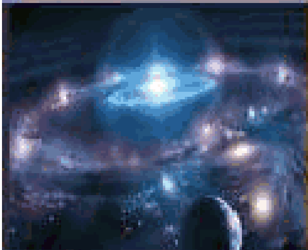
Университетский учебник

Ю.М.Нефёдов

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

ПРАКТИКУМ



Прикладная математика
и информатика

ЛУГАНСК
2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОУ ВПО «Луганский национальный университет
имени Владимира Даля»
кафедра прикладной математики

Ю. М. Нефёдов

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПРАКТИКУМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛУГАНСК 2019

УДК 519.8

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
ГОУ ВПО «Луганский национальный университет
имени Владимира Даля»*

Нефёдов Ю. М.
Вариационные методы. Практикум: Учебное пособие. – Луганск: ЛНУ им. В. Даля, 2019. – 209 с.

Рецензенты:

Кочевский А. А., кандидат технических наук, доцент, ГОУ ВПО «Луганский национальный университет имени Владимира Даля»;

Ие О. Н., кандидат физико-математических наук, доцент, ГОУ ВПО «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко».

В учебнром пособии рассмотрены классические и неклассические вариационные методы. Вариационные методы охватывают методы вариационного исчисления, принцип максимума Понтрягина и принцип оптимальности Беллмана. В каждом разделе даны необходимые теоретичесие сведения и алгоритмы решения соответсвующих задач. Приведено подробное решение около ста примеров и более восьмидесяти задач (с ответами) предложено для самостоятельного решения.

Материал учебного пособия может быть использован в таких дисциплинах, как «Вариационное исчисление» и «Теория оптимального управления». Пособие предназначено для студентов направления «Прикладная математика и информатика» вузов как очной, так и заочной форм обученя для углублния знаний и приобретения навыков решения задач вариационного исчисления и теории оптимального управления.

УДК 519.8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время требования к математической подготовке специалистов в различных областях науки и техники достаточно высоки. В частности, методам оптимизации отводится значительная роль в математической подготовке студентов таких специальностей, как прикладная математика, информационные технологии, робототехника и многих других.

Естественным продолжением общего курса по методам оптимизации являются вариационные методы (классические и неклассические). К классическим методам относятся методы вариационного исчисления. К неклассическим методам – принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана. Вариационное исчисление, принцип максимума и метод динамического программирования внутренне взаимосвязаны, поэтому целесообразным является рассмотрение единого подхода к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления с помощью этих методов.

Настоящее учебное пособие основано на лекционных и практических занятиях по методам оптимизации, вариационному исчислению и теории оптимального управления, которые автор проводил на инженерных специальностях Восточноукраинского национального университета им. В. Даля и других высших учебных заведений.

Первые три главы учебного пособия охватывают вариационные задачи во всем многообразии их постановок. В четвертой главе рассмотрены задачи оптимального управления динамическими системами при наличии ограничений.

Изложение построено по единой схеме, включающей постановку задачи, краткие теоретические сведения, алгоритм решения, подробный анализ более сотни типовых и нетиповых примеров и задачи для самостоятельного решения.

В конце учебного пособия приведен список литературы, содержащий лишь те работы, которые непосредственно использованы в учебном пособии и могут быть полезными при изучении теории рассмотренных методов.

Глава 1.

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

1.1. Общая постановка задачи и основные понятия

Пусть дан некоторый класс M функций $x(t)$. Если каждой функции $x(t) \in M$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число J, то говорят, что в классе M определен *функционал* J, и пишут $J = J[x(t)]$.

Класс M функций $x(t)$, на котором определен функционал $J[x(t)]$, называется *областью задания функционала.*

Примем следующие обозначения: $x_j(t)$ – j-ая одномерная функция; $\mathrm{x}_j(t) = \left(x_{1j}(t),...,x_{nj}(t)\right)$ – j-ая вектор-функция с компонентами $x_{ij}(t)$, $i = 1,...,n$.

Вариационной задачей называется задача поиска экстремума функционала, т.е. величины, численное значение которой определяется выбором функции $x(t)$ или вектор-функции $\mathrm{x}(t) = \left(x_1(t),...,x_n(t)\right)$.

Пример 1.1.

Найти значения функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 x(t)\,dt$$

на следующих кривых, образующих класс M: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = -t(t-2)$ (рис. 1.1).

Решение.

Заметим, что все кривые проходят через две точки $(0;0)$, $(1;1)$, т.е. удовлетворяют граничным условиям $x(0)=0$, $x(1)=1$. Найдем значения функционала, соответствующие каждой кривой из класса M:

$$J[x_1(t)]=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2};\quad J[x_2(t)]=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3};\quad J[x_3(t)]=\int_0^1 [-t(t-2)]dt=\frac{2}{3}.$$

В данном примере функционал имеет простой физический смысл – площадь под кривой $x(t)$, т.е. каждой кривой из класса M поставлено в соответствие число, равное площади. Очевидно, может быть сформулирована задача о нахождении такой кривой из класса M, площадь, под которой была бы минимальна (максимальна).

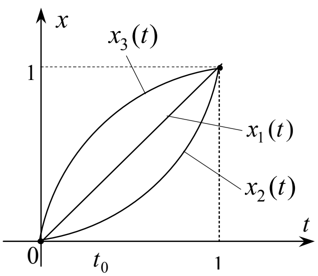


Рис. 1.1.

Функционал $J[x(t)]$ называется *непрерывным,* если малому приращению функции $x(t)$ соответствует малое изменение функционала.

Будем полагать, что функционал $J[x(t)]$ определен на элементах $x(t)$ *линейного нормированного пространства* функций, в котором каждому элементу $x(t)$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, называемое *нормой* элемента. При этом выполняются следующие условия:

1) $\|x\|\geq 0$ и $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$ (0 – *нулевой элемент)*;

2) $\|\lambda\cdot x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$;

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

для любых элементов x, y, принадлежащих пространству, и любого действительного числа λ.

Предметом нашего рассмотрения являются пространства C^0, C^1.

Пространство $C^0([t_0,t_1])$ состоит из непрерывных функций (кривых) $x(t)$, определенных на отрезке $[t_0,t_1]$. В пространстве $C^0([t_0,t_1])$ норма вводится следующим образом $\|x\|_0=\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}|x(t)|$.

Пусть $x^*(t)\in C^0([t_0,t_1])$ и $\varepsilon>0$ – произвольное число.

ε– *окрестностью нулевого порядка* кривой $x^*(t)$ называется совокупность кривых $x(t) \in C^0\left([t_0, t_1]\right)$, такая, что

$$\|x - x^*\|_0 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t) - x^*(t)| < \varepsilon . \qquad (1.1)$$

Это означает, что расстояние от кривой $x^*(t)$ до кривых $x(t)$ менее ε (рис.1.2).

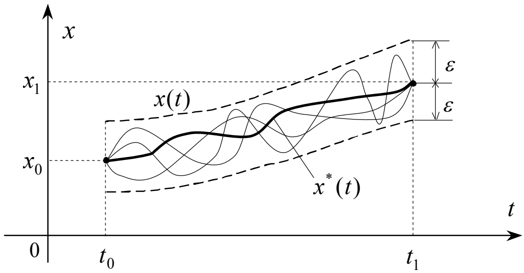


Рис. 1.2.

Пространство $C^1\left([t_0, t_1]\right)$ состоит из непрерывных функций (кривых) $x(t)$, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$ и имеющих на этом отрезке непрерывную производную. В пространстве $C^1\left([t_0, t_1]\right)$ норма вводится следующим образом:

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)| + \max_{t \in [t_0, t_1]} |x'(t)| .$$

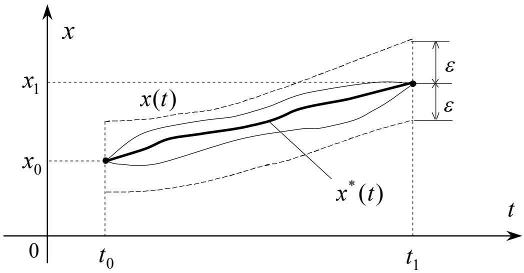


Рис. 1.3.

Пусть $x^*(t) \in C^1\left([t_0, t_1]\right)$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда ε– *окрестностью первого порядка кривой* $x^*(t)$ называется совокупность кривых

$$x(t) \in C^1\left([t_0, t_1]\right),$$

такая, что

$$\|x - x^*\|_1 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t) - x^*(t)| + \max_{t \in [t_0, t_1]} |x'(t) - [x^*]'(t)| < \varepsilon . \qquad (1.2)$$

Это означает, что у кривых $x(t)$ и кривой $x^*(t)$ близки не только ординаты, но и значения производных (рис. 1.3). Отсюда следует, что кривая, принадлежащая окрестности первого порядка, принадлежит и $\varepsilon-$ окрестности нулевого порядка (рис. 1.3), но не наоборот.

Аналогично вводится норма в пространстве $C^m\left([t_0,t_1]\right)$ функций, имеющих непрерывные производные до порядка m включительно, т.е.

$$\|x\|_m=\sum_{p=0}^{m}\max_{t\in[t_0,t_1]}|x^{(p)}(t)|.$$

Пример 1.2.

Найти расстояния $\|x-x^*\|_0$, $\|x-x^*\|_1$ между кривыми $x(t)=t^2$ и $x^*(t)=t^3$, $t\in[0,1]$ в пространствах $C^0\left([0,1]\right)$ и $C^1\left([0,1]\right)$.

***Решение*.**

Найдем расстояние в пространстве $C^0\left([0,1]\right)$:

$$\|x-x^*\|_0=\max_{t\in[0,1]}|t^2-t^3|.$$

Из необходимого условия экстремума $(t^2-t^3)'=0$ получаем $2t-3t^2=0$ и $t=0$, $t=\frac{2}{3}$. Вторая производная $(t^2-t^3)''=2-6t$ в точке $t=\frac{2}{3}$ отрицательна, поэтому в ней достигается локальный максимум. На концах промежутка $[0,1]$ функция $|t^2-t^3|$ обращается в нуль. Следовательно, в точке $t=\frac{2}{3}$ – глобальный максимум и можно подсчитать значение расстояния в этой точке, равное $\|x-x^*\|_0=\frac{4}{27}$.

Найдем расстояние в пространстве $C^1\left([0,1]\right)$:

$$\|x-x^*\|_1=\max_{t\in[0,1]}|t^2-t^3|+\max_{t\in[0,1]}|2t-3t^2|.$$

Так как максимум первого слагаемого уже известен, то исследуем второе слагаемое. Необходимое условие экстремума $(2t-3t^2)'=2-6t=0$ дает $t=1/3$. Так как вторая производная $(2t-3t^2)''=-6$ отрицательна, то в точке $t=\frac{1}{3}$ – локальный максимум. Значения функции $|2t-3t^2|$ на границе равны: 0 и 1, а значение в точке $t=\frac{1}{3}$ равно $\frac{1}{3}$. Поэтому максимум функции $|2t-3t^2|$ достигается в точке $t=1$ и равен 1. Отсюда $\|x-x^*\|_1=\dfrac{4}{27}+1=\dfrac{31}{27}$.

Пример 1.3.

Найти число N, начиная с которого все функции $x(t)=(\sin nt)/n^2$ принадлежат ε- окрестности нулевого порядка функции $x^*(t)\equiv 0$, если $t\in[0,\pi]$, $\varepsilon=0.01$.

Решение.

Воспользуемся определением ε – окрестности нулевого порядка и оценкой функции $\sin nt$: $\|x-x^*\|_0=\max\limits_{t\in[0,\pi]}\left|\dfrac{\sin nt}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$. Отсюда следует, что требуемое свойство выполняется при $n>N=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}=10$.

Кривые $x(t)$, на которых сравниваются значения функционала, называются *допустимыми кривыми*. Обозначим через $x(t)$ произвольную допустимую кривую, а через $x^*(t)$ допустимую кривую, на которой функционал достигает экстремума, т.е. *экстремаль*. Разность $x(t)-x^*(t)=\ =\delta x(t)$ называется *вариацией кривой* $x^*(t)$.

Вариация $\delta x(t)$ есть функция t и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция $x(t)$. Используя вариацию $\delta x(t)$, можно представить любую допустимую кривую $x(t)$ в виде

$$x(t)=x^*(t)+\delta x(t). \tag{1.3}$$

Однако нами используется и другая запись

$$x(t)=x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t). \tag{1.4}$$

В выражении (1.4) $\delta x(t)$ – фиксированная функция, а α – числовой параметр. Очевидно, что при $\alpha=0$ справедливо $x(t)=x^*(t)$.

Назовем *приращением функционала* ΔJ разность

$$\Delta J=J[x(t)]-J[x^*(t)]=J[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]-J[x^*(t)]. \tag{1.5}$$

Линейным функционалом называется функционал $J[x(t)]$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$J[c\cdot x(t)]=c\cdot J[x(t)],$$

где c – произвольная постоянная, и

$$J[x_1(t)+x_2(t)]=J[x_1(t)]+J[x_2(t)].$$

Дадим определение первой вариации функционала с использованием (1.3).

Если приращение функционала $\Delta J = J[x(t)+\delta x(t)] - J[x(t)]$ можно представить в виде

$$\Delta J = \delta J[x(t),\delta x] + \beta[x(t),\delta x]\cdot \max|\delta x|,$$

где $\delta J[x(t),\delta x]$ – линейный по отношению к $\delta x(t)$ функционал, $\max|\delta x|$ – максимальное значение $|\delta x|$ и $\beta[x(t),\delta x]\to 0$ при $\max|\delta x|\to 0$, то главная, линейная по отношению к δx часть приращения функционала, т.е. $\delta J[x(t),\delta x]$, называется *первой вариацией функционала* [15].

Можно дать другое определение первой вариации, используя (1.4).

Так как $J[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]$ есть функция $\varphi(\alpha)$ числового параметра α, то, разложив эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha = 0$ по степеням α, найдем

$$J[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)] - J[x^*(t)] = \alpha\cdot\delta J + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 J + \ldots\ , \qquad (1.6)$$

где

$$\delta J = \left.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{d\,J[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \qquad (1.7)$$

и называется *первой вариацией функционала*,

$$\delta^2 J = \left.\frac{d^2 J[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$

и называется *второй вариацией функционала* и т.д.

Замечание 1. Мы привели два определения вариации функционала. Покажем их связь [15]. Если функционал имеет вариацию в смысле главной линейной части приращения, то это приращение имеет вид

$$\Delta J = J[x(t)+\alpha\,\delta x(t)] - J[x(t)] = \delta J[x,\,\alpha\,\delta x] + \beta[x,\alpha\,\delta x]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta x|.$$

С другой стороны,

$$\left.\frac{d\,J[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta J[x(t),\,\alpha\,\delta x] + \beta[x(t),\alpha\,\delta x]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta x|}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\delta J[x(t), \alpha\, \delta x]}{\alpha} + \lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta[x(t), \alpha\, \delta x] \cdot |\alpha| \cdot \max|\delta x|}{\alpha} = \delta J[x(t), \delta x],$$

так как $\delta J[x(t),\, \alpha\, \delta x] = \alpha\, \delta J[x(t),\, \delta x]$ в силу линейности, а

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta[x(t), \alpha\, \delta x] \cdot |\alpha| \cdot \max|\delta x|}{\alpha} = 0,$$

потому что $\beta[x(t), \alpha\, \delta x] \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Следовательно, если существует вариация в смысле главной линейной части приращения функционала, то существует вариация в смысле производной по параметру и эти определения эквивалентны.

Замечание 2. В литературе вместо $J[x(t)]$ часто используется обозначение $J[x(\cdot)]$, чтобы явно различить элемент $x(\cdot)$ соответствующего функционального пространства и значение функции $x(t)$ при фиксированном значении t.

Пример 1.4.

Найти первую вариацию функционала

$$J[x(t)] = \int_a^b x^2(t)\, dt .$$

Решение.

Первый способ. Запишем приращение функционала

$$\Delta J = \int_a^b [x(t) + \delta x(t)]^2\, dt - \int_a^b x(t)^2\, dt = \int_a^b 2x(t)\, \delta x(t) dt + \int_a^b [\delta x(t)]^2\, dt .$$

Но $\int_a^b [\delta x(t)]^2\, dt \le \int_a^b [\max_{t \in [a,b]} |\delta x(t)|]^2\, dt = [\max_{t \in [a,b]} |\delta x(t)|]^2 (b-a) =$

$= (b-a) \cdot \|\delta x\|^2 = (b-a) \cdot \|\delta x\| \cdot \|\delta x\|$. Тогда $\Delta J = \int_a^b 2x(t)\, \delta x(t) dt +$ $+(b-a) \cdot \|\delta x\| \cdot \|\delta x\|$, где $(b-a) \cdot \|\delta x\| \to 0$ при $\|\delta x\| \to 0$. Поэтому можно выписать выражение для первой вариации функционала

$$\delta J = \int_a^b 2x(t)\, \delta x(t) dt .$$

Второй способ. Воспользуемся формулой (1.7):

$$J[x(t) + \alpha\, \delta x(t)] = \int_a^b [x(t) + \alpha\, \delta x(t)]^2\, dt ,$$

$$\delta J = \frac{d\,J[x(t)+\alpha\,\delta x(t)]}{d\alpha}\Bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b 2[x(t)+\alpha\,\delta x(t)]\,\delta x(t)\,dt\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b 2x(t)\delta\,x(t)\,dt\,.$$

Очевидно, оба способа приводят к одному результату.

Говорят, что функционал $J[x(t)]$, определенный на классе $\vdots$ кривых $x(t)$, достигает на кривой $x^*(t)$ *глобального минимума* (максимума), если

$$J[x^*(t)] \le J[x(t)] \quad \left(J[x^*(t)] \ge J[x(t)]\right) \qquad \forall x(t) \in \vdots.$$

Пример 1.5.

Доказать, что на кривой $x^*(t) = t$ функционал

$$J[x(t)] = \int\limits_0^1 [x'(t)]^2\,dt\,, \quad x(0)=0\,, \quad x(1)=1$$

достигает глобального минимума.

Решение.

Очевидно, функция $x^*(t) = t \in C^1\left([0,1]\right)$. Рассмотрим вариации $\delta x(t) \in C^1\left([0,1]\right)$ удовлетворяющие условиям $\delta x(0) = \delta x(1) = 0$. Исследуем приращение функционала:

$$J[x^*(t)+\delta x(t)] - J[x^*(t)] = \int\limits_0^1 [x^{*\prime}(t)+\delta x'(t)]^2\,dt - \int\limits_0^1 [x^{*\prime}(t)]^2\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 x^{*\prime}(t)\cdot\delta x'(t)dt + \int\limits_0^1 [\delta x'(t)]^2\,dt = \int\limits_0^1 [\delta x'(t)]^2\,dt \ge 0\,,$$

так как $x^{*\prime}(t) = 1$, $\int\limits_0^1 x^{*\prime}(t)\cdot\delta x'(t)dt = \delta x(1) - \delta x(0) = 0$. Поскольку кривая $x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \in C^1([0,1])$ произвольна и $J[x(t)] = J[x^*(t)+\delta x(t)] \ge$ $\ge J[x^*(t)]$, то на функции $x^*(t) = t$ достигается глобальный минимум.

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых. Различают сильный и слабый локальный минимум (максимум).

Говорят, что функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x^*(t)$ *сильного минимума* (*максимума*), если $J[x^*(t)] \le J[x(t)]$ $\big(J[x^*(t)] \ge J[x(t)]\big)$ в ε-окрестности *нулевого* порядка кривой $x^*(t)$. Аналогично, функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x^*(t)$ *слабого минимума* (*максимума*), если $J[x^*(t)] \le J[x(t)]$ $\Big(J[x^*(t)] \ge J[x(t)] \Big)$ в ε- окрестности *первого* порядка кривой $x^*(t)$.

Локальные минимумы и максимумы функционала называются его *локальными экстремумами.*

Замечание. Всякий сильный экстремум функционала является и слабым, а обратное, вообще говоря, неверно, так как сильный экстремум – это экстремум по отношению к более широкому классу кривых.

Пример 1.6.

Доказать, что на кривой $x^*(t) \equiv 0$ функционал

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi} x^2(t)[3 - [x'(t)]^2]\,dt\,, \qquad x(0) = x(\pi) = 0$$

достигает слабого минимума.

Решение.

Так как $J[x^*(t)] = 0$, то согласно определению требуется доказать, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что для всех $x(t)$ удовлетворяющих условию

$$\max_{t\in[0,\pi]} |x(t) - x^*(t)| + \max_{t\in[0,\pi]} |x'(t) - x^{*\prime}(t)| =$$
$$= \left[\max_{t\in[0,\pi]} |x(t)| + \max_{t\in[0,\pi]} |x'(t)| \right] < \varepsilon\,,$$

справедливо неравенство $J[x(t)] \ge J[x^*(t)] = 0$.

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда для всех кривых из ε– окрестности первого порядка кривой $x^*(t) \equiv 0$ выполняются условия: $\max\limits_{t\in[0,\pi]} |x(t)| < \varepsilon = 1$, $\max\limits_{t\in[0,\pi]} |x'(t)| < \varepsilon = 1$. Поэтому $0 \le x^2(t) < 1$, $3 - [x'(t)]^2 > 0$ и $J[x(t)] =$ $= \int_0^{\pi} x^2(t)[3 - [x'(t)]^2]\,dt \ge 0$, что и требовалось доказать. Следовательно, на кривой $x^*(t) \equiv 0$ функционал достигает слабого минимума.

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При $\varepsilon = 1$ ε- окрестность нулевого порядка кривой $x^*(t) \equiv 0$ образуют кривые, удовлетворяющие условию $\max\limits_{t\in[0,\pi]} |x(t) - x^*(t)| = \max\limits_{t\in[0,\pi]} |x(t)| < \varepsilon = 1$. Но среди них можно подобрать такую функцию, например $x(t) = \sin 5t$, что выражение $[3 - [x'(t)]^2]$ может быть отрицательным, так как $x'(t) = 5\cos 5t$. Поэтому условие $J[x(t)] \geq J[x^*(t)] = 0$ на некоторых функциях из $\varepsilon-$ окрестности нулевого порядка кривой $x^*(t) \equiv 0$ может не выполняться. Аналогичные рассуждения справедливы при других значениях ε. Следовательно, на $x^*(t) \equiv 0$ функционал не достигает сильного минимума.

Необходимые условия локального минимума (максимума) одинаковы для сильного и слабого минимума (максимума) и определяются следующей теоремой [15].

Теорема (необходимые условия локального экстремума).

Если функционал $J[x(t)]$, имеющий вариацию, достигает минимума или максимума на кривой $x^*(t)$, где $x^*(t)$ есть внутренняя точка области определения функционала, то при $x(t) = x^*(t)$ первая вариация функционала равна нулю:

$$\delta J = 0 .$$

Замечание 1. Доказательство необходимых условий экстремума функционала опирается на тот факт, что при фиксированных $x^*(t)$ и $\delta x(t)$ функционал $J[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] = \varphi(\alpha)$ является функцией параметра α. При $\alpha = 0$ функционал достигает экстремального значения $J[x^*(t)]$. Заметим, что α может принимать в окрестности точки $\alpha = 0$ как положительные, так и отрицательные значения (при этом $x^*(t)$ является внутренней точкой в области определения функционала). Так как точка $\alpha = 0$ является точкой локального экстремума функции $\varphi(\alpha)$, то, применяя необходимые условия локального экстремума функций, получаем

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\alpha} J[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)]\Big|_{\alpha=0} = 0 .$$

Замечание 2. Различие между сильным и слабым экстремумами не имеет существенного значения при выводе необходимого условия экстремума, но оно весьма существенно при выводе и применении достаточных условий экстремума.

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема [15].

Теорема (основная лемма вариационного исчисления).

Если для каждой непрерывной функции $\eta(t)$

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\eta(t)\,dt = 0\,,$$

где функция $a(t)$ *непрерывна на отрезке* $[t_0, t_1]$, *то* $a(t) \equiv 0$ *на том же отрезке.*

Замечание 1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления и ее доказательство не изменятся, если на функцию $\eta(t)$ наложить следующие ограничения: функция $\eta(t)$ имеет непрерывную производную и $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$.

Замечание 2. Все изложенное в этом разделе без изменения переносится на функционалы $J[\mathrm{x}(t)] = J[x_1(t),...,x_n(t)]$, зависящие от вектор–функции $\mathrm{x}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T$ одной переменной или зависящие от функций нескольких переменных. Для таких функционалов вариация также определяется как главная линейная часть приращения функционала и доказывается, что на функциях (вектор–функциях), на которых реализуется экстремум, вариация равна нулю.

1.2 Функционалы, зависящие от одной функции

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям (например, рис. 1.2):

а) функции $x(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_1]$, где t_0 и t_1 заданы, т.е. $x(t) \in C^1\left([t_0, t_1]\right)$;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad x(t_1) = x_1\,, \tag{1.8}$$

где значения x_0, x_1 заданы, т.е. кривые проходят через две закрепленные граничные точки.

На множестве M задан функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), x'(t)]\,dt, \tag{1.9}$$

где подынтегральная функция $F(t, x, x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству ⁝, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (1.9) достигает экстремума, т.е.

$$J[x^*(t)] = \underset{x(t)\in M}{\mathrm{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), x'(t)]\,dt\,. \tag{1.10}$$

Так как на кривые $x(t)$, образующие множество *M*, не наложено дополнительных условий, кроме граничных, задача (1.9) называется задачей поиска *безусловного экстремума.* В гл.3 рассматриваются задачи поиска *условного экстремума,* когда на искомые функции кроме граничных условий накладываются дополнительные конечные, интегральные или дифференциальные условия.

Стратегия решения задачи

Стратегия поиска решения задачи (1.10) состоит в определении первой вариации δJ функционала $J[x(t)]$ и приравнивании ее к нулю согласно теореме о необходимом условии экстремума функционала (стр. 14). В результате получаются соотношения, позволяющие найти кривые, «подозрительные» на наличие экстремума функционала.

С помощью анализа второй вариации функционала выводятся различные достаточные условия экстремума, позволяющие сделать вывод о достижении сильного или слабого минимума или максимума.

Необходимые условия экстремума функционала в задаче (1.10)

Обозначим $x^*(t)$ – кривую, на которой достигается экстремум функционала. Тогда допустимая кривая определяется по формуле (1.4): $x(t) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)$, а ее производная $x'(t) = x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)$, где $\delta x(t)$ – фиксированная вариация кривой, $\delta x'(t) = (\delta x(t))'$ – производная вариации, α – числовой параметр. Заметим, что $\delta x(t) \in C^1([t_0, t_1])$, $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_1) = 0$. Тогда

$$J[x^*(t) + \alpha\, \delta x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\, \delta x'(t)\big) dt = \varphi(\alpha), \quad (1.11)$$

где $\varphi(\alpha)$ – функция числового параметра α.

Используя формулу (1.7) для вычисления первой вариации функционала, имеем

$$\delta J = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{t_1} F(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\, \delta x'(t))\,|_{\alpha=0}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[F_x\big(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\, \delta x'(t)\big)\,|_{\alpha=0}\, \delta x(t) +$$

$$+ F_{x'}\big(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\, \delta x'(t)\big)\,|_{\alpha=0}\, \delta x'(t) \Big] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[F_x\big(t, x^*(t),\, x^{*\prime}(t)\big)\delta x(t) + F_{x'}\big(t, x^*(t),\, x^{*\prime}(t)\big)\delta x'(t) \Big] dt, \quad (1.12)$$

где $F_x = \dfrac{\partial F(t,x,x')}{\partial x}$, $F_{x'} = \dfrac{\partial F(t,x,x')}{\partial x'}$ – соответствующие производные подынтегральной функции.

В выражении (1.12) проинтегрируем второе слагаемое по частям, учитывая, что $\delta x'(t) = (\delta x(t))'$, $u = F_{x'}$, $dv = \delta x'(t)\, dt = (\delta x(t))' dt$, $\int_{t_0}^{t_1} u dv = $ $= u \cdot v \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} v\, du$. Отсюда $du = \dfrac{d}{dt} F_{x'}\, dt$, $v = \delta x(t)$ и

$$\delta J = [F_{x'}\, \delta x(t)]\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt. \quad (1.13)$$

Так как $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_1) = 0$, то

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt. \quad (1.14)$$

Необходимое условие экстремума $\delta J = 0$ в данном случае имеет вид

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt = 0 . \qquad (1.15)$$

К выражению (1.15) применима *основная лемма вариационного исчисления* (стр. 15), так как в силу наложенных ограничений на кривой $x^*(t)$ функция $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'}$ является непрерывной, а вариация $\delta x(t)$ – произвольной непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей условиям $\delta x(t_0) = 0$, $\delta x(t_1) = 0$ (см. замечание 1 на стр. 15).

Следовательно, кривая $x^*(t)$, на которой достигается экстремум функционала, удовлетворяет уравнению

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 . \qquad (1.16)$$

Уравнение (1.16) называется *уравнением Эйлера.* В развернутой форме уравнение (1.16) имеет вид

$$F_x - F_{x' t} - F_{x' x}\, x' - F_{x' x'}\, x'' = 0 \qquad (1.17)$$

и при $F_{x' x'} \neq 0$ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение $x = x(t, C_1, C_2)$ зависит от двух произвольных постоянных интегрирования C_1 и C_2 и определяет двухпараметрическое *семейство экстремалей.* Два граничных условия $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$ позволяют найти C_1 и C_2 и, как следствие, кривую $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала. Только на удовлетворяющих граничным условиям экстремалях может реализовываться экстремум. Чтобы выяснить, достигается ли на экстремали экстремум функционала, а если да, то какой (минимум или максимум), следует использовать достаточные условия, которые рассмотрены далее на стр. 40.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (1.10))

Если на кривой $x^*(t) \in C^1([t_0, t_1])$, *удовлетворяющей граничным условиям* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ *достигается слабый экстремум функционала в задаче* (1.10), *то она удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 .$$

Замечание 1. Краевая задача (1.16), (1.8) не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Замечание 2. Во многих практических задачах существование решения очевидно, и если решение задачи (1.16), (1.8) единственно, то экстремаль будет решением поставленной задачи.

Замечание 3. Можно указать условия, при которых гарантируется существование непрерывной второй производной у экстремали $x^*(t)$ [6].

Замечание 4. Уравнение Эйлера интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Приведем некоторые простейшие *случаи интегрируемости уравнения Эйлера.*

Первый случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от x явно: $F(t,x,x') = \; = F(t,x')$. Уравнение Эйлера (1.16) принимает вид $\dfrac{d}{dt}F_{x'} = 0$ и, следовательно

$$F_{x'} = C_1. \tag{1.18}$$

Соотношение (1.18) называется *первым интегралом* уравнения Эйлера.

Второй случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t и x явно: $F(t,x,x') = F(x')$. Уравнение Эйлера (1.16) записывается в форме $F_{x'x'}\, x'' = 0$. Его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 t + C_2, \tag{1.19}$$

так как $x'' = 0$, а условие $F_{x'x'} = 0$ дает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Если уравнение $F_{x'x'}(x') = 0$ имеет один или несколько действительных корней вида $x' = k_i$, то получаем однопараметрические семейства прямых $x(t) = k_i t + C$, которое содержится в двухпараметрическом семействе (1.19).

Третий случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t и x' явно: $F(t,x,x') = F(x)$ или не зависит от x' явно: $F(t,x,x') = F(t,x)$. Задача (1.10) в общем случае решения не имеет, так как уравнение Эйлера (1.16) принимает вид

$$F_x = 0 \tag{1.20}$$

и не является дифференциальным, т.е. его решение не содержит элементов произвола и поэтому в общем случае не удовлетворяет граничным условиям. Однако, если решение уравнения $F_x = 0$ проходит через граничные точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1) экстремаль существует.

Четвертый случай. Функция имеет вид $F(t,x,x') = P(t,x) +$ $+Q(t,x)\,x'$. Уравнение Эйлера записывается в форме

$$\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial t}=0. \tag{1.21}$$

Это уравнение не является дифференциальным. Если его решение удовлетворяет граничным условиям, то экстремаль существует Если $\frac{\partial P}{\partial x}\equiv\frac{\partial Q}{\partial t}$, то под знаком интеграла (1.9) находится полный дифференциал и, следовательно, величина интеграла не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача теряет смысл.

Пятый случай. Функция $F(t,x,x')$ не зависит от t явно: $F(t,x,x')=F(x,x')$. Уравнение Эйлера (1.17) имеет вид

$$F_x-F_{x'x}\cdot x'-F_{x'x'}\cdot x''=0,$$

так как $F_{x't}=0$. Если умножить левую и правую части уравнения на x', то левая часть превращается в производную $\frac{d}{dt}\left(F-x'F_{x'}\right)$. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(F-x'F_{x'}\right)=F_x x'+F_{x'}\, x''-x''F_{x'}\, -x'F_{x'x}x'-x'F_{x'x'}x''=$$
$$=x'\left(F_x-F_{x'x}x'-F_{x'x'}x''\right).$$

Поэтому уравнение Эйлера может быть записано в виде $\frac{d}{dt}\left(F-x'F_{x'}\right)=0$ и имеет первый интеграл

$$F-x'F_{x'}=C_1. \tag{1.22}$$

Заметим, что часто непосредственное применение уравнения Эйлера (1.16) оказывается проще использования первых интегралов.

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (1.10)

1. Найти F_x, $F_{x'}$, $\frac{d}{dt}F_{x'}$ и записать уравнение Эйлера

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0.$$

Если функция $F(t,x,x')$ соответствует какому-либо случаю интегрируемости, можно использовать соотношения (1.18) – (1.22).

2. Найти общее решение уравнения Эйлера $x = x(t, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3. Определить постоянные C_1 и C_2 из граничных условий, решая систему.

$$x(t_0, C_1, C_2) = x_0,$$
$$x(t_1, C_1, C_2) = x_1.$$

В результате получится экстремаль $x^*(t)$, на которой может достигаться экстремум функционала.

Пример 1.7

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 [x^2(t) + x'^2(t)]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = x^2 + x'^2$, $F_x = 2x$, $F_{x'} = 2x'$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'} = 2x''$, то получаем $2x - 2x'' = 0$ или $x'' - x = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Оно является однородным с постоянными коэффициентами, поэтому составим характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$. Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ действительные разные. Общее решение однородного уравнения имеет вид [14]

$$x(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0,$$
$$x(1) = C_1 e + C_2 \frac{1}{e} = 1.$$

Отсюда $C_1 = \dfrac{e}{e^2 - 1}$, $C_2 = \dfrac{e}{1 - e^2}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \dfrac{e}{e^2 - 1} e^t + \dfrac{e}{1 - e^2} e^{-t}$.

Пример 1.8

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_{-1}^{0} [12t\,x(t) - x'^2(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(-1) = 1$, $x(0) = 0$.

Решение

1. Составим уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = 12t\,x - x'^2$, $F_x = 12t$, $F_{x'} = -2x'$, $\frac{d}{dt}F_{x'} = -2x''$, то получаем $12t - (-2x'') = 0$ или $x'' = -6t$.

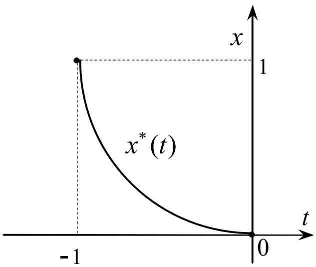


Рис. 1.4

2.Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя дважды левую и правую части уравнения $x'' = -6t$:

$$x' = -3t^2 + C_1,\ x(t) = -t^3 + C_1 t + C_2\,.$$

3.Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(-1) = 1 - C_1 + C_2 = 1,$$
$$x(0) = C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t^3$ (рис.1.4).

Пример 1.9

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_{0}^{\pi/2} [x'^2(t) - x^2(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x\left(\pi/2\right) = 0$.

Решение

Решим задачу двумя способами.

Первый способ

1. Составим уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = x'^2 - x^2$, $F_x = -2x$, $F_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}F_{x'} = 2x''$, то $-2x - 2x'' = 0$ или $x'' + x = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Поскольку оно является однородным с постоянными коэффициентами, то составим характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$. Его корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \pm i$ – ком-

плексные разные $(\alpha = 0,\ \beta = 1)$. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид [14]

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t .$$

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 = 1,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 = 0 .$$

Отсюда получаем экстремаль $x^*(t) = \cos t$ (рис 1.5).

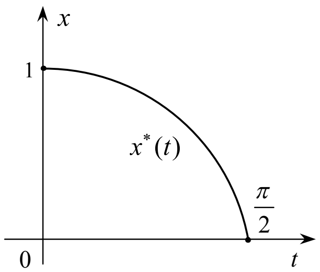


Рис. 1.5

Второй способ

1. Заметим, что подынтегральная функция $F = x'^2 - x^2$ не зависит явно от t, следовательно, соответствует пятому случаю интегрируемости (стр.20). Уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.22):

$$F - x'F_{x'} = x'^2 - x^2 - x'(2x') = C_1 \quad \text{или}$$

$$x'^2 + x^2 = -C_1 = C^2 .$$

2. Найдем общее решение дифференциального уравнения. Сделаем замену переменной: $x' = \dfrac{dx}{dt} = \tau$. Отсюда $x^2 = C^2 - \tau^2$ и $x = \sqrt{C^2 - \tau^2}$, $dx = -\dfrac{2\tau}{2\sqrt{C^2-\tau^2}}d\tau$. Но $dt = \dfrac{dx}{\tau} = \ = -\dfrac{d\tau}{\sqrt{C^2-\tau^2}}$. Проинтегрировав обе части, получим $t = -\arcsin\dfrac{\tau}{C} + C_2$.

Тогда $\arcsin\dfrac{\tau}{C} = C_2 - t$, $\dfrac{\tau}{C} = \sin(C_2 - t)$, $\tau = C\sin(C_2 - t)$. Поэтому $x = \sqrt{C^2 - \tau^2} = \sqrt{C^2 - C^2\sin^2(C_2 - t)} = C\cos(C_2 - t)$ – общее решение уравнения Эйлера.

3. Определим коэффициенты C и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C\cos C_2 = 1,$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = C\cos\left(C_2 - \frac{\pi}{2}\right) = C\sin C_2 = 0 .$$

Отсюда $C = 1$, $C_2 = 0$. В результате получена экстремаль $x^*(t) = \cos t$. Заметим, что в данной задаче непосредственное применение уравнения

Эйлера (1.16) приводит к более простому дифференциальному уравнению.

Пример 1.10

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 [4x(t) - x'^2(t) + 12t\,x'(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(1) = 4$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = 4x(t) - x'^2(t) + 12t\,x'(t)$, $F_x = 4$, $F_{x'} = -2x' + 12t$, $\frac{d}{dt}F_{x'} = -2x'' + 12$, то $4 + 2x'' - 12 = 0$ или $x'' = 4$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя последовательно обе части:

$$x'(t) = 4t + C_1\,,\quad x(t) = 2t^2 + C_1 t + C_2\,.$$

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_2 = 1\,,$$
$$x(1) = 2 + C_1 + C_2 = 4\,.$$

Отсюда $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$. В результате находим экстремаль $x^*(t) = 2t^2 + t + 1$.

Пример 1.11

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^{\ln 2} [x'^2(t) + 2x^2(t) + 2\,x(t)]e^{-t}dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = x(\ln 2) = 0$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = (x'^2 + 2x^2 + 2x)e^{-t}$, $F_x = (4x + 2)e^{-t}$, $F_{x'} = 2x'e^{-t}$, $\frac{d}{dt}F_{x'} = 2x''e^{-t} - 2x'e^{-t}$, то получаем

$$(4x + 2)e^{-t} - 2x''e^{-t} + 2x'e^{-t} = 0 \text{ или } x'' - x' - 2x = 1\,.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

а) определим общее решение однородного уравнения $x'' - x' - 2x = 0$. Корни характеристического уравнения $k^2 - k - 2 = 0$ действительные разные: $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, поэтому $x_o(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$;

б) подберем частное решение неоднородного уравнения в виде $x_ч(t) = A$. Подставляя в уравнение, получаем $-2A = 1$ или $A = -\frac{1}{2}$;

в) найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму результатов п.п. *а* и *б*: $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}$.

3. Определим постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$x(\ln 2) = C_1 e^{2\ln 2} + C_2 e^{-\ln 2} - \frac{1}{2} =$$

$$= C_1 e^{\ln 4} + C_2 e^{\ln(1/2)} - \frac{1}{2} = 4C_1 + \frac{C_2}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{14}$, $C_2 = \frac{3}{7}$ и, следовательно, получаем экстремаль $x(t) = \frac{1}{14} e^{2t} + \frac{3}{7} e^{-t} - \frac{1}{2}$.

Пример 1.12

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 [x^2(t) + x'^2(t) + 2x(t)e^t]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = 0$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = x^2 + x'^2 + 2xe^t$, $F_x = 2x + 2e^t$, $F_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}F_{x'} = 2x''$, то получаем

$$2x + 2e^t - 2x'' = 0 \quad \text{или} \quad x'' - x = e^t.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

а) определим общее решение однородного уравнения $x'' - x = 0$. Корни характеристического уравнения $k^2 - 1 = 0$ – действительные разные: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Поэтому $x_o(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$;

б) подберем частное решение неоднородного уравнения в виде $x_ч(t) = Ate^t$, где A – неизвестный параметр [14]. Тогда $x'_ч(t) = Ae^t + Ate^t$, $x''_ч(t) = 2Ae^t + Ate^t$. Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$2Ae^t + Ate^t - Ate^t = e^t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях от t, имеем $2A = 1$ или $A = \frac{1}{2}$. Поэтому $x_ч(t) = \frac{t}{2}e^t$;

в) найдем общее решение неоднородного уравнения как сумму результатов п.п. а и б: $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{t}{2}e^t$.

3. Определяем постоянные C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$x(1) = C_1e + C_2e^{-1} + \frac{e}{2} = 0.$$

Получаем $C_1 = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}$, $C_2 = \frac{e^2}{2(e^2-1)}$ и, как следствие, экстремали $x^*(t) = -\frac{e^2}{2(e^2-1)}e^t + \frac{e^2}{2(e^2-1)}e^{-t} + \frac{t}{2}e^t$.

Пример 1.13

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_1^2 [3t\,x'^5(t) - 5x(t)x'^4(t)]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 1$, $x(2) = 4$.

Решение

Запишем уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = 3t\,x'^5 - 5x\,x'^4$, $F_x = -5x'^4$, $F_{x'} = 15t\,x'^4 - 20x\,x'^3$, $\frac{d}{dt}F_{x'} = 15x'^4 + 60t\,x'^3x'' - 20x'^4 - 60\,x\,x'^2x''$, то $-5x'^4 - 15x'^4 - 60t\,x'^3x'' + 20x'^4 + 60\,x\,x'^2x'' = 0$ или $x'^2x''(x - t\,x') = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Оно распадается на три уравнения.

Первое уравнение $x'^2 = 0$ имеет решение $x(t) = C$. Прямые этого семейства не принадлежат классу допустимых кривых, так как не удовлетворяют граничным условиям.

Второе уравнение $x'' = 0$ имеет решение $x(t) = C_1 t + C_2$.

Третье уравнение $x - t x' = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными [14]: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{t}$. Оно имеет решение $x(t) = C t$, которое включается в семейство $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Найдем коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(1) = C_1 + C_2 = 1,$$
$$x(2) = 2C_1 + C_2 = 4.$$

Отсюда $C_1 = 3$, $C_2 = -2$ и $x^*(t) = 3t - 2$ – экстремаль.

Пример 1.14

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int\limits_0^{\pi/18} [x'^2(t) - 37x(t)\,x'(t) - 81x^2(t)]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x\left(\dfrac{\pi}{18}\right) = -1$.

Решение

1. Составим уравнение Эйлера (1.16). Так как $F = x'^2 - 37x x' - 81x^2$, $F_x = -37x' - 162x$, $F_{x'} = 2x' - 37x$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'} = 2x'' - 37x'$, то уравнение имеет вид

$$-37x' - 162x - (2x'' - 37x') = 0 \text{ или } x'' + 81x = 0.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Аналогично п. 2 примера 1.9 (стр.22) получаем

$$k^2 + 81 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 9i, \quad x(t) = C_1 \cos 9t + C_2 \sin 9t.$$

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_1 = 1,$$
$$x\left(\frac{\pi}{18}\right) = C_2 = -1.$$

В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \cos 9t - \sin 9t$.

Пример 1.15

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^2 [x'^2(t) + t\,x'(t)]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(2) = 0$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F = x'^2 + t\,x'$ не зависит от x явно и, следовательно, соответствует первому случаю интегрируемости (стр.19). Уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.18):

$$F_{x'} = 2x' + t = C_1.$$

2. Решим уравнение Эйлера $x' = \frac{C_1}{2} - \frac{t}{2}$. Интегрируя, получаем

$$x(t) = \frac{C_1}{2}t - \frac{t^2}{4} + C_2.$$

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = C_2 = 0, \qquad x(2) = C_1 - 1 + C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}$.

Пример 1.16

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + x'^2(t)}}{t}\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 3 + \sqrt{3}$, $x(2) = 3$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F = \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{t}$ не зависит от x и, следовательно, соответствует первому случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.18):

$$F_{x'} = \frac{x'}{t\sqrt{1 + x'^2}} = C_1 = \frac{1}{C}.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Имеем $\dfrac{x'C}{\sqrt{1+x'^2}}=t$.

Сделаем подстановку $x'=\dfrac{dx}{dt}=\operatorname{tg}\tau$: $t=C\operatorname{tg}\tau\cos\tau=C\sin\tau$. Найдем дифференциал: $dt=C\cos\tau\,d\tau$. С учетом равенства $dx=\operatorname{tg}\tau\,dt$ получаем $dx=\operatorname{tg}\tau\,C\cos\tau\,d\tau=C\sin\tau\,d\tau$. Интегрируя, имеем $x(t)=-C\cos\tau+C_2$.

Из системы

$$t=C\sin\tau,\quad x(t)-C_2=-C\cos\tau,$$

возводя в квадрат каждое уравнение и почленно складывая их левые и правые части, находим $t^2+\left(x(t)-C_2\right)^2=C^2$ – общий интеграл уравнения Эйлера.

3. Определим коэффициенты C и C_2 из граничных условий:

$$1+(3+\sqrt{3}-C_2)^2=C^2,\quad 4+(3-C_2)^2=C^2.$$

Отсюда $C_2=3$, $C^2=4$. В результате получаем $t^2+\left(x^*(t)-3\right)^2=4$. Так как $x(1)=3+\sqrt{3}$, экстремум функционала может достигаться лишь на кривой (экстремали) $x^*(t)=3+\sqrt{4-t^2}$, $t\in[1,2]$.

Пример 1.17

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)]=\int_0^2[x'^4(t)+x'^3(t)]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(2)=4$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F=x'^4+x'^3$ не зависит от t и x явно и, следовательно, соответствует второму случаю интегрируемости (стр.19).

2. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид (1.19): $x(t)=C_1t+C_2$.

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0)=C_2=0,\quad x(2)=2C_1+C_2=4.$$

Отсюда получаем $C_1=2$, $C_2=0$. В результате получаем экстремаль $x^*(t)=2t$.

Пример 1.18

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_1^3 \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 2$, $x(3) = 0$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера и его общее решение. Подынтегральная функция $F = \sqrt{1 + x'^2}$ не зависит от t и x явно.

2. Общее решение уравнения Эйлера, соответствующее второму случаю интегрируемости, имеет вид (1.19): $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(1) = C_1 + C_2 = 2\,, \quad x(3) = 3C_1 + C_2 = 0\,.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = 3$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t + 3$. Заметим, что тем самым получено решение задачи о поиске гладкой кривой, соединяющей две точки и имеющей наименьшую длину.

Пример 1.19

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_1^2 [x^2(t) + x(t)]\, dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(1) = 0$, $x(2) = 1$.

Решение

Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F = x^2 + x$ не зависит от t и x'. Она соответствует третьему случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет вид (1.20): $F_x = 2x + 1 = 0$. Отсюда $x(t) = -\frac{1}{2}$. Поставленная задача не имеет решения, так как кривая $x(t) = -\frac{1}{2}$ не удовлетворяет заданным граничным условиям $x(1) = 0$, $x(2) = 1$.

Заметим, что решение существует, если граничные условия другие, а именно: $x(1) = -\frac{1}{2}$, $x(2) = -\frac{1}{2}$.

Пример 1.20

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [x^2(t) + 2\,t\,x(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Решение

Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F = x^2 + 2t\,x$ не зависит от x' и соответствует третьему случаю интегрируемости. Уравнение Эйлера имеет вид (1.20): $F_x = 2x + 2t = 0$ или $x(t) = -t$. Задача имеет решение, если найденная прямая проходит через граничные точки, т.е. при $x(t_0) = -t_0 = x_0$, $x(t_1) = -t_1 = x_1$.

Пример 1.21

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^2 [x^2(t) + t\,x'(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(2) = 1$.

Решение

Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F(t,x,x') = P(t,x) + Q(t,x)\,x' = x^2 + t\,x'$, т.е. $P(t,x) = x^2$, $Q(t,x) = t$ (четвертый случай интегрируемости, стр.19). Уравнение Эйлера (1.21) принимает форму $2x - 1 = 0$. Отсюда $x(t) = \dfrac{1}{2}$. Задача не имеет решения, так как полученная функция не удовлетворяет граничным условиям.

Пример 1.22

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 [2x^3(t) + 3t^2 x'(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(1) = x_1$.

Решение

Запишем уравнение Эйлера и решим его. Подынтегральная функция $F(t,x,x') = P(t,x) + Q(t,x)\,x' = 2x^3 + 3t^2 x'$, т.е. $P(t,x) = 2x^3$, $Q(t,x) = 3t^2$ (четвертый случай интегрируемости, стр.19). Уравнение Эйлера (1.21) принимает форму $6x^2 - 6t = 0$ или $x^2 = t$.

Граничное условие $x(0)=0$ удовлетворяется, а условие $x(1)=x_1$ выполняется при $x_1^2=1$. Таким образом, экстремаль существует только тогда, когда $x_1=1$ или $x_1=-1$.

Пример 1.23

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}[x^2(t)\cos t+2x(t)\,x'(t)\sin t]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(\pi/6)=1$, $x(\pi/2)=2$.

Решение

Подынтегральная функция имеет вид $F=x^2\cos t+2x\sin t\,x'=$ $=P(t,x)+Q(t,x)x'$, т.е. $P(t,x)=x^2\cos t$, $Q(t,x)=2x\sin t$. Так как $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=2x\cos t$, $\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}=2x\cos t$, то $\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial t}$. Выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом функции $x^2\sin t$. Величина функционала не зависит от пути интегрирования, а вариационная задача не имеет смысла (четвертый случай интегрируемости, стр.19). Значение функционала:

$$J[x(t)]=\int\limits_{(\pi/6,1)}^{(\pi/2,2)}[x^2\cos t\,dt+2x\sin t\,dx]=\int\limits_{(\pi/6,1)}^{(\pi/2,2)}d\left(x^2\sin t\right)=$$

$$=x^2\sin t\,\Big|_{(\pi/6,1)}^{(\pi/2,2)}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

Пример 1.24

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)]=\int\limits_0^1 x(t)\,x'^2(t)\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=1$, $x(1)=\sqrt[3]{4}$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F=x\,x'^2$ не зависит от t явно (пятый случай интегрируемости, стр.20). Уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.22): $x\,x'^2-2x'x\,x'=C_1$ или $x\,x'^2=-C_1=C$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Введем подстановку $x' = \frac{dx}{dt} = \tau$. Тогда уравнение $x x'^2 = C$ имеет вид $x\tau^2 = C$. Отсюда $x = \frac{C}{\tau^2}$. Найдем дифференциал dx: $dx = -\frac{2C}{\tau^3} d\tau$. Тогда $dt = \frac{dx}{\tau} = -\frac{2C}{\tau^4} d\tau$. Отсюда $t = \frac{2C}{3\tau^3} + C_2$, $\tau^3 = \frac{2C}{3(t - C_2)}$. Так как $x = \frac{C}{\tau^2}$, то

$x(t) = C \sqrt[3]{\frac{9(t - C_2)^2}{4C^2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(t - C_2)^2 C}$ – общее решение.

