотношениями между некоторыми обобщенными координатами y_1, y_2, \dots, y_n и обобщенной внешней силой $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$, зависящей от независимых во времени координат x_1, x_2, \dots, x_m . К указанным соотношениям относятся, в частности, дифференциальные уравнения и граничные условия. Координаты y_i являются не только функциями времени, но и других координат x_1, x_2, \dots, x_m , не зависящих от времени. Силы внешних сопротивлений пока учитывать не будем.

Рассмотрим одно из таких соотношений, в которое входит сила упругости и силы внутреннего сопротивления. Силы упругости будут выражаться некоторым линейным дифференциально-алгебраическим оператором $L_y(K_1 \bar{y}_1, K_2 \bar{y}_2, \dots, K_n \bar{y}_n)$, где K_k — коэффициент жесткости, соответствующий y_k . Тогда силы внутреннего сопротивления определяются аналогичным оператором $L_y(\nu_1 K_1 \frac{\partial y_1}{\partial t}, \nu_2 K_2 \frac{\partial y_2}{\partial t}, \dots, \nu_n K_n \frac{\partial y_n}{\partial t})$, если через ν_k обозначим коэффициенты сопротивления.

Представив обобщенную силу в комплексной форме $P(x_1, x_2, \dots, x_m) e^{i\omega t}$, необходимо разыскать колебания системы в виде $\bar{y}_k = A_k e^{i\omega t}$. При этом сумма сил упругости и сил сопротивления выразится операторами

$$\begin{aligned} &L_y(K_1 \bar{A}_1 e^{i\omega t}, K_2 \bar{A}_2 e^{i\omega t}, \dots, K_n \bar{A}_n e^{i\omega t}) + \\ &+ L_y(i\nu_1 K_1 \bar{A}_1 e^{i\omega t}, i\nu_2 K_2 \bar{A}_2 e^{i\omega t}, \dots, i\nu_n K_n \bar{A}_n e^{i\omega t}) = \\ &= L_y(K_1 \bar{A}_1, K_2 \bar{A}_2, \dots, K_n \bar{A}_n), \end{aligned}$$

где $\bar{K}_k = K_k(1 + i\nu_k \omega)$.

Следовательно, в итоге рассматриваемое соотношение примет такую же аналитическую форму, какую оно имело бы при отсутствии внутренних сопротивлений.

Учет внешних сопротивлений, приложенных к распределенным массам $m_{0,j}$ и сосредоточенным массам m , системы, производится аналогичным образом.

Пусть в любое соотношение, определяющее движение системы, входит линейный оператор, который выражает силы инерции

$$L_n \left(m_{0,1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}, i_{0,1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, m_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}, I_{0,1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \dots, m_{0,n} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial t^2}, i_{0,n} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2}, m_n \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial t^2}, I_{0,n} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} \right).$$

Здесь $i_{0,j}$ и $i_{0,j}$ — моменты масс $m_{0,j}$ и m_j , $i_{0,j}$ и $i_{0,j}$ — моменты инерции этих масс, χ_j и ψ_j — углы поворота масс.

Тогда силы внешних сопротивлений равны

$$L_n \left(\sqrt[10]{\frac{\partial \chi_1}{\partial t}}, \sqrt[10]{\frac{\partial \psi_1}{\partial t}}, \sqrt[10]{\frac{\partial \chi_1}{\partial t}}, \sqrt[10]{\frac{\partial \psi_1}{\partial t}}, \dots \right),$$

где $\sqrt[10]{}$ — коэффициент внешних сопротивлений.

При установившемся колебании сумма сил инерции и сил внешних сопротивлений равна нулю.

$$L_n \left(m_{0,1} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}, i_{0,1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, m_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}, I_{0,1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \dots \right) +$$

где

$$\bar{m}_{0,j} = m_{0,j} \left(1 - i \frac{\gamma_0}{\omega \sigma_{0,j}} \right), \quad \bar{m}_j = m_j \left(1 - i \frac{\gamma_j}{\omega \sigma_j} \right);$$

$$\bar{I}_{0,j} = i_{0,j} \left(1 - i \frac{\gamma_0}{\omega} \right), \quad \bar{I}_{0,j} = I_{0,j} \left(1 - i \frac{\gamma_j}{\omega \sigma_j} \right).$$

Иными словами, рассматриваемое соотношение имеет ту же форму, что и при отсутствии сопротивлений.

Для выполнения второго этапа расчета, т. е. для разделения вещественной и мнимой частей результатов, нужно использовать формулы (1.9), (1.10), а также другие элементарные зависимости типа

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc);$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + i \frac{cb + ad}{c^2 + d^2};$$

$$[A_1 (\cos \psi_1 + i \sin \psi_1)] [A_2 (\cos \psi_2 + i \sin \psi_2)] =$$

$$= A_1 A_2 (\cos (\psi_1 + \psi_2) + i \sin (\psi_1 + \psi_2));$$

$$[A_1 (\cos \psi_1 + i \sin \psi_1)] : [A_2 (\cos \psi_2 + i \sin \psi_2)] =$$

$$= \frac{A_1}{A_2} [\cos (\psi_1 - \psi_2) + i \sin (\psi_1 - \psi_2)];$$

$$\sin i\psi = i \sin \psi; \quad \cos i\psi = \cosh \psi; \quad \sinh i\psi = i \sin \psi; \quad \cosh i\psi = \cos \psi.$$

7. Заметим, что первый этап расчета, т. е. построение решений без учета сопротивлений, можно выполнить, не заменяя тригонометрические функции показательными функциями от e .

Действительно, при отсутствии сопротивлений отсутствуют и сдвиги фаз между силами и перемещениями. Поэтому, выражая $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \cos \omega t$ через $P(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i\omega t}$, мы можем искать все y_k в виде $y_k = A_k (x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i\omega t}$, где A — вещественное число или вещественная функция.

Вещественная часть y_k равна $y_k = A_k \cos \omega t$.

Такой же результат мы получили бы, не заменяя выражениями вещественной силы комплексной функцией и рассматривая y_k непосредственно во зависимости $y_k = A_k (x_1, x_2, \dots, x_n) \cos \omega t$. Следовательно, если имеется решение задачи без учета сопротивлений, найденное в вещественной форме $y_k = A_k \cos \omega t$, то достаточно учесть, что в комплексной форме оно имело бы вид $y_k = A_k e^{i\omega t}$, затем подставить в A_k комплексные жесткости и, сделав его тем комплексным, разделив вещественную и мнимую части.

8. Математическая точность гипотез Фолта и Сорокина при гармонических колебательных процессах позволяет использовать в обоих случаях один и те же решения. В частности, при учете сопротивлений по гипотезе Сорокина также целесообразно использовать комплексную форму зависимостей, т. е. жесткости считаемыми равными $\bar{K}_k = K_k (1 + i \gamma_{0,k})$, где K_k — вещественная жесткость конструкции, $\gamma_{0,k}$ — коэффициент сопротивления, отвечающий этой жесткости. Перед $\gamma_{0,k}$ нечет множитель «два» упомянутой выше связи между коэффициентами в обоих гипотезах « $\gamma = 2 \gamma_0$ ».

Если в системе имеются сопротивления, часть из которых подчиняется гипотезе Фолта, а часть — гипотезе Сорокина, то

$$\bar{K}_k = K_k (1 + i \gamma_{0,k} + i \gamma_k). \quad (1.15)$$

9. Когда сопротивления отвечают гипотезе Сорокина, то вместо комплексных жесткостей и вообще комплексных жесткостей позволяет учитывать потери энергии в случае любых законов изменения деформаций любыми дискретными и неустановившимися режимами, свободными колебаниями. Это непосредственно вытекает из возможности разложения произвольной функции в ряд или интеграл Фурье.

Действительно, пусть, например,

$$z(t) = \sum_{k=1}^n e_{0,k} \sin(\omega_k t + \theta_k).$$

Тогда, используя (1.6), имеем

$$\begin{aligned} z(t) &= E z(t) + E z_0 \sum_{k=1}^n e_{0,k} \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c_{0,k}^2}} = \\ &= E \sum_{k=1}^n e_{0,k} \sin(\omega_k t + \theta_k) + E v_k \sum_{k=1}^n e_{0,k} \cos(\omega_k t - \theta_k) = \\ &= E \sum_{k=1}^n e_{0,k} \sin(\omega_k t + \theta_k) + E v_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k} \frac{\partial [e_{0,k} \sin(\omega_k t - \theta_k)]}{\partial t}. \end{aligned}$$

Перейдем к комплексной форме записи и заменим $z(t)$ рядом

$$z(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{e}_{0,k} e^{i\omega_k t}.$$

Отсюда

$$\tilde{z} = (1 + i v_k) E \sum_{k=1}^n \tilde{e}_{0,k} e^{i\omega_k t} = (1 - i v_k) E \tilde{z},$$

что и доказывает наше утверждение.

Применение комплексной формы уравнений для расчета произвольного динамического режима делает возможным представление в комплексной форме и возмущающей силы. С этой целью следует разложить $P(t)$ в ряд Фурье (периодическая нагрузка)

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,0} \sin(\omega_k t + \theta_k)$$

или интеграл Фурье (непериодическая нагрузка)

$$P(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta) \cos \omega(t + \zeta) d\zeta,$$

а затем заменить их комплексными формами

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,0} e^{i(\omega_k t + \theta_k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_{k,0} e^{i\omega_k t}$$

или

$$\tilde{P}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} P(\zeta) e^{i\omega(t + \zeta)} d\zeta.$$

Допустимо и непосредственно использовать решения, полученные без учета сопротивлений, с последующей подстановкой в них комплексных жесткостей, как это делается выше для периодических режимов.

При сопротивлениях по гипотезе Фохта рассмотрение произвольных режимов сложное, так как каждая гармоника деформации имеет здесь свою мнимую часть модуля $i\omega_k$. Указанное затруднение, впрочем, преодолимое, но подробностей этого мы здесь излагать не будем, поскольку в исследуемых ниже сложных задачах теория оболочек вообще редко удается довести до конца чисто аналитическое решение нестандартных случаев.

10. Комплексная форма зависимостей теории колебаний позволяет легко обобщить квазистатическое аналогия, изложенные в § 1. При изучении стационарных режимов неконсервативных систем с дampedными сопротивлениями по гипотезам Фохта или Сорокина сама аналогия всегда остается без изменений, но жесткости конструкции оказываются комплексными как за счет комплексных модулей упругости, так и за счет комплексных масс, которые появляются, когда есть viscous сопротивления.

§ 3. О МОДЕЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

1. «Существует уже много трактатов по механике, но план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения необходимые для решения задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постараюсь этого достичь, не оставит желать ничего лучшего... Все любящее анализ и удовлетвление убеждает в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будет мне благодарна за то, что этим путем я расширил область его применения». Такими ясными словами изложил в 1788 г. свое научное credo Жозеф Луи Лагранж [14, стр. 9].

Если сравнить эти слова с высказыванием Ричарда Беллмана, приведенным на стр. 3—4 настоящей книги, то станет понятным различие между модельными и аналитическими подходами к решению всего многообразия физических задач.

Оба подхода имеют своих ярых представителей и с большим успехом применяются, в частности, во всех разделах строительной механики. Аналитические методы и преобразования были сильной стороной творчества П. Ф. Папковича; физические обоснования и анализы — сильнейшими трудами Ю. А. Шиманского.

Как понимать с позиций указанных подходов содержание предыдущих параграфов? Не проталкиваем ли мы внутренне? Случайно ли, что незадолго до своей смерти Ю. А. Шиманский в беседах с одним из авторов книги горячо поддерживал развитие

квазистатических аналогий, но довольно критически относятся к широким комплексным преобразованиям, считая использование комплексных масс и жесткостей нелепым, во чисто аналитическим приемом, который не следует смешивать с физикой? Нужно ли пытаться истолковать физические комплексные параметры системы, если в трудах П. Ф. Патковича, авторского разработать теорию комплексных параметров, все исследования имеют чисто абстрактную форму?

Все это требует специального обсуждения, тем более, что проблема взаимосвязи модельных представлений с аналитическими методами важна не только для понимания данной книги, но и для всей строительной механики вообще.

2. Что же такое модель явления?

Напомним хотя бы кинетическую теорию газов. Где изолированные атомы и молекулы представляются в виде малых упругих шариков, сталкивающихся друг с другом шаром. Указанная модель очень наглядна, и ее целесообразность в данном кругу вопроса не вызывает сомнений, хотя мы хорошо знаем, что атом — далеко не шар. Согласно более точной планетарной модели он представляет собой скорую маленькую солнечную систему (ядро и вращающиеся около него электроны), причем размеры всех частей очень малые по сравнению с диаметрами крайних электронных орбит и, следовательно, почти весь объем атома — пустое пространство. Однако и такая аналогия еще очень далека от реальности. Известно, что в ряде случаев электрон ведет себя не как частица, а как волна.

Характерно, что непрерывное усложнение новых моделей по мере углубления в свойства материи вовсе не означает, что все предыдущие просто отвергаются, как несоответствующие. Нет, они остаются в силе при рассмотрении соответствующего круга вопросов.

Всякая модель какого-либо объекта является, как правило, упрощенной инструментальной, которая, однако, достаточно верно отражает его поведение в данном изучаемом явлении. Конструктивные элементы модели служат всего, наглядные, удобные и привычные для общего исследования, использующему модель. Если модель сложнее объекта, то она совершенно бесполезна, а если она состоит из ненаглядных или непривычных для исследователя частей, то ее нельзя использовать.

Упругое тело с бесконечным числом степеней свободы, совершающее какое-либо из своих главных свободных колебаний, вовсе не идентично массе m , подвешенной на пружине жесткости K (гармонический осциллятор); однако в строительной механике с успехом используется модель метода приведения [41, 42], где применяется такая аналогия, причем приведенная масса вычисляется из равенства кинетических, а приведенная жесткость из равенства потенциальных энергий объекта и модели. Предельная наглядность схемы существенно облегчает многие качественные выводы, связанные со свободными колебаниями и методом главных координат.

Аналогия, лежащая в основе метода приведения, наглядна для механиков и инженерно-корпусастроителей, привыкших обращаться с массами и жесткостями. Электрик отвергнет ее, как мало наглядную, и заменит подходящий электротехнический аналогом: массы и жесткости будут заменены электрическими величинами так, чтобы колебания в электрической системе соредались теми же зависимостями, что и главные свободные колебания упругого тела.

3. В математике существует понятие изоморфизма двух множеств X и Y , состоящих из элементов x и y с заданными операциями f и F над ними.

Эти множества называются изоморфными при выполнении следующих условий:

1) каждый элемент x может быть взаимно однозначно сопоставлен с элементом y и наоборот;

2) каждой операции f , преобразующей элемент x_1 в x_2 , может быть взаимно однозначно сопоставлена операция F , преобразующая элемент y_1 в y_2 , и наоборот;

3) если x_2 соответствует y_1 и x_3 соответствует y_2 , если $f(x_1) = x_2$ и $F(y_1) = y_2$, то для всех x, y, f имеем $F(f(x)) = f(y)$.

Вспомним и в качестве примера геометрические объекты — точки, линии, поверхности тела. Их можно переименовывать, вычислять, сопоставлять и т. д., т. е. производить с ними разные операции.

Теперь сопоставим каждую точку с ее координатами, т. е. с тройками чисел x, y, z . Из аналитической геометрии известно, что любой геометрический объект и любая операция над ним имеют соответствующие объекты в виде троек чисел и операций над ними, а также и наоборот. Условие 3 тоже выполняется, т. е. допустимо говорить об изоморфизме.

Изоморфизм двух математических объектов означает их точное моделирование: здесь выгода заключается только в большем удобстве или большей наглядности модели.

Физические объекты всегда изоморфны лишь в некоторых отношениях.

Упрощенное моделирование связано с понятием гомоморфизма. Пусть множество Y «беднее» X . Иными словами, каждому y однозначно сопоставляется x , но не каждый x имеет аналог в виде соответствующего y . Пусть далее количество функций F меньше количества f . Тогда Y — гомоморфный образ X (между ними имеется гомоморфное соотношение).

Согласно этим определениям изоморфизм есть частный случай гомоморфизма; конечно, строго математические определения вполне и лучше привлекать.

Всякая верная теория гомоморфна практике и материальному миру. Дифференциальное уравнение физического процесса гомоморфно самому процессу и специфическим образом моделирует его. Карта — гомоморфный образ местности. Совокупность сигналов

в кибернетической системе является гомоморфным образом реального события.

4. Очень важно отметить неоднозначность моделирования и разную степень физической целесообразности или возможных вариантов. Это великодушно сделал крупный физик Л. И. Мандельштам в дискуссии о смысле спектрального разложения света и других физических объектов.

Пусть из листа железа нужно штамповать кружки определенного диаметра. Тогда целесообразно представить его в виде тесно расположенных прилегающих друг к другу кружков и некоего остатка, что позволяет определить число возможных изделий и т. п.

Если лист пойдет на изготовление прямоугольных полосок, то такое представление останется верным, но будет явно нецелесообразным, т. е. не соответствующим физической сущности данной задачи. Гораздо целесообразнее окажется представлять его в виде многих прилегающих полос.

На самом деле лист есть лист, а вовсе не сумма кружков или полос. Но при решении определенной физической задачи его полезно рассматривать в виде того или другого. Однако, конечно, не нарушить физических условий, т. е. не исказить моделирование существующих в данном случае сторон реального объекта.

Опыт Ньютона с разложением белого солнечного света на составляющие с помощью призмы вовсе не доказывает, что он действительно генерируется из них. Нет, призма есть просто физический прибор, выделяющий определенные почти синусоидальные волны, как штампы может выдать из листа кружки и остатки, а гальванические ножницы могут выдать полосы. Чтобы ответить на вопрос о том, как образуется солнечный свет, необходимо широкое исследование того, что происходит в расскаленном веществе.

Для исследования колебаний линейной системы с одной степенью свободы под действием произвольной возмущающей силы в моделирование поступают обычно двумя образом: либо раскладывают силу на гармонические составляющие и определяют действие каждой из них в отдельности, либо представляют ее в виде суммы импульсов и приходят к интегралу Дирака. Оба приема вполне правомерны, но сила есть сила, а вовсе не указанные составляющие, хотя и может быть разложена на них.

5. Из неоднозначности и определенной свободы моделирования, конечно, не следует, что модели не зависят от материального мира и являются произвольными вымышлениями человеческого ума. Например, каким образом теснейшим образом связаны с реальными свойствами моделируемого объекта. Мы можем кроить лист и из кружков и из полосы, но количество и максимальные результаты тех и других прямо определяются фактическими размерами и формой листа.

В указанном выше опыте Ньютона открыто бесспорно объективное содержание. Во-первых, установлен синусоидальный характер элементарных колебаний как называемых чистых звуков. Во-вторых, показано, что белый свет сам по себе несинусоидален, но может быть разложен на синусоидальные колебания. Наконец, именно на основе развития этого опыта были в конце концов созданы методы спектрального анализа, которые дают возможность судить о химическом строении даже небесных тел.

Если бы модели не отражали свойств материальных объектов и не определялись ими, то некое моделирование было бы практически бесполезным и не могло бы использоваться для практических целей.

6. Как уже говорилось, модель упрощает явление или объект, выделяет и тем самым подчеркивает какие-то ее стороны. Скажем, моделирование галактик и вообще не абсолютно твердых тел Солнечной системы в виде материальных точек дает очень наглядную картину, доступную для применения современного математического анализа при ее изучении.

Кстати о картинах. Картина художника есть не что иное, как модель некоторого объекта, и к ней применимы все законы моделирования. Прежде всего, она должна быть в известном смысле проще объекта, т. е. не скатываться к мелочному натурализму и фотографичности. Во-вторых, в ней должны быть подчеркнуты, сделаны более понятными какие-то черты этого объекта. Многообразие окружающего нас мира определяет и многообразие художественных школ, разланных «взглядов» художников.

Как же подойти к цветной фотографии и как же подойти один на другой пейзажи Левитана и Моне, хотя все они состоят из одинаковых элементов — изображение кустов, пруда, участка неба и т. п. Фотография вообще ничего не подчеркивает, а очень точно копирует данный пейзаж. Левитан, как правило, только оттеняет и подчеркивает лирическую сторону пейзажа, навеваемое им настроение. Моне подчеркивает первое впечатление от пейзажа, передает богатой игрой света.

Ван-Гог — мастер выразительности, экспрессии. Он достигает этого, в частности, за счет сознательного игнорирования второстепенных деталей и утрирования — основных.

Бермеев Дельфийский, из первых взглядов, не вносит упрощений; он тщательно выписывает обстановку комнаты, материю одежды, юбки. Но как откровенна и подчеркнута у него игра света, гамма «замкнутых звуков! Как передано спокойное радостное настроение! А упрощенность, конечно, тоже есть — у его персонажей явно упрощены анатомические пропорции, отсутствует драпировка.

Оскар Уайльд написал в свое время статью «Упадок дж. Наблюден, где доказывал, что природу мы видим глазами художников: Позавчера глазами голландцев, вчера — импрессионистов, сегодня —

Вая-Гога и т. д. Здесь тоже имеется преувеличение, но главное — выделено верно. Каждый действительно крупный художник всегда открывает нам новые стороны жизни и действительности, заставляет по-новому смотреть на мир. И это достигается, обычно почти случайно, упрощением и подчёркиванием.

Отсюда становится ясной принципиальная ошибочность некоторых критических высказываний о произведениях искусства и о научных теориях. Критик довольно часто пишет примерно так: «В картинах импрессионистов исключительно раскрыто шаткое многообразие окружающего нас мира, но, к сожалению, нет глубины духовных образов, в которых обречён духовный мир людей». Накающего сожаления здесь быть не должно: польза одновременно раскрыть и обогатить всё. Импрессионисты поставили перед собой задачу раскрыть шаткое многообразие — и раскрыли его. А логичнее всего нужно искать у таких художников, как Рембрандт ван Рейн или поздний Фрагас Гальс с его «Ресентами» и «Ресентами», причём достигается она опять-таки за счёт потери чего-то (в частности, у Рембрандта и позднего Гальса — за счёт бесспорной обаятельности колорита).

Аналогичное происходит и в науке: «Суха, мой друг, теория вещей, а древняя жизнь плавно движется» — писал Гегель вслед за ним любил повторять основатель строительной механики корабля И. Г. Бубнов. Чехов выражался проще: «Если вам подуют кофе, то не старайтесь искать в нём плава».

Научная теория, произведение искусства, любая модель являются или объектами дальнейшего познания по принципам: что новое они дают, а не на основе спуска: что они не дают (последний всегда можно продолжать до бесконечности).

7. Отметим, что моделированием называется процесс и введение новых научных понятий. В частности, ожидаемые для нас понятия массы и силы — прекрасные примеры очень глубокого и тонкого моделирования некоторых явлений и объектов материального мира. Оно сопровождалось большими трудностями, как это хорошо видно из истории механики. В древности и средние века вместо сил говорили о некоем «внутреннем движении», т. е. способности передавать движение, а еще до времени Ньютона многие ученые резко разграничивали «силы — движения из неподвижных предметов» и «силы — причины движения тел».

Подчеркнем, что научные понятия — не однозначны. Так, Кирхгоф и Герц с успехом строили варианты механики, обладавшие без понятия массы и силы. В современной линейной алгебре имеются теории, основанные на понятиях матрицы, линейные пространства, алгебраические формы. Безумием было бы считать, что большинство задач линейной алгебры допускает равносильную формулировку в каждой из них.

Ясно, однако, что неоднозначность вовсе не равносильна произвольности, так как любые понятия определяются, в конечном счёте,

объективными законами природы. Иначе теории преобразуются в «игру ума». Другое дело, что одни и те же объективные закономерности можно описать и ообразить с помощью различных систем понятий.

8. Создание любых моделей — сугубо творческий и извлекший для науки процесс. Крупнейший физик Луа де Бройль писал: «Математический язык является чисто дедуктивным, он позволяет строго выводить следствия из посылок. Эта строгость, являющаяся его силой, является также его слабостью, поскольку она замыкает его в круг, за пределы которого он не может выйти. Математическое рассуждение должно установить следствия, которые уже содержатся в посылках, не будучи еще очевидными; следовательно, оно не может дать в своих выводах ничего больше того, что содержится в самом из исходных гипотезах. . . . Итак, не чистые дедукции, а смелые индукции и оригинальные представления являются источниками настоящего прогресса науки» (Луа де Бройль, По тропам науки, ИЛ, М., 1962, стр. 326).

Иными словами, только модельные представления дают то, что затем «перематывается математикой», как любил говорить А. Н. Кrywlov.

Конечно, создание математическими методами аппарата аналитической механики из системы аксиом Ньютона — великий научный подвиг, но никакая математика или формальная логика в принципе не могли привести к механике теории относительности или квантовой механике. И теория относительности, и квантовая механика, как и аксиомы Ньютона, возникли из тонкого физического анализа новых экспериментальных фактов, находившихся в явном противоречии с прежними классическими теориями.

На более близком и понятном уровне строительной механики моделированием является, например, вывод тех или иных уравнений с учетом каких-либо дополнительных условий. Здесь математика ничем не может помочь. А вот решение составленного в наиболее удобном виде уравнения — дело скорее математики, чем механики.

Впрочем, как мы увидим в дальнейшем, физический анализ иногда сильно помогает и на этой стадии исследования.

9. Интересно, что и в самой математике, как раз в тех разделах, где доказывается строгость и непротиворечивость ее различных теорий, моделирование играет часто определяющую роль.

Возьмем хотя бы нехитрую геометрию Лобачевского. Сам Лобачевский выискал свою систему аксиом и начал доказывать на ее основе всевозможные теоремы, иногда же встречая противоречия. Но как получить гарантию, что противоречий никогда не будет?

Она появилась лишь после работ Больцмана и Клейна, которые дали для варианта изоморфных моделей геометрии Лобачевского и образов обычной геометрии Евклида. Таким образом, была доказана равная непротиворечивость обеих теорий — всякое

противоречие в одной из геометрий означает некоторое противоречие в другой и наоборот.

10. Наконец, что особенно удивительно, самые абстрактные формулы и математические теории часто непосредственно используются как прямые математические модели особо сложных и запутанных в своем виде физических объектов.

Развитие математики XIX в. привело к выделению таких непрерывных функций, которые ни в одной своей точке не имеют производных. Ранее они были в науке на положении ласынов и рассматривались как патологические, выдуманные математиками от чрезмерной абстрактности и не имеющие никакого отношения к реальному физическому миру. Но в руках Вилера как раз их патологические свойства оказались полезными для моделирования перемещения частицы в броуновском движении — ведь траектории последних под действием ударов молекул оказываются настолько хаотичными, что ни в одной точке нельзя указать, какое же они имеют направление.

В современной теоретической физике место механической модели все больше занимают математические выражения и уравнения. В частности, метод математического моделирования использовал Дирак, заложивший с его именем основы релятивистской квантовой механики (учитывающей соотношения теории относительности).

В чем здесь дело? Не является ли это опровержением высказанного тезиса, что математика сама по себе не дает чего-либо нового, т. е. не заложенного в исходных предположениях?

Нет, не является!

Строил свою математическую модель, Дирак действовал как физик, который широко использует математический аппарат, а вовсе не как абстрактный математик.

Ход рассуждений здесь примерно таков. На основе анализа многих опытных данных и обобщения модельных представлений Бора и де Бройля было выведено известное уравнение Шредингера, которое довольно хорошо соответствует действительности. В обычной (нерелятивистской) квантовой механике его рассматривают как исходный постулат, подобный уравнению $mv(t) = P(t)$ в механике Ньютона (m и P — векторы). Как обобщить квантовую механику на релятивистский случай больших скоростей? Очевидно, там тоже есть какое-то исходное уравнение, являющееся постулатом для всей обобщенной квантовой теории, причем в пределе оно должно перейти в уравнение Шредингера, как уравнения теории относительности переходят в уравнения обычной механики. Непосредственных опытов по установлению обобщенного уравнения квантовой механики пока нет. Нельзя ли заняться чисто математически конструированием или экстраполяцией? Затем надо решить обобщенное уравнение и выводить из него следствия, а потом проверять их рядом опытов. Если опыты дадут подтверждения многим контрольным следствиям, то, значит, сконструированное уравнение

действительно отражает физическую реальность и с его помощью можно производить расчеты других явлений, еще не установленных или не проверенных опытным путем.

Так и было сделано, причем контрольные следствия, к счастью, подтвердились.

11. Почему математические модели оказываются иногда пригоднее наглядных?

Вернемся к непрерывным кривым без производных. Они вполне реальны, имеют определенные аналитические выражения и потому могут быть изображены непрерывной совокупностью точек. Но intuition не позволяет нам наглядно представить их виду того, что интуитивный образ линии есть не абстрактная линия без ширины, а некоторая узкая полоска. Какой бы она ни была узкой, но ее вполне конечная, интуитивно воспринимаемая ширина полагается нулевыми для сохранения точности строения. Ведь наша интуиция развилась в течение многих тысяч лет из повседневного человеческого опыта, где встречаются лишь сравнительно большие объекты, движущиеся по гладким кривым. Движений типа броуновского там мы не встречаем.

Наглядные модели строятся из наглядных элементов. Но углубляясь в физику, мы все больше и больше встречаем в странном мире, как удачно выразился один наш писатель. Нам все труднее и труднее применять к нему обычные представления.

Многим кажется совершенно противоречивым различие в корпускулярных свойствах электронов. Они спрingsают, как может электрон быть и частицей и волной? Почему он не имеет определенной траектории? Ответ неясен: электрон — не частица, не волна, а гораздо более сложный объект, который непосредственно мы не можем представить, поскольку электроны лежат далеко за пределами непосредственно воспринимаемого мира. Они просто, но всегда совершенно моделируются с помощью легкой комбинации представлений о частице и волне.

Как видно хотя бы на простом примере евклидовой и аналитической геометрии, математические модели столь же применимы и реальны, как и обычные. Математические символы вполне реальны и непосредственно отражают типичные свойства материального мира, могут физически о нем.

Особенностью любой математической структуры является чрезвычайно большая степень абстрагирования от многих несущественных в данном вопросе свойств. Если материальная модель чисто сохраняет общую с объектом физическую природу и качественную общность, то математика отбрасывает лишь его общие количественные отличия и пространственно-временные свойства. Поэтому с помощью математики удается смоделировать самые далекие от повседневного опыта реальности.

Но это по-прежнему моделирование, требующее непрерывного

физического осмысления и проверки, а не дедуктивный математический вывод по аксиомам формальной логики.

12. Следует обратить внимание на расширение самих наглядных и привычных представлений по мере углубления в науку и окружающий мир. Явление резонанса очень наглядно для специалиста по колебаниям, но оно бывает крайне удивительным для непосвященного. Чертеж машины нагляднее для инженера, но совсем не нагляднее для человека, далекого от техники.

В 1709 г. Лейбниц писал в одном из своих писем: «Минутные числа являются уточненным и чудесным приближением божественного духа, почти что амфибии между бытием и небытием». Осмыслению их слова помогло моделирование. Вестель, а вслед за ним и другие ученые пришли к широко известной сейчас геометрической интерпретации (гомоморфизм модуля) комплексных чисел как векторов на плоскости, действия над которыми имеют понятный геометрический смысл. В результате стало ясно, что математика комплексных величин так же естественна, как и обычная.

Стали известны и причины упрощений в математических зависимостях, которые часто вносят комплексные числа. Ведь комплексное число, обозначаемое одним знаком, а главное подчиняющееся основным законам вещественных чисел, равносильно, в сущности, двум вещественным телам (координатам конца результирующего вектора).

Так, в явном случае комплексных параметров теории колебаний комплексная масса сразу определяет и инерционные свойства элемента (вещественная часть) и диссипирующие к нему внешние воздействия (мнимая часть). Аналогично комплексный модуль характеризует и силы упругости (вещественная часть) и силы сопротивления (мнимая часть). Сами комплексные параметры ничуть не менее физичны, чем обычные. Наоборот, они с известным смыслом физичнее, так как богаче, полнее, точнее отображают реальные свойства системы. Просто к ним нужно привыкнуть, как мы давно привыкли к обычным массам и модулям.

Следовательно, признаки внутренних противоречий в существовании чисто модельных представлений (§ 1) с комплексными параметрами (§ 2) нет. Значит, вполне правомерно и целесообразно физическое истолкование всех операций с комплексными параметрами.

Описанные выше квазистатические аналогии уже использовались с успехом некоторыми исследователями. Они позволяют в максимальной степени обогатить вопросы (и ответы) динамики сооружений с вопросами (и результатами) статического расчета конструкций, непосредственно увидеть глубокую связь и даже единство многих подходов в статических и динамических проблемах строительной механики, обобщить многие представления и методы.

Принципиальных различий между модельными и аналитическими подходами к решению физических задач вообще не существует. Само составление исходных, пусть даже самых абстрактных

аналитических зависимостей, как уже говорилось выше, есть процесс моделирования, использующий математику, но опирающийся не к математике. Иногда эти зависимости не поддаются дальнейшему более наглядному истолкованию и нужно сразу пускаться для их решения весь арсенал математики. Но часто наглядное истолкование имеется, причем оно дает возможность сильно упростить исследование. Тогда его необходимо нетерпеливо исполнять, не надеясь только на аналитическое мастерство. Наука слишком сложна и трудна для каждого самого малого и самого большого ученого, чтобы не превратить всех научных средств.

Возможности, которые открываются в строительной механике при физическом анализе и наглядном истолковании всех операций, мы постараемся еще не раз показать в дальнейшем.

§ 4. ОБЩЕННЫЕ И «ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБЩЕННЫЕ» КООРДИНАТЫ. НЕТРИВИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ

1. При рассмотрении сложных вопросов динамики упругих систем и, в частности, задач о колебаниях обобщенных конструкций необходимо уточнить обычные представления, связанные с понятием главных координат и истинных главных координат. Сделанные выше замечания помогут правильному использованию решений о собственных частотах и формах оболочек и дадут возможность набрать некоторых довольно распространенных изречений.

Строгое определение обобщенных координат, принятое в аналитической механике, таково: обобщенными координатами механической системы называют произвольные координатные скалярные параметры, которые в своей совокупности однозначно определяют любое положение этой системы, допускаемое хотя бы в какой-то момент времени взаимодействием со системой связями [42].

Число степеней свободы механической системы называется числом независимых скалярных параметров, однозначно определяющих ее любое возможное или любое виртуальное перемещение.

У голономных систем (а в строительной механике рассматриваются почти исключительно голономные системы) число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат.

Кроме этих обычных формулировок, а динамику сооружений целесообразно ввести еще два дополнительных понятия. Назовем динамическими обобщенными координатами системы любые независимые скалярные параметры, которые в своей совокупности однозначно определяют возможные положения тела, масса которого принимается за единицу. Число динамических обобщенных координат будем называть числом динамических степеней свободы системы (предполагается, что система голономна).

¹ Читатели, не интересующиеся динамикой, могут этот параграф без ущерба для понимания последующего пропустить.

Например, конструкции, показанные на рис. 1, а и ж, имеют бесконечное число степеней свободы, но только две динамические степени свободы. Динамическими обобщенными координатами являются: для системы рис. 1, а — вертикальные перемещения масс m_1 и m_2 ; для системы рис. 1, ж — вертикальное перемещение и угол поворота сосредоточенной массы.

В широко распространенных курсах [26, 36, 44] число динамических степеней свободы обычно связывают с общим их числом.

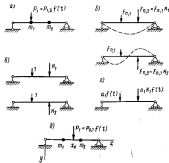


Рис. 7.

Согласно традиции, и система рис. 1, а и система рис. 1, ж называют просто системами с двумя степенями свободы. Дело здесь в том, что при решении динамических задач мы в легком виде пользуемся своим умением точно выполнять статические расчеты конструкций и как бы исключаем бесконечно много координат. На долю динамики действительно остаются только две координаты, но остальные (статические) степени свободы нигде, конечно, не исчезают.

Сказанное хорошо иллюстрируется хотя бы уравнениями (1.2, а), куда входят коэффициенты податливости A_{ij} , определяемые из расчета балки как упругого тела.

2. Предлагаемые формулировки с четким выделением динамических степеней свободы могут показаться просто ненужным пурризом. Однако это не так, поскольку обычная терминология динамики сооружений отражает неясность физических представ-

лений, что приводит иногда к недоразумениям и даже ошибкам. Последние особенно часты при использовании метода главных координат.

Чтобы не быть голословным, проанализируем внимательно физическую сущность указанного метода на только что рассмотренном примере системы рис. 1, а. Этот, казалось бы, элементарный и не стоящий внимания анализ приведет нас в конце концов к довольно интересным выводам и следствиям.

Пусть к массе m_1 приложена сила $P_1(t) = P_0 f(t)$ (рис. 7, а). Как известно, существуют главные свободные колебания системы, формы которых определяются числами λ_1 и λ_2 , равными по абсолютному отношению прогибов ϕ_1 и ϕ_2 в точках закрепления масс. Найги по форме главных свободных колебаний происходит под действием сил инерции F_{11} и F_{21} , между которыми существует постоянное соотношение $F_{11} = F_{21}K_1$ или $F_{21} = F_{11}K_2$ (рис. 7, б). Деформации по каждой из форм происходят совершенно независимо друг от друга.

Представим себе, что можно разложить заданную внешнюю нагрузку по формам сил инерции главных свободных колебаний.

В рассматриваемом конкретном случае нужно представить P_0 как сумму

$$P_0 = a_1(1, K_2) + a_2(1, K_1), \quad (1.20)$$

где a_1 и a_2 — неизвестные пока коэффициенты разложения; $(1, K_1)$, $(1, K_2)$ — группы сил, показанные на рис. 7, в.

Для a_1 и a_2 имеем уравнения

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= P_0 \\ a_1 K_1 + a_2 K_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

откуда

$$a_1 = \frac{K_2 P_0}{K_2 - K_1}; \quad a_2 = -\frac{K_1 P_0}{K_2 - K_1} \quad (1.22)$$

Легко видеть, что под действием группы сил $a_1(1, K_2)$ (рис. 7, в) система все время будет двигаться по форме первого главного свободного колебания.

В самом деле, пусть это так. Тогда отношение сил инерции будет равно K_2 ; внешние силы согласно принятому разложению относятся как K_2 ; следовательно, суммарные силы, действующие на балку, тоже относятся как K_2 . Таким образом, балка действительно движется по первой форме свободных колебаний.

Приведенное рассуждение может показаться коротким кругом, но оно вполне строго и по логической структуре напоминает типичный прием решения дифференциальных уравнений: мы полагаем решение в определенном виде, затем подставляем его в дифференциальное уравнение и убеждаемся, что последнее выполняется.

Аналогично легко доказать, что группа сил a_4 (1, K_4) вызывает движение по форме второго тона. Но любая система, движущаясь по определенной заранее известной форме, может рассматриваться как имеющая одну степень свободы. Иными словами, мы представляли движение системы с двумя динамическими степенями свободы как сумму движений двух систем, имеющих одну степень свободы каждая.

Расчет вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы производится по общим правилам: выбирает обобщенную координату, составляют выражения для кинетической и потенциальной энергии системы через обобщенную координату, составляют уравнение Лагранжа второго рода и решают его.

В случае движения нашей балки по первому тону кинетическая энергия T будет

$$T = \frac{\pi_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{\pi_2 \dot{x}_2^2}{2} = \frac{\pi_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{\pi_2 \dot{x}_2^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}$$

$$a = \left(\pi_1 + \frac{\pi_2}{\kappa_1^2} \right), \quad \kappa_1 = \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

(за обобщенную координату принято перемещение u_1).

Потенциальная энергия может быть выражена через некоторые статические силы $Q_1^{(1)}$ и $Q_2^{(1)}$, приложенные в точках закрепления масс m_1 и m_2 и вызывающие прогиб по первой форме,

$$U = \frac{1}{2} u_1 Q_1^{(1)} + \frac{1}{2} u_2 Q_2^{(1)} = \frac{1}{2} u_1 Q_1^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\pi_2}{\pi_1} \kappa_1 Q_1^{(1)}$$

С другой стороны,

$$u_2 = Q_1^{(1)} A_{12} + \kappa_1 Q_1^{(1)} A_{13} = Q_1^{(1)} (A_{12} + \kappa_1 A_{13})$$

или

$$Q_1^{(1)} = \frac{\pi_1}{A_{12} + \kappa_1 A_{13}} = \pi_1 \delta_1$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{2} \kappa_1 \delta_1^2, \quad \kappa = \delta_1 + \frac{\kappa_1 \delta_1}{\alpha_1}$$

Обобщенная сила, соответствующая первой форме,

$$Q_1 = \pi_1 : \frac{\alpha_1 \kappa_1}{\alpha_1} = \left[\frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} : \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\alpha_1 (\kappa_2 - \kappa_1)} \right] P_1(t)$$

Замечая, что

$$\kappa_1 = \frac{\pi_2}{\alpha_1 \pi_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\pi_2}{\alpha_2 \pi_2}$$

и раскрыв значения π_1 и π_2 , получим

$$Q_1 = P_1(t).$$

Таким образом, уравнение Лагранжа

$$\ddot{\omega}_1 + \kappa \omega_1 = P_1(t). \quad (1.23)$$

Прделав аналогичные преобразования для движения по второй форме, получим

$$a = \left(\pi_1 + \frac{\pi_2}{\kappa_1^2} \right), \quad \kappa = \left(\delta_1 + \frac{\kappa_1 \delta_1}{\alpha_1} \right),$$

$$\delta_2 = \frac{1}{A_{11} + \kappa_2 A_{12}}, \quad Q_2 = P_2(t).$$

Подчеркнем, что при использовании метода главных координат нам также установить силу возможность разложения нагрузки по формам сил инерции главных свободных колебаний.

Однако фактически в таких расчетах, какие мы только что проводили, нет необходимости: составляя уравнение Лагранжа для движения по любой форме главного свободного колебания, можно прямо находить обобщенную силу от всей внешней нагрузки. Именно поэтому в рассмотренном примере обобщенная сила для обеих уравнений оказалась равной $P_1(t)$.

Действительно, главные свободные колебания, определяемые силами инерции, независимы друг от друга (независимость видна из анализа исходных уравнений вместе с граничными). Но это физически возможно лишь в случае, когда силы инерции одного главного колебания (или любые пропорциональные силы) не производят работы на перемещениях, соответствующих другому главному колебанию; в противном случае указанные силы инерции давали бы дополнительную обобщенную силу, соответствующую движению по другой форме, и влияли бы на весь известное состояние ортогональности. Следовательно, при составлении работы внешней нагрузки на перемещениях, соответствующих любому главному свободному колебанию, мы автоматически исключаем работу тех же составляющих, которые соответствуют силам инерции других тонов.

Если внешняя нагрузка не раскладывается по силам инерции, то отмеченная только что формальная процедура приводит к ошибке.

