

Б.В.МЕДВЕДЕВ

# НАЧАЛА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## МЕХАНИКА ТЕОРИЯ ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по физико-техническим и инженерно-физическим направ-  
лениям подготовки и специальностям.*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2007

УДК 530.1  
ББК 22.31  
М 42

Медведев Б. В. **Начала теоретической физики. Механика, теория поля, элементы квантовой механики** — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 600 с. — ISBN 978-5-9221-0770-9.

Книга представляет собой краткое изложение начал теоретической физики. Главное внимание уделяется при этом логически последовательному изложению узловых фундаментальных вопросов с современной точки зрения.

Книга будет полезна всем изучающим теоретическую физику, но не обязательно выбравшим ее своей основной специальностью: физикам-экспериментаторам, а также интересующимся физикой инженерам, математикам, химикам, биологам и др.

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по физико-техническим и инженерно-физическим направлениям подготовки и специальностям.

ISBN 978-5-9221-0770-9

© ФИЗМАТЛИТ, 2007

© Б. В. Медведев, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора ко второму изданию . . . . .	6
Предисловие к первому изданию . . . . .	8
Введение. Предмет и метод теоретической физики . . . . .	10
 <b>Часть I. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА . . . . .</b>	<b>13</b>
1. Место механики в физике . . . . .	13
2. Основные понятия механики . . . . .	15
3. Принцип наименьшего действия . . . . .	19
4. Принцип относительности Галилея . . . . .	23
5. Законы сохранения . . . . .	31
6. Преобразования сохраняющихся величин . . . . .	40
7. Инвариантность относительно преобразований Галилея . . . . .	47
8. Рассеяние частиц . . . . .	58
9. Одномерное движение . . . . .	67
10. Движение в центральном поле . . . . .	70
11. Движение в кулоновом поле . . . . .	76
12. Эффективное сечение . . . . .	83
13. Формула Резерфорда . . . . .	91
14. Малые колебания . . . . .	94
15. Функции Грина . . . . .	104
16. Уравнения Гамильтона . . . . .	115
17. Вариационный принцип для уравнений Гамильтона . . . . .	126
18. Скобки Пуассона . . . . .	129
19. Канонические преобразования . . . . .	142
20. Пример на канонические преобразования: осциллятор . . . . .	153
 <b>Часть II. МЕХАНИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ . . . . .</b>	<b>157</b>
1. Принцип относительности и принцип постоянства скорости света . . . . .	157
1а. Одновременность и пространство . . . . .	166
1б. Замедление времени . . . . .	170

2.	Преобразования Лоренца . . . . .	174
3.	Четырехмерные векторы и тензоры . . . . .	181
4.	Динамика свободной материальной точки . . . . .	195
5.	Десять фундаментальных величин . . . . .	203
6.	Взаимодействие в теории относительности. Необходимость понятия поля . . . . .	214
7.	Лагранжев формализм для поля . . . . .	217
8.	Законы сохранения . . . . .	222
9.	Электромагнитное поле . . . . .	232
10.	Уравнения электромагнитного поля . . . . .	236
11.	Энергия и импульс электромагнитного поля . . . . .	241
12.	Трехмерная формулировка . . . . .	245
13.	Решение уравнений поля . . . . .	255
	<b>13а.</b> Однородное уравнение . . . . .	257
	<b>13б.</b> Уравнения с правой частью . . . . .	266
14.	Электростатика . . . . .	275
15.	Электростатическое поле вне системы зарядов . . . . .	282
16.	Стационарное поле. Магнетостатика . . . . .	288
17.	Излучение электромагнитного поля . . . . .	301
18.	Дипольные и квадрупольные излучения . . . . .	309
19.	Старшие мультипольные излучения . . . . .	317
20.	Рассеяние света на свободных зарядах . . . . .	346
 <b>Часть III. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ . . . . .</b>		<b>351</b>
1.	Историческое введение . . . . .	351
2.	Состояния. Суперпозиция . . . . .	364
3.	Векторы состояния и операторы . . . . .	369
4.	Проблема собственных значений . . . . .	380
5.	Функции наблюдаемых . . . . .	389
6.	Спектральные представления и вероятности . . . . .	395
7.	Коммутирующие наблюдаемые . . . . .	403
8.	Представления . . . . .	412
9.	Квантование . . . . .	416
10.	Система с одной степенью свободы . . . . .	418
11.	Соотношение неопределенностей Гейзенберга . . . . .	451
12.	Волновая функция . . . . .	460
13.	Сдвиги и повороты системы отсчета . . . . .	466
14.	Квантование момента . . . . .	473

---

15. Реализации момента . . . . .	481
16. Уравнения движения . . . . .	504
17. Первый пример. Осциллятор . . . . .	519
18. Дальнейшие примеры динамических задач . . . . .	525
19. Движение в центральном поле . . . . .	533
20. Кулоново поле . . . . .	540
<b>ДОПОЛНЕНИЯ . . . . .</b>	<b>547</b>
1. Элементы аналитической механики . . . . .	547
2. Стохастичность и квантование . . . . .	568
Предметный указатель . . . . .	594

## **ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ**

Учебное пособие выдающегося физика-теоретика Б. В. Медведева с момента выхода в свет пользовалось большой популярностью у студентов и преподавателей, так что первое издание «Начал теоретической физики» быстро разошлось. За прошедшие почти тридцать лет учебных пособий, сравнимых с данной книгой по уровню и доступности изложения, так и не появилось. Между тем потребность в подобных целостных курсах теоретической физики не уменьшилась.

Бурное развитие фундаментальной физики и ее технологических приложений с огромной быстротой меняет облик окружающего мира. Численность специалистов в смежных областях, использующих достижения современной физики, резко возросло. И одновременно возросли трудности в освоении теоретической физики, особенно если ее преподавать шаблонно на уровне середины XX века. Нужны новые подходы, дальнейшие шаги к выявлению единства и целостности физического знания. Этим критериям удовлетворяет труд Б. В. Медведева, вполне заслуживающий право считаться учебником для студентов инженерно-физических специальностей вузов.

К сожалению, безвременная кончина Б. В. Медведева в январе 2000 г. не позволила ему самому завершить работу по подготовке данной книги к переизданию. Выполнение этой работы потребовало внесения ряда исправлений и дополнений в первоначальный текст, намеченных автором. Кроме того, по согласованию с издательством Физматлит было принято решение издать данный учебник в двух книгах.

В основу книги I положено предыдущее издание, дополненное в конце несколькими существенными материалами, написанными Б. В. Медведевым и опубликованными в других изданиях. В будущую книгу II предполагается включить элементы квантовой теории поля и аксиоматической теории матрицы рассеяния, подготовленные мной на основе лекций, прочитанных в разные годы Б. В. Медведевым, и фундаментальных статей обзорного характера.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. П. Павлову и П. Б. Медведеву за помощь в подготовке и изданию дополнений к книге I. Я искренне благодарен В. Я. Дубновой и О. Н. Голубевой за помощь в редактировании и поддержку на всех этапах работы над книгой, а также главному редактору издательства Физматлит М. Н. Андреевой и ее заместителю Е. С. Артоболевской за качественную организацию издания учебного пособия Б. В. Медведева.

Книга будет весьма полезна студентам, аспирантам, научным работникам и преподавателям, специализирующимся в области физики и ее приложений.

20.06.2006

*А. Д. Суханов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

За последние три-четыре десятилетия теоретическая физика, как и вся физика вообще, испытала период необычайно быстрого роста. Возникли новые физические представления, была разработана масса методов, использующих самые разнообразные математические средства, было успешно решено совершенно невероятное количество задач. Неизбежным следствием этого процесса явился весьма значительный рост объема науки — так, известный курс Ландау и Лифшица, задуманный в свое время как собрание того минимума сведений, который необходимо знать всякому теоретику, разросся сейчас более чем до 300 печатных листов. Изучение такого количества материала требует нескольких лет упорного труда; ясно, что такая роскошь доступна лишь решившим избрать теоретическую физику своей основной специальностью. Между тем все расширяется круг лиц, не претендующих на профессиональную работу в теоретической физике, которым тем не менее регулярно приходится пользоваться ее результатами и методами, — это, в первую очередь, физики-экспериментаторы и воспитываемые физико-техническими и инженерно-физическими факультетами физики с инженерным уклоном, затем математики, которым хотелось бы понимать смысл физических задач, которые их просят помочь решить, далее химики, биологи и представители других естественных наук, в самые основы которых все сильнее вторгаются физические методы и т. п. С другой стороны, даже для профессионалов-теоретиков возникает реальная опасность потерять общую перспективу за деталями хитроумных методов решения частных задач.

Эти обстоятельства побудили автора предпринять попытку краткого изложения начал теоретической физики — той основной схемы физических идей в их взаимной связи и логической последовательности, которая образует каркас или, если можно так выразиться, скелет, обрастающий в дальнейшем «мясом» бесчисленных конкретных задач. Если угодно, автор поставил себе целью написать научно-популярную книгу на научном уровне, без каких-либо пропусков в логике или математике — судить о том, насколько удалась эта попытка, дело читателей.