3. Определим коэффициенты C и C_2 из граничных условий:

$$x(0) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} C_2^2 C} = 1,$$

$$x(1) = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(1 - C_2)^2 C} = \sqrt[3]{4}.$$

Отсюда $\frac{9}{4} C_2^2 C = 1$, $\frac{9}{4}(1 - C_2)^2 C = 4$ или $\frac{(1 - C_2)^2}{C_2^2} = 4$, т.е. $3C_2^2 + 2C_2 - 1 = 0$. Окончательно имеем: $C_2 = -1$, $C = \frac{4}{9}$; $C_2 = \frac{1}{3}$, $C = 4$.

В результате получаем две экстремали:

$$x^*(t) = \sqrt[3]{(t+1)^2} \quad \text{и} \quad x^*(t) = \sqrt[3]{(3t-1)^2}.$$

Пример 1.25

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_{-4}^{4} \sqrt{x(t)[1 + x'^2(t)]}\, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(-4) = 5$, $x(4) = 5$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F = \sqrt{x(1 + x'^2)}$ не зависит от t явно (пятый случай интегрируемости, стр.20). Уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.22):

$$\sqrt{x(1 + x'^2)} - x' \frac{x x'}{\sqrt{x(1 + x'^2)}} = C_1 \quad \text{или} \quad x = C_1 \sqrt{x(1 + x'^2)};$$

$x^2 = C_1^2 x(1+x'^2)$, $x \neq 0$. Сокращая на x, получаем $x = C(1+x'^2)$, где $C = C_1^2$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Обозначим $x' = \dfrac{dx}{dt} = \tau$, поэтому $x = C(1+\tau^2)$, $dx = 2C\tau\, d\tau$. С другой стороны, имеем $dt = \dfrac{dx}{\tau} = 2C\, d\tau$. Интегрируя обе части, получаем $t = 2C\tau + C_2$, $\tau = \dfrac{t-C_2}{2C}$, $\tau^2 = \dfrac{(t-C_2)^2}{4C^2}$. В результате находим

$$x(t) = C(1+\tau^2) = C\left(1 + \frac{(t-C_2)^2}{4C^2}\right) \quad \text{или} \quad x(t) - C = \frac{(t-C_2)^2}{4C}.$$

3. Определим коэффициенты C и C_2 из граничных условий:

$$5 - C = \frac{(-4-C_2)^2}{4C} = \frac{(4+C_2)^2}{4C},$$

$$5 - C = \frac{(4-C_2)^2}{4C}.$$

Отсюда $(4+C_2)^2 = (4-C_2)^2$ и $C_2 = 0$. Тогда $4(5-C)C = 16$, $C^2 - 5C + 4 = 0$ и решение $C_{(1)} = 1$, $C_{(2)} = 4$. В результате получаем две экстремали $x^*(t) = 1 + \dfrac{t^2}{4}$, $x^*(t) = 1 + \dfrac{t^2}{16}$.

Пример 1.26

Найти семейство экстремалей функционала

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+x'^2(t)}}{x(t)}\, dt,$$

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Поскольку $F(t,x,x')$ не зависит от t явно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.22). Так как

$$F = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x}; \; F_{x'} = \frac{x'}{x\sqrt{1+x'^2}}; \; F - x'F_{x'} = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x} - x'\frac{x'}{x\sqrt{1+x'^2}} =$$

$$=\frac{1+x'^2-x'^2}{x\sqrt{1+x'^2}}=\frac{1}{x\sqrt{1+x'^2}}, \quad \text{то} \quad F-x'F_{x'}=\frac{1}{x\sqrt{1+x'^2}}=C_1.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера. Уравнение $\frac{1}{x\sqrt{1+x'^2}}=C_1$ является уравнением первого порядка, не разрешенным относительно x'.

Вводим замену $x'=\frac{dx}{dt}=\tau$, и тогда

$$x=\frac{1}{C_1\sqrt{1+\tau^2}}, \quad dx=-\frac{2\tau}{2C_1\sqrt{(1+\tau^2)^3}}d\tau=-\frac{\tau}{C_1\sqrt{(1+\tau^2)^3}}d\tau .$$

Интегрируя обе части равенства $dt=\frac{dx}{\tau}=-\frac{d\tau}{C_1\sqrt{(1+\tau^2)^3}}$, находим $t=-\int\frac{d\tau}{C_1\sqrt{(1+\tau^2)^3}}=-\frac{\tau}{C_1\sqrt{1+\tau^2}}+C_2$. Отсюда получаем $\frac{\tau}{C_1\sqrt{1+\tau^2}}=$ $=C_2-t$, $\frac{\tau^2}{C_1^2(1+\tau^2)}=(C_2-t)^2$ и $\tau^2=C_1^2(C_2-t)^2+C_1^2(C_2-t)^2\tau^2$.

Рассмотрим два равенства

$$\tau^2[1-C_1^2(C_2-t)^2]=C_1^2(C_2-t)^2, \quad x^2=\frac{1}{C_1^2(1+\tau^2)}.$$

Так как $1+\tau^2=1+\frac{C_1^2(C_2-t)^2}{1-C_1^2(C_2-t)^2}=\frac{1}{1-C_1^2(C_2-t)^2}$, то $x^2=$ $=\frac{1-C_1^2(C_2-t)^2}{C_1^2}$ или $x^2=\frac{1}{C_1^2}-(C_2-t)^2$. В результате получаем семейство экстремалей: $x^{*2}+(C_2-t)^2=\frac{1}{C_1^2}$.

Приведем решение двух классических задач [15].

Пример 1.27 (*задача о брахистохроне*)

Среди всех гладких кривых, соединяющих точки $A(0,0)$ и $B(y_1,x_1)$ найти ту, по которой материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести из точки A с нулевой начальной скоростью, достигнет точки B за кратчайшее время.

Решение

Формализуем задачу. Для этого проведем через точки A и B плоскость и возьмем произвольную гладкую кривую $x(y)$, причем $x(0)=0$, $x(y_1)=x_1$ (рис. 1.6). Для произвольной точки M на основании закона сохранения энергии получаем $\frac{mv^2}{2}=mgx$, где m – масса точки, v – скорость, g – ускорение свободного падения. Отсюда $v=\sqrt{2gx}$. С другой стороны, элемент длины дуги $dS=\sqrt{(dy)^2+(dx)^2}=\sqrt{1+x'^2}\,dy$, где $x'=\frac{dx}{dy}$. Тогда $v=\frac{dS}{dt}=\sqrt{1+x'^2}\,\frac{dy}{dt}$ или $dt=\frac{dS}{v}=\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}}dy$. Следовательно, время, затрачиваемое на движение из точки A в точку B, находится по формуле:

$$J[x(t)]=\int_0^{t_1} dt=\int_0^{y_1}\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}}dy\to\min,\ x(0)=0,\ x(y_1)=x_1.$$

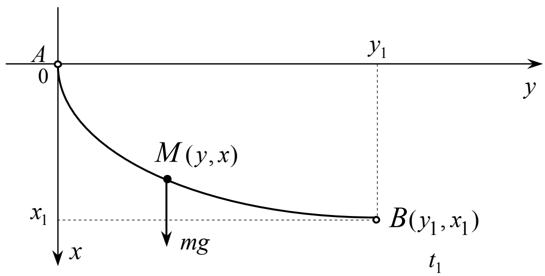


Рис. 1.6

Так как коэффициент $1/\sqrt{2g}$ влияет только на величину функционала и не влияет на процесс нахождения решения, учитывать его не будем.

Решим сформулированную задачу, пользуясь алгоритмом.

1. Составим уравнение Эйлера. Так как подынтегральная функция $F=\dfrac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{x}}$ не зависит явно от аргумента (пятый случай интегрируемости), то уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.22):

$$F-x'F_{x'}=\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{x}}-x'\frac{2x'}{2\sqrt{(1+x'^2)\,x}}=C_1 .$$

После упрощений имеем $\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x'^2)}}=C_1$ или $x(1+x'^2)=\dfrac{1}{C_1^2}=C$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера, Введем параметр t, полагая $x'=\dfrac{dx}{dy}=\operatorname{ctg}t$. Тогда $x=\dfrac{C}{1+\operatorname{ctg}^2 t}=C\sin^2 t$, $dx=2C\sin t\,\cos t\,dt$;

$$dy=\frac{dx}{x'}=\frac{2C\sin t\,\cos t\,dt}{\operatorname{ctg}t}=2C\sin^2 t\,dt=C(1-\cos 2t)\,dt ;$$

$$y=C\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C}{2}(2t-\sin 2t)+C_2 .$$

Следовательно, уравнение искомой линии в параметрической форме имеет вид

$$x(t)=C\sin^2 t=\frac{C}{2}(1-\cos 2t)\,,\quad y(t)=\frac{C}{2}(2t-\sin 2t)+C_2 .$$

3. Поскольку $x(0)=0$, то $C_2=0$. Таким образом, получаем уравнение семейства *циклоид*:

$$x(t)=\frac{C}{2}(1-\cos 2t)\,,\quad y(t)=\frac{C}{2}(2t-\sin 2t)\,,$$

где $C/2$ – радиус катящегося круга, который определяется из условия прохождения циклоиды через точку B .

Пример 1.28 (*задача о наименьшей площади поверхности вращения*).

Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(t_0,x_0)$ и $B(t_1,x_1)$ найти ту, которая при вращении вокруг оси абсцисс t образует поверхность наименьшей площади (рис. 1.7).

Решение

Как известно, площадь поверхности вращения находится по формуле $J[x(t)]=2\pi\int\limits_{t_0}^{t_1} x(t)\sqrt{1+x'^2(t)}\,dt$. Поставленная задача сводится к определению гладкой кривой $x(t)$, удовлетворяющей граничным условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, на которой достигается минимум функционала $J[x(t)]$.

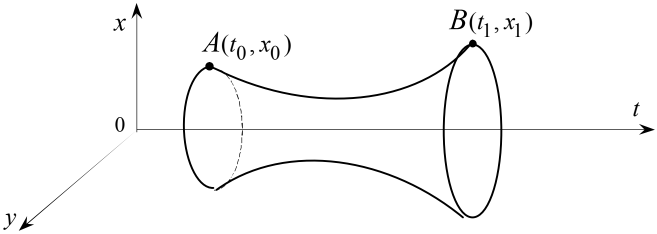


Рис. 1.7

Решим задачу, пользуясь алгоритмом.

1. Составим уравнение Эйлера. Подынтегральная функция $F = x\sqrt{1+x'^2}$ не зависит от t явно (пятый случай интегрируемости, стр.20). Уравнение Эйлера имеет первый интеграл (1.22):

$$F - x'F_{x'} = x\sqrt{1+x'^2} - x'\frac{x\,x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C_1 .$$

После упрощений получаем $\dfrac{x}{\sqrt{1+x'^2}} = C_1$.

2. Найдем общее решение дифференциального уравнения. Полагая $\dfrac{dx}{dt} = x' = \operatorname{sh}\tau$, имеем $x = C_1 \operatorname{ch}\tau$, $dx = C_1 \operatorname{sh}\tau\, d\tau$, $dt = \dfrac{dx}{x'} = \dfrac{C_1 \operatorname{sh}\tau\, d\tau}{\operatorname{sh}\tau} =$ $= C_1\, d\tau$, $t = C_1\tau + C_2$.

Таким образом, искомая поверхность образуется вращением линии, уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$t = C_1\tau + C_2, \quad x = C_1 \operatorname{ch}\tau .$$

Исключая параметр τ, получаем $x = C_1 \operatorname{ch}\dfrac{t-C_2}{C_1}$ – семейство *цепных линий,* от вращения которых образуются поверхности, называемые *катеноидами.*

3. Постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий:

$$x(t_0) = C_1 \operatorname{ch}\frac{t_0 - C_2}{C_1} = x_0\,,\;\; x(t_1) = C_1 \operatorname{ch}\frac{t_1 - C_2}{C_1} = x_1\,.$$

В зависимости от положения точек A и B может существовать одно, два или не существовать ни одного решения.

Пример 1.29

Показать, что уравнение горизонтального движения шарика, соединенного пружиной с некоторой точкой O, является *уравнением Эйлера для действия* – интеграла от разности кинетической и потенциальной энергий.

Решение

Перемещение шарика задает функцию $x(t)$, где $x(t)$ – координата в момент времени t. Функция $x(t)$ удовлетворяет второму закону Ньютона: $m\,x''(t) = -k\,x(t)$, так как действующая на шарик сила по закону Гука пропорциональна (с коэффициентом k) перемещению и направлена противоположно ему.

Кинетическая энергия шарика определяется выражением $T = \dfrac{m\,x'^2(t)}{2}$, а потенциальная $U = \dfrac{k\,x^2(t)}{2}$. Тогда действие – интеграл от разности кинетической и потенциальной энергии имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m\,x'^2(t)}{2} - \frac{k\,x^2(t)}{2} \right) dt\,,$$

где t_0, t_1 – моменты начала и окончания движения.

Запишем уравнение Эйлера для действия. Так как $F = \dfrac{m\,x'^2}{2} - \dfrac{k\,x^2}{2}$, $F_x = -k\,x'$, $F_{x'} = m\,x'$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'} = mx''$, то $F_{x'} - \dfrac{d}{dt}F_{x'} = -k\,x - m\,x'' = 0$ или $m\,x'' = -k\,x$.

Таким образом, *уравнение второго закона Ньютона* – это *уравнение Эйлера для действия*. Иными словами, законы природы имеют двойное описание – физическое и экстремальное.

Достаточные условия экстремума функционала в задаче (1.10)

Для формулировки достаточных условий экстремума используются следующие понятия.

1. *Условие Якоби*. Оно выполняется, если *уравнение Якоби*

$$\left[F_{xx}-\frac{d}{dt}F_{xx'}\right]u(t)-\frac{d}{dt}\left[F_{x'x'}\,u'(t)\right]=0\,, \tag{1.23}$$

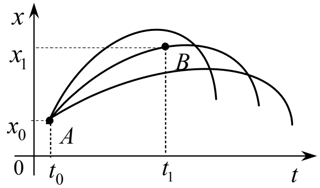
где $u(t)$ – некоторая новая функция; F_{xx}, $F_{xx'}$, $F_{x'x'}$ – соответствующие производные подынтегральной функции, вычисленные на экстремали $x^*(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера (1.16) и граничным условиям, имеет нетривиальное решение $u(t)\neq 0$, которое:

а) удовлетворяет условию $u(t_0)=0$;

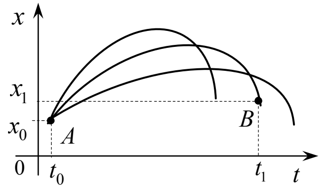
б) не обращается в нуль ни при каких значениях $t\in(t_0,t_1]$.

Условие Якоби является условием включения экстремали $x^*(t)$ в центральное поле экстремалей с центром в точке $A(t_0,x_0)$. *Центральным полем экстремалей* называется семейство экстремалей $x=x(t,C)$, которые покрывают некоторую область и нигде не пересекаются в этой области, кроме центра. Предполагается, что при некотором значении C семейство $x=x(t,C)$ содержит экстремаль $x^*(t)$, которая не имеет общих точек с границами области за исключением, быть может, точек A и $B(t_1,x_1)$. Угловой коэффициент $p(t,x)$ касательной к кривой семейства $x=x(t,C)$, проходящей через точку (t,x), называется *наклоном поля в точке* (t,x).

На рис. 1.8,а показан случай, когда семейство экстремалей, включающее экстремаль AB, образует центральное поле, а на рис. 1.8,б – семейство, не образующее центральное поле, поскольку экстремали, близкие к AB, пересекаются.



а



б

Рис. 1.8

2. Функция

$$E(t,x,x',p)=F(t,x,x')-F(t,x,p)-(x'-p)\cdot F_p(t,x,p) \tag{1.24}$$

называется *функцией Вейерштрасса.*

3. Условие $F_{x'x'} \geq 0$ ($F_{x'x'} \leq 0$) называется *условием Лежандра,* а условие $F_{x'x'} > 0$ ($F_{x'x'} < 0$) *усиленным условием Лежандра.* При этом предполагается, что функция $F(t,x,x')$ трижды дифференцируема по x' для любых x'.

Уравнение Эйлера является необходимым условием как сильного, так и слабого экстремума функционала в задаче (1.10). Достаточные условия слабого и сильного экстремума различны.

Достаточные условия слабого экстремума

Если на экстремали $x^*(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера (1.16) и граничным условиям, выполняются:

а) условие Якоби;

б) либо *условие Вейерштрасса*: функция $E(t,x,x',p) \geq 0$ для точек (t,x), близких к точкам на экстремали $x^*(t)$, и для x', близких к p; либо *усиленное условие Лежандра*: $F_{x'x'} > 0$ на экстремали $x^*(t)$, то на $x^*(t)$ достигается слабый минимум.

Замечание 1. Если в условии Вейерштрасса $E(t,x,x',p) \leq 0$, а в усиленном условии Лежандра $F_{x'x'} < 0$, то сформулированные условия являются достаточными условиями слабого максимума.

Замечание 2. Условие Якоби в отдельности является необходимым условием слабого экстремума, т. е. если решение уравнения Якоби $u(t)$

обращается в нуль при каком-либо значении t из интервала (t_0,t_1), то на экстремали $x^*(t)$ слабый экстремум не достигается.

Замечание 3. Условие Вейерштрасса в отдельности является необходимым, т.е. если функция Вейерштрасса в точках экстремали при x', близких к p, имеет противоположные знаки, слабый экстремум не достигается.

Замечание 4. Исследование знака функции Вейерштрасса часто сопряжено с некоторыми затруднениями. В случае, когда функция $F(t,x,x')$ трижды дифференцируема по x', условие Вейерштрасса можно заменить легко проверяемым усиленным условием Лежандра.

Достаточные условия сильного экстремума

Если на экстремали $x^*(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера (1.16) и граничным условиям, выполняются:

а) условие Якоби;

б) либо *условие Вейерштрасса*: функция $E(t,x,x',p)\geq 0$ для точек (t,x), близких к точкам на экстремали $x^*(t)$, и для произвольных значений x'; либо *условие Лежандра*: $F_{x'x'}(t,x,x')\geq 0$ для точек (t,x), близких к точкам на исследуемой экстремали $x^*(t)$, и для произвольных значений x', то на $x^*(t)$ достигается сильный минимум.

Замечание 1. Если в условии Вейерштрасса $E(t,x,x',p)\leq 0$, а в условии Лежандра $F_{x'x'}(t,x,x')\leq 0$, то сформулированные условия являются *достаточными условиями сильного максимума.*

Замечание 2. Условие Якоби в отдельности является необходимым условием сильного экстремума. Т.е. если решение уравнения Якоби $u(t)$ обращается в нуль при каком-либо значении t из интервала (t_0,t_1), то на экстремали $x^*(t)$ сильный экстремум не достигается.

Замечание 3. Условие Вейерштрасса в отдельности является необходимым, т.е. если функция Вейерштрасса в точках экстремали при некоторых x' имеет противоположные знаки, сильный экстремум не достигается.

Замечание 4. В случае, когда функция $F(t,x,x')$ трижды дифференцируема по x', условие Вейерштрасса можно заменить легко проверяемым условием Лежандра.

На основании изложенных необходимых и достаточных условий экстремума функционала опишем общую схему нахождения экстремума функционала.

Алгоритм нахождения экстремума в задаче (1.10)

1. Найти экстремаль (экстремали) $x^*(t)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и заданным граничным условиям.

2. Проверить достаточные условия сильного и слабого экстремума на найденной в п.1 экстремали. Если достаточные условия выполняются, сделать вывод о достижении сильного или слабого минимума или максимума. Если достаточные условия не выполняются, учесть замечания 2

и 3 (стр. 41- 42) или следующие замечания 2 и 3 (стр.42). В случае невыполнения условий Лежандра вывод об отсутствии экстремума сделать нельзя. Если достаточные условия экстремума выполняются, вычислить значение функционала на найденном решении (если это требуется).

Пример 1.30

Найти экстремум функционала

$$J[x(t)] = \int_1^2 [x'(t) + 2x'^3(t)]\,dt\,, \quad x(1) = 2\,,\ x(2) = 6\,.$$

Решение

1. Найдем экстремаль $x^*(t)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям. Так как подынтегральная функция $F = x' + 2x'^3$ не зависит от t и x явно, то уравнение Эйлера имеет общее решение $x(t) = C_1 t + C_2$. Из граничных условий

$$x(1) = C_1 + C_2 = 2\,,$$
$$x(2) = 2C_1 + C_2 = 6$$

находим $C_1 = 4$, $C_2 = -2$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 4t - 2$

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби (1.23). Так как на экстремали $x^*(t) = 4t - 2$ производная равна $x'(t) = 4$ и $F_{xx} = 0$, $F_{xx'} = 0$, $F_{x'x'}\big|_{x^*(t)} = 12x' = 48$, то уравнение (1.23) имеет вид $\frac{d}{dt}(48u') = 0$. Отсюда $u''(t) = 0$ и $u(t) = C_1 t + C_2$. Из условия $u(1) = 0$ получаем $u(1) = C_1 + C_2 = 0$ и $C_2 = -C_1$. Так как не тривиальное решение ($C_1 \ne 0$) уравнения Якоби $u(t) = C_1 t - C_1 = C_1(t-1) \ne 0$ при $t \in (1,2]$, то условие Якоби выполняется;

б) так как функция $F(t,x,x') = x' + 2x'^3$ трижды дифференцируема по x', то применим условие Лежандра. Поскольку $F_{x'x'} = 12x'$ не сохраняет знака при любых x', то достаточные условия сильного максимума и минимума не выполняются, а вопрос о наличии сильного экстремума остается открытым.

Проверим достаточные условия слабого экстремума:

а) условие Якоби выполняется;

б) применим усиленное условие Лежандра. Так как $F_{x'x'}\big|_{x^*(t)} = 48 > 0$ на экстремали $x^*(t) = 4t - 2$, то на ней достигается слабый минимум. Найдем значение функционала:

$$J[x^*(t)] = \int_1^2 [4 + 2\cdot 4^3]\,dt = 132 .$$

Пример 1.31

Найти экстремум функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 [x^2(t) + x'^2(t)]\,dt , \quad x(0) = 0 , \; x(1) = 1 .$$

Решение

1. Найдем экстремаль $x^*(t)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям: $x^*(t) = \dfrac{e}{e^2 - 1} e^t + \dfrac{e}{1 - e^2} e^{-t}$ (см. пример 1.7).

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби (1.23). Так как $F = x^2 + 2x'^2$, $F_{xx} = 2$, $F_{xx'} = 0$, $F_{x'x'} = 2$, то уравнение (1.23) имеет вид $2u - \dfrac{d}{dt}(2u') = 0$. Отсюда $u'' - u = 0$ и $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ – общее решение (см. пример 1.7). Из условия $u(0) = C_1 + C_2 = 0$ получаем $C_2 = -C_1$ и $u(t) = C_1(e^t - e^{-t})$. Так как нетривиальное решение ($C_1 \ne 0$) уравнения Якоби $u(t) = C_1(e^t - e^{-t}) \ne 0$ при $t \in (0;1]$, то условие Якоби выполняется;

б) так как функция $F(t, x, x') = x^2 + 2x'^2$ трижды дифференцируема по x', то применим условие Лежандра. Поскольку $F_{x'x'} = 2 > 0$ при любых x', то на кривой $x^*(t)$ достигается сильный минимум. Очевидно, на этой же кривой достигается и слабый минимум.

Пример 1.32

Найти экстремум функционала

$$J[x(t)] = \int_{-1}^0 [12\,t\,x(t) - x'^2(t)]\,dt , \quad x(-1) = 1 , \; x(0) = 0 .$$

Решение

1. Экстремаль $x^*(t)$ найдена в примере 1.8: $x^*(t) = -t^3$.

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби (1.23). Так как $F_{xx}=0$, $F_{xx'}=0$, $F_{x'x'}=-2$, то уравнение (1.23) имеет вид: $\dfrac{d}{dt}(2u')=0$ или $u''=0$. Отсюда $u(t)=C_1t+C_2$. Из условия $u(-1)=$ $=-C_1+C_2=0$ следует $C_1=C_2$. Так как нетривиальное решение ($C_1\neq 0$) уравнения Якоби $u(t)=C_1(t+1)\neq 0$ при $t\in(-1;0]$, то условие Якоби выполняется;

б) так как функция $F=12t\,x-x'^2$ трижды дифференцируема по x', то применим условие Лежандра. Поскольку $F_{x'x'}=-2<0$ при любых x', то функционал на экстремали $x^*(t)=-t^3$ имеет сильный максимум. Следовательно, на этой же кривой достигается и слабый максимум. Подсчитаем максимальное значение функционала

$$J[x^*(t)]=\int_{-1}^{0}[12t\cdot(-t^3)-9t^4]\,dt=-\frac{21t^5}{5}\bigg|_{-1}^{0}=-\frac{21}{5}.$$

Пример 1.33

Найти экстремум функционала

$$J[x(t)]=\int_{0}^{\pi/6}[9x^2(t)+2x(t)x'(t)-x'^2(t)]\,dt\,,\quad x(0)=1\,,\ x\big(\pi/6\big)=0\,.$$

Решение

1. Найдем экстремаль $x^*(t)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям:

а) поскольку $F=9x^2+2x\,x'-x'^2$, $F_x=18x+2x'$, $F_{x'}=2x-2x'$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'}=2x'-2x''$, то уравнение Эйлера имеет вид

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=18x+2x'-2x'+2x''=0 \text{ или } x''+9x=0\,;$$

б) так как характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет комплексные сопряженные корни $k_{1,2}=\pm 3i$, то общее решение уравнения Эйлера записывается в форме $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$;

в) определим коэффициенты C_1 и C_2 из граничных условий:

$$x(0)=C_1=1\,,$$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right)=C_2=0\,.$$

Отсюда получаем экстремаль $x^*(t) = \cos 3t$.

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби (1.23). Так как $F_{xx} = 18$, $F_{xx'} = 2$, $F_{x'x'} = -2$, то уравнение (1.23) имеет вид

$$\left[18 - \frac{d}{dt}(2)\right]u - \frac{d}{dt}\left[(-2)u'\right] = 0 \text{ или } u'' + 9u = 0 .$$

Его общее решение: $u(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$. Из условия $u(0) = C_1 = \ = 0$ получаем $u(t) = C_2 \sin 3t$. Так как нетривиальное решение ($C_2 \neq 0$) $u(t) = C_2 \sin 3t \neq 0$, при $t \in (0; \pi/6]$, то условие Якоби выполняется;

б) так как функция F трижды дифференцируема по x', то проверим условие Лежандра. Поскольку $F_{x'x'} = -2 < 0$ при всех x', то на экстремали $x^*(t)$ достигается сильный максимум.

Пример 1.34

Найти экстремум функционала

$$J[x(t)] = \int_1^2 \frac{t^3}{[x'(t)]^2} dt, \quad x(1) = 1, \ x(2) = 4 .$$

Решение

1. Найдем экстремаль $x^*(t)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям. Так как функция $F = \dfrac{t^3}{x'^{\,2}}$ не зависит от x явно, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл: $F_{x'} = -\dfrac{2t^3}{x'^{\,3}} = C_1$ или $x'^{\,3} = -\dfrac{2}{C_1}t^3 = C^3 t^3$. Отсюда $x' = Ct$ и $x(t) = C\dfrac{t^2}{2} + C_2$. Из граничных условий $x(1) = \dfrac{C}{2} + C_2 = 1$, $x(2) = 2C + C_2 = 4$ получаем $C = 2$, $C_2 = 0$. В результате найдена экстремаль $x^*(t) = t^2$.

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби (1.23). Так как $F_{xx} = 0$, $F_{xx'} = 0$, $F_{x'x'} = \dfrac{6t^3}{x'^{\,4}}$ и на экстремали $x^*(t) = t^2$ производная $x^{*\prime}(t) = 2t^2$, то $F_{x'x'}\big|_{x^*(t)} = \dfrac{6t^3}{2^4 t^4} = \dfrac{3}{8t}$, а уравнение (1.23) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{8t}u'\right)=0 \quad \text{или} \quad \frac{3}{8t}u'=C\,, \quad u'=C_1 t\,.$$

Тогда $u(t)=C_1\frac{t^2}{2}+C_2$. Из условия $u(1)=C_1\frac{1}{2}+C_2=0$ получаем $C_2=-\frac{C_1}{2}$. Так как нетривиальное решение ($C_1\neq 0$) уравнения Якоби $u(t)=\frac{C_1}{2}(t^2-1)\neq 0$ при $t\in(1;2]$, то условие Якоби выполнено;

б) так как функция $F=\frac{t^3}{x'^2}$ имеет разрыв при $x'=0$, условие Лежандра использовать нельзя. Исследуем знак функции Вейерштрасса (1.24):

$$E(t,x,x',p)=\frac{t^3}{x'^2}-\frac{t^3}{p^2}-(x'-p)\cdot\left(-\frac{2t^3}{p^3}\right)=\frac{t^3(x'-p)^2(2x'+p)}{x'^2p^3}\,.$$

При $t\in[1;2]$ имеем $t^3>0$, но выражение $(2x'+p)$ при произвольных x' может быть и положительным, и отрицательным. Поэтому функция $E(t,x,x',p)$ не сохраняет знак и достаточное условие сильного экстремума не выполняется. Но согласно замечанию 3 (стр.42) условие Вейерштрасса для сильного экстремума в отдельности является необходимым, поэтому можно сделать вывод о том, что на экстремали $x^*(t)=t^2$ сильный экстремум не достигается.

Проверим достаточные условия слабого экстремума:

а) условие Якоби выполняется;

б) так как на экстремали $F_{x'x'}\big|_{x^*(t)}=\frac{3}{8t}>0$, поскольку $t\in[1;2]$, то выполняется усиленное условие Лежандра. Поэтому на экстремали $x^*(t)=t^2$ достигается слабый минимум.

Получаем минимальное значение функционала:

$$J[x^*(t)]=\int_1^2\frac{t^3}{(2t)^2}dt=\frac{1}{4}\int_1^2 t\,dt=\frac{1}{8}t^2\Big|_1^2=\frac{3}{8}\,.$$

Пример 1.35

Исследовать на экстремум функционал

$$J[x(t)] = \int_0^a [x'(t)]^3 dt\,, \quad x(0) = 0\,,\ x(a) = b$$

при различных значениях параметров $a > 0$, $b > 0$.

Решение

1. Найдем экстремаль, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям. Так как подынтегральная функция $F = x'^3$ не зависит от t и x явно, уравнение Эйлера имеет общее решение $x(t) = C_1 t + C_2$. Из граничных условий $x(0) = C_2 = 0$, $x(a) = C_1 a + C_2 = b$ получаем $C_1 = \frac{b}{a}$, $C_2 = 0$. Таким образом, экстремаль $x^*(t) = \frac{b}{a} t$.

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) экстремаль $x^*(t) = \frac{bt}{a}$ может быть включена в центральное поле экстремалей $x(t) = C_1 t$ центром в точке $A(0;0)$ (рис. 1.9).

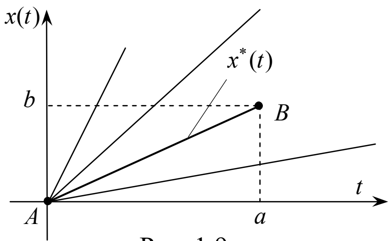


Рис. 1.9

Для проверки условия Якоби составим уравнение (1.23). Так как $F_{xx} = 0$, $F_{xx'} = 0$, $F_{x'x'} = 6x'$ (на экстремали $x^*(t) = bt/a$ производная $x^{*\prime}(t) = b/a$, $F_{x'x'} = 6b/a$), то $\frac{d}{dt}\left(\frac{6b}{a} u'\right) = 0$ или $u'' = 0$. Отсюда $u(t) = C_1 t + C_2$. Из условия $u(0) = C_2 = 0$ получаем $u(t) = C_1 t$. Так как нетривиальное решение $(C_1 \neq 0)$ уравнения Якоби $u(t) = C_1 t \neq 0$ при $t \in (0, a]$, условие Якоби выполняется;

б) так как функция F трижды дифференцируема по x', то проверим условие Лежандра. Поскольку $F_{x'x'} = 6x'$ для любых x' не сохраняет знак, то условие Лежандра не выполняется.

Проверим условие Вейерштрасса. Функция Вейерштрасса

$$E(t, x, x', p) = x'^3 - p^3 - (x' - p)3p^2 = (x' - p)^2(x' + 2p)$$

не сохраняет знак, поскольку выражение $(x' + 2p)$ при произвольных значениях x' может иметь любой знак. Следовательно, условие Вейерштрасса для сильного экстремума не выполняется, а так как оно согласно замечанию 3 (стр. 42) является необходимым, можно сделать вывод: на прямой $x^*(t) = \dfrac{bt}{a}$ сильный экстремум не достигается.

Проверим достаточные условия слабого экстремума:

а) условия Якоби выполняются;

б) так как подынтегральная функция трижды дифференцируема по x', проверим усиленное условие Лежандра. Поскольку на экстремали $x^*(t) = \dfrac{bt}{a}$ справедливо $F_{x'x'} = \dfrac{6b}{a} > 0$, то на ней достигается слабый минимум.

3. Подсчитаем минимальное значение функционала

$$J[x^*(t)] = \int_0^a \left(\frac{b}{a}\right)^3 dt = \frac{b^3}{a^2}.$$

Пример 1.36

Исследовать на экстремум функционал

$$J[x(t)] = \int_0^a [x'^2(t) - x^2(t)]dt, \quad x(0) = 0, \; x(a) = 0$$

при различных значениях параметра $a > 0$; $a \neq \pi k$, $k \in Z$.

Решение

Найдем экстремаль, удовлетворяющую уравнению Эйлера и граничным условиям. Общее решение уравнения Эйлера получено в примере 1.9: $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Из граничных условий

$$x(0) = C_1 = 0,$$

$$x(a) = C_1 \cos a + C_2 \sin a = 0$$

получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и $x^*(t) \equiv 0$.

2. Проверим достаточные условия сильного экстремума:

а) для проверки условия Якоби составим уравнение Якоби. Так как $F_{xx} = -2$, $F_{xx'} = 0$, $F_{x'x'} = 2$, то уравнение (1.23) имеет вид $-2u - \dfrac{d}{dt}(2u') = 0$ или $u'' + u = 0$. Отсюда $u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (см. пример 1.9). Из условия $u(0) = C_1 = 0$ получаем $x(t) = C_2 \sin t$. При $0 < a < \pi$ нетривиальное решение $(C_2 \neq 0)$ уравнения Якоби $u(t) = C_2 \sin t \neq 0$ при $t \in (0, a]$ и условие Якоби выполняется.

При $a > \pi$ нетривиальное решение уравнения Якоби $u(t) = C_2 \sin t = 0$ по крайней мере при $t = \pi$. В данном случае условие Якоби не выполняется. Так как согласно замечанию 2 (стр. 41) и замечанию 2 (стр.42) условие Якоби в отдельности является необходимым, то при $a > \pi$ на экстремали $x^*(t) \equiv 0$ не достигается ни сильный, ни слабый экстремум. Выполнение условия Якоби при $0 < a < \pi$ подтверждает возможность включения экстремали $x^*(t) \equiv 0$ в центральное поле экстремалей (рис. 1.10,*а*).

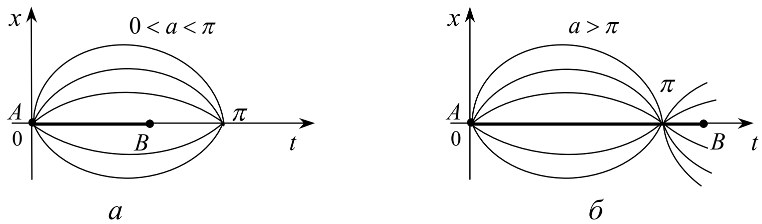


Рис. 1.10

Очевидно, в случае $a > \pi$ экстремаль $x^*(t) \equiv 0$ не может быть включена в центральное поле экстремалей, так как экстремали пересекаются не только в центре A, но и в точке $t = \pi$ (рис. 1.10,*б*);

б) проверим условие Лежандра при $0 < a < \pi$, так как функция $F = x'^2 - x^2$ трижды дифференцируема по x'. Поскольку $F_{x'x'} = 2 > 0$ для любых x', то на экстремали $x^*(t) \equiv 0$ достигается сильный минимум. Минимальное значение функционала $J[x^*(t)] = 0$.

1.3. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $\mathrm{x}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$, $i = 1,...,n$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_1]$, где t_0, t_1 – заданы, т.е. $x_i(t) \in C^1([t_0, t_1])$, $i = 1,...,n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x_i(t_0) = x_{i0},\ x_i(t_1) = x_{i1},\ i = 1,...,n, \qquad (1.25)$$

где x_{i0}, x_{i1}, $i = 1,...,n$ заданы, т.е. каждая из кривых $x_i(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки.

На множестве M задан функционал

$$J[x_1(t),...,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right) dt, \qquad (1.26)$$

где подынтегральная функция $F\left(t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор - функций $\mathrm{x}(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор - функцию $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$, на которой функционал (1.26) достигает экстремума, т.е.

$$J[x_1^*(t),...,x_n^*(t)] = \underset{\mathrm{x}(t)\in M}{\operatorname{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right) dt. \qquad (1.27)$$

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи (1.27) опирается на теорему (стр. 14) о необходимом условии экстремума функционала: $\delta J = 0$ на экстремали $\mathrm{x}^*(t)$. Поскольку эта проблема сформулирована для скалярной функции $x(t)$, применим ее к функционалу (1.26), варьируя лишь функцию $x_k(t)$, а остальные оставляя неизменными. При этом функционал будет зависеть лишь от одной функции $x_k(t)$.

Пусть $x_i^*(t)$, $i=1,...,n$ компоненты вектор–функции $\mathrm{x}^*(t)$, на которой достигается экстремум функционала в задаче (1.27). Тогда, полагая $\delta x_i(t) \equiv 0$, $i=1,...,k-1,k+1,...,n$, имеем

$$x_i(t) = x_i^*(t),\ i=1,...,k-1,k+1,...,n, \quad x_k(t) = x_k^*(t) + \alpha\,\delta x_k(t),$$

где $\delta x_i(t) \in C^1([t_0,t_1])$ фиксированная вариация, удовлетворяющая условиям: $\delta x_k(t_0) = \delta x_k(t_1) = 0$; α – числовой параметр.

Подставляя $x_i(t)$, $i=1,...,n$, в функционал, имеем

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\Big(t, x_1^*(t),...,x_k^*(t) + \alpha\,\delta x_k(t),...,x_n^*(t),$$

$$x_1^{*\prime}(t),...,x_k^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x_k^{*\prime}(t),...,x_n^{*\prime}(t)\Big)\,dt. \qquad (1.28)$$

Отсюда (аналогично разд.1.2) получаем формулу для первой вариации:

$$\delta_k J = \int_{t_0}^{t_1} \Big[F_{x_k}\,\delta x_k(t) + F_{x_k'}\,\delta x_k'(t) \Big]\,dt. \qquad (1.29)$$

Интегрируя по частям, применяя необходимое условие экстремума и основную лемму вариационного исчисления (стр. 15), получаем уравнение Эйлера:

$$F_{x_k} - \frac{d}{dt} F_{x_k'} = 0.$$

Так как в качестве варьируемой компоненты $x_k(t)$ может быть взята любая компонента из $x_i(t)$, $i=1,...,n$, то искомая вектор - функция $\mathrm{x}^*(t) = \Big(x_1^*(t),...,x_n^*(t)\Big)^T$ должна удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0, \quad i=1,...,n. \qquad (1.30)$$

Заметим, что первая вариация функционала представляется в виде

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} \delta_i J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\,dt. \qquad (1.31)$$

Так как вариации $\delta x_i(t)$, $i=1,\ldots,n$ произвольны, то из условия $\delta J=0$ и основной леммы вариационного исчисления следует система (1.30).

Общее решение этой системы $x_i = x_i(t, C_1, \ldots, C_{2n})$, $i=1,\ldots,n$, содержит $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из $2n$ граничных условий $x_i(t_0)=x_{i0}$, $x_i(t_1)=x_{i1}$, $i=1,\ldots,n$.

Сформулируем описанный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (1.27))

Если на вектор-функции $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)\right)^T$, *где* $x_i^*(t)\in C^1\left([t_0,t_1]\right)$, $x_i(t_0)=x_{i0}$, $x_i(t_1)=x_{i1}$, $i=1,\ldots,n$, *функционал (1.26) достигает слабого экстремума, то функции* $x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt}F_{x_i'} = 0, \quad i=1,\ldots,n.$$

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (1.27)

1. Составить систему уравнений Эйлера:

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt}F_{x_i'} = 0, \quad i=1,\ldots,n.$$

2. Найти общее решение системы уравнений Эйлера:

$$x_i = x_i(t, C_1, \ldots, C_{2n}),\ i=1,\ldots,n.$$

3. Определить постоянные $C_1,\ldots,C_{2n}$ из граничных условий

$$x_i(t_0, C_1, \ldots, C_{2n}) = x_{i0},\ i=1,\ldots,n.$$
$$x_i(t_1, C_1, \ldots, C_{2n}) = x_{i1},\ i=1,\ldots,n.$$

Записать выражения для компонент $x_1^*(t)$,…, $x_n^*(t)$ экстремали $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)\right)^T$.

Пример 1.37

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t)] = \int\limits_0^{\pi/2} [x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + 2x_1(t)\,x_2(t)]\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=x_2(0)=0\,, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\,.$$

Решение

1. Записываем систему уравнений Эйлера $F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}=0\,, \quad i=1,2\,.$ Так как $F=x_1'^2+x_2'^2+2x_1x_2$, $F_{x_1}=2x_2$, $F_{x_2}=2x_1$, $F_{x_1'}=2x_1'$, $F_{x_2'}=2x_2'$, $\frac{d}{dt}F_{x_1'}=2x_1''$, $\frac{d}{dt}F_{x_2'}=2x_2''$, то система имеет вид

$$F_{x_1}-\frac{d}{dt}F_{x_1'}=2x_2-2x_1''=0\,, \quad F_{x_2}-\frac{d}{dt}F_{x_2'}=2x_1-2x_2''=0$$

или $x_1''=x_2$, $x_2''=x_1$.

2. Решаем систему, сводя ее к одному уравнению относительно переменной x_1, получаем $x_1'''=x_2'$, $x_1^{(4)}=x_2''$, $x_1^{(4)}=x_1$ или $x_1^{(4)}-x_1=0$. Так как характеристическое уравнение $k^4-1=0$ или $(k^2-1)(k^2+1)=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_{3,4}=\pm i$, то общее решение полученного однородного уравнения записывается в форме [14]:

$$x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t\,.$$

Тогда $x_2(t)=x_1''(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t$.

3. Определяем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из граничных условий:

$$x_1(0)=C_1+C_2+C_3=0\,,$$
$$x_2(0)=C_1+C_2-C_3=0\,,$$
$$x_1\left(\pi/2\right)=C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+C_4=1\,,$$
$$x_2\left(\pi/2\right)=C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}-C_4=-1\,.$$

Имеем: $C_1=C_2=C_3=0$, $C_4=1$. Записываем компоненты экстремали $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),x_2^*(t)\right)^T$, где $x_1^*(t)=\sin t$, $x_2^*(t)=-\sin t$.

Пример 1.38

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t)]=\int_0^{\pi/2}[x_1'(t)x_2'(t)-x_1(t)x_2(t)]\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=x_2(0)=0, \quad x_1(\pi/2)=x_2(\pi/2)=1.$$

Решение

1. Записываем систему уравнений Эйлера $F_{x_i}-\dfrac{d}{dt}F_{x_i'}=0, \quad i=1,2$.

Поскольку $F=x_1'x_2'-x_1x_2$, $F_{x_1}=-x_2$, $F_{x_2}=-x_1$, $F_{x_1'}=x_2'$, $F_{x_2'}=x_1'$, $\dfrac{d}{dt}F_{x_1'}=x_2''$, $\dfrac{d}{dt}F_{x_2'}=x_1''$, то система записывается в форме:

$$F_{x_1}-\frac{d}{dt}F_{x_1'}=-x_2-x_2''=0, \quad F_{x_2}-\frac{d}{dt}F_{x_2'}=-x_1-x_1''=0$$

или $\quad x_2''+x_2=0, \quad x_1''+x_1=0$.

2. Решаем систему уравнений. Имеем (см. пример 1.9)

$$x_1(t)=C_1\cos t+C_2\sin t, \qquad x_2(t)=C_3\cos t+C_4\sin t.$$

3. Определяем C_1, C_2, C_3, C_4 из граничных условий:

$x_1(0)=C_1=0$, $x_2(0)=C_3=0$, $x_1(\pi/2)=C_2=1$, $x_2(\pi/2)=C_4=1$.

В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),x_2^*(t)\right)^T$, где $x_1^*(t)=\sin t$, $x_2^*(t)=\sin t$.

Пример 1.39

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t),x_2(t)]=\int_1^2[12t\,x_1(t)+x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+2x_2(t)x_3'(t)+$$
$$+x_3'^2(t)+2x_3(t)x_2'(t)]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(1)=0, \quad x_2(1)=2, \quad x_3(1)=0,$$
$$x_1(2)=6, \quad x_2(2)=3, \quad x_3(2)=2.$$

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера. Для этого найдем

$$F=12t\,x_1+x_1'^2+x_2'^2+2x_2x_3'+x_3'^2+2x_3x_2',$$

$$F_{x_1}=12t, \qquad F_{x_2}=2x_3', \qquad F_{x_3}=2x_2',$$
$$F_{x_1'}=2x_1', \qquad F_{x_2'}=2x_2'+2x_3, \qquad F_{x_3'}=2x_2+2x_3',$$
$$\frac{d}{dt}F_{x_1'}=2x_1'', \quad \frac{d}{dt}F_{x_2'}=2x_2''+2x_3', \quad \frac{d}{dt}F_{x_3'}=2x_2'+2x_3''.$$

В результате получаем систему

$$F_{x_1} - \frac{d}{dt} F_{x_1'} = 12t - 2x_1'' = 0,$$

$$F_{x_2} - \frac{d}{dt} F_{x_2'} = 2x_3' - (2x_2'' + 2x_3') = 0,$$

$$F_{x_3} - \frac{d}{dt} F_{x_3'} = 2x_2' - (2x_2' + 2x_3'') = 0$$

или

$$x_1'' = 6t, \quad x_2'' = 0, \quad x_3'' = 0.$$

2. Найдем общее решение системы:

$$x_1(t) = t^3 + C_1 t + C_2, \quad x_2(t) = C_3 t + C_4, \quad x_3(t) = C_5 t + C_6.$$

3. Определяем постоянные $C_1, \ldots, C_6$ из граничных условий:

$$x_1(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0, \qquad x_1(2) = 8 + 2C_1 + C_2 = 6,$$

$$x_2(1) = C_3 + C_4 = 2, \qquad x_2(2) = 2C_3 + C_4 = 3,$$

$$x_3(1) = C_5 + C_6 = 0, \qquad x_3(2) = 2C_5 + C_6 = 2.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 1$, $C_5 = 2$, $C_6 = -2$. В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t), x_2^*(t)\right)^T$, где

$$x_1^*(t) = t^3 - t, \quad x_2^*(t) = t + 1, \quad x_3^*(t) = 2t - 2.$$

1.4. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка одной функции

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_1]$, где t_0 и t_1 заданы, т.е. $x(t) \in C^m\left([t_0, t_1]\right)$;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0, \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ &x(t_1) = x_1, \quad x^{(i)}(t_1) = x_1^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, m-1, \end{aligned} \tag{1.32}$$

где x_0, $x_0^{(i)}$, x_1, $x_1^{(i)}$ заданы.

На множестве M задан функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right) dt, \tag{1.33}$$

где функция $F\left(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m)}(t)\right)$ дифференцируема $(m+2)$ раза по всем аргументам. Среди допустимых кривых $x(t)$ принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (1.33) достигает экстремума, т.е.

$$J[x^*(t)] = \underset{x(t)\in M}{\text{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t), ..., x^{(m)}(t)\right) dt . \qquad (1.34)$$

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи опирается на теорему (стр. 14) о необходимом условии экстремума функционала. Запишем первую вариацию функционала δJ в задаче (1.34). Пусть $x^*(t) \in C^m\left([t_0, t_1]\right)$ – кривая, на которой достигается экстремум функционала J. Тогда допустимая кривая $x(t)$ и ее производные $x^{(i)}(t)$, $i = 1, ..., m$ представляются в виде

$$x(t) = x^*(t) + \alpha\, \delta x(t)\,,\; x'(t) = x^{*\prime}(t) + \alpha\, \delta x'(t)\,,\; \ldots$$
$$\ldots,\; x^{(m)}(t) = x^{*(m)}(t) + \alpha\, \delta x^{(m)}(t)\,,$$

где $\delta x(t)$ – фиксированная вариация, удовлетворяющая нулевым граничным условиям:

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = \delta x'(t_0) = \delta x'(t_1) = ... = \delta x^{(m-1)}(t_0) = \delta x^{(m-1)}(t_1) = 0\,.$$

По определению (1.7)

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} J\left[x^*(t) + \alpha\, \delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t), ..., x^{*(m)}(t) + \alpha\, \delta x^{(m)}(t)\right) dt\,\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big[F_x\left(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t), ..., x^{*(m)}(t) + \alpha\, \delta x^{(m)}(t)\right) \delta x(t) +$$

$$+ F_{x'}\left(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t), ..., x^{*(m)}(t) + \alpha\, \delta x^{(m)}(t)\right) \delta x'(t) + ...$$

$$... + F_{x^{(m)}}\left(t, x^*(t) + \alpha\, \delta x(t), ..., x^{*(m)}(t) + \alpha\, \delta x^{(m)}(t)\right) \delta x^{(m)}(t) \Big] dt \Big|_{\alpha=0} =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[F_x\delta x(t)+F_{x'}\delta x'(t)+\ldots+F_{x^{(m)}}\delta x^{(m)}(t)\right]dt\,. \qquad (1.35)$$

Интегрируем по частям второе слагаемое в правой части (1.35) один раз:

$$\int_{t_0}^{t_1}F_{x'}\delta x'(t)\,dt=F_{x'}\delta x(t)\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}F_{x'}\delta x(t)\,dt\,,$$

третье слагаемое – два раза:

$$\int_{t_0}^{t_1}F_{x''}\delta x''(t)\,dt=\left[F_{x''}\delta x'(t)\right]\Big|_{t_0}^{t_1}-\left[\frac{d}{dt}F_{x''}\delta x(t)\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^2}{dt^2}F_{x''}\delta x(t)\,dt\,,$$

и т.д. до последнего слагаемого, которое интегрируем по частям m раз:

$$\int_{t_0}^{t_1}F_{x^{(m)}}\delta x^{(m)}(t)\,dt=\left[F_{x^{(m)}}\delta x^{(m-1)}(t)\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\left[\frac{d}{dt}F_{x^{(m)}}\delta x^{(m-2)}(t)\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^m\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^m}{dt^m}F_{x^m}\delta x(t)\,dt\,.$$

Учитывая, что вариация и ее производные удовлетворяют нулевым начальным условиям, записываем необходимые условия экстремума:

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}\left[F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}F_{x^{(m)}}\right]\delta x(t)\,dt=0\,.$$

Так как вариация $\delta x(t)$ может быть выбрана произвольно, а выражение в квадратных скобках является непрерывной функцией t на кривой $x^*(t)$, то по основной лемме вариационного исчисления (см. стр.15) имеем

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x''}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}F_{x^{(m)}}=0\,. \qquad (1.36)$$

Уравнение (1.36) имеет порядок $2m$ и называется *уравнением Эйлера - Пуассона,* а его интегральные кривые называются *экстремалями.* Общее решение этого уравнения $x=x(t,C_1,C_2,\ldots,C_{2m})$ содержит $2m$ произвольных постоянных, которые могут быть определены из $2m$ граничных условий.