Допустим (рис. 7, б), что сила $P_2(t)$ приложена в точке с координатой $x = x_p$, где нет массы. Ясно, что здесь никак нельзя представить $P_1(t)$ в виде какой-то комбинации сил, приложенных в точках закрепления m_1 и m_2 . Но с формальной стороны все будто бы все в порядке.

Составляя уравнения Лагранжа для главных свободных колебаний, мы получим зависимость тона (1.23) с теми же коэффициентами a и κ ; обобщенная сила окажется равной $Q_1 = P_2 \delta_1$ и $Q_2 =$

$= P_1 \dot{x}_p$, где \dot{x}_1 и \dot{x}_2 — отношение прогиба в точке x_p к прогибу в точке x_{m1} при первой и второй формах.

К сожалению, рассчитанное движение не совпадает с действительным. Это видно хотя бы на то, что в точке x_p временно должен быть скачок перерезывающей силы на величину P_1 , но ни в одной из форм главных свободных колебаний и, следовательно, в их сумме такого скачка нет.

Причина отмеченного явления очевидна: две динамические степени свободы просто не могут описать всего многообразия возможных движений системы, выходящей в действительности бесконечно много степеней свободы. Кстати сказать, и сама система рис. 7, а или б имеет в сущности вовсе не две, а бесконечно много форм главных свободных колебаний; частоты всех дополнительных форм равны бесконечности — их потенциальная энергия выражается только через квадраты обобщенных координат, а кинетическая энергия равна нулю. Дополнительные формы соответствуют статическим деформациям системы, не связанным с силами инерции масс m_1 и m_2 (обе массы неподвижны). Если составить полную совокупность уравнений Лагранжа с учетом дополнительных форм, то решение методом главных координат будет точным. Ясно, что дополнительные уравнения должны отличаться от основных — в них отсутствует член, пропорциональный ускорениям, т. е. все коэффициенты a равны нулю.

Для расчета системы рис. 7, б допустимо использовать следующий искусственный прием. Обозрев мысленно балку в точках x_{m1} и x_{m2} на жесткие опоры; тогда балка под действием силы $P_1(t)$ будет деформироваться статически, а на опорах возникнут реакции, закон изменения которых будет одинаков с законом изменения $P_1(t)$. Но в действительности опор нет. Следовательно, необходимо убрать опоры, приложить в точках x_{m1} и x_{m2} реакции этих опор с обратным знаком, разложить их по формам сил инерции, как это сделано в системе рис. 7, а, и найти динамический прогиб балки.

Можно поступить иначе. Пусть массы m_1 и m_2 равны нулю. Тогда сила $P_1(t) = f(t) P_m$ будет нагибать балку согласно зависимости $v = P_m f(t) \varphi(x)$. Где $\varphi(x)$ — форма статического изгиба балки под действием единичной силы, приложенной в точке x_p . Так же будет деформироваться конструкция и при заданной массе, если компенсировать силы инерции добавочными фиктивными силами в точках x_{m1} и x_{m2} . Волнами фиктивных сил будут $m_1 P_{a1} \ddot{\varphi}(x) f(t)$ и $m_2 P_{a2} \ddot{\varphi}(x_{m2}) f(t)$. Но на самом деле фиктивных сил нет. Значит, в соотношении и движении $v = P_m f(t) \varphi(x)$ следует рассмотреть движение под действием обратных фиктивных сил (со знаком минус), приложенных к массам m_1 и m_2 . Но это уже задача, вполне выполняемая методом главных координат.

Если $f(0) \neq 0$, то, зная фиктивных сил в момент $t = 0$, должны прикладываться еще мгновенные фиктивные импульсы, которые

сообщают точкам x_{m1} и x_{m2} начальные скорости $P_{a1} \dot{\varphi}(x_{m1}) f'(0)$. Разложение фиктивных импульсов по формам колебаний и определение соответствующего движения также очевидны.

Несколько сложнее случай мгновенного приложения сил конечной величины, т. е. $f(0) \neq 0$, когда массы должны мгновенно получить конечные перемещения. Его удобнее всего исследовать с привлечением аппарата обобщенных δ -функций Дирака. Однако здесь мы им заниматься не будем, поскольку это уведет нас далеко в сторону от основной темы (учтем, что прием постановки фиктивных жестких опор окажется в силе).

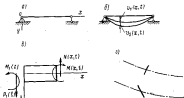


Рис. 8.

Учет статических прогибов в обоих приемах означает, что мы приняли во внимание все степени свободы конструкции, а не только динамические.

3. В виде специального поучительного примера рассмотрим свободные колебания шарнирно опертой прямоугольной балки постоянной жесткости EI и вогнутой массы m_2 с учетом сдвига (рис. 8, а).

Обозначим $v_1(x, t)$ — прогиб от изгиба, $v_2(x, t)$ — прогиб от сдвига, G — модуль сдвига, Ω — эффективная площадь поперечного сечения, N — перерезывающая сила.

Тогда, добавив силы инерции в обычные уравнения статических деформаций, получим

$$\left\{ \begin{aligned} EI \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 (v_1 - v_2)}{\partial t^2} &= 0 \\ G\Omega \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - m_2 \frac{\partial^2 (v_2 - v_1)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

Граничные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = 0: \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad v_2 = 0 \\ \text{при } x = l: \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad v_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Решение будем рассматривать как

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin (\lambda_n t + \theta_n) \\ v_2 &= v_{02} \sin \frac{\pi x}{l} \sin (\lambda_n t + \theta_n) \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

При этом граничные условия удовлетворяются автоматически и остается решить уравнения (1.24).

После подстановки (1.26) в (1.24) имеем

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\pi^4 x^4}{l^4} v_{01} - m_0 \lambda_n^2 (v_{01} + v_{02}) &= 0 \\ -GJ \frac{\pi^4 x^4}{l^4} v_{02} + m_0 \lambda_n^2 (v_{01} + v_{02}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{02}}{v_{01}} &= \frac{EI}{GJ} \frac{\pi^4 x^4}{l^4} = \gamma_n \\ \lambda_n &= \frac{\pi^4 x^4}{l^4} \sqrt{\frac{EI}{m_0 (1 + \gamma_n)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Таким образом, форма колебаний балки

$$v_n(x) = v_{01}(x) + v_{02}(x) = a_0 \sin \frac{\pi x}{l}$$

Деформации сдвига увеличивали податливость конструкции и поэтому снижали ее собственные частоты.

Перейдем к разложению произвольного свободного колебания на главные свободные колебания. Представим себе, что балке дали первоначальный прогиб $v(x, 0)$ за счет статической поперечной нагрузки, а затем внезапно сняли нагрузку; начальные скорости равны нулю.

Ясно, что указанные свободные колебания разложатся на сумму главных свободных колебаний $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \lambda_k t$, где λ_k определяется по формуле (1.28). Первоначальный прогиб $a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l}$

обусловлен соответствующей составляющей нагрузки; он складывается из прогибов от изгиба и сдвига, причем отношение их равно γ_k .

Пусть теперь первоначальный прогиб $v(x, 0)$ создан только за счет изгиба от статических уравновешенных в своей совокупности внешних моментов, когда реакции опор и перерезывающие силы по всей длине конструкции равны нулю. Это, очевидно, вполне осуществимо, так как, зная прогиб $v(x, 0)$, мы всегда можем построить нужную систему изгибающих моментов

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 v(x, 0)}{\partial x^2},$$

прикладывая к балке внешние сосредоточенные и распределенные моменты.

После внезапного удаления внешних моментов начальные скорости по-прежнему равны нулю. Очевидно, что прогиб снова может

быть разложен по тем же формам $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l}$. Однако свобод-

ные колебания уже не разложатся на главные свободные колебания с частотами λ_k согласно (1.28), а будут происходить по более сложному закону. Действительно, теперь первоначальная деформация по форме $a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l}$ обусловлена только изгибом, сдвиговый прогиб совершенно отсутствует, и поэтому уже в момент $t = 0$ на каждую элементарную массу действуют совсем другие силы упругости, чем в первом случае.

Дело здесь снова в различии между действительным числом степеней свободы системы и числом ее динамических степеней свободы. Сила инерции зависит от суммарного прогиба балки, и потому каждая материальная точка в своем вертикальном перемещении имеет одну динамическую степень свободы. В то же время всевозможные перемещения конструкции, которые вызывают и все возможные деформации, определяются перемещением точек как за счет изгиба, так и за счет сдвига.

Чтобы рассчитать свободные колебания в приведенном примере, нужно снова воспользоваться искусственным приемом.

Приложим фиктивную динамическую нагрузку, которая не должна бы изгибавших моментов, но полностью компенсировала бы перерезывающие силы, возникающие при главных свободных колебаниях. Она может быть сконструирована как комбинация поперечной нагрузки и внешних моментов; поперечная нагрузка дает изгибающие моменты и перерезывающие силы, внешние моменты компенсируют изгибающие моменты от поперечной нагрузки. Очевидно, что тогда движение будет происходить по форме

главных свободных колебаний балки без учета сдвига с частотами $\gamma_n^{(0)} = (\pi^2 n^2 / l^2) \sqrt{EI / m_0}$.

Для компенсации действия фиктивной нагрузки следует затем рассчитать вынужденные колебания балки с частотами $\gamma_n^{(0)}$ под действием одних перерезывающих сил

$$N_n = -a_{n,0} [\gamma_n^{(0)}]^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 EI \cos \frac{\pi n x}{l} \cos \gamma_n^{(0)} t.$$

Эти перерезывающие силы вызовут только сдвиговые колебания, которые наложатся на свободные изгибные колебания; сумма колебаний даст действительные свободные колебания балки.

4. Пусть формы и частоты свободных колебаний балки (рис. 8, а и б) определены с учетом сдвига, а в состав внешней динамической нагрузки входит распределение по длине моменты. Легко видеть, что наличие внешних распределенных моментов всегда нарушает жесткое соотношение: производная от изгибающих моментов равна перерезывающей силе; оно верно только для поперечной нагрузки и сосредоточенных моментов. В то же время изгибающие моменты и перерезывающие силы от действия поперечных сил инерции строго следуют указанному соотношению. Следовательно, сделав идентичные формы опор изгибающих моментов от внешней нагрузки и сил инерции, мы не можем считать идентичными опоры перерезывающих сил.

Иными словами, нагрузка не может быть точно разложена в ряд по формам сил инерции, и, значит, метод главных координат в его обычной форме не дает точного решения.

Исправить положение могут только искусственные приемы.

Допустим, что к балке прикладывается фиктивная нагрузка, которая компенсирует все перерезывающие силы от внешней нагрузки и сил инерции. Тогда балка деформируется по формам свободных колебаний без учета сдвига, и метод главных координат полностью пригоден. Рассчитав такое движение, мы определим перерезывающие силы, искусственно компенсируемые на первом этапе расчета, и затем рассчитаем систему только на действие перерезывающих сил, для чего следует знать частоты и формы чисто сдвиговых колебаний; алгоритм метода главных координат опять правилен.

Идея этого приема идентична идее постановки жестких опор при расчете системы с двумя динамическими степенями свободы (см. п. 2).

Можно действовать иначе. Пусть нагрузка равна $P(x) f(t)$. Полагая, что $m_0 = 0$. Тогда балка изгибается согласно зависимости $\varphi(x) f(t)$, где $\varphi(x)$ — форма статического прогиба от действия нагрузки $P(x)$. Этот же изгиб будет и когда $m_0 \neq 0$, но для этого следует приложить дополнительно фиктивную нагрузку $m_0 \varphi''(x) f(t)$, которая компенсировала бы силы инерции.

Поскольку фиктивной нагрузки на самом деле нет, то к движению $\varphi(x) f(t)$ следует добавить движение под нагрузкой $m_0 \varphi''(x) f(t)$.

Последняя всегда раскладывается по формам сил инерции главных свободных колебаний.

Если $f(t) \neq 0$, то при изгибе согласно зависимости $\varphi(x) f(t)$ балка должна мгновенно получить некоторую скорость. Чтобы содействовать инерционной конструкции, требуется в момент $t = 0$ приложить дополнительный импульс, обуславливающий свободные колебания с начальными скоростями $\dot{\varphi}(x) f(t)$. Разложение этого свободного колебания по формам главных свободных колебаний производится согласно общим правилам.¹

Изложенный способ — аналог второго приема расчета системы с двумя динамическими степенями свободы.

5. Рассмотрим дополнительно аналитический прием решения системы на свободные и вынужденные колебания стержней.

Пусть имеется произвольный участок стержня (рис. 8, в); $M_1(t)$ и $P_1(t)$ — усилия на левом краю участка.

Уравнения равновесия участка

$$\left. \begin{aligned} P_1(t) - \int_0^x m_0 \frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial t^2} dx &= N(x, t) \\ M_1(t) - \int_0^x m_0 \frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial t^2} dx^2 + \\ + \int_0^x m_0 x^2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^x P_1(t) dx &= M(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

где ρ — радиус инерции погонной массы.

Подстановка в (1.29) известных соотношений

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}, \quad N(x, t) = -GQ \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

и последующее дифференцирование дают

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} + m_0 \frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial t^2} - m_0 \rho \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial t^2} &= 0 \\ GQ \frac{\partial v_1}{\partial x} - m_0 \frac{\partial^2 (v_1 + v_2)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

¹ Как и раньше, мы не рассматриваем более сложного случая мгновенного приложения сил конечной величины.

Для дальнейшего анализа удобно ввести новые переменные: полный прогиб $v = v_1 + v_2$ и угол поворота сечения $\alpha = \frac{\partial v_1}{\partial x}$. Тогда система (1.30) сведется к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{m_0}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{d\alpha}{dx} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x^2} - \frac{m_0 \rho^2}{EI} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = - \frac{GJ}{EI} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

В случае балки, шарнирно опёртой на двух опорах, удобно искать решения в виде

$$\left. \begin{aligned} v &= a_0 \sin \frac{\pi k x}{l} \sin(\omega t + \theta) \\ \alpha &= b_0 \cos \frac{\pi k x}{l} \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Подстановка (1.32) в (1.31) приводит к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} a_0 \left(-\frac{\pi^4 k^4}{l^4} + \lambda^2 \frac{m_0}{EI} \right) + b_0 \frac{\pi^2}{l} = 0 \\ a_0 \frac{\pi^2}{l} \frac{GJ}{EI} + b_0 \left(-\frac{\pi^4 k^4}{l^4} + \lambda^2 \frac{m_0 \rho^2}{EI} - \frac{GJ}{EI} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Приравняв нулю определитель системы (1.33), имеем

$$\left(\frac{1}{b_0} \right)^4 - \left(\frac{1}{\lambda_0} \right)^2 \frac{\pi^2 GJ}{EI} \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{GJ \rho^2}{\pi^2 EI} \right) + \frac{GJ \pi^2}{EI} = 0, \quad (1.34)$$

где $\lambda_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$ — частота первого тона, вычисленная без учета сдвига и инерции вращения сечений, $\frac{1}{k^2} = \frac{l}{J_0 I_0}$ — гибкость, $\frac{1}{J_0} = \frac{G}{E}$.

Отсюда получаем для значений $\lambda_0^{(1)}$ и $\lambda_0^{(2)}$ для каждого числа поперечий n

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0^{(1)} = \lambda_0 \frac{n^2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{k^2} + \frac{GJ \rho^2}{\pi^2 EI} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{GJ \rho^2}{\pi^2 EI} \right)^2 - 4 \frac{1}{k^2}} \right]} \\ \lambda_0^{(2)} = \lambda_0 \frac{n^2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{k^2} + \frac{GJ \rho^2}{\pi^2 EI} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{GJ \rho^2}{\pi^2 EI} \right)^2 - 4 \frac{1}{k^2}} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Первая из этих частот отвечает форме колебаний, при которой поперечные сечения поворачиваются в ту же сторону, что и касательные к линии суммарных прогибов v .

Вторая, более высокая частота, соответствует форме, когда поперечные сечения и касательные линии v поворачиваются в противоположные стороны (рис. 8, 9).

Весьма интересное на первый взгляд раздвигание спектра частот вполне понятно.

В рассматриваемом случае каждой координате x соответствуют два параметра, полностью характеризующие положение сечения с двумя координатами.

Уравнение числа обобщенных и динамических обобщенных координат приводит к принципиально новому результату: мы получаем возможность разложить по главным свободным колебаниям любое свободное колебание системы, а также уверенно использовать обычный вариант метода главных координат.

Убедившись сначала в справедливости первого утверждения, всякий суммарный начальный прогиб может быть разложен по формам

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l}, \text{ причем каждая форма имеет произвольные составляющие от изгиба и сдвига, суммарная амплитуда которых равна } a_{k,0}.$$

Одновременно для каждого k имеем две формы свободных колебаний, у которых суммарное перемещение подчиняется закону $a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l}$, но существуют два различных соотношения между прогибом от изгиба и сдвига. Это всегда позволяет разложить любую начальную форму $a_{k,0} \sin \frac{k\pi x}{l}$ по указанным двум формам свободных колебаний.

С другой стороны, произвольный начальный прогиб отвечает произвольной внешней нагрузке, а формы главных свободных колебаний — соответствующим силам инерции. Отсюда ясно, что возможность разложения прогибов равносильна возможности разложения внешней нагрузки.

6. Проиллюстрируем конкретные примеры наглядно на естественные обобщения. Становится ясным, что при постановке различных задач важно проверить соответствие числа обобщенных и динамических обобщенных координат. Если это нет, то при изучении свободных колебаний, а также использовании метода главных координат полезно применять искусственные приемы указанных выше типов.

Они могут быть полезными и в некоторых других случаях.

Пусть шарнирно опёртый стержень (рис. 8, а) находится над действием произвольного опорного момента $M(t)$ в сечении $x = l$. Инерция вращения сечений и сдвига не учитываются.

Очевидно, что динамическая деформация нетрудно разложить в сходящийся ряд по формам главных свободных колебаний

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k,1} \sin \frac{k\pi x}{l}$, однако здесь нарушается сходимость по моментам для конца стержня $x = l$ (каленце Гиббса в теории рядов Фурье). В самом деле, вторая производная от каждого члена ряда для $x = l$ равна нулю, и потому никакая сумма членов не может аппроксимировать в этой точке сосредоточенного момента.

Выход легко найти, если рассмотреть движение безмерного конца стержня, а затем накладывать на него движения под действием сил инерции и мгновенных импульсов, как это неоднократно делалось выше (рис. 9, б).

«Правые» силы инерции, а также «левый» импульс легко и точно раскладываются в ряд по свободным колебаниям.

Вообще прием выделения движений по формам статического прогиба часто дает большой эффект и увеличивает сходимость ряда. Дело в том, что инерционные нагрузки при движении по статической форме обычно гораздо меньше, чем внешняя нагрузка, и потому их проще раскладывать в ряды.

Правда, иногда $f(t)$ гораздо быстрее изменяется во времени, чем $f(t)$, и, значит, силы инерции статического прогиба могут оказаться «динамичнее», чем основная нагрузка. Это может ликвидировать выигранный от более равномерного распределения сил.

7. Еще Рейлей [29] установил, что внешние линейные сопротивления, пропорциональные скорости перемещений, нарушают в общем случае формы главных свободных колебаний линейных упругих систем и связывают эти колебания, т. е. что линейная система с такими сопротивлениями не может быть рассмотрена обычным методом главных координат с введением в левую часть уравнений движения тривиальных диссипативных членов, выраженных через диссипативную функцию.

В ряде работ [18, 30, 31, 32, 36] утверждается, что внутренние линейные сопротивления, пропорциональные скорости деформаций для систем деформации, во всяком случае формы свободных колебаний (во всем вытекающем отсюда следствии). Однако указанное утверждение, как и при внешних сопротивлениях, справедливо, лишь когда выполняются специальные условия.

Чтобы показать это, вернемся к уже рассмотренному в § 2 случаю изгиба балки (рис. 6, а) и пренебрежем внешним сопротивлением.

Взяв за начало отсчета $x = 0$ левый конец балки, уравнение движения балки в поперечном направлении имеет вид

или, учитывая (1.11),

или, учитывая (1.11),

или, учитывая (1.11), $\sqrt{11} = 0$. Если внутреннее сопротивление подчиняется гипотезе Сорокина, то коэффициент γ равен γ_0/α .

Следует [18, 30, 36], чтобы нужно задать выражением

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(x) F_k(t) \quad (1.36)$$

Здесь $\tau_k(x)$ — форма главных свободных колебаний без учета сопротивлений, отвечающая уравнению

$$\frac{d^2 \tau_k}{dx^2} + \frac{\rho_0 \omega_k^2}{EI} \tau_k = 0, \quad (1.37)$$

где ω_k — частота k -го тона свободных колебаний.

Непосредственной подготовкой к этому можно показать, что (1.36) разделяет переменные в (1.11). Однако (1.11) и (1.37) имеют разные граничные условия, и потому такая подготовка невозможна.

Чтобы сделать подстановку (1.36) приемлемой, нужно преобразовать (1.12) к виду:

при $x = 0$

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = K_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\gamma_1 K_1 \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma EI \frac{\partial v}{\partial x} \right) = K_1 \frac{\partial v}{\partial x} + M_1(v)$$

$$EI \frac{\partial v}{\partial x} = -K_2 v + \left(-\gamma_2 K_2 \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma EI \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -K_2 v + P_2(v)$$

$$(1.38)$$

при $x = l$

$$EI \frac{\partial v}{\partial x} = -K_3 \frac{\partial v}{\partial x} + \left(-\gamma_3 K_3 \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma EI \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -K_3 \frac{\partial v}{\partial x} + M_3(v)$$

$$EI \frac{\partial v}{\partial x} = K_4 v + \left(\gamma_4 K_4 \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma EI \frac{\partial v}{\partial x} \right) = K_4 v + P_4(v)$$

Условия P_i и M_i можно рассматривать как внешние нагрузки (рис. 6, б). Если теперь нормировать функцию $\tau_k(x)$ и применить метод главных координат, то будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{v}_n(t) + \omega_n^2 F_n(t) + \omega_n^2 \tau_n(t) = & \int_0^l q(x) \cos(\omega_n x + \theta) \tau_n(x) dx + \\ & + P_1 \tau_n(t) + P_2 \tau_n(t) - M_1 \tau_n(t) + M_2 \tau_n(t). \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$P_1 = -\gamma E I \sum_{k=1}^n \varphi_k^{III}(0) \bar{F}_k - \gamma_0 K_{01} \sum_{k=1}^n \varphi_k(0) \bar{F}_k;$$

$$P_2 = -\gamma E I \sum_{k=1}^n \varphi_k^{III}(l) \bar{F}_k + \gamma_0 K_{02} \sum_{k=1}^n \varphi_k(l) \bar{F}_k;$$

$$M_1 = \gamma_1 K_1 \sum_{k=1}^n \varphi_k^I(0) \bar{F}_k - \gamma E I \sum_{k=1}^n \varphi_k^{II}(0) \bar{F}_k;$$

$$M_2 = -\gamma_0 K_2 \sum_{k=1}^n \varphi_k^I(l) \bar{F}_k - \gamma E I \sum_{k=1}^n \varphi_k^{II}(l) \bar{F}_k.$$

Как видно из (1.39), переменные никак не разделяются.

Анализ показывает, что разделение переменных происходит лишь в случае $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$, а также когда концы балки свободно опираются, жестко-закреплены, свободны, жестко заделаны. При этом (1.12) автоматически переходит в условия дан (1.37) и подстановка (1.36) справедлива без всяких искусственных операций с разложением дополнительных условий.

8. Рассмотрим теперь подробное рассмотрение применимости метода главных координат в случае линейных сопротивлений.

Пусть определены формы $\varphi_k(x, y, z)$ главных свободных колебаний системы без учета сопротивлений. Это значит, что внешняя статическая нагрузка вида $P_0, \omega_0(x, y, z) \varphi_k(x, y, z)$ вызывает деформации вида $A_k \varphi_k(x, y, z)$; здесь m_k — удельная масса. Соотношения $P_0, \omega_0 / A_k = K_k$ определяют по существу частоту свободных колебаний.

Пусть, далее, на систему действует произвольная нагрузка

$$P(x, y, z) f(t) = \sum_{k=1}^n P_{0,k} \omega_k(x, y, z) \varphi_k(x, y, z) f(t),$$

причем движение системы вызывает произвольные внешние и внутренние линейные сопротивления. Под произвольными внешними (внутренними) сопротивлениями будем понимать такое сопротивление, которое выражается произвольной линейной функцией относительно перемещений (деформаций) системы и любых производных от них по времени.

Предположим, что под действием силы $P_{0,k} \omega_k(x, y, z) \varphi_k(x, y, z) f(t)$ система деформировалась бы согласно зависимости $\varphi_k(x, y, z) \dot{\varphi}_k(t)$. В этом случае на элементы системы действуют следующие усилия:

- 1) внешняя нагрузка $P_{0,k} \omega_k(x, y, z) \varphi_k(x, y, z) f(t)$;
- 2) силы инерции — $m_k(x, y, z) \varphi_k(x, y, z) \ddot{\varphi}_k(t)$;

3) силы упругости $\Phi_{01}(\varphi_k) \dot{\varphi}_k(t) + \Phi_{02}(\varphi_k) \ddot{\varphi}_k(t)$, где Φ_{01} и Φ_{02} — некоторые функции, определяющие условия соответственно от нормальных и касательных напряжений;

4) силы внешних сопротивлений $\gamma^{(0)}(x, y, z) \varphi_k(x, y, z) R(t)$, где $\gamma^{(0)}$ — коэффициент внешних сопротивлений, $R(t)$ — некоторая функция от t ;

5) силы внутренних сопротивлений $\gamma_1(x, y, z) \Phi_{11}(\varphi_k) \dot{\varphi}_k(t) + \gamma_2(x, y, z) \Phi_{12}(\varphi_k) \ddot{\varphi}_k(t)$, где γ_1 — коэффициент внутренних сопротивлений, соответствующий нормальным напряжениям, γ_2 — коэффициент внутренних сопротивлений, соответствующий касательным напряжениям, φ_k и $\ddot{\varphi}_k$ — некоторые функции от t .

Ясно, что первые три силы по самому определению главных свободных колебаний всегда соответствуют деформациям системы по форме φ_k , а потому никогда не могут исказить ее. Что касается сил сопротивлений, то они в общем случае не соответствуют этим деформациям и, следовательно, будут искажать форму φ_k . Для того чтобы и она соответствовала деформациям по форме φ_k , необходимым и достаточны условия $\gamma^{(0)}(x, y, z) = k_0 \varphi_k(x, y, z)$ (где k_0 — любой постоянный коэффициент) и $\gamma_1(x, y, z) = \gamma_2(x, y, z) = \text{const}$.

Итак, мы имеем следующее обобщение теоремы Рэлея о колебаниях неконсервативных линейных систем: колебание произвольной линейной упругой системы с произвольными внешними и внутренними линейными сопротивлениями могут рассматриваться по независимым формам главных свободных колебаний напряжения без учета сопротивлений, только в том случае, когда коэффициенты внешних сопротивлений пропорциональны в каждой точке массе этой системы, а коэффициенты внутренних сопротивлений в каждой элементарной системе равны одной и той же постоянной величине.

Под словом масса здесь следует, конечно, понимать любой скалярный коэффициент, определяющий силы инерции, в том числе моменты инерции масс материальных точек, которым соответствуют коэффициенты сопротивления вращательным движениям.

Глава II

МЕТОДЫ РАСЧЕТА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА ЗАМЕНЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЗАДАЧАМИ КОШИ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. ОБЩЕНЫЙ МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

1. Известно, что любое обыкновенное дифференциальное уравнение может решиться при данных начальных условиях (задача Коши) или при данных граничных условиях (краевая задача).

В первом случае некоторый интеграл допустимо находить последовательным интегрированием уравнения от участка к участку,

Викан не пытаюсь сразу охватить решение в целом в виде общего интеграла, разложенного в ряд по некоторым функциям и т. п. Во втором случае такой охват совершенно необходим.

Отсюда непосредственно видны преимущества замены крайней задачи Коши и вытекающие из нее упрощения. Именно их реализует известный метод начальных параметров, применяемый в строительной механике в виде различных модификаций, предложенных в разное время Клеблем, А. Н. Крыловым, Н. П. Пузыревским, Толле, Ш. Е. Михладе, Н. И. Безуховым и др. [25, 12, 48, 15, 2, 35].

Идея метода начальных параметров, который использовался до сих пор лишь применительно к линейным задачам, крайне проста: заданные граничные условия на одном из краев конструкции дополняются начальными параметрами (обычно усилиями, так, чтобы образовались начальные условия, которые полностью определили бы весь дальнейший процесс деформирования). Величины параметров задаются обычно в буквенном виде; они проходят через весь расчет и определяются из условий сопряжения на другом краю. Одного их можно задавать и численно, если дополнить алгоритм несколькими приближениями (пробами).

2. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим, следуя Клеблю [25], линейную задачу об изгибе призматической балки ступенчато-переменного сечения, которая нагружена сосредоточенными усилиями $P(x_1)$ и $M_0(x_0)$, а также нагрузкой $q(x_0, x)$, распределенной по части длины (рис. 10, а, б).

Рассекаем балку по левому опорному сечению и обозначим величину изгибающего момента и перерезывающей силы на опоре через M_0 и N_0 . При определении изгибающих моментов M и перерезывающих сил N в любом сечении используем условия равновесия произвольной части балки, считая от левой опоры¹.

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 + \int_{x-x_1}^x P(x_1) dx + \int_{x_1}^x q(x_0, x) dx \\ M &= M_0 + N_0 x + \int_{x-x_1}^x P(x_1)(x-x_1) dx + \\ &+ \int_{x-x_0}^x M_0(x_0) dx + \int_{x_1}^x \int_{x_0}^x q(x_0, x) dx dx \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

¹ В дальнейшем будем писать для моментов, перерезывающих сил, поворотов и углов поворота участков балки в действующих на них внешних нагрузках и условно числовые значения в соответствии с номером сечения; например: P_1 — величина силы в сечении x_1 , M_{-2} — момент изгибающий момент в сечении x_2 и т. п.

При выписке у нас появятся дополнительные индексы, числовые индексы, указывающие номер сечения, будут выписаны в скобки, например $\bar{u}(1)$ — комплексная амплитуда колебаний массы m_1 первой ступени системы и т. д.

Здесь, как обычно, знак прерывателя $|_{x=x_1}$ означает, что функция, стоящая за ним, включается в общую зависимость только с определенного значения аргумента $x = x_1$, т. е. использование этого знака равносильно умножению на единичную функцию Хемисайда нулевого порядка $\chi_0(x-x_1)$.

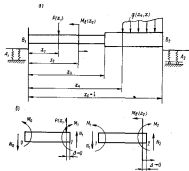


Рис. 10.

Составим теперь выражение для углов поворота сечений и поворотов балки с помощью известной связи

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}, \quad (2.2)$$

где EI — жесткость на изгиб.

Интегрирование (2.2) не встречает затруднений.

На участке $0-1$ известны начальные условия, которые выражаются через значения N_0 и M_0 и коэффициенты податливости A и B

$$\theta(0) = A N_0, \quad v'(0) = B M_0. \quad (2.3)$$

При переходе от участка $0-1$ к участку $1-2$ перемещения сечения 1 образуют новые начальные условия для участка $1-2$ и т. д.

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = & w_0' + \frac{M_0 x}{E_1 I_1} + \frac{N_0 x^2}{2E_1 I_1} + \left|_{x=x_1} \frac{P(1)(x-x_1)^2}{2E_1 I_1} + \right. \\ & + \left|_{x=x_2} \frac{M_2(2)(x-x_2)}{E_2 I_2} - \left|_{x=x_1} \frac{M(x-x_2)}{E_1 I_1} + \right. \\ & + \left|_{x=x_2} \frac{M(x-x_2)}{E_2 I_2} - \left|_{x=x_2} \frac{N(x-x_2)^2}{2E_2 I_2} + \left|_{x=x_2} \frac{N(x-x_2)^2}{2E_2 I_2} + \right. \\ & + \left|_{x=x_1} \int_{x_1}^x \int_{x_1}^{\xi} \int_{x_1}^{\eta} \frac{q(x_0, x)}{E_1 I_1} dx_0 dx_1 dx_2 \right. \\ v = & w_0 + w_0' x + \frac{M_0 x^2}{2E_1 I_1} + \frac{N_0 x^3}{6E_1 I_1} + \left|_{x=x_1} \frac{P(1)(x-x_1)^3}{6E_1 I_1} + \right. \\ & + \left|_{x=x_1} \frac{M_2(2)(x-x_2)^2}{2E_2 I_2} - \left|_{x=x_1} \frac{M(x-x_2)^2}{2E_1 I_1} + \left|_{x_2} \frac{M(x-x_2)^2}{2E_2 I_2} - \right. \\ & - \left|_{x_2} \frac{N(x-x_2)^3}{6E_2 I_2} + \left|_{x_2} \frac{N(x-x_2)^3}{6E_2 I_2} + \right. \\ & + \left|_{x=x_1} \int_{x_1}^x \int_{x_1}^{\xi} \int_{x_1}^{\eta} \int_{x_1}^{\theta} \frac{q(x_0, x)}{E_1 I_1} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \right. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формулы (2.1), (2.3) и (2.4), выведенные на основе решения задачи Коши, позволяют найти величины M_0 и N_0 из условий сопряжения деформаций у правой опоры

$$v(l) = +A_3 N(x_0 = l); \quad v'(l) = -B_3 M(x_0 = l). \quad (2.5)$$

Зависимость (2.5) требует решения всего двух линейных алгебраических уравнений, в то время как обход дуг, основанный на рассмотрении краевых задач отдельных участков, вынуждает решать $2k+2$ уравнения, где k — число участков.

3. Перейдем к обобщенному методу начальных параметров. Пусть та же самая балка имеет непрерывно изменяющееся по длине сечение и выполнена из нелинейно упругого материала, а углы поворота и прогиба опор определены заданными величинами функциями

$$v_0 = v(\theta) = f_1(M_0, N_0); \quad v_0' = v'(\theta) = f_2(M_0, N_0); \quad (2.6)$$

$$v_a = v(l) = f_3(M_a, N_a); \quad v_a' = v'(l) = f_4(M_a, N_a), \quad (2.7)$$

где l — номер правого опорного сечения.

Вместо буживенных значений M_0 и N_0 зададимся их какими-то приближенными численными значениями, найденными, например, исходя из линеаризованного решения задачи. Тогда мы опять-таки приходим к задаче Коши, но уже для нелинейного уравнения.

Установим зависимость между изгибающим моментом и кривизной балки, считая известной диаграмму напряжения σ — относительная деформация:

$$\sigma = F(\epsilon), \quad (2.8)$$

где $F(\epsilon)$ — переменный модуль.

В соответствии с гипотезой плоских сечений

$$\epsilon = -\frac{dw}{dx} y, \quad (2.9)$$

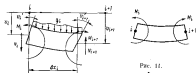


Рис. 11.

Условия равновесия внутренних и внешних сил имеют вид

$$\int_{\Omega} \sigma_y d\Omega = -M_i; \quad \int_{\Omega} \sigma d\Omega = 0, \quad (2.10)$$

где Ω — площадь сечения.

Подстановка зависимостей (2.8) и (2.9) в первое уравнение (2.10) дает искомую связь между M и v''

$$M = -v'' \int_{\Omega} F(-v'' y) y^2 d\Omega. \quad (2.11)$$

Второе уравнение (2.10) служит для отыскания положения нейтральной оси балки.

Разобьем балку на сколь угодно большое число n малых (элементарных) участков, в пределах которых допустимо пренебречь изменением изгибающих моментов.

Обозначим длину участка i — $(i+1)$ через Δx_i , где i — номер сечения.

Изгиб элемента происходит под действием момента M_i и $M_{i+1} \approx M_i$ (рис. 11).

Согласно (2.11) проращение угла поворота правого сечения относительно левого

$$\Delta v_i' = \frac{dw}{dx} \Delta x_i = -\frac{M_i \Delta x_i}{\int_{\Omega} F\left(-\frac{dw}{dx} y\right) y^2 d\Omega}. \quad (2.12)$$

Зная M_0 и N_0 , по формулам (2.6) находим $v(0)$ и $v'(0)$. Тогда, используя (2.12), получаем

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= v_0' + \Delta v_0', & v_1 &= v_0 + v_0' \Delta x_0 \\ N_1 &= N_0 + q_0 \Delta x_0, & M_1 &= M_0 + N_0 \Delta x_0 \\ v_{1+i}' &= v_1' + \Delta v_1', & v_{1+i} &= v_1 + v_1' \Delta x_1 \\ N_{1+i} &= N_1 + q_1 \Delta x_1, & M_{1+i} &= M_1 + N_1 \Delta x_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Дойдя до правого конца, проверяем условия сопряжения (2.7). Если они не выполняются, то расчет должен быть повторен заново при откорректированных значениях M_0 и N_0 . Иными словами, производится выравнивание двух начальных параметров.

4. Исследуем задачу об установившихся вынужденных колебаниях цепных механизмов с нелинейными внутренними и внешними сопротивлениями (рис. 12). Здесь K_1 — жесткость i -й связи, m_i — величина i -й массы, $P_{\alpha}(t)$ — амплитуда возмущающей силы, приложенной ко i -й массе, $\alpha(t)$ — перемещение i -й массы, $\alpha(t) = \alpha_0(t) \sin(\omega t + \varphi_0)$, $\alpha(t+1) = \alpha_0(t+1) \sin(\omega t + \varphi_{1+i})$ — заданные колебание концов системы.

Взаупругие сопротивления зададим по гипотезе Я. Г. Панюка [23, 24]. Он предполагает, что значение сил сопротивлений определяется в основном площадью петли гистерезиса, а ее форма не играет заметной роли, и представил эту форму удобным для расчетов образом. Наиболее удачным оказалось выражение (1.6)

$$\sigma = E\epsilon + \nu_0 \epsilon^2 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}} \quad (2.14)$$

отображающее эллипс, ординаты которого пропорциональны n -й степени максимальной деформации. Величины ν_0 и ϵ_0 — константы материала.

Если положить $\nu_0 = \nu_0^{(n+1)}$, то будет ясно, что формулы, даваемые гипотезой Я. Г. Панюка, обращаются в зависимость гипотезы Е. С. Сорокина, но величина коэффициента сопротивления становится функцией амплитуды деформации элемента. В результате всю систему, совершающую установившиеся колебания под дей-

ствием гармонических сил частоты ω , допустимо рассматривать как эквивалентную с переменой ϵ для разных элементов амплитудной ν_0 .

Вместо внешних линейных сопротивлений, приравненных к массам m_i , удобно ввести эквивалентные вязкие сопротивления

$$R_i^{(0)} = K_{\alpha} \dot{\alpha}_i \quad (2.15)$$

определяя коэффициент K_{α} из условия равенства работ действительных и эквивалентных сопротивлений за период колебания. Величина K_{α} оказывается при этом зависящей от амплитуды $\alpha_0(t)$ перемещения массы m_i . Например, если внешние сопротивления пропорциональны квадратам скоростей движения масс и равны $\pm K_1 |\dot{\alpha}|^2$, то [24]

$$K_{\alpha} = -\frac{8}{3\pi} K_1 |\alpha_0(t)| \approx 0,85 |\alpha_0(t)| K_1.$$

Таким образом, и внешние сопротивления не нарушают эквивалентности системы.

Пусть угадаем амплитуду и фазу внутреннего усилия $Q_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ в связи K_1 . Тогда удлинение этой связи $\Delta u(1)$ определится уравнением

$$K_1 \Delta u(1) + R_{\alpha 1} [\Delta u(1)] = Q_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где $R_{\alpha 1} [\Delta u(1)]$ — приведенная сила неупругого сопротивления.

В случае, когда связь K_2 — растягиваемый или сжимаемый стержень,

$$R_{\alpha 2} = \pm \alpha_1 [\Delta u_2(1)]^n \sqrt{1 - \left[\frac{\Delta u(1)}{\Delta u_2(1)} \right]^2},$$

где $\alpha_1 = \nu_1 U_1 / l_1^2$, U_1 — площадь его сечения, l_1 — его длина, $\Delta u_2(1)$ — амплитуда удлинения $\Delta u(1)$, α_2 — значение α в пределах участка 1.

Иными словами

$$K_2 \Delta u(1) \pm \alpha_1 [\Delta u_2(1)]^n \sqrt{1 - \left[\frac{\Delta u(1)}{\Delta u_2(1)} \right]^2} = Q_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (2.16)$$

Это нелинейное уравнение имеет точное решение

$$\Delta u(1) = \Delta u_2(1) \sin(\omega t + \varphi_1 - \tau_1), \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_2(1) &= \frac{Q_1}{K_2} \left[1 + \left(\frac{\alpha_1}{K_2} \right)^2 [\Delta u_2(1)]^{2n-2} \right]^{-1/2}; \\ \tau_1 &= \arctg \frac{\alpha_1}{K_2} [\Delta u_2(1)]^{n-1}. \end{aligned}$$

Перемещение $u(1)$ массы m_2

$$\begin{aligned} u(1) &= \alpha_0(t) \sin(\omega t + \varphi_0) + \Delta u_2(1) \sin(\omega t + \varphi_1 - \tau_1) = \\ &= \alpha_0(t) \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отсюда, по принципу Даламбера, ускорение в связи K_2 составляет

$$Q_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = Q_1 \sin(\omega t + \varphi_1) - P_1 \sin(\omega t + \delta_1) - \\ - \omega^2 u_0(1) m_0 \sin(\omega t + \varphi_1) + K_{\alpha 1} [u_0(1) - \omega] \times \\ \times u_0(1) \cos(\omega t + \varphi_1). \quad (2.19)$$

Зная величины Q_2 и φ_2 , подобным же путем трудно определить ускорение в третьей связи и т. д.

Если значения Q_2 и φ_2 заданы правильно, то на нижнем конце системы должны выполняться условия сопряжения деформаций. В противном случае необходимо повторить расчет заново, задав другие значения Q_2 и φ_2 , т. е. снова варьировать два параметра.

5. Данное выше обобщение метода начальных параметров позволяет построить решения многих упруго-пластических задач.

Рассмотрим задачу об упруго-пластическом изгибе балки, лежащей на сплошном упругом основании жесткости k , под действием равномерного распределенной нагрузки p и постоянной осевой силы T (рис. 13, а). К ней приближенно сводится исследование изгиба круговой цилиндрической оболочки, к работе которой, если на оболочку действует равномерное давление (для определенности изгибающее), тогда сечение балки — прямоугольник единичной ширины с моментом инерции $I_1 = k^3/12 (1 - \nu^2)$, $k = EI/h^3$ — жесткость упругого основания, p — величина внешнего давления, $T = pr/2$ — сжимающее усилие, r — радиус оболочки, h — ее толщина.

Для конкретности примем, что материал балки следует диаграмме Прандтля.