Идея написать книгу такого рода зародилась у автора в процессе чтения курса теоретической физики, который он ряд лет вел в Московском институте электронного машиностроения. Автор благодарен заведующему кафедрой прикладной математики МИЭМ В. П. Маслову, который предоставил ему такую возможность; автор также благодарен В. А. Гордину, конспекты которого были использованы при составлении первого варианта рукописи.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою благодарность всем лицам, читавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний: В. Л. Бонч-Бруевичу, О. И. Завьялову, Г. Ф. Друкареву, В. А. Франке, М. Г. Веселову, рецензенту издательства Д. В. Ширкову, редактору книги А. Д. Суханову, а также всем моим коллегам, советами которых я имел случай воспользоваться.

## ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ И МЕТОД ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**0.1. Теоретическая физика** выделилась как самостоятельная наука в первых десятилетиях нашего века. Ее двоякого рода задача состоит в том, чтобы, во-первых, открывать — исходя из результатов отдельных, частных опытов — общие законы, управляющие какой-либо областью физических явлений, и, во-вторых, указывать, каким образом, исходя из этих общих законов, можно заранее описать ожидаемое поведение тех или иных физических систем, предсказать результаты определенных конкретных экспериментов.

Обе эти задачи на достигнутом нами теперь уровне понимания природы оказываются настолько сложными и требуют обычно построения столь длинных цепочек логических умозаключений, что в них вряд ли можно было бы продвинуться сколько-нибудь далеко, не прибегая к техническим средствам, позволяющим формализовать и в какой-то степени автоматизировать процесс получения логических выводов.

**0.2.** Такие средства предоставляет нам математика, поэтому в обеих своих частях — и в индуктивной и, особенно, в дедуктивной — теоретическая физика широко пользуется средствами математики, и эта непривычно высокая для любого естествоиспытателя — включая сюда и физика-экспериментатора — степень математизации является, по-видимому, первой бросающейся в глаза характерной чертой теоретической физики. Для многих она может казаться — и оказывается — трудно преодолимым порогом, но тем не менее через него ведет самый простой путь к пониманию того, как устроена природа.

**0.3.** Однако в способах использования математических средств, в самом характере рассуждений теоретической физики имеются некоторые специфические особенности, которые не только препятствуют тому, чтобы рассматривать ее просто как один из разделов математики, но и делают иногда ее методы в каком-то смысле прямо противоположными математическим. Один известный советский теоретик любил формулировать это отличие словами: «Математик доказывает, а физик убеждает слушателей».

Различие это обусловлено, конечно, не различным складом ума математиков и физиков-теоретиков, а различием предмета их исследования — в то время как математик в известном смысле сам конструирует объекты своего исследования по собственному произволу и ограничен лишь требованиями логической определенности и непротиворечивости, физик изучает независимо от нас существующую природу, которая «выдана» нам в одном единственном экземпляре, и ему волей-неволей приходится больше заботиться о соответствии вводимых понятий этому единственному объекту, чем о соображениях удобства рассмотрения или логической стройности.

Иными словами, теоретическая физика, будучи по используемым в ней методам наукой точной, остается в то же время наукой **par excellence** естественной по предмету и цели своего исследования.

Такая двойственность предопределяет другую — так сказать, обратную — особенность теоретической физики, отношение к математике не более как к вспомогательному средству, которое «подобно жернову перемалывает то, что под него засыпают», средству, от которого не следует требовать точности большей, чем точность исходных предпосылок.

**0.4.** Что же до этих предпосылок, то единственный объект исследований теоретической физики — природа — настолько сложен, что полное рассмотрение по существу любого явления, с учетом всех его сторон и особенностей, средствами современной математики практически невозможно. Поэтому то, чем на самом деле занимается теоретическая физика, это не столько непосредственно природные объекты и их отношения, сколько искусственно конструируемые **модели**, которые получаются из природных объектов, если абстрагироваться от всех деталей, не существенных для рассматриваемого явления, и сохранить только его основные, определяющие черты. Так входят в физику такие абстрактные понятия, как абсолютно твердые тела, несжимаемые жидкости, материальные точки и т. п. Естественно, что выбор подходящей модели — а это есть действие не логическое, а интуитивное — играет при этом чрезвычайно существенную роль, чем и предreshается значение интуитивного мышления в теоретической физике.

**0.5.** Вообще, постоянная апелляция к интуиции составляет неотъемлемую особенность теоретической физики. Не только установление общих законов, но и получение следствий из них оказывается обычно невозможным без создания наглядных обра-

зов протекающих явлений — на чисто формальном пути трудно избежать грубейших ошибок. Особенно опасно поддаться тут соблазну искать для всех входящих в теорию понятий и объектов определения, исчерпывающие в математическом смысле, — при этом приходится обычно принимать ряд допущений, которые могут выглядеть достаточно невинно, но физический смысл которых совершенно темен; в результате легко прийти к заключениям, логическая обоснованность которых безукоризненна, но которые тем не менее могут не иметь никакого отношения к изучаемой физической проблеме.

**0.6.** Особо следует сказать о месте, которое занимает в теоретической физике приближенное рассмотрение.

Прежде всего, все численные значения физических величин суть результаты измерений и, значит, могут быть найдены лишь с некоторыми погрешностями.

С другой стороны, и математические задачи, которые приходится решать, чтобы сделать физические предсказания, бывают — кроме самых простейших случаев — столь сложными, что речь может идти только о приближенном, а не о точном решении (причем проверить оправданность совершаемых приближений удастся далеко не всегда, часто для этого требовалось бы обладать точным решением).

Гораздо существенней, однако, то обстоятельство, что нередко мы не можем неограниченно увеличивать (хотя бы в принципе) точность измерений или вычислений — может оказаться, что при чрезмерном увеличении точности рассматриваемые величины или закономерности вообще исчезнут, подобно тому как изображение на газетном клише вовсе исчезает при попытке лучше рассмотреть его детали под лупой (для математика, наверно, нагляднее пример асимптотического ряда, члены которого сперва убывают, а затем начинают возрастать). Это значит, что само существование подобных величин или функциональных зависимостей имеет приближенный характер.

## Часть I

# КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

---

### 1. Место механики в физике

Как уже говорилось во введении, в теоретической физике само существование тех или иных «законов» может возникать лишь в определенном приближении. Характерным примером этой ситуации может служить классическая механика.

**1.1.** Классическая механика возникла из обобщения тех сведений о движении материальных тел, которые можно было почерпнуть из нашего повседневного опыта. При этом в результате многовековых стараний пришли к тому выводу, что при построении законов механики следует абстрагироваться от некоторого круга явлений, играющих в повседневном опыте весьма существенную роль, — именно, от явлений, связанных с трением, — или, во всяком случае, отказаться от описания их механизма и точных законов<sup>1)</sup>.

**1.2.** К концу прошлого века в результате создания кинетической теории этому обстоятельству возникло то объяснение, что «на самом деле» законы механики в точности применимы только к микрочастицам, из которых построены все материальные тела, — к молекулам и атомам. Применимость же — приближенная — механики к поведению «больших» тел не прямая, а опосредствованная. Она возникает лишь за счет статистического усреднения, причем и сами динамические величины для макроскопических тел — координаты, импульсы, энергия — не есть собственно динамические переменные, а лишь некоторые средние значения (полученные в результате усреднения по микроскопическим движениям) некоторых настоящих динамических переменных. Сама же точность, с которой выполняются макроскопические уравнения движения, есть лишь следствие громадного числа молекул во всяком макроскопическом теле,

---

<sup>1)</sup> Поэтому наилучшее поле для приложения классической механики мы находим в астрономии.

почему флуктуации — отклонения от средних — оказываются поразительно малыми.

Таким образом, для макроскопической механики ее законы возникают способом, для которого Э. Шредингер предложил очень меткое название «порядок из беспорядка», и при достаточном увеличении точности измерений перестают выполняться (известным примером служит броуново движение). Что же касается сил трения, то нам приходится отказаться от их описания или вводить их извне как некий чужеродный механике объект.

**1.3.** Однако полная парадоксальность ситуации проявилась лишь в XX веке, когда выяснилось, что как раз для составляющих большие тела микрочастиц классическая механика в большинстве случаев **вообще неприменима**, что их движения управляются совсем другими законами, законами **квантовой механики**. Кроме того, при больших скоростях вступают в силу изменения, связанные с **теорией относительности**.

Таким образом, строго говоря, классическая механика **вовсе не имеет области применимости**. Она оказывается как раз такой теорией, само существование которой обязано лишь приближенности описания.

Зачем же изучать классическую механику?

Не стоит повторять того, что хотя и нет никакой области явлений, *точно описываемой* классической механикой, есть очень обширные области, описываемые ею *в очень хорошем приближении*.

Не менее существенно другое обстоятельство. Именно в классической механике были очень подробно развиты чрезвычайно удобные общие математические методы, составляющие предмет *аналитической механики*, которые достигли такого совершенства, что именно «по их образу и подобию» строятся сейчас почти все физические теории <sup>1)</sup>. Поэтому знакомство с теорети-

---

<sup>1)</sup> Это обстоятельство может служить замечательной иллюстрацией интуитивной консервативности человеческого мышления. Более двух с половиной веков, от времен Ньютона до конца прошлого столетия, механика рассматривалась как прямая и единственная основа всей физики. Под словами понять или объяснить какое-либо физическое явление имели в виду построение его механической модели, причем выражение «модель» понималось буквально, в смысле какой-либо реальной конструкции из предметов, подчиняющихся законам классической механики. Так для объяснения распространения световых волн была придумана специальная заполняющая все пространство упругая среда — «мировой эфир», — в котором световые колебания распространялись так же, как звук в твердых телах. Создатель современной электродинамики Максвелл потратил немало сил на попытки так «оборудовать» эту среду, чтобы она опи-

ческой физикой приходится начинать с методов аналитической механики.