Сформулируем описанный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (1.34))

Если на функции $x^*(t) \in C^m([t_0, t_1])$, удовлетворяющей граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}$, $x^{(i)}(t_1) = x_1^{(i)}$, $i = 1, ..., m-1$, функционал (1.33) достигает экстремума, то функция $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера - Пуассона:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{x''} + ... + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} F_{x^{(m)}} = 0 .$$

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (1.34)

1. Записать уравнение Эйлера - Пуассона.
2. Найти общее решение уравнения $x = x(t, C_1, C_2, ..., C_{2m})$.
3. Определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$ из граничных условий и записать выражение для экстремали $x^*(t)$.

Пример 1.40

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 [x''(t)]^2 \, dt ,$$

удовлетворяющую граничным условиям: $x(0) = x'(0) = x'(1) = 0$, $x(1) = 1$.

Решение

1. Записываем уравнение Эйлера - Пуассона. Так как $F = x''^2$, $F_x = 0$, $F_{x'} = 0$, $F_{x''} = 2x''$, $\frac{d}{dt} F_{x'} = 0$, $\frac{d^2}{dt^2} F_{x''} = 2x^{(4)}$, то имеем

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{x''} = 2x^{(4)} = 0 .$$

2. Решаем уравнение Эйлера - Пуассона:

$x'''(t) = C_1$, $x''(t) = C_1 t + C_2$, $x'(t) = \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 t + C_3$, $x(t) = \frac{C_1}{6} t^3 + \frac{C_2}{2} t^2 + {}$ ${}+ C_3 t + C_4$ – общее решение.

3. Определяем $C_1, \ldots, C_4$ из граничных условий:

$$x(0) = C_4 = 0 , \qquad x'(0) = C_3 = 0 ,$$

$$x(1) = \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} + C_3 + C_4 = 1 , \qquad x'(1) = \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0 .$$

Отсюда находим $C_1 = -12$, $C_2 = 6$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ и записываем уравнение экстремали: $x^*(t) = -2t^3 + 3t^2$.

Пример 1.41

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 \left[x''^2(t) - 48x(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям: $x(0) = 1$, $x'(0) = -4$, $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$.

Решение

1. Записываем уравнение Эйлера - Пуассона. Имеем

$F = x''^2 - 48x$, $F_x = -48$, $F_{x'} = 0$, $F_{x''} = 2x''$, $\frac{d}{dt} F_{x'} = 0$, $\frac{d^2}{dt^2} F_{x''} = 2x^{(4)}$,

$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{x''} = -48 + 2x^{(4)} = 0$ или $x^{(4)} = 24$.

2. Решаем уравнение Эйлера - Пуассона. Имеем

$x^{(4)} = 24$, $x'''(t) = 24t + C_1$, $x''(t) = 12t^2 + C_1 t + C_2$, $x'(t) = 4t^3 + \frac{C_1}{2} t^2 + C_2 t + C_3$, $x(t) = t^4 + \frac{C_1}{6} t^3 + \frac{C_2}{2} t^2 + C_3 t + C_4$ – общее решение.

3. Определим $C_1, \dots, C_4$ из граничных условий:

$$x(0) = C_4 = 1, \qquad x'(0) = C_3 = -4,$$

$$x(1) = 1 + \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} + C_3 + C_4 = 0, \qquad x'(1) = 4 + \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0.$$

Отсюда $C_1 = -24$, $C_2 = 12$, $C_3 = -4$, $C_4 = 1$.

Записываем уравнение экстремали: $x^*(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$.

Пример 1.42

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 e^{-t} x''^2(t)\, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x(1) = e$, $x'(1) = e$.

Решение

1. Записываем уравнение Эйлера - Пуассона. Имеем

$$F = e^{-t} x''^{\,2}\,,\quad F_x = 0\,,\quad F_{x'} = 0\,,\quad F_{x''} = 2x'' e^{-t}\,,\quad \frac{d}{dt} F_{x'} = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt} F_{x''} = 2x''' e^{-t} - 2x'' e^{-t}\,,\quad \frac{d^2}{dt^2} F_{x''} = 2x^{(4)} e^{-t} - 2x''' e^{-t} - 2x''' e^{-t} + 2x'' e^{-t}\,.$$

В результате получаем

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{x''} = 2x^{(4)} e^{-t} - 4x''' e^{-t} + 2x'' e^{-t} =$$

$$= 2e^{-t}\left[x^{(4)} - 2x''' + x''\right] = 0\,.$$

Отсюда $x^{(4)} - 2x''' + x'' = 0$.

2. Решаем уравнение Эйлера - Пуассона:

а) характеристическое уравнение $k^4 - 2k^3 + k^2 = k^2(k^2 - 2k + 1) = 0$ имеет кратные действительные корни $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = 1$;

б) $x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 t e^t$ – общее решение [14].

3. Определяем постоянные $C_1, \ldots, C_4$ из граничных условий с учетом того, что $x'(t) = C_2 + C_3 e^t + C_4 e^t + C_4 t e^t$:

$$x(0) = C_1 + C_3 = 1\,,\qquad x'(0) = C_2 + C_3 + C_4 = 1\,,$$
$$x(1) = C_1 + C_2 + C_3 e + C_4 e = e\,,\qquad x'(1) = C_2 + C_3 e + 2C_4 e = e\,.$$

Отсюда получаем $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$ и экстремаль $x^*(t) = e^t$.

Пример 1.43

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi/4} \left[x''^{\,2}(t) - 16x^2(t) + t e^{-t}\right] dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x(0) = 1\,,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,,\ x'(0) = 0\,,\ x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,.$$

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера - Пуассона. Так как $F = x''^{\,2} - 16x^2 +$

$+t\,e^{-t}$, $F_x=-32x$, $F_{x'}=0$, $F_{x''}=2x''$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'}=0$, $\dfrac{d^2}{dt^2}F_{x''}=2x^{(4)}$, то

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x''}=-32x+2x^{(4)}=0 \quad \text{или} \quad x^{(4)}-16x=0\,.$$

2. Находим общее решение уравнения Эйлера - Пуассона. Так как характеристическое уравнение $k^4-16=(k-2)(k+2)(k^2+4)=0$, имеет корни $k_1=2$, $k_2=-2$, $k_{3,4}=\pm 2i$, то $x(t)=C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-2t}+$ $+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t$.

3. Определим коэффициенты $C_1,\ldots,\ C_4$ из граничных условий с учетом того, что $x'(t)=2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}-2C_3\sin 2t+2C_4\cos 2t$:

$$x(0)=C_1+C_2+C_3=1\,,$$
$$x'(0)=2C_1-2C_2+2C_4=0\,,$$
$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+C_4=0\,,$$
$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2C_1e^{\pi/2}-2C_2e^{-\pi/2}-2C_3=-2\,.$$

Отсюда находим $C_1=C_2=C_4=0$, $C_3=1$ и экстремаль $x^*(t)=\cos 2t$.

Пример 1.44

Найти семейство экстремалей функционала

$$J[x(t)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[x'''^{\,2}(t)+4x''^2(t)+120t\,x(t)+64\,x(t)+t\,e^{-2t}\Big]dt\,.$$

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера - Пуассона. Так как

$F=x'''^{\,2}+4x''^2+120t\,x+64\,x+t\,e^{-2t}$, $F_x=120t+64$, $F_{x'}=0$, $F_{x''}=8x''$,

$F_{x'''}=2x'''$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'}=0$, $\dfrac{d^2}{dt^2}F_{x''}=8x^{(4)}$, $\dfrac{d^3}{dt^3}F_{x'''}=2x^{(6)}$,

то уравнение имеет вид

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x''}-\frac{d^3}{dt^3}F_{x'''}=120t+64+8x^{(4)}-2x^{(6)}=0$$

или $\quad x^{(6)}-4x^{(4)}-60t-32=0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера - Пуассона

$$x^{(6)} - 4x^{(4)} = 60t + 32:$$

а) определяем общее решение однородного уравнения $x^{(6)} - 4x^{(4)} = 0$. Так как характеристическое уравнение $k^6 - 4k^4 = k^4(k^2 - 4) = 0$ имеет корни $k_{1,2,3,4} = 0$, $k_5 = 2$, $k_6 = -2$, то $x_o(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + \ +C_5 e^{2t} + C_6 e^{-2t}$;

б) найдем частное решение неоднородного уравнения. Будем искать его в виде $x_ч(t) = t^4(At + B)$, где A и B – неизвестные коэффициенты [14]. Тогда $x_ч(t) = t^5 A + Bt^4$, $x_ч'(t) = 5At^4 + 4Bt^3$, $x_ч''(t) = 20At^3 + 12Bt^2$, $x_ч'''(t) = 60At^2 + 24Bt$, $x_ч^{(4)}(t) = 120At + 24B$, $x_ч^{(5)}(t) = 120A$, $x_ч^{(6)}(t) = 0$.

Подставим полученные выражения в неоднородное уравнение:

$$-4 \cdot (120At + 24B) = 60t + 32.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем

$$A = -\frac{60}{4 \cdot 120} = -\frac{1}{8}, \quad B = -\frac{32}{4 \cdot 24} = -\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x_ч(t) = -\frac{t^5}{8} - \frac{t^4}{3};$$

в) общее решение неоднородного уравнения находим в виде суммы результатов п.п. *а* и *б*:

$$x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 e^{2t} + C_6 e^{-2t} - \frac{t^5}{8} - \frac{t^4}{3}.$$

Это и есть искомое семейство экстремалей.

1.5. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка нескольких функций

Постановка задачи

Рассмотрим множество M допустимых вектор - функций $\mathrm{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_1]$, где t_0 и t_1 заданы, т.е. $x_i(t) \in C^m([t_0, t_1])$, $i = 1, \dots, n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} &x_i(t_0) = x_{i0}, \ \ x_i^{(k)}(t_0) = x_{i0}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, m-1, \\ &x_i(t_1) = x_{i1}, \ \ x_i^{(k)}(t_1) = x_{i1}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \ k = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \tag{1.37}$$

где x_{i0}, $x_{i0}^{(k)}$, x_{i1}, $x_{i1}^{(k)}$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m-1$ заданы.

На множестве M задан функционал

$$J[x(t)]=\int_{t_0}^{t_1} F\left(t,x_1(t),x_1'(t),\dots,x_1^{(m)}(t),\dots,x_n(t),x_n'(t),\dots,x_n^{(m)}(t)\right)dt\,, \qquad (1.38)$$

где функция $F\left(t,x_1(t),x_1'(t),\dots,x_1^{(m)}(t),\dots,x_n(t),x_n'(t),\dots,x_n^{(m)}(t)\right)$ дифференцируема $(m+2)$ раза по всем переменным.

Среди допустимых вектор - функций $\mathrm{x}(t)$ принадлежащих множеству M требуется найти вектор - функцию $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)\right)^T$, на которой функционал (1.38) достигает экстремума, т.е.

$$J[\mathrm{x}^*(t)]=\underset{\mathrm{x}(t)\in M}{\operatorname{extr}}\int_{t_0}^{t_1} F\left(t,x_1(t),\dots,x_1^{(m)}(t),\dots,x_n(t),\dots,x_n^{(m)}(t)\right)dt\,. \qquad (1.39)$$

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи опирается на использование необходимого условия экстремума функционала: $\delta J=0$. Поскольку функционал зависит от n переменных $x_i(t)$, то будем варьировать лишь одну из них $x_k(t)$, оставляя неизменными все остальные. Тогда функционал зависит от одной функции, и применение необходимого условия экстремума приводит к уравнению Эйлера - Пуассона (см. разд. 1.4):

$$F_{x_k}-\frac{d}{dt}F_{x_k'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x_k''}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}F_{x_k^{(m)}}=0\,.$$

Так как в качестве функции $x_k(t)$ может быть взята любая из $x_1(t),\dots,x_n(t)$, то вектор-функция $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)\right)^T$ должна удовлетворять системе *уравнений Эйлера - Пуассона:*

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x_i''}+\dots+(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}F_{x_i^{(m)}}=0\,,\ i=1,\dots,n\,. \qquad (1.40)$$

Общее решение этой системы зависит от $2mn$ произвольных постоянных $x_i(t)=x_i(t,C_1,\dots,C_{2mn})$, $i=1,\dots,n$, которые определяются из $2mn$ граничных условий.

Сформулируем описанный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (1.39))

Если на вектор–функции $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right)^T$*, где* $x_i^*(t)\in C^m\left([t_0,T]\right)$, $x_i(t_0)=x_0$, $x_i^{(k)}(t_0)=x_{i0}^{(k)}$, $i=1,...,n$, $k=1,...,m-1$, $x_i(t_1)=x_1$, $x_i^{(k)}(t_1)=x_{i1}^{(k)}$, $i=1,...,n$, $k=1,...,m-1$, *функционал* (1.38) *достигает экстремума, то функции* $x_1^*(t),...,x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера - Пуассона (1.40).*

Заметим, что порядки старших производных функций $x_1(t),...,x_n(t)$ в задаче (1.39) могут быть различны. Это приводит к различным порядкам уравнений в системе (1.40). Количество заданных граничных условий для каждой функции соответствует порядку ее старшей производной в подынтегральном выражении функционала (1.38).

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (1.39)

1. Записать систему уравнений Эйлера - Пуассона (1.40).
2. Найти общее решение системы (1.40): $x_i(t)=x_i(t,C_1,...,C_{2mn})$, $i=1,...,n$.
3. Определить постоянные $C_1,...,C_{2mn}$ из граничных условий и записать выражения для экстремали $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right)^T$.

Пример 1.45

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)]=\int_0^1\left[(t+1)^3x_1''^2(t)+x_2'''^2(t)\right]dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_1(1)=\frac{1}{2},\ x_2(1)=1,$$

$$x_1'(0)=-1,\ x_2'(0)=0,\ x_1'(1)=-\frac{1}{4},\ x_2'(1)=3,\ x_2''(0)=0,\ x_2''(1)=6.$$

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера - Пуассона. Учтем, что порядок старшей производной функции $x_1(t)$ равен двум, а функции $x_2(t)$ – трем. Так как

$$F=(t+1)^3 x_1''^2(t)+x_2'''^2(t)\,,\quad F_{x_1}=0\,,\quad F_{x_1'}=0\,,\quad F_{x_1''}=2(t+1)^3 x_1''\,,$$

$$F_{x_2}=0\,,\quad F_{x_2'}=0\,,\quad F_{x_2''}=0\,,\quad F_{x_2'''}=2x_2'''\,,$$

$$\frac{d}{dt}F_{x_1'}=0\,,\quad \frac{d}{dt}F_{x_2'}=0\,,\quad \frac{d}{dt}F_{x_1''}=6(t+1)^2 x_1''+2(t+1)^3 x_1'''\,,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}F_{x_1''}=12(t+1)x_1''+12(t+1)^2 x_1'''+2(t+1)^3 x_1^{(4)}\,,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}F_{x_2''}=0\,,\quad \frac{d^3}{dt^3}F_{x_2'''}=2x_2^{(6)}\,,$$

то получаем

$$F_{x_1}-\frac{d}{dt}F_{x_1'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x_1''}=2(t+1)^3 x_1^{(4)}+12(t+1)^2 x_1'''+12(t+1)\,x_1''=0\,,$$

$$F_{x_2}-\frac{d}{dt}F_{x_2'}+\frac{d^2}{dt^2}F_{x_2''}-\frac{d^3}{dt^3}F_{x_2'''}=-2x_2^{(6)}=0\,.$$

2. Решим систему уравнений Эйлера - Пуассона:

$$x_2^{(6)}(t)=0\,,\quad x_2^{(5)}(t)=\overline{C}_1\,,\quad x_2^{(4)}(t)=\overline{C}_1 t+\overline{C}_2\,,\quad x_2'''(t)=\frac{\overline{C}_1}{2}t^2+\overline{C}_2 t+\overline{C}_3\,,$$

$$x_2''(t)=\frac{\overline{C}_1}{6}t^3+\frac{\overline{C}_2}{2}t^2+\overline{C}_3 t+\overline{C}_4\,,\quad x_2'(t)=\frac{\overline{C}_1}{24}t^4+\frac{\overline{C}_2}{6}t^3+\frac{\overline{C}_3}{2}t^2+\overline{C}_4 t+\overline{C}_5\,,$$

$$x_2(t)=\frac{\overline{C}_1}{120}t^5+\frac{\overline{C}_2}{24}t^4+\frac{\overline{C}_3}{6}t^3+\frac{\overline{C}_4}{2}t^2+\overline{C}_5 t+\overline{C}_6\,.$$

Решаем уравнение $2(t+1)^3 x_1^{(4)}+12(t+1)^2 x_1'''+12(t+1)^2 x_1''=0$. Заметим, что оно имеет вид $\dfrac{d^2}{dt^2}F_{x_1''}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d}{dt}F_{x_1''}\right)=0$ и поэтому может быть переписано в форме

$$\frac{d}{dt}\Big(6(t+1)^2 x_1''+2(t+1)^3 x_1'''\Big)=0\,.$$

Отсюда $6(t+1)^2 x_1''+2(t+1)^3 x_1'''=C_1$. Обозначим $y=x_1''$. Тогда имеем

$$6(t+1)^2 y+2(t+1)^3 y'=C_1 \quad \text{или} \quad (t+1)^3 y'+3(t+1)^2 y=\frac{C_1}{2}\,.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Поэтому сначала решаем соответствующее однородное уравнение:

$$(t+1)^3 y'+3(t+1)^2 y=0\,.$$

Очевидно, оно является уравнением с разделяющимися переменными [14]:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{t+1}dt\,.$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем

$$\ln|y| = -3\ln|t+1| + \ln C \quad \text{или} \quad y_0(t) = \frac{C}{(t+1)^3}\,.$$

Найдем общее решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной [14]:

$$y(t) = \frac{C(t)}{(t+1)^3}, \quad y'(t) = \frac{C'(t)}{(t+1)^3} - \frac{3C(t)\cdot(t+1)^2}{(t+1)^6}\,.$$

Подстановка y и y' в неоднородное уравнение $(t+1)^3 y' + +3(t+1)^2 y = \frac{C_1}{2}$ дает

$$C'(t) - \frac{3C(t)}{(t+1)} + \frac{3C(t)}{(t+1)} = \frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad C'(t) = \frac{C_1}{2}\,.$$

Интегрируя, получаем $C(t) = \frac{C_1}{2}t + C_2$. Отсюда

$$y(t) = \left(\frac{C_1}{2}t + C_2\right)\frac{1}{(t+1)^3}\,.$$

Переходим к переменной x_1. Имеем $x_1''(t) = \left(\frac{C_1}{2}t + C_2\right)\frac{1}{(t+1)^3} = = \frac{C_1 t + 2C_2}{2(t+1)^3}$. Отсюда $x_1'(t) = -\frac{C_1(2t+1)}{4(t+1)^2} - \frac{C_2}{2(t+1)^2} + C_3$ и

$$x_1(t) = -\frac{C_1}{4}\left(\frac{1}{t+1} + 2\ln|t+1|\right) + \frac{C_2}{2(t+1)} + C_3 t + C_4\,.$$

3. Определим постоянные интегрирования из граничных условий:

$$x_2''(0) = \overline{C}_4 = 0, \quad x_2'(0) = \overline{C}_5 = 0, \quad x_2(0) = \overline{C}_6 = 0,$$

$$x_2''(1) = \frac{\overline{C}_1}{6} + \frac{\overline{C}_2}{2} + \overline{C}_3 = 6, \quad x_2'(1) = \frac{\overline{C}_1}{24} + \frac{\overline{C}_2}{6} + \frac{\overline{C}_3}{2} = 3,$$

$$x_2(1) = \frac{\overline{C}_1}{120} + \frac{\overline{C}_2}{24} + \frac{\overline{C}_3}{6} = 1,$$

отсюда $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = \overline{C}_4 = \overline{C}_5 = \overline{C}_6 = 0$, $\overline{C}_3 = 6$.

Находим постоянные интегрирования $C_1,\ldots,C_4$ из условий:

$$x_1'(0) = -\frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{2} + C_3 = -1, \quad x_1(0) = -\frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{2} + C_4 = 1.$$

$$x_1'(1) = -\frac{3C_1}{16} - \frac{C_2}{8} + C_3 = -\frac{1}{4}, \; x_1(1) = -\frac{C_1}{4}\left(\frac{1}{2} + 2\ln 2\right) + \frac{C_2}{4} + C_3 + C_4 = \frac{1}{2}.$$

Имеем $C_1 = 0$, $C_2 = 2$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Запишем уравнение экстремали $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t)\right)^T$, где $x_1^*(t) = \dfrac{1}{t+1}$, $x_2^*(t) = t^3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить значения функционала $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt$ на кривых $x_1(t) = t$, $x_2(t) = e^t$.

   Ответ: $J_1 = \dfrac{1}{3}$, $J_2 = \dfrac{1}{2}(e^2 - 1)$.

2. Найти расстояние между функциями $x(t) = t^2$, $x^*(t) = t$ в пространстве $C^0\left([0,1]\right)$.

   Ответ: $\| x - x^* \|_0 = \dfrac{1}{4}$.

3. Найти расстояние между функциями $x(t) = t$, $x^*(t) = \ln t$ в пространстве $C^1\left(\left[\dfrac{1}{e} - e\right]\right)$.

   Ответ: $\| x - x^* \|_1 = 2(e-1)$.

4. Пользуясь определением, доказать, что на кривой $x^*(t) = t^3 - t^2$ функционал $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^1 x''^2(t)\,dt$, $x(0) = x'(0) = x(1) = 0$, $x'(1) = 1$, достигает глобального минимума.

5. Найти первую вариацию функционала

$$J\left[x(t)\right]=\int_0^1\left[x^2(t)+x'^2(t)\right]dt,\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$$

Ответ: $\delta J=\int_0^1\left[2x(t)-2x''(t)\right]\delta x(t)\,dt$.

6. Найти первую вариацию функционала

$$J\left[x(t)\right]=\int_{-1}^0\left[12\,t\,x(t)-x'^2(t)\right]dt,\quad x(-1)=1,\quad x(0)=0.$$

Ответ: $\delta J=\int_{-1}^0\left[12t+2x''(t)\right]\delta x(t)\,dt$.

7. Найти первую вариацию функционала

$$J\left[x(t)\right]=\int_0^{\pi/2}\left[x'^2(t)-x^2(t)\right]dt,\quad x(0)=1,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Ответ: $\delta J=\int_0^{\pi/2}\left[-2x(t)-2x''(t)\right]\delta x(t)\,dt$.

В задачах 8 - 27 найти экстремали функционалов, зависящих от одной функции.

8. $J\left[x(t)\right]=\int_0^1 x'^2(t)\,dt,\quad x(0)=0,\quad x(1)=1.$

Ответ: $x^*(t)=t$.

9. $J\left[x(t)\right]=\int_0^1\left[t\,x'(t)-x'^2(t)\right]dt.\quad x(0)=1,\quad x(1)=1/4.$

Ответ: $x^*(t)=\dfrac{t^2}{4}-t+1$.

10. $J\left[x(t)\right]=\int_{-1}^2\dfrac{\sqrt{1+x'^2(t)}}{x(t)}dt.\quad x(-1)=1,\quad x(2)=4.$

Ответ: $x^*(t)=\sqrt{8+6t-t^2}$.

11. $J\left[x(t)\right]=\int_0^{3\pi/2}\left[x^2(t)-2x'^2(t)\right]e^{-t}dt,\quad x(0)=0,\quad x\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}.$

Ответ: $x^*(t)=\sqrt{2}\,e^{t/2}\sin\dfrac{t}{2}$.

12. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_1^2\Big[t^2x'^2(t)+12x^2(t)\Big]dt$, $x(1)=1$, $x(2)=8$.

Ответ: $x^*(t)=t^3$.

13. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_4^8 (t-4x)^2\,dt$, $x(4)=1$, $x(8)=2$.

Ответ: $x^*(t)=\dfrac{t}{4}$.

14. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_2^4\Big[t\,x'^4(t)-2x(t)\,x'^3(t)\Big]dt$, $x(2)=1$, $x(4)=5$.

Ответ: $x^*(t)=2t-3$.

15. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_0^2\Big[t\,x'^3(t)-3x(t)\,x'^2(t)\Big]dt$, $x(0)=4$, $x(2)=6$.

Ответ: $x^*(t)=t+4$.

16. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_0^1\Big[x'^2(t)+4x^2(t)+2x(t)e^{2t}\Big]dt$,

$x(0)=0$, $x(1)=0$.

Ответ: $x^*(t)=\dfrac{e^4}{4(1-e^4)}\cdot(e^{2t}-e^{-2t})+\dfrac{1}{4}t\,e^{2t}$.

17. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_0^{\pi/6}\Big[x'^2(t)-9x^2(t)+12x(t)\cos 3t\Big]dt$,

$x(0)=-1$, $x\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1+\dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $x^*(t)=(1+t)\sin 3t-\cos 3t$.

18. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_0^1\Big[x'^2(t)+3x(t)\,x'(t)+24t^2x(t)\Big]dt$,

$x(0)=1\,,\quad x(1)=0\,.$

Ответ: $x^*(t)=t^4-2t+1\,.$

19. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^1\left[3x'^{\,2}(t)+5\,x(t)\,x'(t)+12\,x^2(t)\right]dt\,,$

$x(0)=0\,,\quad x(1)=\dfrac{e^4-1}{e^2}\,.$

Ответ: $x^*(t)=2\,\mathrm{sh}2t\,.$

20. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_2^7\left[\cos t+3t^2x(t)+\left(t^3-x^2(t)\right)x'(t)\right]dt\,,$

$x(2)=3\,,\quad x(7)=0\,.$

Ответ: вариационная задача не имеет смысла.

21. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_1^2\left[x^2(t)\,t^2-x(t)+t\,x^2(t)\,x'(t)\right]dt\,,$

$x(1)=0\,,\quad x(2)=\sqrt{3}\,.$

Ответ: $x^{*2}(t)-t^2=-1\,.$

22. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^3\dfrac{x'(t)}{\sqrt{1+x'^{\,2}(t)}}dt\,,\quad x(0)=1\,,\quad x(3)=4\,.$

Ответ: $x^*(t)=t+1\,.$

23. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_1^5\dfrac{2x'^{\,3}(t)+x'^{\,2}(t)}{x'^{\,4}(t)+2}dt\,,\quad x(1)=2\,,\quad x(5)=14\,.$

Ответ: $x^*(t)=3t-1\,.$

24. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_1^2\dfrac{\sqrt{1+x'^{\,2}(t)}}{x'^{\,3}(t)}dt\,,\quad x(1)=-3\,,\quad x(2)=-8\,.$

Ответ: $x^*(t)=2-5t\,.$

25. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^1\left[6\,t^2x'(t)+x'^{\,2}(t)\right]dt\,,\quad x(0)=0\,,\quad x(1)=-1\,.$

Ответ: $x^*(t)=-t^3\,.$

26. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_1^2\dfrac{t^2x'^{\,2}(t)}{2t^3+1}dt\,,\quad x(1)=0\,,\quad x(2)=\dfrac{7}{2}\,.$

Ответ: $x^*(t) = t^2 - \dfrac{1}{t}$.

27. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_2^3 \dfrac{\sqrt{1 + x'^{\,2}(t)}}{x(t)}\,dt$, $\quad x(2) = 2$, $\quad x(3) = \sqrt{3}$.

Ответ: $x^{*\,2}(t) + (t-2)^2 = 4$.

В задачах 28 - 33 исследовать функционалы на экстремум с помощью необходимых и достаточных условий.

28. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^2 \left[t\,x'(t) + x'^{\,2}(t)\right]dt$, $\quad x(0) = 1$, $\quad x(2) = 0$.

Ответ: сильный минимум на кривой $x^*(t) = -\dfrac{t^2}{4} + 1$.

29. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^{\pi/4} \left[4x^2(t) - x'^{\,2}(t) + 8\,x(t)\right]dt$,

$x(0) = -1$, $\quad x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Ответ: сильный максимум на кривой $x^*(t) = \sin 2t - 1$.

30. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^2 \dfrac{1}{x'(t)}\,dt$, $\quad x(0) = 0$, $\quad x(2) = 1$.

Ответ: сильный минимум на кривой $x^*(t) = \dfrac{t}{2}$.

31. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^2 \left[6x'^{\,2}(t) - x'^{\,4}(t) + x(t)\,x'(t)\right]dt$,

$x(0) = 0$, $\quad x(2) = 3$.

Ответ: слабый максимум на кривой $x^*(t) = \dfrac{3}{2}t$.

32. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_1^2 \left[t^2 x'^{\,2}(t) + 12\,x^2(t)\right]dt$, $\quad x(1) = 1$, $\quad x(2) = 8$.

Ответ: сильный минимум на кривой $x^*(t) = t^3$.

33. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_1^2\left[t\,x'^4(t)-2x(t)\,x'^3(t)\right]dt\,,\quad x(1)=0\,,\quad x(2)=1\,.$

Ответ: слабый минимум на кривой $x^*(t)=t-1$.

В задачах 34 - 38 найти экстремали функционалов, зависящих от нескольких функций:

34. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^3\sqrt{1+x_1'^2(t)+x_2'^2(t)}\;dt\,,$

$x_1(0)=1\,,\quad x_2(0)=-2\,,\quad x_1(3)=7\,,\quad x_2(3)=1\,.$

Ответ: $x_1^*(t)=2t+1\,,\quad x_2^*(t)=t-2\,.$

35. $J\left[x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right]=\int\limits_2^4\sqrt{1+x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+x_3'^2(t)}\;dt\,,$

$x_1(2)=1\,,\quad x_2(2)=2\,,\quad x_3(2)=5\,,$

$x_1(4)=3\,,\quad x_2(4)=4\,,\quad x_3(4)=9\,.$

Ответ: $x_1^*(t)=t-1\,,\quad x_2^*(t)=t\,,\quad x_3^*(t)=2t+1\,.$

36. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^{\pi/2}\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)-2x_1(t)x_2(t)\right]dt\,,$

$x_1(0)=x_2(0)=0\,,\qquad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,.$

Ответ: $x_1^*(t)=\sin t\,,\quad x_2^*(t)=\sin t\,.$

37. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\left[x_1'(t)\,x_2'(t)+6t\,x_1(t)+12t^2x_2(t)\right]dt\,,$

$x_1(0)=x_2(0)=0\,,\qquad x_1(1)=x_2(1)=1\,.$

Ответ: $x_1^*(t)=t^4\,,\quad x_2^*(t)=t^3\,.$

38. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+2x_1(t)\right]dt\,,$

$x_1(0)=x_2(0)=1\,,\qquad x_1(1)=\frac{3}{2}\,,\qquad x_2(1)=1\,.$

Ответ: $x_1^*(t)=\frac{1}{2}t^2+1\,,\quad x_2^*(t)=1\,.$

В задачах 39 - 44 найти семейства экстремалей функционалов.

39. $$J\left[x_1(t), x_2(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}\Big[x_1'^{\,2}(t)-x_2'^{\,2}(t)-2x_1^2(t)+$$
$$+2x_1(t)x_2(t)-2x_2(t)e^t\Big]dt\,.$$

Ответ: $x_2(t)=(C_1+C_2t)\sin t+(C_3+C_4t)\cos t+\dfrac{3}{4}e^t$,

$x_1(t)=e^t-x_2''(t)$.

40. $$J\left[x_1(t)x_2(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}\Big[x_2'^{\,2}(t)-x_1'^{\,2}(t)-2x_2^2(t)+$$
$$+2x_1(t)x_2(t)-2x_1(t)t^2\Big]dt\,.$$

Ответ: $x_1(t)=(C_1+C_2t)\sin t+(C_3+C_4t)\cos t+2t^2-6$,

$x_2(t)=t^2-x_1''(t)$.

41. $$J\left[x_1(t), x_2(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}\Big[x_1'^{\,2}(t)+x_2'^{\,2}(t)+8x_1(t)x_2(t)-2x_1(t)e^t\Big]dt\,.$$

Ответ: $x_2(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+C_3\sin 2t+C_4\cos 2t+\dfrac{4}{15}e^t$,

$x_1(t)=\dfrac{x_2''(t)}{4}$.

42. $$J\left[x_1(t), x_2(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}\Big[x_1'^{\,2}(t)+x_2'^{\,2}(t)+2x_1(t)x_2(t)-2t\,x_2(t)\Big]dt\,.$$

Ответ: $x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\sin t+C_4\cos t+t$,

$x_2(t)=x_1''(t)$.

43. $$J\left[x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}\Big[2x_1(t)x_2(t)+12t\,x_3(t)+$$
$$+x_1'^{\,2}(t)+x_2'^{\,2}(t)+x_3'^{\,2}(t)\Big]dt\,.$$

Ответ: $x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\sin t+C_4\cos t$,

$x_2(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\sin t-C_4\cos t$,

$$x_3(t) = t^3 + C_5 t + C_6 .$$

44. $J\left[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\right] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[x_1'^{\,2} + x_2'^{\,2} + x_3'^{\,2} - x_4'^{\,2} +$

$$+ x_2^2(t) - 2x_3^2(t) + 2\,x_3(t)x_4(t) \Big] dt .$$

Ответ: $x_1(t) = C_1 t + C_2$,

$$x_2(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}$$

$$x_3(t) = (C_5 - C_6 t + 2C_8)\sin t + (C_7 + C_8 t + 2C_6)\cos t ,$$

$$x_4(t) = (C_5 + C_6 t)\,\sin t + (C_7 + C_8 t)\cos t .$$

В задачах 45 – 51 найти экстремали функционалов, зависящих от производных высшего порядка одной функции.

45. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^1 \left[3x(t)\,x'(t) + x''^{\,2}(t) \right] dt ,$

$$x(0) = x'(0) = 0 , \quad x(1) = 2 , \; x'(1) = 5 .$$

Ответ: $x^*(t) = t^3 + t^2$.

46. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^1 \left[48\,x(t) - x''^{\,2}(t) \right] dt ,$

$$x(0) = x'(0) = 0 , \quad x(1) = 1 , \; x'(1) = 4 .$$

Ответ: $x^*(t) = t^4$.

47. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[x''^{\,2}(t) - x'^{\,2}(t) \right] dt ,$

$$x(0) = x'(0) = 1 , \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Ответ: $x^*(t) = t + \cos t$.

48. $J\left[x(t)\right] = \int\limits_0^1 e^{-t}\, x''^{\,2}(t)\, dt,$

$$x(0) = 0 , \; x'(0) = 1 , \quad x(1) = e , \; x'(1) = 2e .$$

Ответ: $x^*(t) = t\,e^t$.

49. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^1 x'''^2(t)\,dt$,

$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x(1)=1$, $x'(1)=4$, $x''(1)=12$.

Ответ: $x^*(t)=t^4$.

50. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^\pi \left[x'''^2(t)-x''^2(t)\right]dt$,

$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$, $x(\pi)=\pi$, $x'(\pi)=2$, $x''(\pi)=0$.

Ответ: $x^*(t)=t-\sin t$.

51. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^1 \left[1+t^2+2x'''^2(t)\right]dt$,

$x(0)=1$, $x(1)=2$, $x'(0)=0$, $x'(1)=6$, $x''(0)=-2$, $x''(1)=22$.

Ответ: $x^*(t)=2t^4-t^2+1$.

В задачах 52 –54 найти семейство экстремалей функционалов.

52. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[x'''^2(t)+240t\,x(t)\right]dt$.

Ответ: $x(t)=\dfrac{1}{42}t^7+C_1t^5+C_2t^4+C_3t^3+C_4t^2+C_5t+C_6$,

53. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\left(x^{(4)}(t)\right)^2+4x(t)\sin t\right]dt$.

Ответ: $x(t)=-2\sin t+C_1t^7+C_2t^6+C_3t^5+C_4t^4+C_5t^3+$
$+C_6t^2+C_7t+C_8$.

54. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[x''^2(t)-2x'^2(t)+x^2(t)+3x(t)e^t\right]dt$.

Ответ: $x(t)=(C_1t+C_2)\sin t+(C_3t+C_4)\cos t-\dfrac{3}{8}e^t$.

Глава 2

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА БЕЗУСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

2.1. Функционалы, зависящие от одной функции. Случай гладких экстремалей

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых одномерных функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям (рис. 2.1):

а) функции $x(t)$ непрерывно дифференцируемые, т.е. $x(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются значения t_0 и t_1, которые заранее не заданы;

б) значения t_0, $x_0 = x(t_0)$ и t_1, $x_1 = x(t_1)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям:

$$\psi(t_0, x_0) = 0, \quad \varphi(t_1, x_1) = 0, \tag{2.1}$$

где $\psi(t,x)$, $\varphi(t,x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве M задан функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x(t), x'(t)\big)\,dt, \tag{2.2}$$

где функция $F(t,x,x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (2.2) достигает экстремума, т.е.

$$J[x^*(t)] = \underset{x(t)\in M}{\operatorname{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x(t), x'(t)\big)\,dt. \tag{2.3}$$

Замечание 1. Условия (2.1) определяют подвижные границы (рис.2.1). Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется в классе гладких кривых, концы которых скользят по двум заданным линиям.

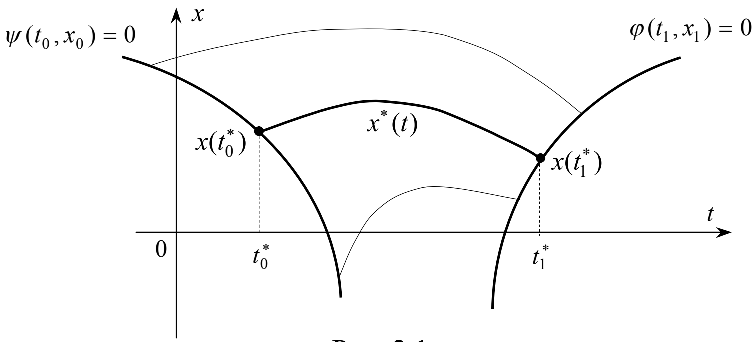


Рис. 2.1

Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи.

Случай 1. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемым уравнениями $t = t_0$, и $t = t_1$, (рис. 2.2).

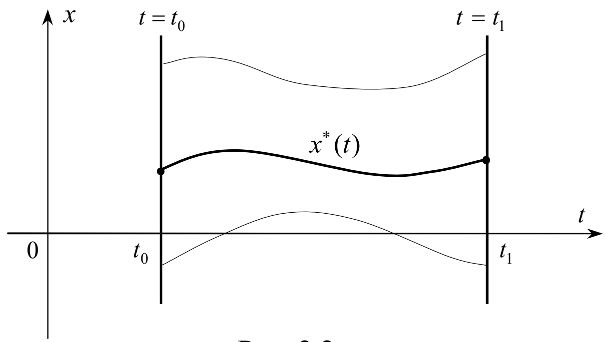


Рис. 2.2

Случай 2. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемым уравнениями

$$x = \psi(t), \qquad x = \varphi(t). \tag{2.4}$$

Рис. 2.2 аналогичен рис. 2.1.

В рамках рассматриваемого частного случая выделим задачу, в которой данные кривые $\psi(t, x)$, $\varphi(t, x)$ являются прямыми линиями, параллельными оси абсцисс: $x = x_0$, и $x = x_1$ (рис. 2.3).

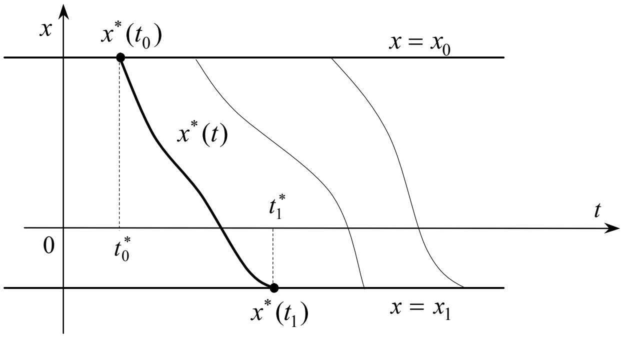


Рис. 2.3

Замечание 2. В поставленной задаче наряду с поиском кривой $x^*(t)$ производится выбор значений t_0^* и t_1^* (рис. 2.1 и рис. 2.3), т.е. ищется тройка $\left(x^*(t), t_0^*, t_1^*\right)$. При этом ее ε-окрестность первого порядка ($\varepsilon > 0$) образуется тройками $\left(x(t), t_0, t_1\right)$, удовлетворяющими условию

$$\| x(t) - x^*(t) \|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon\ , \quad | t_0 - t_0^* | < \varepsilon\ , \quad | t_1 - t_1^* | < \varepsilon\ .$$

Функционал (2.2) точнее записывается в форме

$$J[x(t), t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) dt\ .$$

Функционал достигает на тройке $(x^*(t), t_0^*, t_1^*)$ слабого минимума, если $J[x(t), t_0, t_1] \ge J[x^*(t), t_0^*, t_1^*]$ в ε-окрестности первого порядка.

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи (2.3) строится на использовании необходимого условия экстремума функционала: $\delta J = 0$.

Пусть на тройке $(x^*(t), t_0^*, t_1^*)$ функционал (2.2) достигает экстремума. Тогда допустимые кривые определяются соотношениями

$$x(t) = x^*(t) + \alpha\, \delta x(t)\ , \qquad x'(t) = x^{*\prime}(t) + \alpha\, \delta x'(t)\ ,$$

где α – числовой параметр, $\delta x(t)$ – фиксированная вариация, а допустимые значения пределов интегрирования – формулами $t_0 = t_0^* + \alpha\, \delta t_0$, $t_1 = t_1^* + \alpha\, \delta t_1$.

Найдем первую вариацию функционала. Для этого воспользуемся определением:

$$\delta J = \frac{d}{d\alpha} \int\limits_{t_0^*+\alpha\cdot\delta t_0}^{t_1^*+\alpha\cdot\delta t_1} F\Big(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t) \Big) dt \Bigg|_{\alpha=0} .$$

Воспользуемся формулой дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{d}{d\alpha} \int\limits_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(t,\alpha)dt = \int\limits_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha} dt + f(v(\alpha),\alpha)\frac{dv}{d\alpha} - f(u(\alpha),\alpha)\frac{du}{d\alpha} .$$

Тогда получаем

$$\delta J = \left\{ \int\limits_{t_0^*+\alpha\cdot\delta t_0}^{t_1^*+\alpha\cdot\delta t_1} \left[\frac{\partial F(t, x^*(t) + \alpha\cdot\delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\cdot\delta x'(t))}{\partial x} \delta x(t) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F(t, x^*(t) + \alpha\cdot\delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\cdot\delta x'(t))}{\partial x'} \delta x'(t) \right] dt +$$

$$+ F(t, x^*(t) + \alpha\cdot\delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\cdot\delta x'(t))\Big|_{t=t_1^*+\alpha\cdot\delta t_1} \delta t_1 -$$

$$\left. - F(t, x^*(t) + \alpha\cdot\delta x(t),\, x^{*\prime}(t) + \alpha\cdot\delta x'(t))\Big|_{t=t_0^*+\alpha\cdot\delta t_0} \delta t_0 \right\}\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \big[F_x\,\delta x(t) + F_{x'}\delta x'(t) \big] dt + F\big(t_1^*,\, x^*(t_1^*),\, x^{*\prime}(t_1^*)\big)\delta t_1 -$$

$$- F\big(t_0^*, x^*(t_0^*), x^{*\prime}(t_0^*)\big)\delta t_0 .$$

Вычислив второе слагаемое под интегралом по частям (см. разд. 1.2), запишем необходимое условие экстремума в виде

$$\delta J = \int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t) dt + F_{x'}\,\delta x(t)\Big|_{t_0^*}^{t_1^*} +$$

$$+ F\big|_{t=t_1^*} \cdot \delta t_1 - F\big|_{t=t_0^*} \cdot \delta t_0 = 0 . \qquad (2.5)$$

Из выражения (2.5) видно, что вариация функционала δJ состоит из интегральной части, которая определяется вариацией кривой $\delta x(t)$ при фиксированных значениях t_0^* и t_1^* и трех слагаемых, зависящих от вариаций δt_0, δt_1 концов интервала интегрирования и вариаций $\delta x(t)$ концов экстремали при $t = t_0^*$, $t = t_1^*$ (рис. 2.4).

Из условия $\delta J = 0$ следуют два равенства:

1. $\int\limits_{t_0^*}^{t_1^*} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt = 0$,

т.е. экстремаль $x^*(t)$ в задаче (2.3) должна быть решением уравнения Эйлера $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$ (см. разд. 1.2).

2. $F_{x'}\, \delta x(t) \Big|_{t_0^*}^{t_1^*} + F\,|_{t=t_1^*}\, \delta t_1 - F\,|_{t=t_0^*}\, \delta t_0 = 0$. (2.6)

Заметим, что $\delta x(t)\,|_{t=t_1^*}$ не совпадает с δx_1, а $\delta x(t)\,|_{t=t_0^*}$ не совпадает с δx_0 (рис.2.4).

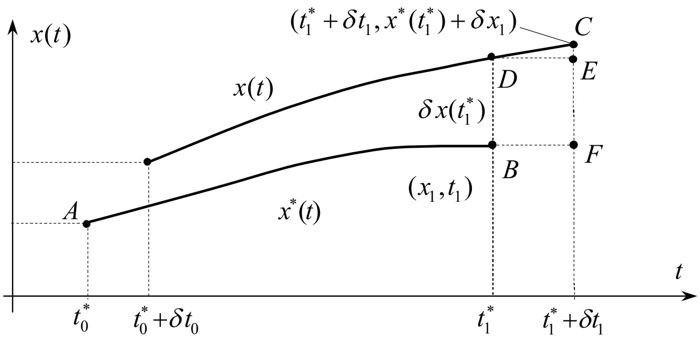


Рис. 2.4

На рис. 2.4 $BD = \delta x(t)\,|_{t=t_1^*}$, $FC = \delta x_1$, $DE = \delta t_1$, $EC \cong x'(t_1^*)\,\delta t_1$, $BD = FC - EC$, т.е.

$$\delta x(t)\,|_{t=t_1^*} \cong \delta x_1 - x'(t_1^*)\,\delta t_1 . \tag{2.7}$$

Заметим, что приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Аналогично $\delta x(t)\,|_{t=t_0^*} = \delta x_0 - x'(t_0^*) \cdot \delta t_0$.

Поэтому равенство (2.6) можно переписать в форме

$$F_{x'}\Big|_{t=t_1^*} \delta x_1 + \left[F - x' F_{x'} \right]\Big|_{t=t_1^*} \delta t_1 - F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} \delta x_0 -$$

$$- \left[F - x' F_{x'} \right]\Big|_{t=t_0^*} \delta t_0 = 0 . \tag{2.8}$$

Заметим, что с учетом замены (2.6) на (2.8) вариация функционала и соответствующее необходимое условие экстремума (2.5) записываются в форме

$$\delta J = \int_{t_0^*}^{t_1^*} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt + F_{x'}\Big|_{t=t_1^*} \delta x_T + \left[F - x' F_{x'} \right]\Big|_{t=t_1^*} \delta t_1 -$$

$$- F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} \delta x_0 - \left[F - x' F_{x'} \right]\Big|_{t=t_0^*} \delta t_0 = 0 . \qquad (2.9)$$

В силу наличия граничных условий (2.1) вариации δx_1 и δt_1, а также δx_0 и δt_0 связаны:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial t}\Bigg|_{t_0^*, x^*(t_0^*)} \delta t_0 + \frac{\partial \psi}{\partial x}\Bigg|_{t_0^*, x^*(t_0^*)} \delta x_0 = 0 , \\ \delta\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Bigg|_{t_1^*, x^*(t_1^*)} \delta t_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Bigg|_{t_1^*, x^*(t_1^*)} \delta x_1 = 0 . \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Однако вариации δx_1, δt_1 не связаны с вариациями δx_0, δt_0. Поэтому равенство (2.8) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} F_{x'}\Big|_{t=t_1^*} \delta x_1 + \left[F - x' F_{x'} \right]\Big|_{t=t_1^*} \delta t_1 = 0 , \\ F_{x'}\Big|_{t=t_0^*} \delta x_0 + \left[F - x' F_{x'} \right]\Big|_{t=t_0^*} \delta t_0 = 0 . \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Условия (2.10), (2.11) называются *условиями трансверсальности.*

Сформулируем описанные результаты в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума функционала в задаче (2.3)). *Если на функции* $x^*(t) \in C^1(\Delta)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $\psi(t_0, x_0) = 0$, $\varphi(t_1, x_1) = 0$, *функционал* (2.2) *достигает слабого экстремума, то она удовлетворяет*:

а) *уравнению Эйлера* $F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$;

б) *условиям трансверсальности* (2.10), (2.11).

Замечание 1. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для этого конца не выписываются, поскольку в этом случае соответствующие вариации в (2.10) и (2.11) равны нулю.

Замечание 2. Если рассматривается задача, в которой концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым $t = t_0$, $t = t_1$ (см. рис.2.2), то поскольку t_0 и t_1 заданы, то вариации $\delta t_0 = 0$, $\delta t_1 = 0$. Следовательно, условия трансверсальности имеют вид

$$F_{x'}\big|_{t=t_1^*} = 0, \quad F_{x'}\big|_{t=t_0^*} = 0. \tag{2.12}$$

Замечание 3. Если концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым $x = \psi(t)$ и $x = \varphi(t)$, то условия (2.1) можно записать в виде

$$\psi(t_0, x_0) = x_0 - \psi(t_0) = 0, \quad \varphi(t_1, x_1) = x_1 - \varphi(t_1) = 0.$$

Следовательно, из (2.10) получаем

$$-\psi'(t_0^*)\delta t_0 + 1\cdot\delta x_0 = 0,$$
$$-\varphi'(t_1^*)\delta t_1 + 1\cdot\delta x_1 = 0$$

или $\delta x_0 = \psi'(t_0^*)\cdot\delta t_0$, $\delta x_1 = \varphi'(t_1^*)\cdot\delta t_1$.