Рассмотрим произвольный малый элемент балки, находящийся в упруго-пластическом состоянии (рис. 13, б). Усилия на правом конце элемента связаны с условиями на левом конце соотношениями статки (пренебрегаем членами порядка Δx^2)

$$\left. \begin{aligned} N_{i+1} &= N_i + (p - k_0) \Delta x_i \\ M_{i+1} &= M_i + N_i \Delta x_i - T \Delta v_i \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$.

Для того чтобы вычислять деформации элемента балки, нужно использовать соотношения теории упругости и гипотезу плоских сечений (рис. 13, в). После элементарных, хотя и довольно громоздких, преобразований при $\nu = 0.5$ имеем¹

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{EA}{9} \varphi^2 (3 - 2\xi) x = -EI_1 \kappa \\ \xi &= \frac{3}{2} - \frac{3M}{N \left(\alpha_1 - \frac{N}{2k} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

где ξ — относительная высота упругого ядра, κ — кривизна элемента.

Приращение угла поворота $\Delta \varphi_i$ и прогиба Δv_i при переходе от одного элемента к другому по-прежнему составляют

$$\Delta \varphi_i = \kappa_i \Delta x_i, \quad \Delta v_i = v_i' \Delta x_i. \quad (2.22)$$

Удобно ввести следующие обозначения и безразмерные параметры

$$\left. \begin{aligned} M &= \mu r h^3, \quad N = \beta p \sqrt{r h}, \quad \sigma' = 9 \nu \frac{p r}{E k} \sqrt{\frac{r}{h}} \\ \nu = 1 - \frac{3 \mu^2}{4 E A}, \quad \xi &= \frac{3}{2} - \frac{3 m}{\left(\frac{\alpha_1}{p r} - 0.5 \right)}, \quad \kappa = \frac{9 m}{r^2 (3 - 2\xi) E k^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Приведенные формулы позволяют, задавшись значениями μ и β на опоре (т. е. опорным моментом и реакцией), последовательно вычислять деформации и внутренние усилия по длине балки. О правильности выбора μ и β можно судить по выполнению граничных условий на бесконечности.

Это легко сделать, если использовать упругое решение для полубесконечной балки с заданными на конце смещением и углом

¹ Подробнее такие преобразования в гораздо более общем случае изложены в третьем разделе.

Рис. 13.

поворота или моментом и силой. Дело в том, что на некотором удалении от опоры деформации обязательно должны стать упругими, ибо в противном случае в оболочке уже достигнуто предельное состояние. Значит, нужно, чтобы было удовлетворено сопряжение на границе упругой и упруго-пластической частей. Здесь должны выполняться равенства (рис. 13, в) [25]

$$\sigma = -\frac{2N_0}{h} + \frac{2M_0 a^2}{h} + \frac{\rho}{h};$$

$$\sigma' = \frac{2N_0 a^2}{k} - \frac{4M_0 a^2}{h}.$$

$$\text{где } \sigma = \sqrt{\frac{k}{4EI_1}} = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{ab}}.$$

Проведя несложные преобразования и вычисления, находим

$$m = 0,25 - 0,27\alpha - 0,35\beta, \quad \beta = 0,62 - 0,33\alpha - 0,81\alpha. \quad (2.24)$$

Поскольку оболочка дает, как правило, достаточно жесткое основание, при выводе (2.24) не учитывалось влияние сложного изгиба на деформацию упругой части системы, хотя учет его не представляет, конечно, никаких принципиальных трудностей.

Для иллюстрации сказанного в табл. 1 выполнен расчет балки при начальных значениях варьируемых параметров $m_0 = 0,22$; $\beta_0 = 0,62$ и параметра нагрузки $\alpha, h/\rho r = 1,15$.

Обращаясь к решению (2.24), получим

$$m(\alpha = 0,20) = 0,25 - 0,27 \cdot 0,372 - 0,33 \cdot 0,043 = 0,135;$$

$$\beta(\alpha = 0,20) = 0,62 - 0,33 \cdot 0,372 - 0,81 \cdot 0,043 = 0,462.$$

Незначительные изменения в моменте и перегибающей силе

$$\Delta m = 0,135 - 0,118 = 0,017;$$

$$\Delta \beta = 0,462 - 0,440 = 0,022$$

могут быть устранены во втором приближении.

Результаты аналогичных расчетов для других величин указанного параметра представлены на рис. 13, г.

В ряде случаев в районе диафрагм оболочка имеет переменное сечение. Пусть, например, толщина меняется вдоль образующей по ланжевиеву закону (рис. 14, а).

Расчет такой оболочки аналогичен предыдущему. Участок переменной толщины разбивается на малые элементы, в пределах которых толщина h практически постоянна; величина α равна относительному значению h в первом сечении. Результаты расчета

Таблица 1

Расчет упруго-пластической балки балки

$\alpha = \frac{h}{\rho r}$	0,0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20
$\beta_{0,1} = \beta_0 - (1 - \beta_0) \Delta \beta$	0,62	0,60	0,58	0,56	0,54	0,52	0,48	0,44
$\sigma_{0,1} = \sigma_0 - \beta_0 \rho \sigma_0^2$	0,72	0,706	0,696	0,685	0,674	0,664	0,640	0,618
$\beta = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2\sigma_0}{\left(\frac{\sigma_0}{\rho r} - 0,5 \right)} \right]$	0,52	0,53	0,53	0,56	0,572	0,58	0,64	0,64
$\gamma = \frac{\sigma_0}{\rho r} \frac{1}{\left(\frac{\sigma_0}{\rho r} - 0,5 \right)}$	3,2	3,2	2,7	2,3	2,0	1,7	1,5	1,2
$\Delta m = m_0 - \Delta m$	—	0,064	0,054	0,045	0,040	0,036	0,025	0,060
$\gamma_{0,1} = \gamma_0 + \Delta \gamma$	0	0,064	0,118	0,160	0,200	0,237	0,312	0,372
$(2\beta_0 - \gamma_0) 10^4$	—	6	9	28	37	44	135	170
$(2\beta_0 - \gamma_0) 10^4$	0	6	15	43	80	125	200	430

представлены на рис. 14, б в упрощенном виде (вместо серии графиков при разных параметрах нагрузки построен усредненный график).

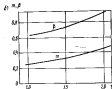


Рис. 14.

от длины пролета. Иными словами, увеличивая k значение коэффициента k , трудно сделать разницу в опорных моментах и реакциях обеих балок сколь угодно малой. Но ведь именно эта ничтожная разница приводит к тому, что, постепенно двигаясь от левого конца к правому, мы в одном случае получаем правую ветвь «огибающей» на расстоянии l , а в другом — на расстоянии $5l$. Алгоритм прямого решения задачи Коши становится крайне неустойчивым.

Это будет всегда, когда напряженное и деформированное состояние на одном конце системы почти не зависит от состояния на другом ее конце (длинные балки на жестком упругом основании, многие

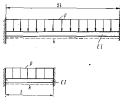


Рис. 15.

б. К сожалению, все модификации метода начальных параметров обладают одним принципиальным и органическим недостатком, который часто делает их совершенно непригодными для фактических вычислений, даже если используются электронные цифровые вычислительные машины.

Пусть даны две очень длинные балки одинаковой жесткости EI , лежащие на упругом основании с большим коэффициентом жесткости k и нагруженные равновесным давлением p (рис. 15). Ясно, что прогиб будет иметь криволинейный характер, причем напряженное и деформированное состояние в районе концов практически не зависит

оболочки, вибрирующие конструкции с большим коэффициентом неурутого сопротивления и т. п.). Но как раз подобные задачи представляют для нас большой интерес. Недаром при рассмотрении в п. 5 упруго-пластического изгиба мы «проходили» обобщенным методом начальных параметров очень короткий участок, а затем «согнали» расчет с точным упругим решением. Именно такой прием сделал алгоритм устойчивым.

Сказанное заставляет продолжать поиски эффективных решений.

§ 3. МЕТОД ПАРИЦАЛЬНЫХ ОТКЛОНОВ СИСТЕМЫ И ЕГО МОДИФИКАЦИИ

1. Переходить от краевой задачи к задаче типа Коши можно не только непосредственно, как это делается в различных вариантах метода начальных параметров. Для линейных физических систем (линейных дифференциальных уравнений) такой переход нетрудно осуществлять с помощью специальных характеристик систем, которые мы назовем в общем случае паричальными отклонениями на единичные воздействия. Существо необходимых для этого алгоритмов и смысл понятия паричальное отклонение будут ясны из дальнейшего.

Начнем с простого примера установившихся вынужденных продольных (или крутильных) колебаний стержня переменного сечения (рис. 16, а). Дифференциальное уравнение задачи имеет обобщенный вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E \Omega(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - m_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -p(x) \sin(\omega t + \psi(x)); \quad (2.25)$$

граничные условия: при $x = 0$ $A_1 E \Omega(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$; при $x = l$ $A_2 E \Omega(x) \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha$. (2.26)

Здесь E — модуль нормальной упругости, $\Omega(x)$ — поперечная площадь сечения, $m_0 = m(x, l)$ — продольная перемещаемая,

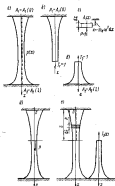


Рис. 16.

$m_0(x)$ — погонная масса, $p(x)$ — интенсивность продольной нагрузки, $\theta(x)$ — переменная фаза, A_1 и A_2 — податливости упругих заделок. В случае кручения это соответственно будут: модуль сдвига, момент инерции поперечного сечения, погонный момент инерции масс при кручении, угол поворота сечения и интенсивность крутящего момента, переменная фаза, податливости заделок.

При излучении линейных сопротивлений в переходе на комплексные параметры имеем

$$\frac{d}{dx} \left[E\Omega(x) \frac{d\bar{u}}{dx} \right] - \bar{m}_0(x) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = -\bar{p}(x) e^{i\omega t}, \quad (2.25, a)$$

граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad \bar{A}_1 E\Omega(x) \frac{d\bar{u}}{dx} = \bar{u}_0; \quad \text{при } x=l \quad \bar{A}_2 E\Omega(x) \frac{d\bar{u}}{dx} = -\bar{u}_0, \quad (2.26, a)$$

где ряд величин оказывается комплексным (в дальнейшем, для простоты, черточкой над буквами опускаем).

Подстановка в (2.25), (2.26) $u(x, t) = \bar{u}_0(x) e^{i\omega t}$ дает

$$\frac{d}{dx} \left[E\Omega(x) \frac{d\bar{u}_0}{dx} \right] + \bar{m}_0(x) \omega^2 \bar{u}_0 + \bar{p}(x) = 0, \quad (2.25, б)$$

граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad \bar{A}_1 E\Omega(x) \frac{d\bar{u}_0}{dx} = \bar{u}_0; \quad \text{при } x=l \quad \bar{A}_2 E\Omega(x) \frac{d\bar{u}_0}{dx} = -\bar{u}_0. \quad (2.26, б)$$

Для решения (2.25, б) при условиях (2.26, б) применим метод парциальных откликов.

Назовем парциальным откликом системы $A_1(x)$ перемещение $u_0(x)$ сечения с координатой x , принадлежащего участку $0-x$, под действием единичного усилия, приложенного в том же сечении (рис. 16, б); весь участок $0-x$ больше ничем не нагружен. Это, в сущности, динамическая податливость части стержня $0-x$, слово отклик назовем как более общее и нейтральное, применяемое к системам разной физической природы; слово парциальный подчеркивает, что речь идет о части системы (по аналогии с терминем парциальной частоты).

Аналогично парциальный отклик $A_2(x)$ — перемещение $u_0(x)$ сечения с координатой x , принадлежащего участку $l-x$, под действием единичного усилия, приложенного в том же сечении; участок $l-x$ больше ничем не нагружен (рис. 16, в).

Парциальные отклики $A_1(x)$ и $A_2(x)$ характеризуют определяемые свойства конструкции, подобно тому как другие ее свойства описываются, скажем, частотами и формами главных свободных колебаний.

Составим дифференциальное уравнение для $A_1(x)$. Рассматривая деформацию элемента (рис. 16, з), имеем

$$A_1 + dA_1 = A_1 + \frac{dx}{E\Omega} + m_0 \omega^2 dx \left(A_1 + \frac{1}{2} dA_1 \right) \times \\ \times \left(A_1 + \frac{1}{2} dA_1 \right). \quad (2.27)$$

Первый член в правой части выражает перемещение сечения от единичной силы, второй — удаление элемента от единичной силы, третий — влияние сил инерции $m_0 \omega^2 dx (A_1 + dA_1)$, эмитируемых реакцией упругой связи.

После отбрасывания членов высших порядков малости и деления обеих частей (2.27) на dx получаем

$$\frac{dA_1}{dx} = m_0(x) \omega^2 A_1^2 + \frac{1}{E\Omega(x)}; \quad (2.28)$$

начальное условие при $x=0$

$$A_1(x) = A_1. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.28) удобно назвать резольвентным уравнением по отношению к (2.25, б). Оно является нелинейным (неблагоприятное обстоятельство), но зато у него есть достаточно условий, чтобы решить задачу Коши вместо краевой задачи (важное благоприятное обстоятельство).

Совершенно аналогично составляется дифференциальное уравнение и начальное условие для $A_2(x)$.

Интегрирование (2.28) можно проводить любым общим численным способом (Эйлера, Рунге — Кутты и др.). Никаких затруднений здесь не возникает.

Чтобы вычислять $u_0(x)$, т. е. решить (2.25, б) при условиях (2.26, б), полезно иметь еще одно понятие: парциальное распределение усилий в сечении x .

Пусть в этом сечении действует произвольная внешняя сила (рис. 16, д). Она распределится между участками стержня: на верхний участок действует $u_1(x)P$, а на нижний $u_2(x)P = -(1-u_1(x))P$, где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — парциальные распределения.

Из равенства перемещений концов обоих участков имеем

$$u_1 P A_1 = u_2 P A_2 = -(1-u_1) P A_2.$$

Откуда

$$u_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2}, \quad u_2 = -\frac{A_1}{A_2 + A_1}. \quad (2.30)$$

Теперь будем рассуждать так: представим $u_0(x)$ в виде $u_0(x) = u_{01}(x) + u_{02}(x)$, где $u_{01}(x)$ — перемещение сечения x от действия

нагрузки $p(x)$ на участке $0-x$ (рис. 16, а), а $u_{00}(x)$ — перемещение от действия нагрузки на участке $x-l$.

Составим выражение для $u_{00}(x)$. Ясно, что $u_{00}(x) = T_2(x) A_2(x)$, где $T_2(x)$ — изгибное усилие в сечении x от сил на участке $0-x$, действующее на нижний участок стержня. С другой стороны, любая сила p (или df , которая действует на участке $l-(l+df)$, передается на нижнюю часть стержня (выш от l) как $a_2(l) p$ (или $a_2(l) df$); она трансформируется за счет сил инерции, возникающих от нее на участке $l-x$. Значит,

$$\left. \begin{aligned} T_2(x) &= \int_0^x p(\xi) a_2(\xi) d\xi - \int_0^x m_0(\xi) \omega^2 u_{00}(\xi) d\xi \\ u_{00}(x) &= A_2(x) T_2(x) = A_2 \left[\int_0^x p(\xi) a_2(\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x m_0(\xi) \omega^2 u_{00}(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Определение $u_{00}(x)$ для постепенно возрастающего x производится последовательно с помощью обычных методов численного интегрирования по очевидным рекуррентным зависимостям.

Расчет $u_{00}(x)$ аналогичен расчету $u_{00}(x)$ и специальных поперечных не требует

$$\left. \begin{aligned} T_1(x) &= \int_0^x p(\xi) a_1(\xi) d\xi + \int_0^x m_0(\xi) \omega^2 u_{00}(\xi) d\xi \\ u_{00}(x) &= A_1 \left[\int_0^x p(\xi) a_1(\xi) d\xi + \int_0^x m_0(\xi) \omega^2 u_{00}(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.31, a)$$

При наличии сосредоточенной нагрузки первые интегралы в (2.31) и (2.31, а) следует понимать в смысле Стилльеса

$$\int_0^x \tilde{p}(\xi) a_2(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n a_2(x_i) P(x=x_i) + \int_0^x p(\xi) a_2(\xi) d\xi, \quad (2.32)$$

где $P(x=x_i)$ — сосредоточенные силы на участке $0-x$;

$$\int_{x-l}^x \tilde{p}(\xi) a_1(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n a_1(x_i) P(x=x_i) + \int_x^l p(\xi) a_1(\xi) d\xi, \quad (2.32, a)$$

где $P(x=x_i)$ — сосредоточенные силы на участке $x-l$.

В зависимостях (2.32) и (2.32, а) i — номера сосредоточенных сил, отсчитываемых соответственно либо от начала, либо от низа стержня.

Величина ω в этих выражениях столь угодно мала. Ее введение означает, что для определения полного смещения $u_0(x)$ при наличии сосредоточенных сил необходимо к $u_{00}(x)$ и $u_{01}(x)$ добавлять третьи слагаемые $u_{02}(x)$, равные смещению i -го сечения стержня от действия сосредоточенной силы P_i и равные нулю во всех остальных точках,

$$u_{02}(x_i) = \frac{P_i A_1(x_i) A_2(x_i)}{A_1(x_i) - A_2(x_i)}. \quad (2.33)$$

Аналогичный прием выделения особенностей используется и для случая сосредоточенных масс и жесткостей.

2. Используем метод параллельных откликов для исследования установившихся поперечных колебаний консольной балки с учетом инерции вращения сечений и деформаций сдвига (рис. 17, а). Сразу учтем квазистатические представления, а при наличии сопротивления будем вводить комплексные параметры.

Обозначим через $A_{1P}(x)$ — прогиб конца участка $0-x$ от единичной силы на этом конце, $A_{1M}(x)$ — прогиб конца участка $0-x$ от единичного момента на этом конце, $B_{1P}(x)$ — угол поворота сечения x участка $0-x$ от единичной силы на этом конце, $B_{1M}(x)$ — угол поворота сечения x участка $0-x$ от единичного момента на этом конце. В силу теоремы взаимности и принятого правила знаков для усилий и деформаций имеем $B_{1P}(x) = -A_{1M}(x)$.

Составим дифференциальное уравнение для $B_{1P}(x)$, определяя поворот правого сечения относительно левого и отбрасывая, как обычно, члены второго порядка малости (рис. 17, б).

$$\begin{aligned} B_{1P} + dB_{1P} &= B_{1P} + B_{1P} dk(x) - m_0(x) \omega^2 dx A_{1P} - \\ &\quad - B_{1P} dx + B_{1P} \omega^2(x) \omega^2 dx B_{1P}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

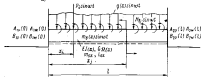
Первый член правой части (2.34) определяет угол поворота левого сечения элемента от единичной силы, второй — приращение этого угла за счет увеличения единичной силы, «растянувшей» элементарную связь жесткостью $dk(x) = m_0(x) \omega^2 dx$ на величину A_{1P} (с точностью до величин первого порядка малости), третий — угол поворота левого сечения от действия момента приложенной единичной силы на элемент dx и, наконец, четвертый — уменьшение этого момента при повороте элементарной крутильной связи жесткостью $-I_0 \omega^2 dx$ на угол B_{1P} (опять-таки с точностью до малых первого порядка).

Разделив (2.34) на dx и приведя подобные члены

$$\frac{dB_{1P}}{dx} = B_{1P} A_{1P} [k(x) - m_0(x) \omega^2] - B_{1M} + B_{1M} B_{1P} \omega^2(x) \omega^2. \quad (2.34, a)$$

$$\frac{dA_{2p}}{dx} = -\frac{1}{EI(x)} + [k(x) - m_0(x)\omega^2] A_{2p} +$$

а)



б)



$$F = S_{10}(x) - S_{1l}(x) - S_{20}(x) + S_{2l}(x)$$

$$M = A_{10}(x) - A_{1l}(x) - A_{20}(x) + A_{2l}(x)$$

в)



г)



Рис. 17.

$$+ A_{1M} B_{1p} i_p(x) \omega^2 - B_{1p} - A_{1M} \quad (2.34, \text{б})$$

$$\frac{dB_{1M}}{dx} = -\frac{1}{EI(x)} + i_p(x) \omega^2 B_{1M} + A_{1M} B_{1p} [k(x) - m_0(x) \omega^2] \quad (2.34, \text{в})$$

Для парциальных откликов системы справа над выражений (2.34) сохранится; однако из-за принятого правила нужно будет поменять знаки правых частей на обратные. Например,

$$\frac{dB_{2p}}{dx} = -B_{2p} A_{2p} [k(x) - m_0(x) \omega^2] +$$

$$+ B_{2M} - B_{2M} B_{2p} i_p(x) \omega^2 \quad (2.34, \text{г})$$

Интегрирование уравнений (2.34) производится любым численным способом (методами Эйлера, Рунге — Кутты, Адамса — Штурмера).

Перейдем к расчету прогибов и углов поворота. Как и в предыдущем пункте, разобьем действующую в сечении x_1 силу P_1 и момент M_{1l} на две части (рис. 17, а и в):

усилия на участке слева от x

$$\tau_1(x_1) P_1; \quad \bar{M}_1 = \tau_P(x_1) P_1; \quad \beta_1(x_1) M_{1l}; \quad \bar{N}_1 = \tau_M(x_1) M_{1l}$$

усилия на участке справа от x

$$\tau_2(x_1) P_1; \quad \bar{M}_2 = \tau_P(x_1) P_1; \quad \beta_2(x_1) M_{1l}; \quad \bar{N}_2 = \tau_M(x_1) M_{1l}$$

Формулы для парциальных коэффициентов распределения α, β и τ трудно вывести из условий сопряжения прогибов и углов поворота в сечениях x_1, x_2

$$\alpha_1 = \frac{A_{1p}(B_{1M} - B_{2M}) - B_{1p}(A_{1M} - A_{2M})}{(A_{1p} - A_{2p})(B_{1M} - B_{2M}) - (B_{1p} - B_{2p})(A_{1M} - A_{2M})}; \quad (2.35, \text{а})$$

$$\alpha_2 = 1 + \alpha_1; \quad (2.35, \text{б})$$

$$\beta_1 = \frac{A_{1M}(B_{1p} - B_{2p}) - B_{1M}(A_{1p} - A_{2p})}{(A_{1M} - A_{2M})(B_{1p} - B_{2p}) - (B_{1M} - B_{2M})(A_{1p} - A_{2p})}; \quad (2.36, \text{а})$$

$$\beta_2 = 1 + \beta_1; \quad (2.36, \text{б})$$

$$\tau_P = \frac{(A_{1p} - A_{2p})(B_{1p} - B_{2p}) - B_{1p}(A_{1p} - A_{2p})}{(A_{1p} - A_{2p})(B_{1M} - B_{2M}) - (B_{1p} - B_{2p})(A_{1M} - A_{2M})}; \quad (2.35, \text{в})$$

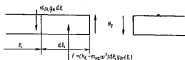
$$\tau_M = \frac{(A_{1M} - A_{2M}) B_{1M} - (B_{1M} - B_{2M}) A_{1M}}{(A_{1M} - A_{2M})(B_{1p} - B_{2p}) - (B_{1M} - B_{2M})(A_{1p} - A_{2p})}; \quad (2.36, \text{в})$$

Зная парциальные коэффициенты податливости (парциальные отклики) и парциальные коэффициенты распределения, нетрудно выразить изгибающие моменты и перерезывающие силы, которые действуют в сечении x на правую часть балки от нагрузки, приложенной слева от этого сечения.

При этом следует воспользоваться приемом, подобным приему составления уравнений (2.31). Нужно учесть, что распределенная поперечная нагрузка $q(z)$ на участке от x до $l + dx$ передается на правую часть балки в виде перерезывающей силы $q_1(z) q(z) dz$ и

изгибающего момента $\gamma_p(\xi) q(\xi) d\xi$. Точно так же распределенный момент $m_s(\xi)$ передается на правую часть балки в виде изгибающего момента $\beta_s(\xi) m_s(\xi) d\xi$ и перерезывающей силы $\gamma_M(\xi) m_s(\xi) d\xi$. Эти перерезывающие силы и моменты, естественно, действуют за счет сил инерции и реакций упругого основания (рис. 18, а и б).

а)



б)

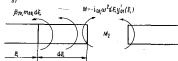


Рис. 18.

В конечном итоге

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= \int_0^x [q_2(\xi) q(\xi) - (k(\xi) - m_s(\xi) \omega^2) v_{02}(\xi)] d\xi + \\
 &+ \sum_{j=1}^n v_2(x_j) P(x_j) + \int_0^x \gamma_M(\xi) m_s(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^n \gamma_M(x_j) M_s(x_j) \quad (2.37, a) \\
 M_1(x) &= \int_0^x \int_0^\xi [q_2(\xi) q(\xi) - (k(\xi) - m_s(\xi) \omega^2) v_{02}(\xi)] d\xi^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^n v_2(x_j) P(x_j)(x - x_j) + \int_0^x \gamma_M(\xi) m_s(\xi) d\xi^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \gamma_M(x_j) M_s(x_j)(x - x_j) + \int_0^x \gamma_p(\xi) q(\xi) d\xi + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \gamma_p(x_j) P(x_j) + \int_0^x [\beta_s(\xi) m_s(\xi) - l_2(\xi) \omega^2 \tilde{v}_{02}(\xi)] d\xi +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^n \beta_s(x_j) M_s(x_j); \quad (2.37, б)$$

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= \int_0^x [q_2(\xi) q(\xi) + (k(\xi) - m_s(\xi) \omega^2) v_{02}(\xi)] d\xi + \\
 &+ \sum_{j=1}^n v_1(x_j) P(x_j) + \int_0^x \gamma_M(\xi) m_s(\xi) d\xi + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \gamma_M(x_j) M_s(x_j); \quad (2.37, в)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1(x) &= \int_0^x \int_0^\xi [q_2(\xi) q(\xi) + (k(\xi) - m_s(\xi) \omega^2) v_{02}(\xi)] d\xi^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^n v_1(x_j) P(x_j)(x - x_j) + \int_0^x \gamma_M(\xi) m_s(\xi) d\xi^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \gamma_M(x_j) M_s(x_j)(x - x_j) + \int_0^x \gamma_p(\xi) q(\xi) d\xi + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \gamma_p(x_j) P(x_j) + \int_0^x [\beta_s(\xi) m_s(\xi) + l_2(\xi) \omega^2 \tilde{v}_{02}(\xi)] d\xi + \\
 &+ \sum_{j=1}^n \beta_s(x_j) M_s(x_j). \quad (2.37, г)
 \end{aligned}$$

В (2.37, в) и (2.37, б) $x_k < x \leq x_{k+1}$; в (2.37, в) и (2.37, г) $x_k > x$.

Дальнейшее решение раздается, как и раньше, на три этапа — определение составляющих прогиба $v_{01}(x)$, $v_{02}(x)$ и $v_{03}(x)$:

$$\left. \begin{aligned}
 v_{01} &= A_{2p} N_2 + A_{2M} M_2, & v_{02} &= A_{1p} N_1 + A_{1M} M_1 \\
 v_{02} &= A_{2p}(x_j) P(x_j) \gamma_2(x_j) + A_{2M}(x_j) P(x_j) \gamma_p(x_j) \\
 v_{03} &= A_{2M}(x_j) M_s(x_j) \beta_2(x_j) + A_{2p}(x_j) M_s(x_j) \gamma_M(x_j)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Точно так же находятся углы поворота сечений

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{v}_{01} &= B_{2p} N_2 + B_{2M} M_2, & \tilde{v}_{02} &= B_{1p} N_1 + B_{1M} M_1 \\
 \tilde{v}_{02} &= B_{2p}(x_j) P(x_j) \gamma_2(x_j) + B_{2M}(x_j) P(x_j) \gamma_p(x_j) \\
 \tilde{v}_{03} &= B_{2M}(x_j) M_s(x_j) \beta_2(x_j) + B_{2p}(x_j) M_s(x_j) \gamma_M(x_j)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.38, а)$$

Напомним, что $v_m(x)$ и $\dot{v}_m(x)$ в точках, где $x \neq x_i$ или $x \neq x_j$, тождественно равны нулю.³

При выполнении расчетов для N_2 и M_2 обычно оказывается более удобным пользоваться дифференциальными зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_2}{dx} &= a_2(x)q(x) - (k(x) - m_2(x)\omega^2)v_m + \tau_m(x)v_m(x) \\ \frac{dM_2}{dx} &= N_2 + q(x)\tau_p(x) + \hat{f}_2(x)m_2(x) - i_2(x)\omega^2\hat{v}_{m1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

В процессе интегрирования (2.39) необходимо учитывать наличие скачков в перемещающихся силах и моментах при переходе через сечения x_i и x_j .

Величины скачков N_2

$$a_2(x_i)P(x_i); \quad \tau_m(x_j)M_2(x_j). \quad (2.40)$$

Величины скачков M_2

$$\tau_p(x_j)P(x_j); \quad \hat{f}_2(x_i)M_2(x_i). \quad (2.40, a)$$

Очень часто, особенно в задачах о вынужденных колебаниях судовых конструкций, внешние распределенные нагрузки отсутствуют и действует одно сосредоточенное усилие (сила или момент). Тогда формулы (2.37) и (2.38) сильно упрощаются.

Например, пусть в сечении x_1 действует сила $P_1 e^{i\omega t}$. Тогда

$$\begin{aligned} v_m &= A_{2p} \left[- \int_{x_1}^x (k(\xi) - m_2(\xi)\omega^2) v_m(\xi) d\xi + x_2(x_1)P_1 \right] + \\ &+ A_{2m} \left[- \int_{x_1}^x \int_{x_1}^{\xi} (k(\xi) - m_2(\xi)\omega^2) v_m(\xi) d\xi + \right. \\ &\left. + x_2(x_1)P_1(x - x_1) + \tau_p(x_1)P_1 \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $x > x_1$.

Если $x < x_1$,

$$v_m = 0. \quad (2.41, a)$$

Аналогично, если $x > x_1$,

$$v_m = 0. \quad (2.41, b)$$

если $x < x_1$.

$$v_m = A_{1p}N_1 + A_{1M}M_1. \quad (2.41, b)$$

³ Как и в случае продольных колебаний стержней, сосредоточенные массы требуют аналогичных добавок.

3. По двойной логической структуре (но не по математической или физической сущности) метод парциальных откликов напоминает метод разложения решений неоднородного дифференциального уравнения в ряд по собственным функциям (метод главных координат в теории колебаний).

Действительно, в методе главных координат мы отбрасываем от неоднородного решения исходного дифференциального уравнения и вместо него составляем и решаем другое, вспомогательное уравнение (свободных колебаний). Последнее выражает определенные физические свойства рассматриваемой системы (собственные частоты и формы). Затем записываем решение исходного уравнения через решение вспомогательного.

В методе парциальных откликов мы также обращаемся к вспомогательному уравнению (резольвентное уравнение), которое выражает некоторые физические свойства системы (ее парциальные отклики на единичные воздействия). После этого, как и в первом случае, решение исходного уравнения записывается через решение вспомогательного.

Физическая природа систем, рассматриваемых методом парциальных откликов, может быть самой разнообразной, так как это по существу весьма общий математический метод для решения крайних задач и дифференциальных уравнений.

Он имеет во многих случаях большие преимущества перед методом разложения решения в ряд по собственным функциям, поскольку заменяет крайнюю задачу задачей Коши.

Его преимущества перед методом начальных параметров состоят в полной устойчивости алгоритма при любых эффектах типа жесткого упругого основания, малого влияния крайних условий на процессы в середине системы или у ее другого конца и т. д.

4. Любой, сколь угодно абстрактный, метод математики сильно выигрывает при его возможном более полном физическом осмыслении и интерпретации.

Для интегрирования уравнений типа (2.38) и (2.34), выражающих парциальные отклики, помимо общих методов решения задач Коши, можно прибегать к моделированию конструкций в виде дискретной системы. Такая модификация метода парциальных откликов развилась в работах В. С. Пузынского [39, 41, 42] раньше, чем основной вариант: она получила название метода последовательного приближения.

Проследим более подробно за таким моделированием для случая стержня переменного сечения, совершающего продольные колебания (рис. 16, а).

Каждый малый элемент стержня длиной Δx_i на участке от x_i до x_{i+1} эквивалентен связи жесткости K_i и массы m_i

$$K_i = E\Omega_i/\Delta x_i; \quad m_i = m_0\Delta x_i.$$

В результате имеем вместо системы с распределенными параметрами цепочку из последовательно соединенных масс и жесткостей (рис. 19, а).

Параллельный отклик системы на участке от o до $(i+1)$ -й массы определяется из следующего обобщенного рекуррентного выражения (см. также рис. 19, а, б и в):

$$A_1(i+1) = \frac{1}{\frac{1}{A_1(i)} + \frac{1}{K_i} - m_i \omega^2} \quad (2.42)$$



Рис. 19.

При выводе (2.42) учитывалось, что для характеристики последовательного соединения крутины следует складывать их податливости, а для характеристик параллельного соединения — складывать жесткости.

Аналогичную формулу можно получить, проинтегрировав дифференциальное соотношение (2.28) по методу Эйлера в пределах от K_i до K_{i+1} :

$$A_1(i+1) = m_i(x_i) \Delta x_i \omega^2 A_1^2(i) + \frac{\Delta x_i}{E \Omega(x_i)} + A_1(i) = m_i \omega^2 A_1^2(i) + \frac{1}{K_i} + A_1(i). \quad (2.42, a)$$

Выражения (2.42) и (2.42, а) оказываются по точности одинаковыми, если учесть, что члены порядка Δx_i^2 малы по сравнению с единицей. В связи с этим, сравнивая (2.42) и (2.42, а), можно установить алгебраический преобразований предел к примерно равенству

$$1 \approx 1 - \frac{m_i \omega^2}{E \Omega(i)} \Delta x_i^2 \left[\frac{A(i) E \Omega(i)}{\Delta x_i + A(i) E \Omega(i)} + 1 + m_i \omega^2 E \Omega(i) A^2(i) \right].$$

Следовательно, переход от распределенной системы к дискретной равносильен по точности дальнейших расчетов интегрированию соответствующего уравнения методом Эйлера.¹

Впрочем, соотношение (2.42) и (2.42, а) можно заменить и с других позиций, если вынести (2.42) несколько иначе. При действии единичной силы в сечении x_{i+1} реакция безынерционной упругой связи жесткости $-m_i \omega^2$ на участок $o-x_{i+1}$ системы равна $[A_1(i) + \Delta A_1(i)] m_i \omega^2 = [A_1(i) + \Delta A_1(i)] m_i \omega^2$ или, с точностью до малых второго порядка, $A_1(i) m_i \omega^2$.

Отсюда (рис. 19, в)

$$A_1(i+1) = \left[A_1(i) + \frac{1}{K_i} \right] [1 + A_1(i) m_i \omega^2] = A_1(i) + \frac{1}{K_i} + A_1^2(i) m_i \omega^2 + \frac{m_i \omega^2}{E \Omega(i)} A_1(i) \Delta x_i^2 \approx A_1(i) + \frac{1}{K_i} + A_1^2(i) m_i \omega^2.$$

Этот же подход применим теперь для вывода рекуррентных формул в случае вынужденных колебаний невращающейся балки (рис. 17). Последняя может быть представлена в виде шарнирной цепочки (рис. 20, а), в которой жесткость на сдвиг механизма звена от x_i до x_{i+1} равна $\left[\frac{\Delta x}{G \Omega(i)} \right]^{-1} = G_i$, жесткость шарнира звена за кагал $E I_i / \Delta x_i = K_{i0}$, жесткость упругой опоры $\Delta x_i (h_i - m_i \omega^2) = K_i$, жесткость безынерционной упругой связи при вращении $-\Delta x_i I_{i0} \omega^2 = -K_{i0}$.

Рассечем звенья и приложим в этом месте единичные усилия (рис. 20, б). После отбрасывания величин порядка Δx_i^2 будем иметь

$$A_{1,2}(i+1) = A_{1,2}(i) + A_{1,2}^2(i) (K_i - B_{1,2}(i) \Delta x_i - A_{1,2}(i) \Delta x_i + A_{1,2}(i) B_{1,2}(i) K_{i0} - \frac{1}{G_{i2}}). \quad (2.43)$$

Точно такое же выражение получается при интегрировании дифференциального соотношения (2.34, б) по способу Эйлера. Следовательно, вывод для остальных откликов можно и не приводить.

Переход от дифференциальных соотношений к соотношениям конечных разностей, означающий замену распределенной системы

¹ Отметим, что замена сплошного стержня дискретной системой и последующее использование зависимостей (2.42) составляет суть метода конечных элементов (М. П. Т и р с к и х [34]), который широко применяется в расчетах крутильных колебаний металлических конструкций, однако там используются другие физические представления и другая аналитическая аппаратура.

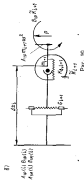
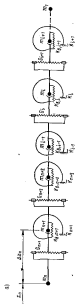


Рис. 18

и действующей на нее нагрузкой дискретной системой под сосредоточенными нагрузками, бывает полезным и для расчета перемещений.¹

В случае колебаний стержня переменного сечения (рис. 15) будем относить всю силу на участке от x_i до x_{i+1} к массе m_{i+1} . Тогда [см. формулы (2.31) и рис. 20, б)]

$$m_{ei}(i+1) = A_{ei}(i+1) \left[\sum_{j=0}^{i-1} (P_j z_{ej}(i) - M_j x_{ej}(i)) \right], \quad (2.44)$$

причем

$$m_{ei}(0) = m_{e1}(1) = 0.$$

Аналогичным путем в отношении непрямоугольной балки (рис. 17) дает [см. формулы (2.37)–(2.39)]

$$\left. \begin{aligned} N_2(i+1) &= \alpha_2(i) q(i) \Delta x_i - K_j p_{ei}(i) + \alpha_2(i) P_i + \\ &+ \gamma_{ji}(i) M_{ji}(i) + \gamma_{ji}(i) m_{ji}(i) \Delta x_i + N_2(i) \\ M_2(i+1) &= N_2(i) \Delta x_i + q(i) \gamma_{ji}(i) \Delta x_i + \beta_{ji}(i) m_{ji}(i) \Delta x_i - \\ &- i_{ji}(i) \omega^2 \Delta x_i \tilde{u}_{ji}(i) + \gamma_{ji}(i) P_i + \beta_{ji}(i) M_{ji}(i) \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{ei}(i+1) &= A_{2p}(i+1) N_2(i+1) + A_{2m}(i+1) M_2(i+1) \\ \tilde{u}_{ei}(i+1) &= B_{2p}(i+1) N_2(i+1) + B_{2m}(i+1) M_2(i+1) \end{aligned} \right\} \quad (2.45, a)$$

причем

$$v_{ei}(0) = v_{e1}(1) = N_2(0) = N_3(1) = M_2(0) = M_3(1) = 0.$$

В заключение заметим, что все приведенные выше рекуррентные зависимости могут быть записаны более компактно в матричной форме. Однако никакого облегчения самого процесса расчета эта компактная запись вычислительного алгоритма не дает. Поэтому мы к ней прибегать не будем.²

5. Метод парциальных откликов может быть естественным образом развит и дополнен.

Если приложить к любой консервативной системе внешнее сосредоточенное гармоническое воздействие, то нетрудно построить график ее динамической жесткости в нагруженном сечении как функцию частоты. Обращение жесткости в нуль означает резонанс, т. е. соответствует собственной частоте (рассматривать податливость здесь менее удобно, поскольку она в зоне резонанса обращается в бесконечность, и графики значительно менее явны). Построение формы свободных колебаний после этого затруднений не вызывает.

¹ Соответствующие алгоритмы были созданы в работах С. В. Соколовского и др.

² Метод последовательного преобразования применимо к расчету колебаний упругих систем был развит в матричной форме В. К. Дольдз и А. С. Киям (см., например, его книгу «Расчет колебаний упругих систем на ЭВМ», изд-во «Машиностроение», 1963).

Здесь, конечно, требуется элементарный физический контроль, чтобы не потерять случайно тех форм, для которых обобщенная сила от данной нагрузки обращается в нуль (в случае сомнений полезно, кроме того, прикинуть в том же сечении усилие другого рода или такое же усилие в другом сечении).

Полти аналогично проверяется устойчивость. Расчет особенно прост, если не нужно устанавливать точного значения эйлеровой нагрузки, а требуется лишь убедиться в безопасности данного конкретного нагружения (с каким-то коэффициентом запаса). Тогда

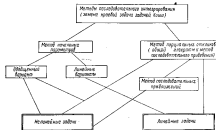


Рис. 21.

к нагрузочной конструкции следует опять-таки приложить пробное возмущающее усилие и рассчитать деформации в точке его приложения, т. е. найти соответствующую жесткость. Если эта жесткость положительна, то конструкция устойчива, если она равна нулю или отрицательна, то устойчивость нарушена.

В нелинейных задачах метод парциальных откликов применим в сочетании с методом последовательных приближений. Скажем, исследуя колебания сложной системы с внутренними неупругими сопротивлениями по гипотезе Пановко, следует ориентировочно задать коэффициентами сопротивления до линейной гипотезе Сорокина и рассчитать систему. Затем по известным амплитудам деформации любого элемента можно вычислить уточненные значения квазилинейных коэффициентов, а затем повторить расчет и т. д.

Для упруго-пластических задач сочетание метода парциальных откликов с последовательными приближениями равносильно применению известного метода упругих решений, но с упрощенным алгоритмом расчета линейных систем.

Если зона упруго-пластических деформаций невелика, как это было в рассмотренном выше случае балки на упругом основании, то часто оказывается удачной комбинация метода парциальных откликов с обобщенным методом начальных параметров: первый используется в упругой области, вторым «проходить» упруго-пластическую зону.

Наглядная схема метода последовательного интегрирования уравнений строительной механики, основанных на замене крайних задач задачами типа Коши, показана на рис. 21.

§ 3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ПАРЦИАЛЬНЫХ ОТКЛИКОВ

Прежде чем решать конкретные задачи, необходимо рассмотреть особенности применения метода в отношении систем со свободными краями. Дело в том, что начальные условия дифференциальных уравнений типа (2.28); (2.34); (2.42) и (2.43) для парциальных откликов в случае свободного края обращаются в бесконечность.

Загромождение, возникающее при численном интегрировании указанных уравнений, можно частично преодолеть, если перейти от определения парциальных откликов системы к определению парциальных жесткостей, т. е. величин, обратных парциальным откликам.