Однако основы аналитической механики мы будем излагать не с математической, а с физической точки зрения, и во главу угла мы будем все время ставить не строгость доказательств, а связи с нашими физическими представлениями о природе.

## 2. Основные понятия механики

**2.1.** В соответствии с известным положением философии, что пространство и время суть формы существования материи, понятия пространства и времени относятся к основным понятиям теоретической физики. Введение этих понятий, как и любых физических понятий, должно опираться на данные опыта, основываться на некоторой процедуре, позволяющей сопоставлять соответствующим понятиям физическим величинам определенные числа, получаемые в результате измерений.

**2.1.1.** Не существует, однако, опытов, которые позволяли бы измерить положение тела в пространстве или *момент времени*, когда происходит некоторое событие, — экспериментально мы можем измерять только **расстояния** между телами или **промежутки времени** между событиями.

Таким образом, чтобы сопоставлять пространству и времени какие-либо физические величины, мы должны выбрать некоторое тело в качестве начала отсчета расстояний и некоторый момент в качестве начала отсчета промежутков времени.

**2.1.2.** Для измерения расстояний пользуются масштабами — т. е. сравнивают измеряемое расстояние с размерами некоторого тела — масштаба, — принимаемого за эталон.

Для измерения времени пользуются часами. Часами может служить любой периодический процесс, т. е. такой процесс, в котором многократно повторяется одно и то же состояние.

---

сывалась бы выведенными им уравнениями: дело доходило до напоминающих часовой механизм моделей с колесами и зубчатыми передачами. Только к концу прошлого века физикам пришлось примириться с тем, что новые области физических явлений — тогда в первую очередь шла речь об электродинамике — принципиально несводимы к механике. В связи с этим место реальных механических моделей начали занимать в физике модели математические, от которых уже требовалось не конструктивное тождество с объектом, а только математически аналогичное описание — и что же, в качестве материала для построения таких моделей мы опять используем механические уравнения!

**2.1.2.1.** Какими соображениями надо руководствоваться при выборе каких-либо масштабов и часов в качестве эталонов длины и времени? Единственным решающим доводом служит тут требование *воспроизводимости*: если мы рассмотрим какую-то большую группу масштабов (или часов) и будем многократно сравнивать все их друг с другом, то среди этой группы начнет выделяться подгруппа, повторные сравнения внутри которой приводят к наименьшим расхождениям — какой-либо из членов этой подгруппы и будет рационально принять за эталон. Если в последующих сравнениях (в которых могут участвовать и масштабы (часы), не входившие в первоначальную группу) выделится более узкая (а может быть — другая) подгруппа, дающая лучшую воспроизводимость, то естественно перейти к новому эталону.

Именно таким образом шел процесс отбора «наилучших» эталонов длины и времени в реальной истории науки. При этом долгое время в качестве наилучших эталонов длины служили специальным образом подобранные твердые тела макроскопических размеров, а в качестве наилучших часов — астрономические периодические процессы — вращение планет и их обращение вокруг Солнца. В последнее время в связи с успехами микрофизики обнаружилось, что эталоны лучшего качества можно найти среди атомных процессов, — сейчас за международный эталон принимают длину волны в вакууме определенной спектральной линии<sup>1)</sup>.

**2.1.3.** Опыт показывает, что для того, чтобы определить положение одного тела относительно другого, надо произвести с помощью некоторого масштаба **три** независимых измерения. Таким образом наше пространство **трехмерно**. Дальнейшее сопоставление опытных фактов, относящихся к измерениям рас-

<sup>1)</sup> Тут стоит отметить два любопытных момента:

С одной стороны, примечательно, что в качестве эталона длины выбран не предмет, а процесс (колебаний электрона в атоме) — в соответствии со сказанным *непосредственно* он осуществляет эталон не длины, а времени. Эталон длины получается отсюда опосредствованным образом, умножением на фундаментальную постоянную природы — скорость света в вакууме.

С другой стороны, однако, используя этот эталон косвенным образом для измерения длины, мы, на современном уровне техники, не можем использовать его прямым путем в качестве эталона времени — трудность лежит просто в том, что хотя мы сейчас можем практически сосчитать, сколько световых волн приходится, скажем, на метр, мы не умеем сосчитать, сколько колебаний атомной системы происходит в секунду. Обратному же пересчету длины световой волны в частоту колебаний мешает то, что хотя скорость света, как фундаментальная постоянная природы, есть величина абсолютно точная, мы знаем ее сейчас еще недостаточно точно.



стояний между различными телами, приводит к тому выводу, что наше пространство **евклидово**, а, следовательно, обладает свойствами однородности и изотропности.

**2.2.1.** Как уже говорилось, мы можем измерять на опыте только расстояния между какими-то парами тел, т.е. определять только *относительное* положение тел по отношению к какому-то другому телу. То тело, относительно которого мы определяем положения остальных тел, называют телом **отсчета** (его, в принципе, можно выбрать совершенно произвольно), а совокупность связанной с этим телом системы координат в пространстве и некоторых часов называют **системой отсчета**.

**2.2.2.** Для классической механики характерно представление об абсолютности пространства и времени — принимается, что расстояния между телами и промежутки времени не зависят от движения системы отсчета, в которой они рассматриваются.

**2.3.** Выше уже говорилось о роли упрощенных моделей в теоретической физике. Очень важным модельным понятием в механике, понятием, без использования которого, строго говоря, невозможно сформулировать основные законы механики, является понятие материальной точки. **Материальной точкой** называется тело столь малое, что его размерами и внутренней структурой можно пренебречь, и единственно существенным является лишь его положение в пространстве <sup>1)</sup>.

**2.3.1.** Согласно классическим (в смысле — некантовым) представлениям материальная точка имеет в каждый момент времени точно определенное место в пространстве, которое можно характеризовать заданием ее трех координат или радиус-вектора, как функции времени:

$$\mathbf{r} \equiv \{x, y, z\} = \mathbf{r}(t) \equiv \{r_\alpha(t)\}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Заметим, что это есть **физическое допущение** (в квантовой механике оно не выполняется). Будем считать, что зависимость радиус-вектора от времени (или координат от времени) описывается достаточно гладкими функциями, так что существуют их первые и достаточное число высших производных (это —

---

<sup>1)</sup> Для макроскопической механики материальная точка — это некоторая идеализирующая модель. В микромире, однако, выясняется, что мы должны рассматривать элементарные частицы как, в несколько ограниченном смысле, настоящие материальные точки. Таким образом, понятие материальной точки оказывается первичным по сравнению с понятием протяженного тела не только с точки зрения логического удобства изложения, но и с точки зрения устройства Природы.

опять **физическое допущение**, несправедливое для квантового описания).

**2.3.2.** Тогда можно определить **скорость** материальной точки как производную ее радиус-вектора по времени

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

и **ускорение** как производную скорости, т.е. вторую производную радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

(в дальнейшем мы будем обозначать обычно дифференцирование по времени точкой над знаком функции). Векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  суть основные кинематические характеристики материальной точки.

**2.4.1.** Чтобы задать вектор  $\mathbf{r}(t)$ , надо задать **три** скалярные функции. Говорят, что система из одной материальной точки имеет *три степени свободы*. Вообще, число независимых скалярных функций времени, которые нужно задать, чтобы полностью описать движение системы, называется ее **числом степеней свободы**.

Ниже в основном будет излагаться механика систем материальных точек. Случай наличия связей будут нас интересовать очень редко, и если они будут упоминаться в каких-либо примерах, то только идеальные, конечные и удерживающие.

**2.4.2.** В качестве описывающих движение системы независимых функций не обязательно, конечно, выбирать декартовы координаты составляющих систему материальных точек. Для этой цели можно взять любые  $n$  функций

$$q_1(t), \dots, q_n(t)$$

(если  $n$  — число степеней свободы), полностью характеризующих движение. Они называются тогда **обобщенными координатами**, а их производные по времени

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1(t)}{dt}, \dots, \dot{q}_n = \frac{dq_n(t)}{dt}$$

— **обобщенными скоростями**. Итак, для одной материальной точки потребуются 3 обобщенные координаты, а для системы из  $N$  материальных точек без связей —  $n = 3N$ .

**2.5.** Для дальнейшего нам будет важно понятие **состояния** системы. В классической теории, которой мы пока занимаем-

ся, задать **состояние системы** в некоторый момент времени — значит задать в этот момент времени значения стольких динамических переменных, что значения всех динамических переменных в остальные моменты времени смогут быть однозначно предсказаны. Опыт приводит нас к тому выводу, что для задания состояния механической системы достаточно задать значения всех ее обобщенных координат и обобщенных скоростей в некоторый момент времени<sup>1)</sup>. Это утверждение составляет с чисто математической стороны некоторое дополнительное допущение, которое можно было бы и ослабить, — тогда мы пришли бы к теориям, которые объединяются именем механики с высшими производными. Рассмотрение таких теорий оказывается полезным в некоторых специальных разделах физики. Принимая, однако, это допущение, мы приходим к тому выводу, что значения *ускорений* должны определяться однозначно, коль скоро задано состояние, то есть значения координат и скоростей в некоторый момент. Следовательно, ускорения в некоторый момент должны выражаться через координаты и скорости в тот же момент времени.