Тогда из (2.11) следует

$$\left[F + (\psi' - x')F_{x'}\right]\big|_{t=t_0^*}\delta t_0 = 0,$$
$$\left[F + (\varphi' - x')F_{x'}\right]\big|_{t=t_1^*}\delta t_1 = 0.$$

В силу произвольности вариаций δt_0 и δt_1 получаем условия трансверсальности для данного случая:

$$\begin{aligned}\left[F + (\psi' - x')F_{x'}\right]\big|_{t=t_0^*} &= 0,\\ \left[F + (\varphi' - x')F_{x'}\right]\big|_{t=t_1^*} &= 0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Если рассматривается случай задания кривых в виде

$$x = x_0 = \psi(t) = \text{const}, \quad x = x_1 = \varphi(t) = \text{const},$$

то $\psi'(t) \equiv 0$, $\varphi'(t) \equiv 0$, а условия (2.13) упрощаются:

$$\left[F - x'F_{x'}\right]\big|_{t=t_0^*} = 0, \quad \left[F - x'F_{x'}\right]\big|_{t=t_1^*} = 0. \tag{2.14}$$

Замечание 4. Если условия (2.1) отсутствуют, то вариации δx_0, δt_0, δx_1, δt_1 произвольны. Тогда из (2.11) следует

$$\begin{aligned}F_{x'}\big|_{t=t_0^*} = 0, &\quad \left[F - x'F_{x'}\right]\big|_{t=t_0^*} = 0,\\ F_{x'}\big|_{t=t_1^*} = 0, &\quad \left[F - x'F_{x'}\right]\big|_{t=t_1^*} = 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Замечание 5. Если условия (2.1) записаны в форме $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, т. е. рассматривается задача с неподвижными границами, то, поскольку вариации $\delta t_0=\delta t_1=\delta x_0=\delta x_1=0$, условия трансверсальности (2.11) выполняются, а произвольные постоянные в общем решении уравнения Эйлера определяются граничными условиями.

Алгоритм решения задачи (2.3)

1. Записать уравнение Эйлера (см. разд. 1.2)

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0 .$$

2. Найти общее решение уравнения Эйлера: $x(t)=x(t,C_1,C_2)$.

3. Записать условия трансверсальности (в зависимости от вида условий (2.1)) в форме (2.10), (2.11) или (2.12), или (2.13) и граничные условия (2.1).

4. Определить C_1, C_2, t_0^*, t_1^* и получить уравнение экстремали $x^*(t)$.

Пример 2.1

Найти кривую, на которой функционал

$$J[x(t)]=\int_0^2\left[2t\cdot x(t)+x(t)x'(t)+x'^{\,2}(t)\right]dt$$

может достигать экстремума, если левый конец ее фиксирован в точке $A(0,0)$, а правый лежит на прямой $t=t_1=2$ (рис. 2.5).

Решение.

1. Составим уравнение Эйлера. Так как

$$F=2tx+xx'+x'^{\,2},\quad F_x=2t+x',\quad F_{x'}=x+2x',\quad \frac{d}{dt}F_{x'}=x'+2x'',$$

то уравнение (1.16) имеет вид

$$2t+x'-x'-2x''=0 \quad \text{или} \quad x''=t .$$

2. Интегрируя, найдем общее решение уравнения Эйлера:

$$x'(t)=\frac{t^2}{2}+C_1,\quad x(t)=\frac{t^3}{6}+C_1t+C_2 .$$

3. Запишем условия трансверсальности (2.12) на правом конце и граничные условия на левом конце:

$$x(0)=0 ,$$

$$F_{x'}\,|_{t_1=2} = x + 2x'\,|_{\,t_1=2} = x(2) + 2x'(2) = 0\,.$$

4. Найдем постоянные C_1, C_2:

$$x(0) = C_2 = 0\,,$$

$$x(2) + 2x'(2) = \frac{8}{6} + 2C_1 + C_2 + 4 + 2C_1 = 0\,.$$

Отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = -\frac{4}{3}$. В результате получаем экстремаль (рис. 2.5): $x^*(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{4t}{3}$.

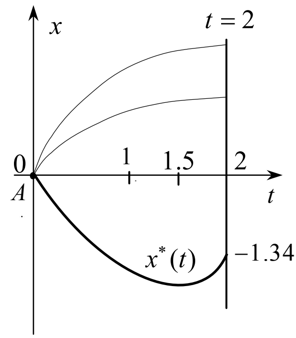


Рис. 2.5

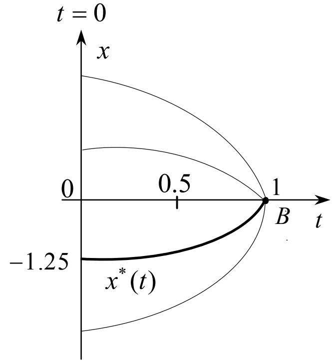


Рис. 2.6

Пример 2.2

Найти кривую, на которой функционал

$$J[x(t)] = \int_0^1 \left[x'^{\,2}(t) + x(t) \right] dt$$

может достигать экстремума, если правый конец ее фиксирован в точке $B(1,0)$, а левый лежит на прямой $t = 0$ (рис. 2.6).

Решение

1. Записываем уравнение Эйлера. Так как

$$F = x'^{\,2} + x\,,\quad F_x = 1\,,\quad F_{x'} = 2x'\,,\quad \frac{d}{dt}F_{x'} = 2x''\,,\ \text{то}\ \ 1 - 2x'' = 0\,.$$

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

$$x''(t) = \frac{1}{2}\,,\quad x'(t) = \frac{1}{2}t + C_1\,,\quad x(t) = \frac{1}{4}t^2 + C_1 t + C_2\,.$$

3. Записываем условие трансверсальности (2.12) на левом конце и граничное условие на правом конце:

$$F_{x'}\,|_{t_0=0} = 2x'(0) = 0\,, \quad x(1) = 0\,.$$

4. Найдем постоянные C_1, C_2:

$$x'(0) = C_1 = 0\,,$$

$$x(1) = \frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 0\,.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{4}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = \frac{1}{4}(t^2 - 1)$ (рис. 2.6).

Пример 2.3

Среди всех гладких кривых, соединяющих точку $A(0,0)$ с прямой $x = 1$, найти кривую, на которой функционал

$$J[x(t)] = \int_0^{t_1} \left[t \cdot x'(t) + x'^{\,2}(t) \right] dt$$

может достигать экстремума (рис. 2.7).

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Так как

$$F = t \cdot x' + x'^{\,2}, \quad F_x = 0\,, \quad F_{x'} = t + 2x'\,, \quad \frac{d}{dt} F_{x'} = 1 + 2x''\,,$$

то уравнение (1.16) имеет вид $-1 - 2x'' = 0$.

2. Найдем общее решение уравнения Эйлера:

$$x''(t) = -\frac{1}{2}, \quad x'(t) = -\frac{1}{2}t + C_1, \quad x(t) = -\frac{1}{4}t^2 + C_1 t + C_2\,.$$

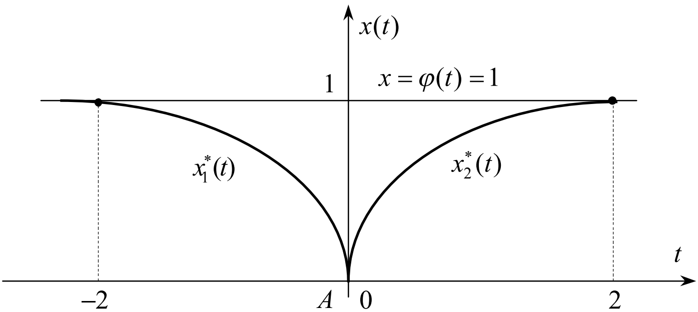


Рис. 2.7

3. Запишем условие трансверсальности (2.14) на правом конце (правый конец лежит на прямой $x = \varphi(t) = 1$) и граничные условия:

$$F - x'F_{x'}\,|_{t=t_1} = t\cdot x' + x'^2 - x'\cdot(t+2x')\,|_{t=t_1} = 0 \quad \text{или} \quad x'(t_1) = 0\,,$$

$$x(0) = 0\,,\quad x(t_1) = \varphi(t_1) = 1\,.$$

4. Найдем C_1, C_2, t_1^*:

$$x'(t_1) = -\frac{1}{2}t + C_1 = 0\,,\qquad x(0) = C_2 = 0\,,\qquad x(t_1) = -\frac{1}{4}t_1^2 + C_1 t_1 + C_2 = 1\,.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{2}t_1$, $C_2 = 0$, $\frac{1}{4}t_1^2 = 1$, или $t_1 = \pm 2$, $C_1 = \pm 1$, $C_2 = 0$. Таким образом, получены две экстремали (рис. 2.7):

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + t\,,\quad x_2^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 - t\,.$$

Пример 2.4

Найти кривую, на которой функционал

$$J[x(t)] = \int_0^{t_1} x'^3(t)\,dt$$

может достигать экстремума, если ее левый конец фиксирован в точке $A(0,0)$, а правый находится на прямой $x(t_1) = 1 - t_1$ (рис. 2.8).

Решение

1, 2. Так как подынтегральная функция $F = x'^3(t)$ не зависит от t и x, то уравнение Эйлера имеет общее решение (см. разд. 1.2): $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Поскольку правый конец лежит на кривой с уравнением $x = \varphi(t) = 1 - t$, запишем условие трансверсальности (2.13):

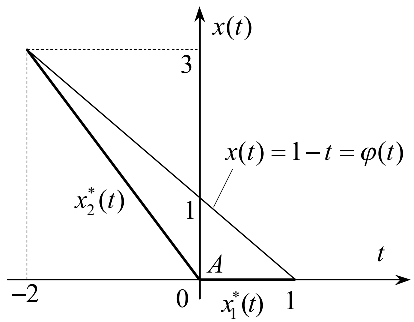


Рис. 2.8

$$F + (\varphi' - x')F_{x'}\,|_{t=t_1} =$$

$$= x'^3 - (1 + x')\cdot 3x'^2\,|_{t=t_1} =$$

$$= -x'^2\cdot(2x' + 3)\,|_{t=t_1} = 0$$

или $\quad x'(t_1) = 0\,,\quad x'(t_1) = -\dfrac{3}{2}$

и граничные условия:

$$x(0) = 0\,,\quad x(t_1) = 1 - t_1\,.$$

4. Найдем C_1, C_2, t_1^* из двух систем:

$$\begin{cases} x(0) = C_2 = 0, \\ x'(t_1) = C_1 = 0, \\ x(t_1) = C_1 t_1 + C_2 = 1 - t_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = C_2 = 0, \\ x'(t_1) = C_1 = -\dfrac{3}{2}, \\ x(t_1) = C_1 t_1 + C_2 = 1 - t_1. \end{cases}$$

Из первой системы находим $C_1 = C_2 = 0$, а из второй $C_1 = -\dfrac{3}{2}$, $C_2 = 0$, $t_1^* = -2$. В результате получены две экстремали: $x_1^*(t) \equiv 0$, $x_2^*(t) = -\dfrac{3}{2} t$ (рис. 2.8).

Пример 2.5

Найти кривую, на которой функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2(t)}\, dt$$

может достигать экстремума, если ее левый конец лежит на кривой $x(t) = \psi(t) = t^2 + 2$, а правый конец – на кривой $x(t) = \varphi(t) = t$.

Решение

1, 2. Так как подынтегральная функция $F = \sqrt{1 + x'^2(t)}$ не зависит явно от t и x, то уравнение Эйлера имеет общее решение (см. разд.1.2):

$$x(t) = C_1 t + C_2$$

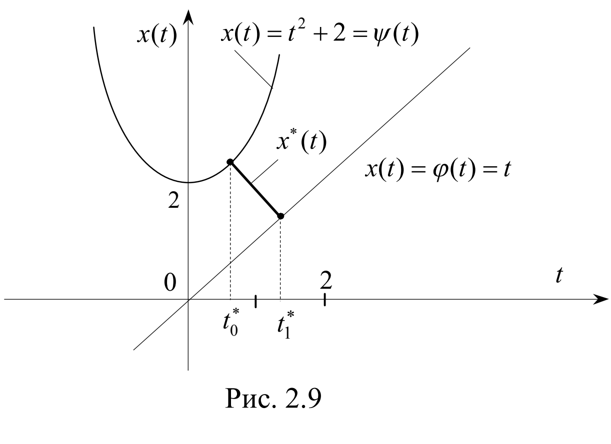


Рис. 2.9

3. Выпишем условия трансверсальности (2.13) и граничные условия:

$$F + (\psi' - x')F_{x'}\Big|_{t=t_0} = \sqrt{1+x'^2} + (2t - x')\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\Bigg|_{t=t_0} = 0,$$

$$F + (\varphi' - x')F_{x'}\Big|_{t=t_1} = \sqrt{1+x'^2} + (1 - x')\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\Bigg|_{t=t_1} = 0,$$

$$x(t_0) = C_1 t_0 + C_2 = \psi(t_0) = t_0^2 + 2,$$
$$x(t_1) = C_1 t_1 + C_2 = \psi(t_1) = t_1.$$

4. Найдем C_1, C_2, t_0^*, t_1^*, упростив систему, записанную в п.3:

$$1 + 2t_0 x'(t_0) = 1 + 2t_0 C_1 = 0, \quad C_1 t_0 + C_2 = t_0^2 + 2,$$
$$1 + x'(t_1) = 1 + C_1 = 0, \quad C_1 t_1 + C_2 = t_1.$$

Отсюда $C_1 = -1$, $t_0^* = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{11}{4}$, $t_1^* = \dfrac{11}{8}$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = -t + \dfrac{11}{4}$.

Геометрический смысл примера состоит в нахождении гладкой кривой минимальной длины, соединяющей две заданные кривые (рис. 2.9). Она определяется величиной функционала

$$J[x^*(t)] = \int_{1/2}^{11/8} \sqrt{1+(-1)^2}\, dt = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Пример 2.6

Найти кривую, на которой функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2(t)}\, dt$$

достигает экстремума, если ее левый конец скользит по окружности, описываемой уравнением $x^2 + t^2 = 1$, а правый конец скользит по окружности $x^2 + (t-10)^2 = 4$ (рис. 2.10).

Решение

1, 2. Так как подынтегральная функция $F = \sqrt{1+x'^2}$ не зависит от t и x, то уравнение Эйлера имеет общее решение: $x(t) = C_1 t + C_2$ (см. разд. 1.2).

3. Поскольку граничные условия имеют вид

$$\psi(t_0, x_0) = x_0^2 + t_0^2 - 1 = 0\,, \quad \varphi(t_1, x_1) = x_1^2 + (t_1 - 10)^2 - 4 = 0\,,$$

то запишем условия трансверсальности и граничные условия в форме (2.10), (2.11):

$$2t_0^*\,\delta t_0 + 2\,x_0\,\delta x_0 = 0\,,$$

$$2(t_1^* - 10)\;t_1 + 2x_1\,\delta x_1 = 0\,,$$

$$x_0^2 + t_0^{*2} - 1 = 0\,, \quad x_1^2 + (t_1^* - 10)^2 - 4 = 0\,,$$

$$\left.\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right|_{t=t_1^*}\delta x_1 + \left.\left[\sqrt{1+x'^2} - x'\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right]\right|_{t=t_1^*}\delta t_1 = 0\,,$$

$$\left.\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right|_{t=t_0^*}\delta x_0 + \left.\left[\sqrt{1+x'^2} - x'\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right]\right|_{t=t_0^*}\delta t_0 = 0$$

или $\quad t_0^*\,\delta t_0 + x_0\,\delta x_0 = 0\,, \qquad (t_1^* - 10)\,\delta t_1 + x_1\,\delta x_1 = 0\,,$

$$x_0^2 + t_0^{*2} - 1 = 0\,, \qquad x_1^2 + (t_1^* - 10)^2 - 4 = 0\,,$$

$$C_1\,\delta x_1 + \delta t_1 = 0\,, \qquad C_1\,\delta x_0 + \delta t_0 = 0\,,$$

$$x_0 = x(t_0^*) = C_1\,t_0^* + C_2\,, \qquad x_1 = x(t_1^*) = C_1\,t_1^* + C_2\,.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\delta t_1 = -C_1\,\delta x_1\,, \qquad \delta t_0 = -C_1\,\delta x_0$$

$$\left(-t_0^* C_1 + x_0\right)\delta x_0 = 0\,, \qquad \left[-(t_1^* - 10)\,C_1 + x_1\right]\delta x_1 = 0\,.$$

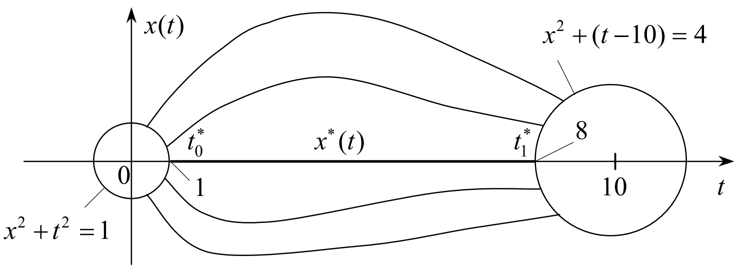


Рис. 2.10

Так как δx_0 и δx_1 в последних равенствах произвольны, то $x_0 = C_1 t_0^*$, $x_1 = (t_1^* - 10)\,C_1$ и справедливо

$$x_0 = C_1\,t_0^* + C_2 = C_1\,t_0^*\,, \qquad x_1 = C_1\,t_1^* + C_2 = (t_1^* - 10)\,C_1\,,$$

$$(C_1 t_0^* + C_2)^2 + t_0^{*\,2} - 1 = 0, \qquad (C_1 t_1^* + C_2)^2 + (t_1^* - 10)^2 - 4 = 0 .$$

4. Определим C_1, C_2, t_0^*, t_1^*: из первого уравнения $C_2 = 0$, из второго $C_1 = 0$, из третьего $t_0^* = \pm 1$, из четвертого $t_1^* = 10 \pm 2$. Отсюда $x^*(t) \equiv 0$.

Поскольку функционал имеет смысл длины, то минимальное расстояние между точками, лежащими на заданных окружностях, достигается на прямой $x^*(t) \equiv 0$ при $t_0^* = 1$ и $t_1^* = 8$, а максимальное – на прямой $x^*(t) \equiv 0$ при $t_0^* = -1$ и $t_1^* = 12$ (рис. 2.10).

2.2. Функционалы, зависящие от одной функции. Случай негладких экстремалей

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям (рис. 2.11):

а) функции $x(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$, где t_0 и t_1 заданы;

б) функции $x(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{2.16}$$

где x_0, x_1 заданы, т.е. проходят через две закрепленные граничные точки A и B;

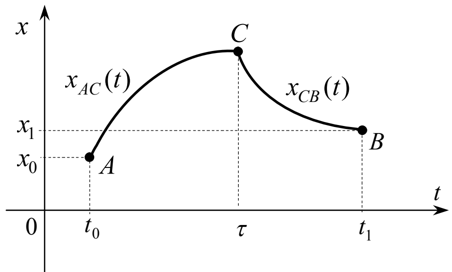


Рис. 2.11

в) функции $x(t)$ являются кусочно-гладкими, причем непрерывность производной может нарушаться в некоторой заранее неизвестной точке τ (*точке излома*). Функции $x(t)$ образуются двумя гладкими функциями $x_{AC}(t)$ и $x_{CB}(t)$, имеющими общую точку C, т.е. $x_{AC}(t) \in C^1\big([t_0, \tau]\big)$ и $x_{CB}(t) \in C^1\big([\tau, t_1]\big)$.

На множестве M задан функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt\,, \tag{2.17}$$

где функция $F\left(t, x, x'\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал (2.17) достигает экстремума, т.е.

$$J[x^*(t)] = \operatorname*{extr}_{x(t)\in M} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) dt\,. \tag{2.18}$$

Замечание 1. Могут рассматриваться задачи, в которых несколько точек излома.

Замечание 2. В [5] доказано, что в задаче (2.18) поиска экстремума функционала излом возможен в точке, где $F_{x'x'} = 0$.

Замечание 3. Во многих практических задачах требование непрерывности производной является неестественным, так как решение достигается на экстремалях, имеющих точки излома. Поэтому рассматриваемая здесь задача актуальна.

Стратегия решения задачи

Стратегия поиска решения задачи (2.18) на семействе негладких допустимых кривых, имеющих одну точку излома при $t = \tau$, состоит в том, что функционал (2.17) представляется в виде суммы:

$$J[x(t)] = J_1 + J_2 = \int_{t_0}^{\tau} F\left(t, x(t), x'(t)\right) dt + \int_{\tau}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) dt\,. \tag{2.19}$$

Запись (2.19) позволяет видеть, что задача (2.18) распадается на две:

1) поиск кривых AC и CB (рис. 2.11), составляющих искомую кривую AB;

2) определение значения τ.

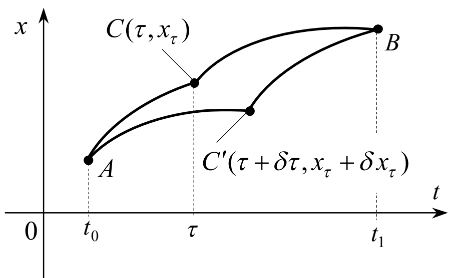


Рис. 2.12

Для решения обеих задач запишем первую вариацию функционала (2.19), учитывая, что (рис. 2.12):

а) значение τ не задано;

б) правый конец кривой AC и левый конец кривой CB подвижны;

в) левый конец кривой AC и правый конец кривой CB закреплены (вариации $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$).

Применяя (2.9), получаем

$$\delta J = \int_{t_0}^{\tau} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt + F_{x'}\big|_{t=\tau-0} \delta x_\tau + \left[F - x' F_{x'} \right]\big|_{t=\tau-0} \delta\tau +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_1} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt - F_{x'}\big|_{t=\tau+0} \delta x_\tau - \left[F - x' F_{x'} \right]\big|_{t=\tau+0} \delta\tau .$$

Из условия $\delta J = 0$ следует

$$\delta J = \int_{t_0}^{\tau} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt + \int_{\tau}^{t_1} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt +$$

$$+ \left[F_{x'}\big|_{t=\tau-0} - F_{x'}\big|_{t=\tau+0} \right] \delta x_\tau + \left[\left[F - x' F_{x'} \right]\big|_{t=\tau-0} - \left[F - x' F_{x'} \right]\big|_{t=\tau+0} \right] \delta\tau = 0 .$$

Так как вариации $\delta x(t)$, δx_τ, $\delta\tau$ произвольны, то по основной лемме вариационного исчисления получаем

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \quad t \in [t_0, \tau), \qquad F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0, \quad t \in (\tau, t_1], \tag{2.20}$$

$$F_{x'}\big|_{t=\tau-0} = F_{x'}\big|_{t=\tau+0}, \tag{2.21}$$

$$\left[F - x' F_{x'} \right]\big|_{t=\tau-0} = \left[F - x' F_{x'} \right]\big|_{t=\tau+0} . \tag{2.22}$$

Таким образом, кривые AC и CB являются интегральными кривыми уравнения Эйлера (2.20), т.е. экстремалями. Условия (2.21), (2.22) называются *условиями Вейерштрасса - Эрдмана.* Решения уравнений Эйлера (2.20) зависят от четырех произвольных постоянных:

$$x_{AC}(t) = x_{AC}(t, C_1, C_2), \quad x_{CB}(t) = x_{CB}(t, C_3, C_4) .$$

Для нахождения этих постоянных и величины τ используются два условия Вейерштрасса - Эрдмана, два граничных условия (2.16) и условие непрерывности искомой экстремали в точке τ: $x_{AC}(\tau) = x_{CB}(\tau)$.

Сформулируем описанный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (2.18)).

Если на непрерывной функции $x^*(t)$, *непрерывно дифференцируемой на промежутках* $[t_0, \tau)$ *и* $(\tau, t_1]$, *где* τ *– точка излома производной, и* *удовлетворяющей граничным условиям* $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, *функционал* (2.17) *достигает экстремума, то она удовлетворяет:*

а) *уравнению Эйлера на каждом из промежутков* $[t_0,\tau)$ *и* $(\tau,t_1]$;

б) *условиям Вейерштрасса - Эрдмана* (2.21), (2.22).

Замечание 1. Если точек излома производной несколько, то к каждой из них применимы те же рассуждения.

Замечание 2. Если из условий Вейерштрасса - Эрдмана следует условие $x'(\tau-0)=x'(\tau+0)$, т.е. условие непрерывности производной в точке τ, то это означает, что точки излома нет, а экстремум функционала может достигаться лишь на гладких кривых.

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (2.18)

1. Выписать условия Вейерштрасса - Эрдмана. Если из них следует условие непрерывности первой производной $x'(\tau-0)=x'(\tau+0)$, воспользоваться алгоритмом нахождения гладких экстремалей (см. разд. 1.2).

2. Записать уравнение Эйлера и найти его общее решение на промежутках $[t_0,\tau)$ и $(\tau,t_1]$: $x_{AC}(t)=x_{AC}(t,C_1,C_2)$, $x_{CB}(t)=x_{CB}(t,C_3,C_4)$.

3. Определить C_1, C_2, C_3, C_4, τ из граничных условий $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, условия непрерывности $x_{AC}(\tau)=x_{CB}(\tau)$ из условий Вейерштрасса - Эрдмана. В результате получить экстремаль $x^*(t)$.

Пример 2.7

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)]=\int\limits_0^4 x'^2(t)\cdot\left[x'(t)-2\right]^2 dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(4)=4$.

Решение

1. Запишем условия Вейерштрасса - Эрдмана:

$$F_{x'}\Big|_{t=\tau-0}=2x'(x'-2)(2x'-2)\Big|_{t=\tau-0}=2x'(x'-2)(2x'-2)\Big|_{t=\tau+0}=F_{x'}\Big|_{t=\tau+0},$$

$$F-x'F_{x'}\Big|_{t=\tau-0}=x'^2(x'-2)(2-3x')\Big|_{t=\tau-0}=$$

$$=x'^2(x'-2)(2-3x')\Big|_{t=\tau+0}=F-x'F_{x'}\Big|_{t=\tau+0}.$$

Отсюда следуют варианты:

а) $x'(\tau-0)=x'(\tau+0)$;

б) $x'(\tau-0)=0$, $x'(\tau+0)=2$;

в) $x'(\tau-0)=2$, $x'(\tau+0)=0$.

Вариант «а» соответствует случаю поиска гладких экстремалей. Так как подынтегральная функция не зависит от x и t явно, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид $x(t)=C_1t+C_2$. Из граничных условий $x(0)=C_2=0$, $x(4)=4C_1+C_2=4$ находим $C_1=1$, $C_2=0$ и экстремаль $x^*(t)=t$.

2. Решение уравнения Эйлера на промежутках $[0,\tau)$ и $(\tau,4]$ имеет вид

$$x_{AC}(t)=C_1\,t+C_2\,,\quad x_{CB}(t)=C_3\,t+C_4\,.$$

3. Определим C_1, C_2, C_3, C_4, τ из граничных условий:

$$x_{AC}(0)=C_2=0\,,\quad x_{CB}(4)=4C_3+C_4=4\,,$$

из условия непрерывности:

$$x_{AC}(\tau)=C_1\,\tau+C_2=C_3\,\tau+C_4=x_{CB}(\tau)\,,$$

из условий Вейерштрасса–Эрдмана (см.п.1).

Варианту «б» соответствуют условия:

$$x'(\tau-0)=x'_{AC}(\tau-0)=C_1=0\,,\quad x'(\tau+0)=x'_{CB}(\tau+0)=C_3=2\,.$$

Тогда получаем $C_4=4-4C_3=-4$, $C_3\tau+C_4=0$, $\tau=2$. В результате получена экстремаль $x^*_{AC}(t)\equiv 0$ при $t\in[0,2]$, $x^*_{CB}(t)=2t-4$ при $t\in[2,4]$ (рис. 2.13).

Варианту «в» соответствуют условия:

$$x'(\tau-0)=x'_{AC}(\tau-0)=C_1=2\,,$$

$$x'(t_1+0)=x'_{CB}(t_1+0)=C_3=0\,.$$

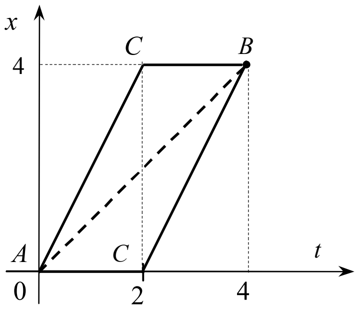


Рис. 2.13

Тогда получаем $C_4=4-4C_3=4$, $2\tau=C_4$, $\tau=2$. В результате получена экстремаль $x^*_{AC}(t)=2t$ при $t\in[0,2]$, $x^*_{CB}(t)=4$ при $t\in[2,4]$ (рис. 2.13).

Таким образом, в поставленной задаче имеются три экстремали: одна гладкая и две негладкие. На негладких экстремалях $J[x^*(t)] = 0$, а на гладкой экстремали $J[x^*(t)] = 4$ (очевидно, на ней минимум не достигается).

Пример 2.8

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi/2} \left[x'^{\,2}(t) - x^2(t) \right] dt ,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(\pi/2) = 0$.

Решение

1. Запишем условия Вейерштрасса–Эрдмана при $F = x'^{\,2} - x^2$:

$$F_{x'}\Big|_{t=\tau-0} = 2x'\Big|_{t=\tau-0} = 2x'\Big|_{t=\tau+0} = F_{x'}\Big|_{t=\tau+0} ;$$

$$F - x'F_{x'}\Big|_{t=\tau-0} = -x^2 - x'^{\,2}\Big|_{t=\tau-0} = -x^2 - x'^{\,2}\Big|_{t=\tau+0} = F - x'F_{x'}\Big|_{t=\tau+0} .$$

Очевидно, из них следует условие непрерывности первой производной:

$$x'(\tau - 0) = x'(\tau + 0) .$$

Поэтому решение существует только в классе гладких экстремалей.

2. Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид $x^*(t) = \cos t$ (см. пример 1.9).

2.3. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $\mathrm{x}(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t) \right)^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемые, т.е. $x_i(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются значения t_0 и t_1, которые заранее не заданы;

б) значения t_0, $x_{10} = x_1(t_0), \ldots, x_{n0} = x_n(t_0)$ и t_1, $x_{11} = x_1(t_1), \ldots$, $x_{n1} = x_n(t_1)$, определяющие концы вектор – функций, удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\psi_j(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) = 0 , \quad j = 1, \ldots, m , \quad m \le n+1 , \\ &\psi_j(t_1, x_{11}, \ldots, x_{n1}) = 0 , \quad j = 1, \ldots, p , \quad p \le n+1 , \end{aligned} \qquad (2.23)$$

где $\psi_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi_j(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве M задан функционал

$$J\left[x_1(t),...,x_n(t)\right]=\int_{t_0}^{t_1}F\left(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t)\right)dt\,, \qquad (2.24)$$

где функция $F\left(t,x_1,...,x_n,x_1',...,x_n'\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди вектор – функций, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор – функцию $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right)^T$, на которой достигается экстремум функционала (2.24), т.е.

$$J\left[x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right]=\underset{\mathrm{x}(t)\in M}{\mathrm{extr}}\int_{t_0}^{t_1}F\left(t,x_1(t),...,x_n(t),x_1'(t),...,x_n'(t)\right)dt\,. \qquad (2.25)$$

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи опирается на применение необходимого условия экстремума: $\delta J=0$. Поскольку функционал зависит от n переменных $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, то будем варьировать лишь одну из них $x_k(t)$, оставляя неизменными все остальные. Тогда выражение для первой вариации функционала совпадает с (2.9):

$$\delta_k J=\int_{t_0^*}^{t_1^*}\left[F_{x_k}-\frac{d}{dt}F_{x_k'}\right]\delta x_k(t)\,dt+F_{x_k'}\Big|_{t=t_1^*}\delta x_{k1}+$$
$$+\left[F-x_k'F_{x_k'}\right]\Big|_{t=t_1^*}\delta t_1-F_{x_k'}\Big|_{t=t_0^*}\delta x_{k0}-\left[F-x_k'F_{x_k'}\right]\Big|_{t=t_0^*}\delta t_0\,. \qquad (2.26)$$

В результате

$$\delta J=\sum_{i=1}^{n}\delta_i J=\int_{t_0^*}^{t_1^*}\sum_{i=1}^{n}\left[F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}\right]\delta x_i(t)\,dt+\sum_{i=1}^{n}F_{x_i'}\Bigg|_{t=t_1^*}\delta x_{i1}+$$
$$+\left[F-\sum_{i=1}^{n}x_i'F_{x_i'}\right]\Bigg|_{t=t_1^*}\delta t_1-\sum_{i=1}^{n}F_{x_i'}\Bigg|_{t=t_0^*}\delta x_{i0}-\left[F-\sum_{i=1}^{n}x_i'F_{x_i'}\right]\Bigg|_{t=t_0^*}\delta t_0\,. \qquad (2.27)$$

Из условия $\delta J=0$ с учетом независимости вариаций $\delta x_i(t)$, $i=1,...,n$, между собой и от δx_{i1}, δt_1, δx_{i0}, δt_0 получаем, что вектор – функция $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right)^T$ должна удовлетворять:

а) системе уравнений Эйлера

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x'_i}=0\,,\quad i=1,...,n\,; \tag{2.28}$$

б) условиям трансверсальности

$$\sum_{i=1}^{n}F_{x'_i}\Big|_{t=t_1^*}\delta x_{i1}+\left[F-\sum_{i=1}^{n}x'_iF_{x'_i}\right]\Bigg|_{t=t_1^*}\delta t_1-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}F_{x'_i}\Bigg|_{t=t_0^*}\delta x_{i0}-\left[F-\sum_{i=1}^{n}x'_iF_{x'_i}\right]\Bigg|_{t=t_0^*}\delta t_0=0\,. \tag{2.29}$$

В силу наличия граничных условий (2.23) вариации δx_{i1} и δt_1, а также δx_{i0} и δt_0 связаны :

$$\begin{aligned}\delta\psi_j&=\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\Bigg|_{t_0^*,\,\mathrm{x}^*(t_0^*)}\delta t_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\Bigg|_{t_0^*,\,\mathrm{x}^*(t_0^*)}\delta x_{i0}=0\,,\quad j=1,...,m\,;\\ \delta\varphi_j&=\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\Bigg|_{t_1^*,\,\mathrm{x}^*(t_1^*)}\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Bigg|_{t_1^*,\,\mathrm{x}^*(t_1^*)}\delta x_{i1}=0\,,\quad j=1,...,p\,.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Однако вариации δx_{i1}, δt_1 в силу (2.30) не связаны с вариациями δx_{i0}, δt_0. Поэтому равенство (2.29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}F_{x'_i}\Big|_{t=t_1^*}\delta x_{i1}+\left[F-\sum_{i=1}^{n}x'_iF_{x'_i}\right]\Bigg|_{t=t_1^*}\delta t_1=0\,,\\ &\sum_{i=1}^{n}F_{x'_i}\Bigg|_{t=t_0^*}\delta x_{i0}+\left[F-\sum_{i=1}^{n}x'_iF_{x'_i}\right]\Bigg|_{t=t_0^*}\delta t_0=0\,.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Соотношения (2.30), (2.31) также называются *условиям трансверсальности.*

Сформулируем описанные результаты в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума функционала в задаче (2.25)). *Если на вектор – функции* $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right)^T$*, где* $x_i(t)\in C^1(\Delta)$, $i=1,...,n$, *удовлетворяющей граничным условиям* $\psi_j(t_0,x_{10},...,x_{n0})=0$, $j=1,...,m$, $\varphi_j(t_1,x_{11},...,x_{n1})=0$, $j=1,...,p$, *функционал* (2.24) *достигает слабого экстремума, то функции* $x_1^*(t)$,…, $x_n^*(t)$ *удовлетворяют:*

а) *системе уравнений Эйлера* (2.28);

б) *условиям трансверсальности* (2.30), (2.31).

Замечание 1. Если один из концов допустимых вектор – функций закреплен, то условия трансверсальности для этого конца не выписываются, поскольку в этом случае соответствующие вариации в (2.31) равны нулю.

$$F_{x_i'}\Big|_{t=t_0} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,n\,;$$
$$F_{x_i'}\Big|_{t=t_1} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,n\,. \tag{2.32}$$

Замечание 2. Если концы допустимых кривых удовлетворяют соотношениям $x_i = \psi_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$; $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, то из (2.30) получаем

$$-\psi_i'(t_0^*)\,\delta t_0 + 1\cdot\delta x_{i0} = 0\,,\ \ i = 1,\ldots,n\,;$$
$$-\varphi_i'(t_1^*)\,\delta t_1 + 1\cdot\delta x_{i1} = 0\,,\ \ i = 1,\ldots,n\,.$$

Подставляя полученные соотношения в (2.31), в силу произвольности вариации δt_0 и δt_1 имеем

$$F + \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i' - x_i')\,F_{x_i'}\Big|_{t=t_1^*} = 0\,,$$
$$F + \sum_{i=1}^{n}(\psi_i' - x_i')\,F_{x_i'}\Big|_{t=t_0^*} = 0\,. \tag{2.33}$$

Замечание 3. Справедливо замечание 2 (стр.79), где под $x(t)$ следует понимать вектор - функцию $\mathrm{x}(t)$.

Замечание 4. Если условия (2.23) при фиксированных t_0 и t_1, заданы в форме $x_i(t_0) = x_{i0}$, $x_i(t_1) = x_{i1}$, $i = 1,\ldots,n$, т.е. рассматривается задача с неподвижными границами, то, поскольку вариации $\delta t_0 = \delta t_1 = \delta x_{i0} = \ = \delta x_{i1} = 0$, условия трансверсальности выполняются, а произвольные постоянные в общем решении системы уравнений Эйлера определяются граничными условиями.

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (2.25)

1. Записать систему уравнений Эйлера (2.28).
2. Найти общее решение системы

$$x_i(t) = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n})\,, \quad i = 1,\ldots,n\,.$$

3. Записать условия трансверсальности (в зависимости от вида граничных условий) и граничные условия.

4. Определить $C_1,\ldots,\ C_{2n}$, t_0^*, t_1^* и выписать экстремаль

$$\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)\right)^T .$$

Пример 2.9

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t)] = \int_0^1 \left[x_1'(t)x_2'(t) + 6t\,x_1(t) + 12t\,x_2(t)\right]dt ,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 , \qquad x_1(1) + x_2(1) = 4 .$$

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера. Так как

$$F = x_1' x_2' + 6t\,x_1 + 12t\,x_2 ,\ \ F_{x_1} = 6t ,\ \ F_{x_1'} = x_2' ,\ \ \frac{d}{dt}F_{x_1'} = x_2'' ,$$

$$F_{x_2} = 12t ,\ \ F_{x_2'} = x_1' ,\ \ \frac{d}{dt}F_{x_2'} = x_1'' ,$$

то

$$F_{x_1} - \frac{d}{dt}F_{x_1'} = 6t - x_2'' = 0 , \qquad F_{x_2} - \frac{d}{dt}F_{x_2'} = 12t - x_1'' = 0$$

или

$$x_1'' = 12t , \quad x_2'' = 6t .$$

2. Найдем общее решение системы. Интегрируя два раза каждое из уравнений, получаем $x_1'(t) = 6t^2 + C_1$, $x_2'(t) = 3t^2 + C_3$,

$$x_1(t) = 2t^3 + C_1 t + C_2 , \quad x_2(t) = t^3 + C_3 t + C_4 .$$

3. Так как левый конец допустимых вектор-функций закреплен, то условие трансверсальности записывается только на правом конце. Поскольку $t_1 = 1$, т.е. значение t_1 задано, то $\delta t_1 = 0$, а условие (2.31) имеет вид

$$F_{x_1'}\delta x_{11} + F_{x_2'}\delta x_{21}\Big|_{t=t_1=1} = 0$$

или

$$x_2'(t_1)\delta x_{11} + x_1'(t_1)\delta x_{21} = 0 .$$

Перепишем граничное условие $x_1(t_1) + x_2(t_1) = 4$ в виде (2.23):

$$\varphi_1(t_1, x_{11}, x_{21}) = x_{11} + x_{21} - 4 = 0 .$$

Тогда условие (2.30) запишется в форме

$$1\cdot\delta x_{11} + 1\cdot\delta x_{21} = 0 .$$

Отсюда $\delta x_{11} = -\delta x_{21}$ и

$$-x_2'(t_1)\delta x_{21} + x_1'(t_1)\delta x_{21} = \left[x_1'(t_1) - x_2'(t_1)\right]\delta x_{21} = 0 .$$

Поскольку вариация δx_{21} произвольна, то имеем $x_1'(t_1) = x_2'(t_1)$.

Кроме соотношений, следующих из условий трансверсальности, используем граничные условия:

$$x_1(0) = C_2 = 0 , \quad x_2(0) = C_4 = 0 ,$$

$$x_1(t_1) + x_2(t_1) = x_1(1) + x_2(1) = 2 + C_1 + 1 + C_3 = 4 .$$

4. Определим C_1, C_2, C_3, C_4:

$$x_1'(t_1) = x_1'(1) = 6 + C_1 = x_2'(t_1) = x_2'(1) = 3 + C_3 \quad \text{или}$$

$$C_3 - C_1 = 3 , \quad C_1 + C_3 = 1 .$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 2$. В результате получаем экстремаль

$$\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t)\right)^T , \text{ где } x_1^*(t) = 2t^3 - t , \quad x_2^*(t) = t^3 + 2t .$$

Пример 2.10

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{t_1}\left[x_1'(t)x_2'(t) + 6t\,x_1(t) + 12t^2 x_2(t)\right]dt ,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 , \quad x_1(t_1) + x_2(t_1) = 0 .$$

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера, Так как

$$F = x_1' x_2' + 6t\,x_1 + 12t^2 x_2 , \quad F_{x_1} = 6t , \quad F_{x_1'} = x_2' , \quad \frac{d}{dt}F_{x_1'} = x_2'' ,$$

$$F_{x_2} = 12t^2 , \quad F_{x_2'} = x_1' , \quad \frac{d}{dt}F_{x_2'} = x_1'' , \quad \text{то}$$

$$F_{x_1} - \frac{d}{dt}F_{x_1'} = 6t - x_2'' = 0 , \quad F_{x_2} - \frac{d}{dt}F_{x_2'} = 12t^2 - x_1'' = 0 \quad \text{или}$$

$$x_1'' = 12t^2 , \quad x_2'' = 6t .$$

2. Найдем общее решение системы, интегрируя оба уравнения два раза:

$$x_1'(t) = 4t^3 + C_1 , \qquad x_2'(t) = 3t^2 + C_3 ,$$

$$x_1(t) = t^4 + C_1 t + C_2 , \quad x_2(t) = t^3 + C_3 t + C_4 .$$

3. Так как левый конец допустимых вектор – функций закреплен, то условие трансверсальности записывается только на правом конце. Пере-

пишем граничное условие $x_1(t_1)+x_2(t_1)=0$ в форме $\varphi_1(t_1,x_{11},x_{21})=$ $=x_{11}+x_{21}=0$. Из (2.31) имеем

$$F_{x_1'}\delta x_{11}+F_{x_2'}\delta x_{21}+\left[F-x_1' F_{x_1'}-x_2' F_{x_2'}\right]\delta t_1\Big|_{t=t_1^*}=$$

$$=x_2'\,\delta x_{11}+x_1'\,\delta x_{21}+\left[x_1' x_2'+6t\,x_1+12t^2 x_2-x_1' x_2'-x_2' x_1'\right]\delta t_1\Big|_{t=t_1^*}=0\,.$$

Из условия (2.30) и $\varphi_1(t_1,x_{11},x_{21})=x_{11}+x_{21}=0$ получаем

$$1\cdot\delta x_{11}+1\cdot\delta x_{21}=0 \quad \text{или} \quad \delta x_{11}=-\delta x_{21}\,.$$

С учетом последнего соотношения перепишем условия трансверсальности (знак * для упрощения обозначений опустим)

$$\left[x_1'(t_1)-x_2'(t_1)\right]\delta x_{21}+\left[-x_1'(t_1)\,x_2'(t_1)+6t\,x_1(t_1)+12t_1^2 x_2(t_1)\right]\delta t_1=0\,.$$

Так как δx_{21} и δt_1 произвольны, то отсюда имеем

$$x_1'(t_1)=x_2'(t_1)\,, \qquad 6t_1\,x_1(t_1)+12t_1^2\,x_2(t_1)-x_1'(t_1)\,x_2'(t_1)=0\,.$$

Кроме условий трансверсальности выпишем граничные условия:

$$x_1(0)=C_2=0\,, \quad x_2(0)=C_4=0\,,$$

$$x_1(t_1)+x_2(t_1)=t_1^4+C_1t_1+t_1^3+C_3t_1=0\,.$$

4. Определим C_1, C_2, C_3, C_4, t_1^*. Имеем

$$x_1'(t_1)=4t_1^3+C_1=x_2'(t_1)=3t_1^2+C_3\,,$$

$$6t_1(t_1^4+C_1t_1)+12t_1^2(t_1^3+C_3t_1)-(4t_1^3+C_1)(3t_1^2+C_3)=0\,,$$

$$t_1^3+t_1^2+C_1+C_3=0\,.$$

Из первого и третьего уравнений получаем

$$C_1-C_3=3t_1^2-4t_1^3\,, \quad C_1+C_3=-t_1^3-t_1^2\,.$$

Отсюда

$$2C_1=2t_1^2-5t_1^3\,, \quad C_1=t_1^2-\frac{5}{2}t_1^3, \quad C_3=C_1-3t_1^2+4t_1^3=-2t_1^2+\frac{3}{2}t_1^3.$$

Подставляя выражения для C_1 и C_3 во второе уравнение, имеем

$$6t_1\left(t_1^4+t_1^3-\frac{5}{2}t_1^4\right)+12t_1^2\left(t_1^3-2t_1^3+\frac{3}{2}t_1^4\right)-$$

$$-\left(4t_1^3+t_1^2-\frac{5}{2}t_1^3\right)\left(3t_1^2-2t_1^2+\frac{3}{2}t_1^3\right)=0 \quad \text{или}$$

$$\frac{63}{4}t_1^2-24t_1+5=0\,.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим корни:

$t_1 = \dfrac{24 \pm \sqrt{576-315}}{31.5} = \dfrac{24 \pm \sqrt{261}}{31.5}$ или $t_{11}^* \cong 1.275$; $t_{12}^* \cong 0.25$. Тогда для корня $t_{11}^* \cong 1.275$ вычисляем постоянные $C_1 \cong -3.56$, $C_3 \cong -0.14$, а для корня $t_{12}^* \cong 0.25$ соответственно $C_1 \cong 0.023$, $C_3 \cong -0.1$.

В результате получаем две экстремали:

1) $x_1^*(t) = t^4 - 3.56t$, $x_2^*(t) = t^3 - 0.14t$, $t_1^* = 1.275$;

2) $x_1^*(t) = t^4 + 0.023t$, $x_2^*(t) = t^3 - 0.1t$, $t_1^* \cong 0.25$.

Пример 2.11

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{t_1} \left[x_1'(t) x_2'(t) \right] dt ,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = -3 , \quad x_2(0) = 2 ; \quad x_1(t_1) = t_1^2 + 1 , \quad x_2(t_1) = -2 .$$

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера. Так как

$$F = x_1' x_2' , \quad F_{x_1} = 0 , \quad F_{x_1'} = x_2' , \quad \frac{d}{dt} F_{x_1'} = x_2'' ,$$

$$F_{x_2} = 0 , \quad F_{x_2'} = x_1' , \quad \frac{d}{dt} F_{x_2'} = x_1'' , \qquad \text{то}$$

$$F_{x_1} - \frac{d}{dt} F_{x_1'} = -x_2'' = 0 , \quad F_{x_2} - \frac{d}{dt} F_{x_2'} = -x_1'' = 0 \quad \text{или} \quad x_1'' = 0 , \quad x_2'' = 0 .$$

2. Найдем общее решение полученной системы:

$$x_1(t) = C_1 t + C_2 , \qquad x_2(t) = C_3 t + C_4 .$$

3. Левый конец допустимых вектор – функций закреплен, поэтому запишем условия трансверсальности на правом конце.

Перепишем граничные условия $x_1(t_1) = t_1^2 + 1$, $x_2(t_1) = -2$ в форме

$$x_1 = \varphi_1(t) = t^2 + 1 , \qquad x_2 = \varphi_2(t) = -2 .$$

Так как $\varphi_1'(t) = 2t$, $\varphi_2'(t) \equiv 0$, то условия (2.33) принимают вид

$$F + (2t - x_1') F_{x_1'} - x_2' F_{x_2'} \Big|_{t=t_1^*} = x_1' x_2' + (2t - x_1') x_2' - x_2' x_1' \Big|_{t=t_1^*} = 0 \text{ или}$$

$$(2t - x_1') x_2' \Big|_{t=t_1^*} = 0 .$$

Запишем граничные условия:

$$x_1(0) = C_2 = -3 , \quad x_2(0) = C_4 = 2 ,$$

$$x_1(t_1) = C_1 t_1 + C_2 = t_1^2 + 1, \quad x_2(t_1) = C_3 t_1 + C_4 = -2.$$

4. Определим C_1, C_2, C_3, C_4, t_1^*. Из условия трансверсальности следуют два варианта:

1) $x_2'(t_1) = C_3 = 0$;

2) $x_1'(t_1) = C_1 = 2t_1$.

Рассмотрим первый вариант:

$$C_2 = -3, \quad C_4 = 2, \quad C_3 = 0, \quad C_1 t_1 + C_2 = t_1^2 + 1, \quad C_3 t_1 + C_4 = -2.$$

Очевидно, система не имеет решения.

Рассмотрим второй вариант:

$$C_2 = -3, \quad C_4 = 2, \quad C_1 = 2t_1, \quad C_1 t_1 + C_2 = t_1^2 + 1, \quad C_3 t_1 + C_4 = -2.$$

Отсюда $t_1^* = \pm 2$, $C_1 = \pm 4$, $C_3 = \mp 2$.

В результате получаем две экстремали $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), ..., x_n^*(t)\right)^T$:

1) $x_1^*(t) = 4t - 3$, $x_2^*(t) = -2t + 2$, $t_1^* = 2$;

2) $x_1^*(t) = -4t - 3$, $x_2^*(t) = 2t + 2$, $t_1^* = -2$,

на которых может достигаться экстремум функционала.

2.4. Функционалы Больца, зависящие от одной функции

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых функций $x(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x(t)$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $x(t) \in C^1(\Delta)$, где Δ некоторый конечный отрезок, значение t_0 задано, а t_1 не задано и является внутренней точкой отрезка;

б) левый конец кривых закреплен, т.е. $x(t_0) = x_0$, где x_0 задано; правый конец удовлетворяет граничному условию

$$\varphi(t_1, x_1) = 0, \tag{2.34}$$

где $x_1 = x(t_1)$, а $\varphi(t, x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция.

На множестве M задан функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) dt + G\left(t_1, x(t_1)\right), \tag{2.35}$$

где функция $F(t,x,x')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным, функция $G(t,x)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным.

Среди всех допустимых кривых, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, на которой функционал достигает экстремума, т.е.

$$J[x^*(t)] = \underset{x(t)\in M}{\operatorname{extr}} \left[\int_{t_0}^{t_1} F\big(t, x(t), x'(t)\big)\,dt + G\big(t_1, x(t_1)\big) \right]. \qquad (2.36)$$

Замечание 1. Функционал (2.35) называется *функционалом Больца.* Кроме *интегрального члена* он содержит *терминальный член* $G\big(t_1, x(t_1)\big)$.

Замечание 2. В рассматриваемой задаче для простоты изложения полагается, что левый конец допустимых кривых закреплен. В качестве обобщений могут быть изучены задачи с подвижным левым концом, удовлетворяющим условию $\psi(t_0,x_0)=0$ (см. разд. 1.2), а также функционалы с терминальным членом $G\big(t_1,x(t_1)\big)+Q\big(t_0,x(t_0)\big)$ или $G\big(t_1,x(t_1),t_0,x(t_0)\big)$.