Например, при исследовании вынужденных колебаний безопорных непрямоугольных балок следует ввести парциальные жесткости

$$K_{\mu\mu} = \frac{1}{\Delta_{\mu\mu}}; \quad K_{\mu\eta} = \frac{1}{\Delta_{\mu\eta}}; \quad K_{\eta\mu} = \frac{1}{\Delta_{\eta\mu}}; \quad K_{\eta\eta} = \frac{1}{\Delta_{\eta\eta}}. \quad (2.46)$$

Тогда формулы (2.34) преобразуются к виду¹

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{K_{\mu\mu}} \right) = \frac{1}{K_{\mu\mu}} \frac{1}{K_{\mu\mu}} [k(x) - m_0(x) \omega^2] - \frac{1}{K_{\mu\eta}} + \frac{i_0(x) \omega^2}{K_{\eta\mu} K_{\mu\mu}}, \quad (2.47)$$

откуда

$$\frac{dK_{\mu\mu}}{dx} = -\frac{K_{\mu\mu}}{K_{\mu\mu}} [k(x) - m_0(x) \omega^2] + \frac{K_{\mu\mu}^2}{K_{\mu\eta}} - \frac{K_{\mu\mu} i_0(x) \omega^2}{K_{\eta\mu}}; \quad (2.47, a)$$

$$\frac{dK_{\mu\eta}}{dx} = \frac{K_{\mu\eta}^2}{G(x)} - [k(x) - m_0(x) \omega^2] - \frac{K_{\mu\eta}^2 i_0(x) \omega^2}{K_{\eta\mu} K_{\mu\mu}} + \frac{K_{\mu\eta}^2}{K_{\mu\mu}} + \frac{K_{\eta\eta}^2}{K_{\mu\mu}}; \quad (2.47, б)$$

$$\frac{dK_{\eta\eta}}{dx} = -\frac{K_{\eta\eta}}{EJ(x)} i_0(x) \omega^2 - \frac{K_{\eta\eta}^2}{K_{\mu\eta} K_{\mu\mu}} [k(x) - m_0(x) \omega^2]. \quad (2.47, в)$$

¹ Индекс 1 (2) у жесткостей, соответствующий индексу 1 (2) у откликов, здесь и далее для упрощения записи опускаю.

Чтобы вычислить значения жесткостей на свободном конце балки, не прибегая к упрощениям, рассмотрим параллельные отклики скалы уголка малого элемента балки длиной dx (рис. 22, а и б). Распределенные упругие и вращательные свойства элемента можно приближенно заменить сосредоточенными жесткостями и податливостями: жесткость при вертикальном смещении элемента $[k(0) - \alpha_0(0)\omega^2]dx$, жесткость при повороте элемента $[-i_0(0)\omega^2 dx]$, податливость при повороте моментом за счет изгиба $\frac{dx}{EI(0)}$, податливость при сдвиге перерезывающей силой $\frac{dx}{GQ(0)}$. Если dx стремится к нулю, приведенное моделирование элемента становится точным.

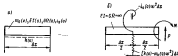


Рис. 22.

Учтем, что при действии силы P возникает изгибающий момент порядка $\left(-\frac{1}{2}Pdx\right)$, вращающий элемент относительно оси жесткости $[-i_0(0)\omega^2 dx]$. Пренебрегая сложными вычислениями и пренебрегая малыми порядками dx^2 по сравнению с единицей, найдем

$$\left. \begin{aligned} A_P(dx) &= -\frac{1}{[k(0) - \alpha_0(0)\omega^2]dx}; & B_P(dx) &= \frac{1}{2i_0(0)\omega^2} \\ A_M(dx) &= -\frac{1}{2i_0(0)\omega^2}; & B_M(dx) &= -\frac{1}{i_0(0)\omega^2 dx} \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

$$\left. \begin{aligned} K_P(dx) &= -[k(0) - \alpha_0(0)\omega^2]dx; & K_{\alpha\alpha}(dx) &= 2i_0(0)\omega^2 \\ K_M(dx) &= -2i_0(0)\omega^2; & K_{\alpha k}(dx) &= -i_0(0)\omega^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (2.48, a)$$

При стремлении dx к нулю справа получаем

$$\left. \begin{aligned} K_P(0) &= K_{\alpha\alpha}(0) = 0; & K_{\alpha P}(0) &= -K_M(0) = 2i_0(0)\omega^2 \\ A_P(0) &= B_M(0) = -\infty; & B_P(0) &= -A_M(0) = \frac{1}{2i_0(0)\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.48, b)$$

Если бы мы подошли к определению параллельных жесткостей и податливостей системы и нулю из упрощательных соображений

о конструкции закрепления края, т. е. как бы при стремлении dx к нулю слева, результат был бы иным

$$\left. \begin{aligned} K_P(0) &= K_{\alpha\alpha}(0) = K_{\alpha P}(0) = K_{\alpha k}(0) = 0 \\ A_P(0) &= B_P(0) = -\infty; & A_M(0) &= B_M(0) = \infty \end{aligned} \right\} \quad (2.48, в)$$

Разница между значениями жесткостей $K_{\alpha P}$, K_M при стремлении dx к нулю справа (2.48, б) и слева (2.48, в) позволяет утверждать, что они внутри интегриала $-\infty < x < 0 \rightarrow dx$ изменятся подобно функциям Хевисайда нулевого порядка $\phi_0(x)$.

Формулы (2.48, а) позволяют переписать уравнения (2.47, б) и (2.47, в) в виде, пригодном для численного интегрирования,

$$\left(\frac{dK_P}{dx}\right)_{x=0} = -[k(0) - \alpha_0(0)\omega^2]; \quad \left(\frac{dK_{\alpha P}}{dx}\right)_{x=0} = i_0(0)\omega^2. \quad (2.49)$$

Производные $\left(\frac{dK_{\alpha P}}{dx}\right)_{x=0} = -\left(\frac{dK_M}{dx}\right)_{x=0}$ как следует из

(2.47, а), (2.48, б) и (2.48, в), обращаются в $-\infty$.

Смысл этого мы уже выяснили при сравнении формул (2.48, б) и (2.48, в). Жесткости $K_{\alpha P}(x)$ и $K_M(x)$ изменяются при переходе через $x = 0$ как функции $\phi_0(x)$.

Таким образом,

$$K_{\alpha P}(0 + \Delta x) = -K_M(0 + \Delta x) = K_{\alpha P}(0 - dx) = 2i_0(0)\omega^2. \quad (2.49, a)$$

Аналогично и столь же строго могут быть преодолены трудности численного интегрирования дифференциальных соотношений для параллельных откликов и жесткостей других систем со свободными краями. Впрочем, указанные трудности гораздо проще исключить, пользуясь приближенной физической моделью системы, например типа рис. 22. Такую модель следует рассматривать аналитическими методами (свойства участка равномерно распределены по длине), либо, когда это не вызывает сомнений, упрощенно; например, как бы отбрасываемый участок с краю системы всегда соединяет для оставшейся части «заделку» конечной податливости.

Вынужденная поперечная вибрация корпуса судна. Замесам корпус судна свободной неспрямительной балкой (рис. 23, а). Рассмотрим его вынужденную поперечную высокочастотную вибрацию от действия пульсирующих давлений, передаваемых через обшивку кормовой части корпуса, которые возникают при работе высокооборотных гребных винтов. Представим действие давлений как действие сосредоточенной силы P , гармонически колеблющейся с частотой ω , приложенной к нулевому срезному сечению корпуса. Учтем сдвиг и аккорно вращающиеся поперечные сечения, а также силы

¹ Напомним, что $\phi_0(x = 0) = -1$ и $\phi_0(x > 0) = 0$.

внутреннего неупругого сопротивления. Последние примем, следуя гипотезе Фокса (1.5).

Вспользуемся комплексной формой решения и представим поперечную силу и внутреннюю жесткость балки в виде (1.14), (1.17)

$$\bar{P}(t) = P_0 e^{i\omega t}; \quad \bar{EI} = EI(1 - i\nu\omega). \quad \bar{GQ} = GQ(1 - i\nu\omega).$$

Будем искать амплитуды вибрации корпуса судна и его мгновенную форму изгиба методом парциальных откликов¹.

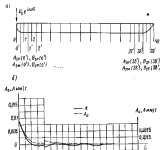


Рис. 23.

Данные о распределенных параметрах корпуса рассчитываемого судна представлены в табл. 2 по 40 равноотстоящим сечениям (за нулевое сечение корпуса избрано кормовое, в котором приложена сила P). Частота возмущающей силы P принята равной 140 1/сек.

Общие данные о корпусе судна:

Длина корпуса	$L=118$ м
Вес корпуса с присоединенной массой жидкости	$D=5080$ т
Модуль нормальной упругости	$E=2 \cdot 10^{11}$ кг/м ²
Модуль сдвига	$G=8 \cdot 10^9$ кг/м ²
Коэффициент внутреннего неупругого сопротивления	$\nu=0,01$ 1/сек.

¹ Напомним, что постоянной формы колебаний у балки с внутренними сопротивлениями нет, и поэтому можно говорить только о «фотографии» упругой линии при фиксированном значении времени t .

Таблица 2

Орианта распределенных параметров балки (корпуса)

№ расчетных сечений j	Момент инерции поперечного сечения I_j , м ⁴	Площадь периферической стенки S_j , м ²	Плотность материала с учетом присоединенной массы жидкости ρ_j , кг/м ³	Момент инерции масс I_{mj} , кг·м ⁴
40	0,00	0	7,1	0,00
38	1,45	0,044	9,02	1,40
36	1,55	0,088	16,6	2,30
34	2,60	0,132	23,25	3,54
32	2,75	0,132	28,5	4,56
30	2,60	0,132	36,4	5,84
28	2,60	0,132	52,8	8,00
26	2,65	0,132	59,8	10,1
24	3,12	0,132	88,7	10,5
22	3,45	0,132	88,8	11,4
20	3,75	0,140	69,0	12,3
18	3,75	0,140	72,0	12,4
16	3,55	0,132	66,8	11,6
14	3,20	0,125	64,5	9,8
12	2,60	0,118	62,0	8,5
10	1,85	0,116	59,4	7,4
8	1,37	0,110	46,3	6,80
6	1,05	0,086	33,85	5,75
4	0,65	0,066	7,4	4,23
2	0,45	0,037		
0	0,00	0,037		

Из формул (2.41); (2.41, б) видно, что для расчета вибрации корпуса судна при расположении возмущающей силы на срезах кормы нам потребуется найти парциальные отклики частот корпуса справа (\bar{A}_{2p} , \bar{A}_{2s} , \bar{B}_{2p} и \bar{B}_{2s}), коэффициент распределения силы P [$\tau_2(x=0)$] и коэффициент момента от силы P [$\gamma_2(x=0)$].

Выберем шаг интегрирования $\Delta x = 1/4 L = 2,95$ м. Парциальные отклики системы справа в первом от 40-го массового сечения корпуса найдем по формулам типа (2.49), (2.49, а)

$$\bar{A}_{2p}(x_0 - \Delta x) = -\frac{\Delta x - i}{-\pi_2(40)\omega^2}; \quad \bar{B}_{2p}(x_0 - \Delta x) = \frac{1}{\pi_2(40)\omega^2};$$

$$\bar{A}_{2s}(x_0 - \Delta x) = -\frac{1}{\pi_2(40)\omega^2}; \quad \bar{B}_{2s} = \frac{\Delta x - i}{\pi_2(40)\omega^2}.$$

Дальнейшие вычисления выполняются по рекуррентным соотношениям вида (2.34, а, б, в), интегрируя их способом Эйлера. Результаты расчета откликов приведены в табл. 3.

Таблица 3

Величины парциальных откликов балки сарая

l	$10^4 \bar{A}_{1p}^{(l)}, \text{ м/м}$	$10^4 \bar{A}_{2p}^{(l)}, \text{ 1/м}$	$10^4 \bar{A}_{3p}^{(l)}, \text{ 1/м}$
40	-10,6	0	3,04
36	-5,63 - i0,045	-1,542 - i0,0388	0,0633 + i0,002
32	3,37 - i0,082	-0,288 - i0,0445	-0,0718 + i0,009
28	-2,16 - i0,066	-0,030 - i0,1430	0,0402 - i0,030
24	-2,65 - i0,553	-0,235 - i0,047	0,0556 - i0,036
20	1,54 - i0,380	-0,158 - i0,037	-0,0427 - i0,119
16	-1,34 - i0,402	-0,230 - i0,360	-0,0402 - i0,100
12	-1,19 - i0,276	-0,145 - i0,066	-0,0125 - i0,313
8	-1,16 - i0,306	-0,148 - i0,068	-0,0020 - i0,089
4	-1,03 - i0,190	-0,125 - i0,018	-0,0068 - i0,088
0	-1,35 - i0,576	-0,128 - i0,058	0,0093 + i0,101
16	-1,38 - i0,430	-0,184 - i0,071	0,0102 + i0,132
12	-1,41 - i0,490	-0,196 - i0,083	0,0153 - i0,0553
8	-1,47 - i0,589	-0,198 - i0,085	0,0143 - i0,1093
4	-1,66 - i0,668	-0,223 - i0,105	0,0147 - i0,1270
0	-1,90 - i0,708	-0,268 - i0,130	0,0162 - i0,1600
16	-2,57 - i1,059	-0,368 - i0,182	0,0273 - i0,2110
12	-3,80 - i1,523	-0,548 - i0,231	0,0527 - i0,285
8	-5,410 - i2,125	-0,752 - i0,232	0,0907 + i0,410
4	-7,79 - i3,713	-1,254 - i0,138	0,1620 + i0,737

При определении коэффициентов $\bar{a}_2^{(l)}(0)$ и $\bar{\gamma}_p^{(l)}(0)$ учтем, что отклики \bar{A}_{1p} и \bar{B}_{1p} бесконечно велики ($\bar{A}_{1p} = -\infty$, $\bar{B}_{1p} = \infty$). Тогда по формулам (2.35), (2.35, б) будем иметь

$$\bar{a}_2^{(l)}(0) = +1; \quad \bar{\gamma}_p^{(l)}(0) = 0.$$

Теперь по формуле (2.41) вычислим комплексные прогибы корпуса \bar{v}_m от действия силы \bar{P} в сечениях, где $x > x_0$. Прогиб \bar{v}_m оказывается, естественно, равным нулю. Прогиб \bar{v}_m не равен нулю только в нулевом кормовом сечении

$$\bar{v}_m(0) = P_0 \bar{A}_{1p}(0).$$

Амплитуды суммарных прогибов балки A_2 и мгновенная форма изогнутой линии A показаны на графиках (рис. 23, б) в тот момент, когда прогиб в кормовом сечении достигает максимума.

Интересно проследить, что получается, если для решения этой же задачи воспользоваться методом начальных параметров, дополнив его численным интегрированием известных граничных условий на левом конце балки.

При $x = 0$ имеем

$$\bar{N}(0) = \bar{P}; \quad \bar{M}(0) = 0; \quad \bar{v}(0) \neq 0; \quad \bar{v}'(0) \neq 0.$$

Задан ряд численных значений $\bar{a}_2^{(l)}(0)$ и $\bar{\gamma}_p^{(l)}(0)$ и, воспользовавшись алгоритмом типа (2.20)–(2.22), находим

$$\bar{M}(L) = \bar{f}_1(\bar{v}(0), \bar{v}'(0)); \quad \bar{N}(L) = \bar{f}_2(\bar{v}(0), \bar{v}'(0)). \quad (2.50)$$

Заметим, что вычислительный алгоритм метода начальных параметров совершенно идентичен алгоритму метода парциальных откликов.

Пусть, для простоты рассуждений, равенства (2.50) будут известными. Тогда в плоскости параметров $\bar{v}(0)$ и $\bar{v}'(0)$ можно построить прямые (рис. 24) $\bar{f}_1 = 0$; $\bar{f}_2 = 0$.

Точка пересечения этих прямых позволяет установить искомого значения параметров $\bar{v}(0)$ и $\bar{v}'(0)$, поскольку граничные условия на правом конце балки окажутся выполненными.

$$\bar{M}(L) = \bar{N}(L) = 0. \quad (2.50, а)$$

Анализ численного результата, полученного при решении задачи методом парциальных откликов, свидетельствует о быстром убывании амплитуд изгибов балки по мере удаления от точки, в которой приложено возмущение, вследствие большого внутреннего демпфирования в системе. Отсюда ясно, что даже самые значительные изменения варьируемых параметров мало сказываются на величинах $\bar{M}(L)$ и $\bar{N}(L)$ (2.50). Следовательно, решения уравнений $\bar{f}_1 = 0$ (2.50, а) оказывают здесь весьма неточными даже при очень малом (но конечном) шаге интегрирования, поскольку искомые $\bar{v}(0)$ и $\bar{v}'(0)$ определяются из сравнения весьма близких величин.

Ошибка решения уравнений (2.50, а) зависит, таким образом, от абсолютной ошибки вычисления $\bar{M}(L)$ и $\bar{N}(L)$. Ошибка же решения по методу парциальных откликов эквивалентна ошибке в определении самих величин $\bar{M}(L)$ и $\bar{N}(L)$, т. е. определяется относительной погрешностью вычислительного алгоритма.

Определение низких частот собственных поперечных колебаний корпуса судна. Низкие частоты собственных поперечных колебаний представляют большой интерес при проектировании судна. Они необходимы для оценки низкочастотных вибраций и расчета прочности корпуса под действием динамических составляющих внешних сил.

Найдем верные три частоты собственных колебаний пластического судна с учетом деформаций сдвига и инерция вращения поперечных сечений, но без учета сил внутреннего изогнутого



Рис. 24.

¹ В аналогичной задаче условия $\bar{f}_1 = 0$ и $\bar{f}_2 = 0$ будут выражаться на плоскости параметров $\bar{v}(0)$ и $\bar{v}'(0)$ кривыми.

сопротивления. Отметим, что последнее справедливо только для малых форм колебаний.

Распределенные параметры судна заданы в табл. 4.

Таблица 4

Общие данные распределенных параметров балки

№ расчет- ных (эле- ментов) j	Момент инер- ции попереч- ного сечения $J_j, \text{м}^4$	Площадь пер- вичальной стенки $S_j, \text{м}^2$	Полные обра- ботанные веса с учетом при- соединенных масс жидко- сти $G_j, \text{м/м}$	Момент инер- ции криво- линейной массы $I_{G_j}, \text{м}^4/\text{сек}^2$
40	0,00	0	3,64	0,11
38	0,346	0,234	4,32	0,12
36	0,535	0,351	5,73	0,16
34	0,695	0,467	6,74	0,20
32	0,83	0,473	11,0	0,33
30	0,936	0,379	17,1	0,51
28	1,02	0,178	18,7	0,56
26	1,10	0,172	18,9	0,60
24	1,16	0,167	21,2	0,65
22	1,20	0,162	25,1	0,80
20	1,21	0,155	27,3	0,85
18	1,21	0,145	26,2	0,81
16	1,19	0,133	24,5	0,72
14	1,09	0,119	23,5	0,66
12	0,75	0,105	22,5	0,63
10	0,400	0,096	19,8	0,60
8	0,265	0,089	19,7	0,58
6	0,244	0,085	19,4	0,62
4	0,200	0,077	18,4	0,53
2	0,150	0,070	17,8	0,40
0	0,10	0,064	5,80	0,16

Общие данные о корпусе судна:

Длина корпуса	$L=39 \text{ м}$
Вес корпуса с присоединенной морской жидко- сти	$D=600 \text{ т}$
Модуль кривизны упругости	$E=1,8 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$
Модуль сдвига	$G=0,4 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$

Вычислим, подобно предыдущему примеру, парциальные жесткости корпуса справа (или слева) при различных значениях частоты колебаний ω . В результате расчета построим график какой-либо жесткости корпуса, например по отношению к прогибу под силой, приложенной в нулевом сечении, в зависимости от частоты

$$[K_{32}(\omega)]_{x=0} = f(\omega).$$

Равенство $K_{32}(\omega) = 0$ будет означать, что при переходе частоты ω через значение ω_1 функция $K_{32}(\omega)$ меняет знак — имеет место резонанс.

Результаты расчета представлены графиками $[K_{32}(\omega)]_{x=0}$ на рис. 25. Пунктиром показаны кривые жесткости, вычисленные без учета сдвига и инерции вращения поперечных сечений корпуса. Полученное различие решений незначительно, поскольку модуль пластмассы на сдвиг, введенный в расчет, гораздо меньше нормального модуля упругости, чем то предполагается в случае изотропной среды $[G \approx \frac{E}{2(1+\mu)}]$.

Нагиб корпуса судна при постановке в док. Расчет прочности судна в доке связан с известными трудностями, особенно для исследуемой нагиба балок, лежащих на жестком упругом основании.

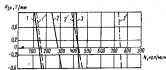


Рис. 25.

Имеются специальные приближенные способы, которые позволяют избежать вычисления малой разности близких величин.²

Способ парциальных откликов не связан, как уже указывалось, с появлением малых жесткостей и поэтому должен оказаться эффективным и для расчета упругой линии корпуса судна в доке.

Рассмотрим пример, рассмотренный ранее приближенными способами Ф. С. Шлезингом, А. В. Масыгиным и Л. В. Диковичем. Исходные данные расчета представлены в табл. 5.

Общие данные о корпусе судна:

Длина корпуса	$L=136 \text{ м}$
Вес корпуса в доке	$D=6270 \text{ т}$
Модуль кривизны упругости	$E=2 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$

Начальные значения парциальных жесткостей корпуса (рис. 25, а) с края ($x=0, L$) определим, рассматривая деформации элемента (рис. 25, б). В отличие от предыдущих задач, данный элемент лишен жесткостей, препятствующих его вращению и прогибу за счет инерции масс поперечных сечений. Поэтому

¹ Этот и следующий расчет выполнен авторами С. В. Соколовым и использованном ЭИИИ.

² Один из указанных способов разработан Л. В. Диковичем.

Таблица 5

Ординаты распределенных параметров балки

№ расчетной балки	Момент инерции поперечного сечения I , м ⁴	Плотная ордината веса q , кН/м	Жесткость упругого основания k , 10 ⁻³ кН/м ³	№ расчетной балки	Момент инерции поперечного сечения I , м ⁴	Плотная ордината веса q , кН/м	Жесткость упругого основания k , 10 ⁻³ кН/м ³
0	12,7	46,0	10	11	20,6	46,0	12,5
1	16,0	46,0	10	12	19,0	39,0	12,5
2	18,3	46,0	10	13	29,0	41,2	12,5
3	20,4	47,0	10	14	22,7	46,0	12,5
4	21,5	46,0	10	15	18,4	48,7	10
5	22,3	44,3	12,5	16	15,7	48,7	10
6	22,7	44,3	12,5	17	13,9	38,5	10
7	22,9	48,0	12,5	18	11,3	22,5	10
8	26,9	39,0	22,5	19	10,0	15,9	10
9	22,5	48,0	12,5	20	8,9	15,2	10
10	21,7	43,7	12,5				

Таблица 6

Значения нормальных отклонений корпуса слева и справа (α/α_0)

№ сечения	$-\Delta_{10} 10^3$	$\Delta \Delta_{10} 10^3$	$\Delta \Delta_{10} 10^3$	$\Delta_{20} 10^3$	$\Delta \Delta_{20} 10^3$	$-\Delta \Delta_{20} 10^3$
1	—	—	—	7,3	2,7	1,6
2	—	—	—	7,6	2,6	1,5
3	45,8	24,7	16,9	7,3	2,8	1,4
4	19,5	6,7	4,6	6,9	2,3	1,4
5	18,0	4,8	2,5	6,6	2,2	1,5
6	9,4	3,1	1,6	6,0	2,3	1,3
7	7,4	3,4	1,3	6,7	2,3	1,3
8	6,8	3,2	1,3	6,7	2,3	1,4
9	6,5	2,2	1,3	6,7	2,3	1,4
10	6,5	2,2	1,3	6,7	2,3	1,4
11	6,5	2,2	1,3	6,7	2,3	1,4
12	6,7	2,4	1,4	6,9	2,3	1,4
13	6,9	2,4	1,5	7,4	2,5	1,4
14	6,6	2,4	1,3	8,7	3,0	1,7
15	6,9	2,3	1,3	10,7	3,7	2,1
16	6,7	2,4	1,4	13,4	6,2	2,5
17	7,5	2,5	1,6	19,8	9,0	2,8
18	7,6	2,6	1,6	41,0	25,9	17,3
19	8,4	3,2	2,1	—	—	—
20	8,9	3,4	2,3	—	—	—

соответствующие формулы для жесткостей отличаются от формул (2.48), (2.48, а)

$$\left. \begin{aligned} K_p &= -\frac{k(0) \Delta x}{4}; & K_{sp} &= -\frac{k(0) \Delta x^2}{6} \\ K_m &= -\frac{k(0) \Delta x^2}{6}; & K_{sm} &= -\frac{k(0) \Delta x^3}{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

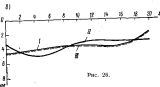
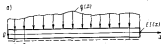


Рис. 26.

Выполнив первый шаг расчета с помощью выражений (2.51), дальнейшее интегрирование уравнений (2.54) будем вести методом Эйлера. Шаг интегрирования примем $\frac{1}{40} L = 0,075$ м.

Значения найденных нормальных отклонений корпуса слева и справа и коэффициентов α , β , а также коэффициентов момента γ_p и перерывающей силы γ_m представлены в табл. 6.

Приближенные значения кривых при повторном интегрировании выражений (2.57) и последовательной подстановке результатов в (2.58). Их величины показаны на графике рис. 26, а (кривая I).

На том же рисунке для сравнения представлены кривая III, полученная Ф. С. Шляхеевым, А. В. Масляным и кривая II,

полученная Л. В. Диконичем. Точность приближенного решения Л. В. Диконича, как видно на рисунке, фактически совпадает с точностью нашего решения (при выбранном шаге интегрирования). Погрешность решения Ф. С. Шамова и А. В. Масляникова оказывается существенно большей.

Глава III

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ ПУТЕМ ВАРИИРОВАНИЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

§ 1. ОСНОВНАЯ ИДЕЯ ОЦЕНКИ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

1. При использовании приближенных решений задач строительной механики, теории упругости, пластичности и ползучести неизбежно возникает вопрос об оценке их точности. Указанная оценка представляет обычно значительные трудности и часто производится различными несовершенными приемами (изменение решения при удержании следующего члена ряда, сравнение n -го и $(n+1)$ -го приближений, увеличение числа точек тела или моментов времени, где точно удовлетворяются исходные уравнения задачи и т. д.).

Между тем в ряде случаев нетрудно оценить точность решения. Рассмотрим обратную задачу. Для этого достаточно определить, при каких исходных данных полученное конкретное приближенное решение оказывается точным. Если эти измененные (фигурные) данные, соответствующие полученному решению, мало отличаются от действительных исходных данных, то решение, естественно, рассматривать как удовлетворительное. Более того, оно может оказаться практически точным, если найденное отличие лежит в пределах точности задания исходных данных. Такой способ оценки отличается обычно относительной простотой и наглядностью.

2. В качестве простого примера рассмотрим свободно опертую балку переменно го сечения, длина которой равна l , а момент инерции изменяется по закону (начало координат на левом конце балки)

$$I(x) = I_0 \left[1 + \frac{x}{l} + \left(1 - \frac{2x}{l} \right)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p .

Разлагая прогиб v в виде одного члена ряда Фурье, получаем

$$v = \frac{16}{\pi^3 (5\pi^2 + 4)} \frac{p l^4}{E I_0} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.2)$$

Найденное решение может рассматриваться как точное для фиктивной нагрузки, которая дает изгибающий момент

$$M_0 = E I(x) v'' = 0,1 p l^3 \left(1 + \frac{x}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.3)$$

Истинный изгибающий момент

$$M = \frac{p x^2}{2} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (3.4)$$

Сравнение M и M_0 (рис. 27, а) показывает достаточную точность решения (максимальное расхождение моментов не превышает 20%). Ясно, что ошибка в определении прогиба будет еще меньшей.

Упомяну в параллельных задачах целесообразно варьировать жесткость конструкции. Так, рассчитывая ту же балку, но с постоянным моментом инерции сечения I_0 , и удерживая один член ряда Фурье, получим

$$v = \frac{4}{\pi^4} \frac{p l^4}{E I_0} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.5)$$

Зависимость (3.5) будет точным выражением для прогиба балки с переменным моментом инерции сечения

$$I_0 = I_0 \frac{v^2}{8} \frac{x}{l} \frac{1 - \frac{x}{l}}{\sin \frac{\pi x}{l}}. \quad (3.6)$$

Расхождение между I_0 и I_0 не превышает 20% (рис. 27, б). Эта разница может быть компенсирована изменением высоты профиля всего на 5—6%.

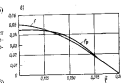
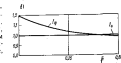
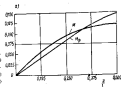


Рис. 27

1. Приведенные простые примеры хорошо поясняют сущность метода, но не являются показательными. Предлагаемый метод часто бывает эффективным для нелинейных задач, где оценка точности решения другими способами затруднена.

Так, например, исследуя резонансные колебания судовых пластин с учетом влияния распора, естественнее всего задать ее постоянной формой прогиба балка-полоски пластины $\varphi(x)$, которая найдена из соответствующего дифференциального уравнения.

Использование затем уравнений Лагранжа второго рода позволяет получить известное уравнение Диффеншта

$$\ddot{v} + Bv^3 + Cv = P_0 \sin \omega t, \quad (3.7)$$

где B, C — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров пластины, $v = v(t)$ — перемещение точки приведения, а которой $\varphi(x) = 1$, P_0 — амплитуда возмущения, вызываемого гидродинамическим давлением и силами инерции при переносе движения пластины вместе с опорным контуром.

Если задаться в первом приближении

$$v(t) = f_0 \sin \omega t \quad (3.8)$$

и применить метод Бубнова—Галеркина, то будем иметь для f_0 кубическое уравнение

$$\frac{4}{3} B f_0^3 + (C - \omega^2) f_0 - P_0 = 0. \quad (3.9)$$

Указанный способ расчета весьма прост, однако его точность может на первый взгляд вызвать сомнение, поскольку в различные моменты времени форма изгибающей пластины должна несколько изменяться. Кроме того, выражение (2.8) представляет именно первое приближение.

Чтобы оценить полученное решение, удобно рассуждать следующим образом. Если бы это решение было точным, то в каждый момент времени существовало бы динамическое равновесие между заданной внешней нагрузкой $p(x) \sin \omega t$, силами упругости и силами инерции $m_0 \omega^2 f_0 \varphi(x) \sin \omega t$. Однако этого нет.

Наложим на балку-полоску связь, которая не препятствует ее изгибу по закону $f_0 \varphi(x) \sin \omega t$, но зато предотвращает всякое отклонение от него. Тогда балка-полоска будет действительно колебаться соответственно этому закону и наступит динамическое равновесие, но к исходной системе сил нужно добавить еще реакции связи.

Результаты сравнения величин внешних сил с величинами реакции связи являются критерием для оценки решения. В самом деле, решение вполне точно, если к пластине приложена не действительная, а условная внешняя нагрузка $p_0(x, t)$, равная действительной внешней нагрузке за вычетом реакции связи.

Что касается реакций связи, то они вычисляются для любого момента времени весьма элементарно на основе элементарных зависимостей соприкасающихся материалов; специальные пояснения здесь не нужны.

Подробные численные расчеты, выполненные для реальных судовых пластин, показывают, что различие между заданным внешним силами $p(x) \sin \omega t$ и фактической нагрузкой $p_0(x, t)$ находится в пределах точности задания внешних сил (гидродинамического давления, колебаний контура пластины). Таким образом, полученное решение не нуждается практически в уточнениях.

2. Аналогичным путем производится оценка точности решений задач о сложном изгибе конструкций с начальной погибью.

Пусть имеется свободно опертая и сжатая по концам балка прямоугольного сечения с погибью, изменяющейся по закону (начало координат в середине пролета)

$$f = f_0 \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (3.10)$$

Выражение для прогиба v примем в виде, подобном (3.10). Для упрощения выкладки будем считать материал идеально пластичным и несжимаемым.

Ограничиваясь рассмотрением односторонней текучести, получим следующие выражения для определения ординат границ раздела z_0 упругой и пластической зон:

$$z_0 = h \sqrt{\frac{\cos \lambda}{\cos \frac{\pi x}{l}}} - \frac{h}{2}; \quad (3.11)$$

при $\cos \lambda \geq 1$

$$z_0 = \frac{h}{2}, \quad (3.11, a)$$

также

$$\cos \lambda = \frac{z_0 - 1}{z_0} \frac{h}{6\sigma_0}. \quad (3.11, b)$$

h и l — высота и длина балки, σ_0 — действующее и избыточное напряжения, σ_c — предел текучести материала, σ_0 — амплитуда прогиба.

После необходимых преобразований можно найти зависимость для критических сжимающих напряжений

$$\sigma_{kp} = \sigma_0 \varphi(\cos \lambda). \quad (3.12)$$

Значения функции $\varphi(\cos \lambda)$

$\cos \lambda$	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$\varphi(\cos \lambda)$	1,0	0,85	0,62	0,37	0,13	0

Приближенное решение будет справедливо только до момента появления пластических деформаций в обеих фибрах балки. Условие его применимости

$$z_0 > \left| \frac{\sigma_0}{\sigma_s} \frac{h^2}{6\epsilon_0} \right| - \frac{h}{2}. \quad (3.13)$$

Оценку точности решения с замороженной кривой легко получить, если определить, для какой начальной кривой f_0 оно является точным.

Уравнение равновесия балки в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{E}{12} h^3 (3h - 2\delta) v'' = sh(v + f), \quad (3.14)$$

где v — прогиб балки по закону $v = v_0 \cos(\pi x/h)$, f — начальная кривая, s — снижающие напряжения, $\delta = z_0 + \frac{h}{2}$ — высота упругого ядра сечения.

Подставляя в (3.14) значения δ и s , получим выражение искомой начальной кривой

$$f_0 = \left[\frac{\pi}{\epsilon_0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi \epsilon}{2}} \left(3 - 2 \sqrt{\frac{\cos \frac{\pi \epsilon}{2}}{\cos \frac{\pi \epsilon}{2}}} \right) - 1 \right] v_0 \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (3.15)$$

В частном случае, когда $\sigma_0 = 1,5 \sigma_s$, амплитуда действительной начальной кривой $f_0 = 0,65 h$, $\epsilon = 0,7 \sigma_s$, фактическая и действительная кривые имеют вид, показанный на рис. 27, в. Ясно, что решение достаточно точно.

3. Приведенных примеров достаточно для подтверждения эффективности метода варьирования исходных данных. При малом изменении исходных данных точность использованного приближенного метода расчета вполне гарантирована.

Следует отметить, что в некоторых задачах (типа упругой устойчивости и др.) приближенные решения отвечают сильно измененным исходным данным и тем не менее оказываются удовлетворительными. Следовательно, оценка, даваемая варьацией исходных данных, иногда чрезмерно строга и должна рассматриваться как достаточная, но не как необходимая.

Общие методы и представления, изложенные в первом разделе, дают возможность приступить к решению конкретных задач теории оболочек, начиная, естественно, с линейных случаев.

Рекомендуемые методы наиболее эффективны при исследовании осесимметричных деформаций, поэтому последние удалены главное внимание. Дополнительно указаны некоторые возможности рассмотрения произвольных деформаций оболочек.

Глава IV

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Нет необходимости обосновывать практическую важность расчета оболочек вращения — область их применения в технике достаточно известна любому специалисту. Именно вследствие их распространенности на решение задач о деформации таких оболочек были направлены усилия многих исследователей.

Подробный очерк развития соответствующих методов расчета можно найти в монографиях [4—6, 19]. Здесь лишь уместно подчеркнуть, что выполненное в этой области исследования привело к созданию ряда весьма эффективных способов, оказавших влияние на развитие других разделов теории оболочек. К ним относятся: изменение напряженного состояния на безмоментное и краевой эффект; использование комплексных преобразований; применение для интегрирования уравнений асимптотического метода; сведение расчета оболочек к исследованию кривой арки на упругом основании [5, 19, 45].

Тем не менее, даже такой достаточно мощный аппарат не дает возможности решить любую практически интересную задачу. Для многих классов оболочек сложных очертаний, да и простейших форм, во многих случаях, или вообще не получено решение, или же имеются лишь весьма грубые оценки напряжений и деформаций. Вследствие этого поиски новых способов исследования осесимметричных деформаций по-прежнему представляют актуальную задачу.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные уравнения осесимметричного изгиба оболочек вращения достаточно известны и приводятся во многих монографиях [5, 19]. Имен в виду, однако, что для понимания последующих преобразований необходимо четко представлять их вид, остановимся на нем. Для простоты изложения будем полагать, что оболочка нагружена внешней нагрузкой, действующей только в осевом направлении и по нормали к срединной поверхности. Заметим, что именно эти случаи нагрузки представляются для судостроителей наибольший интерес.

Геометрия произвольной оболочки вращения полностью характеризуется главным ра-



Рис. 28.



Рис. 29.

диусом кривизны меридиана R_1 , радиусом направляющей окружности r , а также углом θ между осью вращения и радиусом кривизны R_2 . Положение произвольной точки на поверхности будем характеризовать либо углами θ и φ , либо углом φ и координатой x (рис. 28).

Четырять сечениями, нормальными к срединной поверхности, выделим из оболочки малый элемент и рассмотрим его равновесие (рис. 29). Как обычно в теории тонких оболочек, внутренние усилия и моменты будем относить к срединной поверхности.

На выделенный элемент действуют внешние усилия, направленные: T — вдоль оси x , N — по нормали к ней, T_2 — по касательной к направляющей окружности, а также моменты M_1 и M_2 и компоненты внешней нагрузки q_n , q_m , π . Положительные направление усилий показаны на рис. 30, а.

В силу симметрии нагрузки и геометрии оболочки все усилия, перемещения и деформации не зависят от координаты φ , а следовательно усилия, перерезывающая сила N_x и крутящий момент тождественно равны нулю.

Проектируя усилия на направление оси x , найдем

$$-Tdr + (T + dT)(r + dr)dr + q_n r dr = 0$$

или

$$\frac{d(Tr)}{dx} + q_n r = 0. \quad (4.1)$$

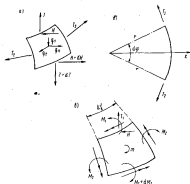


Рис. 30.

При проектировании усилий на нормаль к оси x следует помимо компонентов N и внешней нагрузки q_n учесть нормальную составляющую от усилия T_2 , которая равна (рис. 30, б) $T_2 d\theta ds$.

Окончательно имеем

$$\frac{d(Nr)}{ds} - T_2 + q_n r = 0, \quad (4.2)$$

Условие равносоставности моментов относительно сечения $r + dr$ имеет вид (рис. 30, в)

$$\frac{d(M_1 r)}{ds} - M_2 \frac{dr}{dy} + Tr \cos \theta - Nr \sin \theta + m r = 0, \quad (4.3)$$

где $d\tau$ — угол между касательными к сечению элемента φ и $\varphi + d\varphi$.

В соответствии с рис. 29

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \cos \theta,$$

и уравнение (4.3) преобразуется к виду

$$\frac{d(M_r)}{dr} - M_\theta \cos \theta + T r \cos \theta - H r \sin \theta + m r = 0. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.1)–(4.4) выражают условия равновесия любого малого элемента оболочки.

2. Определим связь между компонентами перемещений средней поверхности и ее деформациями.

При отсутствии внешней нагрузки по касательной к направляющей окружности перемещениями средней поверхности характеризуются только двумя составляющими — по касательной к меридиану u и по нормали к средней поверхности w . Положительные направления составляющих показаны на рис. 28.

Рассмотрим прежде всего деформации средней поверхности, вызванные перемещением w .

В направлении по касательной к меридиану исходная длина малого элемента составляла $ds = R_1 d\theta$; из-за перемещения w она изменилась $ds_1 = (R_1 + w) d\theta$. Следовательно, деформация вдоль меридиана $\epsilon_1^{(w)}$ определится из равенства

$$\epsilon_1^{(w)} = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{w}{R_1}. \quad (4.5, a)$$

Начальная и конечная длины элемента по касательной к направляющей окружности равны $rd\varphi$ и $(r + w \sin \theta) d\varphi$ соответственно.

Деформации в окружном направлении составляет

$$\epsilon_2^{(w)} = \frac{w \sin \theta}{r}. \quad (4.5, б)$$

Деформация элемента, вызванная перемещениями по касательной к меридиану, схематически изображена на рис. 31, а. Длина элемента вдоль касательной в исходном и конечном состояниях равна ds и $ds + dw$, в окружном направлении $r d\varphi$ и $(r + u) d\varphi$. Отсюда нетрудно найти

$$\epsilon_1^{(u)} = \frac{dw}{ds}, \quad \epsilon_2^{(u)} = \frac{u}{r_1} = u \frac{\cos \theta}{r}. \quad (4.5, в)$$

Суммируя (4.5, а, б и в), получим окончательно следующие выражения для компонентов деформации:

$$\epsilon_1 = \frac{dw}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \epsilon_2 = \frac{w \sin \theta}{r} + u \frac{\cos \theta}{r}. \quad (4.6)$$

Ясно, что деформации положительны, когда малый элемент растягивается.

Как и ранее, угол поворота касательной к меридиану ϕ и приращение кривизны средней поверхности в осевом x_1 и окружном x_2 направлениях вычислял по отдельности для компонентов u и w . Угол ϕ будем считать положительным при повороте меридиана по часовой стрелке, кривизну — при уменьшении радиуса.

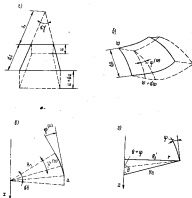


Рис. 31.

В соответствии с рис. 31, б и в нетрудно найти

$$\phi^{(w)} = \frac{u}{R_2}, \quad \phi^{(u)} = -\left(\frac{w + dw}{ds} - \frac{w}{ds}\right) = -\frac{dw}{ds}$$

или

$$\phi = -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_1}. \quad (4.7)$$

Изменения кривизны в осевом направлении связано с углом поворота равенством

$$\kappa_1 = \frac{d\phi}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right). \quad (4.8)$$

Приращение кривизны в окружном направлении χ_2 выражается через главные радиусы кривизны оболочки в исходном R_2 и конечном R'_2 состояниях следующим образом:

$$\chi_2 = \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R_2}.$$

Радиусы R_2 и R'_2 в соответствии с рис. 31, а

$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta}, \quad R'_2 = \frac{r}{\sin (\theta + \varphi)},$$

и приращение кривизны определяется зависимостью

$$\chi_2 = \frac{\varphi \cos \theta}{r}. \quad (4.9)$$

Иногда вместо компонентов перемещений u, v удобнее рассмотреть перемещения u_1 по направлению оси x и v — по нормали к ней.

Связь между указанными компонентами очевидна

$$\left. \begin{aligned} u &= v \sin \theta - u_1 \cos \theta \\ v &= v \cos \theta + u_1 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Подстановка (4.10) в соотношения для определения деформаций и кривизны дает

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{du}{ds} \cos \theta + \frac{dv}{ds} \sin \theta \\ \epsilon_2 &= \frac{v}{r}, \quad \varphi = -\frac{dv}{ds} \sin \theta + \frac{du}{ds} \cos \theta \\ \chi_1 &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \sin \theta - \frac{du}{ds} \cos \theta \right) \\ \chi_2 &= -\frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{dv}{ds} \sin \theta - \frac{du}{ds} \cos \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.10, a)$$

3. Связь между усилиями и деформациями для тонких упругих оболочек дается соотношениями [19]

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \\ M_1 &= D (\chi_1 + \nu \chi_2), \quad M_2 = D (\chi_2 + \nu \chi_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

где $T_1 = T \sin \theta + N \cos \theta$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, h — толщина оболочки.