**2.6.** Соотношения (специфичные для рассматриваемой системы), выражающие ускорения через координаты и скорости, называются **уравнениями движения** рассматриваемой системы.

Основная задача механики состоит в том, чтобы

(1) *Устанавливать вид уравнений движения для механических систем и*

(2) *Интегрировать найденные уравнения, чтобы найти в явном виде «движение» системы, т.е. зависимость обобщенных координат от времени.*

### 3. Принцип наименьшего действия

В рассмотрении первой половины основной задачи механики мы не будем повторять исторического пути, который шел через последовательные обобщения постепенно накапливавшихся опытных фактов (заметим только, что основные заслуги в установлении физических основ механики принадлежат Галилею и Ньюто́ну, а в разработке ее математической формы — Лагранжу и Гамильто́ну), а сразу сформулируем чрезвычайно общий принцип, который называется **принципом наименьшего действия**

---

<sup>1)</sup> Задания одних значений координат — как говорят, конфигурации — в некоторый момент времени недостаточно для фиксации состояния — скоростям в тот же момент можно приписать произвольные значения.

и позволяет очень изящным и компактным образом выяснять, какие именно ограничения на вид уравнений движения налагают определенные физические требования.

Сопоставим каждой механической системе характеризующую ее функцию всех обобщенных координат, обобщенных скоростей и, вообще говоря, времени,

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t); \quad i = 1, \dots, n,$$

которая называется **функцией Лагранжа** этой системы, и построим с ее помощью функционал

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (1)$$

называемый *действием*. Этот функционал имеет своими аргументами функции  $q_i(t)$ , определенные в интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$  и принимающие на концах этого интервала заданные значения  $q_i(t_1)$  и  $q_i(t_2)$ .

Принцип наименьшего действия утверждает тогда, что действительные движения выделяются из всех мыслимых тем условием, что для них действие принимает экстремальное (для достаточно малых  $t_2 - t_1$  — минимальное) значение.

Сохраняя обозначение  $q_i(t)$  для действительного движения, обозначая близкое к действительному движение через

$$q'_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t); \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0; \quad \delta \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q$$

и пользуясь тем, что

$$L(q'_i(t), \dot{q}'_i(t), t) = L\left(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \delta q_i, t\right),$$

получим известным способом для вариации функционала (1):

$$\delta S = S[q'_i] - S[q_i] = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

Первый член обращается здесь в нуль в силу закрепленности концов, а во втором в силу произвольности вариации  $\delta q_i(t)$  надо будет потребовать обращения в нуль подинтегрального выражения. Тем самым требование принципа наименьшего действия приводит нас к **уравнениям Лагранжа–Эйлера**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2)$$

Так как функция Лагранжа зависит от обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , а уравнения (2) содержат дополнительное дифференцирование по времени, то уравнения (2) будут, вообще говоря, уравнениями второго порядка. Число их равно числу  $n$  степеней свободы. Решения такой системы уравнений будут, следовательно, содержать  $2n$  произвольных постоянных, например, значения всех координат и скоростей в некоторый начальный момент времени  $t_0$ :

$$q_i(t_0), \quad \dot{q}_i(t_0),$$

т. е. будут как раз однозначно определяться заданием состояния системы в момент  $t_0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** На самом деле, конечно, аргументация развивается в противоположном направлении: мы потому и допустили в функцию Лагранжа только  $q$  и  $\dot{q}$ , но не  $\ddot{q}$ ,  $\ddot{\ddot{q}}$ , ..., что хотели добиться, чтобы состояние системы определялось только координатами и их первыми производными. Для теорий с высшими производными, о которых мы кратко упомянули, в функцию Лагранжа, естественно, входят и более высокие производные координат. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Если вторые производные входят в функцию Лагранжа **линейно** с коэффициентами, зависящими лишь от координат (но не от скоростей), то уравнения (2) окажутся все равно второго порядка. Поэтому такие функции Лагранжа тоже не выведут нас за пределы обычной механики. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3:** Для левой части уравнений (2) используют иногда специальное название **гамильтоновой производной** и пишут

$$\frac{\hbar L}{\hbar q_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

С ее помощью уравнения Лагранжа–Эйлера принимают совсем простой вид:

$$\frac{\hbar L}{\hbar q_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \blacksquare \quad (2a)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4:** Мы сформулировали принцип наименьшего действия в каких-то обобщенных координатах  $q_i$ . Поскольку их выбор ничем не предопределен, принцип будет иметь физическую ценность, только если его следствия не зависят от этого выбора, т. е. если при переходе от обобщенных координат  $q_i$  к другим  $Q_j$  с помощью преобразования

$$q_i = f_i(Q_j, t); \quad \tilde{L}(Q_j, \dot{Q}_j, t) = L(f_i, \dot{f}_i, t)$$

уравнения движения сохраняют в новых координатах форму (2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0. \quad (2b)$$

Убедимся, что это действительно так.

В самом деле, если

$$q_i = f_i(Q_j, t), \quad \dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \sum_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial Q_j \partial Q_i} \dot{Q}_j + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial Q_i} \right\},$$

а

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial f_k}{\partial Q_i}.$$

Таким образом интересующая нас комбинация

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} &= \sum_k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \frac{\partial^2 f_k}{\partial Q_i \partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial^2 f_k}{\partial Q_i \partial t} \right\} - \\ &\quad - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \frac{\partial^2 f_k}{\partial Q_j \partial Q_i} \dot{Q}_j + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial Q_i} \right\}. \end{aligned}$$

Вторая и последняя суммы здесь взаимно уничтожаются, и мы получаем, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right\} \frac{\partial f_k}{\partial Q_i}$$

— т. е. из выполнения (2) действительно следует выполнение (2b): уравнения Лагранжа–Эйлера инвариантны относительно произвольной (конечно, однозначной, обратимой и т. п.) замены одних обобщенных координат другими. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 5:** Если рассмотреть две функции Лагранжа

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \text{и} \quad L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t),$$

отличающиеся друг от друга на полную производную некоторой произвольной функции  $F(q, t)$  координат (но не скоростей!) и времени, то соответствующие вариации действия будут совпадать, поскольку член с полной производной проинтегрируется по времени и приведет к разности значений  $F$  на концах временного интервала, где вариации  $\delta q_i = 0$ . Таким образом функция

Лагранжа определена лишь с точностью до полной производной от произвольной функции координат и времени. Это обстоятельство очень часто используется как в общих вопросах, так и для упрощения вида функции Лагранжа для частных систем. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 6:** Так как для уравнений движения существенна не сама вариация  $\delta S$ , а только факт равенства ее нулю,  $\delta S = 0$ , то умножение  $L$  на произвольную константу также не меняет вида уравнений движения. Поэтому казалось бы, что можно считать, что функция Лагранжа определяется также и с точностью до мультипликативной константы. Этому, однако, препятствует одно физическое соображение. ■

Если рассмотреть две системы, находящиеся очень далеко друг от друга, то физически очевидно, что процессы в одной системе совсем никак не должны влиять на движение другой. Поскольку, с другой стороны, ничто не мешает нам рассматривать две такие системы как две части, I и II, единой общей системы, то мы приходим к условию **асимптотической аддитивности**:

Если некоторая система (I + II) разделяется на две подсистемы I и II таким образом, что минимум расстояния между материальными точками разных подсистем  $r_{I\text{II}} \rightarrow \infty$ , то ее функция Лагранжа распадается в сумму функций Лагранжа обеих подсистем:

$$L_{I+II} \xrightarrow{r_{I\text{II}} \rightarrow \infty} L_I + L_{II} \quad (3)$$

При умножении функций Лагранжа разных систем на произвольные множители это равенство разрушилось бы. Таким образом, у нас остается только возможность одновременного умножения всех функций Лагранжа на одну и ту же константу — но такая операция сводится по существу к изменению системы единиц.

## 4. Принцип относительности Галилея

**4.1.** Выше уже говорилось, что для описания механических движений нужно выбрать систему отсчета, связанную с каким-либо материальным телом. В принципе можно пользоваться системой отсчета, связанной с любым, как угодно движущимся телом, или даже любыми, не имеющими прямого физико-геометрического смысла обобщенными координатами  $q_i$ . Однако такая, наудачу выбранная, система не будет обладать свойствами ни однородности, ни изотропии. Так, например, покоившаяся в некоторый момент времени в такой системе отсчета свободная ма-

териальная точка в следующие моменты придет, вообще говоря, в движение в некотором направлении.

Можно определить **инерциальные системы** отсчета как такие системы, в которых первоначально покоившаяся свободная материальная точка продолжает покоиться сколь угодно долго.

С чисто логической точки зрения такое определение инерциальных систем связано с большими трудностями, так как неизвестно, что такое «свободная материальная точка» — под этим надо понимать материальную точку, на которую не действуют никакие силы, а о действии сил мы узнаем по изменениям, которые они вносят в движение материальной точки — т. е. мы оказываемся в порочном кругу. Однако физически обычно всегда бывает можно различить, испытывает ли материальная точка посторонние воздействия или нет, хотя полный анализ этого обстоятельства может быть весьма сложным.