Замечание 3. В поставленной задаче (2.36) фактически ищется пара $(x^*(t),t_1^*)$, на которой функционал достигает экстремума (см. замечание 2, стр.79).

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи Больца опирается на применение теоремы о необходимых условиях экстремума функционала: $\delta J = 0$. Так как рассматриваемая задача отличается от изложенной в разд. 1.2 только наличием терминального члена и отсутствием условия $\psi(t_0,x_0)=0$, то найдем вклад терминального члена в выражение для первой вариации функционала:

$$\delta G = \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta t_1 + \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta x_1 .$$

Добавим δG к выражению (2.9) для δJ, учитывая, что $\delta t_0 = 0$, $\delta x_0 = 0$, поскольку левый конец допустимых кривых закреплен:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1^*} \left[F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right] \delta x(t)\, dt + \left[F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta x_1 +$$

$$+ \left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - x' F_{x'} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta t_1 .$$

Из равенства $\delta J = 0$ и произвольности вариации $\delta x(t)$ получаем, что экстремаль $x^*(t)$ должна удовлетворять:

а) уравнению Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 ;$$

б) условию трансверсальности

$$\left[F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta x_1 + \left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - x' F_{x'} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta t_1 = 0 . \qquad (2.37)$$

В силу наличия граничного условия (2.34) вариации δx_1 и δt_1 связаны:

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta t_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta x_1 = 0 . \qquad (2.38)$$

Сформулируем описанные результаты в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума функционала в задаче Больца (2.36)). *Если на функции* $x^*(t) \in C^1(\Delta)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $x^*(t_0) = x_0$, $\varphi\left((t_1^*,\, x^*(t_1^*) \right) = 0$, *функционал* (2.35) *достигает слабого экстремума, то она удовлетворяет:*

а) *уравнению Эйлера;*

б) *условиям трансверсальности* (2.37), (2.38).

Замечание 1. Если t_1 задано, т.е. правый конец допустимых кривых скользит по прямой, описываемой уравнением $t = t_1$, то, поскольку $\delta t_1 = 0$, а δx_1 произвольно, условие трансверсальности (2.37) принимает вид

$$\left[F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x} \right] \Bigg|_{t_1,\, x^*(t_1)} = 0 \,. \tag{2.39}$$

Замечание 2. Если правый конец допустимых кривых скользит по кривой с уравнением $x = \varphi(t)$, то граничное условие можно записать в виде $\varphi(t_1, x_1) = x_1 - \varphi(t_1) = 0$. Тогда из (2.38) получаем

$$-\varphi'(t_1^*)\,\delta t_1 + 1 \cdot \delta x_1 = 0 \quad \text{или} \quad \delta x_1 = \varphi'(t_1^*)\,\delta t_1 \,.$$

Подставляя полученную связь между вариациями в (2.37), и учитывая произвольность δt_1, находим

$$\left[F + \frac{\partial G}{\partial t} + (\varphi' - x') F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x}\, \varphi' \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 0 \,. \tag{2.40}$$

Замечание 3. Если граничное условие $\varphi(t_1, x_1) = 0$ отсутствует, то вариации δx_1 и δt_1 произвольны. Поэтому из условия (2.37) следует

$$\begin{gathered} \left[F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 0 \,, \\ \left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - x' F_{x'} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 0 \,. \end{gathered} \tag{2.41}$$

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (2.36)

1. Записать уравнение Эйлера.
2. Найти общее решение уравнения Эйлера: $x = x(t, C_1, C_2)$.
3. Записать условие трансверсальности и граничные условия.
4. Определить C_1, C_2, t_1^* и записать уравнение экстремали $x^*(t)$.

Пример 2.12

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 x'^2(t)\, dt + 5x^2(1) \,,$$

удовлетворяющую граничному условию $x(0) = 1$.

Решение

1, 2. Так как подынтегральная функция $F = x'^2$ не зависит от t и x явно, уравнение Эйлера имеет общее решение $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Правый конец скользит по прямой $t = 1$, поэтому воспользуемся (2.39) при $G = 5x^2$:

$$\left[F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x}\right]\Bigg|_{t_1=1} = \left[2x' + 10x\right]\Big|_{t_1=1} = 2x'(1) + 10x(1) = 0 .$$

Используя граничное условие, получаем $x(0) = C_2 = 1$.

4. Определим C_1. Поскольку $C_2 = 1$, то

$$x(t) = C_1 t + 1 \quad \text{и} \quad 2x'(1) + 10x(1) = 2C_1 + 10C_1 + 10 = 0 .$$

Отсюда $C_1 = -\dfrac{5}{6}$. Таким образом, получена экстремаль $x^*(t) = -\dfrac{5}{6}t + 1$.

Пример 2.13

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^{t_1} \left[x'^2(t) + 12\,t\,x(t)\right]dt - x(t_1) ,$$

удовлетворяющую граничному условию $x(0) = 0$.

Решение

1. Запишем уравнение Эйлера. Так как $F = x'^2 + 12tx$, $F_x = 12t$, $F_{x'} = 2x'$, $\dfrac{d}{dt}F_{x'} = 2x''$, то $F_x - \dfrac{d}{dt}F_{x'} = 12t - 2x'' = 0$ или $x'' = 6t$.

2. Дважды интегрируя левую и правую части уравнения, находим общее решение уравнения Эйлера: $x'(t) = 3t^2 + C_1$, $x(t) = t^3 + C_1 t + C_2$.

3. Запишем условия трансверсальности (2.41). Так как $G(t,x) = -x$, то

$$\left[F_{x'} + \frac{\partial G}{\partial x}\right]\Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = \left[2x' - 1\right]\Big|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 0 ,$$

$$\left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - x'F_{x'}\right]\Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = \left[x'^2 + 12tx - 2x'^2\right]\Big|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} =$$

$$= \left[12tx - x'^2\right]\Big|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 0 .$$

Применяя граничное условие, получаем $x(0) = C_2 = 0$, $x(t) = t^3 + C_1 t$.

4. Определим C_1, t_1^*:

$$\left[2x'-1\right]\Big|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 2\cdot 3t_1^{*2} + 2C_1 - 1 = 0,$$

$$\left[12t\,x - x'^{\,2}\right]\Big|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} = 12t_1^{*4} + 12t_1^{*2}C_1 - \left(3t_1^{*2} + C_1\right)^2 =$$

$$= 3t_1^{*4} + 6t_1^{*2}C_1 - C_1^2 = 0.$$

Из первого уравнения $C_1 = \dfrac{1}{2} - 3t_1^{*2}$ и после подстановки во второе соотношение: $24t_1^{*4} - 6t_1^{*2} + \dfrac{1}{4} = 0$. Обозначим $t_1^{*2} = p$. Тогда найдем корни уравнения $24p^2 - 6p + \dfrac{1}{4} = 0$: $p_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{9-6}}{24} = \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{24} = t_1^{*2}$.

Отсюда $t_1^* = \sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{24}}$, $C_1 = \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{8}$.

В результате найдены следующие экстремали

$$1)\quad x^*(t) = t^3 + \frac{1-\sqrt{3}}{8}t, \quad t_1^* = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{24}};$$

$$2)\quad x^*(t) = t^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{8}t, \quad t_1^* = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{24}}.$$

Пример 2.14

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} x'^2(t)\,dt + x^2(t_1),$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(t_1)+t_1=1$.

Решение

1, 2. Так как функция $F = \dfrac{1}{2}x'^2$ не зависит от t и x, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид $x(t) = C_1 t + C_2$.

3. Запишем граничные условия и условие трансверсальности (2.40) с учетом $G(t,x) = x^2$, так как граничное условие $x(t_1)+t_1=1$ означает, что правый конец скользит по кривой с уравнением $x = \varphi(t) = 1 - t$:

$$x(0) = C_2 = 0, \quad x(t) = C_1 t, \quad x(t_1) + t_1 = C_1 t_1 + t_1 = 1,$$

$$\left[F+\frac{\partial G}{\partial t}+(\varphi'-x')F_{x'}+\frac{\partial G}{\partial x}\varphi'\right]\Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x'^2+(-1-x')x'+2x\cdot(-1)\right]\Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)}=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x'^2-x'-2x\right]\Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)}=0\,.$$

4. Определим C_1, C_2, t_1^*.

$$t_1^*=\frac{1}{C_1+1}\,,\quad \frac{1}{2}C_1^2+C_1+2\,C_1t_1^*=\frac{1}{2}C_1^2+C_1+\frac{2C_1}{C_1+1}=0\,.$$

Отсюда $C_1=0$ или $\frac{1}{2}C_1+1+\frac{2}{C_1+1}=0$, $C_1^2+3C_1+6=0$. Последнее уравнение не имеет действительных корней. Поэтому $t_1^*=1$ и в результате найдена экстремаль $x^*(t)\equiv 0$ при $t\in[0,1]$.

2.5. Функционалы Больца, зависящие от нескольких функций

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых вектор–функций $\mathrm{x}(t)=\left(x_1(t),\dots,x_n(t)\right)^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$, $i=1,\dots,n$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $x_i(t)\in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, значение t_0 задано, а значение t_1 не задано и является внутренней точкой Δ;

б) левый конец кривых закреплен, т.е. $\mathrm{x}(t_0)=\left(x_{10},\dots,x_{n0}\right)^T$, где x_{i0}, $i=1,\dots,n$ заданы; правый конец удовлетворяет граничным условиям:

$$\varphi_j=\left(t_1,x_{11},\dots,x_{n1}\right)=0\,,\quad j=1,\dots,p\,,\quad p\le n+1\,,\tag{2.42}$$

где $x_{i1}=x_i(t_1)$, $i=1,\dots n$; $\varphi_j=\left(t,x_1,\dots,x_n\right)$, $j=1,\dots,p$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве M задан функционал

$$J[x_1(t),\dots,x_n(t)]=\int\limits_{t_0}^{t_1}F\left(t,x_1(t),\dots,x_n(t),x_1'(t),\dots,x_n'(t)\right)dt+$$

$$+G\left(t_1,x_1(t_1),\dots,x_n(t_1)\right),\tag{2.43}$$

где функция $F\left(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'\right)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по всем переменным, а функция $G\left(t, x_1, \ldots, x_n\right)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным.

Среди всех вектор-функций, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right)^T$, на которой достигается экстремум функционала (2.43), т.е.

$$J\left[\left(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t)\right)\right] =$$

$$= \underset{\mathrm{x}(t) \in M}{\operatorname{extr}} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t)\right) dt + G\left(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right) \right\}. \qquad (2.44)$$

Замечание 1. Функционал (2.43) называется *функционалом Больца.* Кроме *интегрального члена,* он содержит *терминальный член* $G\left(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right)$.

Замечание 2. В рассматриваемой задаче для простоты изложения полагается, что левый конец допустимых кривых закреплен. В качестве обобщений могут быть изучены вариационные задачи с подвижным левым концом, удовлетворяющим условию $\psi_j = \left(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}\right)$, $j = 1, \ldots, m$ (см. разд. 2.3), а также функционалом с терминальным членом

$$G\left(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right) + Q\left(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right) \quad \text{или}$$

$$G\left(t_1, x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1), t_0, x_1(t_0), \ldots \ldots, x_n(t_0)\right).$$

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи опирается на применение необходимого условия экстремума: $\delta J = 0$. Так как рассматриваемая задача отличается от изложенной в разд. 2.3 наличием терминального члена и отсутствием условия $\psi_j = \left(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}\right)$, $j = 1, \ldots, m$, то найдем вклад терминального члена в выражение для первой вариации функционала:

$$\delta G = \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta t_1 + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial G}{\partial x_i}\right|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta x_{i1}.$$

Добавим δG к выражению (2.27) для δJ, учитывая, что $\delta t_0 = 0$, $\delta x_{i0} = 0$, $i = 1,\dots,n$, поскольку левый конец допустимых функций закреплен:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1^*} \sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\, dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta x_{i1} + \left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i'} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta t_1 . \tag{2.45}$$

Из равенства $\delta J = 0$ и произвольности вариаций $\delta x_i = 0$, $i = 1,\dots,n$ получаем, что вектор – функция $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t) \right)^T$ должна удовлетворять:

а) системе уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0, \qquad i = 1,\dots,n; \tag{2.46}$$

б) условиям трансверсальности

$$\sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta x_{i1} + \left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} x_i' F_{x_i'} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta t_1 = 0 . \tag{2.47}$$

В силу наличия граничных условий (2.42) вариации δx_{i1} и δt_1 связаны:

$$\delta \varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \Bigg|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta t_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Bigg|_{t_1^*,\, \mathrm{x}^*(t_1^*)} \delta x_{i1} = 0, \quad j = 1,\dots,p . \tag{2.48}$$

Сформулируем описанные результаты в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума функционала в задаче (2.44)). *Если на вектор-функции* $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t) \right)^T$, *где* $x_i^*(t) \in C^1(\Delta)$, *удовлетворяющей граничным условиям* $\mathrm{x}^*(t_0) = \mathrm{x}_0$, $\varphi_j \left(t_1^*, x_1^*(t_1^*),\dots \right.$ $\left. \dots, x_n^*(t_1^*) \right) = 0$, $j = 1,\dots,p$, *функционал* (2.43) *достигает слабого экстремума, то функции* $x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)$ *удовлетворяют:*

а) *системе уравнений Эйлера* (2.46);

б) *условиям трансверсальности* (2.47), (2.48).

Замечание 1. Если значение t_1 задано, а правый конец допустимых кривых скользит по прямой с уравнением $t = t_1$, то вариация $\delta t_1 = 0$. В силу произвольности вариаций δx_{i1}, $i = 1,\dots,n$ из (2.47) получаем

$$\left[F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \right] \Bigg|_{t_1^*,\ \mathrm{x}^*(t_1^*)} = 0, \quad i = 1,\dots,n. \qquad (2.49)$$

Замечание 2. Если правый конец допустимых кривых удовлетворяет соотношениям $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, то из (2.48) и $\varphi_i(t, x_1,\dots,x_n) = = x_i - \varphi_i(t) = 0$ получаем

$$-\varphi_i'(t_1^*)\delta t_1 + 1 \cdot \delta x_{i1} = 0, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Подставим полученные соотношения в (2.47) и в силу произвольности δt_1 будем иметь

$$F + \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[(\varphi_i' - x_i') F_{x_i'} + \frac{\partial G}{\partial x_i} \varphi_i' \right] \Bigg|_{t_1^*,\ \mathrm{x}^*(t_1^*)} = 0. \qquad (2.50)$$

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (2.44)

1. Записать систему уравнений Эйлера (2.46).

2. Найти общее решение системы $x_i = x_i(t, C_1,\dots,C_{2n})$, $i = 1,\dots,n$.

3. Записать условия трансверсальности (в зависимости от вида граничных условий) и граничные условия.

4. Определить C_1, C_2,…, C_{2n}, t_1^* и выписать экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = = \left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t) \right)^T$.

Пример 2.15

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 \left[x_1'(t) x_2'(t) + x_1(t) x_2(t) \right] dt + x_1(1) + x_2(1),$$

удовлетворяющую граничным условиям: $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера. Так как $F = x_1' x_2' + x_1 x_2$, $F_{x_1} = x_2$, $F_{x_1'} = x_2'$, $\dfrac{d}{dt} F_{x_1'} = x_2''$, $F_{x_2} = x_1$, $F_{x_2'} = x_1'$, $\dfrac{d}{dt} F_{x_2'} = x_1''$, то

$$F_{x_1} - \frac{d}{dt} F_{x_1'} = x_2 - x_2'' = 0\,,$$

$$F_{x_2} - \frac{d}{dt} F_{x_2'} = x_1 - x_1'' = 0\,.$$

2. Найдем общее решение системы $x_1 - x_1'' = 0$, $x_2 - x_2'' = 0$:

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}\,, \quad x_2(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t}\,.$$

3. Запишем условия трансверсальности (2.49), учитывая, что значение $t_1 = 1$ задано, а $x_1(1)$ и $x_2(1)$ произвольны. Поскольку $G(t, x_1, x_2) = x_1 + x_2$, то

$$\left.\left[F_{x_1'} + \frac{\partial G}{\partial x_1}\right]\right|_{t_1=1} = x_2'(1) + 1 = 0\,,$$

$$\left.\left[F_{x_2'} + \frac{\partial G}{\partial x_2}\right]\right|_{t_1=1} = x_1'(1) + 1 = 0\,.$$

Используем граничные условия:

$$x_1(0) = C_1 + C_2 = 0\,, \quad x_2(0) = C_3 + C_4 = 0\,.$$

4. Определим C_1, C_2, C_3, C_4. Имеем , $C_1 = -C_2$, $C_3 = -C_4$,

$$x_2'(1) + 1 = C_3 e - C_4 e^{-1} + 1 = 0\,,$$

$$x_1'(1) + 1 = C_1 e - C_2 e^{-1} + 1 = 0\,.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{e + e^{-1}} = \frac{e}{e^2+1}\,, \quad C_1 = -\frac{e}{e^2+1}\,, \quad C_4 = \frac{e}{e^2+1}\,, \quad C_3 = -\frac{e}{e^2+1}\,.$$

В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t)\right)^T$, где

$$x_1^*(t) = x_2^*(t) = -\frac{e}{e^2+1} e^t + \frac{e}{e^2+1} e^{-t}\,.$$

Пример 2.16

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 x_1'(t) x_2'(t)\, dt + x_1(1) + x_2(1)\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0\,, \quad x_1(1) - x_2(1) = 4\,.$$

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера. Так как $F = x_1' x_2'$, $F_{x_1} = 0$, $F_{x_2} = 0$, $F_{x_1'} = x_2'$, $F_{x_2'} = x_1'$, $\frac{d}{dt} F_{x_1'} = x_2''$, $\frac{d}{dt} F_{x_2'} = x_1''$, то получаем $F_{x_1} - \frac{d}{dt} F_{x_1'} = -x_2'' = 0$, $F_{x_2} - \frac{d}{dt} F_{x_2'} = -x_1'' = 0$.

2. Найдем общее решение системы: $x_1(t) = C_1 t + C_2$, $x_2(t) = C_3 t + {}$ ${} + C_4$.

3. Запишем граничные условия и условия трансверсальности (2.47), (2.48). Учитывая, что $G = x_1 + x_2$, $\varphi(t_1, x_{11}, x_{21}) = x_{11} - x_{21} - 4 = 0$, $\delta t_1 = 0$, поскольку значение $t_1 = 1$ задано, имеем:

$$x_1(0) = C_2 = 0, \quad x_1(t) = C_1 t,$$
$$x_2(0) = C_4 = 0, \quad x_2(t) = C_3 t,$$
$$x_1(1) - x_2(1) = C_1 - C_3 = 4,$$
$$\left[F_{x_1'} + \frac{\partial G}{\partial x_1} \right]\Bigg|_{t_1=1} \delta x_{11} + \left[F_{x_2'} + \frac{\partial G}{\partial x_2} \right]\Bigg|_{t_1=1} \delta x_{21} =$$
$$= \left[x_2'(1) + 1 \right] \delta x_{11} + \left[x_1'(1) + 1 \right] \delta x_{21} = 0,$$
$$1 \cdot \delta x_{11} - 1 \cdot \delta x_{21} = 0.$$

4. Определим $C_1, \ldots, C_4$. Имеем $(C_1 + 1)\delta x_{11} + (C_1 + 1)\delta x_{21} = 0$, $\delta x_{11} = \delta x_{21}$, $C_1 - C_3 = 4$. Поэтому $(C_1 - C_3 + 2)\delta x_{21} = 0$. Так как вариация δx_{21} произвольна, то получаем $C_1 - C_3 + 2 = 0$, $C_1 - C_3 = 4$. Тогда $C_1 = 1$, $C_3 = -3$. В п. 3 найдены значения $C_2 = C_4 = 0$. В результате получена экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t) \right)^T$, где $x_1^*(t) = t$, $x_2^*(t) = -3t$.

Пример 2.17

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{t_1} \left[x_1'(t) x_2'(t) + x_1(t) \right] dt + x_1(t_1) - x_2(t_1),$$

удовлетворяющую граничным условиям: $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(t_1) + {}$ ${} + x_2(t_1) = -6$.

Решение

1. Запишем систему уравнений Эйлера. Так как $F = x_1' x_2' + x_1$, $F_{x_1} = 1$, $F_{x_1'} = x_2'$, $\frac{d}{dt} F_{x_1'} = x_2''$, $F_{x_2} = 0$, $F_{x_2'} = x_1'$, $\frac{d}{dt} F_{x_2'} = x_1''$, то

$$F_{x_1} - \frac{d}{dt} F_{x_1'} = 1 - x_2'' = 0, \quad F_{x_2} - \frac{d}{dt} F_{x_2'} = -x_1'' = 0 \quad \text{или} \quad x_1'' = 0, \; x_2'' = 1.$$

2. Находим общее решение системы:

$$x_1(t) = C_1 t + C_2, \quad x_2(t) = \frac{1}{2} t^2 + C_3 t + C_4.$$

3. Запишем граничные условия:

$$x_1(0) = C_2 = 0, \quad x_1(t) = C_1 t; \qquad x_2(0) = C_4 = 0, \quad x_2(t) = \frac{1}{2} t^2 + C_3 t,$$

$$x_1(t_1) + x_2(t_1) = C_1 t_1 + \frac{1}{2} t_1^2 + C_3 t_1 = -6.$$

Так как $G = x_1 - x_2$, $\varphi(t_1, x_{11}, x_{21}) = x_{11} + x_{21} + 6 = 0$, то условие (2.48) имеет вид $\delta\varphi = 1 \cdot \delta x_{11} + 1 \cdot \delta x_{21} = 0$ или $\delta x_{11} = -\delta x_{21}$.

Из последнего соотношения следует, что δt_1 не зависит от δx_{11}, δx_{21} и произвольно. Поэтому из условия трансверсальности (2.47) следуют два уравнения:

$$\left[F_{x_1'} + \frac{\partial G}{\partial x_1} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta x_{11} + \left[F_{x_2'} + \frac{\partial G}{\partial x_2} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} \delta x_{21} =$$

$$= \left[x_2'(t_1^*) + 1 \right] \delta x_{11} + \left[x_1'(t_1^*) - 1 \right] \delta x_{21} = 0,$$

$$\left[F + \frac{\partial G}{\partial t} - x_1' F_{x_1'} - x_2' F_{x_2'} \right] \Bigg|_{t_1^*,\, x^*(t_1^*)} =$$

$$= x_1'(t_1^*)\, x_2'(t_1^*) + x_1(t_1^*) - x_1'(t_1^*)\, x_2'(t_1^*) - x_2'(t_1^*)\, x_1'(t_1^*) = 0.$$

С учетом связи $\delta x_{11} = -\delta x_{21}$ из первого уравнения получаем $\left[x_1'(t_1^*) - x_2'(t_1^*) - 2 \right] \delta x_{21} = 0$. Так как δx_{21} произвольно, то $x_1'(t_1^*) = $ $= x_2'(t_1^*) + 2$. Из второго уравнения следует $x_1(t_1^*) - x_1'(t_1^*)\, x_2'(t_1^*) = 0$.

4. Определим $C_1, \ldots, C_4$, t_1^*. Опустив знак *, запишем систему для нахождения оставшихся неизвестных:

$$x_1'(t_1) = C_1 = x_2'(t_1) + 2 = t_1 + C_3 + 2,$$
$$x_1(t_1) - x_1'(t_1)\, x_2'(t_1) = C_1 t_1 - C_1 (t_1 + C_3) = 0,$$

$$x_1(t_1)+x_2(t_1)=C_1t_1+\frac{1}{2}t_1^2+C_3t_1=-6\,.$$

Из второго уравнения следует $C_1\,C_3=0$. Рассмотрим два варианта:

а) $C_1=0$. Тогда $C_3=-t_1-2$, $\frac{1}{2}t_1^2+(-t_1-2)\,t_1=-6$ или $t_1^2+4t_1-$ $-12=0$. В результате $t_1^*=2$, $C_3=-4$ или $t_1^*=-6$, $C_3=4$. Получаем две экстремали:

$$1)\ \ x_1^*(t)\equiv 0\,,\quad x_2^*(t)=\frac{1}{2}t^2-4t\,,\quad t_1^*=2\,;$$

$$2)\ \ x_1^*(t)\equiv 0\,,\quad x_2^*(t)=\frac{1}{2}t^2+4t\,,\quad t_1^*=-6\,.$$

Заметим, что в практических задачах аргумент t часто имеет смысл времени. Тогда значение t_1^* должно быть положительным, и имеется одна экстремаль;

б) $C_3=0$. Тогда $C_1=t_1+2$, $(t_1+2)\,t_1+\frac{1}{2}t_1^2=-6$ или $3t_1^2+4t_1+$ $+12=0$ и решений нет.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 – 8 найти экстремали функционалов.

1. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_0^{t_1}\Big[x'^{\,2}(t)-x^2(t)\Big]dt\,,\quad x(0)=1\,,\quad t_1=\frac{\pi}{4}\,.$

   Ответ: $x^*(t)=\cos t+\sin t\,.$

2. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_0^{t_1}x'^{\,2}(t)\,dt\,,\quad x(0)=0\,,\quad x(t_1)=-t_1-1\,.$

   Ответ: $x^*(t)=-2\,t\,,\quad t_1^*=1\,.$

3. $J\big[x(t)\big]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+x'^{\,2}(t)}\,dt\,,\quad x(t_0)=t_0^2\,,\quad x(t_1)=t_1-5\,.$

   Ответ: $x^*(t)=-t+\frac{3}{4}\,,\ \ t_0^*=\frac{1}{2}\,,\ \ t_1^*=\frac{23}{8}\,.$

4. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^{t_1}\frac{\sqrt{1+x'^2(t)}}{x(t)}dt$, $\quad x(0)=1$, $\; x(t_1)=t_1-1$.

Ответ: $x^*(t)=\sqrt{2-(t-1)^2}$, $\quad t_1^*=2$.

5. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_{t_0}^{t_1}x'(t)\left[x'(t)-t\right]dt$, $\quad t_0=0$, $\quad t_1=1$.

Ответ: $x^*(t)=\frac{t^2}{4}+C$.

6. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^{t_1}\frac{\sqrt{1+x'^2(t)}}{x(t)}dt$, $\quad x(0)=0$, $\; x(t_1)=t_1-10$.

Ответ: 1) $x^*(t)=\sqrt{20t-t^2}$; 2) $x^*(t)=-\sqrt{20t-t^2}$.

7. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^{t_1}\left[t\,x'(t)+x'^2(t)\right]dt$, $\quad x(0)=5$, $\; t_1=2$.

Ответ: $x^*(t)=\frac{t^2}{4}+5$.

8. Найти кратчайшее расстояние между кривыми $x(t)=t^2$ и $x(t)=t-1$.

Ответ: $x^*(t)=-t+\frac{3}{4}$, $\; t_0^*=\frac{1}{2}$, $\; t_1^*=\frac{7}{8}$, $\; J^*=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Глава 3

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

3.1. Задачи на условный экстремум с конечными связями

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $\mathrm{x}(t)=(x_1(t),...,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $\left[t_0,t_1\right]$, где t_0, t_1 заданы, т.е. $x_i(t)\in C^1\left([t_0,t_1]\right)$, $i=1,...,n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x_i(t_0)=x_{i0}, \quad x_i(t_1)=x_{i1}, \quad i=1,...,n, \tag{3.1}$$

где x_{i0}, x_{i1}, $i=1,...,n$ заданы, т.е. каждая из кривых $x_i(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки;

в) функции $x_i(t)$ при всех $t\in[t_0,t_1]$ удовлетворяют *конечным связям*:

$$\varphi_j(t,x_1(t),...,x_n(t))=0, \quad j=1,...,m, \quad m<n, \tag{3.2}$$

где функции $\varphi_j(t,x_1,...,x_n)$, $j=1,...,m$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Предполагается, что уравнения (3.2) независимы, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}=m,$$

а также связи (3.2) согласованы с граничными условиями (3.1).

Последнее означает, что координаты граничных точек должны удовлетворять уравнениям (3.2) при $t=t_0$ и $t=t_1$.

На множестве M задан функционал

$$J[x_1(t),...,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt\,, \qquad (3.3)$$

где функция $F(t, x_1,...,x_n, x_1',...,x_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор – функций $\mathrm{x}(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор – функцию $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$, на которой функционал (3.3) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[(x_1^*(t),...,x_n^*(t))\right] = \underset{\mathrm{x}(t)\in M}{\mathrm{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt\,. \qquad (3.4)$$

Поставленная задача относится к задачам поиска *условного экстремума функционалов*, так как кроме граничных условий на искомые функции наложены дополнительные условия, в данном случае конечные. В этой главе рассматриваются также задачи с интегральными и дифференциальными условиями (связями).

Стратегия решения задачи

Стратегия поиска решения задачи опирается на применение необходимого условия экстремума $\delta J = 0$. Задача (3.4) отличается от задачи (1.27) (см. разд. 1.3) только наличием условий (3.2). Поэтому воспользуемся выражением (1.31) для первой вариации функционала:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} \right] \delta x_i(t) dt\,. \qquad (3.5)$$

Так как функции $x_i(t)$ должны удовлетворять конечным связям (3.2), то их вариации $\delta x_i(t)$ не являются произвольными. Поэтому на данном этапе нельзя применить основную лемму вариационного исчисления.

Связь между вариациями находится путем варьирования уравнений (3.2):

$$\delta \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|_{\mathrm{x}^*(t)} \delta x_i(t) = 0\,, \quad j = 1,...,m\,, \qquad (3.6)$$

где $\mathrm{x}^*(t)$ – кривая, на которой достигается экстремум функционала, вариация $\partial \varphi_j$ вычислена при фиксированном значении $t \in [t_0, t_1]$.

Следовательно, только $(n-m)$ вариаций $\delta x_i(t)$ можно считать произвольными, например, $\delta x_{m+1}(t)$,…, $\delta x_n(t)$, а остальные определяются из (3.6).

Умножая почленно каждое из уравнений в (3.6) на некоторую функцию $\lambda_j(t)$ и интегрируя в пределах от t_0 до t_1, получаем

$$\int_{t_0}^{T} \lambda_j(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \delta x_i(t)\, dt = 0\,, \qquad j = 1,...,m\,. \tag{3.7}$$

Суммируя почленно (3.5) и (3.7), находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\, dt = 0\,. \tag{3.8}$$

Если ввести обозначение

$$L(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \lambda(t)) = F(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \varphi_j(t, \mathrm{x})\,, \tag{3.9}$$

где $L(t, x, x', \lambda(t))$ называется *функцией Лагранжа*, а функции $\lambda_j(t)$, $j = 1,...,m$ – *множителями Лагранжа*, $\lambda(t) = \left(\lambda_1(t),...,\lambda_m(t)\right)^T$, то уравнение (3.8) перепишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\, dt = 0\,. \tag{3.10}$$

Выберем m множителей $\lambda_1(t)$,…., $\lambda_m(t)$ так, чтобы они вместе с кривой $\mathrm{x}^*(t)$ удовлетворяли m уравнениям Эйлера

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,...,n\,. \tag{3.11}$$

Это можно сделать, так как система (3.11), записанная с учетом (3.9), имеет вид

$$F_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,...,n\,.$$

Она является линейной относительно $\lambda_j(t)$ с определителем, отличным от нуля (согласно п. «в» постановки задачи) и, следовательно, имеет решение $\lambda_1(t)$,…., $\lambda_m(t)$.

При осуществленном выборе множителей Лагранжа $\lambda_1(t)$,…., $\lambda_m(t)$ условие (3.10) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=m+1}^{n} \left[L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\, dt = 0\,, \tag{3.12}$$

где вариации $\delta x_{m+1}(t)$,…., $\delta x_n(t)$ независимы. Тогда по основной лемме вариационного исчисления (для ее применения следует положить по очереди равными нулю все вариации, кроме одной, считаемой произвольной) имеем

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = m+1,...,n\,. \tag{3.13}$$

Учитывая (3.11) и (3.13), можно сделать вывод о том, что кривая $\mathrm{x}^*(t)$ и множители Лагранжа должны удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,...,n\,. \tag{3.14}$$

Таким образом, из $(n+m)$ уравнений (3.14) и (3.2) с $2n$ граничными условиями (3.1) находится вектор – функция $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$ и множители Лагранжа $\lambda_1(t)$,…., $\lambda_m(t)$.

Сформулируем описанный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (3.4)). *Если на вектор-функции* $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$ *, где* $x_i^*(t) \in C^1\left([t_0,t_1]\right)$*, удовлетворяющей граничным условиям (3.1) и конечным связям (3.2), функционал (3.3) достигает экстремума, то функции* $x_1^*(t)$ *,…,* $x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,...,n\,,$$

составленной для функционала

$$\overline{J}[x_1(t),...,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t), \lambda(t)\right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \varphi_j(t, x_1(t),...,x_n(t)) \right] dt\,.$$

Замечание 1. На основании данной теоремы решение задачи (3.4) об условном экстремуме функционала сводится к исследованию экстремалей функционала $J^*[x_1(t),...,x_n(t)]$ при отсутствии уравнений связи.

Замечание 2. Приведенный способ, связанный с идеей снятия ограничений, аналогичен методу множителей Лагранжа для решения задач поиска условного экстремума функций.

Замечание 3. В механике связи вида (3.2) называются *голономными*.

Замечание 4. В общем случае используется *обобщенная функция Лагранжа*

$$L\left[t, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \lambda(t)\right] = \lambda_0(t)\, F(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \varphi_j(t, \mathrm{x})$$

Такая методика аналогична методике, применяемой при условной минимизации функций.

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (3.4)

1. Составить функцию Лагранжа

$$L(t, x, x', \lambda(t)) = F(t, x, x') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \varphi_j(t, x),$$

где функции $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$ – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера (3.11) и условия связи (3.2):

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\varphi_j[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)] = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

3. Найти общее решение системы

$$x_i(t) = x_i\left(t, C_1, \ldots, C_{2n}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$.

4. Определить постоянные $C_1, \ldots, C_{2n}$ из граничных условий:

$$x_i\left(t_0, C_1, \ldots, C_{2n}\right) = x_{i0}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_i\left(t_1, C_1, \ldots, C_{2n}\right) = x_{i1}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и выписать выражение для экстремали $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))^T$.

Пример 3.1

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{\pi/2} \left[x_1^2(t) + x_2^2(t) - x_1'^2(t) - x_2'^2(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=1\,,\quad x_2(0)=-1\,,\quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\,,\quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

и уравнению связи $x_1-x_2-2\cos t=0$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F=x_1^2+x_2^2-x_1'^2-x_2'^2$, $\varphi_1(t,\mathrm{x})=x_1-x_2-2\cos t$, $m=1$, то $L=F+\lambda_1(t)\cdot\varphi_1(t,\mathrm{x})=x_1^2+x_2^2-$ $-x_1'^2-x_2'^2+\lambda_1(t)(x_1-x_2-2\cos t)$.

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$L_{x_1}=2x_1+\lambda_1(t)\,,\quad L_{x_i'}=-2x_1'\,,\quad \frac{d}{dt}L_{x_1'}=-2x_1''\,,$$

$$L_{x_2}=2x_2-\lambda_1(t)\,,\quad L_{x_2'}=-2x_2'\,,\quad \frac{d}{dt}L_{x_2'}=-2x_2''\,,$$

то система уравнений имеет вид:

$$L_{x_1}-\frac{d}{dt}L_{x_1'}=2x_1+\lambda_1(t)+2x_1''=0\,,$$

$$L_{x_2}-\frac{d}{dt}L_{x_2'}=2x_2-\lambda_1(t)+2x_2''=0\,,$$

$$x_1-x_2-2\cos t=0\,.$$

3. Найдем общее решение системы.

Складывая первые два уравнения системы, получаем

$$2(x_1''+x_2'')+2(x_1+x_2)=0$$

или, вводя обозначение $x_1+x_2=y$, запишем

$$y''+y=0\,.$$

Так как характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, то $y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t=x_1+x_2$.

С другой стороны, из третьего уравнения системы следует $2\cos t=x_1-x_2$. Складывая почленно два последних уравнения, получаем

$$2x_1=C_1\cos t+C_2\sin t+2\cos t \quad \text{или} \quad x_1(t)=\frac{C_1}{2}\cos t+\frac{C_2}{2}\sin t+\cos t\,.$$

Тогда $x_2(t)=x_1(t)-2\cos t$, $\lambda_1(t)=2x_2(t)+2x_2''(t)$.

4. Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$x_1(0)=\frac{C_1}{2}+1=1\,,\qquad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{C_2}{2}=1\,.$$

Отсюда $C_1=0$, $C_2=2$ и

$$x_1^*(t) = \sin t + \cos t\,, \quad x_2^*(t) = x_1^*(t) - 2\cos t = \sin t - \cos t\,,$$
$$\lambda_1(t) = 2\sin t - 2\cos t - 2\sin t + 2\cos t = 0\,.$$

Заметим, что граничные условия и уравнения связи в задаче, очевидно, согласованы, так как

$$x_1(0) - x_2(0) - 2\cos 0 = 0\,, \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos\frac{\pi}{2} = 0\,.$$

Этот факт следует проверять перед решением задачи.

Таким образом, найдена экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$, где

$$x_1^*(t) = \sin t + \cos t\,, \quad x_2^*(t) = \sin t - \cos t\,.$$

Пример 3.2

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 \left[x_1'^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2'^2(t) \right] dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = 1\,, \quad x_1(1) = e\,, \quad x_2(1) = \frac{1}{e}$$

и уравнению связи $x_1 - x_2 - e^t + e^{-t} = 0$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F = x_1'^2 + 2x_1x_2 + x_2'^2\,, \quad \varphi_1(t, \mathrm{x}) = x_1 - x_2 - e^t + e^{-t} = 0\,, \quad m = 1\,,$$

то

$$L = F + \lambda_1(t)\cdot\varphi_1(t,\mathrm{x}) = x_1'^2 + 2x_1x_2 + x_2'^2 + \lambda_1(t)\left(x_1 - x_2 - e^t + e^{-t}\right).$$

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$L_{x_1} = 2x_2 + \lambda_1(t)\,, \quad L_{x_i'} = 2x_1'\,, \quad \frac{d}{dt}L_{x_1'} = 2x_1''\,,$$
$$L_{x_2} = 2x_1 - \lambda_1(t)\,, \quad L_{x_2'} = 2x_2'\,, \quad \frac{d}{dt}L_{x_2'} = 2x_2''\,,$$

то

$$L_{x_1} - \frac{d}{dt}L_{x_1'} = 2x_2 + \lambda_1(t) - 2x_1'' = 0\,,$$
$$L_{x_2} - \frac{d}{dt}L_{x_2'} = 2x_1 - \lambda_1(t) - 2x_2'' = 0\,,$$
$$x_1 - x_2 - e^t + e^{-t} = 0\,.$$

3. Найдем общее решение системы и выражение для $\lambda_1(t)$. Складывая первые два уравнения, получаем

$$2(x_1+x_2)-2(x_1''+x_2'')=0$$

или, вводя обозначение $x_1+x_2=y$, имеем

$$y''-y=0\,.$$

Так как характеристическое уравнение $k^2-1=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-1$, то

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}=x_1+x_2\,.$$

Из третьего уравнения $e^t-e^{-t}=x_1-x_2$. Складывая два последних уравнения, получаем

$$2x_1=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^t-e^{-t} \quad \text{или} \quad x_1(t)=\frac{C_1+1}{2}e^t+\frac{C_2-1}{2}e^{-t}\,.$$

Тогда

$$x_2(t)=x_1(t)-e^t+e^{-t}=\frac{C_1-1}{2}e^t+\frac{C_2+1}{2}e^{-t}\,,$$

$$\lambda_1(t)=2x_1(t)-2x_2''(t)\,.$$

4. Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$x_1(0)=\frac{C_1+1}{2}+\frac{C_2-1}{2}=1\,,$$

$$x_1(1)=\frac{C_1+1}{2}e+\frac{C_2-1}{2e}=e\,.$$

Отсюда $C_1=1$, $C_2=1$.

В результате найдена экстремаль $\mathrm{x}^*(t)=(x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$, где

$$x_1^*(t)=e^t\,, \qquad x_2^*(t)=e^{-t}\,.$$

При этом $\lambda_1(t)=2e^t-2e^{-t}$.

Пример 3.3

Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0;-1;\,1)$ и $B(1;\,0;-1)$, лежащими на плоскости с уравнением $t+x_1+x_2=0$.

Решение

Формализуем задачу, как вариационную. Требуется найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t)]=\int_0^1\sqrt{1+x_1'^2(t)+x_2'^2(t)}\;dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=-1\,,\quad x_2(0)=1\,,\qquad x_1(1)=0\,,\quad x_2(1)=-1$$

и уравнению связи $t+x_1+x_2=0$.

Решим сформулированную задачу, пользуясь алгоритмом.

1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F=\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}\,,\quad \varphi_1(t,\mathrm{x})=t+x_1+x_2\,,\quad m=1\,,$$

то
$$L=F+\lambda_1(t)\varphi_1(t,\mathrm{x})=\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}+\lambda_1(t)\left(t+x_1+x_2\right).$$

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$L_{x_1}=\lambda_1(t)\,,\qquad L_{x_i'}=\frac{x_1'}{\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}}\,,$$

$$L_{x_2}=\lambda_1(t)\,,\qquad L_{x_2'}=\frac{x_2'}{\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}}\,,$$

то
$$L_{x_1}-\frac{d}{dt}L_{x_1'}=\lambda_1(t)-\frac{d}{d\,t}\left(\frac{x_1'}{\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}}\right)=0\,,$$

$$L_{x_2}-\frac{d}{dt}L_{x_2'}=\lambda_1(t)-\frac{d}{d\,t}\left(\frac{x_2'}{\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}}\right)=0\,,$$

$$t+x_1+x_2=0\,.$$

3. Найдем общее решение системы и выражение для $\lambda_1(t)$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}}\right)=0\,.$$

Отсюда

$$\frac{x_1'-x_2'}{\sqrt{1+x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}}}=C\,.$$

Дифференцируя уравнение связи, имеем $x_1'=-x_2'-1$. Подставляя найденное соотношение в последнее уравнение и возводя результат подстановки в квадрат, получаем

$$(-2x_2'-1)^2=C^2\left[1+(-1-x_2')^2+x_2'^{\,2}\right]$$

или
$$4x_2'^{\,2}+4x_2'+1=C^2\left[1+1+2x_2'+x_2'^{\,2}+x_2'^{\,2}\right],$$

$$(4-2C^2)\cdot x_2'^2+(4-2C^2)x_2'+1-2C^2=0\,.$$

Очевидно, решением полученного квадратного уравнения является некоторая константа: $x_2' = C_1 = \text{const}$.

Отсюда $x_2(t) = C_1 t + C_2$, $x_1(t) = -x_2(t) - t = -C_1 t - C_2 - t$.

4. Определим C_1, C_2 из граничных условий:

$$x_2(0) = C_2 = 1\,, \qquad x_2(1) = C_1 + C_2 = -1\,.$$

Поэтому $C_1 = -2$, $C_2 = 1$ и в результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t))^T$, где $x_1^*(t) = t-1$, $x_2^*(t) = -2t+1$.

При этом $J[\mathrm{x}^*(t)] = \sqrt{6}$, $\lambda_1(t) \equiv 0$.

3.2. Задачи на условный экстремум с дифференциальными связями

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых вектор – функций $\mathrm{x}(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $\left[t_0,t_1\right]$, где t_0, t_1 заданы, т.е. $x_i(t) \in C^1\left([t_0,t_1]\right)$, $i = 1,\ldots,n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x_i(t_0) = x_{i0}\,, \quad x_i(t_1) = x_{i1}\,, \quad i = 1,\ldots,n\,, \tag{3.15}$$

где x_{i0}, x_{i1}, $i = 1,\ldots,n$ заданы, т.е. каждая из кривых $x_i(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки;

в) функции $x_i(t)$ при всех $t \in [t_0,t_1]$ удовлетворяют *дифференциальным связям*:

$$\varphi_j\left(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t)\right) = 0\,, \quad j = 1,\ldots,m\,, \quad m < n\,, \tag{3.16}$$

где функции $\varphi_j\left(t, x_1,\ldots,x_n, x_1',\ldots,x_n'\right) = 0$, $j = 1,\ldots,m$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Предполагается, что уравнения (3.16) независимы, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1'} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1'} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n'} \end{bmatrix} = m\,.$$

На множестве M задан функционал

$$J[x_1(t),...,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt\,, \qquad (3.17)$$

где функция $F(t, x_1,...,x_n, x_1',...,x_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор - функций $\mathrm{x}(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор - функцию $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$, на которой функционал (3.17) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[(x_1^*(t),...,x_n^*(t))\right] = \underset{\mathrm{x}(t)\in M}{\mathrm{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt\,. \qquad (3.18)$$

Поставленная задача называется *задачей Лагранжа.*

Стратегия решения задачи Стратегия поиска решения задачи опирается на применение необходимого условия экстремума: $\delta J = 0$. Задача (3.18) отличается от задачи (3.4) наличием производных x_1',…, x_n' в уравнениях связи (3.16).

Как и в задаче (3.4), выражение для первой вариации функционала имеет вид

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} \right] \delta x_i(t) dt\,, \qquad (3.19)$$

где вариации $\delta x_i(t)$ не являются произвольными в силу наличия дифференциальных связей (3.16).

Связь между вариациями находится путем варьирования уравнений (3.16) при фиксированном значении $t \in \left[t_0, t_1\right]$:

$$\delta\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \delta x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i'} \delta x_i'(t) = 0\,, \quad j = 1,...,m\,, \qquad (3.20)$$

где частные производные вычисляются на кривой $\mathrm{x}^*(t)$, на которой достигается экстремум функционала (3.17).

Умножая почленно каждое из уравнений в (3.20) на некоторый пока неизвестный множитель $\lambda_j(t)$ и интегрируя в пределах от t_0 до t_1, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda_j(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \delta x_i(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \lambda_j(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i'} \delta x_i'(t) dt = 0, \quad j = 1,...,m. \qquad (3.21)$$

Интегрируя каждое слагаемое второго интеграла по частям и учитывая, что $\delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0$, $i = 1,...,n$ (так как границы закреплены), имеем (процедуру интегрирования см. подробнее в разд. 1.2)

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left[\lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i'} \right] \right\} \delta x_i(t) dt = 0, \quad j = 1,...,m. \qquad (3.22)$$

Суммируя (3.22) и условие $\delta J = 0$, где δJ определяется выражением (3.19), получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ F_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left[F_{x_i'} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i'} \right] \right\} \delta x_i(t) dt = 0. \qquad (3.23)$$

Если ввести обозначение

$$L(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \lambda(t)) = F(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \varphi_j(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}'), \qquad (3.24)$$

где $L(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \lambda(t))$ называется *функцией Лагранжа*, а $\lambda_j(t)$ – *множителями Лагранжа*, $\lambda(t) = (\lambda_1(t),...,\lambda_m(t))^T$, то уравнение (3.23) перепишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left[L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\, dt = 0. \qquad (3.25)$$

Выберем m множителей $\lambda_1(t)$,…, $\lambda_m(t)$ так, чтобы они вместе с кривой $\mathrm{x}^*(t)$ удовлетворяли m уравнениям Эйлера

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0, \qquad i = 1,...,n. \qquad (3.26)$$

Если записать эти уравнения в развернутом виде (см. выражение в фигурных скобках в (3.23)), то они представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений относительно $\lambda_1(t)$,…, $\lambda_m(t)$, которая при сделанных предположениях (см. п. «в» постановки задачи) имеет решение.

При таком выборе множителей Лагранжа условие (3.25) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=m+1}^{n} \left[L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} \right] \delta x_i(t)\, dt = 0\,, \tag{3.27}$$

где вариации $\delta x_{m+1}(t)\,,\ldots,\delta x_n(t)$ независимы.

Полагая все вариации $\delta x_i(t)$ тождественно равными нулю, кроме какой-либо одной, считающейся произвольной, и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = m+1,\ldots,n\,. \tag{3.28}$$

Учитывая (3.26) и (3.28), можно сделать вывод о том, что кривая $\mathrm{x}^*(t)$ и множители Лагранжа должны удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,. \tag{3.29}$$

Таким образом, из $(n+m)$ уравнений (3.29) и (3.16) с $2n$ граничными условиями (3.15) находится вектор-функция $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t))^T$ и множители Лагранжа $\lambda_1(t)\,,\ldots,\ \lambda_m(t)$.

Сформулируем описанный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (3.18)). *Если на вектор - функции* $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t))^T$*, где* $x_i^*(t) \in C^1\left([t_0,t_1]\right)$ *удовлетворяющей граничным условиям (3.15) и дифференциальным связям (3.16), функционал (3.17) достигает экстремума, то функции* $x_1^*(t)\,,\ldots,$ $x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,,$$

составленной для функционала

$$\overline{J}[x_1(t),\ldots,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left[t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t), \lambda(t)\right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t) + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\varphi_j\left(t,x_1(t),\dots,x_n(t),x_1'(t),\dots,x_n'(t)\right)\Big]dt\,.$$

Замечание 1. На основании теоремы (стр.131) решение задачи (3.18) об условном экстремуме функционала сводится к исследованию экстремалей функционала $\overline{J}^*[x_1(t),\dots,x_n(t)]$ при отсутствии уравнений связи.

Замечание 2. В механике связи вида (3.16) называются *неголономными*.

Замечание 3. В общем случае применяется обобщенная функция Лагранжа (см. замечание 4, стр.123).

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (3.18)

1. Составить функцию Лагранжа

$$L(t,\mathrm{x},\mathrm{x}',\lambda(t))=F(t,\mathrm{x},\mathrm{x}')+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\varphi_j(t,\mathrm{x},\mathrm{x}')\,,$$

где $\lambda_j(t)$, $j=1,\dots,m$, – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера (3.29) и уравнения связи (3.16):

$$L_{x_i}-\frac{d}{dt}L_{x_i'}=0\,,\qquad i=1,\dots,n\,,$$

$$\varphi_j(t,x_1(t),\dots,x_n(t),x_1'(t),\dots,x_n'(t))=0\,,\qquad j=1,\dots,m\,.$$

3. Найти общее решение системы $x_i(t)=x_i\left(t,C_1,\dots,C_{2n}\right)$, $i=1,\dots,n$ и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(t)$,…, $\lambda_m(t)$.

4. Определить постоянные C_1,…, C_{2n} из граничных условий:

$$x_i\left(t_0,C_1,\dots,C_{2n}\right)=x_{i0}\,,\qquad i=1,\dots,n\,,$$

$$x_i\left(t_1,C_1,\dots,C_{2n}\right)=x_{i1}\,,\qquad i=1,\dots,n\,,$$

и выписать выражение для экстремали $\mathrm{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),\dots,x_n^*(t)\right)^T$.

Пример 3.4

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t)]=\int_0^1\left[x_1'^{\,2}(t)+x_2'^{\,2}(t)\right]dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0)=2\,,\quad x_2(0)=0\,,\quad x_1(1)=2\,\mathrm{ch}1\,,\quad x_2(1)=2\,\mathrm{sh}1$$

и дифференциальной связи $x_1'-x_2=0$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F(t,\mathrm{x},\mathrm{x}')=x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}\,,\qquad \varphi_1(t,\mathrm{x},\mathrm{x}')=x_1'-x_2\,,\qquad m=1\,,$$

то $L(t,\mathrm{x},\mathrm{x}',\lambda(t))=x_1'^{\,2}+x_2'^{\,2}+\lambda_1(t)(x_1'-x_2)$.