В дальнейшем для определения T_2 и M_2 наряду с (4.11) будем пользоваться эквивалентными им соотношениями

$$T_2 = Eh \nu + \nu T_1, \quad M_2 = \frac{Eh^3}{12} \chi_2 + \nu M_1. \quad (4.12)$$

Задание граничных условий в рассматриваемых задачах обычно не вызывает затруднений. Система уравнений равновесия, анализированная в предыдущем параграфе, имеет шестой порядок. Для определения произвольных постоянных интегрирования на каждом краю оболочки могут быть заданы либо три силовых $T = T_2$, $M_1 = M_2$, $N = N_2$, либо три кинематических $w = w_2$, $\alpha = \alpha_2$, $\varphi = \varphi_2$, либо, наконец, три смешанных условия (частично силовых, частично кинематических).

4. Во многих практически важных задачах получения системы уравнений может быть существенно упрощена введением ряда допущений. В частности, Я. И. Шварман предложил упрощения, позволяющие свести задачу об осесимметричной деформации оболочки к исследованию изгиба балки, лежащей на сплошном упругом основании [45]. Учитывая, что выше были подробно рассмотрены методы расчета таких балок, остановимся на отмеченных упрощениях.

Сомнению, очевидно, что при осесимметричной деформации оболочки гораздо интенсивнее изгибается в осевом направлении, чем в окружном ($M_1 > M_2$). Заметные деформации изгиба появляются в ней при локальном приложении нагрузки, резком изменении кривизны или толщине и тому подобным местным возмущениям. Наличие усилий T_2 приводит к появлению нормальной составляющей, действующей против внешней нагрузки q , и, как следствие, к резкому затуханию всех компонентов изгиба по мере удаления от места приложения возмущений. Следовательно, изгибющие моменты характеризуются функциями, возрастающими при дифференцировании.

В силу изложенного вполне допустимо пренебречь в (4.4) моментом M_2 . Тогда связь между усилием N и моментом $M_1 = M$ дается равенством (положено $\alpha = 0$)

$$Nr = \frac{d(Mr)}{ds} + Tr \operatorname{ctg} \theta. \quad (4.13)$$

При исследовании изгиба балок, касущих осевую и поперечную нагрузки, не учитывается влияние деформации нейтральной оси на деформации изгиба, если только осевая нагрузка P существенно меньше эйлеровой ($P < 0.5P_E$). Такое же допущение можно принять и для жесткой оболочки. Из условия $\epsilon_1 = 0$ следует

$$\frac{dv_1}{ds} = -\operatorname{ctg} \theta \frac{dv}{ds},$$

и выражения для изменения кривизны оболочки примут вид

$$\chi_1 = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dv}{ds} \right), \quad \chi_2 = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \frac{dv}{ds}. \quad (4.15)$$

В первом из равенств (4.1) примем $T_2 = 0$, что даст возможность записать выражение для усилия T_1 в виде

$$T_1 = \frac{Eh}{r} v + \nu T. \quad (4.16)$$

Тогда после подстановки (4.15) [с учетом (4.11), (4.13) и (4.16)] в уравнения (4.1), (4.2) и ряда преобразований получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Tv)}{ds} + \frac{qv}{\sin \theta} &= 0 \\ \frac{d^2}{ds^2} \left[Dr \sin \theta \frac{d\psi}{ds^2} \right] + \frac{Eh}{r \sin \theta} v &= \frac{qv}{\sin \theta} + \frac{d}{ds} (Tv \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Заметим, что для цилиндрической оболочки уравнения (4.17) эквивалентны выведенным выше точным, поскольку для нее $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Система (4.17) с уравнениями изгиба балки на упругом основании вполне однозначна. Напомним, что новые методы интегрирования таких уравнений были рассмотрены в первом разделе.

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРЦИАЛЬНЫХ ОТКЛИКОВ

1. Парциальные отклики осесимметрично нагруженной оболочки вращения представляют собой перемещения свободного края под действием крайних усилий, а именно:

A_H — перемещение u под действием единичного усилия H ;

B_H и C_H — угол поворота ψ и осевое смещение w под действием того же усилия;

A_M , B_M , C_M — перемещение u , угол поворота ψ и смещение w под действием единичного момента M_1 ;

A_T , B_T , C_T — аналогичные коэффициенты, соответствующие единичному осевому усилию T .

В силу теоремы взаимности должны выполняться равенства

$$B_H = A_M, \quad C_H = A_T, \quad C_M = B_T. \quad (4.18)$$

Вывод уравнений для откликов покажем хотя бы на примере A_T .

Пусть для сечения с координатой s известна вся матрица откликов. Приращение интересующего нас отклика будет складываться из основного приращения dA_T , вызванного переносом силы T в сечение $s + ds$, и дополнительного dA_T^0 , вызванного дополнительными усилиями, которые возникают вследствие переноса T .

На соотношениях (4.16) следует

$$dw = \mu_1 \cos \theta - \psi \sin \theta ds$$

или с учетом (4.11)

$$dw = \left(\frac{1-\nu^2}{Eh} T_1 \cos \theta - u \frac{\nu}{r} \cos \theta - \psi \sin \theta \right) ds, \quad (4.19)$$

Отсюда

$$\frac{dA_T}{ds} = \frac{1-\nu^2}{Eh} \sin \theta \cos \theta - \frac{A_T}{r} \cos \theta - B_T \sin \theta. \quad (4.20)$$

Перенос силы T связан с изменением ее интенсивности, а также с появлением дополнительного усилия H и моментов M_1 , M_2

$$\left. \begin{aligned} dT &= T \frac{dr}{r} \\ H &= -\frac{T_2}{r} dr, \quad M_1 = T \cos \theta ds \\ M_2 &= \left(\frac{Eh^3}{12} \nu_2 + \nu M_1 \right) ds = \frac{Eh^3}{12} \frac{\cos \theta}{r} \psi ds \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Проекция M_2 на направление M_1

$$M_2^{(0)} = -M_1 \frac{\cos \theta}{r}. \quad (4.22)$$

Приращение dA_T будет равно дополнительным усилиям, помноженным на соответствующие отклики,

$$dA_T = \left[A_T \frac{\cos \theta}{r} + HA_H + \left(M_1 - M_2 \frac{\cos \theta}{r} \right) A_M \right] ds. \quad (4.23, a)$$

В результате аналогичных преобразований для остальных коэффициентов получаем (движение слева направо)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_H^{(0)}}{ds} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \cos^2 \theta + (1-2\nu) \frac{A_H^{(0)}}{r} \cos \theta - B_H^{(0)} \sin \theta - \\ &\quad - \frac{Eh}{r^2} A_N^{(0)} + (\sin \theta + iB_H^{(0)}) A_M^{(0)} \\ \frac{dB_H^{(0)}}{ds} &= (1-2\nu) B_H^{(0)} \frac{\cos \theta}{r} - \\ &\quad - \frac{Eh}{r^2} A_N^{(0)} B_H^{(0)} - (\sin \theta + iB_H^{(0)}) B_M^{(0)} \\ \frac{dC_H^{(0)}}{ds} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \sin \theta \cos \theta + (1-\nu) \frac{\cos \theta}{r} C_H^{(0)} - \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} A_H^{(0)} + B_H^{(0)} \cos \theta - \\ &\quad - \frac{Eh}{r^2} A_N^{(0)} C_H^{(0)} - (\sin \theta + iB_H^{(0)}) C_M^{(0)} \\ \frac{dA_M^{(0)}}{ds} &= (1-2\nu) \frac{\cos \theta}{r} A_M^{(0)} - B_M^{(0)} \sin \theta - \\ &\quad - \frac{Eh}{r^2} A_N^{(0)} A_M^{(0)} - \lambda A_M^{(0)} B_M^{(0)} \\ \frac{dB_M^{(0)}}{ds} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} + (1-2\nu) \frac{\cos \theta}{r} B_M^{(0)} - \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Eh}{r^2} A_N^{(0)} B_N^{(1)} - \lambda (B_N^{(0)})^2 \\
\frac{dC_N^{(1)}}{ds} &= (1-\mu) \frac{\cos \theta}{r} C_N^{(0)} + B_N^{(0)} \cos \theta - \mu \frac{\sin \theta}{r} A_N^{(0)} - \\
& -\frac{Eh}{r^2} A_N^{(0)} C_N^{(0)} - \lambda B_N^{(1)} C_N^{(0)} \\
\frac{dA_T^{(1)}}{ds} &= \frac{1-\mu^2}{2h} \sin \theta \cos \theta + (1-\mu) \frac{\cos \theta}{r} A_T^{(0)} - B_T^{(0)} \sin \theta - \\
& - \left(\frac{Eh}{r^2} A_T^{(0)} + \mu \frac{\sin \theta}{r} \right) A_N^{(0)} + (\cos \theta - \lambda B_T^{(0)}) A_N^{(1)} \\
\frac{dB_T^{(1)}}{ds} &= (1-\mu) \frac{\cos \theta}{r} B_T^{(0)} - \\
& - \left(\frac{Eh}{r^2} A_T^{(0)} + \mu \frac{\sin \theta}{r} \right) B_N^{(0)} + (\cos \theta - \lambda B_T^{(0)}) B_N^{(0)} \\
dC_T^{(1)} &= \frac{1-\mu^2}{2h} \sin^2 \theta + \frac{\cos \theta}{r} C_T^{(0)} - \mu \frac{\sin \theta}{r} A_T^{(0)} + \\
& + B_T^{(0)} \cos \theta - \left(\frac{Eh}{r^2} A_T^{(0)} + \mu \frac{\sin \theta}{r} \right) C_N^{(0)} + \\
& + (\cos \theta - \lambda B_T^{(0)}) C_N^{(1)} \\
& \lambda = \frac{Eh^3}{12\rho^4} \cos^2 \theta.
\end{aligned} \quad (4.23)$$

Уравнения (4.23) остаются в силе и для откликов $A_N^{(1)}, \dots, C_N^{(1)}$ (движение справа налево) — достаточно лишь заменить угол θ углом $\theta_s = \pi - \theta$ (зеркальное отражение оболочки). Кроме того, нужно учитывать, что положительным значениям откликов $B_N^{(0)}$ и $C_N^{(0)}$ отвечают отрицательные углы поворота $\varphi^{(0)}$ и перемещение $u^{(0)}$. Интегрирование уравнений откликов может без труда производиться любым из общих численных методов, в частности методом Эйлера.

При использовании уравнений (4.17) соотношения (4.23) существенно упрощаются. Отклики могут быть найдены из уравнений (2.34), выведенных для балки на упругом основании. Правда, здесь необходимо учитывать переменность момента инерции, выделенной из оболочки балки-полоски, и переменность жесткости условного упругого основания. Кроме того, связь между перемещениями и углами для такой балки-полоски дается уравнениями (4.4) и (4.13), не являющиеся эквивалентными принятым в теории изгиба стержней.

Не останавливаясь на соответствующих преобразованиях, запишем приближенное уравнение для откликов (в индексах единицы опущены)

$$\begin{aligned}
\frac{dA_N}{ds} &= -(A_N + B_N) \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} A_N - \frac{Eh}{r^2} A_N^2 \\
\frac{dB_N}{ds} &= -B_N \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} B_N - \frac{Eh}{r^2} A_N B_N \\
\frac{dC_N}{ds} &= -B_N \cos \theta - C_N \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} C_N - \frac{Eh}{r^2} A_N C_N \\
\frac{dA_M}{ds} &= -B_M \sin \theta - \frac{Eh}{r^2} A_M B_N + \frac{\cos \theta}{r} A_M \\
\frac{dB_M}{ds} &= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} - \frac{Eh}{r^2} A_M B_M + \frac{\cos \theta}{r} B_M \\
\frac{dC_M}{ds} &= -B_M \cos \theta - \frac{Eh}{r^2} A_M C_M + \frac{\cos \theta}{r} C_M \\
\frac{dA_T}{ds} &= -B_T \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} A_T - \\
& - \frac{Eh}{r^2} A_T A_N - \frac{\mu}{r} A_N + A_M \cos \theta \\
\frac{dB_T}{ds} &= \frac{\cos \theta}{r} B_T - \frac{Eh}{r^2} A_T B_N - \frac{\mu}{r} B_N + B_M \cos \theta \\
\frac{dC_T}{ds} &= -B_T \cos \theta + \frac{\cos \theta}{r} C_T - \frac{Eh}{r^2} A_T C_N - \frac{\mu}{r} C_N + C_M \cos \theta
\end{aligned} \quad (4.23, a)$$

2. Коэффициенты распределения усилий определяются из условия совместности деформаций правой и левой частей оболочки в рассматриваемом сечении.

Введем следующие обозначения:

- $\alpha_N^{(0)}$ и $\alpha_N^{(1)}$ — коэффициенты распределения усилий N между левой и правой частями;
- β_N и γ_N — коэффициенты, характеризующие момент и осевую силу, вызванные усилием N ;
- β_M и γ_M — коэффициенты распределения момента M ;
- α_M и γ_M — коэффициенты, характеризующие поперечную и осевую силы, вызванные моментом M ;
- $\gamma_T^{(1)}$ и $\gamma_T^{(2)}$ — коэффициенты распределения силы T ;
- α_T и β_T — коэффициенты, характеризующие поперечную силу и момент, вызванные силой T .

Уравнения для α, β и γ имеют вид

$$\begin{aligned}
& \alpha_M^{(1)} A_N^{(1)} - \alpha_N^{(1)} A_M^{(1)} + \beta_M (A_M^{(0)} - A_N^{(0)}) + \gamma_M (A_T^{(0)} - A_T^{(1)}) = 0 \\
& \alpha_M^{(2)} B_N^{(1)} + \alpha_N^{(2)} B_M^{(1)} + \beta_M (B_M^{(0)} + B_N^{(0)}) + \gamma_M (B_T^{(0)} + B_T^{(1)}) = 0
\end{aligned} \quad (4.24, a)$$

$$\left. \begin{aligned} q_M^{(0)} C_M^{(0)} + z_M^{(0)} C_M^{(0)} + \beta_M (C_M^{(1)} + C_M^{(2)}) + \gamma_M (C_T^{(0)} + C_T^{(2)}) = 0 \\ q_N^{(0)} + z_N^{(0)} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.24, a)$$

$$\left. \begin{aligned} q_M (A_M^{(0)} + A_M^{(2)}) + \beta_M (A_M^{(1)} - A_M^{(2)}) + \gamma_M (A_T^{(0)} - A_T^{(2)}) = 0 \\ z_M (B_M^{(0)} - B_M^{(2)}) + \beta_M B_M^{(1)} + \beta_M B_M^{(2)} + \gamma_M (B_T^{(0)} + B_T^{(2)}) = 0 \\ q_M (C_M^{(1)} - C_M^{(2)}) + \beta_M C_M^{(0)} + \beta_M C_M^{(2)} + \gamma_M (C_T^{(1)} + C_T^{(2)}) = 0 \\ z_M^{(1)} - z_M^{(2)} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.24, b)$$

$$\left. \begin{aligned} q_T (A_T^{(1)} + A_T^{(2)}) + \beta_T (A_T^{(0)} - A_T^{(2)}) + \gamma_T A_T^{(1)} - \gamma_T A_T^{(2)} = 0 \\ q_T (B_T^{(1)} - B_T^{(2)}) + \beta_T (B_T^{(0)} + B_T^{(2)}) + \gamma_T B_T^{(1)} + \gamma_T B_T^{(2)} = 0 \\ q_T (C_T^{(1)} - C_T^{(2)}) + \beta_T (C_T^{(0)} + C_T^{(2)}) + \gamma_T C_T^{(1)} + \gamma_T C_T^{(2)} = 0 \\ \gamma_T^{(1)} - \gamma_T^{(2)} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.24, b)$$

3. По аналогии с (2.39) можно получить зависимости для приращений внутренних усилий. Подставляя в уравнения равновесия оболочки (4.1)–(4.4) соотношения упругости и пользуясь коэффициентами распределения, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(T^{(0)}r)}{ds} &= -q_T r_T^{(0)} - q_T r_N - \mu r_{TM} \\ \frac{d(M^{(0)}r)}{ds} &= \mu (H^{(0)} \cos \theta + T^{(0)} \sin \theta) + \\ &+ \frac{Eh}{r} \sigma^{(0)} - q_T r_M^{(0)} - q_T r_T - \mu r_{TM} \\ \frac{d(M^{(2)}r)}{ds} &= \mu [M^{(2)} \cos \theta - T^{(2)} r \cos \theta + H^{(2)} r \sin \theta + \\ &+ \frac{EM}{12} \frac{\cos^2 \theta}{r} \varphi^{(2)} - \mu r_{TM}^{(2)} - q_T r_T - q_T r_N \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Сосредоточенные силы и моменты учитываются в виде скачков граничных условий, как это указано в § 2 гл. II. Там же изложено и общий порядок дальнейшего процесса решения.

Перемещения оболочки определяются из равенств

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}, \quad u_1 = u_1^{(1)} - u_2^{(2)}, \quad \varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \quad (4.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)} &= H^{(1)} A_M^{(1)} + M_1^{(1)} A_M^{(1)} + T^{(1)} A_T^{(1)} \\ u_1^{(1)} &= H^{(1)} B_M^{(1)} + M_1^{(1)} B_M^{(1)} + T^{(1)} B_T^{(1)} \\ \varphi^{(1)} &= H^{(1)} C_M^{(1)} + M_1^{(1)} C_M^{(1)} + T^{(1)} C_T^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Выражения для смещений $u^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, $\varphi^{(2)}$ получаются из (4.27) заменой знака «+» знаком «-» и наоборот.

4. Подобно тому, как это делалось при исследовании изгиба балки, требуется отдельно рассмотреть случай свободного края. Непосредственное использование уравнений (4.23) затруднено ввиду неограниченного возрастания податливостей на этом краю.

Выход из положения прост. Необходимо ввести в рассмотрение упругое кольцо малой ширины a , имеющее те же толщину и радиус, что и оболочка. Податливость такого кольца даст значение податливости оболочки на расстоянии a от края. Соответствующие решения для кольца получим, например, С. П. Тимошенко.

Введение упругого кольца часто оказывается полезным и при других граничных условиях, поскольку в противном случае резкое изменение податливостей у края заставляет брать большое число участков при численном интегрировании уравнений.

§ 1. ПРИМЕРЫ

1. В качестве примера рассмотрим деформации конических оболочек, нагруженных на одном из краев силой H_0 и моментом M_0 ; другой край податлив жестко защемленным (рис. 32).¹

При использовании упругого кольца уравнения (4.17) расчет оболочки сводится к последовательному изгибу балки на упругом основании; жесткость ее равна $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)a/r_0}$, а жесткость упругого основания $\frac{Eh}{\lambda r_0} \lg^2 a$.

Парциальные отклики удобно привести к безразмерному виду

$$\left. \begin{aligned} A_N = a \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{E} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{1/2}, \quad A_M = B_N = c \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Ea} \frac{r_0}{a} \\ B_M = b \frac{4[3(1-\nu^2)]^{1/2}}{Eh^3} \sqrt{\frac{r_0}{a}} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Здесь l — длина шага интегрирования.

Интегрирование велось путем сведения к дискретной модели балки, рассмотренной в главе II. Величины безразмерных откликов

¹ Расчеты, результаты которых приводятся в этом параграфе, выполнены авторами З. Д. Андреевой, А. Ф. Насоновой и И. П. Самаркиной.

для оболочек с различными геометрическими соотношениями показаны на рис. 33, а, б, в.

Внутренние усилия и смещения оболочки также приводились к безразмерному виду

$$\left. \begin{aligned} N &= \bar{N}_M H_0 + \bar{N}_N \frac{M_0}{V r_0 \lambda} \\ M &= \bar{M}_M H_0 \sqrt{r_0 \lambda} + \bar{M}_N M_0 \\ v &= 2 \sqrt{\frac{4}{3(1-\nu^2)}} \frac{H_0}{E} \left(\frac{r_0}{b} \right)^{3/2} v_M + 2 \sqrt{\frac{4}{3(1-\nu^2)}} \frac{M_0}{EA} \frac{r_0}{b} v_N \end{aligned} \right\} (4.29)$$

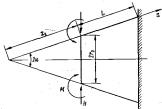


Рис. 32.

Значения их представлены на рис. 34, а, б, в и 35, а, б, в.

2. На рис. 36 приведены безразмерные парциальные отклики оболочки с углом конусности $2\alpha = 60^\circ$ и $\frac{r_0}{\lambda} = 50$, которые были вычислены исходя из точных уравнений изгиба. Отклики, полученные по приближенной схеме, перенесены туда же с рис. 33 в виде пунктирной кривой.

3. Рис. 37, а показывает значение коэффициентов распределения конической оболочки с углом конусности $2\alpha = 60^\circ$ и $\frac{r_0}{\lambda} = 100$.

На рис. 37, б приведены безразмерные отклики, а на рис. 37, в и г — изгибные моменты M_x и прогибы v под равномерно распределенной нагрузкой.

4. Рассмотрим оболочку постоянной положительной гауссовой кривизны (бочкообразную), изображенную на рис. 38, а.

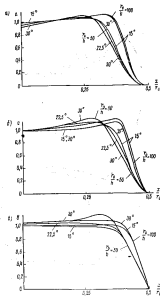


Рис. 33.

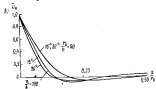
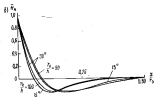
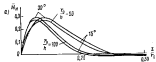


Рис. 34.

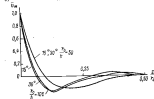
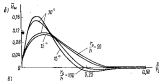
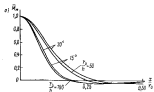


Рис. 35.

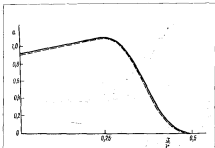


Рис. 36.

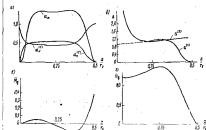


Рис. 37.

Уравнение (4.17) применительно к данному случаю имеет вид

$$\left(D \gamma \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \sigma''\right) + \frac{EA}{r_0^2} \frac{1}{\gamma \sin \theta \sin \theta_0} \sigma = 0. \quad (4.30)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{r}{r_0}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0 - s}{R_1}\right)^2}, \quad \sin \theta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{R_1}\right)^2}.$$

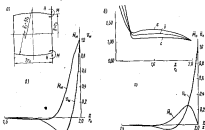


Рис. 38.

Безразмерные парциальные отклики оболочки даны на рис. 38, б, а эксцентрические моменты M_1 и прогибы w от воздействия крайних усилий — на рис. 38, в и г.

Глава V

ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Рассмотренные осесимметричные задачи относятся к изотропным гладким однослойным оболочкам. Однако очевидно, что точно таким же образом можно исследовать деформации конструктивно ортотропных и многослойных оболочек.

Уравнения равновесия многослойной оболочки независимо от свойств материала имеют вид типа (4.1), (4.2), (4.3). Здесь изменяются только соотношения упругости, которые могут быть

выведены из рассмотрения соответствующего элемента. Принцип построения уравнений для откликов и алгоритм их решения остаются прежними.

В случае, когда гладкая оболочка подкреплена поперечными ребрами (дипагонами) постоянного по периметру сечения, алгоритм расчета вообще не меняется. Следует лишь учесть скачкообразное изменение жесткости упругого основания (для поддерживающего условия T_2) на каждом шаге интегрирования, исключаяем шаг-гоут.

Наконец, в случае продольных и поперечных ребер обиде деформации оболочки рассматриваются по той же схеме, но с введенными продольными силами. Местные деформации панелей между ребрами, нарушающие осесимметричность задачи, естественно, выпадают из рассмотрения.

2. Для многих задач устойчивости, когда форма прогиба по периметру может быть точно описана одним членом разложения в ряд Фурье (цилиндрическая, коническая и другие оболочки), метод парциальных откликов может быть использован, хотя задача и не является осесимметричной. Дело в том, что, зная форму деформации в одном из направлений, мы всегда можем свести задачу к одномерной.

Общий путь решения таков:

— решается линейная осесимметричная задача на единичную внешнюю нагрузку, по отношению к которой исследуется устойчивость;

— найденные усилия умножаются на коэффициент, равный отношению расчетной и единичной нагрузок;

— определяются парциальные отклики квазиодномерной системы с учетом усилий, возникших от расчетной нагрузки.

Оценка устойчивости или неустойчивости равновесия производится в соответствии с критериями, приведенным в гл. II.

Вывод парциальных откликов для квазиодномерных систем представляет предмет самостоятельного исследования и здесь не рассматривается.

3. Описанные выше методы зачастую могут быть распространены и на двумерные задачи механики (см., например, [41]).

Можно представить себе разные варианты обобщений. В теории оболочек вращения наиболее удобным окажется, по-видимому, способ разложения внешней нагрузки и ряд Фурье по периметру. В результате расчет сводится к решению ряда квазиодномерных задач.

§ 2. КОЛЕБАНИЯ

Подробно описанные в разделе первом представления о квазистатических аналогах и сделанные там замечания о методе главных координат исключают необходимость сколько-нибудь подробного рассмотрения задач о колебаниях оболочек. Они непосредственно сводятся к задачам статки.

Правда, выражение парциальных откликов системы несколько усложняется, так как появляются квазиупругие условия по направлениям m и n .

Обычно учитывается лишь инерция масс при движении по направлению q_n (по нормали к оси вращения оболочки), за счет которой в оболочке прилагается дополнительная поперечная нагрузка интенсивности

$$\bar{q}_n = -m_p \ddot{v}_n. \quad (5.1)$$

Уравнение равновесия в проекциях усилий на нормаль к оси вращения с учетом (5.1) можно привести к виду

$$\frac{d(Rr)}{ds} + \frac{Eh}{r} v - \frac{1}{2} T_2 + q_n + \bar{q}_n = 0. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что учет сил инерции эквивалентен изменению второго слагаемого уравнения

$$\frac{Eh}{r} v - \frac{Eh}{r} = m_p \ddot{v}_n. \quad (5.3)$$

Следовательно, уравнения для откликов (4.23) полностью сохраняются, если заменить в них параметр $\frac{Eh}{r}$ на $\frac{Eh}{r} - m_p \ddot{v}_n$.

§ 3. ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

1. В современных расчетах прочности все чаще приходится иметь дело с термодурными напряжениями и деформациями. В первую очередь увеличивается поток публикаций по данному вопросу уже содержится решение для многих важных практических случаев. Однако круг нерассмотренных задач все весьма значителен.

Для судостроения и некоторых других областей техники особый интерес представляют стационарные задачи термоупругости. В них скорости изменения температуры различных точек тела малы по сравнению со скоростями деформаций. В связи с этим надо иметь в виду, что многие одномерные упругие системы, находящиеся в условиях стационарного температурного поля, могут быть с успехом рассмотрены методом парциальных откликов.

Приведем принципиальный ход решения такой задачи на примере расчета катба неравномерно нагретой непрямоугольной балки. Балка опирается на линейно податливые опоры и испытывает действия распределенной поперечной нагрузки $q(x)$ (рис. 39, а).

Воспользуемся принципом наложения и относим нагрузки, вызывающие поперечный катб балки, и разобьем задачу на две части.

Пусть балка составлена из отдельных не связанных между собой волокон, параллельных ее центральной оси, и свободна от закрепления. Нагреем такую балку в соответствии с заданным в условиях

задачи температурным полем $\theta^0(x, y)$. Деформации нагретой и свободной балки окажутся равными

$$e_y(x, y) = \alpha \theta^0(x, y),$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Чтобы вернуть балку прежний недеформированный вид, каждый ее элемент длиной dx необходимо загрузить некоторыми осевыми силами и моментами (рис. 39, б). Величина этих усилий определяется из следующих очевидных равенств:

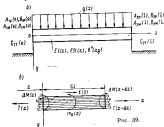


Рис. 39.

$$\begin{aligned} \Delta T(x) &= -E\alpha \int_{\sigma(x)} \theta^0(x, y) dy; \\ \Delta T(x+dx) &= -E\alpha \int_{\sigma(x+dx)} \theta^0(x+dx, y) dy; \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta M(x) &= E\alpha \int_{\sigma(x)} y \theta^0(x, y) dy; \\ \Delta M(x+dx) &= E\alpha \int_{\sigma(x+dx)} y \theta^0(x+dx, y) dy. \end{aligned}$$

Действие усилий $\Delta T(x)$ и $\Delta M(x)$ эквивалентно, как то следует из уравнений равновесия элемента, действию распределенной осевой нагрузки $\tau(x)$ и распределенного изгибающего момента $m_y(x)$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= -\frac{\Delta T(x+dx) - \Delta T(x)}{dx} \approx -E\alpha \int_{\sigma(x)} \frac{\partial \theta^0(x, y)}{\partial x} dy; \\ m_y(x) &= \frac{\Delta M(x+dx) - \Delta M(x)}{dx} \approx E\alpha \int_{\sigma(x)} y \frac{\partial \theta^0(x, y)}{\partial x} dy. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Приближенность равенств (5.5) заключается в том, что при выводе их пренебрегалось изменением геометрических характеристик жесткости сечений балки по сравнению с изменением температурного поля. При необходимости зависимости (5.5) нетрудно уточнить.

Вторая часть задачи состоит в расчете балки, нагруженной поперечной нагрузкой $q(x)$, распределенными моментами $M_y(x)$ и распределенными осевыми силами $\tau(x)$.

Будем считать, что разность между длиной дуги, которой является упругая линия изгиба, и хордой этой дуги мала по сравнению со средним удлинением свободной балки при нагреве. Тогда изгиб балки не вызовет дополнительных распорных усилий, а осевая сила будет

$$T(x) = T(0) - \int_0^x \tau(x) dx. \quad (5.6)$$

Учтем, что опоры неподвижны, и определим величину $T(0)$ из условий равновесия и совместности деформаций балки в основном направлении

$$\begin{aligned} T(0) &= T(l) + \int_0^l \tau(x) dx, \\ C_{1T}(0) T(0) - \frac{1}{E} \int_0^l \int_0^x \tau(x) dx^2 &= -C_{2T}(l) T(l) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь $C_{1T}(0)$ и $C_{2T}(l)$ — коэффициенты подвижности опор в направлении действия сил T_1 и T_2 .

Дальнейшее решение строится по методу вариационных откликов. Необходимо лишь помнить, что значения парциальных откликов должны быть вычислены с учетом продольного изгиба, если осевые силы оказываются близкими к T_c (эйлеровой критической силе).

Например, при выводе уравнений для парциальных откликов $A_y(x+dx)$, $B_{1P}(x+dx)$ требуется ввести дополнительный изгибающий момент

$$\Delta M_2(x) = -T(x) v'(x) dx,$$

где

$$v'(x) = B_{1P}(x).$$

Аналогичные добавки вводятся при вычислении других парциальных откликов.

2. Длина задачи с термическими напряжениями решается так же и в случае, если модуль упругости материала зависит от температуры $E = E[\theta^0(x, y)] = E(x, y)$. Правда, усложняются константы уравнений для парциальных откликов системы — они будут зависеть, как и в случае нагретой конструкции с переменным модулем

упругости (характеристики жесткости сечения на изгиб и растяжение) находятся по более сложным выражениям, чем EI и ES . Кроме того, изменяются уравнения, определяющие интенсивности дополнительных внешних нагрузок $\tau(x)$ и $m_s(x)$.

Пусть нагретый свободный элемент балки (рис. 39, б) получил деформации $e_y(x, y) = \alpha \theta^2(x, y)$, а затем приняла прежнюю форму под действием момента ΔM и усилий ΔT

$$\left. \begin{aligned} \Delta T &= -\alpha \int_{\Omega} E(x, y) \theta^2(x, y) d\Omega \\ \Delta M &= -\alpha \int_{\Omega} E(x, y) \theta^2(x, y) y d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.4, a)$$

Тогда интенсивности $\tau(x)$ и $m_s(x)$ должны быть, очевидно, равны

$$\left. \begin{aligned} \tau(x) &\approx \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial [E \theta^2]}{\partial x} d\Omega \\ m_s(x) &\approx \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial [E \theta^2]}{\partial x} y d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.5, a)$$

Характеристики жесткости сечения найдем, задав извору деформаций балки в форме

$$e_y = -x_y + z = \frac{x_y}{E(y)} \quad (5.6)$$

Из уравнений равновесия будем иметь

$$M = -\alpha \int_{\Omega} E(y) y^2 d\Omega, \quad T = \alpha \int_{\Omega} E(y) dy,$$

т. е.

$$I_E = \frac{M}{\alpha} = -\int_{\Omega} E(y) y^2 d\Omega, \quad \Omega_0 = \frac{T}{\alpha} = \int_{\Omega} E(y) dy, \quad (5.9)$$

Положение центральной оси и сечения определяется из обычного условия

$$\int_{\Omega} E(y) y d\Omega = 0. \quad (5.9, a)$$

3. Переход от термоупругой задачи об изгибе балки к исследованию термоупругости оболочек при ассиметричных деформациях не связан с какими-либо принципиальными затруднениями. Пусть решение остается прежним:

а) рассматривается свободный элемент на не соединенных между собой слоях, нагретый до заданных по высоте элемента температур;

б) к элементу прикладываются усилия, возвращающие его в исходное состояние;

в) определяются интенсивности внешних добавочных нагрузок;

г) рассчитывается по методу вариационных откликов ненагретая оболочка, возникающая под действием внешней и дополнительной нагрузок.

Отметим, что, в отличие от рассмотренного случая балки, при неравномерном нагреве оболочки, кроме дополнительных распределенных осевых нагрузок и распределенных изгибающих моментов, появляются еще дополнительные распределения поперечных нагрузок за счет действия сил $\Delta T_z(x)$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Соединение крайних задач к задачам Коши открывает возможности исследования физических и геометрически нелинейных осесимметричных деформаций оболочек.

Некоторые возможные пути исследования показаны ниже.

Глава VI.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ И МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ, ИХ ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ

1. Как известно, в настоящее время используются два варианта уравнений пластического состояния тел — теория течения и теория упруго-пластических деформаций (деформационной) [7, 10].

Теория пластического течения строится на следующих основных допущениях:

- 1) тело изотропно;
- 2) относительное изменение объема ϵ пропорционально среднему давлению σ

$$d\epsilon = K d\sigma, \quad K = \frac{E}{3(1-\nu_0)}; \quad (6.1)$$

3) полные приращения деформаций $d\epsilon_{ij}$ складываются из приращений соответствующих упругой деформации $d\epsilon_{ij}^e$ и пластической деформации $d\epsilon_{ij}^p$

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p. \quad (6.2)$$

¹ Здесь и далее индекс e (упругость), p (пластичность) и s (ползучесть) при наличии других индексов выкажется наперв, а при отсутствии других индексов — закон.

4) дивантор напряжений D_{ij} и дивантор приращений пластической деформации D_{ij}^p подобны и коэкванальны

$$D_{ij}^p = \lambda D_{ij}, \quad (6.3)$$

Напомним, что дивантором напряжений в теории пластичности называют тензор, характеризующий напряжение сдвига в данной точке,

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} - \tau & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} - \tau & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} - \tau \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где τ_x — компоненты нормальных напряжений; τ_{xy} — касательных напряжений, $\tau = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}$ — среднее давление.

Аналогично дивантором деформаций называют тензор, характеризующий изменение формы элемента,

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \frac{1}{3}\epsilon & \frac{1}{2}\epsilon_{xy} & \frac{1}{2}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{xy} & \epsilon_y - \frac{1}{3}\epsilon & \frac{1}{2}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{xz} & \frac{1}{2}\epsilon_{yz} & \epsilon_z - \frac{1}{3}\epsilon \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Здесь ϵ_x и ϵ_y — деформации растяжения и сдвига, $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ — относительное изменение объема.

Принятые допущения позволяют связать связь между деформациями и напряжениями в виде

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + (1 - \nu) F(\sigma_1) d\sigma_1 \\ &\dots \dots \dots \\ d\epsilon_{xy} &= \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 2\tau_{xy} F(\sigma_1) d\sigma_1 \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

Входящая в соотношение (6.6) функция $F(\sigma_1)$ принимается зависящей только от свойств материала, а также интенсивности напряжений. Вид ее определяется на основании испытаний образцов. При этом используется один из следующих подходов.

Согласно одному из них (гипотеза «одной кривой») предполагается, что, независимо от вида напряженного состояния, форма

диаграммы деформирования материала, построенной в координатах $\sigma - \epsilon$, сохраняется, т. е. выполняется соотношение

$$\sigma = G_p(\epsilon) \epsilon,$$

где $G_p(\epsilon)$ — модуль пластичности, характерный для данного материала; зависимость $G_p(\epsilon)$ можно получить, например, из опытов на простое растяжение.

Гипотеза единой кривой удовлетворительно описывает поведение материала при путях нагружения, близких к простым (см. ниже).

Более общим является условие, которое справедливо и для многих классов сложных нагружений. Оно формулируется так: работа пластической деформации A_p не зависит от пути нагружения, являясь функцией только интенсивности напряжений

$$A_p = \Phi(\sigma_2),$$

где $\Phi(\sigma_2)$ — характеристика для данного материала функция, которая может быть получена при любых испытаниях материала (например, при простом растяжении).

В случае, когда материал не упрочняется с ростом пластической деформации (состояние текучести), оба подхода совпадают и приводят к условию текучести Мизеса

$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T, \quad (6.7, a)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения, σ_T — предел текучести материала на растяжение.

Зачастую при решении конкретных задач вместо (6.7, a) используется близкое к нему условие текучести Треска — Сен-Венана

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_T, \quad \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_T, \quad \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_T. \quad (6.7, b)$$

Необходимо отметить, что для ряда материалов условие (6.7, b) является к тому же более точным, чем (6.7, a). Вследствие этого обоснованный выбор условия (6.7, a) или (6.7, b) может быть произведен только лишь после того, как получены экспериментальные данные о поведении материала в условиях плоского напряженного состояния. Правда, разница между (6.7, a) и (6.7, b) невелика. Как показал А. А. Илюшин, она не превышает 15% [7].

Деформационная теория пластичности содержит первые три допущения, связь же между деноминатором напряжений и деформаций принимается в ином виде. Предполагается, что деноминатор деформаций и напряжений подобны и координатны

$$D_p = \frac{1}{2} D_\sigma \quad (6.8)$$

Связь между напряжениями и деформациями дается при сделанных допущениях равенствами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{2\sigma_T}{3\epsilon_T} \left(\epsilon_1 - \frac{1}{3} \epsilon \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \sigma_3 &= \frac{2\sigma_T}{3\epsilon_T} \epsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

где $\epsilon = \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} + \frac{3}{2} (\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2)$ — интенсивность деформаций.

Величины σ_T и ϵ_T связаны между собой соотношением

$$\sigma_T = 3G_0 [1 - \nu(\epsilon_T)], \quad (6.10)$$

причем функция $\nu(\epsilon_T)$ зависит только от свойств материала и интенсивности деформаций. Вид ее согласно гипотезе единой кривой может быть найден, например, из испытаний на простое растяжение.

2. Уравнения обеих теорий совпадают в том и только в том случае, когда нагружение является простым, т. е. когда все компоненты деноминатора напряжений меняются пропорционально некоторому параметру.

При других путях нагружения, характеризующихся изменением соотношений между компонентами деноминатора напряжений и деформаций, следует отдать предпочтение теории течения. Деформационная теория в силу связи допущений не может дать здесь точного описания поведения материала.

Правда, результаты обеих теорий близки в одном практически важном случае [11]. Пусть путь деформирования тела изображается в пространстве деформаций кривой, показанной на рис. 40: начиная с некоторого момента t он стремится к прямой AB , т. е. деформация развивается в определенном направлении. Оказывается, что здесь с момента t влияние истории деформирования на поведение материала быстро ослабевает и устанавливается напряженное состояние, характерное для простого нагружения AB .

3. Особого рассмотрения заслуживает вопрос об использовании различных вариантов теории пластичности при исследовании устойчивости в малом упруго-пластических систем.

На первый взгляд здесь нужно отдать предпочтение теории пластического течения, поскольку в момент выпучивания наминаются соотношения между компонентами деноминатора напряжений. Однако более детальный анализ опровергает это положение.

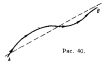


Рис. 40.

Действительно, процесс потери устойчивости системы характеризуется скачкообразным изменением ее равновесных форм; тензоры приращений деформаций и напряжений, получаемых системой при переходе из одного равновесного состояния в другое, резко отличаются по фазе подобия от соответствующих тензоров в докритическом состоянии.

Теория течения основывается на допущении о подобии и количественности девиаторов приращений деформаций и суммарных напряжений. Но поскольку при малых деформациях (а именно они-то здесь и рассматриваются) девиатор суммарных напряжений по существу совпадает с девиатором напряжений в докритическом состоянии, то основное допущение теории течения оказывается нарушенным.

Деформационная теория связывает девиатор суммарных напряжений и деформаций. Если при выпучивании системы приращения деформаций малы, а в докритическом состоянии реализуется простое нагружение, такой связь является достаточно приемлемой. По крайней мере, можно утверждать, что она более точна, чем в теории пластического течения.

Для конструкций из вязкоупругого материала, находящихся в плоском напряженном состоянии, удастся дать даже количественную оценку погрешности уравнений обеих теорий при решении задач устойчивости.

Целесообразно воспользоваться следующим порядком исследования: 1) составить уравнения равновесия, свободные от основных допущений рассматриваемых теорий; 2) рассматривая эти уравнения как эталон, сопоставить с ними аналогичные соотношения, даваемые теориями течения и малых деформаций.

При выводе эталонных уравнений применим уже упоминавшиеся выше допущения о независимости приращения работы деформации dW от пути нагружения.

$$dW = \Phi'(z_1) dz_1. \quad (6.11)$$

Если воспользоваться данными испытаний на простое растяжение, нетрудно найти

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(z_1) dz_1 &= z_1 d\epsilon_1 \\ \Phi'(z_2) &= \frac{z_2}{E_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Здесь $E_1 = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1}$ — касательный модуль при растягивающем напряжении, равном z_1 .

Пусть E_2 — касательный модуль, отвечающий интенсивности напряжения z_2 при произвольном пути нагружения. Тогда (6.11, а) с учетом (6.12) переписывается в виде

$$dW = \frac{E_1}{E_2} z_1 d\epsilon_1. \quad (6.13)$$

При исследовании устойчивости воспользуемся статическим критерием. Докритическое состояние будет характеризоваться интенсивностями напряжений и деформаций σ_0^2 , ϵ_0^2 , обобщенными силами Q_0^2 и перемещениями q_0^2 .