**4.2.** Поэтому, если угодно, можно принять как опытный факт существование инерциальных систем отсчета, в которых пространство и время однородно и изотропно. Более того, оказывается, что существует не одна, а сколько угодно инерциальных систем отсчета. Именно:

**если**  $K$  — некоторая инерциальная система отсчета, положение материальной точки в которой описывается радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в каждый момент времени  $t$ , а  $K'$  — система, в которой то же событие имеет координаты  $\mathbf{r}'$  и время  $t'$ , причем штрихованные и нештрихованные величины связаны преобразованием

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}t'; \\ t &= t'\end{aligned}\quad (\mathbf{v} = \text{const}) \quad (4)$$

**то** система  $K'$  будет по всем своим физическим свойствам эквивалентна системе  $K$ , т. е., в частности, будет тоже инерциальна.

Сформулированное утверждение называется **принципом относительности Галилея**, а преобразования (4) называют **преобразованиями Галилея**.

**4.2.1. ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Если в системе  $K'$  радиус-вектор  $\mathbf{r}'(t') = \mathbf{R}$  — постоянному вектору, то в системе  $K$  для той же точки будет  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \mathbf{V}t$ , т. е. система  $K'$  движется относительно системы  $K$  равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{V}$ . ■

Таким образом преобразования Галилея суть преобразования, выполняющие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой (согласно принципу относительности Галилея — тоже



инерциальной), движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно.

**4.2.2. ИСТОРИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ:** Здесь, по-видимому, надо сказать несколько слов о той многовековой эволюции представлений, которая привела к нашему — достаточно абстрактному — способу введения инерциальных систем и преобразований Галилея.

Основное положение первой, приписываемой Аристотелю, попытки построить общую логическую схему механики, попытки, которая, опираясь на его авторитет, подавляла умы почти две тысячи лет, можно, несколько модернизируя терминологию, сформулировать как:

«Все тела пребывают в состоянии покоя (относительно абсолютного пространства), пока и поскольку действующие на них силы не выведут их из этого состояния».

Таким образом аристотелева механика принимала существование преимущественной системы отсчета, движение или покой относительно которой имели абсолютное значение.

Фундаментальное открытие Галилея, — к которому он пришел, комбинируя простые опыты с рассуждениями, послужившими образцом для дальнейшего развития «новой» науки, — состояло в том, что удалось объяснить этот житейски очевидный факт самопроизвольной остановки всякого тела по прекращении поддерживавших его движение усилий тем, что на него, кроме сознательно учитываемых нами сил, всегда действуют и направленные против движения силы трения — в идеальном предельном случае исчезающе-малого трения однажды приведенное в движение тело должно было бы двигаться сколь угодно долго.

Этот логический вывод был сформулирован Ньютоном в виде его первой аксиомы о законах движения:

«Все тела пребывают в состоянии покоя *или равномерного прямолинейного движения* (относительно абсолютного пространства), пока и поскольку действующие на них силы не выведут их из этого состояния».

Таким образом понятие преимущественной системы отсчета и абсолютного различия покоя и движения относительно ее сохранилось в оригинальной формулировке ньютоновой механики.

Однако из нее логически следовало, что все *инерциальные системы*, определяемые как движущиеся прямолинейно и равномерно относительно преимущественной «абсолютно неподвижной», совершенно эквивалентны по своим механическим свойствам — утверждение, которое мы называем теперь принципом

относительности Галилея. Но это означает, что положенную в основу преимущественную систему отсчета никак нельзя выделить из числа других инерциальных систем — абсолютное пространство Ньютона ненаблюдаемо в чисто механических опытах. Если бы такая ситуация сложилась в наши дни, то сразу было бы четко осознано, что мы стоим перед дилеммой: либо примириться с тем, что классическая механика не есть логически замкнутая теория, либо принять, что абсолютное пространство не имеет смысла и подлежит изгнанию из формулировки основ механики. Однако такой отваге в выявлении конфликтов между логикой и здравым смыслом нас научил только Эйнштейн (проследивший все парадоксальные следствия из ненаблюдаемости абсолютного пространства в *любых* физических опытах), наши научные предки были не так придирчивы к логике и больше полагались на самоочевидный здравый смысл, так что только немногие испытывали неудовлетворенность ньютоновым механически-ненаблюдаемым абсолютным пространством. В результате, как это часто случается, реальное развитие науки не пошло логически прямолинейным путем, и современный взгляд на основы классической механики выработался только после создания и под влиянием теории относительности. ■

**4.2.3.** Сейчас мы безусловно опираемся на вторую альтернативу и считаем, что все — связанные друг с другом преобразования Галилея — инерциальные системы равноправны, и, поэтому, механику следует формулировать так, *чтобы* она обладала свойством инвариантности относительно таких преобразований <sup>1)</sup>.

**4.2.4.** Из формул (4) видно, что преобразования Галилея фактически захватывают только пространство; время, как уже говорилось, считается в классической механике абсолютным, не зависящим от движения системы отсчета.

**4.2.5.** Согласно принципу относительности Галилея всякая система отсчета, связанная с инерциальной преобразованиями (4), инерциальна. Чтобы можно было утверждать и обратное, что всякие две инерциальные системы связаны преобразованием Галилея, надо несколько расширить совокупность галилеевых

---

<sup>1)</sup> Трудно не увидеть иронии Природы в том, что как раз теперь мы *можем* выделить преимущественную систему отсчета, как такую, в которой материя в среднем — в космологических масштабах — покоится, по наблюдениям *реликтового излучения*, сохранившегося с ранних стадий расширения Вселенной.

преобразований. В самом деле, ясно, что временные сдвиги (изменения начала отсчета времени)

$$t = t' + \tau; \quad \tau = \text{const},$$

пространственные сдвиги

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \text{const}$$

и повороты пространственных осей

$$r_\alpha = C_{\alpha\alpha'} r_{\alpha'},$$

где  $C_{\alpha\alpha'}$  — постоянная ортогональная матрица, также не выводят нас за пределы инерциальных систем. Поэтому принято включать такие преобразования в число преобразований Галилея и говорить в этом случае о преобразованиях Галилея в широком смысле; преобразования (4) называют тогда преобразованиями Галилея в узком смысле.

**4.2.6.** Если продифференцировать первое из равенств (4) по времени, то мы придем к *закону сложения скоростей*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \quad (4a)$$

из которого видно, что в разных инерциальных системах одна и та же материальная точка обладает разными скоростями — понятия «абсолютной» скорости и «абсолютного» покоя не имеют смысла. В отличие от скоростей, ускорения — абсолютны: при двукратном дифференцировании (4) мы получим

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}', \quad (4b)$$

т. е. ускорения не зависят от выбора инерциальной системы, отсчета.

**4.3.** Теперь можно перейти от довольно абстрактных рассуждений к более конкретным вещам и вывести вид функции Лагранжа для свободной материальной точки. Конечно, «вывести» можно только потому, что в наших физических допущениях уже заложено все для этого необходимое — изотропия и однородность пространства и времени в инерциальных системах отсчета и принцип относительности Галилея.

Для одной материальной точки функция Лагранжа может зависеть только от ее радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , скорости  $\mathbf{v}$  и времени  $t$ , т. е.  $L = L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Однако в силу однородности времени  $L$  не должна зависеть от времени явно; в силу однородности пространства — не должна зависеть от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  и, наконец, в си-

лу изотропии пространства не должна зависеть от направления скорости. Таким образом функция Лагранжа должна иметь вид

$$L = L(\mathbf{v}^2).$$

Чтобы найти вид зависимости  $L$  от квадрата скорости, обратимся к принципу относительности Галилея. Лучше всего было бы, конечно, найти такую зависимость  $L$  от  $\mathbf{v}^2$ , чтобы  $L$  оставалась бы инвариантной при преобразованиях Галилея (4). Легко, однако, сообразить, что это невозможно. Поэтому приходится обратиться к замечанию 4 к принципу наименьшего действия и постараться, чтобы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой функция Лагранжа менялась бы не более чем на полную производную, — тогда, по крайней мере, уравнения движения в обеих системах отсчета будут одинаковы.

Потребуем этого сперва для бесконечно малого преобразования Галилея. Пусть система  $K$  движется относительно системы  $K'$  с бесконечно малой скоростью  $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\epsilon}.$$

Тогда

$$L(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}^2} \cdot 2\mathbf{v}\boldsymbol{\epsilon} + O(\boldsymbol{\epsilon}^2),$$

и для удовлетворения нашего требования второй член справа должен быть полной производной некоторой функции  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Легко видеть, что последнее возможно, только если  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}^2}$  не зависит от  $\mathbf{v}^2$ .

Итак, в силу принципа относительности Галилея функция Лагранжа для свободной материальной точки должна иметь вид

$$L = a\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2, \quad (5)$$

где постоянная  $m > 0$ , так как иначе действие не могло бы иметь минимума и для близких  $t_1$  и  $t_2$ . Постоянную  $m$  называют, как известно из элементарного изложения механики, массой частицы.

Легко проверить, что функция Лагранжа (5) меняется только на полную производную и для конечных преобразований (4).

Часто приходится преобразовывать функцию Лагранжа к криволинейным координатам. Для такого преобразования достаточно заметить, что поскольку  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ,  $\mathbf{v}^2 = \frac{(d\mathbf{r})^2}{(dt)^2} = \frac{dl^2}{(dt)^2}$ , и для преобразования  $\mathbf{v}^2$  к криволинейным координатам достаточно выписать в этих координатах

тах выражение для квадрата линейного элемента и поделить его на  $(dt)^2$ . Так, например, в цилиндрических координатах, в которых

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{m}{2} \{ \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \},$$

а в сферических, в которых

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2,$$

— вид:

$$L = \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \}.$$

**4.4.** Перейдем теперь к *системам материальных точек*. Будем опять считать, что все материальные точки системы настолько удалены от всех остальных тел, что не взаимодействуют ни с чем, не входящим в систему (про такую систему говорят не *свободная*, как в случае одной материальной точки, а **замкнутая**).