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$L_{x_1}=0\,,\quad L_{x_1'}=2x_1'+\lambda_1(t)\,,\quad \frac{d}{dt}L_{x_1'}=2x_1''+\lambda_1'(t)\,,$$

$$L_{x_2}=-\lambda_1(t)\,,\quad L_{x_2'}=2x_2'\,,\quad \frac{d}{dt}L_{x_2'}=2x_2''\,,$$

то

$$L_{x_1}-\frac{d}{dt}L_{x_1'}=-2x_1''-\lambda_1'(t)=0\,,$$

$$L_{x_2}-\frac{d}{dt}L_{x_2'}=-\lambda_1(t)-2x_2''=0\,,$$

$$x_1'-x_2=0\,.$$

3. Найдем общее решение системы. Из первых двух уравнений получаем

$$\lambda_1(t)=-2x_2''\,,\quad \lambda_1'(t)=-2x_2'''\,,\quad 2x_1''=-\lambda_1'(t)=2x_2'''\,.$$

Из третьего уравнения $x_1'=x_2$, $x_1''=x_2'$. Тогда $2x_1''=2x_2'=2x_2'''$ или $x_2'''-x_2'=0$.

Характеристическое уравнение $k^3-k=k(k^2-1)=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=-1$. Поэтому

$$x_2(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\,,$$

$$x_1(t)=\int x_2(t)\,dt=C_1e^t-C_2e^{-t}+C_3t+C_4\,,$$

$$\lambda_1(t)=-2x_2''(t)\,.$$

4. Определим постоянные $C_1,\ldots,C_4$ из граничных условий:

$$x_1(0)=C_1-C_2+C_4=2\,,$$

$$x_2(0)=C_1+C_2+C_3=0\,,$$

$$x_1(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 = 2\,\mathrm{ch}1 = 2 \cdot \frac{e + e^{-1}}{2},$$

$$x_2(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 = 2\,\mathrm{sh}1 = 2 \cdot \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = C_4 = 0$.

В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$, где

$$x_1^*(t) = e^t + e^{-t}, \quad x_2^*(t) = e^t - e^{-t}.$$

При этом $\lambda_1(t) = -2x_2''(t) = -2e^t + 2e^{-t}$.

Пример 3.5

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 \left[x_1^2(t) + 2x_1'^2(t) + x_2'^2(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = e + e^{-1}, \quad x_2(1) = 2e - e^{-1}$$

и дифференциальной связи $x_1' - x_2 = 0$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') = x_1^2 + 2x_1'^2 + x_2'^2, \quad \varphi_1(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') = x_1' - x_2, \quad m = 1,$$

то $$L(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \lambda(t)) = x_1'^2 + 2x_1'^2 + x_2'^2 + \lambda_1(t)(x_1' - x_2).$$

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Так как

$$L_{x_1} = 2x_1, \quad L_{x_1'} = 4x_1' + \lambda_1(t), \quad \frac{d}{dt} L_{x_1'} = 4x_1'' + \lambda_1'(t),$$

$$L_{x_2} = -\lambda_1(t), \quad L_{x_2'} = 2x_2', \quad \frac{d}{dt} L_{x_2'} = 2x_2'',$$

то

$$L_{x_1} - \frac{d}{dt} L_{x_1'} = 2x_1 - 4x_1'' - \lambda_1'(t) = 0,$$

$$L_{x_2} - \frac{d}{dt} L_{x_2'} = -\lambda_1(t) - 2x_2'' = 0,$$

$$x_1' - x_2 = 0.$$

3. Найдем общее решение системы. Начиная с третьего уравнения, имеем

$$x_2 = x_1', \quad x_2'' = x_1''',$$

$$\lambda_1(t) = -2x_2'' = -2x_1''' , \quad \lambda_1'(t) = -2x_1^{(4)} ,$$

$$2x_1 - 4x_1'' + 2x_1^{(4)} = 0 \quad \text{или} \quad x_1^{(4)} - 2x_1'' + x_1 = 0 .$$

Характеристическое уравнение $k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2 - 1)^2 = 0$ имеет кратные корни $k_1 = 1$, $r = 2$, $k_2 = -1$, $r = 2$, где r – кратность. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид [14] :

$$x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + (C_3 + C_4 t)e^{-t} .$$

Поэтому $x_2(t) = x_1'(t) = (C_1 + C_2 t + C_2)e^t + (C_4 - C_3 - C_4 t)e^{-t}$.

4. Определим постоянные $C_1, ..., C_4$ из граничных условий:

$$x_1(0) = C_1 + C_3 = 1 , \qquad x_2(0) = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0 ,$$

$$x_1(1) = (C_1 + C_2)e + (C_3 + C_4)e^{-1} = e + e^{-1} ,$$

$$x_2(1) = (C_1 + 2C_2)e - C_3 e^{-1} = 2e - e^{-1} .$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$.

В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$, где

$$x_1^*(t) = t\,e^t + e^{-t} , \quad x_2^*(t) = (t+1)e^t - e^{-t} .$$

При этом $\lambda_1(t) = -2x_2''(t) = -2(t+3)e^t + 2e^{-t}$.

Пример 3.6

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{\pi/2} \left[x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + 2x_1(t)\,x_2(t) \right] dt ,$$

удовлетворяющую граничным условиям:

$$x_1(0) = 1 , \quad x_2(0) = -1 , \quad x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1 , \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1 ,$$

и дифференциальной связи $x_1' + x_2' - 4t = 0$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как

$$F(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') = x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_1 x_2 , \quad \varphi_1(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}') = x_1' + x_2' - 4t = 0 , \quad m = 1 ,$$

то $L(t, \mathrm{x}, \mathrm{x}', \lambda(t)) = x_1'^2 + x_2'^2 + 2x_1 x_2 + \lambda_1(t)(x_1' + x_2' - 4t)$.

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи. Поскольку

$$L_{x_1} = 2x_2 , \quad L_{x_1'} = 2x_1' + \lambda_1(t) , \quad \frac{d}{dt} L_{x_1'} = 2x_1'' + \lambda_1'(t) ,$$

$$L_{x_2} = 2x_1\,, \quad L_{x_2'} = 2x_2' + \lambda_1(t)\,, \quad \frac{d}{dt}L_{x_2'} = 2x_2'' + \lambda_1'(t)\,,$$

то

$$L_{x_1} - \frac{d}{dt}L_{x_1'} = 2x_2 - 2x_1'' - \lambda_1'(t) = 0\,,$$
$$L_{x_2} - \frac{d}{dt}L_{x_2'} = 2x_1 - 2x_2'' - \lambda_1'(t) = 0\,,$$
$$x_1' + x_2' - 4t = 0\,.$$

3. Найдем общее решение системы. Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$2(x_1'' - x_2'') + 2(x_1 - x_2) = 0\,.$$

Обозначая $z = x_1 - x_2$, имеем $z'' + z = 0$. Так как характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$, то $z(t) = C_1 \cos t + {}$ $+ C_2 \sin t = x_1(t) - x_2(t)$.

Продифференцируем левую и правую части полученного равенства:

$$-C_1 \sin t + C_2 \cos t = x_1'(t) - x_2'(t)\,.$$

Так как из третьего уравнения системы $x_2' = 4t - x_1'$, то

$$-C_1 \sin t + C_2 \cos t = x_1'(t) - 4t + x_1'(t) = 2x_1'(t) - 4t\,.$$

Отсюда $x_1'(t) = 2t - \frac{C_1}{2}\sin t + \frac{C_2}{2}\cos t$. Интегрируя, получаем

$$x_1(t) = t^2 + \frac{C_1}{2}\cos t + \frac{C_2}{2}\sin t + C_3\,,$$

$$x_2(t) = x_1(t) - C_1 \cos t - C_2 \sin t = t^2 - \frac{C_1}{2}\cos t - \frac{C_2}{2}\sin t + C_3\,.$$

4. Определим постоянные C_1, C_2, C_3 из граничных условий:

$$x_1(0) = \frac{C_1}{2} + C_3 = 1\,, \qquad x_2(0) = -\frac{C_1}{2} + C_3 = -1\,,$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{C_2}{2} + C_3 = \frac{\pi^2}{4} + 1\,, \quad x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{C_2}{2} + C_3 = \frac{\pi^2}{4} - 1\,.$$

Отсюда $C_1 = 2$, $C_2 = 2$, $C_3 = 0$. В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$, де $x_1^*(t) = t^2 + \cos t + \sin t$, $x_2^*(t) = t^2 - \cos t - \sin t$.

3.3. Задачи на условный экстремум с интегральными связями

Постановка задачи Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $\mathrm{x}(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $x_i(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $\left[t_0,t_1\right]$, где t_0, t_1 заданы, т.е. $x_i(t) \in C^1\left([t_0,t_1]\right)$, $i = 1,...,n$;

б) функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad x_i(t_1) = x_{i1}, \quad i = 1,...,n, \tag{3.30}$$

где x_{i0}, x_{i1}, $i = 1,...,n$ заданы, т.е. каждая из кривых $x_i(t)$ проходит через две закрепленные граничные точки;

в) функции $x_i(t)$ удовлетворяют *интегральным связям*:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_j\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt = l_j, \quad j = 1,...,m, \tag{3.31}$$

где функции $F_j\left(t, x_1,...,x_n, x_1',...,x_n'\right)$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным, l_j – заданные числа. Количество интегральных связей m может быть меньше, равно или больше n.

На множестве M задан функционал

$$J[x_1(t),...,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt, \tag{3.32}$$

где функция $F_j\left(t, x_1,...,x_n, x_1',...,x_n'\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор - функций $\mathrm{x}(t)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор - функцию $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),...,x_n^*(t))^T$, на которой функционал (3.32) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[x_1^*(t),...,x_n^*(t)\right] = \underset{\mathrm{x}(t)\in M}{\mathrm{extr}} \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),...,x_n(t), x_1'(t),...,x_n'(t)\right] dt. \tag{3.33}$$

Стратегия решения задачи Рассматриваемая задача может быть сведена к задаче, описанной в разд. 3.2, путем введения новых неизвестных функций.

Введем следующие обозначения:

$$\int_{t_0}^{t} F_j\left[\tau, x_1(\tau),\dots,x_n(\tau),x_1'(\tau),\dots,x_n'(\tau)\right]d\tau = z_j(t)\,, \qquad j=1,\dots,m\,.$$

Тогда $z_j(t_0)=0$, $z_j(T)=l_j$, $j=1,\dots,m$. Дифференцируя $z_j(t)$ по t, получаем

$$z_j'(t) = F_j\left[t, x_1(t),\dots,x_n(t),x_1'(t),\dots,x_n'(t)\right], \qquad j=1,\dots,m\,.$$

Тем самым интегральные связи (3.31) заменены дифференциальными вида

$$\varphi_j = F_j\left(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{x}'(t)\right) - z_j'(t) = 0\,, \quad j=1,\dots,m$$

и граничными условиями $z_j(t_0)=0$, $z_j(t_1)=l_j$, $j=1,\dots,m$. Поэтому для решения задачи воспользуемся алгоритмом, изложенным в разд. 3.2:

а) составим функцию Лагранжа:

$$L(t,\mathrm{x},\mathrm{x}',\lambda(t)) = F(t,\mathrm{x},\mathrm{x}') + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\left[F_j\left(t,\mathrm{x},\mathrm{x}'\right) - z_j'\right];$$

б) запишем систему уравнений Эйлера:

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt}L_{x_i'} = 0\,, \quad i=1,\dots,n\,,$$

$$L_{z_j} - \frac{d}{dt}L_{z_j'} = 0\,, \quad j=1,\dots,m\,.$$

Из второй группы уравнений следует

$$\frac{d}{dt}\lambda_j(t) = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_j(t) = \lambda_j = \mathrm{const}\,, \quad j=1,\dots,m\,.$$

Первые n уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала (с учетом того, что все λ_j постоянны)

$$\overline{J}\left[\mathrm{x}(t)\right] = \int_{t_0}^{t_1}\left[F\left(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{x}'(t)\right) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j F_j\left(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{x}'(t)\right)\right]dt\,.$$

Сформулируем изложенный результат в виде теоремы.

Теорема (необходимые условия экстремума в задаче (3.33)). *Если на вектор - функции* $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t),\dots,x_n^*(t))^T$, *где* $x_i^*(t)\in C^1\left([t_0,t_1]\right)$, *удовлетворяющей граничным условиям (3.30) и интегральным связям (3.31), функционал (3.32) достигает экстремума, то функции* $x_1^*(t)$, ..., $x_n^*(t)$ *удовлетворяют системе уравнений Эйлера*

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

составленной для функционала

$$\overline{J}[x_1(t),\ldots,x_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left[t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t),\lambda\right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F\left[t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, F_j\left(t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t)\right)\right] dt\,.$$

Замечание 1. Интегральные связи (3.31) не накладывают столь жестких ограничений, как дифференциальные или конечные связи. Например, из условий типа (3.31), вообще говоря, нельзя выразить некоторые из функций $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ через остальные. Поэтому число интегральных связей не обязательно должно быть меньше n.

Замечание 2. *Изопериметрическими задачами* в узком смысле называются задачи об отыскании геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре. В настоящее время к изопериметрическим относят значительно более общий класс задач (3.33).

Замечание 3. В общем случае применяется обобщенная функция Лагранжа (см. замечание 4, стр. 123).

Алгоритм применения необходимых условий экстремума в задаче (3.33)

1. Составить функцию Лагранжа

$$L(t,\mathrm{x},\mathrm{x}',\lambda) = F(t,\mathrm{x},\mathrm{x}') + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j\left(t,\mathrm{x},\mathrm{x}'\right),$$

где λ_j, $j = 1,\ldots,m$ – множители Лагранжа (постоянные).

2. Записать систему уравнений Эйлера и уравнений связи (3.31):

$$L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0\,, \qquad i = 1,\ldots,n\,,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F_j\left[t, x_1(t),\ldots,x_n(t), x_1'(t),\ldots,x_n'(t)\right] dt = L_j\,, \quad j = 1,\ldots,m\,.$$

3. Найти общее решение системы $x_i(t) = x_i\left(t, C_1, ..., C_{2n}\right)$, $i = 1,...,n$ и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

4. Определить постоянные $C_1, \ldots, C_{2n}$ из граничных условий:

$$x_i\left(t_0, C_1, ..., C_{2n}\right) = x_{i0}\,, \quad i = 1,...,n\,,$$

$$x_i\left(t_1, C_1, ..., C_{2n}\right) = x_{i1}\,, \quad i = 1,...,n\,.$$

Выписать выражение для экстремали $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))^T$.

Пример 3.7

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^1 x'^2(t)\, dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x(1) = 6$ и интегральной связи $\int_0^1 x(t)\, dt = 3$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F = x'^2$, $m = 1$, $F_1 = x$, то $L(t, x, x', \lambda) = x'^2 + \lambda x$, где индекс "1" у множителя λ_1 для упрощения записи здесь и далее в задачах с одной интегральной связью опущен.

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнение связи. Поскольку

$$L_x = \lambda\,, \quad L_{x'} = 2x'\,, \quad \frac{d}{dt} L_{x'} = 2x''\,,$$

то

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = \lambda - 2x'' = 0\,, \quad \int_0^1 x(t)\, dt = 3\,.$$

3. Найдем общее решение уравнения и выражение для λ. Имеем

$$x''(t) = \frac{\lambda}{2}\,, \quad x'(t) = \frac{\lambda}{2} t + C_1\,, \quad x(t) = \frac{\lambda t^2}{4} + C_1 t + C_2\,,$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda t^2}{4} + C_1 t + C_2 \right] dt = \frac{\lambda t^3}{12} + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t \,\Bigg|_0^1 = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3\,.$$

4. Определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи:

$$x(0) = C_2 = 1\,, \quad x(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6\,, \quad \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3\,.$$

Отсюда

$$C_2 = 1, \quad \frac{\lambda}{4} = 6 - C_1 - C_2 = 5 - C_1, \quad \frac{\lambda}{12} = \frac{5 - C_1}{3},$$

$$\frac{5 - C_1}{3} + \frac{C_1}{2} + 1 = 3, \quad C_1 = 2, \quad \lambda = 12.$$

В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 3t^2 + 2t + 1$.

Пример 3.8

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi} x(t) \sin t \, dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 0$, $x(\pi) = \pi$ и интегральной связи $\int_0^{\pi} x'^2(t) \, dt = \frac{3\pi}{2}$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F = x \sin t$, $F_1 = x'^2$, то

$$L(t, x, x', \lambda) = x \sin t + \lambda x'^2.$$

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнение связи. Поскольку

$$L_x = \sin t, \quad L_{x'} = 2\lambda x', \quad \frac{d}{dt} L_{x'} = 2\lambda x'', \quad \text{то}$$

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = \sin t - 2\lambda x'' = 0 \quad \text{или} \quad x'' = \frac{\sin t}{2\lambda}, \quad \int_0^{\pi} x'^2(t) \, dt = \frac{3\pi}{2}.$$

3. Найдем общее решение уравнения Эйлера и выражение для λ. Дважды интегрируя левую и правую части дифференциального уравнения, получаем

$$x'(t) = -\frac{\cos t}{2\lambda} + C_1, \quad x(t) = -\frac{\sin t}{2\lambda} + C_1 t + C_2.$$

Из уравнения связи имеем

$$\int_0^{\pi} \left[C_1 - \frac{\cos t}{2\lambda} \right]^2 dt = \int_0^{\pi} \left[C_1^2 - \frac{C_1 \cos t}{\lambda} + \frac{\cos^2 t}{4\lambda^2} \right] dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[C_1^2 - \frac{C_1 \cos t}{\lambda} + \frac{1 + \cos 2t}{8\lambda^2} \right] dt = \left[C_1^2 t - \frac{C_1 \sin t}{\lambda} + \frac{t}{8\lambda^2} + \frac{\sin 2t}{16\lambda^2} \right] \Bigg|_0^{\pi} =$$

$$=C_1^2\pi+\frac{\pi}{8\lambda^2}=\frac{3\pi}{2}.$$

4. Определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи:

$$x(0)=C_2=0,\quad x(\pi)=C_1\pi+C_2=\pi,\quad C_1^2\pi+\frac{\pi}{8\lambda^2}=\frac{3\pi}{2}.$$

Отсюда $C_2=0$, $C_1=1$, $\lambda^2=\frac{1}{4}$, $\lambda=\pm\frac{1}{2}$. В результате получаем две экстремали: 1) $x^*(t)=-\sin t+t$, 2) $x^*(t)=\sin t+t$.

Пример 3.9

Найти экстремаль функционала $J[x(t)]=\int\limits_0^1 x'^2(t)\,dt$, удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=0$, $x(1)=5$ и интегральной связи $\int\limits_0^1 t\,x(t)\,dt=1$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F=x'^2$, $F_1=t\,x$, то

$$L(t,x,x',\lambda)=x'^2+\lambda\,t\,x.$$

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнение связи. Поскольку

$$L_x=\lambda t,\quad L_{x'}=2x',\quad \frac{d}{dt}L_{x'}=2x'',\quad \text{то}$$

$$L_x-\frac{d}{dt}L_{x'}=\lambda t-2x''=0,\quad \int\limits_0^1 t\,x(t)\,dt=1.$$

3. Найдем общее решение уравнения Эйлера и выражение для λ. Имеем

$$x''(t)=\frac{\lambda t}{2},\quad x'(t)=\frac{\lambda t^2}{4}+C_1,\quad x(t)=\frac{\lambda t^3}{12}+C_1 t+C_2,$$

$$\int\limits_0^1 t\left[\frac{\lambda t^3}{12}+C_1 t+C_2\right]dt=\int\limits_0^1\left[\frac{\lambda t^4}{12}+C_1 t^2+C_2 t\right]dt=$$

$$=\left[\frac{\lambda t^5}{60}+C_1\frac{t^3}{3}+C_2\frac{t^2}{2}\right]\Bigg|_0^1=\frac{\lambda}{60}+\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{2}=1.$$

4. Определим C_1, C_2, λ из граничных условий уравнения связи:

$$x(0) = C_2 = 0, \quad x(1) = \frac{\lambda}{12} + C_1 + C_2 = 5, \quad \frac{\lambda}{60} + \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 1.$$

Отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = 0$, $\lambda = 60$. В результате получаем экстремаль $x^*(t) = 5t^3$.

Пример 3.10

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)] = \int_0^{\pi/6} \left[x'^2(t) - 9x^2(t) \right] dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ и интегральной связи $\int_0^{\pi/6} 2\,x(t)\,dt = 1$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F = x'^2 - 9x^2$, $F_1 = 2x$, то

$$L(t, x, x', \lambda) = x'^2 - 9x^2 + \lambda\, 2x .$$

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнение связи. Поскольку

$$L_x = -18x + 2\lambda, \quad L_{x'} = 2x', \quad \frac{d}{dt} L_{x'} = 2x'', \text{ то}$$

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = -18x + 2\lambda - 2x'' = 0, \quad \int_0^{\pi/6} 2\,x(t)\,dt = 1.$$

3. Найдем общее решение уравнения Эйлера и выражение для λ. Имеем $x'' + 9x = \lambda$.

Так как характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 3i$, то общее решение однородного уравнения $x'' + 9x = 0$ имеет вид

$$x_o(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t .$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в форме $x_ч(t) = A$. В результате подстановки в уравнение получаем $A = \frac{\lambda}{9}$ или $x_ч(t) = \frac{\lambda}{9}$. Тогда общее решение неоднородного уравнения

$$x(t)=x_o(t)+x_ч(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{\lambda}{9}\,.$$

Из уравнения связи

$$\int\limits_0^{\pi/6}\left[2C_1\cos 3t+2C_2\sin 3t+\frac{2\lambda}{9}\right]dt=$$

$$=\left[\frac{2C_1}{3}\sin 3t-\frac{2C_2}{3}\cos 3t+\frac{2\lambda\, t}{9}\right]\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{2C_1}{3}+\frac{2C_2}{3}+\frac{\lambda\pi}{27}=1\,.$$

4. Определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи:

$$x(0)=C_1+\frac{\lambda}{9}=1,\quad x\left(\frac{\pi}{6}\right)=C_2+\frac{\lambda}{9}=0,\quad \frac{2C_1}{3}+\frac{2C_2}{3}+\frac{\lambda\pi}{27}=1.$$

Отсюда $C_2=-\dfrac{1}{\pi-4}$, $C_1=\dfrac{\pi-5}{\pi-4}$, $\lambda=\dfrac{9}{\pi-4}$. В результате получаем экстремаль $\quad x^*(t)=\dfrac{\pi-5}{\pi-4}\cos 3t-\dfrac{1}{\pi-4}\sin 3t+\dfrac{1}{\pi-4}$.

Пример 3.11

Найти экстремаль функционала

$$J[x(t)]=\int\limits_0^1 x'^2(t)\,dt\,,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x(0)=x(1)=0$ и интегральным связям $\int\limits_0^1 x(t)\,dt=1$, $\int\limits_0^1 t\,x(t)\,dt=0$.

Решение

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F=x'^2$, $F_1=x$, $F_2=t\,x$, $m=2$, то $L(t,x,x',\lambda)=x'^2+\lambda_1 x+\lambda_2\,t\,x$.

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнения связей. Поскольку

$$L_x=\lambda_1+\lambda_2\,t\,,\quad L_{x'}=2\,x'\,,\quad \frac{d}{dt}L_{x'}=2\,x''\text{, то}$$

$$L_x-\frac{d}{dt}L_{x'}=\lambda_1+\lambda_2\,t-2x''=0\,,\quad \int\limits_0^1 x(t)\,dt=1\,,\quad \int\limits_0^1 t\,x(t)\,dt=0\,.$$

3. Найдем общее решение уравнения Эйлера и выражения для λ_1, λ_2. Имеем

$$x''(t)=\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2 t}{2}, \quad x'(t)=\frac{\lambda_1 t}{2}+\frac{\lambda_2 t^2}{4}+C_1, \quad x(t)=\frac{\lambda_1 t^2}{4}+\frac{\lambda_2 t^3}{12}+C_1 t+C_2 .$$

Из уравнений связей получаем

$$\int_0^1\left[\frac{\lambda_1 t^2}{4}+\frac{\lambda_2 t^3}{12}+C_1 t+C_2\right]dt=\left[\frac{\lambda_1 t^3}{12}+\frac{\lambda_2 t^4}{48}+\frac{C_1 t^2}{2}+C_2 t\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\lambda_1}{12}+\frac{\lambda_2}{48}+\frac{C_1}{2}+C_2=1,$$

$$\int_0^1 t\left[\frac{\lambda_1 t^2}{4}+\frac{\lambda_2 t^3}{12}+C_1 t+C_2\right]dt=\frac{\lambda_1 t^4}{16}+\frac{\lambda_2 t^5}{60}+\frac{C_1 t^3}{3}+\frac{C_2 t^2}{2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\lambda_1}{16}+\frac{\lambda_2}{60}+\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{2}=0 .$$

4. Определим C_1, C_2, λ_1, λ_2 из граничных условий и уравнений связи:

$$x(0)=C_2=0, \quad x(1)=\frac{\lambda_1}{4}+\frac{\lambda_2}{12}+C_1+C_2=0,$$

$$\frac{\lambda_1}{12}+\frac{\lambda_2}{48}+\frac{C_1}{2}+C_2=1, \quad \frac{\lambda_1}{16}+\frac{\lambda_2}{60}+\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{2}=0.$$

Отсюда $C_1=36$, $C_2=0$, $\lambda_1=-384$, $\lambda_2=720$. В результате получаем экстремаль $x^*(t)=60t^3-96t^2+36t$.

Пример 3.12

Найти экстремаль функционала

$$J[x_1(t),x_2(t)]=\int_0^1 x_1'(t)x_2'(t)\,dt,$$

удовлетворяющую граничным условиям $x_1(0)=x_2(0)=x_1(1)=0$, $x_2(1)=1$ и интегральным связям $\int_0^1 x_1(t)\,dt=1$, $\int_0^1 x_2(t)\,dt=0$.

Решение.

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F=x_1' x_2'$, $F_1=x_1$, $F_2=x_2$, $m=2$, то $L=x_1' x_2'+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$.

2. Запишем систему уравнений Эйлера и уравнения связей. Поскольку

$$L_{x_1} = \lambda_1, \quad L_{x_1'} = x_2', \quad \frac{d}{dt} L_{x_1'} = x_2'',$$

$$L_{x_2} = \lambda_2, \quad L_{x_2'} = x_1', \quad \frac{d}{dt} L_{x_2'} = x_1'', \quad \text{то}$$

$$L_{x_1} - \frac{d}{dt} L_{x_1'} = \lambda_1 - x_2'' = 0,$$

$$L_{x_2} - \frac{d}{dt} L_{x_2'} = \lambda_2 - x_1'' = 0,$$

$$\int_0^1 x_1(t)\,dt = 1, \quad \int_0^1 x_2(t)\,dt = 0.$$

3. Найдем общее решение системы и выражения для λ_1, λ_2. Имеем

$$x_2''(t) = \lambda_1, \quad x_2'(t) = \lambda_1 t + C_1, \quad x_2(t) = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

$$x_1''(t) = \lambda_2, \quad x_1'(t) = \lambda_2 t + C_3, \quad x_1(t) = \frac{\lambda_2 t^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda_2 t^2}{2} + C_3 t + C_4 \right] dt = \frac{\lambda_2}{6} + \frac{C_3}{2} + C_4 = 1,$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2 \right] dt = \frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 0.$$

4. Определим $C_1, \ldots, C_4$, λ_1, λ_2 граничных условий и уравнений связей:

$$x_1(0) = C_4 = 0, \quad x_2(0) = C_2 = 0,$$

$$x_1(1) = \frac{\lambda_2}{2} + C_3 + C_4 = 0, \quad x_2(1) = \frac{\lambda_1}{2} + C_1 + C_2 = 1,$$

$$\frac{\lambda_2}{6} + \frac{C_3}{2} + C_4 = 1, \quad \frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1=-2$, $C_2=C_4=0$, $C_3=6$, $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-12$. В результате получаем экстремаль $\mathrm{x}^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t))^T$, где

$$x_1^*(t)=-6t^2+6t\,,\quad x_2^*(t)=3t^2-2t\,.$$

Пример 3.13

Среди кривых длины $l=10\arcsin\frac{3}{5}$, соединяющих точки $A(-3;0)$ и $B(3;0)$ и лежащих выше оси абсцисс, определить ту, которая вместе с отрезком AB этой оси ограничивает наибольшую площадь.

Решение

Формализуем задачу. Площадь, ограниченная кривой $x(t)$ и отрезком AB, вычисляется по формуле

$$J[x(t)]=\int_{-3}^{3}x(t)\,dt\,,$$

где $x(t)$ удовлетворяет граничным условиям $x(-3)=x(3)=0$ и интегральной связи $\int_{-3}^{3}\sqrt{1+x'^2(t)}\,dt=l=10\arcsin\frac{3}{5}$.

Требуется найти максимальное значение функционала $J[x(t)]$.

1. Составим функцию Лагранжа. Так как $F=x$, $F_1=\sqrt{1+x'^2(t)}$, то $L=x+\lambda\sqrt{1+x'^2}$.

2. Запишем уравнение Эйлера и уравнение связи. Так как L не зависит от t явно, то уравнение имеет первый интеграл (1.18):

$$L-x'L_{x'}=x+\lambda\sqrt{1+x'^2}-x'\frac{\lambda x'}{\sqrt{1+x'^2}}=C_1\quad\text{или}\quad x-C_1=-\frac{\lambda}{\sqrt{1+x'^2}}\,,$$

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{1+x'^2}\,dt=10\arcsin\frac{3}{5}\,.$$

3. Найдем общее решение. Для этого введем параметр $x'=\operatorname{tg}\tau$. Тогда $x-C_1=-\lambda\cos\tau$, $\frac{dx}{dt}=\operatorname{tg}\tau$.

Из последнего уравнения получаем $dt = \dfrac{dx}{\operatorname{tg}\tau}$. Но из $x - C_1 = -\lambda\cos\tau$ имеем $dx = \lambda\sin\tau\, d\tau$. Поэтому $dt = \dfrac{dx}{\operatorname{tg}\tau} = \dfrac{\lambda\sin\tau\, d\tau}{\operatorname{tg}\tau} = \lambda\cos\tau\, d\tau$. Отсюда $t = \lambda\sin\tau + C_2$ и в результате получаем уравнение семейства экстремалей в параметрической форме:

$$t - C_2 = \lambda\sin\tau,$$
$$x - C_1 = -\lambda\cos\tau.$$

Исключая параметр τ, имеем уравнение окружности

$$(x - C_1)^2 + (t - C_2)^2 = \lambda^2.$$

4. Определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи. Получаем

$$C_1^2 + (-3 - C_2)^2 = \lambda^2, \quad C_1^2 + (3 - C_2)^2 = \lambda^2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим

$$(3 - C_2)^2 - (-3 - C_2)^2 = -12C_2 = 0 \quad \text{или} \quad C_2 = 0.$$

Учитывая, что $C_2 = 0$ и искомая область лежит над осью абсцисс, преобразуем уравнение окружности $x(t) = C_1 \pm \sqrt{\lambda^2 - t^2}$, $x \ge 0$.

Найдем $x'(t) = \mp\dfrac{t}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}$ и подставим в интегральную связь:

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{1 + \frac{t^2}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}}\,dt = \int_{-3}^{3}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}\,dt =$$

$$= \lambda\arcsin\frac{t}{\lambda}\Big|_{-3}^{3} = 2\lambda\arcsin\frac{3}{\lambda} = 10\arcsin\frac{3}{\lambda}.$$

Отсюда $\lambda = 5$, $C_1^2 + 9 = 25$, $C_1 = \pm 4$.

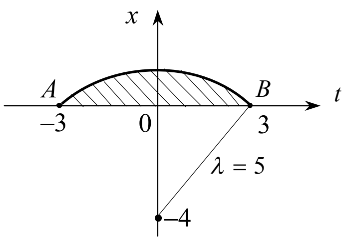


Рис. 3.1

В результате получаем уравнения двух окружностей (экстремалей):

$$(x-4)^2+t^2=25,$$

$$(x+4)^2+t^2=25.$$

Второй экстремали соответствует площадь, изображенная на рис. 3.1. На ней достигается максимум функционала в решаемой задаче. Первой экстремали соответствует область под осью абсцисс.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 – 4 найти экстремали функционалов с конечными связями.

1. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\sqrt{1+x_1'^2(t)+x_2'^2(t)}\,dt$,

   $x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$, $x_1(1)=2$, $x_2(1)=1$,

   $2x_1-x_2-3t=0$.

   Ответ: $x_1^*(t)=t+1$, $x_2^*(t)=-t+2$.

2. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)\right]dt$,

   $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=0$, $x_1(1)=-1$, $x_2(1)=1$,

   $x_1+x_2-2t^2+t+1=0$.

   Ответ: $x_1^*(t)=t^2-t-1$, $x_2^*(t)=t^2$.

3. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+1\right]dt$,

   $x_1(0)=x_2(0)=0$, $x_1(1)=2$, $x_2(1)=0$,

   $x_1+x_2-2t^2=0$.

   Ответ: $x_1^*(t)=t^2+t$, $x_2^*(t)=t^2-t$.

4. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+t^3\right]dt$,

$x_1(0)=2$, $x_2(0)=1$, $x_1(1)=1$, $x_2(1)=2$,

$x_1-2x_2+3t=0$.

Ответ: $x_1^*(t)=2-t$, $x_2^*(t)=t+1$.

В задачах 5 – 7 найти экстремали функционалов с дифференциальными связями.

5. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^1\left[x_1'^2(t)+x_2^2(t)\right]dt$,

$x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$, $x_1(1)=1$, $x_2(1)=0$, $x_1'-x_2=0$.

Ответ: $x_1^*(t)=t$, $x_2^*(t)=1$.

6. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^\pi\left[x_1'^2(t)-x_2'^2(t)\right]dt$,

$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_1(\pi)=0$, $x_2(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$,

$x_1'-x_2-t\cos t=0$.

Ответ: $x_1^*(t)=\dfrac{t}{2}\sin t$, $x_2^*(t)=\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

7. $J\left[x_1(t),x_2(t)\right]=\int\limits_0^{\pi/2}\left[x_1'^2(t)-x_2'^2(t)\right]dt$,

$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, $x_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$,

$x_1'-x_2-\sin t=0$.

Ответ: $x_1^*(t)=\dfrac{t}{2}\sin t$, $x_2^*(t)=\dfrac{t}{2}(t\cos t-\sin t)$.

В задачах 8 – 15 найти экстремали функционалов с интегральными связями.

8. $J\left[x(t)\right]=\int\limits_0^\pi x'^2(t)\,dt$, $x(0)=1$, $x(\pi)=-1$, $\int\limits_0^\pi x(t)\cos t\,dt=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $x^*(t)=\cos t$.

9. $J[x(t)] = \int\limits_0^1 x'^2(t)\,dt$, $x(0)=0$, $x(1)=1$, $\int\limits_0^\pi t\,x(t)\,dt = 0$.

Ответ: $x^*(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$.

10. $J[x(t)] = \int\limits_0^\pi x'^2(t)\,dt$, $x(0)=0$, $x(\pi)=1$, $\int\limits_0^\pi x(t)\sin t\,dt = 0$.

Ответ: $x^*(t) = \frac{1}{\pi}(t - 2\sin t)$.

11. $J[x(t)] = \int\limits_0^1 x'^2(t)\,dt$, $x(0)=0$, $x(1)=2$, $\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt = 4$.

Ответ: $x^*(t) = \frac{2\,\mathrm{sh}t}{\mathrm{sh}1}$.

12. $J[x(t)] = \int\limits_0^\pi x(t)\sin t\,dt$, $x(0)=0$, $x(\pi)=0$, $\int\limits_0^\pi x'^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1) $x^*(t) = \sin t$, 2) $x^*(t) = -\sin t$.

13. $J[x(t)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x'^2(t)\,dt$, $x(0)=0$, $x(1)=0$, $\int\limits_0^1 t\,x'(t)\,dt = 2$.

Ответ: $x^*(t) = 12t(t-1)$.

14. $J[x(t)] = \int\limits_0^1 x'^2(t)\,dt$, $x(0)=0$, $x(1)=0$, $\int\limits_0^1 x(t)\,dt = -1$.

Ответ: $x^*(t) = 6t(t-1)$.

15. $J[x_1(t), x_2(t)] = \int\limits_0^1 x_1'(t)\,x_2'(t)\,dt$,

$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_1(1)=0$, $x_2(1)=1$,

$\int\limits_0^1 t\,x_1(t)\,dt = 0$, $\int\limits_0^1 t\,x_2(t)\,dt = 0$.

Ответ: $x_1^*(t) \equiv 0$, $x_2^*(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$.

Глава 4

ОПТИМАЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Задачи классического вариационного исчисления

Постановка задачи Задача синтеза оптимального управления может быть сформулирована как вариационная задача.

Пусть поведение объекта управления задается системой дифференциальных уравнений первого порядка в векторной форме

$$\frac{d\mathrm{x}(t)}{dt} = \mathrm{f}\left(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t)\right), \tag{4.1}$$

где $\mathrm{x}(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^T \in R^n$ – *фазовый вектор* или *вектор состояния*; $\mathrm{u}(t) = \left(u_1(t), \ldots, u_m(t)\right)^T \in R^m$ – *вектор управления*, $t \in \left[t_0, t_1\right]$ – время, $\mathrm{f}(t, \mathrm{x}, u) = (f_1(t, \mathrm{x}, u), \ldots, f_n(t, \mathrm{x}, u))^T$ – вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по всем переменным.

Краевые (граничные) условия фазовой траектории в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени в общем виде можно записать так:

$$\mathrm{x}(t_0) \in X_0 \subset R^n, \quad \mathrm{x}(t_1) \in X_1 \subset R^n. \tag{4.2}$$

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества системы, задается следующим функционалом:

$$J\left(\mathrm{x}, \mathrm{u}\right) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t)\right) dt. \tag{4.3}$$

Задача оптимального управления формулируется следующим образом:

Определение. При заданных уравнениях объекта управления (4.1) и краевых условиях (4.2) требуется найти такое управление $\mathrm{u}^*(t)$ и фа-

зовую траекторию $\mathrm{x}^*(t)$, при которых критерий (4.3) принимает *минимальное*
(или *максимальное*) значение. Тогда управление $\mathrm{u}^*(t)$ и траектория $\mathrm{x}^*(t)$ называются *оптимальными*.

К задаче (4.1) – (4.3) применимы методы классического вариационного исчисления при условии, что управление $\mathrm{u}(t)$ принадлежит классу *кусочно-непрерывных* функций, а траектория $\mathrm{x}(t)$ – классу кусочно-гладких функций. Для решения задач с замкнутой областью управления $U \subset R^m$ применяются *неклассические вариационные методы* (принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования).

Алгоритм решения задачи (4.1) – (4.3) аналогичен алгоритму, рассмотренному в разделе 3.2 (стр. 132).

Алгоритм решения задачи (4.1) – (4.3)

1. Составить функцию Лагранжа

$$L(t,\mathrm{x},\mathrm{x}',\lambda) = F(t,\mathrm{x},\mathrm{x}') + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\Big(\mathrm{x}'(t) - \mathrm{f}\big(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t)\big)\Big),$$

где функции $\lambda_j(t)$, $j=1,...,n$ – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера (3.11) и уравнения связи (4.1):

$$\begin{cases} L_{x_j} - \dfrac{d}{dt} L_{x'_j} = 0, \quad j=1,...,n; \\ L_{u_i} - \dfrac{d}{dt} L_{u'_i} = 0, \; i=1,...,m; \\ L_{\lambda_j} - \dfrac{d}{dt} L_{\lambda'_j} = x'_j(t) - f_j\big(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t)\big) = 0, \quad j=1,...,n. \end{cases}$$

3. Найти общее решение системы

$$x_j(t) = x_j\big(t, C_1,...,C_{2n}\big), \quad j=1,...,n,$$

$$\lambda_j(t) = \lambda_j\big(t, C_1,...,C_{2n}\big), \quad j=1,...,n,$$

в том числе и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(t),\ldots,\ \lambda_n(t)$.

4. Определить постоянные $C_1,\ldots,\ C_{2n}$ из граничных условий:

$$x_j\big(t_0, C_1,...,C_{2n}\big) = x_{j0}, \quad j=1,...,n,$$

$$x_j\left(t_1, C_1, ..., C_{2n}\right) = x_{j1}, \quad j = 1, ..., n,$$

и выписать выражение для экстремалей

$$\mathrm{u}^*(t) = (u_1^*(t), ..., u_m^*(t))^T, \quad \mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), ..., x_n^*(t))^T.$$

Пример 4.1

Рассмотрим задачу об оптимальном управлении электроприводом, динамика которого описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t), \end{cases} \tag{4.4}$$

где $x_1(t)$ – угол поворота вала электродвигателя и $x_2(t)$ – скорость поворота, $u(t)$ – управление.

Необходимо определить оптимальный процесс перевода системы (4.4) из одной точки фазового пространства

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0, \tag{4.5}$$

в другую заданную точку фазового пространства

$$x_1(t_1) = \alpha_0, \quad x_2(t_1) = 0 \tag{4.6}$$

за фиксированный отрезок времени $T = (t_1 - t_0)$, затрачивая при этом минимум энергии управляющего сигнала, т.е. функционалом минимизации является интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)\,dt \to \min.$$

Для построения конкретных временных диаграмм предположим, что $t_0 = 0$, $t_1 = T$.

Решение

Для определения оптимального управления $u^*(t)$ и оптимальной фазовой траектории $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t)\right)$ воспользуемся уравнениями Эйлера (3.11).

1. Составим функцию Лагранжа

$$L(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \lambda) = u^2(t) + \lambda_1(t)\left(x_1'(t) - x_2(t)\right) + \lambda_2(t)\left(x_2'(t) - u(t)\right).$$

Получаем задачу безусловной оптимизации с теми же граничными условиями (4.5) и (4.6) в виде функционала

$$\overline{J} = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathrm{x}, u, \lambda)\, dt \to \min . \tag{4.7}$$

2. Применяем уравнения Эйлера к функционалу (4.7).

$$\begin{cases} L_{x_j} - \dfrac{d}{dt} L_{x_j'} = 0, \quad j = 1,\, 2; \\ L_u - \dfrac{d}{dt} L_{u'} = 0; \\ L_{\lambda_j} - \dfrac{d}{dt} L_{\lambda_j'} = 0, \quad j = 1,\, 2. \end{cases}$$

Вычисляем соответствующие производные уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1'} = \lambda_1(t), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1'}\right) = \frac{d\lambda_1}{dt},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda_1(t), \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2'} = \lambda_2(t), \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1'}\right) = \frac{d\lambda_2}{dt},$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2u(t) - \lambda_2(t), \qquad \frac{\partial L}{\partial u'} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1'(t) - x_2(t), \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_2'(t) - u(t).$$

Подставляя найденные величины в уравнения Эйлера, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = 0, \quad \lambda_2'(t) + \lambda_1(t) = 0, \quad 2u(t) - \lambda_2(t) = 0, \\ x_1'(t) - x_2(t) = 0, \quad x_2'(t) - u(t) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

3. Находим общее решение. Решая систему (4.8), последовательно находим:

$$\lambda_1(t) = C_1, \quad \lambda_2(t) = -C_1 t + C_2,$$

$$u(t) = -\frac{C_1}{2} t + \frac{C_2}{2}, \tag{4.9}$$

$$x_2(t) = -\frac{C_1}{4} t^2 + \frac{C_2}{2} t + C_3, \tag{4.10}$$

$$x_1(t) = -\frac{C_1}{12} t^3 + \frac{C_2}{4} t^2 + C_3 t + C_4. \tag{4.11}$$

4. Определяем постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 в (4.9) – (4.11), используя граничные условия (4.5) и (4.6) при $t_0 = 0$, $t_1 = T$. После несложных вычислений находим:

$$C_1 = \frac{24\alpha_0}{T^3}, \quad C_2 = \frac{12\alpha_0}{T^2}, \quad C_3 = 0, \; C_4 = 0.$$

Для заданных граничных условий (4.5) – (4.6) можно окончательно записать экстремали: $\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t); x_2^*(t)\right)$, где

$$x_1^*(t) = -\frac{2\alpha_0}{T^3}t^3 + \frac{3\alpha_0}{T^2}t^2, \quad x_2^*(t) = -\frac{6\alpha_0}{T^3}t^2 + \frac{6\alpha_0}{T^2}t;$$

$$u^*(t) = -\frac{12\alpha_0}{T^3}t + \frac{6\alpha_0}{T^2}. \tag{4.12}$$

Графики $u^*(t)$ и $x_2^*(t)$, соответствующие выражениям (4.12), приведены на рис. 4.1.

Как видно из рис. 4.1, управляющее воздействие $u^*(t)$ (ток якоря двигателя) должно меняться по линейному закону, а скорость поворота вала двигателя $x_2^*(t)$ – по параболе, где α_0 – заданный угол поворота вала двигателя.

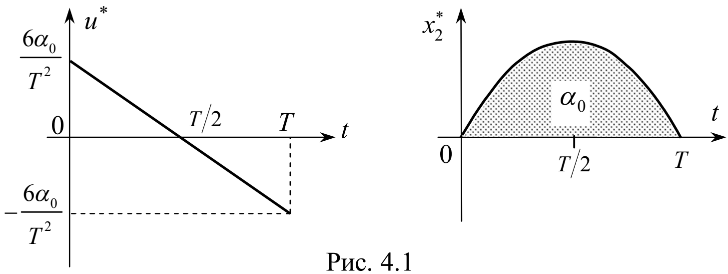


Рис. 4.1

Пример 4.2 (*при ограничениях на фазовые координаты*)

На основании примера 4.1 при той же постановке задачи оптимального управления рассмотрим влияние ограничения по скорости на решение задачи в следующем виде

$$|x_2(t)| \le \eta, \quad \eta > 0. \tag{4.13}$$

Исследуем решение задачи 4.1 с учетом условия (4.13). Из (4.12) следует, что решение относительно переменной $x_2^*(t)$ должно удовлетворять условию

$$x_2^*(t) = -\frac{6\alpha_0}{T^3}t^2 + \frac{6\alpha_0}{T^2}t \le \eta\,. \qquad (4.14)$$

Очевидно, что максимальное значение скорости: $x_2^*\left(T/2\right) = \left(3\alpha_0/(2T)\right)$. Поэтому при $\eta \ge \frac{3\alpha_0}{2T}$ решением задачи является (4.12). Если имеет место условие $\eta < \frac{3\alpha_0}{2T}$, то оптимальная траектория $x_2(t)$ состоит из трех частей (рис. 4.2): одна часть AB лежит вне запрещенной области M и поэтому имеет форму параболы (4.10)

$$x_2(t) = -\frac{C_1}{4}t^2 + \frac{C_2}{2}t + C_3\,;$$

вторая часть CD также принадлежит области допустимых значений для $x_2(t)$ и поэтому будет иметь форму параболы, но с другими коэффициентами:

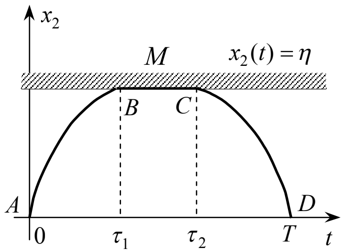


Рис. 4.2

$$\overline{x}_2(t) = -\frac{\overline{C}_1}{4}t^2 + \frac{\overline{C}_2}{2}t + \overline{C}_3\,;$$

третья часть BC (рис. 4.2) совпадает с границей области M, поэтому

$$x_2(t) = \eta$$

и соединяет первые две части.

Обозначим через τ_1 и τ_2 те моменты времени t, когда сопрягаются указанные части оптимальной траектории. Эти моменты времени неизвестны и подлежат определению.

В соответствии с (4.9) – (4.11) оптимальный процесс имеет вид:

1) на отрезке времени $[0, \tau_1]$:

$$u(t) = -\frac{C_1}{2}t + \frac{C_2}{2}\,,$$

$$x_1(t) = -\frac{C_1}{12}t^3 + \frac{C_2}{4}t^2 + C_3 t + C_4\,,\quad x_2(t) = -\frac{C_1}{4}t^2 + \frac{C_2}{2}t + C_3\,, \qquad (4.15)$$

;

2) на отрезке времени $[\tau_2, T]$:

$$\bar{u}(t) = -\frac{\bar{C}_1}{2}t + \frac{\bar{C}_2}{2},$$

$$\bar{x}_1(t) = -\frac{\bar{C}_1}{12}t^3 + \frac{\bar{C}_2}{4}t^2 + \bar{C}_3 t + \bar{C}_4, \quad \bar{x}_2(t) = -\frac{\bar{C}_1}{4}t^2 + \frac{\bar{C}_2}{2}t + \bar{C}_3, \tag{4.16}$$

3) на отрезке времени $[\tau_1, \tau_2]$:

$$\bar{\bar{u}}(t) = 0, \quad \bar{\bar{x}}_2(t) = \eta, \quad \bar{\bar{x}}_1(t) = \eta t + \bar{\bar{C}}_4. \tag{4.17}$$

Система соотношений (4.15) – (4.17) показывает, что оптимальный процесс управления определяется девятью произвольными постоянными интегрирования и двумя параметрами τ_1, τ_2 моментов сопряжения. Они находятся из граничных условий (4.5), (4.6)

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0; \quad x_1(T) = \alpha_0, \quad x_2(T) = 0;$$

и условий сопряжения участков траектории

$$\bar{x}_1(\tau_1) = x_1(\tau_1), \quad \bar{x}_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = \eta;$$

$$\bar{\bar{x}}_1(\tau_2) = \bar{x}_1(\tau_2), \quad \bar{\bar{x}}_2(\tau_1) = \bar{x}_2(\tau_1) = \eta;$$

$$\bar{\bar{x}}_1'(\tau_1) = \eta, \quad \bar{x}_1'(\tau_2) = \eta;$$

$$\bar{\bar{x}}_2'(\tau_1) = 0, \quad \bar{x}_2'(\tau_2) = 0;$$

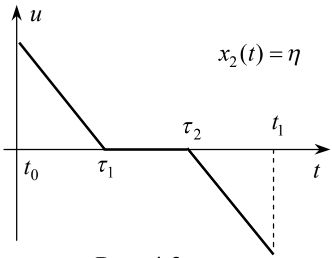


Рис. 4.3

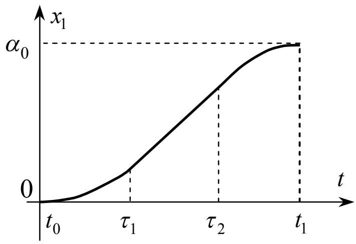


Рис. 4.4

На рис. 4.3, 4.4 изображены графики функций $u^*(t)$ и $x_1^*(t)$.

Применение уравнений Эйлера при ограничениях на управление

Рассмотрим линейную систему управления:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j(t) + b_i\, u(t), \quad i = \overline{1,n} \tag{4.18}$$

(некоторые из коэффициентов b_i могут быть равны нулю). Пусть функционалом, экстремум которого надлежит определить, является минимальное время достижения системой положения равновесия, т. е.

$$J=\int_0^T dt \to \min\,,\quad x_j(T)=0\,,\quad j=\overline{1,\,n}\,,$$

и ограничения наложены только на управление $u(t)$.