При переходе в другое равновесное состояние эти параметры получают приращения ϵ_1 , ϵ_2 , Q_1 , Q_2 . Тогда, применяя принцип возможных перемещений к обоим равновесным состояниям, с учетом (6.12) получим

$$\epsilon_1 \int_V \frac{E_1}{E_2} z_1 d\epsilon_1 - \sum_k Q_k \delta q_k = 0. \quad (6.14)$$

При малых перемещениях существует зависимость

$$\frac{z_1}{\epsilon_1} = E_1,$$

и уравнение (6.14) примет вид

$$\epsilon_1 \int_V \frac{E_1^2}{2E_2^2} \epsilon_1^2 dV - \sum_k Q_k \delta q_k = 0. \quad (6.15)$$

Здесь интеграл распространяется по всему объему системы V .

Уравнение (6.15) является эталонным для оценки точности соотношений теории течения и малых деформаций.

Как будет показано ниже, эти теории дают следующую связь приращений напряжений и деформаций:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{4}{3} E_1 \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \right) - E_1 \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_1^2} \epsilon_1 \\ z_2 &= \frac{4}{3} E_2 \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \right) - E_2 \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} \epsilon_1 \\ z_{12} &= \frac{1}{3} E_2 \epsilon_{12} - E_2 \frac{\epsilon_{12}^2}{\epsilon_1^2} \epsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

В равенствах (6.16) величины в квадратных скобках характеризуют докритическое состояние системы, а без таковых — приращения соответствующих компонентов напряжений и деформаций при переходе из одного равновесного положения в другое.

Параметры E_1 и E_2 равны:

по теории малых деформаций

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial \epsilon}, \quad E_2 = E_1 - E_0^* \quad (6.17)$$

по теории течения

$$E_1 = E, \quad E_2 = \frac{E - E_0^*}{E_0^*} E_0$$

Приращение работы деформации произвольной системы при плоском напряженном состоянии определяется равенством

$$\delta W = \int_V (\tau_{xy} \delta \epsilon_{xy} + \tau_{yz} \delta \epsilon_{yz} + \tau_{zx} \delta \epsilon_{zx}) dV. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.16) в (6.18), после ряда преобразований найдем

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_V \left[\frac{E_1 \delta}{2} - \int_0^{\delta} E_2 \epsilon_1 \left[\frac{3}{4} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_1^2}{2 \epsilon_0^2} \right] d\epsilon_1 + \right. \\ & + \frac{\delta}{\epsilon_0^2} \left(1 - \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_0^2} \right) d\epsilon_{xy} + \\ & \left. + \frac{\delta}{\epsilon_0^2} \left(1 - \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_0} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_{yz}^2}{\epsilon_0^2} \right) d\epsilon_{yz} \right] dV. \quad (6.19) \end{aligned}$$

Обычно при решении задач устойчивости не делается различия между касательными модулями при простом растяжении и других видах нагружения, т. е. принимается $E_0 = E_0^*$. Правомочность такого допущения подтверждается результатами ряда исследований. Как показано в работе [20], равенство $E_0 = E_0^*$ справедливо при нагружениях, характеризующихся небольшим изменением напряжений по величине, даже при резких скачках тензора приращений напряжений. Именно такие условия реализуются и приносе потерь устойчивости.

Полагая теперь в (6.15) и (6.19) $E_0 = E_0^*$ и сопоставляя последнее равенство с первым членом (6.15), нетрудно убедиться, что они эквивалентны только при выполнении условия

$$-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0 + \frac{1}{2} \epsilon_0} \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_0^2} - \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_0^2} = -\frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_0} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} - \frac{\epsilon_{yz}^2}{\epsilon_0^2}. \quad (6.20)$$

Условия (6.20) выполняются далеко не во всех задачах устойчивости. Для подтверждения сказанного достаточно рассмотреть, например, равномерно сжатую прямоугольную пластинку; для нее

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = 0, \quad \text{но} \quad \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{yz}}{\epsilon_0} \neq 0.$$

Разница между (6.19) и (6.15) увеличивается с ростом параметра E_0 . Поскольку значение E_0 по теории пластического течения больше, чем по теории малых деформаций, последние при исследовании устойчивости упруго-пластических систем должны приводить к лучшим результатам.

Правда, сделанный вывод справедлив только для случая, когда в критическом состоянии реализуется простое нагружение системы.

Выпучивание конструкций при сложных нагружениях остается пока не исследованным, и потому обоснованно предпочесть ту или иную теорию невозможно. Здесь удастся лишь произвести качественный анализ при путях нагружения, которые характеризуются развитием деформаций в определенном направлении (конструкции с начальными лопатообразными, эксцентрично приложенными усилиями и т. п.). Напомним, что такой вид нагружения близок к простому, и поэтому при исследовании устойчивости следует предпочесть деформационную теорию.

4. В подавляющем большинстве практических задач судостроения реализуется простое или близкое к нему нагружение. Исключение составляют задачи устойчивости или задачи о повороте приложения нагрузок. Последние выходят за рамки настоящей книги, и мы на них останавливаться не будем.

Что касается поведения упруго-пластических систем в условиях простого нагружения и при выпучивании, то на основании приведенных выше соображений оно вполне удовлетворительно описывается упрощенными деформационной теорией. Поскольку эти уравнения проще уравнений теории течения, именно их целесообразно использовать в прикладных задачах теории пластичности.

В последующих разделах будут рассматриваться только уравнения теории малых упруго-пластических деформаций. Правда, большинство зависимостей новых методов может быть использовано без принципиальных затруднений и при решении задач на основе теории пластического течения.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН И ОБЛОЧЕК

1. Классическая теория тонких пластин и оболочек основывается на гипотезах Лява — Кирхгофа, позволяющих свести трехмерную задачу к двумерной. Напомним, что сущность этих гипотез состоит в следующем:

а) прямоугольные волокна, перпендикулярные срединной поверхности пластины или оболочки в недеформированном состоянии, остаются прямоугольными и перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности;

б) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с прочими напряжениями.

Погрешность указанных гипотез не превосходит порядка λ^2/r по сравнению с единицей [19].

В соответствии с гипотезами Лява — Кирхгофа в исходных соотношениях теории пластичности (6.9) следует положить

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0 \\ \varepsilon_x = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \quad \varepsilon_{xy} = \alpha + 2\varepsilon_4 \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ — деформации срединной поверхности, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — изометрические кривизны.

Подставляя (6.21) в (6.9), получим уравнения деформационной теории пластичности для плоского напряженного состояния

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= A\varepsilon_1 + A\varepsilon_2, \quad \varepsilon_y = A\varepsilon_2 + A\varepsilon_3 \\ \varepsilon_{xy} &= A\varepsilon_4 \\ A_1 &= \frac{E}{1-\mu} \frac{3-(1-2\mu)(\alpha)}{3(1-\mu)-2(1-2\mu)(\alpha)} [1-\alpha(\varepsilon_1)] \\ A_2 &= \frac{E}{1+\mu} \frac{3\alpha+(1-2\mu)(\alpha)}{3(1-\mu)-2(1-2\mu)(\alpha)} [1-\alpha(\varepsilon_1)] \\ A_3 &= \frac{E}{2(1-\mu)} [1-\alpha(\varepsilon_1)] \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Входящий в соотношение (6.22) коэффициент поперечного сжатия μ является переменной величиной, зависящей от интенсивности деформаций ε_1 . Для его определения воспользуемся условием (6.1), согласно которому

$$\frac{1-2\mu}{E_p} = \frac{1-2\mu_0}{E}, \quad (6.23)$$

$$E_p = 2(1+\mu) \frac{\alpha}{\varepsilon_1} = 3 \frac{1-\mu}{1-\mu_0} E [1-\alpha(\varepsilon_1)].$$

Из (6.23) следует

$$\mu = \frac{2\mu_0 + (1-2\mu_0)(\alpha)}{3 - (1-2\mu_0)(\alpha)}. \quad (6.24)$$

Равенства (6.22) существенно упрощаются, если материал конструкции несжимаем ($\mu = 0,5$); в этом случае они принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3} E [1 - \alpha(\varepsilon_1)] \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3} E [1 - \alpha(\varepsilon_1)] \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{3} E [1 - \alpha(\varepsilon_1)] \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Заметим, что соотношения (6.25) справедливы и при различных пластических деформациях. Действительно, с ростом деформаций отношение $\frac{\alpha}{\varepsilon_1}$ для любого материала стремится к нулю, т. е. $\alpha(\varepsilon_1) \rightarrow 1$. Но при $\alpha(\varepsilon_1) = 1$ из (6.25) следует $\mu = 0,5$.

2. Осуществим переход от напряжений к усилиям и моментам, отнесенным к срединной поверхности оболочки (рис. 41),

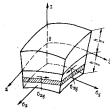


Рис. 41.

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_x dz, \quad T_2 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_y dz, \quad T_{12} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_{xy} dz \\ M_1 &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_x x dz, \quad M_2 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_y x dz, \quad M_{12} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \sigma_{xy} x dz \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Подставляя (6.22) в (6.26) и учитывая (6.21), найдем

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \bar{A}_1 \varepsilon_1 + \bar{A}_2 \varepsilon_2 + \bar{B}_1 \varepsilon_1 + \bar{B}_2 \varepsilon_2 \\ T_2 &= \bar{A}_2 \varepsilon_1 + \bar{A}_3 \varepsilon_2 + \bar{B}_2 \varepsilon_1 + \bar{B}_3 \varepsilon_2 \\ M_1 &= \bar{C}_1 \varepsilon_1 + \bar{C}_2 \varepsilon_2 + \bar{C}_3 \varepsilon_1 + \bar{C}_4 \varepsilon_2 \\ M_{12} &= \bar{C}_3 \varepsilon_1 + \bar{C}_4 \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

$$\bar{A}_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A_1 dz, \quad \bar{B}_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A_2 z dz, \quad \bar{C}_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A_1 z^2 dz.$$

Для несжимаемого материала равенства (6.27) примут вид

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{4E}{3} I_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) + \frac{4E}{3} I_2 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) \\ T_{12} &= \frac{E}{3} I_2 \varepsilon_1 + \frac{2}{3} E I_2 \varepsilon_2 \\ M_1 &= \frac{4E}{3} I_2 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) + \frac{4E}{3} I_3 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) \\ I_1 &= k f_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [1 - \alpha(\varepsilon_1)] dz, \quad I_2 = k^2 f_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [1 - \alpha(\varepsilon_1)] z dz \\ I_3 &= k^3 f_3 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [1 - \alpha(\varepsilon_1)] z^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Интенсивность деформаций ε_1 в этом случае на основании (6.9) и (6.21) определяется равенством

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_1 + 2zP_2 + z^2 P_3} \\ P_1 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \\ P_{12} &= \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) + \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) + \frac{\alpha \varepsilon_1}{2} \\ P_2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

а интенсивность напряжений

$$\sigma_1 = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + 3\alpha^2 \varepsilon_1^2}$$

3. Для того чтобы пояснить порядок вычисления интегралов I_k , рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку. Материал ее будем считать несжимаемым и следующим диаграмме Прандтля (рис. 42, а).

Если ε_1 представляет собой интенсивность деформаций, отвечающую началу течения материала, то в упругой зоне ($\varepsilon_1 < \varepsilon_1$) имеем

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1. \quad (6.30, а)$$

В пластической зоне

$$\sigma_1 = \sigma_1. \quad (6.30, б)$$

Ордината границы раздела упругой и пластической зон ε_1 определяется из равенства

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}. \quad (6.31, а)$$

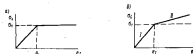


Рис. 42.

Из равенства (6.31, а) с учетом $\sigma = \sigma_2 = \tau = 0$ и выражения (6.29) следует

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_1 \pm 0,5\alpha + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 0,75\alpha^2}}{\alpha}; \quad \varepsilon_1 = 0,865 \frac{\sigma_1}{E}. \quad (6.31, б)$$

Очевидно, что ордината границы раздела не может выходить за пределы толщины оболочки, т. е. должно выполняться неравенство

$$0,5 \geq \varepsilon_{1,2} \geq -0,5. \quad (6.31, в)$$

При нарушении указанного неравенства следует принимать значение ε_1 отвечающее предельному — найденному из (6.31, в).

На основании (6.29) и (6.30) функция $1 - \alpha(\varepsilon_1)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1 \quad 1 - \alpha(\varepsilon_1) &= 1 \\ \text{при } \varepsilon_1 > \varepsilon_1 \quad 1 - \alpha(\varepsilon_1) &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Вычисляя теперь интегралы I_k , получим

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \delta f_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \ln 2 \\ I_2 &= k^2 f_2 = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{2} + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\alpha^2} - \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 0,5\alpha)}{\alpha^2} \ln 2 \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

$$I_2 = b^2 I_1 - \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{2} + \frac{\epsilon_1}{4\sqrt{3}b^2} \left[2(\xi_1 - \xi_2) \epsilon_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \right. \\ \left. - \frac{6(\xi_1 - 0.5\epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\sqrt{3}} \right] + \frac{\epsilon_1}{\sqrt{3}} \left[\frac{(\xi_1 - 0.5\epsilon_2)^2 - 0.5\epsilon_2^2}{2b^2} \ln \xi_1 \right] \quad (6.33)$$

Здесь

$$\epsilon_1 = \sqrt{(\xi_1 + 0.5\epsilon_2 - 0.5\epsilon_2)^2 + 0.75\epsilon_2^2};$$

$$\epsilon_2 = \sqrt{(\xi_1 + 0.5\epsilon_2 + 0.5\epsilon_2)^2 + 0.75\epsilon_2^2};$$

$$\lambda = \frac{\epsilon_1 - \sqrt{\epsilon_1^2 - 0.75\epsilon_2^2}}{\epsilon_2 - \sqrt{\epsilon_2^2 - 0.75\epsilon_2^2}} \times \\ \times \frac{\epsilon_2 + \sqrt{\epsilon_2^2 - 0.75\epsilon_2^2}}{\epsilon_1 - \sqrt{\epsilon_1^2 - 0.75\epsilon_2^2}};$$

ξ_1 и ξ_2 — меньшее и большее значения выражения (6.31, 6).

При нарушении неравенств (6.31, в), когда $\xi_1 < -0.5$, в соотношениях (6.33) следует положить

$$\epsilon_1 = \epsilon_2, \quad \xi_2 = -0.5. \quad (6.33, а)$$

Численные значения коэффициентов I_1 , входящих в равенства (6.34), могут быть определены по графикам рис. 43, а, б, в.

На этих графиках

$$\xi = \xi_2 - \xi_1; \quad I_2 = I_1.$$

4. Не представляет существенного труда распространить полученные зависимости и на случай рассматриваемого материала, имеющего идеальную диаграмму с упрочнением (рис. 42, б). Пусть модуль нормальной упругости начального участка диаграммы I будет E , модуль упругости на участке II упрочнения $E_1 = \gamma E$, γ — интенсивность напряжений, отмечавшая точку слома диаграммы.

Связь между интенсивностями напряжений и деформаций здесь в рассматриваемом случае равенствам

$$\text{при } \epsilon_1 < \epsilon_2 \quad \epsilon_1 = E\epsilon_1 \\ \text{при } \epsilon_1 > \epsilon_2 \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 + E_1 \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{\gamma} \right) = \epsilon_2 (1 - \gamma) + E\epsilon_1 \quad (6.34)$$

Подставляя (6.34) в формулы для I_1 , найдем

$$I_1 = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\epsilon_1 (1 - \gamma)}{\epsilon_1} dx + \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} E_1 dx + \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} E [\gamma + (1 - \gamma)\xi] dx + \\ + \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\epsilon_1 (1 - \gamma)}{\epsilon_1} dx + \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} E_1 dx - \gamma E \lambda + (1 - \gamma) \times \\ \times \left[\int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} dx + \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} E dx + \int_{\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} dx \right].$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение в квадратных скобках представляет собой значение интеграла I_1 при отсутствии упрочнения. Отсюда находим

$$I_1 = E\lambda [\gamma + (1 - \gamma)\xi]. \quad (6.35, а)$$

Выполняя аналогичные операции, можно получить

$$I_2 = E\lambda^2 (1 - \gamma) \xi_2 \\ I_3 = E\lambda^3 \left[\frac{\gamma}{12} + (1 - \gamma)\xi_3 \right] \quad (6.35, б)$$

5. Зачастую при решении задач теории пластичности целесообразно получить хотя бы грубую оценку распределения напряжений и деформаций в конструкции. Например, это может потребоваться при построении первого приближения метода упругих решений. Здесь имеет смысл принять вместо (6.22) или (6.23) приближенную связь между напряжениями и деформациями.

В частности, при расчете конструкций из материала, характеризующегося идеальной диаграммой деформации (рис. 42, а), наиболее естественно предположить, что компоненты напряжений в пластических зонах не изменятся и равны их значениям на границе раздела упругой и пластической зон. В соответствии с принятым допущением при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ имеем следующую зависимость напряжений от деформаций:

$$\epsilon_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} [\epsilon_1 + \mu \epsilon_2 + \xi_1 \lambda (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2)] \text{ при } \xi < \xi_2 \\ \epsilon_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} [\epsilon_2 + \mu \epsilon_2 + \xi_2 \lambda (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2)] \text{ при } \xi > \xi_2 \quad (6.36)$$

В упругих областях $\varepsilon_3 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2$ связь между напряжениями и деформациями дается законом Гука.

Интегрируя (6.36), получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + \frac{h}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{h}{2}) (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \right] \\ M_1 &= \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} (4\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_2^2) (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Относительные ординаты границ раздела упругой и пластической зон в оболочке можно определить либо из равенства (6.31, а), либо приближенно из условия текучести Треска-Сен-Венана, использование которого зачастую упрощает решение конкретных задач.

6. Вывод уравнений равновесия в условиях и зависимостей для определения деформаций произвольных систем по заданным перемещениям не связан с использованием каких-либо допущений о свойствах материала. Эти зависимости полностью определяются геометрией сооружения и действующими на него внешними нагрузками. В силу сказанного, например, для симметрично нагруженной оболочки вращения, материал которой находится в упруго-пластическом состоянии, будут справедливы равенства (4.1) — (4.10).

Для такой оболочки также удастся упростить основные уравнения, если воспользоваться допущениями, предложенными Я. И. Шварцманом. При соотношениях между напряжениями и деформациями (6.28) имеем

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= EJ_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} T_1, \quad M_2 = \frac{J_2}{J_1} T_1 + \frac{4}{3} E \left(J_2 - \frac{J_2^2}{J_1} \right) \varepsilon_1, \\ \varepsilon_1 &= \frac{3T_1}{4EJ_1} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 - \frac{J_2}{J_1} \varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Учитывая (4.15) и полагая $T_1 = T$, после довольно длинных, но принципиально простых преобразований, по аналогии с (4.17) найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Tr)}{dx} + \frac{q_1 r}{\sin \theta} &= 0 \\ \frac{4E}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(J_2 - \frac{J_2^2}{J_1} \right) r \sin \theta \frac{d^2 v}{dx^2} \right] + \frac{E J_1}{r \sin \theta} v &= \\ = - \frac{q_1 r - 0.3T}{\sin \theta} + \frac{d}{dx} (Tr \operatorname{ctg} \theta) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{J_2}{J_1} Tr \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Все сказанное в гл. IV относительно точности разрешения уравнений упругих оболочек (4.17) остается в силе и для системы (6.39). В частности, для цилиндрической оболочки это уравнение может быть получено и без упрощений Я. И. Шварцмана.

7. Особо остановимся на соотношениях между напряжениями и деформациями, используемых при решении задач устойчивости. Применение статический критерий устойчивости, необходимо располагать такими соотношениями для исходного и возмущенного равновесных состояний.

Для простоты будем полагать даже материал несжимаемым.

Исходное состояние характеризуется уравнениями равновесия типа (4.1) — (4.4) и соотношениями между напряжениями и деформациями (6.25).

Пусть при перескоке в новое равновесие (возмущенное) положение системы получит приращение компонентов деформаций de_x, de_y, de_z . Отвечающие им приращения компонентов напряжений будут $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$. Приращения интенсивностей деформаций и напряжений определятся из равенств

$$\left. \begin{aligned} de_x &= \frac{4}{3} \left[\frac{\sigma_x + \frac{1}{2} \sigma_y}{\sigma_1} d\sigma_x + \frac{\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x}{\sigma_1} d\sigma_y + \frac{1}{4} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1} d\sigma_{xy} \right] \\ d\sigma_x &= - \frac{\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y}{\sigma_1} d\sigma_x + \frac{\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x}{\sigma_1} d\sigma_y + 3 \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1} d\sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Очевидно, что при выпучивании системы в областях, где $d\sigma_1 > 0$, будет протекать активная деформация, т. е. связь между напряжениями и деформациями определяется здесь уравнениями теории пластичности. Она может быть получена дифференцированием уравнений (6.25)

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_x &= \frac{4}{3} \frac{\sigma_1}{\sigma_1} \left(d\sigma_x + \frac{1}{2} d\sigma_y \right) + \frac{4}{3} \left(\sigma_x + \frac{1}{2} \sigma_y \right) \frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1} \right) d\sigma_1 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1} &= E [1 - \alpha(\theta, \eta)] \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Производная от выражения $\frac{\sigma_1}{\sigma_1}$

$$\frac{d}{d\sigma_1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1} \right) = \frac{E_{\sigma_1} - E_c}{\sigma_1}, \quad (6.42)$$

где $E_{\sigma_1} = \frac{d\sigma_1}{d\sigma_1}$ — касательный, а $E_c = \frac{\sigma_1}{\sigma_1}$ — секущий модули, отвечающие неустойчивости напряжений σ_1 в критическом состоянии.

Подставляя (6.40) в (6.41), приходим к уравнениям (6.16).

В областях, где $d\sigma_1 < 0$ (или $d\sigma_1 < 0$), происходит разгрузка,

и связь между приращенными компонентами напряжений и деформаций дается законом Гука

$$d\epsilon_x = -\frac{4}{3} E \left(d\epsilon_x + \frac{1}{2} d\epsilon_y \right). \quad (6.43)$$

Граница раздела зон активной и пассивной деформаций определяется из очевидного равенства

$$d\epsilon_0 = 0. \quad (6.44)$$

Подставляя (6.40) в (6.44) и учитывая (6.25), найдем

$$z_x d\epsilon_x + z_y d\epsilon_y + z_{xy} d\epsilon_{xy} = 0. \quad (6.45)$$

Если проинтегрировать теперь уравнения (6.41) и (6.43) по толщине оболочки, то можно получить связь между приращенными усилиями и деформациями. Соответствующие зависимости приводятся, например, в монографии А. А. Ильюшина [7], куда и отсылаем интересующихся данным вопросом.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛУЗУЧЕСТИ. УСТАНОВИВШЕЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ И ОБОЛОЧКАХ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

1. Физическая природа пластичности и ползучести материала во многом одинакова. Естественно поэтому, что при математическом описании деформаций ползучести в условиях сложного напряженного состояния исходят из уравнений теории пластичности. Последние дополняются определенной связью между деформацией (или их скоростями), напряжениями и временем.

Рассмотрим наиболее распространенные теории ползучести в зависимости от вида указанной связи.

Теория течения. Пусть для любого напряженного состояния выполняется условие

$$\frac{d\epsilon^{(1)}}{dt} = F_s(\epsilon_r, t) \epsilon_r \quad (6.46)$$

где $\epsilon^{(1)}$ — интенсивность деформаций ползучести.

Тогда, поделив уравнения (6.6) на ∂t и заменив в них

$$F(\epsilon_0) \frac{\partial \epsilon_0}{\partial t} = \frac{\partial F_1(\epsilon_0)}{\partial \epsilon_0} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial t}$$

на $F_s(\epsilon_r, t)$, получим

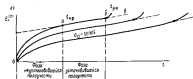
$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_x}{dt} &= \frac{5}{2} F_s(\epsilon_r, t) (\epsilon_x - z) + \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial t} [z_x - \nu(z_y + z_z)] \\ \frac{d\epsilon_y}{dt} &= 3 F_s(\epsilon_r, t) \epsilon_{xy} + \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (6.46, a)$$

Здесь t — время выдержки материала под нагрузкой.

Поскольку далее рассматриваются только малые деформации, то полная производная по времени от деформаций может быть приравнена частной производной.

Функция $F_s(z_r, t)$ определяется из опытов на одноосное растяжение

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = F_s(z_1, t) z_1 + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} = f'(z_1, t) + \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt}, \quad (6.46, б)$$



а)

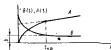


Рис. 44.

откуда

$$F_s(z_1, t) = f'(z_1, t) \frac{1}{z_1}.$$

Если кривые время — деформация ползучести при одноосном растяжении (рис. 44, а) подобны, то

$$f'(z_1, t) = \frac{\partial f(z_1, t)}{\partial t} = B(t) f_1(z_1). \quad (6.47)$$

Удобной формой аппроксимации зависимости $f(z_1)$ служит степенная функция

$$f(z_1) = z_1^n. \quad (6.47, a)$$

Теория старения. Предполагается, что для любого напряженного состояния

$$\epsilon^{(1)} = f_2(z_r, t) z_r \quad (6.48)$$

Воспользуемся деформационной теорией пластичности и найдем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{3}{2} f_2(z_1, t) (z_x - z) + \frac{1}{E} [z_x - z (z_y + z_z)] \\ \epsilon_y &= 3 f_3(z_1, t) z_{xy} + \frac{\nu_{xy}}{E} \end{aligned} \right\} \quad (5.48, a)$$

Здесь $f_2(z_1, t)$ — величина, обратная пластическому модулю $G_p(z_1, t)$.

При одноосном растяжении согласно (5.48, а) имеем

$$\epsilon^I = f_2(z_1, t) z_1 = f(z_1, t), \quad (5.48, б)$$

т. е.

$$f_2(z_1, t) = f(z_1, t) \frac{1}{z_1}.$$

В (5.48, б) учтено, что в качестве исходных данных для уравнений как теория течения, так и теория старения служат один и те же кривые ползучести (рис. 44, а).

Если кривые ползучести подобны и возможна степенная аппроксимация (5.47, а), то

$$f(z_1, t) = A(t) \sigma_1^n, \quad (5.48, в)$$

где

$$A(t) = \int_0^t B(t) dt. \quad (5.48, г)$$

Графики функций $A(t)$ и $B(t)$ представлены на рис. 44, б. В общем случае

$$\frac{d\epsilon(z_1, t)}{dt} = F_2(z_1, t). \quad (5.48, д)$$

Теория упрочнения. В этой теории скорость интенсивности деформаций ползучести считается функцией интенсивности напряжений и интенсивности деформации

$$\frac{d\epsilon^I(t)}{dt} = C \frac{f_2(z_1)}{f_2[\epsilon^I]} z_1 \quad (5.49)$$

или зависимости от вида напряженного состояния.

Как следует из (5.49), уравнения теории упрочнения инвариантны к изменению отсчета времени, чего нельзя сказать об уравнениях двух предыдущих теорий.

Часто принимают

$$z_1 f_2(z_1) = C \sigma_1^n, \quad f_2[\epsilon^I] = [\epsilon^I]^m. \quad (5.49, а)$$

Воспользуемся уравнениями пластического течения (5.6) и условием (5.49, а), чтобы выразить скорости деформаций при произвольном напряженном состоянии

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_x^I(t)}{dt} &= \frac{3}{2} C \frac{\sigma_1^{n-1}}{[\epsilon^I]^m} (z_x - z) \\ \frac{d\epsilon_{xy}^I(t)}{dt} &= 3C \frac{\sigma_1^{n-1}}{[\epsilon^I]^m} \epsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5.49, б)$$

Величина C находится из опыта на одноосное растяжение

$$\frac{d\epsilon^I(t)}{dt} = C \frac{\sigma_1^n}{[\epsilon^I]^m}. \quad (5.49, в)$$

Принтегрировав (5.49, в) при $\sigma_1 = \text{const}$, имеем

$$\epsilon^I(t) = [(1 + \alpha) C]^{1/(1+\alpha)} z_1^{\frac{1}{1+\alpha}} t^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (5.49, г)$$

Из выражения (5.49, г) следует, что равноценно аппроксимация кривых ползучести по теории упрочнения, с одной стороны, и по теории старения и течения, с другой, — возможна, если только

$$A(t) = \int_0^t B(t) dt = [(1 + \alpha) C]^{1/(1+\alpha)} t^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (5.50)$$

Из (5.49, г) и (5.50) вытекает еще одно равенство

$$\frac{\beta}{1 + \alpha} = m. \quad (5.50, а)$$

Зависимости (5.49, б) можно придать форму уравнений деформационной теории пластичности. С этой целью нужно проинтегрировать (5.49, б) по времени, считая нагружение простым,

$$\begin{aligned} \epsilon_x^I &= \frac{3}{2} \int_0^t C \frac{\sigma_1^{n-1}}{[\epsilon^I]^m} \frac{z_x - z}{z_1} z_1 dt = \frac{3}{2} C \frac{z_x - z}{z_1} \int_0^t \frac{\sigma_1^n}{[\epsilon^I]^m} dt = \\ &= \frac{\epsilon^I(t) - \epsilon^I(t_0)}{z_1} (z_x - z) = \frac{1}{G_p[\epsilon^I, t]} (z_x - z). \end{aligned} \quad (5.49, д)$$

В (5.49, д) $G_p[\epsilon^I, t]$ — пластический модуль, аналогичный $G_p(z_1)$ в (5.8),

$$G_p[\epsilon^I, t] = \frac{3}{\epsilon^I(t) - \epsilon^I(t_0)}. \quad (5.51)$$

Все приведенные выше уравнения ползучести справедливы в том случае, когда $d_0 > 0$.

Для уравнений пластичности аналогичное условие выглядит так: $d_0 > 0$. Указанное различие связано с некоторыми особенностями физической природы явлений, о которых будет сказано в § 4.

Укажем также, что выражения (6.46), (6.48), (6.49) предполагают нагружение простым. Надлежащие уравнения ползучести для сложного нагружения, удобные для практического использования, до сих пор не получены.

2. В ряде задач теории тонких пластин и оболочек выполняется условие $\sigma_1 \neq 0 > \sigma_2 \geq \sigma_3$. Это позволяет построить более простые уравнения ползучести. Для их написания рассмотрим сначала уравнения теории течения, основанные на гипотезе текучести Треска—Сен-Венана [9, 10],

$$\frac{d\epsilon^0}{dt} = B(t) \tau^n; \quad \frac{d\epsilon^0}{dt} = 0; \quad \frac{d\epsilon^1}{dt} = -B(t) \tau^n, \quad (6.46, a)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2.$$

При $\sigma_2 = \sigma_3$ решение становится во единственным

$$\frac{d\epsilon_1^0}{dt} = \lambda^2 B(t) \tau^n; \quad \frac{d\epsilon_2^0}{dt} = (1 - \lambda^2) B(t) \tau^n, \quad (6.46, b)$$

$$\frac{d\epsilon_3^1}{dt} = -B(t) \tau^n,$$

где λ^2 — произвольный коэффициент, меньший единицы.

По гипотезе Сен-Венана пластические деформации сдвига развиваются только в тех площадках, где действуют максимальные касательные напряжения. Однако экспериментальные данные этого не подтверждают.

Лучше согласуются с опытом предсказания гипотезы Мизеса.

Напишем приближенные уравнения ползучести так, чтобы сохранить физическое предположение гипотезы Мизеса и простоту уравнений, вытекающих из гипотезы Сен-Венана. Это можно сделать, воспользовавшись формулами (6.46, c) при $\sigma_1 \neq \sigma_2$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_1^0}{dt} &\approx \lambda_1^2 B(t) \tau^n, & \frac{d\epsilon_2^1}{dt} &= \lambda_2^2 B(t) \tau^n \\ \frac{d\epsilon_3^1}{dt} &\approx -[\lambda_1^2 \sigma_1^n + \lambda_2^2 \sigma_2^n] B(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.46, d)$$

Выбор параметров λ_1 и λ_2 в (6.46, d) должен основываться на экспериментальных данных, полученных при разных отношениях $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

Предельное упрощение (6.46, d) достигается, если положить, что λ_1 и λ_2 не меняются по высоте зоны интенсивной ползучести и

определяются отношением $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ либо на границе раздела зон, либо в крайних фибрах элемента пластины и оболочки.

Количественную разницу между критериями текучести Мизеса и Сен-Венана, составляющую, как известно, не более 15%, можно уменьшить до $\pm 8\%$, если принять за критерий текучести Сен-Венана $1,08 \sigma_{1c}$. При этом ошибка решения, получаемого на основе уравнений (6.46, d) для маторала, строго следующего критерию текучести Мизеса, будет эквивалентна ошибке в нагрузке не более чем $\pm 8\%$.

3. Задачи теории ползучести можно внутри каждого небольшого отрезка времени рассматривать как задачи теории пластичности.

Если сделать указанный переход, то в качестве зависимостей между усилиями и деформациями (или их скоростями) для элемента пластины и оболочки будут служить формулы (6.27)–(6.29) и им подобные.¹

Ниже будут часто использоваться упрощенные уравнения ползучести типа (6.46, d). Их решение значительно облегчается за счет привлечения так называемого предельного распределения напряжений, которое реализуется по прошествии неустановившейся фазы ползучести ($t \gg t_{u,0}$), когда деформации ползучести заметно превышают упругие, а скорости ползучести выравниваются (см. рис. 44, a).

Рассмотрим сначала это предельное распределение в простейшем случае. Пусть элемент оболочки находится в состоянии чистого изгиба моментом M_0 . На основании уравнения (6.46, d):

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{d\epsilon_1^0}{dt} + \frac{d\epsilon_1^1}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) + \lambda_1^2 B(t) \tau^n. \quad (6.52)$$

Если $t \gg t_{u,0}$, то $\frac{d\epsilon_1^1}{dt} \approx 0$. Тогда

$$\frac{d\epsilon_1^0}{dt} \approx \frac{d\epsilon_1}{dt} = \lambda_1^2 B(t) \tau^n. \quad (6.52, a)$$

Решим (6.52, a) относительно τ и найдем

$$\tau = \left[\lambda_1^{-2} B^{-1}(t) \frac{d\epsilon_1}{dt} \right]^{\frac{1}{n}} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right]^{\frac{n-1}{n}}. \quad (6.52, b)$$

Уравнения теории старения в упрощенном варианте имеют вид

$$d\epsilon^0 = \lambda_1^2 A(t) \tau^n \dots$$

¹ Пути перехода от задач ползучести к задачам пластичности подробно изложены в гл. VII.

Отсюда при $t \gg t_{a, \Phi}$

$$\sigma_2 = \sigma_2^0 \approx \sigma_1^{(1)} = \lambda_1^2 A(t) \sigma_1^0; \quad (6.53)$$

$$\sigma_1 = [\lambda_1^{-2} A^{-1}(t) \sigma_2]^{1/m} |z|^{1/m-1} z. \quad (6.53, a)$$

Аналогично при использовании теории упрочнения при $t \gg t_{a, \Phi}$

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{d\sigma_2}{dt} z \approx \frac{d\sigma_1^{(1)}}{dt} = C \lambda_1^2 \frac{\sigma_1^2}{|\sigma_1^{(1)}|^2}, \quad \sigma_1 \approx \text{const.} \quad (6.54)$$

Из (6.54) находим $\sigma_1^{(1)}$, интегрируя по переменной последнюю часть равенства (6.54),

$$\sigma_1^{(1)} = [C \lambda_1^2 (t - t_0) (1 + \alpha)]^{1/(1+\alpha)} \sigma_1^{1/(1+\alpha)} \approx \alpha z. \quad (6.54, a)$$

Решая (6.54, a) относительно σ_1 , получим

$$\sigma_1 = \left\{ [C \lambda_1^2 (t - t_0) (1 + \alpha)]^{1/(1+\alpha)} \sigma_1^{1/(1+\alpha)} \right\}^{1+\alpha} |z|^{1+\alpha-1} z. \quad (6.54, b)$$

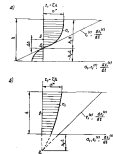


Рис. 45.

Формулы (6.52, б), (6.53, а) и (6.54, б) показывают, что при чистом изгибе напряжения σ_1 распределены по высоте сечения пропорционально \sqrt{z} , где z — расстояние от оси изгиба. Такой же вывод можно сделать относительно распределения напряжений $\sigma_2(z)$, если $M_2 \neq 0$. Воспользуемся этим для определения $\sigma_2(z)$ при сложном изгибе элемента (рис. 41), когда $M_1 \neq 0$ и $T_1 \neq 0$ (или $M_2 \neq 0$, $T_2 \neq 0$).

Предположим, что эпюра $\sigma_2(z)$ имеет вид, представленный на (рис. 45, а). Введем новую координатную ось z_1 , параллельную z . Начало отсчета оси $z_1 - \sigma_1$ лежит на оси изгиба

$$z_1 = z_0 = z + \Delta h. \quad (6.55)$$

Распределение напряжений $\sigma_1(z_1)$ будет¹, согласно (6.52, б), (6.53, а) и (6.54, б), пропорционально $|z_1|^{1/m}$

$$\sigma_1 = \sigma^* \zeta^{1/m} h_1^{-1/m}. \quad (6.56)$$

Составим уравнения равновесия элемента и найдем

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz = \frac{\sigma^* h}{h_1^{1/m}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta^{1/m} d\zeta = \sigma^* h \frac{m}{m+1} \left[\frac{h_1^{1+\frac{1}{m}}}{h_1^{1/m}} - \frac{h_2^{1+\frac{1}{m}}}{h_2^{1/m}} \right] \\ M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz = \frac{\sigma^* h^2}{h_1^{1/m}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta^{1/m} d\zeta - T_1 \Delta h = \\ &= \sigma^* h^2 \frac{m}{2m+1} \left[\frac{h_1^{2+\frac{1}{m}}}{h_1^{1/m}} - \frac{h_2^{2+\frac{1}{m}}}{h_2^{1/m}} \right] - T_1 h \frac{h_1 - h_2}{2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Введем безразмерный параметр $\eta = \frac{M_1}{T_1 h}$ и преобразуем (6.57), исключив σ^* и $h_2 = 1 - h_1$,

$$\eta = \frac{m+1}{2m+1} \frac{h_1^{2+\frac{1}{m}} + (1-h_1)^{2+\frac{1}{m}}}{h_1^{1+\frac{1}{m}} + (1-h_1)^{1+\frac{1}{m}}} - \frac{2h_1-1}{2}. \quad (6.57, a)$$

Другой возможный вид эпюры $\sigma_2(z)$ (рис. 45, б) описывается выражением

$$\sigma_2 = \sigma^* \left(\frac{z}{1+h_2} \right)^{1/m}. \quad (6.58)$$

¹ Ниже для простоты мысленно примем, что m — четное целое число. Однако полученные расчетные формулы справедливы также для дробных и oddных значений m .

Из уравнений равновесия имеем

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{\sigma^* h}{(1+h_0)^m} \int_{k_0}^{1+h_0} \frac{1}{\alpha} d\alpha = -\frac{\sigma^* h}{\alpha-1} \frac{(1+h_0)^{1+\frac{1}{\alpha}} - h_0^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(1+h_0)^{\frac{1}{\alpha}}} \\ M_1 &= -\frac{\sigma^* h^2}{(1+h_0)^m} \int_{k_0}^{1+h_0} \frac{1}{\alpha} d\alpha - T_1 h \left(h_0 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} (6.59)$$

Отсюда после исключения α^*

$$\alpha = \frac{m+1}{2m+1} \frac{(1+h_0)^{2-\frac{1}{m}} - h_0^{2-\frac{1}{m}}}{(1+h_0)^{1-\frac{1}{m}} - h_0^{1-\frac{1}{m}}} - \frac{1}{2} - h_0. \quad (6.59, a)$$

Зависимости $\alpha(h_0, m)$ и $\gamma(h_0, m)$ приведены на рис. 46, а и б в форме графиков.

Вычисление скорости деформации срединной поверхности элемента $\frac{d\epsilon_1^{(T)}}{dt}$ и его кривизны $\frac{d\epsilon_1^{(T)}}{dt}$ (для данных деформаций и кривизны) не представляет трудности, если известны величины α^* , h_1 или h_0 ; необходимо лишь воспользоваться соотношениями (6.46, д) (или их подобными) в формулах типа

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_1^{(T)}}{dt} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\epsilon_1^{(T)}(h_1)}{dt} + \frac{d\epsilon_1^{(T)}(-h_0)}{dt} \right] \\ \frac{d\epsilon_1^{(T)}}{dt} &= \frac{1}{h} \left[\frac{d\epsilon_1^{(T)}(h_1)}{dt} - \frac{d\epsilon_1^{(T)}(-h_0)}{dt} \right] \end{aligned} \right\} (6.60)$$

Задача о построении перехода во времени от какого-то известного распределения напряжений к реальному будет подробно рассмотрена в гл. VII.

§ 4. О ВЫБОРЕ ТЕОРИИ ПОЛУЧЕСТИ

1. От правильного выбора теории ползучести во многом зависит фактическая точность и достоверность получаемых решений. Даже самое строгое удовлетворение необоснованно избранных уравнений не может гарантировать от появления серьезных ошибок и просчетов.

Остановимся коротко на элементарных представлениях о природе пластической деформации. Это позволит читателю,

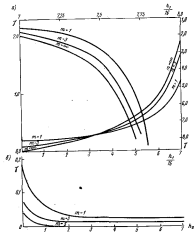


Рис. 46.

недостаточно знакомому с физикой твердого тела и металловедением, судить о достоинствах и границах применимости принимаемых упрощений ползуемости.

Пластические внутризеренные деформации поликристаллических тел являются следствием развития процессов скопления по плоскостям налегающих сдвигов решетки под внешним воздействием [21]. Действующими плоскостями сдвига служат также плоскости, в которых дефекты сосредоточены и надвигающим образом ориентированы по отношению к сдвигающим напряжениям. По мере развития деформаций изменения формы эти дефекты взаимодействуют: они могут складываться (тогда продолжение деформаций сдвига в данной плоскости облегчается), увязываться или блокироваться (тогда деформации сдвига приостанавливаются). Если уровень напряжений не повышается, то начавшиеся скопления обычно так или иначе затухают — дефекты, способствующие сдвигу, блокируются. Для их дальнейшего движения, а также для начала движения новых, еще «неработавших» дефектов необходимо повысить уровень внешнего воздействия.

В процессе межзеренных сдвигов может происходить изменение структуры зерна, на границе раздела блоков могут выделяться новые фазы, а также образовываться новые структуры.

Возникновение пластической деформации бывает, кроме того, обусловлено межзеренными сдвигами. Чаще всего это связано с наличием по границам зерна определенных фаз или дефектов, нарушающих и без того нерегулярную межзеренную связь.

Пластические деформации развиваются во времени по-разному. В одних случаях действие определенных напряжений сдвига немедленно вызывает необратимые изменения формы тела, которые в дальнейшем практически не увеличиваются, хотя приложенные напряжения не сняты. Это свойство материала принято называть пластичностью. В других случаях действие указанных напряжений вызывает лишь постепенные изменения формы тела, которое накапливается с увеличением времени выдержки под нагрузкой. Такое свойство материала называют ползуемостью.