Если можно пренебречь и взаимодействием *внутри* системы, то ее функция Лагранжа получится просто сложением функций Лагранжа для каждой материальной точки — действительно, тогда уравнения движения для каждой материальной точки будут содержать только *ее* координаты и скорости. *Итак*, в силу (5) функцией Лагранжа замкнутой системы невзаимодействующих частиц будет

$$L = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2}. \quad (6)$$

**4.5.** Для того чтобы учесть взаимодействие *внутри* системы, оказывается достаточным добавить к (6) функцию, зависящую лишь от взаимного расположения частиц (как говорят, только от **конфигурации** системы):

$$L = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (7)$$

(индекс  $a$  в формулах (6) и (7) — это номер частицы).

ЗАМЕЧАНИЕ 1: Форма (7) — это есть некоторое *допущение*, которое должно оправдываться опытом. Сколько-нибудь хорошо оно выполняется обычно только в «настоящей» механике микро-частиц — для макроскопических тел обычно присутствуют силы трения, которые вообще не находят себе места в лагранжевом формализме. Но и тогда допущение (7) не будет выполняться,

например, в неинерциальных системах отсчета, или в случае присутствия магнитных сил, или при приближенном учете поправок, связанных с теорией относительности. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Первый член в (7) называют обычно **кинетической энергией** и обозначают буквой  $T$ ; как мы видим, в инерциальной системе отсчета в декартовых координатах кинетическая энергия есть квадратичная форма скоростей, и притом приведенная к главным осям. Если перейти для описания системы материальных точек к каким-то обобщенным координатам  $q_i$  с помощью преобразования, не зависящего от времени, то кинетическая энергия останется квадратичной формой скоростей, но теперь — квадратичной формой общего вида (но положительно определенной!) с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат:

$$T = \sum_{i,k} \frac{a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k}{2}.$$

Функция  $U$  называется **потенциальной энергией**; в силу однородности пространства она может зависеть не от всех  $N$  радиус-векторов частиц, но только от их  $(N - 1)$  независимых разностей  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3:** В выражении (7) уже содержится представление о *мгновенности распространения взаимодействий* — всякое изменение положения какой-либо одной частицы в тот же момент времени сказывается на силах, действующих на все остальные, ведь координаты всех частиц входят в  $U$  в один и тот же момент времени. Впрочем, существование какой-либо скорости распространения взаимодействий несовместимо с принципом относительности Галилея: для нее, как и для всех скоростей, действовал бы закон сложения (4а), а это нарушило бы физическую эквивалентность всех инерциальных систем отсчета. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 4:** Формулируя физические требования к описанию механических систем, мы не налагали явно условия изотропии времени. Поскольку, однако, функция Лагранжа (7) содержит только *четные* комбинации производных по времени, то она не меняется при замене  $t \rightarrow -t$ . Следовательно, уравнения механики *обратимы*: если для системы возможно какое-либо движение, то возможно и обратное движение. ■

**4.6.** О виде функции Лагранжа для *незамкнутой* системы в общем случае трудно сделать какие-либо утверждения. Однако тут имеется один важный частный случай, когда интересующая

нас незамкнутая система (обозначим ее I) взаимодействует только с другой системой (II), *движение которой можно считать заданным* (т. е. не зависящим от движения системы I), — говорят о движении системы I **во внешнем поле**. Тогда можно выписать функцию Лагранжа полной системы I + II (она уже будет замкнутой), отмечая в ней координаты первой и второй подсистем соответствующими индексами, в виде

$$L_{I+II} = T_I(\dot{q}_I, q_I, q_{II}) + T_{II}(\dot{q}_{II}, q_{II}) - U(q_I, q_{II}).$$

Координаты и скорости второй подсистемы можно считать здесь заданными функциями времени, поэтому второй член можно отбросить. Остающееся выражение

$$L = T(\dot{q}_I, q_I, q_{II}(t)) - U(q_I, q_{II}(t))$$

имеет такой же вид, как и функция Лагранжа замкнутой системы, с тем только отличием, что и кинетическая и потенциальная энергия могут теперь *явно зависеть от времени*. Если для описания материальных точек системы используются декартовы координаты, тогда то же справедливо и относительно явной зависимости потенциальной энергии от координат (а не только от их разностей, как для замкнутой системы).

В частности, если находящаяся во внешнем поле система состоит из одной материальной точки, то мы получим для ее функции Лагранжа

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - U(\mathbf{r}, t).$$

Функция  $U(\mathbf{r}, t)$  называется потенциальной энергией во внешнем поле.

## 5. Законы сохранения

Всякое равенство вида  $f(q_i, \dot{q}_i) = \text{const}$  называется **интегралом движения**. Для замкнутой системы с  $n$  степенями свободы всего существует  $(2n - 1)$  независимых интегралов движения. В самом деле, если считать  $\dot{q}_i$  в уравнениях движения новыми переменными, не зависящими от  $q_j$ , то полный набор уравнений движения запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i,$$

причем для замкнутой системы время войдет здесь только в виде явно выписанных дифференциалов. Поэтому, исключая из этих уравнений  $dt$ , мы получим  $(2n - 1)$  уравнений, не содержащих времени. Их интегрирование и приведет к  $(2n - 1)$  соотношениям, которые мы назвали интегралами движения.

**5.1.** Среди всех интегралов движения особое значение имеют (асимптотически) *аддитивные интегралы* движения (в смысле формулы (3)), для которых существует специальное название **законы сохранения**. Законы сохранения имеют весьма глубокое происхождение, связанное с инвариантностью описания механической системы относительно некоторой группы преобразования времени и координат. Именно, существует весьма общая *теорема Нётер*, утверждающая, что для системы дифференциальных уравнений, которые могут быть получены как уравнения Эйлера из некоторого вариационного принципа, из инвариантности вариационного функционала относительно однопараметрической непрерывной группы преобразований следует существование одного закона сохранения. Если группа содержит  $l$  параметров, то из инвариантности функционала будет следовать существование  $l$  законов сохранения.

Чрезвычайно существенно, что теорема Нётер позволяет, при заданном виде функции Лагранжа, найти аддитивные интегралы движения в виде явных функций координат и скоростей, *не интегрируя никаких уравнений*, — ведь в общем случае каждый из интегралов движения находится лишь интегрированием системы, число уравнений которой лишь на одно меньше полной системы уравнений движения.

Наличие входящих в требуемую теоремой Нётер группу **преобразований симметрии** зависит, конечно, от природы физической системы. Однако уже сделанные выше общие допущения позволяют утверждать, что для рассматриваемых нами (замкнутых!) механических систем действие должно быть инвариантным относительно семипараметрической группы преобразований — зависящего от одного параметра сдвига по времени, зависящих от трех параметров пространственных сдвигов и зависящих от трех параметров вращений пространства. В соответствии с этим у всякой замкнутой системы должны существовать 7 сохраняющихся величин, отвечающих указанным преобразованиям. Если система такова, что она допускает еще и другие преобразования симметрии, то сохраняющихся величин может оказаться больше — с одним таким примером мы встретимся во второй части курса при рассмотрении электромагнитного поля.



**5.2. Теорема Нётер.** Начнем с точной формулировки и доказательства теоремы Нётер. Мы рассмотрим при этом самый общий случай и проведем рассуждения во всей полноте, чтобы затем можно было бы применить их результаты ко всем частным случаям, которые нам понадобятся.

Рассмотрим некоторую систему, описываемую функцией Лагранжа

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Мы знаем, что *форма* уравнений Лагранжа–Эйлера, получаемых из вариационного принципа с такой функцией Лагранжа, инвариантна относительно преобразований вида  $q'_i = f_i(q_j, t)$  и также, как легко понять, и относительно более общих преобразований

$$q'_i = f_i(q_j, t), \quad t' = f(t),$$

включающих замену независимой переменной. Однако конкретный вид нового выражения для действия, как функционала новых координат, зависящих от нового времени, может, конечно, претерпеть при таком преобразовании любые изменения.

Теорема Нётер интересуется тем — исключительным — случаем, когда таких изменений *не происходит*.