Данную *задачу о быстродействии* сводим, согласно правилу построения функции Лагранжа, к задаче о минимуме линейного функционала

$$\int_0^T L\,dt=\int_0^T\left[1+\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\left(x_i'-\sum_{j=1}^n a_{ij}\,x_j(t)-b_i\,u(t)\right)\right]dt \qquad (4.19)$$

при граничных условиях $x_j(0)=x_{j0}$; $x_j(T)=0\quad (j=\overline{1,n})$ и ограничении по модулю $|\,u(t)\,|\le 1$.

Необходимым условием экстремума, достигаемого не на границе области, является выполнение системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} L_{x_i}-\dfrac{d}{dt}L_{x_i'}=0,\;\; i=\overline{1,\,n};\\ L_u=-\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\,b_i=0. \end{cases} \qquad (4.20)$$

При этом последнее уравнение в (4.20) может выполняться лишь в особом случае, когда

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\,b_i=0\,, \qquad (4.21)$$

т.е. когда функции (множители Лагранжа) $\lambda_i(t)$ линейно зависимые.

Следовательно, за исключением особого случая, экстремалей внутри области допустимых решений не существует. Таким образом, экстремум может достигаться на границе области, где $|\,u\,|=1$, т. е. либо $u=+1$, либо $u=-1$. Поскольку в функцию Лагранжа L не входит производная $u'(t)$, то экс-

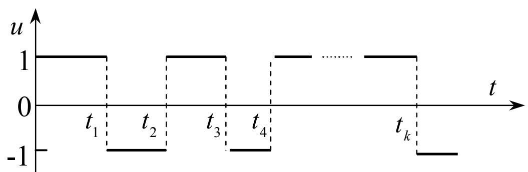


Рис. 4.5

тремум может достигаться на разрывной функции $u(t)$, скачком переходящей
от значения $u=+1$ к значению $u=-1$ и обратно (рис. 4.5). Для полного определения функции $u(t)$ достаточно теперь найти абсциссы точек разрыва $t_1, t_2, ..., t_k$.

Следовательно, функционал (4.19) на самом деле является функцией от переменных $t_1, t_2, ..., t_k$ (координат точек разрыва) и можно обычными методами дифференциального исчисления искать значения $t_1, t_2, ..., t_k$ доставляющие экстремум функции L.

Задачу вариационного исчисления на этом можно считать решенной: мы свели ее к задаче принципиально более простой – задаче на экстремум функции конечного числа переменных.

Однако на практике отыскать точки разрыва методами дифференциального исчисления нелегко, особенно если учесть, что число их неизвестно.

Для их нахождения применим следующий прием: условие $|u|=1$ эквивалентно условию [10, 11]

$$\int_0^T u^{2k} dt = T, \quad \text{где } k \text{ – целочисленное и } k \to \infty. \tag{4.22}$$

Действительно, если $|u|>1$, то $u^{2k} \to \infty$ при $k \to \infty$ и интеграл стремится к бесконечности; если же, наоборот, пусть на небольшом участке $|u|<1$, то $u^{2k} \to 0$ при $k \to \infty$ и значение интеграла будет меньше T. Поэтому задача об экстремуме функционала (4.19) при условии $|u|=1$ эквивалентна изопериметрической задаче: найти экстремум функционала (4.19) при условии (4.22).

Для этой изопериметрической задачи функция Лагранжа имеет вид

$$L_1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \left(x_i' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) - b_i u(t) \right) + \lambda_0 u^{2k},$$

и в качестве уравнений Эйлера получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_i' + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, n}); & (4.23) \\ L_u = -\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + 2k\lambda_0 u^{2k-1} = 0 \, . & (4.24) \end{cases}$$

Из уравнения (4.24) следует, что

$$u = \sqrt[2k-1]{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i b_i}{2k\lambda_0}} \, ,$$

но при $k \to \infty$ корень степени $2k-1$ из любого числа A совпадает по знаку с этим числом, т.е. $\sqrt[2k-1]{A} = 1$, если $A > 1$, и $\sqrt[2k-1]{A} = -1$, если $A < 1$.

Символически это записывается так: $u = \operatorname{sign} A = \operatorname{sign} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i b_i}{2k\lambda_0}$, где символ sign означает, что $u = +1$, если $A > 0$, и $u = -1$, если $A < 0$.

Можно доказать общую теорему о числе переключений от $u = +1$ к $u = -1$ в линейных системах [11].

Пример 4.3

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия следующей системы управления

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t) \end{cases} \qquad (4.25)$$

при ограничении на управление $|u(t)| \le 1$. Предполагается, что граничные условия заданы. Определить экстремаль $u^*(t)$.

Решение

Полагая, что экстремалью является кусочно-постоянная функция $|u(t)| = 1$, введем еще одно условие (4.22)

$$\int_0^T u^{2k} dt = T \, , \quad \text{где} \quad k \to \infty \, . \qquad (4.26)$$

При указанных условиях требуется решить задачу о быстродействии системы (4.25), т.е. минимизировать выражение

$$\int_0^T dt = T \to \min \, . \qquad (4.27)$$

Следовательно, подынтегральная функция $F = 1$ функционала (4.27).

Таким образом, функция Лагранжа имеет вид

$$L(\mathrm{x},u,\lambda)=1+\lambda_0 u^{2k}(t)+\lambda_1(t)\big(x_1'(t)-x_2(t)\big)+\lambda_2(t)\big(x_2'(t)-u(t)\big),$$

где λ_0 – множитель Лагранжа, не зависящий от времени, а $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ – функции времени. В качестве экстремалей должны быть найдены функ-
ции $u(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, поэтому составляем уравнения Эйлера для каждой из неизвестных

$$\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)=\lambda_0 2ku^{2k-1}(t)-\lambda_2(t)=0, \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1'}\right)=-\frac{d\lambda_1(t)}{dt}=0, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_2'}\right)=-\lambda_1(t)-\frac{d\lambda_2(t)}{dt}=0. \tag{4.30}$$

Из уравнения (4.28) следует, что

$$u(t)=\sqrt[2k-1]{\frac{\lambda_2(t)}{2k\lambda_0}}. \tag{4.31}$$

Заметим, что при целом $k\to\infty$ для любого числа A справедливы следующие равенства (стр. 160)

$$\sqrt[2k-1]{A}=\begin{cases}+1, & \text{если } A>0;\\ -1, & \text{если } A<0.\end{cases}$$

Это равенство по определению функции $\operatorname{sign}A$ можно переписать в виде

$$\sqrt[2k-1]{A}=\operatorname{sign}A,\ \text{где}\ \ k\to\infty.$$

С учетом этого запишем закон оптимального управления (4.31):

$$u(t)=\operatorname{sign}\left(\frac{\lambda_2(t)}{2k\lambda_0}\right). \tag{4.32}$$

Так как k и λ_0 постоянные величины, то поведение функции $u(t)$ определяется только изменением функции $\lambda_2(t)$. Из (4.29) следует, что $\lambda_1=C_1=\mathrm{const}$, а из (4.30) находим

$$\lambda_2(t) = -C_1 t + C_2\,, \tag{4.33}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые можно найти из граничных условий задачи.

Подставляя (4.33) в (4.31), получим окончательно

$$u^*(t) = \mathrm{sign}\left(\frac{1}{k(a_2 - a_1 t)}\right), \tag{4.34}$$

где $a_1 = \dfrac{C_1}{2\lambda_0}$, $a_2 = \dfrac{C_2}{2\lambda_0}$, $k > 0$.

Из (4.34) видно, что управление $u^*(t)$ может сменить знак не более одного раза, т.е. может содержать не более двух интервалов постоянства.

4.2. Оптимальное программное управление. Принцип максимума

Постановка задачи

В разделе 4.1 показано, что для отыскания экстремали при наличии ограничений могут быть использованы методы классического вариационного исчисления, требующие определенной модификации. Однако для такого типа задач разработаны специальные методы, которые принято называть *неклассическими вариационными методами*. К ним относится *принцип максимума*.

Пусть поведение *модели объекта управления* описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathrm{x}(t)}{dt} = \mathrm{f}(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t))\,, \tag{4.35}$$

где x – *вектор состояния системы*, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$; u – *вектор управления*, $\mathrm{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T \in U \subseteq R^m$, U – некоторое заданное *множество допустимых значений управления*; t – время, $t \in T = [t_0, t_1]$ – *промежуток времени функционирования системы*; $\mathrm{f}(t, \mathrm{x}, u)$ – непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция, $\mathrm{f}(t, \mathrm{x}, u) = \left(f_1(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}), \ldots, f_n(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})\right)^T$, $\mathrm{f}(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}): T \times R^n \times U \to R^n$; R^n – n-мерное евклидово пространство.

Момент начала процесса t_0 задан, а момент окончания процесса t_1 определяется первым моментом достижения точкой $(t, \mathrm{x}(t))$ некоторой заданной поверхности $S \subset R^{n+1}$:

$$S = \left[(t_1, \mathrm{x}) \,|\, S_i(t_1, \mathrm{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, k;\ t_1 \in (t_0, +\infty),\ \mathrm{x} \in R^n \right], \qquad (4.36)$$

т.е. в момент t_1 должны выполняться условия

$$S_i\left(t_1, \mathrm{x}(t_1)\right) = 0,\ \ i = 1, \ldots, k\,,$$

где $0 \le k \le n+1$, при $k = n+1$ множество S представлено точкой в пространстве R^{n+1}, функции $S_i(t_1, \mathrm{x})$ непрерывно дифференцируемы; система векторов $\left(\dfrac{\partial S_i(t_1, \mathrm{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial S_i(t_1, \mathrm{x})}{\partial x_n}, \dfrac{\partial S_i(t_1, \mathrm{x})}{\partial t_1} \right)$, $i = 1, \ldots, k$ линейно независима для всех $(t_1, \mathrm{x}) \in R^{n+1}$.

Начальное условие $\mathrm{x}(t_0) = \mathrm{x}_0$ задает начальное состояние системы.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени, т.е. система управления в данном случае является *разомкнутой* по состоянию и рассматривается так называемое *программное управление*.

Множество допустимых управлений U_0 образуют кусочно-непрерывные функции $u(\cdot)$ со значениями в множестве U. В точках разрыва значение управления определяется как предел справа.

Определим *множество допустимых процессов* $D(t_0, \mathrm{x}_0)$ как множество троек $d = (t_1, \mathrm{x}(\cdot), \mathrm{u}(\cdot))$, которые включают момент окончания процесса t_1, траекторию $\mathrm{x}(\cdot)$ и управление $\mathrm{u}(\cdot)$ (где для всех $t \in T$: $\mathrm{x}(t) \in R^n$, $\mathrm{u}(t) \in U$, функции $\mathrm{x}(\cdot)$ непрерывны и кусочно - дифференцируемы, а $\mathrm{u}(t) \in \mathrm{U}_0$ кусочно-непрерывны), удовлетворяющие уравнению (4.35) с начальным условием $\mathrm{x}(t_0) = \mathrm{x}_0$ почти всюду на множестве T и условию (4.36).

На множестве $D(t_0, \mathrm{x}_0)$ определим *функционал качества управления*

$$J(d)=\int_{t_0}^{t_1} F\big(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t)\big)dt+G\big(t_1,\mathrm{x}(t_1)\big), \qquad (4.37)$$

где $F(t,\mathrm{x},\mathrm{u})$, $G(t_1,\mathrm{x})$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Требуется найти такую тройку $d^*=(t_1^*,\mathrm{x}^*(\cdot),\mathrm{u}^*(\cdot))\in D(t_0,\mathrm{x}_0)$, что

$$J(d^*)=\min_{d\in D(t_0,\mathrm{x}_0)} J(d). \qquad (4.38)$$

Задача (4.38) с функционалом (4.37) называется *задачей Больца*; если в функционале (4.37) функция $F(t_1,\mathrm{x})\equiv 0$ (отсутствует так называемый терминальный член) – *задачей Лагранжа*; если $F(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\equiv 0$ (отсутствует интегральный член) – *задачей Майера.*

Искомые функции $\mathrm{x}^*(\cdot)$ и $\mathrm{u}^*(\cdot)$ называются соответственно *оптимальной траекторией* и *оптимальным управлением,* а t_1^* – *оптимальным моментом окончания процесса.*

Замечание. Если любое допустимое управление $\mathrm{u}(\cdot)\in \mathrm{U}_0$ порождает единственную тройку $d\in D(t_0,\mathrm{x}_0)$, то задача (4.38) может быть записана в эквивалентной форме:

$$J(t_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{u}^*(\cdot))=\min_{\mathrm{u}(\cdot)\in \mathrm{U}_0} J(t_0,\mathrm{x}_0,\mathrm{u}(\cdot)).$$

Принцип максимума

Необходимым условием экстремума функционала в задаче (4.38) является *принцип максимума*, который часто называют *принципом максимума Понтрягина*.

Утверждение. *Пусть на тройке* $d^*=(t_1^*,\mathrm{x}^*(\cdot),\mathrm{u}^*(\cdot))\in D(t_0,\mathrm{x}_0)$ *достигается минимум функционала* (4.37). *Тогда существует такая вектор-функция* $\psi(t)=(\psi_1(t),...,\psi_n(t))^T$ *, что:*

1) в каждой точке непрерывности управления $u^*(t)$ *функция Гамильтона* $H(t,\psi(t),\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u})$ *достигает максимума по управлению, т.е.*

$$\max_{u\in U} H(t,\psi(t),\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u})=H(t,\psi(t),\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u}^*(t))$$

где $H(t,\psi,\mathrm{x},\mathrm{u})=\sum_{j=1}^{n}\psi_j f_j(t,\mathrm{x},\mathrm{u})-F(t,\mathrm{x},\mathrm{u})$ *;*

2) выполняется условие трансверсальности

$$\delta G(t_1^*)-H(t_1^*)\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(t_1^*)\delta x_j=0 \tag{4.39}$$

при любых δt_1 *и* δx_j *, удовлетворяющих системе*

$$\delta S_i(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))=0\,,\quad S_i(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))=0\,,\qquad i=1,\dots,k\,,$$

где $H(t_1^*)=H(t_1^*,\psi(t_1^*),\mathrm{x}^*(t_1^*),\mathrm{u}^*(t_1^*))$, $G(t_1^*)=G(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))$, *а вариации определяются следующим образом:*

$$\delta G(t_1^*)=\delta G(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))=\frac{\partial G(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))}{\partial t_1}\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))}{\partial x_j}\delta x_j\ ,$$

$$\delta S_i(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))=\frac{\partial S_i(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))}{\partial t_1}\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S_i(t_1^*,\mathrm{x}^*(t_1^*))}{\partial x_j}\delta x_j\ ;$$

3) функции $\mathrm{x}^*(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases}\dfrac{dx_j^*}{dt}=\dfrac{\partial H(t,\psi(t),\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u}^*(t))}{\partial\psi_j}=f_j(t,\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u}^*(t)),\ j=1,\dots,n;\\ x_j^*(t_0)=x_{j0}^*,\quad j=1,\dots,n;\\ \dfrac{d\psi_j(t)}{dt}=-\dfrac{\partial H(t,\psi(t),\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u}^*(t))}{\partial x_j},\quad j=1,\dots,n.\end{cases} \tag{4.40}$$

Используемые в формулировке этого утверждения функции $\psi_1(t),\dots,\psi_n(t)$ называются *вспомогательными переменными,* $H(t,\psi,\mathrm{x},\mathrm{u})$ – *гамильтонианом,* а система (4.40) — системой *канонических уравнений.*

Замечание 1. В частном случае задания множества S, когда момент времени t_1 задан и фиксировано q координат $x_{11},\dots,x_{q1}$ вектора $\mathrm{x}(t_1)$, т.е. $t_1=T_1$, $x_j(t_1)=x_{j1}$, $j=1,\dots,q$; $0\le q\le n$, $k=q+1$, функции $S_j(t_1,\mathrm{x})$ имеют вид

$$S_j(t_1,\mathrm{x})=x_j-x_{j1}=0\,,\quad j=1,\dots,q\,;$$
$$S_{q+1}(t_1,\mathrm{x})=t_1-T_1=0\,.$$

Здесь при $q=n$ правый конец траектории *фиксирован*, а при $q=0$ *свободен.* Отсюда следует, что $\delta x_j=0$, $j=1,\dots,q$; $\delta t_1=0$.

Решаемая задача с фиксированным временем окончания записывается в форме

$$J(d)=\int_{t_0}^{t_1} F(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t))\,dt+G(\mathrm{x}(t_1))\to\min .$$

Решением этой задачи является пара $(\mathrm{x}^*(t),\mathrm{u}^*(t))$: оптимальные траектория и управление.

Замечание 2. В случае, когда начальное состояние и момент начала процесса t_0 не заданы, а определяются вместе с конечными состояниями соотношениями

$$S_i(t_0,\mathrm{x}(t_0),t_1,\mathrm{x}(t_1))=0,\quad i=1,\ldots,k,$$

терминальный член функционала может задаваться в виде разности $G_1(t_1,\mathrm{x}(t_1))-G_0(t_0,\mathrm{x}(t_0))$. Тогда решаемая задача записывается в форме

$$J(d)=\int_{t_0}^{t_1} F(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t))\,dt+G_1(t_1,\mathrm{x}(t_1))-G_0(t_0,\mathrm{x}(t_0))\to\min ,$$

а условия трансверсальности имеют вид

$$\left[\delta G_1(t_1^*)-H(t_1^*)\,\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(t_1^*)\,\delta x_{jt_1}\right]-$$
$$-\left[\delta G_0(t_0^*)-H(t_0^*)\,\delta t_0+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(t_0^*)\,\delta x_{jt_0}\right]=0 \qquad (4.41)$$

при $$\delta S_i(t_0^*,\mathrm{x}^*(t_0^*),t_1^*,\mathrm{x}(t_1^*))=0,\quad i=1,\ldots,k,$$
$$S_i(t_0^*,\mathrm{x}^*(t_0^*),t_1^*,\mathrm{x}(t_1^*))=0,\quad i=1,\ldots,k.$$

Решением задачи в этом случае является четверка $(t_0^*,t_1^*,\mathrm{x}^*(\cdot),\mathrm{u}^*(\cdot))$, включающая оптимальные моменты начала и окончания процесса, траекторию и управление.

Замечание 3. В общем случае гамильтониан следует записывать в форме

$$H(t,\psi,\psi_0,\mathrm{x},\mathrm{u})=\sum_{j=1}^{n}\psi_j f_j(t,\mathrm{x},\mathrm{u})+\psi_0 F(t,\mathrm{x},\mathrm{u}),$$

а при решении задачи рассматривать два случая: $\psi_0(t)\equiv 0$ и $\psi_0(t)\neq 0$. Приведенное утверждение соответствует второму случаю, когда полагают $\psi_0(t)=-1$.

Замечание 4. Если на управление нет ограничений, т.е. $U = R^q$, то максимум гамильтониана ищется с помощью необходимых и достаточных условий безусловного экстремума.

Замечание 5. Если модель объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением, а функционал квадратичный, принцип максимума является *необходимым и достаточным* условием оптимальности в задаче (4.38).

Алгоритм принципа максимума

1. Составить гамильтониан:

$$H(t,\psi,\mathrm{x},\mathrm{u}) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j f_j(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) - F(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) .$$

2. Найти структуру оптимального управления $\mathrm{u}^*(t) = \mathrm{u}^*(t,\psi(t),\mathrm{x}(t))$ из условия максимума гамильтониана по управлению.

3. Составить систему канонических уравнений (4.40) с заданными в задаче условиями.

4. Из условий трансверсальности (4.39) или (4.41) получить недостающие краевые условия для уравнений составленной системы.

5. Решить двухточечную краевую задачу для системы канонических уравнений, полученную в п. 3, с учетом результатов п.п. 2 и 4. В итоге определяется тройка $(t_1^*, \mathrm{x}^*(\cdot), \mathrm{u}^*(\cdot))$, на которой может достигаться экстремум функционала. В соответствии с замечаниями 1 и 2 (стр. 166) к формулировке
принципа максимума решениями задачи в зависимости от постановки могут быть также пара $(\mathrm{x}^*(\cdot), \mathrm{u}^*(\cdot))$ или четверка $(t_0^*, t_1^*, \mathrm{x}^*(\cdot), \mathrm{u}^*(\cdot))$.

Пример 4.4

Даны модель объекта управления

$$x'(t) = u(t)\ , \quad x(0) = 0\ , \quad x(1) = \frac{1}{2}\ ,$$

где $x \in R$; $u \in R$; $t \in [0;1]$, и функционал

$$J = \int_0^1 [u^2(t) + x^2(t)]\,dt \to \min .$$

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи (стр.163) и замечанием 1 (стр.166), имеем :

$$f(t,x,u)=u\ ,\quad F(t,x,u)=u^2+x^2\ ,\quad G(t_1,x)\equiv 0\ ,$$

$$S_1(t_1,x(t_1))=t_1-1=0\ ,\quad S_2(t_1,x(t_1))=x(1)-\frac{1}{2}=0\ .$$

Решается *задача Лагранжа.*

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,x,u)=\psi u-u^2-x^2$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума $\frac{\partial}{\partial u}H(t,\psi(t),x(t),u)=\psi(t)-2u=0$.

Отсюда $u^*(t)=\frac{\psi(t)}{2}$. Найденное управление обеспечивает максимум функции $H(t,\psi(t),x(t),u)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума $\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t,\psi(t),x(t),u)=-2<0$.

3. Выписываем уравнения системы (4.40):

$$x'(t)=u^*(t)=\frac{\psi(t)}{2},\quad x(0)=0\ ,\quad x(1)=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\psi'(t)=-\frac{\partial}{\partial x}H(t,\psi(t),x(t),u(t))=2x(t)\ .$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39). Так как $G(t_1,x)\equiv 0$, то $\delta G=0$ и $\left[-H(t_1)\delta t_1+\psi(t_1)\delta x\right]_{t_1=1}=0$. Поскольку

$$t_1=1\ ,\quad x(t_1)=\frac{1}{2}$$

заданы, то $\delta t_1=0$, $\delta x=0$. Поэтому условия трансверсальности выполняются.

5. Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$x'(t)=\frac{\psi(t)}{2},\ \ x(0)=0\ ,\ \ x(1)=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\psi'(t)=2x(t)\ .$$

Отсюда находится искомая пара:

$$u^*(t)=\frac{e(e^t+e^{-t})}{2(e^2-1)},\qquad x^*(t)=\frac{e(e^t-e^{-t})}{2(e^2-1)}\ .$$

Пример 4.5

Даны модель объекта управления

$$x'(t) = x(t) + u(t)\,, \quad x(0) = 0\,,$$

где $x \in R$; $u \in R$; $t \in [0;1]$, и функционал

$$J = \int_0^1 u^2(t)\,dt - x(1) \to \min\,.$$

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$$f(t,x,u) = x + u\,, \quad F(t,x,u) = u^2\,, \quad G(t_1,x) = -x\,,$$

$$S_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 1 = 0\,.$$

Решается *задача Больца*.

1. Составляем гамильтониан:

$$H(t,\psi,x,u) = \psi \cdot (x+u) - u^2\,.$$

2. Находим максимум гамильтониана по управлению (см. п. 2 примера 4.4): $\frac{\partial}{\partial u} H(t,\psi(t),x(t),u) = \psi(t) - 2u = 0$. Отсюда $u^*(t) = \frac{\psi(t)}{2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial u^2} H(t,\psi(t),x(t),u) = -2 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (4.40) с учетом результата п. 2:

$$x'(t) = x(t) + u^*(t) = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0\,,$$

$$\psi'(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t,\psi(t),x(t),u(t)) = -\psi(t)\,.$$

4. Проверяем условие трансверсальности в форме (4.39). Так как $G(t_1,x) = -x$, то $\delta G = -\delta x$ и $\left(-\delta x - H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)\delta x\right)\Big|_{t_1=1} = 0$. Поскольку $t_1 = 1$, то $\delta t_1 = 0$. Ограничений на $x(t_1)$ не наложено, поэтому вариация δx произвольна. В результате имеем $\left[\psi(t_1) - 1\right]\delta x\Big|_{t_1=1} = 0$ и, следовательно, $\psi(t) - 1 = 0$.

5. Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$x'(t) = x(t) + \frac{\psi(t)}{2}, \quad x(0) = 0\,,$$

$$\psi'(t) = -\psi(t)\,, \quad \psi(1) = 1\,.$$

Из второго уравнения с конечным условием имеем $\psi(t)=e^{1-t}$. Поэтому оптимальное управление $u^*(t)=\frac{1}{2}e^{1-t}$. Решая первое уравнение системы с начальным условием, получаем оптимальную траекторию (экстремаль) $x^*(t)=\frac{1}{4}\left(e^{1+t}-e^{1-t}\right)$.

Пример 4.6

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t)=x_2(t),\quad x_1(0)=1,\quad x_1(2)=0,$$
$$x_2'(t)=u(t),\quad x_2(0)=1,\quad x_2(2)=0,$$

где $\mathrm{x}=(x_1,x_2)^T\in R^2$, $u\in R$; $t\in[0;2]$, и функционал

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\,dt\to\min .$$

Требуется найти оптимальную пару $(\mathrm{x}^*(\cdot),u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем

$$f_1(t,\mathrm{x},u)=x_2,\quad f_2(t,\mathrm{x},u)=u,\quad F(t,\mathrm{x},u)=\frac{1}{2}u^2,\quad G(t_1,\mathrm{x})\equiv 0,$$

$$S_1(t_1,\mathrm{x}(t_1))=t_1-2=0,\quad S_2(t_1,\mathrm{x}(t_1))=x_1(2)=0,\quad S_3(t_1,\mathrm{x}(t_1))=x_2(2)=0.$$

Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,\mathrm{x},u)=\psi_1x_2+\psi_2u-\frac{1}{2}u^2$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial u}H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u)=\psi_2(t)-u=0.$$

Отсюда $u^*(t)=\psi_2(t)$. Найденное управление обеспечивает максимум функции $H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума $\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u)=-1<0$.

3. Выписываем уравнения системы (4.40):

$$x_1'(t) = x_2(t)\,,\quad x_1(0)=1\,,\quad x_1(2)=0\,,$$

$$x_2'(t) = u(t) = \psi_2(t)\,,\quad x_2(0)=1\,,\quad x_2(2)=0\,,$$

$$\psi_1'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, \mathrm{\psi}(t), \mathrm{x}(t), u(t)) = 0\,,$$

$$\psi_2'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, \mathrm{\psi}(t), \mathrm{x}(t), u(t)) = -\psi_1(t)\,.$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39). Так как $G(t_1, \mathrm{x}) \equiv 0$, а $t_1 = 2$, $x_1(2)=0$, $x_2(2)=0$ заданы, то $\delta G = 0$, $\delta t_1 = 0$, $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$. Следовательно, условия трансверсальности выполняются.

5. Решаем полученную в п. 3 двухточечную краевую задачу:

$$\psi_1(t) = \mathrm{const} = C_1\,,\quad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2\,,$$

$$x_2(t) = -\frac{C_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3\,,\quad x_1(t) = -\frac{C_1 t^3}{6} + \frac{C_2 t^2}{2} + C_3 t + C_4\,.$$

Из краевых условий находим C_1, C_2, C_3, C_4:

$$x_1(0) = C_4 = 1\,,\quad x_1(2) = -\frac{4}{3}C_1 + 2C_2 + 2C_3 + C_4 = 0\,,$$

$$x_2(0) = C_3 = 1\,,\quad x_2(2) = -2C_1 + 2C_2 + C_3 = 0\,.$$

Отсюда $C_1 = -3$, $C_2 = -\dfrac{7}{2}$ и искомая пара $(\mathrm{x}^*(\cdot), u^*(\cdot))$,

где $\mathrm{x}^*(\cdot) = \left(x_1^*(\cdot),\, x_2^*(\cdot)\right)$: $x_1^*(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - \dfrac{7}{4}t^2 + t + 1$, $x_2^*(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{7}{2}t + 1$;

$u^*(t) = 3t - \dfrac{7}{2}$.

Пример 4.7

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t) = x_2(t)\,,$$

$$x_2'(t) = x_1(t) + u(t)$$

с краевыми условиями $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -\dfrac{3}{2}$, $x_1(1) = \dfrac{e}{2}$, $x_2(1) = -e^{-1}$ и функционал

$$J = \int_0^1 u^2(t)\,dt \to \min .$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую траекторию $\mathrm{x}^*(\cdot)$.

Решение

Здесь $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $u \in U \in R$; $t \in [0;1]$,

$F(t,\mathrm{x},u) = u^2$, $G(t_1,\mathrm{x}) \equiv 0$, $f_1(t,\mathrm{x},u) = x_2$, $f_2(t,\mathrm{x},u) = x_1 + u$,

$S_1(t_1, \mathrm{x}(t_1)) = t_1 - 1 = 0$, $S_2(t_1, \mathrm{x}(t_1)) = x_1(1) - \dfrac{e}{2} = 0$,

$S_3(t_1, \mathrm{x}(t_1)) = x_2(1) + e^{-1} = 0$. Решается *задача Лагранжа*.

1. Составляем гамильтониан

$$H(t,\psi,\mathrm{x},u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (x_1 + u) - u^2$$

2. Находим максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u) = \psi_2(t) - 2u = 0 .$$

Отсюда $u^*(t) = \dfrac{\psi_2(t)}{2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u) = -2 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (4.40) с учетом результата п. 2:

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 2, \quad x_1(1) = \frac{e}{2},$$

$$x_2'(t) = x_1(t) + \frac{\psi_2(t)}{2}, \quad x_2(0) = -\frac{3}{2}, \quad x_2(1) = -e^{-1},$$

$$\psi_1'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u(t)) = -\psi_2(t) .$$

$$\psi_2'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u(t)) = -\psi_1(t) .$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39). Так как $G(t_1,\mathrm{x}) \equiv 0$, то $\delta G = 0$ и

$$-H(t_1)\delta t_1 + \psi_1(t_1)\delta x_1 + \psi_2(t_1)\delta x_2 \Big|_{t_1=1} = 0 .$$

Поскольку значения $t_1 = 1$, $x_1(1) = \dfrac{e}{2}$, $x_2(1) = -e^{-1}$ заданы, то $\delta t_1 = 0$, $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$. Поэтому условия трансверсальности выполняются.

5. Решаем двухточечную краевую задачу, записанную в п. 3. Из двух последних уравнений получаем

$$\psi_1''(t) = -\psi_2'(t) = \psi_1(t)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\psi_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Тогда из третьего уравнения системы

$$\psi_2(t) = -\psi_1'(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Запишем первые два уравнения системы:

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = x_1(t) + \frac{\psi_2(t)}{2} = x_1(t) - \frac{C_1}{2} e^t + \frac{C_2}{2} e^{-t}.$$

Отсюда $\quad x_1''(t) - x_1(t) = -\dfrac{C_1}{2} e^t + \dfrac{C_2}{2} e^{-t}.$

Найдем общее решение полученного неоднородного уравнения:

а) общее решение однородного уравнения $x_1''(t) - x_1(t) = 0$:

$$x_{1o}(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t};$$

б) частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$x_{1н}(t) = A t e^t + B t e^{-t}.$$

Тогда $\quad x_{1н}'(t) = A e^t + A t e^t + B e^{-t} - B t e^{-t},$

$$x_{1н}''(t) = 2A e^t + A t e^t - 2B e^{-t} + B t e^{-t}.$$

Подставляя в неоднородное уравнение, получаем:

$$2A e^t + A t e^t - 2B e^{-t} + B t e^{-t} - A t e^t - B t e^{-t} = -\frac{C_1}{2} e^t + \frac{C_2}{2} e^{-t}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях t, имеем

$$2A = -\frac{C_1}{2}, \quad -2B = \frac{C_2}{2} \quad \text{или} \quad A = -\frac{C_1}{4}, \quad B = -\frac{C_2}{4}.$$

В результате $\quad x_{1н}(t) = -\dfrac{C_1}{4} t e^t - \dfrac{C_2}{4} t e^{-t};$

в) общее решение неоднородного уравнения

$$x_1(t) = x_{1o}(t) + x_{1н}(t) = C_3 e^t + C_4 e^{-t} - \frac{C_1}{4} t e^t - \frac{C_2}{4} t e^{-t}.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$x_2(t) = x_1'(t) = C_3 e^t - C_4 e^{-t} - \frac{C_1}{4}\, e^t - \frac{C_1}{4} t\, e^t - \frac{C_2}{4}\, e^{-t} + \frac{C_2}{4} t\, e^{-t}.$$

Для нахождения коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 используем краевые условия:

$$x_1(0) = C_3 + C_4 = 2,$$

$$x_2(0) = C_3 - C_4 - \frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{4} = -\frac{3}{2},$$

$$x_1(1) = C_3 e + C_4 e^{-1} - \frac{C_1}{4} e - \frac{C_2}{4} e^{-1} = \frac{e}{2},$$

$$x_2(1) = C_3 e - C_4 e^{-1} - \frac{C_1}{4} e - \frac{C_1}{4} e - \frac{C_2}{4} e^{-1} + \frac{C_2}{4} e^{-1} = -e^{-1}.$$

Получаем $C_1 = 2$, $C_2 = 4$, $C_3 = C_4 = 1$. В результате найдена искомая пара:

оптимальная траектория $\mathrm{x}^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$, где

$$x_1^*(t) = e^t + e^{-t} - \frac{t\,e^t}{2} - t\,e^{-t}, \quad x_2^*(t) = \frac{e^t}{2} - 2\,e^{-t} + t\,e^{-t} - \frac{t\,e^t}{2},$$

оптимальное управление $u^*(t) = -e^t + 2\,e^{-t}$.

Пример 4.8

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = -x_1(t) + u(t), \quad |u| \le 1$$

с начальными условиями $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ и функционал

$$J = x_2(2\pi) \to \min.$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $\mathrm{x}^*(\cdot)$.

Решение

Здесь $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $t \in [0; 2\pi]$, на управление наложено ограничение $|u| \le 1$, т.е. $u \in U = [-1; 1]$, $F(t, \mathrm{x}, u) = 0$, $G(t_1, \mathrm{x}) = x_2$,

$$f_1(t, \mathrm{x}, u) = x_2, \quad f_2(t, \mathrm{x}, u) = -x_1 + u, \quad S_1(t_1, \mathrm{x}(t_1)) = t_1 - 2\pi = 0.$$

Решается *задача Майера*.

1. Составляем гамильтониан $H(t, \psi, \mathrm{x}, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 [-x_1 + u]$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как имеются ограничения на управление, требуется найти *условный максимум*

гамильтониана по управлению. В данной задаче гамильтониан линеен по u на заданном отрезке изменения управления $[-1;1]$, поэтому оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \arg\max_{|u|\le 1} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u) = 1\cdot \operatorname{sign}\psi_2(t),$$

т.е. является релейным. Величина управления определяется знаком функции $\psi_2(t)$.

3. Выписываем канонические уравнения (4.40) принципа максимума:

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(0)=0,$$

$$x_2'(t) = -x_1(t) + u^*(t) = -x_1(t) + \operatorname{sign}\psi_2(t), \quad x_2(0)=0,$$

$$\psi_1'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)) = \psi_2(t).$$

$$\psi_2'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)) = -\psi_1(t).$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39):

$$\left.\left[\delta F - H(t_1)\delta t_1 + \sum_{j=1}^{2}\psi_j(t_1)\delta x_j\right]\right|_{t_1=2\pi} = 0,$$

где $\delta F = \dfrac{\partial F(t_1,\mathrm{x})}{\partial t_1}\delta t_1 + \sum\limits_{j=1}^{2}\dfrac{\partial F(t_1,\mathrm{x})}{\partial x_j}\delta x_j = \delta x_2$. Группируя члены, получаем: $-H(2\pi)\delta t_1 + \psi_1(2\pi)\delta x_1 + [1+\psi_2(2\pi)]\delta x_2 = 0$.

Момент окончания t_1 задан, поэтому $\delta t_1 = 0$. Так как правый конец свободен, то вариации δx_1, δx_2 считаются произвольными. Чтобы равенство выполнялось для любых вариаций, необходимо, чтобы $\psi_1(2\pi)=0$, $\psi_2(2\pi)=-1$.

5. Решаем двухточечную краевую задачу с учетом п.п. 2 и 4:

$$x_1'(t) = x_2(t),\ x_1(0)=0; \quad x_2'(t) = -x_1(t)+\operatorname{sign}\psi_2(t),\ x_2(0)=0;$$

$$\psi_1'(t)=\psi_2(t),\ \psi_1(2\pi)=0; \quad \psi_2'(t) = -\psi_1(t),\ \psi_2(2\pi)=-1.$$

Имеем:

$$\psi_1(t) = -\sin t,\ \psi_2(t) = -\cos t,\ u^*(t) = \operatorname{sign}(-\cos t) = -\operatorname{sign}(\cos t).$$

Найденное оптимальное управление $u^*(t)$ на отрезке $[0,2\pi]$ имеет две точки переключения и, следовательно, три промежутка знакопостоянства:

1) при $0 \le t < \frac{\pi}{2}$, $u^*(t) = -1$, $x_1^*(t) = \cos t - 1$, $x_2^*(t) = -\sin t$;

2) при $\frac{\pi}{2} \le t < \frac{3\pi}{2}$, $u^*(t) = 1$, $x_1^*(t) = \cos t - 2\sin t + 1$, $x_2^*(t) = -\sin t - 2\cos t$;

3) при $\frac{3\pi}{2} \le t < 2\pi$, $u^*(t) = -1$, $x_1^*(t) = \cos t - 4\sin t - 1$, $x_2^*(t) = -\sin t - 4\cos t$.

Минимальное значение функционала равно $x_2^*(2\pi) = -4$.

Пример 4.9

Даны модель объекта управлений

$$x'(t) = u(t), \quad x(0) = 1,$$

где $x \in R$, $u \in R$; $t \in [0; t_1]$,

и функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} u^2(t)\,dt + 4x(t_1) \to \min .$$

Задано конечное условие: $x(t_1) = t_1 - 1$.

Требуется найти оптимальную тройку $\left(t_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)\right)$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем:

$$F(t,x,u) = \frac{1}{2}u^2, \quad G(t_1,x) = 4x, \quad f(t,x,u) = u,$$

$$S_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - x(t_1) - 1 = 0 .$$

Решается *задача Больца*.

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,x,u) = \psi u - \frac{1}{2}u^2$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial}{\partial u} H\big(t,\psi(t),x(t),u\big) = \psi(t) - u = 0 .$$

Отсюда $u^*(t) = \psi(t)$ и $\frac{\partial^2}{\partial u^2} H(t,\psi(t),x(t),u) = -1 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (4.40) с учетом результата п. 2:

$$x'(t) = u^*(t) = \psi(t)\,, \quad x(0) = 1\,,$$

$$\psi'(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, \psi(t), x(t), u^*(t)) = 0\,.$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39) с учетом условия $S_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - x(t_1) - 1 = 0$. Имеем $\delta G = 4\delta x$, $\delta S_1(t_1, x(t_1)) = \delta t_1 - \delta x = = 0$ и, следовательно, $4\delta x - H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)\delta x = 0$, $t_1 - x(t_1) - 1 = 0$, $\delta t_1 - \delta x = 0$, где

$$H(t_1) = H\big(t_1, \psi(t_1), x(t_1), u^*(t_1)\big) = \psi(t_1)\psi(t_1) - \frac{1}{2}\psi^2(t_1) = \frac{1}{2}\psi^2(t_1)\,.$$

Для любых δx имеем $\left[4 - \frac{1}{2}\psi^2(t_1) + \psi(t_1)\right]\delta x = 0$, а отсюда $4 - \frac{1}{2}\psi^2(t_1) + \psi(t_1) = 0$.

5. Решаем краевую задачу:

$$x'(t) = \psi(t)\,, \quad x(0) = 1\,,$$

$$\psi'(t) = 0\,, \quad 4 - \frac{1}{2}\psi^2(t_1) + \psi(t_1) = 0\,, \quad t_1 - x(t_1) - 1 = 0\,.$$

Получаем: $u^*(t) = \psi(t) = C = \text{const}$, $x(t) = Ct + 1$. Для определения постоянной C при $t = t_1$ решаем систему уравнений:

$$4 - \frac{1}{2}C^2 + C = 0\,, \quad t_1 - Ct_1 - 2 = 0\,.$$

Отсюда $C = -2$, $t_1 = \frac{2}{3}$ и $C = 4$, $t_1 = -\frac{2}{3}$. Второе решение не подходит, так как t_1 должно быть положительно. Таким образом, искомая тройка имеет вид:

$t_1^* = \frac{2}{3}$ – оптимальный момент окончания;

$u^*(t) \equiv -2$ – оптимальное управление;

$x^*(t) = -2t + 1$ – оптимальная траектория.

Пример 4.10

Даны модель объекта управления

$$x'(t) = u(t)\,, \; x(0) = 3\sqrt{2}\,,$$

где $x \in R$, $u \in R$, $t \in [0; t_1]$, и функционал

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_1} u^2(t)\,dt+\frac{1}{2}(t_1-1)^2+\frac{1}{2}x^2(t_1)\to\min\,.$$

Требуется найти оптимальную тройку $\left(t_1^*,\, x^*(\cdot),\, u^*(\cdot)\right)$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $F(t,x,u)=\frac{1}{2}u^2$, $G(t_1,x)=\frac{1}{2}(t_1-1)^2+\frac{1}{2}x^2$, $f(t,x,u)=u$. Решается *задача Больца*.

1. Составляем гамильтониан $H(t,\psi,x,u)=\psi\,u-\frac{1}{2}u^2$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. Так как ограничения на управление отсутствуют, можно применить необходимые условия безусловного экстремума $\frac{\partial}{\partial u}H(t,\psi(t),x(t),u)=\psi(t)-u=0$. Отсюда $u^*(t)=\psi(t)$. Найденное управление обеспечивает максимум функции $H(t,\psi(t),x(t),u)$ по управлению, так как удовлетворяются достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t,\psi(t),x(t),u)=-1<0\,.$$

3. Выписываем уравнения системы (4.40):

$$x'(t)=u^*(t)=\psi(t)\,,\qquad x(0)=3\sqrt{2}\,,$$

$$\psi'(t)=-\frac{\partial}{\partial x}H(t,\psi(t),x(t),u(t))=0\,.$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39). Имеем $\delta F=$ $=(t_1-1)\,\delta t_1+x\,\delta x$ и, следовательно, $(t_1-1)\delta t_1+x(t_1)\delta x-H(t_1)\delta t_1+$ $+\psi(t_1)\delta x=0$ или $[\psi(t_1)+x(t_1)]\delta x+[t_1-1-H(t_1)]\,\delta t_1=0$.

Так как $x(t_1)$ и t_1 не заданы, то δx и δt_1 произвольны. Поэтому из условия трансверсальности следует $\psi(t_1)=-x(t_1)$, $t_1-1-H(t_1)=0$.

5. Решаем краевую задачу:

$$x'(t)=\psi(t)\,,\quad x(0)=3\sqrt{2}\,,$$

$$\psi'(t)=0\,,\quad \psi(t_1)=-x(t_1)\,,\quad t_1-1-H(t_1)=0\,.$$

Отсюда $\psi(t)=\mathrm{const}=C_1$, $x(t)=C_1t+C_2$, $x(0)=C_2=3\sqrt{2}$.

Тогда

$$\psi(t_1) = C_1 = -x(t_1) = -C_1 t_1 - 3\sqrt{2}\ ,$$

$$t_1 - 1 - \psi^2(t_1) + \frac{1}{2}\psi^2(t_1) = 0 \quad \text{или} \quad t_1 - 1 - \frac{1}{2}C_1^2 = 0\ .$$

Из первого уравнения $C_1 = \dfrac{-3\sqrt{2}}{1+t_1}$. Поэтому $t_1 - 1 - \dfrac{9}{(1+t_1)^2} = 0$ или

$$t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 10 = 0\ , \quad (t_1 - 2)(t_1^2 + 3t_1 + 5) = 0\ .$$

Полученное уравнение имеет один действительный корень $t_1 = 2$. Отсюда $C_1 = -\sqrt{2}$ и в результате получаем искомую тройку

$$t_1^* = 2\ , \quad x^*(t) = -\sqrt{2}\,t + 3\sqrt{2}\ , \quad u^*(t) = -\sqrt{2}\ .$$

Пример 4.11

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t) = x_2(t)\ ,$$

$$x_2'(t) = u(t)\ ,$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $u \in R$, $t \in [0;\,1]$, и функционал

$$I = \int_0^1 u^2(t)\,dt - \frac{1}{2}x_1^2(0) + \frac{1}{2}x_2^2(1) \to \min\ .$$

Задано граничное условие: $x_1(1) + x_2(1) = \dfrac{19}{6}$.

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи (4.38), имеем

$$F(t,\mathrm{x},u) = u^2\ , \quad f_1(t,\mathrm{x},u) = x_2\ , \quad f_2(t,\mathrm{x},u) = u\ ,$$

$$S_1(t_1,\mathrm{x}(t_1)) = t_1 - 1 = 0\ , \quad S_2(t_1,\mathrm{x}(t_1)) = x_1(1) + x_2(1) - \frac{19}{6} = 0\ ,$$

$$G_0(t_0,\mathrm{x}(t_0)) = \frac{1}{2}x_1^2(0)\ , \quad G_1(t_1,\mathrm{x}(t_1)) = \frac{1}{2}x_2^2(1)\ .$$

Решается *задача Больца*.

1. Составляем гамильтониан:

$$H(t,\psi,\mathrm{x},u) = \psi_1\,x_2 + \psi_2\,u - u^2\ .$$

2. Находим максимум гамильтониана по управлению:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(t, \psi(t), x(t), u) = \psi_2(t) - 2u = 0 .$$

Отсюда $u^*(t) = \dfrac{\psi_2(t)}{2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} H(t, \psi(t), x(t), u) = -2 < 0$.

3. Выписываем уравнения системы (4.40) с учетом результата п.2:

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(1) + x_2(1) = \frac{19}{6},$$

$$x_2'(t) = \frac{1}{2}\psi_2(t),$$

$$\psi_1'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H\big(t, \psi(t), x(t), u(t)\big) = 0,$$

$$\psi_2'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = -\psi_1(t) .$$

4. Записываем условия трансверсальности (4.41). Поскольку $t_1 = 1$ и $t_0 = 0$ заданы, то $\delta t_0 = 0$, $\delta t_1 = 0$ а, следовательно, $\delta x_{j\,t_1} = \delta x_j(t_1) = = \delta x_j(1)$, $\delta x_{j\,t_0} = \delta x_j(t_0) = \delta x_j(0)$, $j = 1,2$. Так как $G_0(t_0, x) = \dfrac{1}{2} x_1^2$, $G_1(t_1, x) = \dfrac{1}{2} x_2^2$, то $\delta G_0(t_0) = x_1(0)\,\delta x_1(0)$, $\delta G_1(t_1) = x_2(1)\,\delta x_2(1)$.

В результате имеем

$$\begin{aligned} &x_2(1)\delta x_2(1) - H(1)\delta t_1 + \psi_1(1)\delta x_1(1) + \psi_2(1)\delta x_2(1) - x_1(0)\delta x_1(0) + \\ &+ H(0)\delta t_0 - \psi_1(0)\delta x_1(0) - \psi_2(0)\delta x_2(0) = -[x_1(0) + \psi_1(0)]\delta x_1(0) - \\ &-\psi_2(0)\delta x_2(0) + \psi_1(1)\delta x_1(1) + \psi_2(1)\delta x_2(1) + x_2(1)\delta x_2(1) = 0, \end{aligned}$$

где $H(1)\delta t_1 = 0$ и $H(0)\delta t_0 = 0$;

$$S_2(t_1, x(t_1)) = x_1(1) + x_2(1) - \frac{19}{6} = 0, \quad \delta S_2(t_1, x(t_1)) = \delta x_1(1) + \delta x_2(1) = 0 .$$

Так как начальные условия не заданы, то вариации $\delta x_1(0)$ и $\delta x_2(0)$ произвольны. Отсюда

$$\psi_2(0) = 0, \quad \psi_1(0) = -x_1(0),$$

$$\psi_1(1)\,\delta x_1(1) + \psi_2(1)\,\delta x_2(1) + x_2(1)\,\delta x_2(1) = 0,$$

$$\delta x_1(1) + \delta x_2(1) = 0, \quad x_1(1) + x_2(1) = \frac{19}{6} .$$

Поэтому получаем

$$\delta x_1(1) = -\delta x_2(1) \text{ и } [\psi_2(1) + x_2(1) - \psi_1(1)]\,\delta x_2(1) = 0 .$$

В силу произвольности $\delta x_2(1)$ получаем равенство $\psi_2(1)+x_2(1)-$ $-\psi_1(1)=0$.

5. Решаем краевую задачу:

$$x_1'(t)=x_2(t)\,, \quad x_1(1)+x_2(1)=\frac{19}{6}\,,$$

$$x_2'(t)=\frac{1}{2}\psi_2(t)\,,$$

$$\psi_1'(t)=0\,, \quad \psi_1(0)=-x_1(0)\,,$$

$$\psi_2'(t)=-\psi_1(t)\,, \quad \psi_2(0)=0\,, \quad \psi_2(1)+x_2(1)-\psi_1(1)=0\,.$$

Отсюда

$$\psi_1(t)=C_1\,, \;\; \psi_2(t)=-C_1t+C_2\,,$$

$$x_2'(t)=-\frac{C_1}{2}t+\frac{C_2}{2}\,, \quad x_2(t)=-\frac{C_1}{4}t^2+\frac{C_2}{2}t+C_3\,,$$

$$x_1'(t)=x_2(t)\,, \quad x_1(t)=-\frac{C_1}{12}t^3+\frac{C_2}{2}t^2+C_3t+C_4\,.$$

Используя краевые условия, получаем

$$\psi_2(0)=C_2=0\,, \quad \psi_1(0)=C_1=-x_1(0)=-C_4\,,$$

$$\psi_2(1)+x_2(1)-\psi_1(1)=-C_1+C_2-\frac{C_1}{4}+\frac{C_2}{2}+C_3-C_1=0\,,$$

$$-\frac{C_1}{12}+\frac{C_2}{4}+C_3+C_4-\frac{C_1}{4}+\frac{C_2}{2}+C_3=\frac{19}{6}\,.$$

В результате находим $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=\frac{9}{4}$, $C_4=-1$ и искомую пару:

оптимальную траекторию $\mathrm{x}^*(t)=(x_1^*(t),\, x_2^*(0))^T$, где

$$x_1^*(t)=-\frac{1}{12}t^3+\frac{9}{4}t-1\,, \;\; x_2^*(t)=-\frac{1}{4}t^2+\frac{9}{4}\,;$$

оптимальное управление $u^*(t)=-\frac{1}{2}t$.

Пример 4.12

Найти *оптимальное по быстродействию* управление, соответствующие ему траекторию и время, затрачиваемое на переход из состояния $x_1(0)=0$, $x_2(0)=-4$ в начало координат для модели объекта управления, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$x_1'(t) = x_2(t),$$
$$x_2'(t) = u(t),$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $|u| \le 1$.

Решение

Сформулируем проблему в форме задачи минимизации функционала

$$I = \int_0^T dt \to \min,$$

где момент окончания процесса управления T не задан и подлежит определению. В данном примере $f_1(t,\mathrm{x},u) = x_2$, $f_2(t,\mathrm{x},u) = u$ и $F(t,\mathrm{x},u) = 1$, $G(t_1,\mathrm{x}) \equiv 0$, $t_1 = T$, $S_1(T,\mathrm{x}(T)) = x_1(T) = 0$, $S_2(T,\mathrm{x}(T)) = x_2(T) = 0$. Решается *задача Лагранжа*.