Может реализовываться третий, промежуточный случай, когда изменения формы тела обуславливаются как мгновенными пластическими деформациями, так и деформациями ползуемости.

При сжатии нагрузки некоторая, обычно небольшая, часть остаточных пластических деформаций исчезает по мере увеличения времени отдыха.

Один и тот же материал в разных температурных условиях способен обнаруживать пластичность или ползуемость, либо и то и другое сразу.

Физической (модальной) теорией, описывающей процессы внутризеренной пластической деформации, является теория дислокаций. С ее позиций удобно объяснить, например, различие между пластичностью и ползуемостью материалов.

Вероятность продвижения дислокаций и его величина определяются температурой и временем действия нагрузки и ее уровнем. Чем больше уровень нагрузки, дольше время выдержки и выше температура, тем большее число дислокаций включается в работу и тем заметнее их макроразложение.

Недислоцированные и низколегированные корпусные стали при нормальных температурах и малых деформациях почти не дают межзеренных сдвигов и не склонны к ползуемости. Это связано с тем, что при нормальных температурах еще мала активность заложивших в этих материалах дислокаций, и только при достижении вполне определенного уровня нагрузки почти одновременно начинают ра-

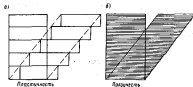


Рис. 47.

ботать наиболее благоприятно ориентированные дислокации. Указанные дислокации, как известно, блокируются, и их продвижение приостанавливается при появлении определенных и довольно больших деформаций сдвига (имеется физический предел текучести).

Кристаллографический анализ микропластических деформаций малоуглеродистых и низколегированных сталей свидетельствует, что сдвиги между отдельными пакетами кристаллитов состоят из порядка 1000 микротонных расстояний, а расстояния между действующими плоскостями скопления — 100 таких расстояний (рис. 47, а).

Искусственно упрочненные стали, алюминевые и другие легкие сплавы обнаруживают ползуемость уже при нормальных температурах. В значительной степени она обусловлена внутризеренными сдвигами. У этих материалов нет, как правило, площади текучести, а условный предел текучести зависит в той или иной степени от скорости нагружения («запаздывание пластичности»). Следовательно, здесь продвижение дислокаций происходит не сразу, но вдруг, а постепенно. Оно усиливается с увеличением времени действия нагрузки.

Обращая снова к кристаллографической картине сдвигов, мы заметим, что в условиях ползуемости они распределяются по зерну

гораздо равномернее — расстояние между действующими дислокациями составляет 1—10 межзеренных расстояний, а относительный сдвиг пакетов — 10—100 таких расстояний (рис. 47, б).

С повышением температуры увеличивается активность дислокаций, и материал, не проявлявший ранее склонности к ползучести, может начать ползти. Однако при этом соотношение между внутризеренной и межзеренной ползучестью меняется. Начиная с некоторых температур межзеренная ползучесть оказывается преобладающей. Физико-модельной теорией, подобной теории дислокаций, описывающей межзеренные сдвиги, пока нет.

Процессы межзеренной ползучести, несмотря на всю свою сложность, очень напоминают процесс квазипластического течения. Поэтому феноменологическая теория квазипластического течения среды может одновременно служить, ввиду в самом грубом приближении, физико-модельной теорией высокотемпературной ползучести.

Впрочем, при оценке макродеформаций внутризеренной пластичности также приходится использовать феноменологию. Теория дислокаций, хотя она достаточно строго и позволяет предсказывать законы внутризеренных микропластических деформаций, непригодна для математического описания поведения больших объемов материала. Ее задача более узка: она дает границы применимости феноменологических теорий пластичности и ползучести, которые как бы интегрируют законы теории дислокаций на больших масштабах.

Очевидно, что выполнить такое интегрирование можно только, если задаться какой-то упрощенной формой физической связи между компонентами напряжений, деформаций и их скоростей и определить параметры аппроксимации статистической обработкой опытных данных.

2. Наличие на краях ползучести (рис. 44, а) неустойчивающегося участка (скорость деформации теоретически увеличивается) считается обычно внешним признаком внутризеренной ползучести. Сдвиг по границам зерен принято связывать с ползучестью, протекающей при постоянной скорости (устойчивающийся ползучестью).

В настоящее время известны две физико-модельные дислокационные теории, описывающие начальную (неустойчивающуюся) стадию ползучести [1, 13, 17, 21, 46].

Согласно первой из них (теория истощения) непрерывное понижение скорости ползучести связывается с постепенным истощением внутри зерен подвижных дислокаций. Под воздействием внешних условий в первую очередь перемещаются, а затем блокируются наиболее подвижные дислокации. Если дислокации не появляются, то по мере деформирования материала скорость ползучести падает. Отсюда следует также, что ползучесть может протекать и при увеличивающихся напряжениях, когда число подвижных дислокаций остается достаточно большим.

Вторая теория исходит из предположения об упрочнении материала в процессе деформирования. Основной причиной такого у-

прочнения служат, по-видимому, возникновение тонкой структуры [17]. С ростом пластической деформации кристаллит разбивается на отдельные фрагменты (размером порядка 10^{-4} см) с довольно большими искажениями кристаллической структуры решеток на границах. Фрагменты в свою очередь разбиваются на блоки (размером порядка 10^{-6} см).

Границы фрагментов и блоков являются естественными препятствиями, тормозящими продвижение дислокаций. Это в конечном счете увеличивает сопротивление поликристалла деформированию.

По-видимому, при деформировании материалов действуют оба механизма ползучести. Так, например, механизм истощения должен быть основным в начальный период неустойчивающегося фазы.

Корпусные материалы, обнаруживающие склонность к ползучести при нормальных температурах, имеют, как правило, длительную неустойчивающуюся фазу, в процессе которой ползучесть почти полностью затухает. Дальнейшее течение происходит с очень небольшой постоянной скоростью. Эта склонность к ползучести обнаруживается только при сравнительно высоком уровне напряжений, т. е. имеется какая-то физическая величина — константа материала, определяющая начало ползучести. Назовем указанную константу пределом ползучести.

Обозначим предел ползучести материала при одноосном растяжении через σ_c . Тогда аппроксимацию реальных ползучести корпусных материалов при нормальных температурах можно представить в виде

$$\dot{\epsilon} = A(\dot{\sigma})(\sigma - \sigma_0)^n = (a\dot{\sigma}^m + b\dot{\sigma})(\sigma - \sigma_0)^n \approx a\dot{\sigma}^m (\sigma - \sigma_0)^n, \quad (6.61)$$

Зависимость (6.61) при напряжениях, переменных во времени, является математическим выражением теории старения (см. § 3).

Теория старения — наиболее формальная теория ползучести, поэтому заранее судить о границах ее применимости, даже располагая достаточными сведениями о физической природе пластической деформации материала, нельзя.

Теория упрочнения предполагает уменьшение скорости ползучести с ростом накапливаемой пластической деформации, т. е. основывается на описанных выше дислокационных представлениях механизма внутризеренной ползучести.

$$\frac{d\dot{\epsilon}}{d\dot{\sigma}} = -C \frac{1 - \dot{\sigma}^m}{\dot{\sigma}^m} \quad (6.62)$$

Эту теорию можно рекомендовать тогда, когда фазой устойчивающейся ползучести материала допустимо пренебречь по сравнению с фазой неустойчивающейся ползучести.

Интегрируя (6.62) при $\dot{\sigma} = \text{const}$, будем, с учетом (6.50, а), иметь $\dot{\epsilon}_c = [C(x+1)]^{\frac{1}{m}} \dot{\sigma}^m (\sigma - \sigma_0)^n - a\dot{\sigma}^m (\sigma - \sigma_0)^n \approx (a\dot{\sigma}^m + b\dot{\sigma}) \dot{\sigma}^m, \quad (6.62, а)$

Отсюда совершенно очевидно, что попытка описать установившуюся ползучесть материала при помощи теории упрочнения бессмысленна.

Из приведенных рассуждений о природе деформаций установившейся ползучести ясно, что они должны достаточно хорошо предсказываться теорией течения.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = B(t)(\sigma - \sigma_0)^n = (a_1 t^{m-1} + b)(\sigma - \sigma_0)^n, \quad (6.63)$$

причем

$$a_1 t^m + b t \approx b t, \quad (6.63, a)$$

что означает пренебрежение фазой неустойчивой ползучести.

При выполнении условий (6.63, а) уравнение теории течения точно совпадает с уравнением вязкого течения среды Максвелла и становится инвариантным относительно отчета времени. Впрочем, такая инвариантность необходима для любой физической теории ползучести и пластичности вообще.

3. Чтобы проиллюстрировать зависимость искомого решения задач ползучести от выбора теории, а также найти границы применимости теории старения, рассмотрим уравнения (6.61), (6.62, а) и (6.63) при переменных напряжениях. Параметры ползучести в этих уравнениях примем, исходя из типичных кривых ползучести корпусных материалов при нормальных температурах,

$$m = 3, \quad n = \frac{1}{1+\beta} = \frac{1}{3}, \quad \beta = 9, \quad a = 2, \quad a_1 t^m + b t \approx a_1 t^m. \quad (6.64)$$

Представленный вариант аппроксимации кривых ползучести означает, что мы предполагаем описывать в основном интразеримную пластическую деформацию.

Исследуем одноосную ползучесть материала при следующих конкретных законах изменения напряжений во времени:

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma t; \quad (6.65, a)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma(1-t); \quad (6.65, б)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma \exp(-\mu t). \quad (6.65, в)$$

Здесь и далее t — некоторое безразмерное время в долях от $t_{\text{ст}}$. Вычисляем деформацию ползучести при линейно возрастающих напряжениях (6.65, а):

а) по теории течения (6.63)

$$\epsilon_t = a_1 \Delta\sigma^m t^{m+n} \left(\frac{n}{m+n} \right); \quad (6.65, a)$$

б) по теории старения (6.61)

$$\epsilon_t = a_1 \Delta\sigma^m t^{m+n}; \quad (6.65, б)$$

в) по теории упрочнения (6.62)

$$\epsilon_t = a_1 \Delta\sigma^m t^{m+n} \left(\frac{n}{m+n} \right)^n. \quad (6.65, в)$$

Сравняя между собой результаты (6.65), получаем ответ, не зависящий от момента сравнения во времени,

$$\epsilon_t(a) : \epsilon_t(б) : \epsilon_t(в) = \frac{n}{m+n} : 1 : \left(\frac{n}{m+n} \right)^n. \quad (6.65, г)$$

При условиях (6.64) оказывается, что

$$\epsilon_t(a) : \epsilon_t(б) : \epsilon_t(в) = 0,100 : 1 : 0,465. \quad (6.65, д)$$

В случае линейно убывающих напряжений (6.65, б), находим

$$a) \epsilon_t = a_1 \Delta\sigma^m \int_0^t (1-t)^m t^{m-1} dt; \quad (6.67, a)$$

$$б) \epsilon_t = a_1 \Delta\sigma^m \int_0^t (1-t)^m dt; \quad (6.67, б)$$

$$в) \epsilon_t = a_1 \Delta\sigma^m \left[1 - (1-t)^{\frac{m+n}{n}} \right] \left(\frac{n}{m+n} \right)^n. \quad (6.67, в)$$

Здесь отношение между величинами ϵ_t уже зависит от момента сравнения. Более того, формула (6.67, б) нуждается в некотором пояснении. Дело в том, что при определенных значениях $t > t_1$ она дает ответ, противоречащий физическому смыслу,

$$\epsilon_t(t > t_1) < \epsilon_t(t_1).$$

Например, если $t = 1$, $\epsilon_t = 0$, хотя на самом деле деформация ползучести, накопленная при $t < 1$, нигде исчезнуть не могла.

Будем пользоваться формулой (6.67, б) до тех пор, пока она дает возрастание ϵ_t , а затем примем

$$\epsilon_t(t > t_1) = \epsilon_t(t_1). \quad (6.68)$$

Определив t_1 из очевидного условия $\frac{d\epsilon_t}{dt} = 0$, найдем

$$t_1 = \frac{n}{m+n}, \quad \epsilon_t(t > t_1) = a_1 \Delta\sigma^m \left(\frac{n}{m+n} \right)^n \left(\frac{n}{m+n} \right)^n. \quad (6.68, a)$$

Сравним теперь формулы (6.67) в разные моменты времени

при $t = t_1$

$$\epsilon_t(a) : \epsilon_t(б) : \epsilon_t(в) = 1,278 : 1 : 1,156; \quad (6.67, г)$$

при $t = 1$

$$\epsilon_t(a) : \epsilon_t(б) : \epsilon_t(в) = 1,716 : 1 : 1,376. \quad (6.67, д)$$

Особенно интересна с практической точки зрения зависимость напряжений от времени (6.65, в), поскольку она наиболее часто

встречается в задачах об изгибе (релаксации напряжений). При этих напряжениях имеем

$$\epsilon_1(x) = \sigma_0 \Delta z^m n (\pi r)^n \gamma (n, \pi r t); \quad (6.66, a)$$

$$\epsilon_1(t) = a_0 \Delta z^m r^n \exp(-\pi r t); \quad (6.66, б)$$

$$\epsilon_1(t) = a_0 \Delta z^m \left(\frac{n}{\pi r} \right)^n \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi r}{n} t\right) \right]^n, \quad (6.66, в)$$

где $\gamma(n, \pi r t)$ — неполная гамма-функция [47].

Здесь формула (6.66, б) также нуждается в исправлении

$$\epsilon_1(t > t_0) = \epsilon_1(t_0), \quad t_0 = \frac{\pi}{\pi r}, \quad \epsilon_1(t_0) = a_0 \Delta z^m \left(\frac{n}{\pi r} \right)^n \exp(-n). \quad (6.70)$$

Выберем показатель $p = 3$ из условия, чтобы процесс наименьших напряжений затух по окончании фазы неустойчиваго ползучести $\sigma(t) \approx \sigma_0$. Тогда получим

при $t = t_1$

$$\epsilon_1(a) : \epsilon_1(b) : \epsilon_1(v) = 5,63 : 1 : 1,195; \quad (6.69, г)$$

при $t = 1$

$$\epsilon_1(a) : \epsilon_1(b) : \epsilon_1(v) = 6,14 : 1 : 1,395. \quad (6.69, д)$$

Из анализа результатов (6.66), (6.67), (6.69) видно, что предсказания теории старения и теории упрочнения почти совпадают. Исключение составляет случай возрастающих напряжений.

Предсказания теории течения, как и следовало ожидать, совпадают. Но важно отметить, что при медленном и монотонном (линейном) уменьшении напряжений эта теория удовлетворительно предсказывает пластические деформации внутризеренной ползучести.

Таким образом, в качестве первого приближения теория старения можно рекомендовать для описания пластических деформаций внутризеренной ползучести. Правда, ее необходимо дополнить условиями типа (6.68, а) и (6.70).

Теорией течения для предсказания этих деформаций тоже допустимо пользоваться, если процесс быстрого наименьшего напряжения закончился и дальнейшее наименьшее напряжениями хаотично их линейному уменьшению. Здесь будет более целесообразным разбить задачу на две части. Первой частью решается задача о быстром перераспределении напряжений с использованием либо теории старения, либо теории упрочнения, а затем рассматривается задача о квазистационарном течении с учетом предельно только полученных пластических деформаций, т. е. решение строится так же, как решение задач ползучести с учетом микранных пластических деформаций.

Предлагаемая комбинация использованных теорий упрочнения (или старения) и течения особенно удобна для описания ползучести материалов, имеющих равновесные фазы неустойчиваго и установившегося пластического деформирования.

ОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

§ 1. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

1. В гл. II был наведен общий путь решения одномерных и сводящихся к ним задач теории пластичности, сущность которого сводится к следующему. Расчет деформаций производится последовательными приближениями. В каждом приближении система полагается упругой; для определения внутренних усилий и смещений используется метод вариационных откликов.

Замену действительной системы упругой удобнее всего производить на основании метода упругих решений. Напомним основные положения его: для простоты изложения рассмотрим одноосное напряженное состояние.

Напряжения σ , возникающие в системе, представляются в виде суммы двух составляющих — напряжений τ_0 , отвечающих ее упругому состоянию, и добавок σ_p , связанных с появлением в конструкции пластических деформаций

$$\sigma = \tau_0 + \sigma_p. \quad (7.1)$$

Если рассматривать систему, при определении деформаций которой можно не учитывать геометрическую нелинейность, то уравнение равновесия ее приведет к виду

$$L(\sigma) = M(p). \quad (7.2)$$

Здесь p — внешняя нагрузка, $L(\sigma)$ и $M(p)$ — линейные операторы.

Подставляя (7.1) в (7.2), получим

$$L(\tau_0) = M(p) - L(\sigma_p). \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) интегрируется методом последовательных приближений. Первоначально полагают $\sigma_p = 0$, т. е. рассматривают систему как упругую. Если такая задача решена, то можно найти в первом приближении деформации конструкции и вычислить по соотношениям (6.9) напряжения $\sigma_p^{(1)}$ и добавки $\tau_p^{(1)}$.

Во втором приближении уравнения равновесия принимаются в виде

$$L(\tau_p^{(2)}) = M(p) - L(\tau_p^{(1)}). \quad (7.4)$$

Следовательно, здесь необходимо рассчитать упругую конструкцию на действие новой приведенной нагрузки $M(p) - L(\tau_p^{(1)})$. В результате будет определены во втором приближении смещения, деформации и добавки $\sigma_p^{(2)}$.

Продолжая аналогичные операции, можно найти смещение конструкции и напряжения в ней для N -го приближения. Процесс

решения заканчивается, как только разница между $(N-1)$ -м и N -м приближениями будет в пределах допустимой.

Как уже отмечалось, уравнения типа (7.4) целесообразно антагирозировать методом парных левых откликов. Поскольку линейный оператор в левой части (7.4) остается минимальным при переходе от одного приближения к другому, отклики системы также не будут меняться. Их, как и коэффициенты распределения усилий, достаточно вычислять лишь один раз — для упругого состояния конструкции. Тогда в каждом приближении нужно найти только приведенную нагрузку, исходя из величин деформаций в предыдущем приближении, и вычислить усилия по равенствам типа (6.27), (6.28).

2. Выведем основные зависимости для определения усилий и перемещений оболочки. Для простоты будем полагать материал несжимаемым.

По аналогии с (7.1) представим внутренние усилия и моменты в оболочке в виде суммы двух составляющих

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T_{1r} + T_{1p}, & T_2 &= T_{2r} + T_{2p}, \\ M_1 &= M_{1r} + M_{1p}, & M_2 &= M_{2r} + M_{2p} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Составляющие, характерные для упругого состояния конструкции (T_{1r}, \dots, M_{2r}), связаны с деформациями оболочки соотношениями упругости (4.11). Для добавок, вызванных пластическими деформациями (T_{1p}, \dots, M_{2p}), из оснований (4.11) и (6.28) получим

$$\left. \begin{aligned} T_{1r} &= -\frac{4}{3} E h (1 - \nu) \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \right) + \frac{4}{3} E h^3 \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \right) \\ T_{2r} &= -\frac{4}{3} E h (1 - \nu) \left(\epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \right) + \frac{4}{3} E h^3 \left(\epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \right) \\ M_{1r} &= \frac{4}{3} E h^3 \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \right) - \frac{1}{9} E h^3 (1 - 12\nu) \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 \right) \\ M_{2r} &= \frac{4}{3} E h^3 \left(\epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \right) - \frac{1}{9} E h^3 (1 - 12\nu) \left(\epsilon_2 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Уравнения равновесия элемента оболочки независимо от свойств материала имеют вид (4.1) — (4.4). Подставляя в них (7.5), перейдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(T_r)}{ds} &= -q_r r \\ \frac{d(M_r)}{ds} - T_{2r} &= -q_r r + T_{2p} \\ \frac{d(M_{2r})}{ds} - M_{2p} \cos \theta + T_r \cos \theta - H r \sin \theta &= \\ &= -\frac{d(M_{2p})}{ds} - M_{2p} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Члены, стоящие в левых частях первых двух уравнений (7.7), можно рассматривать как приведенные внешнюю осевую и поперечную нагрузки; левая часть третьего уравнения дает приведенный распределенный внешний момент.

Общий порядок определения такой нагрузки был уже намечен выше. Практически удобнее всего поступать следующим образом.

Пусть в N -м приближении найдены усилия и моменты $T^{(N)}, M_2^{(N)}$. Из соотношений упругости (4.11) при $\nu = 0,5$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1^{(N)} &= \frac{T_1^{(N)} - 0,5 T_2^{(N)}}{E h} & \epsilon_2^{(N)} &= \frac{T_2^{(N)} - 0,5 T_1^{(N)}}{E h} \\ \epsilon_1^{(N)} &= \frac{M_1^{(N)} - 0,5 M_2^{(N)}}{E h^3} & \epsilon_2^{(N)} &= \frac{M_2^{(N)} - 0,5 M_1^{(N)}}{E h^3} \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Как скоро известны деформации в крайних срединной поверхности оболочки, нетрудно вычислить по равенству (6.29) интенсивность деформаций, найти из (6.31, 6) ordinаты границы раздела упругой и пластической зон и, наконец, определить функции $J_1^{(N)}, J_2^{(N)}$ в N -м приближении.

Тогда для $(N+1)$ -го приближения добавочные усилия $T_{2p}^{(N+1)}, M_{2p}^{(N+1)}$, от которых зависит приведенная нагрузка, определяются равенствами (7.6). Входящие в них величины деформаций, кривая и J_2 берутся из предыдущего приближения.

Аналогично определяется и внешний изгибающий момент. Однако следует заметить, что его интенсивность зависит не только от известной величины $M_{2p}^{(N)} \cos \theta$, но и от производной $(M_{2p}^{(N)})'$, величина которой, строго говоря, нам неизвестна (известны лишь численные значения $M_{2p}^{(N)} r$). Для определения ее следует воспользоваться общими приемами нахождения производной по численным значениям функции.

Если приведенная нагрузка определена, внутренние усилия и моменты в оболочке могут быть без труда вычислены по уравнениям (4.25); порядок использования их был уже пояснен выше.

Изложенный общий прием исследования деформаций оболочки позволяет получить сколь угодно точное решение (естественно, в пределах точности исходных соотношений теории пластичности и теории оболочек). Действительно, в работе Панферова доказана сходимость метода упругих решений применительно к пластическим и оболочкам. В то же время в пределах каждого приближения усилия и деформации могут быть вычислены методом парных левых откликов с любой степенью точности.

3. Значительные пластические деформации возникают в сравнительно небольших по длине участках оболочки. Рескан локализация их наблюдается, например, вблизи приложения сосредоточенных

уский, скачкообразного изменения жесткости или кривизны, т. е. в зонах красного эффекта. Здесь вместо отмеченного общего пути исследования гораздо целесообразнее воспользоваться обобщенным методом начальных параметров.

Сущность этого метода уже была пояснена выше. Остановимся лишь на некоторых особенностях применения его к расчету оболочек.

В случае осесимметричной деформации оболочки напряженное и деформированное состояние любого i -го сечения с координатой z характеризуется тремя сдвигами: — осевым u_i , нормальным к срединной поверхности w_i , углом поворота φ_i , а также осевой силой T_i , поперечной H_i и моментом M_i . Предположим, что нам удалось образовать сечение, удовлетворяющее этим величинам.

Тогда из равенств (4.6) — (4.8) нетрудно найти приращение сдвигов при переходе к $i + 1$ -му сечению, отстоящему от i -го на расстоянии

$$\Delta z_i = \left(\frac{u_i}{R_H} - \varphi_i \right) \Delta z_i, \quad \Delta u_i = \left(u_i - \frac{w_i}{R_H} \right) \Delta z_i, \quad \Delta \varphi_i = \varphi_i \Delta z_i. \quad (7.9)$$

Очевидно, что эти приращения будут определены, как только удастся выразить деформацию в осевом направлении u_i и приращение кривизны φ_i через известные шесть величин. Для нахождения такой зависимости следует воспользоваться соотношениями между усилиями и деформациями, даваемыми теорией пластичности (6.28). После ряда преобразований эти равенства с учетом (4.6) и (4.8) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{3}{4E} \frac{T_i I_2 - M_i I_1}{I_1 I_2 - I_2^2} \cdot \frac{\sin \theta - u \cos \theta}{2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{3}{4E} \frac{M_i I_1 - T_i I_2}{I_1 I_2 - I_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \varphi_i \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Входящие в (7.10) интегралы I_k сами зависят от неизвестных u_i и φ_i , и поэтому указанные неизвестные могут быть определены только способом последовательных приближений. Для этого необходимо располагать зависимостью I_k от деформаций, которая при известной диаграмме деформирования материала дается равенствами (6.28). Напомним, что для цилиндрической оболочки на идеального упруго-пластического материала связь между I_k и деформациями представлена на рис. 43.

После того как определены все деформации, нетрудно вычислить усилия T_i и момент M_i в i -м сечении

$$\left. \begin{aligned} T_i &= \frac{1}{3} E I_2 \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) - \frac{1}{3} E I_1 \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) \\ M_i &= \frac{1}{3} E I_2 \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) + \frac{1}{3} E I_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Для вычисления приращений усилий при переходе к $i + 1$ -му сечению можно воспользоваться уравнениями равновесия элемента оболочки.

Усилие T не зависит от свойств материала и может быть найдено из уравнения (4.1)

$$T = - \frac{3}{r} \int_0^{\theta} q_i r d\theta - T_0 \frac{r_0}{r}, \quad (7.12)$$

где T_0 — интенсивность усилий T в концевом сечении оболочки, где радиус направляющей окружности равен r_0 .

Приращения поперечной силы H и момента M_i определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \Delta(H_i r_i) &= (T_{i+1} - q_i r) \Delta z_i \\ \Delta(M_i r_i) &= (M_{i+1} \cos \theta_i - T_i r_i \sin \theta_i + H_i r_i \sin \theta_i) \Delta z_i \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Переход к следующим сечениям производится аналогично.

Процесс последовательного интегрирования, как это было указано в первом разделе, начинается от концевое сечение, где задаются варьируемые величины усилий и сдвигов края оболочки (частично они известны из граничных условий). Он заканчивается в сечении оболочки, в котором отсутствуют пластические деформации. Для проверки правильности задания варьируемых усилий и сдвигов в нулевом (начальном) сечении используется условие равенства внутренних сил, моментов и перемещений краев упругой и упруго-пластической частей оболочки.

4. Для уменьшения объема вычислений при использовании обобщенного метода начальных параметров целесообразно получить первоначально хотя бы грубо приближенное решение, которое позволило бы задать варьируемые усилия или сдвиги в нулевом сечении оболочки. Такое решение можно найти, например, исходя из приближенных соотношений между усилиями и моментами (6.37).

На основании указанных соотношений выражения для определения деформации ε_i и кривизны φ_i принимают вид (материал неэластичен)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{3T_1}{4E\delta} - \frac{1}{2} \varepsilon_2 - \frac{\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right)}{2} \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{18}{E\delta^3} \frac{M_1}{4\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 4\varepsilon_2^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Границы раздела упругой и пластической зон определяются равенством (6.31, 6). Для цилиндрической оболочки при отсутствии сдвига имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -0,865 \left[\frac{\sqrt{(z_1/E)^2 - z_2^2}}{z_1 k} + \frac{T_1}{2\delta \sqrt{(z_1/E)^2 - z_2^2}} \right] \\ \varepsilon_2 &= 0,865 \left[\frac{\sqrt{(z_2/E)^2 - z_1^2}}{z_2 k} - \frac{T_1}{2\delta \sqrt{(z_2/E)^2 - z_1^2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Порядок расчета деформаций оболочки аналогичен рассмотренному в предыдущем пункте.

§ 2. ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

1. Общий путь решения одномерных задач пластичности в теории оболочек сохраняется также при исследовании деформаций ползучести. Пластические свойства материала оказываются здесь, однако, переменными во времени, хотя приложенная внешняя нагрузка остается постоянной.

Разобьем весь процесс ползучести на ряд небольших (чаще всего неодинаковых) отрезков времени, внутри которых пластические свойства материала практически не меняются. Определим эти свойства для каждого интервала, пользуясь уравнениями теории ползучести, приведенными в § 3 гл. VI.

Ограничимся пока рассмотрением теорий старения и упрочнения. Они не только с точки зрения математики, но и по природе описываемых процессов наиболее близки к деформационной теории пластичности. Следуя последней, будем характеризовать пластические свойства материала пластическим модулем $G_p = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$.

Знание пластического модуля, как видно из соотношений (5.28), позволяет выразить для каждого элемента оболочки неизвестные компоненты его деформаций ε_1 , ε_2 и ε_3 через известные или заданные усилия M_1 , M_2 и T_1 , T_2 .

По теории старения (5.48), (5.48, а) при $\mu = 0,5$ имеем

$$\varepsilon_1 = A(t) z_1^m + \frac{\sigma_1}{3G} \quad (7.16)$$

Ю. Н. Работнов предложил следующий эффективный путь определения пластического модуля [27].

Прежде всего необходимо решить (чаще всего графически) уравнение (7.16) относительно напряжений σ_1 . Тогда можно будет построить диаграмму $\sigma_1 - \varepsilon_1$ в различные моменты времени (рис. 48, а). На этой рисунке $\Phi(\varepsilon_1, t_1) - \varepsilon_1 =$ решение уравнения (7.16).

Пользуясь функцией $\Phi(\varepsilon_1, t_1)$, находим

$$G_p(\varepsilon_1, t_1) = \frac{1}{A(t) \Phi(\varepsilon_1, t_1) + \frac{1}{3G}} \quad (7.17)$$

Значения $G_p(\varepsilon_1, t_1)$ равно как и значения вспомогательной функции $\omega(\varepsilon_1, t_1)$, входящая в формулы (5.28) через интегралы I_k , представляются обычно в виде графиков (рис. 48, б и в)

$$\omega(\varepsilon_1, t_1) = 1 - \frac{G_p}{3G} = \frac{3G A(t) \Phi^{m-1}(\varepsilon_1, t_1)}{1 + 3G A(t) \Phi^{m-1}(\varepsilon_1, t_1)} \quad (7.17, а)$$

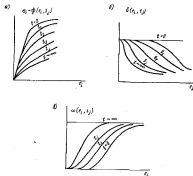


Рис. 48.

Если пластические деформации во много раз превышают упругие, выражение (7.17) упрощается

$$G_p(\varepsilon_1, t_1) \approx \frac{3G}{1 + 3G \varepsilon_1^{m-1} A(t) \Phi^{m-1}(\varepsilon_1, t_1)} \quad (7.17, б)$$

В § 4 гл. VI отмечалось, что при достаточно быстром уменьшении напряжений σ_1 в определенный момент времени t_1 получается $G_p(\varepsilon_1, t_1) > G_p(\varepsilon_1, t_{1-2})$. Это указывает на исчерпание запасов пластичности материала в данной точке или же на начало разгрузки.

Эффект разгрузки при перераспределении внутренних напряжений в конструкции за счет ползучести, как правило, не учитывается.

Следовательно, и в том и в другом случае можно рекомендовать некоторое приближенное решение

$$G_p(e_i, t_j) \approx G_p(e_i, t_{j-1}).$$

т. е. считать, что дальнейший рост деформаций ползучести в данной точке не происходит.

Перейдем далее к уравнению теории упрочнения

$$\frac{d\epsilon^{(0)}}{dt} = C \frac{\tau_1^3}{[\epsilon^{(0)}]^n}.$$

Предположим, что напряжение внутри малого интервала времени Δt изменится линейно

$$\tau_1 = \tau_1(0) + \Delta \tau_1 \frac{t_0}{\Delta t}, \quad (7.18)$$

где t_0 — новый на каждом шаге решения отсчет времени.

Принтегрируем уравнение теории упрочнения с учетом (7.18)

$$\int_{\epsilon_i^{(0)}(0)}^{\epsilon_i^{(0)}(\Delta t)} x^2 dx = C \tau_1^3(0) \int_0^{\Delta t} \left[1 + \frac{\Delta \tau_1}{\Delta \tau_1(0)} y \right]^3 dy$$

и найдем $\epsilon_i(\Delta t)$

$$\epsilon_i(\Delta t) = \epsilon_i(0) - \frac{2}{3} \left\{ \tau_1(0) - \frac{[\epsilon_i^{(0)}(\Delta t)]^{n+1} - [\epsilon_i^{(0)}(0)]^{n+1}}{(n+1) C \Delta \tau_1^3(0)} \right\}. \quad (7.18, a)$$

В (7.18, а) принято

$$\left[1 + \frac{\Delta \tau_1}{\Delta \tau_1(0)} y \right]^3 \approx 1 + 3 \frac{\Delta \tau_1}{\Delta \tau_1(0)} y,$$

что справедливо, ввиду малости отношения $\frac{\Delta \tau_1}{\tau_1(0)}$, уже для $3 \geq 2$.

Из (7.18) после несложных преобразований получаем

$$G_p \left[\epsilon_i^{(0)}(0), \Delta \epsilon_i \right] = \frac{\epsilon_i(\Delta t)}{\epsilon_i(0) - \Delta \epsilon_i} \approx \left(1 - \frac{\Delta \epsilon_i}{\epsilon_i} \right) \left[1 - \frac{2}{3} \left[1 - \frac{\Delta \epsilon_i^2}{(\epsilon_i^{(0)}(0))^2 (n+1)} \right] \right] G_p(0), \quad (7.19)$$

если положить

$$\Delta \epsilon_i^{(0)} \approx 0, \quad \Delta \epsilon_i \approx \Delta \epsilon_i^{(0)}, \quad \frac{1}{\epsilon_i - \Delta \epsilon_i} \approx \frac{1}{\epsilon_i} \left(1 - \frac{\Delta \epsilon_i}{\epsilon_i} \right).$$

Последние условия справедливы, когда изменения пластических деформаций много больше изменения упругих деформаций, а сами деформации малы. При необходимости допущенную неточность

можно исправить, используя формулу (7.18, а) для второго приближения.

Функцию $G_p(\epsilon_i^{(0)}(0), \Delta \epsilon_i)$ целесообразно построить в форме графиков (рис. 49). Отметим, что здесь возникают затруднения при вычислении $G_p[\epsilon_i^{(0)}(0) = 0, \Delta \epsilon_i]$, когда $t = 0 + \Delta t_1$. Их легко преодолеть, заменив $G_p[\epsilon_i^{(0)}(0) = 0, \Delta \epsilon_i]$ кривой $G_p(e_i, t_i = 0 + \Delta t_1)$ рис. 48, б. Дело в том, что при малых отличиях напряжений от начальных упругих и малых, почти нулевых, накопленных пластических деформаций теории старения и упрочнения дают фактически одинаковый ответ. Следует только исходить из одних и тех

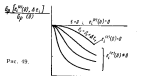


Рис. 49.

же кривых ползучести при определении параметров аппроксимации уравнений указанных теорий.

В случае развитых деформаций ползучести зависимость $G_p[\epsilon_i(0), \Delta \epsilon_i]$ оказывается несколько более простой $[\Delta \epsilon_i = \Delta \epsilon_i(0)]$

$$G_p[\epsilon_i(0), \Delta \epsilon_i] \approx \left[1 - \Delta \epsilon_i(0) - \frac{2}{3} \frac{1 - k^2}{n+1} \right] G_p(0). \quad (7.19, a)$$

2. При построении решений одномерных задач неуставившейся ползучести удается несколько сократить объем вычислений, прибегая к следующему приему.

Пусть шаг решения по времени настолько мал, что свойства материала конструкции в момент $t_j = t_{j-1} + \Delta t_j$ почти не отличаются от свойств в момент t_{j-1} . Тогда решения для деформаций ϵ_j на предыдущем шаге позволяют найти измененные свойства материала для следующего шага решения по времени.

Если шаг Δt_j выбран правильно, то свойства материала в момент t_j найденные по значениям $\epsilon_j(t_{j-1})$ не нужно уточнять с помощью приближенных значений $\epsilon_j(t_j)$. В противном случае следует вычислять $\epsilon_j(t_j)$ еще раз, сделав второе приближение.

Алгоритм решения строится точно так же, как в случае решения задач теории пластичности. При развитых деформациях ползучести

по всей оболочке следует использовать метод парциальных откликов в сочетании с методом упругих решений. Последний позволяет находить добавочные как бы фиктивные усилия, действующие на элемент оболочки, по формулам типа (7.6). В этих формулах интегралы I_k следует вычислять, и при необходимости уточнять на каждом шаге решения заново, пользуясь графиками рис. 48, 49, а, и 49.

Если же деформации ползучести развиваются в зоне краевого эффекта, то целесообразно применение обобщенного метода начальных параметров.

Оба варианта решения бывает удобно строить при больших шагах по времени, когда число необходимых приближений в каждом шаге не превышает двух-трех. Что лучше, делать для много малых шагов, избегая повторных приближений внутри шага, или же несколько приближений внутри больших шагов решения по времени, можно установить в зависимости от конкретных условий и параметров задачи. Окончательный выбор целесообразного алгоритма оказывается, таким образом, полком и компетенцией исследователя.

3. В некоторых задачах неустановившейся ползучести заранее ясно, что по прошествии конечного времени пластические деформации будут важным преобладающим фактором. Тогда для дальнейшего построения решения оказывается целесообразным воспользоваться упрощенными уравнениями ползучести (6.46, д) и приближенными соотношениями между напряжениями в элементе и действующими на него усилиями.

С помощью формул (6.56), (6.58), (6.60) найдем выражение деформации срединной поверхности элемента Δz_{ij} в его арривизии Δx_{ij} за время Δt_j . Считаем, что в течение времени Δt_j усилия не меняются и равны исходным в момент $t = t_j$. В результате несложных преобразований (6.56), (6.58) и (6.60) имеем по теории старения

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 [A(t_j) - A(t_{j-1})] \tau^{*n} \frac{2\lambda_1 - 1}{2\lambda_1} \quad (7.20)$$

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 [A(t_j) - A(t_{j-1})] \frac{\tau^{*n}}{h} \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{при } \lambda_1 \leq 1$$

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 [A(t_j) - A(t_{j-1})] \sigma^{*n} \frac{2\lambda_1 - 1}{2\lambda_1 + 2} \quad (7.20, а)$$

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 [A(t_j) - A(t_{j-1})] \frac{\tau^{*n}}{h} \frac{1}{1 + h_0} \quad \text{при } h_0 \leq 0$$

по теории упрочнения

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 C M_j \frac{\tau^{*2}}{[A(t_{j-1})]^n} \frac{2\lambda_1 - 1}{2\lambda_1} \quad (7.21)$$

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 C M_j \frac{\tau^{*2}}{h [A(t_{j-1})]^n} \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{при } \lambda_1 \leq 1$$

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 C M_j \frac{\tau^{*2}}{[A(t_{j-1})]^n} \frac{2\lambda_1 - 1}{2\lambda_1 + 2} \quad (7.21, а)$$

$$\Delta z_{ij} \approx \lambda_1^2 C M_j \frac{\tau^{*2}}{h [A(t_{j-1})]^n} \frac{1}{1 + h_0} \quad \text{при } h_0 \leq 0$$

Аналогично выводится зависимость для приращений $\Delta z_{2,j}$ и $\Delta z_{3,j}$.

Формулы (7.20), (7.21) особенно удобны и наиболее точны, если в процессе неустановившейся ползучести оболочкой эликтировалось перераспределение напряжений и внутренних усилий. Такое напряженное состояние конструкции называют установившимся.

Множитель λ_1^2 (или λ_2^2), входящий в равенства типа (7.20), (7.20, а) и (7.21), (7.21, а), определяется в зависимости от соотношения σ_1 и σ_2 на предыдущем шаге решения по данным опыта. Для каждого элемента в качестве характерного следует рассматривать отношение $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ в наиболее нагруженном слое элемента. Кратчайшим напряжением может служить величина σ_2 .

4. Если установленное распределение внутренних усилий в оболочке существует, то, следуя Л. М. Качанову [9], можно построить приближенное решение для неустановившейся ползучести.

Будем комбинировать линейно напряженное состояние оболочки из начального упругого $\sigma_{jk}^{(0)}$ и конечного установившегося $\sigma_{jk}^{(n)}$ через известную функцию времени $\tau(t)$

$$\sigma_{jk} = \sigma_{jk}^{(0)} (1 - \tau) + \sigma_{jk}^{(n)} \tau. \quad (7.22)$$

При $t = 0 \Rightarrow \tau = 0$ и при $t \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow 1$.

Определим функцию $\tau(t)$, удовлетворяя принцип минимума дополнительной мощности внутренних напряжений системы на истинных скоростях деформаций [9],

$$\delta \left[\int_V \left(\dot{\epsilon} + \frac{\partial \dot{W}}{\partial t} \right) dV \right] = 0. \quad (7.23)$$

Здесь Λ — дополнительное рассеяние, Π — потенциальная энергия единицы объема тела

$$\Lambda = \int_V \frac{d\epsilon_j^2}{dt} d\Omega; \quad (7.23, a)$$

$$\Pi = \frac{\epsilon^2}{6K} + \frac{\eta^2}{6G}. \quad (7.23, б)$$

Пусть мы воспользуемся теорией упрочнения и считаем $\nu = 0,5$. Тогда

$$\Lambda = \int_V G \frac{\eta^2}{[\epsilon_j^2]^2} d\Omega = \frac{c}{(\delta-1)} \frac{\eta^2}{[\epsilon_j^2]^2}; \quad (7.23, в)$$

$$\Pi = \frac{\eta^2}{6G}. \quad (7.23, г)$$

Если речь идет о теории старения, то вместо принципа дополнительной мощности следует использовать принцип минимума дополнительной работы [7]

$$\delta \left[\int_V (\Phi + \Pi) dV \right] = 0, \quad (7.24)$$

где Φ — дополнительная работа рассеяния

$$\Phi = \int_0^{\dot{\epsilon}} \epsilon_j d\dot{\epsilon}_j = \frac{A(t)}{m+1} \dot{\epsilon}_j^{m+1} = A(t) \Phi_1(\dot{\epsilon}_j). \quad (7.24, а)$$

Уравнения (7.23), (7.24) предполагают возможность независимого варьирования поля внутренних напряжений на истинных скоростях деформаций (или на самих деформациях) тела от скорости движения (или смещений) точек поверхности тела. В ряде задач такое варьирование невозможно, например задачи о сложном изгибе оболочек, узаруго или несимметрично укруто закрепленных по торцам и осевым направлениям. Для них указанные принципы минимума работы. Истинным здесь оказывается поле таких внутренних напряжений, которое сообщает минимум дополнительной мощности внутренним напряжениям и внешним поверхностным силам на истинных скоростях деформаций и смещений (или работе этих сил и напряжениях на деформациях и смещениях) точек тела

$$\delta \left[\int_V \left(\Lambda + \frac{d\Pi}{dt} \right) dV - \int_S (X_j u_j + Y_j v_j + Z_j w_j) dS \right] = 0; \quad (7.25, а)$$

$$\delta \left[\int_V (\Phi + \Pi) dV - \int_S (X_j u_j + Y_j v_j + Z_j w_j) dS \right] = 0. \quad (7.24, б)$$

Для доказательства (7.25, а) рассмотрим случай сложного изгиба балки-шпалы (рис. 50, а, б), возникающего вследствие раттара.