Итак, будем считать, что мы ввели совокупность зависящих от (для простоты) одного параметра  $\lambda$  преобразований обобщенных координат и времени

$$\{t; q_i(t)\} \Rightarrow \Lambda(\lambda) \{t; q_i(t)\} = \{t'; q'_i(t')\} = \{f(t; \lambda); f_i(q_j, t; \lambda)\},$$

таких что

$$\Lambda(\lambda_2) \Lambda(\lambda_1) = \Lambda(\lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)), \quad \Lambda(0) = 1,$$

т.е. образующих однопараметрическую группу. Рассмотрим бесконечно малое преобразование, отвечающее параметру  $\lambda \rightarrow 0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} t &\Rightarrow t' = t + \delta t, & \delta t &= \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \lambda \\ \text{и} \\ q_i(t) &\Rightarrow q'_i(t') = f_i(q_j; t; \lambda) = q_i(t) + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \lambda \end{aligned} \right\} \quad (8.0)$$

Собственно вариации обобщенных координат, происходящие при рассматриваемом преобразовании, — это разности значений  $q'_i(t')$  новых координат в некоторый момент нового времени и значений

старых координат  $q_i(t)$  в *соответствующий* момент старого времени

$$\delta^* q_i = q'_i(t') - q_i(t) = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \lambda. \quad (8.1)$$

Наряду с ними удобно ввести в рассмотрение вариации формы

$$\delta q_i = q'_i(t) - q_i(t), \quad (8.2)$$

зависимости координат от времени, которые отличны от нуля, даже если наше преобразование затрагивает только время, а не координаты. Между двумя введенными видами вариаций есть очевидное соотношение

$$\delta^* q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \delta t. \quad (8.3)$$

Ясно, что вариации без звездочек, относящиеся к одному значению аргумента, перестановочны с дифференцированием по времени:

$$\frac{d}{dt} \delta q_i = \delta \dot{q}_i$$

(мы этим уже пользовались при выводе уравнений Лагранжа–Эйлера), в то время как для вариаций со звездочками это, вообще говоря, неверно. Соответствующие два вида вариаций можно ввести и для любой динамической переменной. Например, для функции Лагранжа

$$\delta^* L = L[q'(t'), \dot{q}'(t'), t'] - L[q(t), \dot{q}(t), t] = L'(\dots t') - L(\dots t);$$

$$\delta L = L[q'(t), \dot{q}'(t), t] - L[q(t), \dot{q}(t), t] = L'(\dots t) - L(\dots t);$$

причем

$$\delta^* L = \delta L + \frac{dL}{dt} \cdot \delta t,$$

где  $\frac{d}{dt}$  включает дифференцирование как по явно входящему времени, так и по времени, входящему неявно, через координаты и скорости. Потребуем теперь, чтобы интеграл действия не менялся бы при нашем преобразовании, — это и есть тот исключительный случай, который требуется условием теоремы, — т. е., чтобы было

$$\delta^* S = \int_{T'} dt' L'(\dots t') - \int_T dt L(\dots t) = 0,$$

где  $T'$  — та же область интегрирования, что и  $T$  во втором интеграле, но выраженная через новые переменные<sup>1)</sup>. Тогда:

$$\delta^* S = \int_{T'} dt' [L(\dots t) + \delta^* L] - \int_T dt L(\dots t).$$

Выражая здесь  $\delta^* L$  через  $\delta L$  и переходя в первом интеграле к интегрированию по  $t$  вместо  $t'$ , причем «якобиан» преобразования будет равен  $\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt} \delta t$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta^* S &= \int_T dt \left\{ L(\dots t) + \delta L + \frac{dL}{dt} \delta t + L \frac{d\delta t}{dt} - L(\dots t) \right\} = \\ &= \int_T dt \left\{ \delta L + \frac{d}{dt} (L \delta t) \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i + \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i.$$

Под знаком первой суммы здесь стоят гамильтоновы производные от функции Лагранжа по обобщенным координатам; для действительных движений они обращаются в нуль в силу уравнений (2а). Поэтому для действительных движений

$$\delta^* S = \int_T dt \frac{d}{dt} \left\{ L \delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right\}.$$

Остается еще выразить  $\delta q_i$  с помощью (8.3) через  $\delta^* q_i$  и  $\delta t$

$$\delta q_i = \delta^* q_i - \dot{q}_i \delta t,$$

после чего мы приходим к окончательному выражению для вариации действия

$$\delta^* S = \int_T dt \frac{d}{dt} \left[ \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^* q_i \right]. \quad (8.4)$$

Мы должны потребовать равенства этой вариации нулю. В силу произвольности области интегрирования  $T$  из равенства нулю интеграла следует равенство нулю подинтегрального выражения, и мы приходим к тому, что необходимым и достаточным усло-

<sup>1)</sup> Мы приняли здесь одинаковую функциональную зависимость действия от старых и новых переменных и потребовали равенства их численных значений, в то время как из логики наших рассуждений следовало равенство значений, а одинаковой зависимости надо было потребовать, — но это, конечно, одно и то же.

нием инвариантности действия относительно преобразования (8.0) служит удовлетворение уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \right] = 0. \quad (8.5)$$

Иными словами, из инвариантности действия относительно (8.0) мы получили то следствие, что величина

$$\Lambda = \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = \text{const} \quad (8.6)$$

сохраняется во времени. Это и есть точное утверждение теоремы Нётер.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Величина (8.6) еще не есть сохраняющаяся динамическая величина — кроме обобщенных координат, скоростей и времени она зависит еще и от задающих преобразование функций  $f$ ,  $f_i$ . (8.6) станет динамическим законом сохранения лишь тогда, когда сами задающие (8.0) функции будут (помимо параметров  $\lambda$ ) зависеть лишь от  $q$ ,  $\dot{q}$  и  $t$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Обратим внимание на разный характер двух членов в (8.6). Первый из них включает саму функцию Лагранжа, поэтому обязательно <sup>1)</sup> перепутывает все степени свободы системы и поэтому может обладать самое большее лишь асимптотической аддитивностью (3). Напротив, второй имеет явную форму суммы по отдельным степеням свободы. Таким образом, если преобразование, относительно которого действие инвариантно, затрагивает время, то мы можем надеяться на сохранение лишь *асимптотически аддитивной* величины, если же преобразование меняет лишь координаты, то сохраняться будет точно *аддитивная величина*. ■

**5.3. Закон сохранения энергии.** Начнем применение теоремы Нётер к обсужденным выше универсальным преобразованиям симметрии с рассмотрения сдвига во времени. Чтобы получить это преобразование надо, очевидно, положить в общих формулах (8.0)  $\frac{df_i}{d\lambda} = 0$ ,  $\frac{df}{d\lambda} = 1$ , т.е. считать  $\delta t$  за независимый (и постоянный) параметр преобразования, а  $\delta^* q_i$  положить равными нулю. Уравнение (8.5) превратится тогда в

$$\frac{d}{dt} \left[ L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] = 0. \quad (9.1)$$

<sup>1)</sup> Кроме совершенно исключительных случаев.

Оно означает, что как следствие инвариантности действия относительно временного сдвига сохраняется динамическая величина

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const}. \quad (9.2)$$

Эта величина называется **энергией** системы. Согласно замечанию 2 предыдущего раздела энергия асимптотически аддитивна, если, конечно, условию асимптотической аддитивности удовлетворяет функция Лагранжа.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если раскрыть полную производную по времени в (9.1), учитывая, что мы рассматриваем только действительные движения, то получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ L - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right] = \\ &= \sum_i \frac{\hbar L}{\hbar q_i} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

т. е. из теоремы Нётер следует, что если действие инвариантно относительно временного сдвига, то функция Лагранжа просто не может зависеть от времени явно. Последнее обстоятельство не самоочевидно, поскольку при сдвиге времени меняется не только функция Лагранжа, но и область интегрирования. ■

**5.3.1.** Если функцию Лагранжа можно представить в виде (7) разности  $T - U$  кинетической и потенциальной энергий, то для энергии получится

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - U) = 2T - T + U = T + U,$$

т. е. она представится в виде **суммы** кинетической и потенциальной энергии. В частности, энергия системы материальных точек в декартовых координатах в инерциальной системе отсчета получает вид

$$E = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \quad (9.2a)$$

**5.4. Сохранение импульса.** Найдем теперь аддитивный закон сохранения, вытекающий из однородности пространства, т. е. выберем в качестве преобразования (8.0) пространственный сдвиг. Прежде всего (если пользоваться инерциальной системой отсчета) такое преобразование не затрагивает времени, следо-

вательно,  $\frac{df}{d\lambda} = 1$ . и первые члены в (8.5,6) пропадут. Что же касается вариаций координат, то ясно, что проще всего они запишутся, если использовать для описания системы материальных точек их *декартовы* координаты — тогда бесконечно малый параллельный сдвиг сведется к преобразованию всех радиус-векторов точек системы одинаковым образом:  $\mathbf{r}_a \Rightarrow \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \boldsymbol{\lambda}$ ;  $\boldsymbol{\lambda}$  — постоянный вектор;  $\frac{df_a}{d\lambda} = 1$ . Поэтому уравнение (8.5) примет в этом случае вид

$$\frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0.$$

Величина

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (10.1)$$

называется **импульсом**  $a$ -й материальной точки. Поэтому из (8.6) мы получаем, что вектор

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \text{const}; \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad (10.2,3)$$

называемый **импульсом** системы материальных точек, *сохраняет* во время движения постоянное значение. Если, как для системы материальных точек в декартовых координатах, функция Лагранжа имеет специальный вид (7), то

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a, \quad (11)$$

(Подчеркнем, что (11) дает определение импульсов только для частного случая; общим определением служит формула (10). Формула (11) не будет справедливой, например, при наличии магнитных взаимодействий.)

**5.4.1.** С помощью введенного понятия импульса материальной точки можно записать уравнения Лагранжа–Эйлера в декартовых координатах как

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a, \quad \text{где} \quad \mathbf{F}_a = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$$

называется **силой**, действующей на  $a$ -ю материальную точку. Так записанные уравнения называются уравнениями движения в форме Ньютона.

Суммируя эти уравнения по всем материальным точкам, получим, что в силу закона сохранения импульса:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0$$

— **в замкнутой системе** сумма сил равна нулю. Для двух частиц это дает

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

— третий закон Ньютона.