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$, соответствующую ему траекторию $\mathrm{x}^*(\cdot)$ и время T.

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,\mathrm{x},u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - 1$.

2. Находим условный максимум гамильтониана по управлению (аналогично п. 2 примера 4.8):

$$u^*(t) = \arg\max_{|u| \le 1} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u) = 1 \cdot \operatorname{sign} \psi_2(t).$$

3. Выписываем канонические уравнения (4.40) принципа максимума:

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(T) = 0,$$
$$x_2'(t) = u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t), \quad x_2(0) = -4, \quad x_2(T) = 0,$$
$$\psi_1'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)) = 0.$$
$$\psi_2'(t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)) = -\psi_1(t).$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39):

$$\left. \left[\delta F - H(t_1)\delta t_1 + \sum_{j=1}^{2} \psi_j(t_1)\delta x_j \right] \right|_{t_1 = T} = 0,$$

где $\delta F = 0$. Так как момент окончания T не задан, а $x_1(T)$ и $x_2(T)$ заданы, то вариация δt_1 произвольна, а $\delta x_1 = 0$ и $\delta x_2 = 0$. Поэтому из условия трансверсальности следует $H(T) = H(T, \psi(T), x(T), u(T)) = 0$.

5. Решаем двухточечную краевую задачу с учетом п.п. 2 и 4:

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(T) = 0,$$

$$x_2'(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t), \quad x_2(0) = -4, \quad x_2(T) = 0,$$

$$\psi_1'(t) = 0, \quad \psi_2'(t) = -\psi_1(t),$$

$$H(T, \psi(T), x(T), u(T)) = 0.$$

Решая два уравнения для вспомогательных переменных, получаем

$\psi_1(t) = C_1 = \text{const}$, $\quad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2$,

$$u^*(t) = 1 \cdot \operatorname{sign}(-C_1 t + C_2).$$

Так как линейная функция меняет знак не более одного раза, то оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, имеющей не более двух интервалов знакопостоянства. На одном интервале $u(t) = 1$, а на другом $u(t) = -1$.

Построим *фазовый портрет*. Уравнение фазовых траекторий системы

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = u(t) = \text{const}$$

имеет вид $\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{x_2}{u}$. Отсюда $dx_1 = \dfrac{x_2}{u} dx_2$ или $x_1 = \dfrac{x_2^2}{2u} + C$. На рис. 4.1 изображены два возможных семейства парабол.

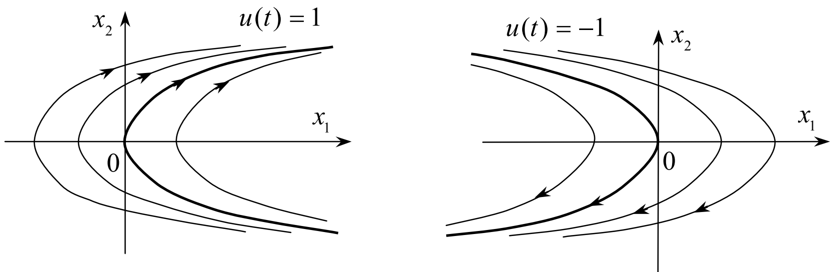


Рис. 4.1

По траекториям, проходящим через начало координат, движение происходит на последнем интервале знакопостоянства управления. Результирующий фазовый портрет и искомая оптимальная траектория, соответствующая заданным начальным условиям, представлены на рис. 4.2.

На первом участке оптимальной траектории до линии переключения $u^*(t)=1$, а на втором $u^*(t)=-1$.

Найдем время $T=\tau_1+\tau_2$, затрачиваемое на переход из точки $x_0=(0,-4)^T$ начало координат. Здесь τ_1 – время движения с управлением $u^*(t)=1$ до точки переключения, τ_2 – время движения с управлением $u^*(t)=-1$.

На первом участке

$$x_1'(t)=x_2(t), \quad x_2'(t)=u^*(t)=1,$$

откуда

$$x_2(t)=t+C_1, \quad x_1(t)=\frac{1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

При $t=0$ имеем

$$x_2(0)=C_1=-4,$$
$$x_1(0)=C_2=0.$$

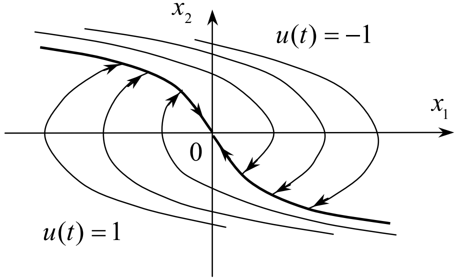


Рис. 4.2

Поэтому

$$x_1(t)=\frac{1}{2}t^2-4t,$$
$$x_2(t)=t-4.$$

На втором участке

$$x_1'(t)=x_2(t),$$
$$x_2'(t)=u^*(t)=-1,$$

откуда

$$x_2(t)=-t+C_1, \quad x_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

В конечный момент времени $T=\tau_1+\tau_2$ траектория должна попасть в начало координат:

$$x_1(\tau_1+\tau_2)=-\frac{(\tau_1+\tau_2)^2}{2}+C_1(\tau_1+\tau_2)+C_2=0,$$
$$x_2(\tau_1+\tau_2)=-(\tau_1+\tau_2)+C_1=0$$

из чего следует $C_1=\tau_1+\tau_2$, $C_2=-\dfrac{(\tau_1+\tau_2)^2}{2}$.

В силу непрерывности траектории при $t=\tau_1$ имеем

$$x_1(\tau_1)=\frac{1}{2}\tau_1^2-4\tau_1=-\frac{1}{2}\tau_1^2+(\tau_1+\tau_2)\tau_1-\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)^2,$$
$$x_2(\tau_1)=\tau_1-4=-\tau_1+\tau_1+\tau_2.$$

В результате получаем $\tau_2=\tau_1-4$, $\tau_1^2-8\tau_1+8=0$ и $\tau_1=4+2\sqrt{2}$, так как $\tau_2\geq 0$. Поэтому $\tau_2=2\sqrt{2}$ и $T=4+4\sqrt{2}$. Решение задачи найдено.

Рассмотрим одну модификацию представленной постановки задачи. Если модель объекта управления описывается системой дифференциальных уравнений
$$x_1'(t)=x_2(t)-p,$$
$$x_2'(t)=u(t),$$
где p – заданное действительное число, то методика решения задачи не изменяется. Оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, имеющей не более двух интервалов знакопостоянства: на одном интервале $u(t)=1$, а на другом $u(t)=-1$. Уравнения фазовых траекторий получаются при $u(t)=\text{const}$:

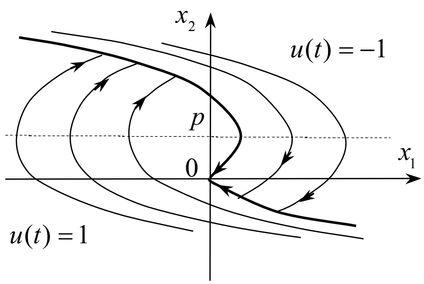


Рис. 4.3

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_2-p}{u},$$
$$dx_1=\frac{x_2-p}{u}dx_2$$

или, после интегрирования,
$$x_1=\frac{x_2^2}{2u}-\frac{px_2}{u}+C=\frac{1}{2u}(x_2-p)^2+\overline{C}.$$

На рис. 4.3 изображен результирующий фазовый портрет с характерными оптимальными фазовыми траекториями при $u(t)=1$ и $u(t)=-1$.

Пример 4.13

Даны модель объекта управления
$$x'(t)=u(t),\quad x(0)=0,$$
где $x\in R$, $|u|\leq 1$, $t\in[0;T]$ и функционал

$$J=\int_0^T [x(t)+u^2(t)]\,dt \to \min ,$$

где T – заданный параметр.

Требуется найти оптимальную пару $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала при $T=1$ и $T=3$.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем $f(t,x,u)=u$ и $F(t,x,u)=x+u^2$, $G(t_1,x)\equiv 0$, $S_1(t_1,x(t_1))=t_1-T=0$. Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,x,u)=\psi u - x - u^2$.

2. Находим максимум $H(t,\psi(t),x(t),u)$ по управлению. При этом решается задача поиска наибольшего значения квадратного трехчлена на отрезке $[-1;1]$ допустимых значений управления. В результате получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t)=\begin{cases} -1, & \dfrac{\psi(t)}{2}<-1, \\ \dfrac{\psi(t)}{2}, & -1\le \dfrac{\psi(t)}{2}\le 1, \\ +1, & 1<\dfrac{\psi(t)}{2}. \end{cases}$$

3. Выписываем уравнения системы (4.40):

$$x'(t)=u^*(t), \quad x(0)=0,$$

$$\psi'(t)=-\frac{\partial}{\partial x}H\left(t,\psi(t),x(t),u^*(t)\right)=1.$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39): для $F(t_1,x)\equiv 0$ имеем $\delta F=0$ и

$$\left[-H(t_1)\delta t_1+\psi(t_1)\delta x\right]\Big|_{t_1=T}=0.$$

Так как $t_1=T$ задано, то $S\left(t_1,x(t)\right)=t_1-T=0$ и $\delta t_1=0$. Ограничений на $x(t_1)$ не наложено, поэтому вариация δx произвольна. Следовательно, $\psi(T)\delta x=0$ и $\psi(T)=0$.

5. Решаем краевую задачу с учетом результатов п.п. 2, 4:

$$x'(t)=u^*(t), \quad x(0)=0,$$

$$\psi'(t)=1, \quad \psi(T)=0 \quad (\text{при } T=1 \quad \text{или} \quad T=3).$$

Получаем $\psi(t)=t+C$ и $\psi(T)=T+C=0$. Поэтому $\psi(t)=t-T$.

Рассмотрим два случая:

а) пусть $T=1$. Тогда $\psi(t)=t-1$. Так как $\left|\frac{\psi(t)}{2}\right|=\left|\frac{t-1}{2}\right|<1$ для всех t на отрезке времени $[0;1]$, то $u^*(t)=\frac{1}{2}\psi(t)=\frac{1}{2}(t-1)$ – оптимальное управление. При этом $x^*(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t$ – оптимальная траектория;

б) пусть $T=3$. Тогда $\psi(t)=t-3$. На промежутке времени $[0;1)$ $\frac{1}{2}\psi(t)=\frac{1}{2}(t-3)<-1$ и оптимальное управление $u^*(t)=-1$, а на отрезке $[1;3]$ $\left|\frac{\psi(t)}{2}\right|=\left|\frac{t-3}{2}\right|\le 1$ и $u^*(t)=\frac{1}{2}\psi(t)=\frac{1}{2}(t-3)$. Поэтому на первом участке (при $t\in[0;1)$) оптимальная траектория $x^*(t)$ удовлетворяет условиям

$$x'(t)=-1, \quad x(0)=0,$$

т.е. $x^*(t)=-t$, а на втором участке

$$x'(t)=\frac{1}{2}(t-3), \quad x(1)=-1,$$

т.е. $x^*(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}$.

Пример 4.14

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t)=x_2(t),$$

$$x_2'(t)=u(t), \quad |u|\le 2,$$

краевые условия $x_1(0)+x_1(1)=0$, $x_2(0)+x_2(1)=0$ и функционал

$$I=\int_0^1 x_1(t)\,dt \to \min.$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(\cdot)$.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем $\mathrm{x}=(x_1,x_2)^T \in R^2$, $t\in[0;1]$; на управление наложено ограничение $|u|\le 2$, т.е. $u\in U=[-2;+2]$;

$$F(t,\mathrm{x},u)=x_1,\ \ G(t_1,\mathrm{x})\equiv 0,\ \ f_1(t,\mathrm{x},u)=x_2,\ \ f_2(t,\mathrm{x},u)=u,$$

$$S_1(t_0,\mathrm{x}(t_0),t_1,\mathrm{x}(t_1))=t_1-1=0,\quad S_2(t_0,\mathrm{x}(t_0),t_1,\mathrm{x}(t_1))=x_1(0)+x_1(1)=0,$$

$$S_3(t_0,\mathrm{x}(t_0),t_1,\mathrm{x}(t_1))=x_2(0)+x_2(1)=0.$$

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,\mathrm{x},u)=\psi_1 x_2+\psi_2 u-x_1$.

2. Находим максимум $H(t,\psi,\mathrm{x},u)$ по управлению (см, п. 2 примера 4.8):

$$u^*(t)=\arg\max_{|u|\le 2} H\left(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u\right)=2\,\mathrm{sign}\,\psi_2(t)$$

3. Выписываем канонические уравнения принципа максимума (4.40);

$$x_1'(t)=x_2(t),\quad x_1(0)+x_1(1)=0,$$

$$x_2'(t)=u^*(t)=2\ \mathrm{sign}\,\psi_2(t),\quad x_2(0)+x_2(1)=0;$$

$$\psi_1'(t)=-\frac{\partial}{\partial x_1}H\left(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)\right)=1.$$

$$\psi_2'(t)=-\frac{\partial}{\partial x_2}H\left(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)\right)=-\psi_1(t).$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.41). Так как $G(t_1,\mathrm{x})\equiv 0$, то $\delta G=0$. Моменты начала и окончания процесса управления фиксированы $(t_0=0,\,t_1=0)$, поэтому их вариации равны нулю $(\delta t_0=0,\,\delta t_1=0)$, а следовательно, $\delta x_{j1}=\delta x_j(t_1)=\delta x_j(1)$, $\delta x_{j0}=\delta x_j(t_0)=\delta x_j(0)$, $j=1,2$. Учитывая эти равенства, записываем условие трансверсальности:

$$\psi_1(1)\,\delta x_1(1)+\psi_2(1)\,\delta x_2(1)-\psi_1(0)\,\delta x_1(0)-\psi_2(0)\,\delta x_2(0)=0.$$

Начальное и конечное состояние объекта управления связаны ограничениями:

$$S_2(t_0,\mathrm{x}(t_0),t_1,\mathrm{x}(t_1))=x_1(0)+x_1(1)=0,$$

$$S_3(t_0,\mathrm{x}(t_0),t_1,\mathrm{x}(t_1))=x_2(0)+x_2(1)=0,$$

варьируя которые, находим связи между вариациями переменных x_1 и x_2 в начальный и конечный моменты времени:

$$\delta S_2(t_0, \mathrm{x}(t_0), t_1, \mathrm{x}(t_1)) = \delta x_1(0) + \delta x_1(1) = 0,$$
$$\delta S_3(t_0, \mathrm{x}(t_0), t_1, \mathrm{x}(t_1)) = \delta x_2(0) + \delta x_2(1) = 0.$$

Подставляя $\delta x_1(0) = -\delta x_1(1)$ и $\delta x_2(0) = -\delta x_2(1)$ в условие трансверсальности, получаем

$$[\psi_1(1) + \psi_1(0)]\delta x_1(1) + [\psi_2(1) + \psi_2(0)]\delta x_2(1) = 0.$$

Здесь вариации $\delta x_1(1)$ и $\delta x_2(1)$ уже не связаны ограничениями (могут принимать любые значения), поэтому для выполнения равенства необходимо и достаточно, чтобы вспомогательные переменные удовлетворяли двум условиям:

$$\psi_1(1) + \psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(1) + \psi_2(0) = 0.$$

5. Решаем краевую задачу с учетом п.п. 2, 4:

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(0) + x_1(1) = 0,$$
$$x_2'(t) = 2\ \mathrm{sign}\,\psi_2(t), \quad x_2(0) + x_2(1) = 0;$$
$$\psi_1'(t) = 1, \quad \psi_1(1) + \psi_1(0) = 0.$$
$$\psi_2'(t) = -\psi_1(t), \quad \psi_2(1) + \psi_2(0) = 0.$$

Интегрируя два последних уравнения и учитывая граничные условия, получаем:

$$\psi_1(t) = t + C_1, \quad \psi_1(1) + \psi_1(0) = 1 + 2C_1 = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad \psi_1(t) = t - \frac{1}{2};$$
$$\psi_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + C_2, \quad \psi_2(1) + \psi_2(0) = 2C_2 = 0, \quad \text{или} \quad \psi_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

Так как при $t \in (0;1)$ $\psi_2(t) > 0$, то оптимальное управление имеет вид $u^*(t) \equiv 2$. Теперь оптимальная траектория находится как решение первых двух дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями:

$$\mathrm{x}^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t)\right), \text{ где } x_1^*(t) = t^2 - t, \quad x_2^*(t) = 2t - 1.$$

Пример 4.15

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 1,$$
$$x_2'(t) = u(t), \quad x_2(0) = 0, \; x_2(1) = -1,$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$, $u \in [-2;1]$, $t \in [0;1]$ и функционал

$$I=\int_0^1 x_1(t)\,dt \to \min .$$

Требуется найти оптимальную пару $(\mathrm{x}^*(\cdot), u^*(\cdot))$, на которой достигается минимум функционала.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем

$$f_1(t,\mathrm{x},u)=x_2\,,\quad f_2(t,\mathrm{x},u)=u\,,\quad F(t,\mathrm{x},u)=x_1\,,\quad G(t_1,\mathrm{x})\equiv 0\,,$$

$$S_1\big(t_1,\mathrm{x}(t_1)\big)=t_1-1=0\,,\quad S_2\big(t_1,\mathrm{x}(t_1)\big)=x_2(1)+1=0\,.$$

Решается задача Лагранжа.

1. Составляем гамильтониан: $H(t,\psi,\mathrm{x},u)=\psi_1\,x_2+\psi_2\,u-x_1$.

2. Находим максимум гамильтониана по управлению. В результате поиска условного экстремума на множестве $U=[-2;1]$ получаем:

$$u^*(t)=\begin{cases}1, & \psi_2(t)>0;\\ -2, & \psi_2(t)<0.\end{cases}$$

3. Выписываем уравнения системы (4.40):

$$x_1'(t)=x_2(t)\,,\quad x_1(0)=1\,,$$

$$x_2'(t)=u^*(t)\,,\quad x_2(0)=0\,,\quad x_2(1)=-1\,,$$

$$\psi_1'(t)=-\frac{\partial}{\partial x_1}H\Big(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)\Big)=1\,.$$

$$\psi_2'(t)=-\frac{\partial}{\partial x_2}H\Big(t,\psi(t),\mathrm{x}(t),u^*(t)\Big)=-\psi_1(t)\,.$$

4. Проверяем условия трансверсальности (4.39). Так как $G(t_1,\mathrm{x})\equiv 0$, $t_1=1$, $x_2(1)=-1$, то $\delta F=0$, $\delta x_2=0$, $\delta t_1=0$. Отсюда $\psi_1(1)\,\delta x_1=0$ и, следовательно, $\psi_1(1)=0$, поскольку вариация δx_1 произвольна.

5. Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$x_1'(t)=x_2(t)\,,\quad x_1(0)=1\,,$$

$$x_2'(t)=\begin{cases}1, & \psi_2(t)>0,\\ -2, & \psi_2(t)<0,\end{cases}\quad x_2(0)=0\,,\quad x_2(1)=-1\,,$$

$$\psi_1'(t)=1\,,\quad \psi_1(1)=0\,,$$

$$\psi_2'(t)=-\psi_1(t)\,.$$

Отсюда $\psi_1(t)=t+C_1$, $\psi_1(1)=1+C_1=0$, $C_1=-1$. Поэтому $\psi_1(t)=$ $=t-1$, $\psi_2(t)=t-\frac{1}{2}t^2+C_2$. Найдем корни уравнения $\psi_2(t)=-\frac{1}{2}t^2+t+$ $+C_2=0$: $\quad t=\frac{-1\pm\sqrt{1+2C_2}}{-1}=1\mp\sqrt{1+2C_2}$.

Если $C_2<\frac{1}{2}$, то действительных корней нет и $\psi_2(t)<0$. Тогда $u^*(t)=-2$ и $x_2'(t)=-2$, $x_2(t)=-2t+C_3$, $x_2(0)=0$, $C_3=0$. Но при этом $x_2(1)=-2\neq-1$, т.е. краевые условия не выполняются.

Если $-\frac{1}{2}<C_2<0$, то $\psi_2(t)<0$ и $u^*(t)=-2$ при $t\in[0;\tau)$, а при $t\in(\tau;1]$ $\psi_2(t)>0$ и $u^*(t)=1$, где τ – некоторый момент времени (момент переключения управления). Тогда на промежутке $[0;\tau]$ имеем $x_2'(t)=-2$, $x_2(t)=-2t+C_5$, $x_2(0)=C_5=0$, $x_2(t)=-2t$. На промежутке $[\tau;1]$ получаем $x_2'(t)=1$, $x_2(t)=t+C_6$, $x_2(1)=1+C_6=-1$, $C_6=-2$, $x_2(t)=t-2$.

Так как функция $x_2(t)$ непрерывна, то момент τ определяется из условия $x_2(\tau)=-2\tau=\tau-2$, т.е. $\tau=\frac{2}{3}$. Поэтому

$$x_2^*(t)=\begin{cases}-2t, & 0\le t\le\frac{2}{3},\\ t-2, & \frac{2}{3}\le t\le 1;\end{cases}$$

$$u^*(t)=\begin{cases}-2, & 0\le t\le\frac{2}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}\le t\le 1.\end{cases}$$

Найдем $x_1^*(t)$. Поскольку $x_1'(t)=x_2(t)=-2t$ при $t\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$, то $x_1(t)=-t^2+C_7$, $x_1(0)=C_7=1$, $x_1(t)=-t^2+1$.

При $t\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ имеем $x_1'(t)=x_2(t)=t-2$, $x_1\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{9}$. Отсюда

$$x_1(t)=\frac{1}{2}t^2-2t+C_8\,,\quad x_1\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{18}-\frac{4}{3}+C_8=\frac{5}{9}\,,\quad C_8=\frac{5}{3}\,.$$

В результате

$$x_1^*(t)=\begin{cases}1-t^2, & 0\le t\le\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{2}t^2-2t+\dfrac{5}{3}, & \dfrac{2}{3}\le t\le 1.\end{cases}$$

4.3. Оптимальное управление с обратной связью. Уравнение Беллмана

Постановка задачи

Системы управления с обратной связью (полной или не полной) по состоянию объекта управления имеют наиболее существенное практическое применение. Пусть поведение *объекта управления* описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathrm{x}(t)}{dt}=\mathrm{f}\left(t,\mathrm{x}(t),\mathrm{u}(t)\right),\tag{4.42}$$

где $\mathrm{x}(t)=\left(x_1(t),\,...,\,x_n(t)\right)^T\in R^n$ – *вектор состояния системы управления*; $\mathrm{u}(t)=\left(u_1(t),\,...,\,u_m(t)\right)^T\in U\subset R^m$ – *вектор управления*, $t\in T=\left[t_0,t_1\right]$ – *промежуток времени функционирования системы*, моменты начала процесса t_0 и окончания процесса t_1 заданны, $\mathrm{f}(t,\mathrm{x},u):T\times R^n\times U\to R^n$; R^n – n-мерное евклидово пространство.

Начальное условие $\mathrm{x}(t_0)=\mathrm{x}_0\in R^n$, где начальное состояние x_0 заранее не задано и может быть произвольным.

Определим *множество допустимых процессов* $D\left(t_0,\mathrm{x}_0\right)$ как множество пар $\mathrm{d}=\left(\mathrm{x}(\cdot),\mathrm{u}(\cdot)\right)$, которые включают траекторию $\mathrm{x}(\cdot)$ и управление $\mathrm{u}(\cdot)$ (где для всех $t\in T:\mathrm{x}(t)\in R^n$, $\mathrm{u}\in U$, функции $\mathrm{x}(\cdot)$ непрерывны и кусочно - дифференцируемы, а $\mathrm{u}(\cdot)$ кусочно-непрерывны), удовлетворяющие уравнению (4.42) с начальным условием $\mathrm{x}(t_0)=\mathrm{x}_0$ почти всюду на T .

На множестве $D(t_0, \mathrm{x}_0)$ определим *функционал качества управления*

$$J(\mathrm{d}) = \int_{t_0}^{t_1} F\big(t, \mathrm{x}(t), \mathrm{u}(t)\big)dt + G\big(\mathrm{x}(t_1)\big), \tag{4.43}$$

где $F(t, \mathrm{x}, \mathrm{u})$, $G(\mathrm{x})$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Предполагается, что при управлении используется информация о времени t и векторе состояния x.

Множество U_n допустимых управлений с полной обратной связью (позиционных управлений) образуют функции $\mathbf{u}(t, \mathrm{x}) : T \times R^n \to U$, которые для любых начальных состояний порождают соответствующие пары $\mathrm{d} = \big(\mathrm{x}(\cdot), \mathrm{u}(\cdot)\big) \in D(t_0, \mathrm{x}_0)$, где программные управления $\mathrm{u}(\cdot) \in U_0$, а для всех $t \in T$: $\mathrm{u}(t) = \mathbf{u}\big(t, \mathrm{x}(t)\big)$.

Применяемое в каждый момент времени $t \in T$ управление имеет вид *управления с полной обратной связью по вектору состояния* (рис. 4.6).

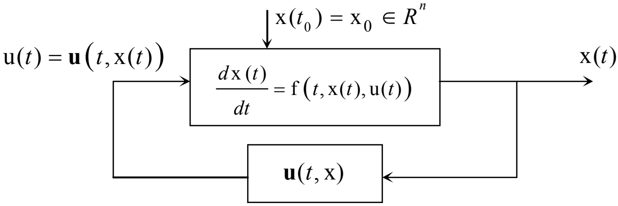


Рис. 4.6

Требуется найти такую функцию $\mathbf{u}^*(t, \mathrm{x}) \in U_n$, что

$$J(\mathrm{d}^*) = \min_{\mathrm{d} \in D(t_0, \mathrm{x}_0)} J(\mathrm{d}) \quad \forall \mathrm{x}_0 \in R^n, \tag{4.44}$$

где $\mathrm{d}^* = \Big(\mathrm{x}^*(\cdot), \mathrm{u}^*(\cdot) = \mathbf{u}^*(\cdot, \mathrm{x}(\cdot))\Big)$.

Функция $\mathbf{u}^*(t, \mathrm{x}) \in U_n$ называется *оптимальным управлением с полной обратной связью.* Для любого начального состояния x_0 из множества R^n она порождает соответствующую оптимальную пару, т.е. оптимальную траекторию $\mathrm{x}^*(\cdot)$ и оптимальное программное управление $\mathrm{u}^*(\cdot)$.

Уравнение Беллмана

Достаточным условием минимума функционала (4.43) является *уравнение Беллмана для непрерывных детерминированных систем* [1, 3, 4, 9].

Обозначим: $Q=\left(t_0,t_1\right)\times R^n$; $C^{1,1}(Q)$ – множество функций $\varphi(t,\mathrm{x}):Q\to R$ непрерывно дифференцируемых по t и x.

Утверждение (достаточные условия оптимальности в задаче (4.44))

Если существует функция $\varphi(t,\mathrm{x})\in C^{1,1}(Q)$, *удовлетворяющая уравнению Беллмана с граничным условием*

$$\max_{\mathrm{u}\in U}\left\{\frac{\partial\varphi(t,\mathrm{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_i}f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u})-F(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\right\}=0 \quad (t,\mathrm{x})\in Q, \tag{4.45}$$

$$\varphi(t_1,\mathrm{x})=-G(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in R^n,$$

и управление $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})\in U_n$, *удовлетворяющее условию*

$$\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})=\arg\max_{\mathrm{u}\in U}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_i}f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u})-F(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\right\}$$

то $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})$ *является оптимальным управлением с полной обратной связью.*

При этом *минимальное значение функционала* (4.43)

$$\min_{\mathrm{d}\in D(t_0,\mathrm{x}_0)}J(\mathrm{d})=-\varphi\left(t_0,\mathrm{x}_0\right),\quad \mathrm{x}_0\in R^n. \tag{4.46}$$

Алгоритм синтеза оптимального управления с полной обратной связью

1. Записать уравнение Беллмана (4.45) с граничным условием.

2. Найти структуру оптимального управления с полной обратной связью в результате поиска максимума в (4.45) по управлению. Искомое управление $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})$ обычно выражается через производные функции $\varphi(t,\mathrm{x})$.

3. Подставить полученное выражение для управления в уравнение (4.45). Проблема сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

4. Найти решение полученного уравнения и явный вид искомого управления.

Замечание 1. Уравнение Беллмана применяется и при негладких функциях $\varphi(t,\mathrm{x})$. Обоснование этого получено в работах В. Г. Болтянского, М. М. Хрусталева, У. Флеминга, А. И. Субботина и др.

Замечание 2. Величина функции $\varphi(t,\mathrm{x})$ определяется так называемыми *оставшимися потерями* на управление:

$$\varphi\big(t,\mathrm{x}\big) = -\min_{\mathrm{d}\in D(t_0,\mathrm{x}_0)} J(\mathrm{d}) \quad \forall(t,\mathrm{x})\in Q .$$

Замечание 3. Если положить $\varphi^{Б}(t,\mathrm{x}) = -\varphi(t,\mathrm{x})$, то, используя равенство: $\max f(x) = -\min[-f(x)]$, можно переписать уравнение Беллмана и граничное условие (4.45) в эквивалентной форме:

$$\min_{\mathrm{u}\in U}\left\{\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_i} f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) + F(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\right\} = 0,$$

$$\varphi^{Б}(t_1,\mathrm{x}) = G(\mathrm{x}), \tag{4.47}$$

При этом *минимальное значение функционала* (4.43)

$$\min_{\mathrm{d}\in D(t_0,\mathrm{x}_0)} J(\mathrm{d}) = \varphi^{Б}\big(t_0,\mathrm{x}_0\big), \quad \mathrm{x}_0\in R^n . \tag{4.48}$$

Замечание 4. Рассмотрим более общий случай. Предположим, что поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (4.1). Момент начала процесса задан, а момент t_1 окончания процесса определяется первым моментом достижения точкой $(t,\mathrm{x}(t))$ некоторой поверхности S, заданной соотношениями (4.2). На множестве допустимых процессов $D\big(t_0,\mathrm{x}_0\big)$ задан функционал (4.3). Обозначим $Q\subset R^{n+1}$ – множество точек (t,x), из которых можно достигнуть терминального множества S по некоторой траектории, соответствующей допустимому управлению; $Q\big(t_0\big)$ – сечение множества Q при фиксированном $t=t_0$. Начальное состояние x_0 заранее не задано и может быть произвольным в множестве $Q\big(t_0\big)$.

Множество U_n допустимых управлений с полной обратной связью (позиционных управлений) образуют функции $\mathbf{u}(t,\mathrm{x}): T\times R^n \to U$, которые для любых начальных состояний $\mathrm{x}_0\in Q\big(t_0\big)$ порождают соответствующие тройки $\mathrm{d} = \left(t_1, \mathrm{x}(\cdot), \mathrm{u}(\cdot)\right) \in D\left(t_0, \mathrm{x}_0\right)$, где программные управления $\mathrm{u}(\cdot) \in U_0$, а $t \in T \quad \mathrm{u}(t) = \mathbf{u}\left(t, \mathrm{x}(t)\right)$.

Требуется найти такую функцию $\mathbf{u}^*(t, \mathrm{x}) \in \mathrm{U}_n$, что

$$J(\mathrm{d}^*) = \min_{\mathrm{d} \in D(t_0, \mathrm{x}_0)} J(\mathrm{d}) \quad \mathrm{x}_0 \in Q(t_0), \tag{4.49}$$

где $\mathrm{d}^* = \left(t_1^*, \mathrm{x}^*(\cdot), \mathrm{u}^*(\cdot) = \mathbf{u}^*(\cdot, \mathrm{x}^*(\cdot))\right)$.

Функция $\mathbf{u}^*(t, \mathrm{x}) \in U_n$ называется *оптимальным управлением с полной обратной связью.* Для любого начального состояния x_0 из множества $Q(t_0)$ она порождает соответствующую оптимальную тройку, т.е. оптимальную траекторию $\mathrm{x}^*(\cdot)$, оптимальное программное управление $\mathrm{u}^*(\cdot)$, оптимальный момент окончания процесса t_1^*.

Введем в рассмотрение множество Φ функций $\varphi(t, \mathrm{x}) : Q \to R$, непрерывно дифференцируемых всюду, за исключением конечного числа сечений Q при фиксированных t [8].

Утверждение (достаточные условия оптимальности в задаче (4.49))

Если существует функция $\varphi(t, \mathrm{x}) \in \Phi$, удовлетворяющая уравнению Беллмана с граничными условиями

$$\max_{\mathrm{u} \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, \mathrm{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t, \mathrm{x})}{\partial x_i} f_i(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) - F(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) \right\} = 0, \quad (t, \mathrm{x}) \in Q, \tag{4.50}$$

$$\varphi(t_1, \mathrm{x}) = -G(t_1, \mathrm{x}) \quad (t_1, \mathrm{x}) \in S$$

и управление $\mathrm{u}^*(t, \mathrm{x}) \in U_n$, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{u}^*(t, \mathrm{x}) = \arg\max_{\mathrm{u} \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t, \mathrm{x})}{\partial x_i} f_i(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) - F(t, \mathrm{x}, \mathrm{u}) \right\}, \tag{4.51}$$

то $\mathrm{u}^*(t, \mathrm{x})$ является оптимальным управлением с полной обратной связью в задаче (4.49). *При этом минимальное значение функционала*

$$\min_{\mathrm{d} \in D(t_0, \mathrm{x}_0)} J(\mathrm{d}) = -\varphi\left(t_0, \mathrm{x}_0\right) \quad \forall \left(t_0, \mathrm{x}_0\right) \in Q.$$

Пример 4.16

Даны модель объекта управления

$$x_1'(t) = u(t),$$

где $x \in R$, $u \in R$, $t \in [0;1]$, и функционал

$$J(\mathrm{d}) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min .$$

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,x)$.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f(t,x,u) = u$, $F(t,x,u) = \frac{1}{2}u^2$, $G(x) = \frac{1}{2}x^2$. Решается задача Больца.

1. Выписываем уравнение Беллмана и граничное условие (4.45):

$$\max_u \left\{ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} u - \frac{1}{2}u^2 \right\} = 0 , \quad \varphi(1,x) = -\frac{1}{2}x^2 .$$

2. Находим структуру оптимального управления из условия максимума выражения в фигурных скобках. Применяя необходимое условие безусловного экстремума: $\frac{\partial\{\cdot\}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} - u = 0$ получаем $\mathbf{u}^*(t,x) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}$.

3. Подставляем полученное выражение для управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \right]^2 = 0 , \quad \varphi(1,x) = -\frac{1}{2}x^2 .$$

4. Будем искать решение уравнения в виде $\varphi(t,x) = \frac{1}{2}K(t)x^2$, где $K(t)$ – неизвестная функция. Подставляя в п. 3 и приравнивая коэффициенты при x^2 нулю, получаем $K'(t) = -K^2(t)$, $K(1) = -1$. Отсюда $K(t) = \frac{1}{t-2}$, а искомое оптимальное управление с обратной связью

$$\mathbf{u}^*(t,x) = K(t)\,x = \frac{x}{t-2} .$$

Покажем, что оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,x)$ с обратной связью порождает оптимальные пары $\left(x^*(\cdot), u^*(\cdot)\right)$ для любого начального условия. Действительно, пусть управление $\mathbf{u}^*(t,x)$ используется в схеме, изображенной на рис. 4.6. Тогда запишем уравнение, описывающее поведение замкнутой системы: $x' = \dfrac{x}{t-2}$, $x(0) = x_0$. Отсюда $x^*(t) = \dfrac{x_0(2-t)}{2}$, $u^*(t) = \mathbf{u}^*\big(t, x^*(t)\big) = \dfrac{1}{t-2} \cdot x_0 \cdot \dfrac{(2-t)}{2} = -\dfrac{x_0}{2}$. Таким образом, для любого x_0 можно получить соответствующую пару: оптимальную траекторию и оптимальное управление.

Применим принцип максимума для непосредственного определения оптимального программного управления и соответствующей траектории:

а) составляем гамильтониан: $H(t, \psi, x, u) = \psi u - \dfrac{1}{2} u^2$;

б) находим безусловный максимум $H\big(t, \psi(t), x(t), u\big)$ по управлению: $\dfrac{\partial H\big(t, \psi(t), x(t), u\big)}{\partial u} = \psi(t) - u = 0$. Отсюда

$$u^*(t) = \psi(t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 H\big(t, \psi(t), x(t), u\big)}{\partial u^2} = -1 < 0;$$

в) проверяем условия трансверсальности (4.39). Так как $G(x) = \dfrac{1}{2} x^2$, то $\delta G = x \cdot \delta x$ и $\left[x(t_1) \delta x - H(t_1) \delta t_1 + \psi(t_1) \delta x \right]_{t_1 = 1} = 0$. Поскольку $t_1 = 1$, то $t_1 - 1 = 0$ и $\delta t_1 = 0$. Ограничений на $x(t_1)$ не наложено, поэтому вариация δx произвольна. В результате имеем $\left[\big(\psi(t_1) + x(t_1) \big) \delta x \right]_{t_1 = 1} = 0$ и, следовательно, $\psi(1) + x(1) = 0$, т.е. $\psi(1) = -x(1)$;

г) выписываем уравнения системы (4.40) с учетом результата п.п. «б», «в»:

$$x'(t) = u^*(t) = \psi(t), \quad x(0) = x_0;$$

$$\psi'(t) = -\frac{\partial H\big(t, \psi(t), x(t), u\big)}{\partial x} = 0, \quad \psi(1) = -x(1);$$

д) решаем полученную двухточечную краевую задачу. В результате имеем $\psi(t) = \text{const} = -x(1) = u^*(t)$, $x(t) = -x(1) t + x_0$. При $t = 1$: $x(1) = -x(1) + x_0$, отсюда $x(1) = \dfrac{x_0}{2}$ и, следовательно, $x^*(t) = \dfrac{x_0(2-t)}{2}$,

$u^*(t) = -\frac{x_0}{2}$. Заметим, что для любого начального состояния x_0 оба подхода (уравнение Беллмана и принцип максимума) дают один и тот же результат.

Пример 4.17

Даны модель объекта управления в форме

$$x_1'(t) = u(t),$$
$$x_2'(t) = x_1(t)$$

и квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\left[x_1^2(2) + x_2^2(2)\right] \to \min.$$

Здесь $\mathrm{x} \in R^2$, $u \in R$, $t \in [0;2]$, $F(t,\mathrm{x},u) = \frac{1}{2}u^2(t)$, $G(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2\right]$, $f_1(t,\mathrm{x},u) = u$, $f_2(t,\mathrm{x},u) = x_1$.

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})$.

Решение

1. Для рассматриваемой задачи уравнение (4.45) имеет вид

$$\max_u \left\{ \frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_1}u + \frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_2} - \frac{1}{2}u^2 \right\} = 0,$$

$$\varphi(2,\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2.$$

2. Дифференцируя по управлению и приравнивая производную нулю, находим структуру оптимального управления: $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x}) = \frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_1}$.

3. Подставим полученное выражение для управления в уравнение:

$$\frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_1}\right]^2 + \frac{\partial \varphi(t,\mathrm{x})}{\partial x_2}x_1 = 0.$$

4. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\varphi(t,\mathrm{x}) = \frac{1}{2}K_{11}(t)x_1^2 + K_{12}(t)x_1x_2 + \frac{1}{2}K_{22}(t)x_2^2,$$

где $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{22}(t)$ – неизвестные функции. Подставляя $\varphi(t,\mathrm{x})$ в уравнение и граничное условие, приравнивая затем члены при одинаковых степенях x_1 и x_2 нулю, получаем

$$K_{11}' = -2K_{12} - K_{11}^2,\quad K_{12}' = -K_{22} - K_{12}K_{11},\quad K_{22}' = -K_{12}^2,$$
$$K_{11}(2) = -1,\quad K_{12}(2) = 0,\quad K_{22}(2) = -1.$$

Решение системы имеет вид

$$K_{11}(t) = \frac{-\left[12 + 4(2-t)^2(5-t)\right]}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)},\quad K_{12}(t) = \frac{-6(2-t)(4-t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)},$$
$$K_{22}(t) = \frac{-12(3-t)}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)},$$

а оптимальное управление с полной обратной связью

$$\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x}) = K_{11}(t)x_1 + K_{12}(t)x_2 =$$
$$= -\frac{\left[12 + 4(2-t)^2(5-t)\right]x_1 + 6(2-t)(4-t)x_2}{12(3-t) + (2-t)^3(6-t)}.$$

Пример 4.18

Дана модель объекта управления

$$x'(t) = u(t),$$

где $x \in R$, $u \in [-1;1]$, $t \in [0;t_1]$.

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})$ с обратной связью, переводящее объект из любого начального состояния в начало координат за наименьшее время, т.е. обеспечивающее минимум функционала

$$J = \int_0^{t_1} dt,\quad \forall x(0) \in R.$$

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f(t,x,u) = u$, $F(t,x,u) = 1$, $G(t_1,x) \equiv 0$. Решается задача Лагранжа или, с учетом смысла функционала, задача быстродействия с конечным условием $x(t_1) = 0$.

1. Выписываем уравнение Беллмана и граничное условие (4.50) в форме, аналогичной (4.47):

$$\min_{|u|\le 1}\left\{\frac{\partial \varphi^Б(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^Б(t,x)}{\partial x}u + 1\right\} = 0,\quad \varphi^Б(t_1,0) = 0.$$

Так как все траектории системы должны попасть в точку $x = 0$ при $t = t_1$, то граничное условие определено только в этой точке.

2. Находим структуру оптимального управления из условия минимума выражения в фигурных скобках: $\mathbf{u}^*(t,x) = -\operatorname{sign}\dfrac{\partial\varphi^Б(t,x)}{\partial x}$.

3. Подставляем полученное выражение для управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial\varphi^Б(t,x)}{\partial t} - \left|\frac{\partial\varphi^Б(t,x)}{\partial x}\right| + 1 = 0\,, \qquad \varphi^Б(t_1,0) = 0\,.$$

4. Функция $\varphi^Б(t,x) = |\,x\,|$ является решением уравнения, так как удовлетворяет ему в двух областях: при $x > 0$ и при $x < 0$, в чем можно легко убедиться прямой подстановкой. Граничное условие также выполняется при $x = 0$. Искомое оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{u}^*(t,x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ +1, & x < 0, \end{cases}$$

а минимальное значение функционала для произвольного начального состояния x_0 определяется по формуле

$$t_1^*(x_0) = \min_{\mathrm{d}\in D(t_0,x_0)} J(\mathrm{d}) = \varphi^Б(t_0,x_0) = |\,x_0\,|, \quad x_0 \in R\,.$$

Пример 4.19

Дана модель объекта управления в виде

$$x_1'(t) = x_2(t)\,,$$
$$x_2'(t) = u(t)\,,$$

где $\mathrm{x} \in R^2$, $u \in [-1;1]$, $t \in [0;t_1]$.

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})$ с обратной связью, переводящее объект из любого начального состояния в начало координат за наименьшее время, т.е. обеспечивающее минимум функционала

$$J = \int_0^{t_1} dt\,, \quad \mathrm{x}(0) \in R^2\,.$$

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f_1(t,\mathrm{x},u) = x_2$, $f_2(t,\mathrm{x},u) = u$, $F(t,\mathrm{x},u) = 1$, $G(t_1,\mathrm{x}) \equiv 0$, $\mathrm{x}(t_1) = (0,0)^T$. Решается задача Лагранжа.

1. Для рассматриваемой задачи записываем уравнение Беллмана и граничное условие (4.50) в форме, аналогичной (4.47):

$$\min_{|u|\le 1}\left\{\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2}u+1\right\}=0\,,\qquad \varphi^{Б}(t_1,0)=0\,.$$

Так как все траектории системы должны попасть в точку $\mathrm{x}=(0,0)^T$ при $t=t_1$, то граничное условие определено только в этой точке.

2. Находим структуру оптимального управления из условия минимума выражения в фигурных скобках: $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})=-\mathrm{sign}\,\dfrac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2}$.

3. Подставляем полученное выражение для управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial t}+\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_1}x_2-\left|\frac{\partial\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2}\right|+1=0\,,\qquad \varphi^{Б}(t_1,0)=0\,.$$

4. Функция
$$\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})=\begin{cases} x_2+\sqrt{4x_1+2x_2^2}\,, & x_1>-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\\ |x_2|, & x_1=-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\\ -x_2+\sqrt{-4x_1+2x_2^2}\,, & x_1<-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|\end{cases}$$
удовлетворяет граничному условию и уравнению в трех характерных областях, в чем можно убедиться подстановкой.

Искомое оптимальное управление с полной обратной связью имеет вид

$$\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})=\begin{cases} -1, & x_1>-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\\ -\mathrm{sign}\,x_2\,, & x_1=-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\\ 1, & x_1<-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|,\end{cases}$$

где $x_1=-\dfrac{1}{2}x_2\cdot|x_2|$ – уравнение линии переключения оптимального управления.

Вычисляя, например, при $x_1 > -\frac{1}{2} x_2 \cdot |x_2|$ производные функции Беллмана:

$$\frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_1} = \frac{2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}}, \quad \frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2} = 1 + \frac{2x_2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}},$$

замечаем, что $\frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2} > 0$, т.е. $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x}) = -\mathrm{sign}\frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2} = -1$. Подставляя эти выражения в левую часть уравнения Беллмана, получаем

$$\frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial \varphi^{Б}(t,\mathrm{x})}{\partial x_2} \right| + 1 =$$

$$= 0 + \frac{2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}} x_2 - \left| 1 + \frac{2x_2}{\sqrt{4x_1 + 2x_2^2}} \right| + 1 = 0.$$

Следовательно, в области $x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|$ полученные функции $\varphi^{Б}(t,\mathrm{x})$ и $\mathbf{u}^*(t,\mathrm{x})$ являются решением задачи. В других областях проверка выполняется аналогично. Траектории оптимальной системы и управление для фиксированного начального состояния совпадают с найденными в примере 4.12.

Пример 4.20

Даны модель объекта управления

$$x'(t) = u(t)\, x(t),$$

где $x \in R$, $u \in R$, $t \in [0;t_1]$, значение t_1 задано, и функционал

$$J(\mathrm{d}) = \beta \int_0^{t_1} u^2(t)\, dt + \alpha \ln^2 x(t_1) \to \min, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,x)$.

Решение

Сравнивая с общей постановкой задачи, имеем: $f(t,x,u) = u\,x$, $F(t,x,u) = \beta u^2$, $G(x) = \alpha \ln^2 x$. Решается задача Больца.

1. Для рассматриваемой задачи записываем уравнение Беллмана и граничное условие (4.45):

$$\max_{u\in R}\left\{\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}u\,x-\beta\,u^2\right\}=0\,,\quad \varphi(t_1,x)=-\alpha\ln^2 x\,.$$

2. Находим структуру оптимального управления из условия максимума выражения в фигурных скобках. Применяя необходимое условие безусловного экстремума, получаем:

$$\mathbf{u}^*(t,x)=\frac{x}{2\beta}\cdot\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\,.$$

3. Подставляем полученное выражение для управления в уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+\frac{x^2}{4\beta}\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right)^2=0\,,\quad \varphi(t_1,x)=-\alpha\ln^2 x\,.$$

4. Будем искать решение уравнения в виде

$$\varphi(t,x)=\Phi(t)\cdot\ln^2 x\,,$$

где $\Phi(t)$ – неизвестная функция. Подставляя $\varphi(t,x)=\Phi(t)\cdot\ln^2 x$ в уравнение и граничное условие и приравнивая нулю коэффициенты перед $\ln^2 x$, получаем

$$\Phi'(t)+\frac{1}{\beta}\Phi^2(t)=0\,,\quad \Phi(t_1)=-\alpha\,.$$

Отсюда находим функцию $\Phi(t)=-\dfrac{\alpha\beta}{\beta+\alpha(t_1-t)}$, затем функцию $\varphi(t,x)=-\dfrac{\alpha\beta\ln^2 x}{\beta+\alpha(t_1-t)}$ и искомое оптимальное управление с обратной связью

$$\mathbf{u}^*(t,x)=-\frac{\alpha\,\ln x}{\beta+\alpha(t_1-t)}\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для задачи

$$x'(t) = u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u^2(t) + x^2(t)\right]dt \to \min$$

найти: а) оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$, применяя принцип максимума; б) оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,x)$ с полной обратной связью.

Ответ: а) $x^*(t) = x_0 \dfrac{e^t + e^{2-t}}{1+e^2}$, $u^*(t) = x_0 \dfrac{e^t - e^{2-t}}{1+e^2}$;

б) $\mathbf{u}^*(t,x) = \dfrac{1-e^{2-2t}}{1+e^{2-2t}} x$.

2. Для задачи

$$x_1'(t) = x_2(t) + u_1(t), \quad x_1(0) = 0,$$

$$x_2'(t) = u_2(t), \quad x_2(0) = 0,$$

$$J = \int_0^1 \left[u_1^2(t) + u_2^2(t)\right]dt + x_1(1) \to \min$$

найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$.

Ответ: $x_1^*(t) = \dfrac{t^3}{12} - \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{2}$, $x_2^*(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{2}$;

$u_1^*(t) = -\dfrac{1}{2}$, $u_2^*(t) = \dfrac{t-1}{2}$.

3. Для задачи

$$x'(t) = 3x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u^2(t) + 7x^2(t)\right]dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min$$

найти оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t,x)$ с полной обратной связью.

Ответ: $\mathbf{u}^*(t,x) = \dfrac{3e^{8t-8} - 7}{3e^{8t-8} + 1} x$.

4. Для задачи

$$x'(t) = -3\,x(t) + 2\,u(t)\,, \qquad x(0) = x_0\,,$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u^2(t) + 10\,x^2(t)\right] dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min$$

найти оптимальное управление $\boldsymbol{u}^*(t,x)$ с полной обратной связью.

Ответ: $\boldsymbol{u}^*(t,x) = -x$.

5. Для задачи

$$x_1'(t) = x_2(t)\,, \qquad x_1(0) = 0\,, \quad x_1(1) = 1\,,$$
$$x_2'(t) = u(t)\,, \qquad x_2(0) = 0\,, \quad x_2(1) = 0\,,$$

$$J = \int_0^1 u^2(t)\,dt \to \min$$

найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$ и оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$.

Ответ: $u^*(t) = 7 - 6t$, $x_1^*(t) = 3t^2 - \frac{7}{6}t^3$, $x_2^*(t) = 6t - \frac{7}{2}t^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968.

2. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969.

3. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М.: Мир, 1972.

4. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. – К.: Выща школа, 1975.

5. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961.

6. *Грибанов В.М.* Вариационное исчисление. Конспект лекций. – Луганск: Изд. ВУГУ, 1998.

7. *Карташов А.П., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1973.

8. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.

9. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971.

10. *Нефёдов Ю.М.* Теория управления. Учеб. пособие. – Луганск: Изд-во ВНУ им. В.Даля, 2003.

11. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977.

12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.

13. *Цирлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. – М.: Энергия, 1976.

14. *Швед О.П.* Дифференциальные уравнения. Часть 1. Учеб. пособие. – Луганск: Изд-во ВУНУ, 2000.

15. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

Учебное пособие

НЕФЁДОВ Юрий Михайлович

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ
ПРАКТИКУМ

Авторский оригинал-макет

Подписано к печати ________
Формат 60x84 1/16 Бумага типограф. Гарнитура Times.
Печать офсетная. Усл. печ. стр. ___. Уч.-изд. л. _____.
Тираж ___ екз. Изд. № ____. Заказ № __. Цена договорная.

Издательство Луганского национального университета
имени Владимира Даля

Адрес издательства: 91034, г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, **факс**. 8 (0642) 41-31-60
http: www.dahluniver.ru