Пусть стержень жестко заделан (рис. 50, а) или свободно оперт (рис. 50, б). На него действует распределенная нагрузка $p(x)$ и

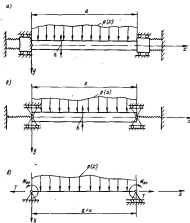


Рис. 50.

продольная сила T , которая известным образом зависит от прогиба стержня. Опоры стержня могут смещаться по горизонтали, причем эти смещения также зависят от прогиба. Материал стержня ползет в соответствии с уравнениями теории течения (6.46, б), (6.47).

Представим расчетную схему стержня в виде, изображенном на рис. 50, а. Обозначим взаимное смещение опор через u . Оно положительно, если длина пролета возрастает.

Вышеем уравнения кинематической связи и уравнения равновесия для вариаций внутренних напряжений

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= -\frac{\partial v}{\partial x} y + \varepsilon \\ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varepsilon_y dy &= \varepsilon T, \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varepsilon_y y dy = -\varepsilon M \\ \delta M &= \delta M_{\text{ос}} + \delta(Tv) \\ \delta \varepsilon &= \varepsilon \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y dx - \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Присовокупим к (7.25) граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a \\ \text{или} \quad \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) &= \varepsilon M = 0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Рассмотрим дополнительную мощность внутренних напряжений

$$\delta R = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \varepsilon_y dy. \quad (7.27)$$

Подставив в (7.27) выражения (7.25), получим

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \left[-\frac{\partial v}{\partial t} \varepsilon \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varepsilon_y y dy + \frac{\partial v}{\partial t} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varepsilon_y dy \right] = \\ &= -\frac{\partial v}{\partial t} \varepsilon M_{\text{ос}} \Big|_0^a + \varepsilon(Tv) \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_0^a - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial v}{\partial t} \varepsilon \left(T \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \varepsilon T \frac{\partial v}{\partial t} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y dx. \end{aligned}$$

Далее с учетом граничных условий будем иметь

$$\delta R = -\varepsilon T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \varepsilon \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y dx \right] -$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon T \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y dx \right] = \\ = T \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \varepsilon T \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \left(T \frac{\partial v}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (7.27, a)$$

В приведенных выкладках учитывалась независимость вариаций напряжений, усилий и скоростей от времени.

Поскольку левая часть (7.27) представляет известное выражение вариации дополнительной мощности внутренних напряжений на истинных скоростях деформаций тела, то из (7.27, а) следует

$$\varepsilon \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\Lambda + \frac{\partial v}{\partial t} \right) dy - T \frac{\partial v}{\partial t} \right] = 0. \quad (7.27, б)$$

Ясно, что (7.27, б) есть конкретный вид (7.23, д) для рассмотренной задачи.

Общее доказательство (7.23, д) или (7.24, б) может быть выполнено аналогичным образом.

Итак, с помощью вариационных уравнений (7.23), (7.24) или (7.23, д), (7.24, б) можно искать функцию $v(t)$. Покажем, как это делается, на примере теории старения и уравнения (7.24).

Пусть элемент оболочки находился в момент $t=0$ под действием усилий M_1 , T_1 , M_2 и T_2 . Далее при очень больших деформациях ползучести, которые элемент получает по прошествии довольно большого (в принципе — сколь угодно большого) времени, величина усилий стабилизируются и стремятся к неким M_0 , T_0 , M_2 и T_2 . Последнее можно видеть, решая задачу с помощью приближенных формул (7.20) и (7.21), причем граничным условиям задачи следует подчинить не сами смещения краев оболочки, а их приращения.

Нам известны распределения ε_1 , ε_2 и σ_1 , σ_2 по высоте элемента. Выполним вычисления для элемента оболочки и найдем

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Pi = (a_0 + b_0 t + c_0 t^2) \\ \Phi_2 &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Phi_2 = (d_0 + e_0 t + g_0 t^2 + \dots + q_0 t^{m+1}) \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Удовлетворим минимум дополнительной работы (7.24) по всей оболочке

$$\int_0^s \left(A(t) \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} \right) ds = 0, \quad (7.24, \text{в})$$

Входящие в (7.24, в) производные несложно определить, если известны коэффициенты a_0, a_1, \dots, q в зависимостях (7.25),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tau} &= a_0 + 2a_1\tau + \dots + (n+1)\tau^n \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} &= b_0 + 2b_1\tau \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Из (7.24, в) и (7.29) вытекает уравнение для определения функции $\tau(t)$

$$\begin{aligned} A(t) \int_0^s [a_0(s) + 2a_1(s)\tau + \dots + (n+1)\tau^n] ds = \\ = - \int_0^s [b_0(s) + 2b_1(s)\tau] ds. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Его решение в общем виде весьма громоздко.

Учитывая, однако, точность исходных данных, используемых при построении уравнений ползучести, следует искать эффективные приближенные способы решения (7.30). Один из таких способов предложен Л. М. Качановым [9]; им же высказаны соображения по дальнейшему уточнению приближенного способа [8].

Ограничимся линейным представлением $\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tau}$ [9]

$$\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tau} \approx -\dot{Q}(t)(1-\tau), \quad (7.31)$$

где

$$\dot{Q}(t) = - \left(\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} = -a_0.$$

Тогда уравнения (7.27) оказывается возможным решить относительно $\tau(t)$

$$\tau(t) = \frac{A(t) \int_0^s a_0(s) ds - \int_0^s b_0(s) ds}{A(t) \int_0^s a_0(s) ds - 2 \int_0^s a_1(s) ds}. \quad (7.32)$$

Достаточная точность линейного представления функции $Q(\tau)$ показана Л. М. Качановым и другими авторами на многих частных примерах.

Мы не будем пока останавливаться на вычислении коэффициентов a_0, a_1, \dots, q , поскольку типичная процедура подобного рода встретится несколько дальше при описании ползучести оболочки с помощью теории течения. Из тех же соображений не приведен вывод для определения функции $\tau(t)$ в случае теории упрочнения и вариационного уравнения (7.23).

5. Некоторые упрощения расчета деформаций неуставившейся ползучести (вернее, их аналоги) возможны при наличии у материала предела ползучести (см. п. 2 § 4, гл. VI).

Пусть найдено второе решение задачи из упруго-пластического решения для материала, следующего идеальной диаграмме Прандтля, с пределом текучести σ_0 . Если предельное состояние не достигнуто ни в одном сечении оболочки (по упруго-пластическому решению), то в процессе ползучести распределение напряжений и деформаций должно стремиться к упруго-пластическому распределению.

Обычно наибольший интерес представляет рост деформаций во времени в самом напряженном сечении конструкции. Определим деформацию приращением.

В самом напряженном слое элемента оболочки при $t=0$

$$\sigma_1 = \sigma_{10}; \quad \epsilon_1 = \epsilon_{10} \quad (7.33)$$

при $t \rightarrow \infty$

$$\sigma_1 = \sigma_{1\infty} = \sigma_0^*; \quad \epsilon_1 = \epsilon_{1\infty}. \quad (7.33, \text{а})$$

Аппроксимируем изменение интенсивности напряжений в указанном слое элемента оболочки линейно через функцию $\tau(t)$

$$\tau(t) = \frac{1}{1 + \beta t^p}; \quad p = \beta - 1; \quad \sigma_1(t) = \sigma_{10}(1 - \tau) + \sigma_{1\infty}\tau. \quad (7.34)$$

Принтегрируем уравнение состояния слоя, взятое в виде зависимости теории упрочнения (5.62) при граничных условиях (7.33), (7.33, а).

В результате найдем

$$[\epsilon_{1\infty}^{(1)}]^{p+1} = \frac{C(\beta+1)p}{\sigma^p} (\sigma_{10} - \sigma_0^*)^p B(p, \beta - p),$$

откуда имеем

$$\sigma^p \approx (\beta+1)Cp \frac{(\sigma_{10} - \sigma_0^*)^{\beta}}{(\sigma_{10} - \frac{\sigma_0^*}{3\beta})^{p+1}} B(p, \beta - p). \quad (7.35)$$

где $B(p, \beta - p)$ — бета-функция Эйлера.

Здесь величины k' и σ'' вычисляются с помощью формул (6.57), (6.57, а) по значениям M_1 и T_1 . Величины k_1 и σ'' очевидны

$$\sigma'' = \frac{6M_1'}{h^2} + \frac{T_1'}{A}, \quad k_1 = \frac{k}{2h-2}; \quad k = \frac{\sigma'' h}{T_1'}$$

Аппроксимируем функцию $Q(\cdot)$ линейной зависимостью вида (7.31)

$$\bar{Q}(\tau) = - \int \frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} \frac{d\lambda_1}{d\tau} dV, \quad \bar{Q}(\tau) = \bar{Q}(0)(1-\tau). \quad (7.38)$$

Подставим (7.38) в (7.37) и получим

$$\int_0^t B(t) dt = \frac{d^2 \Pi}{d\lambda^2} \int_0^t \frac{d\tau}{1-\tau} \quad (7.39)$$

или

$$\tau = 1 - e^{-t^*}, \quad (7.39, а)$$

где

$$t^* = \frac{1}{\frac{d^2 \Pi}{d\lambda^2} A(t)}. \quad (7.39, б)$$

В зависимости (7.39)

$$\frac{d^2 \Pi}{d\lambda^2} = \int_0^{\lambda_2} \frac{d^2 \Pi(\lambda)}{d\lambda^2} d\lambda = \int_0^{\lambda_2} d\lambda \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{d^2 \Pi}{d\lambda^2} dz, \quad (7.40)$$

$$\bar{Q}(0) = \int_0^{\lambda_2} \bar{Q}(0, s) ds = \int_0^{\lambda_2} ds \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(0) dz$$

Выпишем квадратуры, входящие в (7.40),

$$\frac{d^2 \Pi}{d\lambda^2} = \frac{1}{2G} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma'' \left(\frac{x}{h_1 k_1} + 1 - \frac{1}{2k_1} \right) - \right.$$

$$\left. - \sigma'' \left(\frac{x}{h_1 k_1} + 1 - \frac{1}{2k_1} \right)^{\frac{1}{n}} \right] dz \quad (7.40, а)$$

$$\bar{Q}(0) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma'')^n \left(\frac{x}{h_1 k_1} + 1 - \frac{1}{2k_1} \right)^n \left[\sigma'' \left(\frac{x}{h_1 k_1} + 1 - \frac{1}{2k_1} \right) - \right.$$

$$\left. + 1 - \frac{1}{2k_1} \right) - \sigma'' \left(\frac{x}{h_1 k_1} + 1 - \frac{1}{2k_1} \right)^{\frac{1}{n}} \right] dz$$

Формулы, подобные (7.40, а), нетрудно получить при $h_2 > 1$ ($h_2 > 0$).

Выполняя квадратуры (7.40, а) в отношении $\bar{Q}(0)$, можно ограничиться крайними зонами фибровых деформаций (исключая случай малых изгибов). Вычисления проводятся для района, указанного на рис. 32.

То же самое строится все выкладки и вычисления, если $\sigma_2 \neq 0$.

Если вместо соотношений теории течения подставить в уравнение (7.33) зависимость теории упрочнения, то вид функций $\tau(t)$ принципиально не изменится. Разница будет определяться видом квадратур типа (7.40), (7.40, а).

7. Если по условиям задачи установленный распределений усилий в системе не существует, следует прибегнуть к другому приему.

Представим себе деформацию отдельного элемента оболочки в период малого интервала времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ как деформацию под действием постоянных усилий M_i , M_{i-1} , T_i и T_{i-1} в момент времени t_i .

Деформированное состояние элемента к началу интервала Δt_i известно из решения в момент времени $t = t_{i-1}$. Напряженное состояние к началу интервала Δt_i для удобства алгоритма необходимо определить через действительные напряжения в момент t_{i-1} плюс усиление упругих напряжений элемента под действием заданных приращений усилий M_i , M_{i-1} , T_i и T_{i-1} за время Δt_i .

Искомое распределение напряжений в элементе к моменту t_i найдем через функцию $\tau(t)$ (7.22), удовлетворяющую минимальному



Рис. 32.


принципу (7.23). В качестве предельных необходимо брать распределения напряжений (6.56), (6.58), вычисленные по величинам усилий в момент времени t_p .

§ 3. ПРИМЕРЫ

1. Проиллюстрируем порядок расчета деформаций на простейшем примере каллабы полубесконечной круглой цилиндрической оболочки постоянной толщины, нагруженной на краю равномерно распределенным по периметру моментом $M = \pi r_0^2 A^2$ (рис. 53). Материал оболочки несжимаем и следует диаграмме Прандтля.

Для решения используем обобщенный метод начальных параметров.

Решая задачу, удобно привести исходные величины усилий и смещений, а также другие параметры оболочки к безразмерному виду



$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \pi r_0^2 A^2, \quad H = 2\pi r_0 h \sqrt{\frac{h}{r}} \\ \Delta s &= x \sqrt{\frac{r}{h}}, \quad w = \lambda \frac{r}{E} \\ \psi &= \gamma \frac{r}{E} \sqrt{\frac{r}{h}}, \quad x = \frac{r}{E h} \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Рис. 53. Подставляя (7.41) в (7.10) и (7.13), получим следующие зависимости для приращения усилий и перемещений оболочки при переходе от участка к участку:

$$\Delta \lambda_1 = -\gamma x_1, \quad \Delta \lambda_2 = \gamma x_1, \quad \Delta \lambda_3 = \frac{r}{E h} x_1, \quad \Delta \lambda_4 = \beta x_1. \quad (7.42)$$

Усилие T_{20} и приращение кривизны γ_1 могут быть найдены из соотношений теории пластичности (6.28) или приближенными равенствами (6.37).

В первом случае с учетом (7.11) и (7.41) имеем

$$T_2 = \beta \lambda_2 h, \quad \bar{\lambda} = \frac{0,75 m}{h}, \quad \epsilon_1 = -\frac{w}{2}. \quad (7.43)$$

Значения функций f_1 и f_2 определяются по графикам из рис. 48 в зависимости от параметра

$$\xi = 1,73 \frac{\sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{E}\right)^2 - \epsilon_1^2}}{x h} = 1,73 \frac{\sqrt{\lambda - 16}}{x}. \quad (7.44)$$

При использовании приближенных соотношений между напряжениями и деформациями (6.37) на основании (7.14) и (7.15) после ряда преобразований получим

$$T_2 = 3\lambda, \quad \bar{\lambda} = \frac{0,65 \sqrt{1 - \lambda^2}}{\xi}, \quad \xi = 0,5 \sqrt{3 - \frac{10,4 m}{1 - \lambda^2}}. \quad (7.45)$$

На свободном краю оболочки ($s = 0$) имеем очевидные граничные условия

$$m = m_0, \quad n = 0. \quad (7.46)$$

В качестве варьируемых параметров следует выбрать безразмерный прогиб λ_0 и безразмерный угол поворота γ_0 края оболочки.

Условия на границе раздела упругой и упруго-пластической частей оболочки запишутся в виде

$$m = m_p, \quad n = n_p, \quad \lambda = \lambda_p, \quad \gamma = \gamma_p. \quad (7.47)$$

Здесь величины с индексом «р» означают безразмерные усилия и перемещения края полубесконечной упругой цилиндрической оболочки.

Для упругой оболочки, нагруженной по краю распределенным моментом интенсивности M и радиальной силой H , можно воспользоваться известными решениями [25]. В случае несжимаемого материала ($\nu = 0,5$) имеем

$$\begin{aligned} w &= -2,46 \frac{H}{E} \left(\frac{r}{h}\right)^{1/2} - 3 \frac{M}{E h} \frac{r}{h}; \\ \psi &= -3 \frac{H}{E h} \frac{r}{h} - 7,3 \frac{M}{E h^2} \sqrt{\frac{r}{h}} \end{aligned}$$

или в безразмерном виде

$$\lambda = -2,46\beta - 3m, \quad \gamma = -3\beta - 7,3m. \quad (7.47, a)$$

Удовлетворение равенств на границе раздела зон свистельствует о правильности задания варьируемых параметров λ_0 и γ_0 .

В общем случае допустимая погрешность при удовлетворении (7.47, a) целиком определяется условиями задачи. Она должна лежать в пределах точности задания исходных данных. В рассмотренной задаче невелика разность (7.47, a) на величинах $\Delta \lambda$ и $\Delta \gamma$ независимо примерно изменяются варьируемых параметров λ_0 и γ_0 на те же величины, что равносильно колебанию внешнего момента в пределах до $\pi b \left(1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)$ или $\pi b \left(1 + \frac{\Delta \gamma}{\gamma}\right)$. Отсюда ясно и требование к выполнению (7.47, a).

В табл. 7 приводится расчет оболочки при $m = 0,20$, выполненный на логарифмической линейке. При решении задачи использовались упрощенные соотношения между усилиями и моментами

(6.37), (6.38). На рис. 54 показана зона наибольших деформаций в оболочке.

Расчет той же оболочки с использованием более точных соотношений между усилиями и деформациями (7.10), (7.11) приводится в табл. 8. Данные приближенного и более точного исследования практически совпадают.

2. В § 1 гл. II был приближенно исследован упруго-пластический изгиб облати диафрагм круглой цилиндрической оболочки,

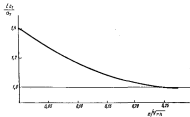


Рис. 54.

загруженной всесторонним равномерным давлением P . Решим эту задачу более точно.

Усилия, моменты, перемещения и другие параметры такой оболочки удобно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M &= m r e h, \quad H = \beta r \sqrt{r h}, \quad \Delta s = \pi \sqrt{r h} \\ w &= \lambda \frac{r^2}{E h}, \quad \phi = \frac{r}{E h} \sqrt{\frac{x}{h}}, \quad \kappa = \bar{\kappa} \frac{r}{E h}, \quad v_1 = \bar{v}_1 \frac{r}{E h} \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

Приращения усилий и перемещений оболочки при переходе от участка к участку определяются из равенств

$$\Delta \lambda_1 = -\lambda_1 x_1, \quad \Delta \bar{\kappa}_1 = \bar{\kappa}_1 x_1, \quad \Delta \beta_1 = \left(\frac{r h}{r} - 1 \right) x_1, \quad \Delta m_1 = \beta_1 x_1. \quad (7.49)$$

Деформации ϵ_1 и приращения кривизны в средней поверхности на основании (7.11) могут быть найдены из формул

$$\bar{\epsilon}_1 = 0,75 \frac{0,5 \lambda_1 - m_1}{h_1 h_2 - h_1^2} - \frac{\lambda}{2}, \quad \bar{\kappa}_1 = 0,75 \frac{m_1 - 0,5 \beta_1}{h_1 h_2 - h_1^2}. \quad (7.50)$$

Таблица 7

Расчет оболочки по приближенным зависимостям (7.10), (7.11)

$\frac{x}{\sqrt{r h}}$	λ	$\Delta \lambda$	$\bar{\kappa}$	$\Delta \bar{\kappa}$	β	$\Delta \beta$	m	Δm	$\bar{\epsilon}$	$\Delta \bar{\epsilon}$	$\bar{\kappa}$	$\Delta \bar{\kappa}$	v	Δv	Δs	λ
0,05	0,08	-0,030	-0,030	0	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	2,2	2,2	-1,20	0,11	0,073	-0,600
0,10	0,06	-0,025	-0,025	0,0033	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	2,0	2,0	-1,20	0,11	0,073	-0,585
0,15	0,05	-0,023	-0,023	0,0063	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	1,9	1,9	-1,20	0,10	0,070	-0,570
0,20	0,04	-0,020	-0,020	0,0088	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	1,8	1,8	-1,20	0,09	0,068	-0,555
0,25	0,03	-0,016	-0,016	0,0109	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	1,7	1,7	-1,01	0,09	0,060	-0,540
					0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000					0,025	-0,275

Примерка $\lambda = 0,115$; $2,45 = 0,187$; $3 = -0,276$
 $\bar{\kappa} = 0,115$; $3 = -0,187$; $7,3 = -1,02$

Таблица 8

Расчет оболочки по усилиям зависимостям (7.10), (7.11)

$\frac{x}{\sqrt{r h}}$	λ	$\Delta \lambda$	$\bar{\kappa}$	$\Delta \bar{\kappa}$	β	$\Delta \beta$	m	Δm	$\bar{\epsilon}$	$\Delta \bar{\epsilon}$	$\bar{\kappa}$	$\Delta \bar{\kappa}$	v	Δv	Δs	λ
0	0,03	0,000	-0,030	0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	2,0	2,0	-1,20	0,11	0,076	-0,615
0,05	0,05	0,020	-0,025	0,0033	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	0,150	1,9	1,9	-1,20	0,11	0,070	-0,570
0,10	0,06	0,017	-0,023	0,0063	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	1,8	1,8	-1,20	0,10	0,065	-0,525
0,15	0,07	0,015	-0,020	0,0088	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	1,7	1,7	-1,09	0,09	0,060	-0,480
0,20	0,08	0,013	-0,016	0,0109	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			-1,03	0,09	0,056	-0,435

Примерка $\lambda = 0,114$; $2,45 = 0,186$; $7,3 = -1,02$
 $\bar{\kappa} = 0,114$; $3 = -0,186$; $7,3 = -1,02$

Для условия T_2 имеем

$$T_2 = \frac{4}{3} \rho r [j_1 (\lambda + 0.5 \bar{\epsilon}_1) + j_2 \bar{\epsilon}_2]. \quad (7.51)$$

Функции j_k для оболочки из несжимаемого материала с идеальной диаграммой деформирования определяются по графикам на рис. 43 в зависимости от параметров $\bar{\epsilon}_1$ и $\bar{\epsilon}_2$.

$$\bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_3 - \bar{\epsilon}_1 = 1.73 \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{\rho r}\right)^2 - 1}}{\bar{\epsilon}_1}, \quad \bar{\epsilon}_1 = -\frac{\epsilon_1 + 0.5\epsilon_2}{\bar{\epsilon}_1} - \frac{\epsilon_2}{2}. \quad (7.52)$$

Граничные условия на краю оболочки (над диафрагмой) имеют вид $\psi_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$.

В качестве варьируемых параметров принимаются безразмерные переформовочная сила p_0 и момент m_0 . Условия на границе упругой и упруго-пластической частей оболочки записывается по аналогии с (7.47, в) в виде

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 0.61 - 0.81\lambda + 0.33\epsilon \\ m &= -0.25 + 0.33\epsilon - 0.27\lambda \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

На рис. 55 показана зависимость наибольших деформаций в оболочке от параметра $\rho r/\lambda \sigma_0$, найденная по приближенному (гл. II) и точному решению. Из рисунка видно, что и в рассмотренной задаче приближенные соотношения между усилиями и деформациями не приводят к заметным ошибкам.

3. Решения, полученные в пп. 1, 2 данного параграфа, могут быть всегда использованы для оценки деформаций ползучести в круглом сечении оболочки, выполненной из материала с пределом ползучести $\sigma_0 = \sigma_*$.

Пусть, например, из формул (7.41), (7.52) и табл. 7 следует, что максимальные ($t = 0$) и предельные ($t \rightarrow \infty$) напряжения и деформации в наиболее нагруженном слое оболочки на краю равны

$$\begin{aligned} \sigma_{10} &= 1.4\sigma_0; & \sigma_{1\infty} &= \sigma_0 \\ \epsilon_{10} &= 1.4\epsilon_0; & \epsilon_{1\infty} &= 2.24\epsilon_0 \end{aligned}$$

в случае задачи п. 1 это соответствует $m_0 = 0.222$.

Закон ползучести материала при постоянных напряжениях задан в виде

$$\dot{\epsilon}^{(n)} = 990\epsilon_*^{(n)} \left(\frac{\sigma - \sigma_*}{\sigma_1} \right)^2 \epsilon_*^{1/n}. \quad (7.54)$$

Здесь $\epsilon_*^{(n)}$ — интенсивность упругих деформаций при действии напряжений интенсивностью σ_1 , t — безразмерное время в долях от времени фазы неустановившейся ползучести.

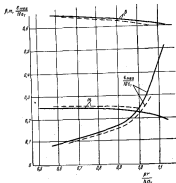


Рис. 55.

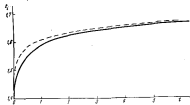


Рис. 56.

Воспользуемся теорией упрочнения

$$\frac{d\epsilon_1^{(1)}}{dt} = \dot{\epsilon} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_1^*}{\epsilon_1^*} \right)^2 \frac{[e^{x+\beta} y^{x+1}]}{[\epsilon_1^{(1)}]^2}; \quad x=2; \beta=9; \quad \dot{\epsilon} = 2,67 \cdot 10^6 \quad (7.55)$$

и по формуле (7.35) найдем ($p=8$)

$$s = \left[\frac{8 \cdot 3 \cdot 2,67 \cdot 10^6}{B^{-1}(8,1)} \right]^{1/6} \left(\frac{\epsilon_1^{(1)}}{\epsilon_1^*} \right)^{1/6} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_1^*}{\epsilon_1^*} \right)^{1/6}; \quad \epsilon = \frac{d^{1/6}}{1 + d^{1/6}} \quad (7.35, 6)$$

Подставив (7.35, 6) в (7.55), имеем

$$\epsilon_1(t) = \epsilon_0(1 - \tau) + \epsilon_1^* \tau + \left[(x+1) 2,67 \cdot 10^6 \int_0^t \frac{d\tau}{(1 + d^{1/6} \tau)^2} \right]^{1/6} \epsilon_1^* \omega \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_1^*}{\epsilon_1^*} \right)^{1/6} \quad (7.55, a)$$

Результаты расчета значений $\epsilon_1(t)$ по формуле (7.55, a) представлены на рис. 56 (пунктирная кривая). Как видно из этого рисунка, за время, равное периоду фазы установившейся ползучести, достигаются только около половины предельно возможной деформации $\epsilon_{0,0}$, получаемой в предположении бесконечно долгого действия нагрузки.

Точное решение задачи п. 1 для $\epsilon_1(t, x=0, y=\frac{h}{2})$ при $\alpha_0 = 0,222$, полученное обобщенным методом начальных параметров, приведено на рис. 56 (сплошная кривая). Шаги решения принимались в соответствии с моментами времени

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 + 1 \cdot 10^{-4}; \quad t_2 = 5 \cdot 10^{-4}; \quad t_3 = 10^{-3}; \quad t_4 = 5 \cdot 10^{-3}; \\ t_5 &= 10^{-2}; \quad t_6 = 5 \cdot 10^{-2}; \quad t_7 = 10^{-1}; \quad t_8 = 5 \cdot 10^{-1}; \\ t_9 &= 1; \quad t_{10} = 5; \quad t_{11} = 10. \end{aligned}$$

Сравнение кривых говорит о возможности получения приближенных откликов с помощью упруго-пластического решения задачи.

Глава VII

ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Метод параллельных откликов в сочетании с методом последовательных приближений позволяет решать и геометрически нелинейные задачи.

Чтобы показать это, целесообразно обратиться к общим уравнениям изгиба оболочек, учитывающим геометрическую нелинейность.

Однако сами уравнения следует вывести и записать в несколько необычной форме.

Уравнения равновесия произвольной оболочки, срединная поверхность которой отнесена к главным линиям кривизны α_1 и α_2 в искривленном состоянии, имеют вид [19]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1} \right] + \frac{N_1}{R_1} + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

где A_1 и A_2 — параметры Ламе, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, T_1, \dots, N_2 — внутренние усилия, q_1 и q_n — внешние нагрузки.

Вследствие деформации геометрия оболочки изменяется. Параметры Ламе ее срединной поверхности, отнесенные к искривленным линиям α_1 и α_2 , будут равны

$$\bar{A}_1 = A_1(1 + \epsilon_1); \quad \bar{A}_2 = A_2(1 + \epsilon_2). \quad (8.2)$$

Радиусы кривизны срединной поверхности будут \bar{R}_1, \bar{R}_2 и \bar{R}_{12} . Тогда уравнения равновесия, описанные в деформированной форме, преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{A}_2} \left[\frac{\partial \bar{A}_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \bar{A}_1 T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \bar{A}_1 T_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \bar{A}_2 T_1}{\partial \alpha_2} \right] + \frac{N_1}{\bar{R}_1} + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{\bar{A}_1 \bar{A}_2} \left[\frac{\partial \bar{A}_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \bar{A}_1 N_2}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{T_1}{\bar{R}_1} - \frac{T_2}{\bar{R}_2} - \frac{2S}{\bar{R}_{12}} + q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Выразим новые радиусы кривизны через исходные кривизны оболочки и их приращения

$$\frac{1}{\bar{R}_1} = \frac{1}{R_1} + \epsilon_1; \quad \frac{1}{\bar{R}_2} = \frac{1}{R_2} + \epsilon_2; \quad \frac{1}{\bar{R}_{12}} = \epsilon, \quad (8.4)$$

а также пренебрежем, как это обычно делается, изменением линий кривизны в параметрах Ламе в процессе деформации.

Уравнения (8.3) примут вид, обычный для нелинейной теории оболочек. В частности, уравнения проекций усилий на нормаль запишется следующим образом:

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} \right] - T_1 \left(\frac{1}{R_1} + \epsilon_1 \right) - T_2 \left(\frac{1}{R_2} + \epsilon_2 \right) - 2S\epsilon + q_n = 0. \quad (8.5)$$

Приведенный вывод уравнений равновесия, на наш взгляд, более естественен, чем общепринятый (см., например, [5]).

Из (8.5) видно, что нелинейность уравнений связана с проведением типа $T_{\alpha\beta}$, поскольку кривизна оболочки зависит от усилий. Кроме того, нелинейность создает уточненные зависимости для деформаций типа

$$u_{\alpha} \sim \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (8.6)$$

Наконец, можно говорить о нелинейностях, связанных с точными зависимостями кривизны от прогибов (последние обычно малы и не учитываются).

2. Запись уравнений равновесия в форме (8.3) позволяет наметить итерационный алгоритм последовательных приближений:

- задача решается в линейной постановке; определяется искривленная форма оболочки и все компоненты перемещений в первом приближении;
- по известным перемещениям находятся уточненные величины деформаций с учетом нелинейных членов и вычисляются внутренние усилия, отличающиеся от деформаций;
- найденные значения усилий подставляются в уравнения равновесия типа (8.3) или (8.5) для искривленного состояния, что позволяет определить неуровновешенность оболочки вследствие неточности первого приближения. Иными словами, в соответствии с методом варьирования исходных данных (см. § 2 гл. III) находится некая фактичная корректирующая нагрузка;
- корректирующая нагрузка прикладывается к ненапряженной оболочке, имеющей форму, характеризующуюся радиусами кривизны и параметрами Ламе (8.2) (8.4);
- из линейных уравнений определяется форма оболочки во втором приближении и т. д.

3. Указанный метод можно практически реализовать во всех случаях, когда имеется алгоритм для линейных решений. В случае осесимметричной задачи и некоторых несимметричных задач, рассмотренных в главе V, такой алгоритм дается методом параллельных откликов или обобщенным методом начальных параметров.

Хотя сходимость итерационного процесса приближений пока не может быть доказана в общем случае, ее всегда можно проконтролировать в процессе вычислений. Надежным критерием сходимости является уменьшение корректирующей нагрузки; процесс приближений можно считать законченным, если корректирующая нагрузка не выходит за пределы точности исходных данных.

Заметим, что последовательные приближения начекая будут расходиться в окрестности границ области устойчивости расширяемых форм равновесия. Однако это не уменьшает достоинства метода, поскольку точное определение указанных границ в принципе возможно [37, гл. VIII].

§ 2. ОБОБЩЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

1. Предложенные выше методы рассмотрения физически нелинейных деформаций оболочек допускают очевидные обобщения применительно к установившимся колебаниям с нелинейными неуравновешенными сопротивлениями.

Последние всегда можно линеаризовать, как отмечено в разделе первом. После этого снова вступает в действие комбинация метода параллельных откликов с методом последовательных приближений:

- необходимо задаться в первом приближении некоторыми значениями линеаризованных коэффициентов сопротивлений и произвести расчет колебаний квазилинейной системы;
- найденные в первом приближении амплитуды дают возможность уточнить значения линеаризованных коэффициентов сопротивлений;
- далее производится расчет амплитуд во втором приближении и т. д.

2. Наконец, вполне возможно решение ряда задач, где сочетаются физическая и геометрическая нелинейность. Здесь одновременно будут использоваться методы параллельных откликов и упругих решений в сочетании с методом последовательных приближений, изложенным в § 1 настоящей главы. Можно наметить следующий путь исследования:

- решается задача в линейной постановке; определяются в первом приближении форма и компоненты перемещений оболочки;
- по известным перемещениям находятся уточненные величины деформаций с учетом нелинейных членов и вычисляются истинные деформации, а также внутренние усилия, отличающиеся от деформаций (естественно, по соотношениям теории пластичности);
- определяется дополнительная нагрузка на оболочку, вызванная наличием пластических деформаций (см. § 1 гл. VII);
- найденные в первом приближении усилия подставляются в уравнения равновесия (8.3) для искривленного состояния и определяется корректирующая нагрузка, связанная с изменением формы оболочки;
- суммарная корректирующая нагрузка, имеющая пластическими деформациями и компонентом геометрии, прикладывается к ненапряженной оболочке, имеющей форму, характеризующуюся радиусами кривизны и параметрами Ламе (8.2), (8.4);
- из линейных уравнений определяется перемещение и форма оболочки во втором приближении и т. д.

Все сказанное в предыдущем параграфе относительно сходимости процесса приближений и проверки точности решения применительно к геометрически нелинейным задачам остается в силе и в рассматриваемом случае.

§ 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Когда одного физика спросили, что, по его мнению, больше всего способствует развитию различных теорий, он ответил: — Трудности!

И в самом деле, только они заставляют искать новые методы, подходы, понятия, формируют и меняют взгляды.

Теория оболочек не представляет в этом отношении никакого исключения. Именно ее трудности привлекают к ней внимание многих ученых, обеспечивают бурный поток исследований, число которых растет сейчас почти по экспоненте.

Направление потока несколько меняется. Одно время он был устремлен прежде всего на вывод наиболее последовательных и наиболее удачных исходных уравнений в линейной постановке и формулировку приемлемых упрощающих гипотез. Затем он охватывал эффективные аналитические методы интегрирования уравнений, включая асимптотику и комплексные представления, составление нелинейных зависимостей для деформаций, изучение нелинейных эффектов и т. д. Сейчас большое значение приобретают алгоритмические методы решения оболочечных задач, обеспечивающие успех конкретного, достигнутого до окончательного результата ручного и машинного счета; к этому направлению относятся и наша книга.

Изложенные методы, основанные на тесном сочетании чисто аналитических подходов и чисто физических представлений, позволили довольно успешно, на наш взгляд, атаковать некоторые важные линейные и нелинейные задачи.

Конечно, ни один из рассмотренных методов не свободен от недостатков. Некоторые из них мы указали выше, другие, вероятно, еще выявятся в дальнейшей практике исследований. Только конкретные применения ко многим вопросам позволят дать методам окончательную оценку.

Но кое-что уже сделано. И подобно обычному спортивному мячу в игре, нам хочется закончить словами «методы в работе».

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамзон Ч., Об. «Понимать и измерять», Металлургиздат, 1961.
2. Безухов Н. И., Некоторые обобщения методов строительной механики в динамике сооружений, Об. «Исследования по теории сооружений», № 3, Гостехиздат, 1959.
3. Белаян Р., Системы регуляризации с адаптацией, ИЛ, 1964.
4. Власов В. З., Обобщенная теория оболочек и ее приложения в технике, Гостехиздат, 1949.
5. Волымир А. С., Устойчивость упругих систем, Физматгиз, 1963.
6. Гольдштейн А. Л., Теория упругих тонких оболочек, ГИИЛ, 1953.
7. Ильяш-Ян А. А., Пластичность, Гостехиздат, 1946.
8. Качанов Л. М., К вопросу о решении задач неуставившейся ползучести, ПММ, т. XXV, в. 4, 1961.
9. Качанов Л. М., Теория ползучести, Физматгиз, 1960.
10. Качанов Л. М., Основы теории пластичности, Гостехиздат, 1956.
11. Крус К. А., Основы электростатики, т. 2, Энергониздат, 1946.
12. Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, АН СССР, 1930.
13. Курдюмов Г. В., об. «Проблемы металловедения в физике металлов», № 4, Металлургиздат, 1963.
14. Лагранж Ж., Аналитическая механика, ОНТИ, т. I и II, 1950.
15. Микеладзе Ш. Е., Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, ГИИЛ, 1951.
16. Мурз Ф., Коллоиды и звук, ГИИЛ, 1948.
17. Мурз Ф. С., Тонкая структура и прочность стали, Металлургиздат, 1957.
18. Назаров А. Г., Метод инженерного анализа сейсмических сил, АН Арм. ССР, 1959.
19. Новожиков В. В., Теория тонких оболочек, Судпромиздат, 1961.
20. Новожиков В. В., О влиянии сложных напряжений, который характеризуется сохранением направленной главных осей, ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
21. Павлов В. А., Физические основы пластической деформации металлов, АН СССР, 1962.
22. Павлов О. М., Связный изгиб и изгибная способность пластин с начальными искривлениями, Строительная механика и расчет сооружений, № 4, 1961.
23. Пановко Я. Г., Об учете экспериментальных данных в задачах прикладной теории упругости колебаний, ЖТО, т. XXIII, вып. 3, 1953.
24. Пановко Я. Г., Основы прикладной теории упругих колебаний, Машгиз, 1957.
25. Падкович П. Ф., Строительная механика железа, т. II, Судпромиздат, 1941.
26. Пеномарев С. Д., Вейсман В. Л. и др., Расчеты на прочность и жесткость сооружений, т. III, Машгиз, 1959.

27. Работков Ю. Н., Некоторые вопросы теории ползучести, Доклады АН УССР, № 10, 1948.
28. Розенблюм В. И., Устойчивость свайного стержня в условиях ползучести, Изв. об., т. VIII, 1964.
29. Рэлея, Теория звука, ГИИИ, 1953.
30. Сорокин Е. С., Метод учета внутреннего сопротивления материалов в расчетах конструкций на колебания, сб. ЦИНИИ, исследования по динамике сооружений, Гостройиздат, 1961.
31. Сорокин Е. С., К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем, Гостройиздат, 1966.
32. Сорокин Е. С., Влияние внутреннего трения на напряжения в балках и плитах при изгибных нагрузках, Строительный журнал и расчет сооружений, № 7, 1960.
33. Смирнов В. Е., Оценка упруго-пластических деформаций упругих прямоугольных пластин при сложном изгибе, журн. «Строительство», № 11, 1964.
34. Тарасов В. П., Расчеты крутящихся колебаний, т. I, II и III, Машгиз, 1963, 1964.
35. Федосеев В. И., Об одном способе решения волновых задач устойчивости деформируемых систем, ПММ, т. XXVII, а, 2, 1963.
36. Фелицкий А. П., Колебания упругих систем, АН СССР, 1966.
37. Чуваковский В. С., Палай О. М., Основы теории подкормки судовых корпусных конструкций, Изд-во «Строительство», 1966.
38. Чуваковский В. С., Основы направления развития и проблемы строительной механики корабля, журн. «Строительство», № 11, 1964.
39. Чуваковский В. С., Изгибно-крутильные колебания корпусно-механических балок с учетом деформаций склея в переускоренных средах в расчете на изгиб, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, 1959.
40. Чуваковский В. С., О некоторых колебаниях балочных конструкций, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, 1960.
41. Чуваковский В. С., О совместных колебаниях судового корпуса и его отдельных конструкций, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1960.
42. Чуваковский В. С., Принципы динамики и строительной механики корабля, Изд-во «Строительство», 1964.
43. Чуваковский В. С., Исследование резонансных колебаний корпусных конструкций корабля, «Труды научно-технического совещания по изучению резонансных колебаний при колебаниях упругих тел», АН УССР, Киев, 1958.
44. Шиманский Ю. А., Динамический расчет судовых конструкций, Судостроение, 1968.
45. Штерман И. Я., Расчет криволинейных арочных оснований, сб. «Проект и стандарт», № 9, 1963.
46. Mott N. P., Philo. Mag., 44, p. 742, 1953.
47. Higher transcendental function, v. I, H. Mc. Graw—Hill Book Company, Inc., 1963.
48. Toila, Regelung der Kraftmaschinen, Springer, 1921.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
От авторов	3

Раздел первый

Предварительные исследования и замечания. Предлагаемые методы решения линейных и нелинейных задач строительной механики

Глава I. Некоторые вопросы динамики конструкций	5
§ 1. Классификация динамических и модели при исследовании устойчивости колебаний механических систем	—
§ 2. Линейные неупругие свертываемые. Классическая форма зависимости теории колебаний	12
§ 3. О моделях представления и аналитических методах строительной механики	21
§ 4. Обобщенные и статистические обобщенные координаты. Неприводимые случаи применения метода главных координат	31

Глава II. Методы расчета нелинейных систем, основанные на замене критич. задач задачами Коши	47
§ 1. Предварительные замечания. Обобщенный метод календарных параметров	—
§ 2. Метод параллельных откликов системы и его модификация	69
§ 3. Примеры использования и метода параллельных откликов	75

Глава III. Оценка точности реактивных задач механикой деформируемых систем путем перерасчета исходных данных	86
§ 1. Основные идеи оценки. Простые примеры	—
§ 2. Более сложные случаи	86

Раздел второй

Линейные задачи теории оболочек

Глава IV. Осесимметричная деформация оболочек вращения	90
§ 1. Основные уравнения	92
§ 2. Применение метода параллельных откликов	98
§ 3. Примеры	102
Глава V. Взаимные обобщения	109
§ 1. Статические задачи	—
§ 2. Колебания	110
§ 3. Задачи перемещения	111

Раздел третий

Нелинейные задачи теории оболочек

Глава VI. Нелинейные следствия из теории пластичности и ползучести	11
§ 1. Уравнения теории пластического течения и малых деформаций. Их основные допущения и область применимости	—
§ 2. Уравнения деформационной теории для тонких пластин и оболочек	12
§ 3. Основные уравнения теории ползучести. Установившееся распределение напряжений в тонких пластинках и оболочках при асимметричной деформации	13
§ 4. О выборе теории ползучести	14
Глава VII. Асимметричные деформации неупругих оболочек	15
§ 1. Пластические деформации	—
§ 2. Деформации ползучести	16
§ 3. Примеры	17
Глава VIII. Вариационные обобщения. Заключительные замечания	17
§ 1. Геометрически нелинейные задачи	—
§ 2. Обобщения физических нелинейных задач	17
§ 3. Заключение	18
Литература	18