**5.4.2.** При использовании для описания системы произвольных обобщенных координат удобно ввести по аналогии названия

$$\begin{array}{ll} \text{обобщенные импульсы:} & \text{обобщенные силы:} \\ p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & \text{и} \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{array} \quad (12)$$

(хотя эти «импульсы» и не имеют, конечно, никакого отношения ни к сдвигам, ни — вообще говоря — к каким бы то ни было законам сохранения), с помощью которых уравнения движения записываются в «квазиньютоновой» форме

$$\dot{p}_i = F_i.$$

**5.5. Момент.** Чтобы найти аддитивную величину, сохраняющуюся в силу **изотропии** пространства, опять удобно работать в декартовой системе координат; тогда, как легко сообразить, бесконечно малый поворот (в отличие от конечных вращений) можно параметризовать, выбирая в качестве параметра  $\lambda$  составляющие бесконечно малого вектора  $\delta\boldsymbol{\varphi}$ , направленного по оси вращения по правилу правого винта, и записывая преобразование (8.0) как

$$\mathbf{r}_a \Rightarrow \mathbf{r}'_a = \mathbf{f}_a(\mathbf{r}_a, \delta\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{r}_a + [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_a].$$

Теорема Нётер будет тогда утверждать, что

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_a \mathbf{p}_a \cdot [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_a] \right) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a] \right) = 0. \quad (13.1)$$

Векторную величину

$$\mathbf{m}_a = [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a]$$

называют **моментом** <sup>1)</sup> материальной точки. Таким образом теорема Нётер учит нас, что из инвариантности относительно про-

<sup>1)</sup> Говорят также «момент импульса» и даже еще длиннее «момент количества движения».

пространственных поворотов следует сохранение вектора

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{M}_a = \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a] = \text{const}; \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0, \quad (13.2,3)$$

называемого **моментом** системы.

Поскольку сдвиги и повороты пространства суть преобразования, не затрагивающие времени, импульс и момент не только асимптотически, но и точно аддитивны — они и получились у нас в выражениях (10,13.2) прямо как суммы по частицам.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Надо, однако, сказать, что эта аддитивность — если только функция Лагранжа не имеет специального вида (7) — имеет несколько формальный характер. Дело в том, что хотя импульс (10.2) и представляется в виде суммы импульсов (10.1) отдельных частиц, но каждый из этих последних может, вообще говоря, зависеть не только от скорости «своей» частицы, но и от «чужих» скоростей (и координат). То же справедливо и для момента. ■

**5.6.** Итак, мы установили, что для всякой замкнутой механической системы сохраняются

$$E, \mathbf{P} \text{ и } \mathbf{M}$$

— скаляр и два вектора — всего семь величин. Для незамкнутой системы законов сохранения, вообще говоря, не будет. Однако в важном случае движения системы во внешнем поле — в том случае, если само поле обладает некоторой симметрией, — может остаться справедливой и часть законов сохранения. Так, если поле не зависит от времени, то у находящейся в нем системы будет сохраняться энергия; если поле допускает не меняющие его сдвиги, — соответствующие компоненты импульса; если допускает вращения вокруг некоторых осей, — то соответствующие компоненты момента. Внешнее поле может обладать и более сложной симметрией, например оставаться инвариантным только относительно одновременно производимых вращения и сдвига — тогда будут сохраняться определенные комбинации компонент импульса и момента.

## 6. Преобразования сохраняющихся величин

Зададимся вопросом, что произойдет с сохраняющимися величинами при преобразовании Галилея (4), т.е. при переходе от «нештрихованной» системы отсчета  $K$  к движущейся от-



носителем ее прямолинейно и равномерно со скоростью  $\mathbf{V}_0$  «штрихованной» системе  $K'$ :

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{V}_0 t; \quad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}_0, \quad t = t';$$

( $\mathbf{V}_0$  — здесь, конечно, постоянный вектор). Ради простоты в этом параграфе мы будем все время считать, что функция Лагранжа имеет специальный вид (7), т. е. представляется в виде разности кинетической и потенциальной энергии.

**6.1.** Начнем с преобразования импульса. Поскольку при сделанном допущении справедливы соотношения (11), то формулу для преобразования импульса  $a$ -й частицы можно получить, просто умножая закон преобразования ее скорости на ее массу:

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}'_a + \mathbf{V}_0 m_a.$$

Суммированием по всем частицам системы найдем отсюда для полного импульса

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V}_0 \sum_a m_a.$$

**6.1.1.** Теперь можно ввести понятия покоя и движения системы материальных точек как целого. Именно, примем, что

система материальных точек покоится как целое в той системе отсчета, в которой ее полный импульс равен нулю.

Далее,

под **скоростью**  $\mathbf{V}$  системы материальных точек в произвольной системе отсчета понимается скорость относительно нее той специальной системы отсчета, в которой система материальных точек покоится.

**6.1.2.** Выберем в преобразовании Галилея, которое мы начали рассматривать, специальным образом  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$  так, чтобы в системе  $K'$  интересующая нас система материальных точек покоилась бы (в  $K$  она будет иметь тогда как раз скорость  $\mathbf{V}$ ). Тогда импульс в системе  $K$  примет вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \sum_a m_a.$$

Сравнивая эту формулу с выражением (11) для импульса одной материальной точки, видим, что естественно определить **массу**  $M$  всей системы как

$$M = \sum_a m_a. \quad (14)$$

С этим определением соотношение между импульсом, массой и скоростью всей системы

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \quad (15.1)$$

оказывается в точности таким же, как соотношение (11) для одной материальной точки.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Устанавливая эту аналогию, мы руководствовались, конечно, не соображениями красоты и легкой запоминаемости формул. Совпадение соотношений (15.1) и (11) позволяет нам трактовать систему материальных точек — в тех случаях, когда внутренние движения в ней нас не интересуют — как одну материальную точку, т.е. по существу оправдывает введение самого модельного понятия материальной точки. ■

**6.1.3.** Разрешая (15.1) относительно  $\mathbf{V}$  и подставляя выражения (14) и (11) для массы и импульсов, представим скорость  $\mathbf{V}$  движения системы как целого через скорости и массы составляющих ее материальных точек

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{v}_a}{\sum_a m_a}.$$

Проинтегрируем эту формулу по времени:

$$\mathbf{V}t + \mathbf{R}_0 = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a} = \mathbf{R}.$$

Точка с так определенным радиус-вектором  $\mathbf{R}$  называется **центром инерции** системы материальных точек.

Итак, мы нашли, что в силу закона сохранения импульса центр инерции замкнутой системы материальных точек движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $\mathbf{V}$  (опять в полной аналогии с радиус-вектором одной свободной материальной точки). Это движение в высокой степени тривиально, поэтому естественно вовсе исключить его из рассмотрения. Того ради вернемся к преобразованию Галилея и посмотрим, как будет преобразовываться энергия системы (рассуждение для функции Лагранжа совершенно тождественно).

**6.2.** Подставляя в действующее в принятых допущениях выражение (9.2а)  $E = T + U$  выписанное в начале параграфа преобразование скоростей (подставлять преобразования радиус-векто-

ров нет нужды, так как *разности радиус-векторов*, единственно входящие в потенциальную энергию, этим преобразованием не затрагиваются), получим

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V}_0)^2 + U = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_a \mathbf{v}'_a{}^2 + U + \sum m_a \mathbf{v}'_a \cdot \mathbf{V}_0 + \sum m_a \cdot \frac{\mathbf{V}_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при произвольном преобразовании Галилея энергия преобразуется по закону

$$E = E' + \mathbf{P}' \mathbf{V}_0 + \frac{M \mathbf{V}_0^2}{2}. \quad (17.2)$$

Выпишем здесь же полученное ранее преобразование для импульса:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + M \mathbf{V}_0. \quad (17.1)$$

**6.2.1.** Если выбрать теперь в качестве  $K'$  опять ту систему отсчета, в которой система материальных точек как целое покоится, т. е. взять  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}$ , то второй член справа в (17.2) исчезнет и останется

$$E = E_{\text{in}} + \frac{M \mathbf{V}^2}{2}.$$

Второй член в правой части — это энергия движения системы как целого, опять совершенно аналогичный выражению для энергии одной свободной материальной точки. Первый член справа принято называть **внутренней энергией** системы (в соответствие с чем мы и обозначили его через  $E_{\text{in}}$ ); он зависит не только лишь от разностей координат, но и *лишь от разностей скоростей*<sup>1)</sup>. Таким образом, в качестве обобщенных координат описываемой этим членом системы можно принять  $(N - 1)$  независимую разность радиус-векторов  $(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)$ , т. е. число степеней свободы уменьшается на три.

Для выпавших из «внутренних» движений трех степеней свободы первоначальной системы можно принять в качестве обобщенных координат координаты радиус-вектора центра инер-

---

<sup>1)</sup> В этом утверждении проще всего убедиться, если заметить (что проверяется прямой выкладкой), что комбинация  $E - \frac{M \mathbf{V}^2}{2}$  инвариантна относительно добавления ко всем скоростям одного и того же вектора. Отсюда, в частности, следует инвариантность внутренней энергии относительно преобразований Галилея.

ции (16). Таким образом формула (15.2) действительно осуществляет разбиение задачи о движении замкнутой системы  $N$  материальных точек на две *независимые* задачи: задачу о внутренних движениях и (тривиальную) задачу о равномерном и прямолинейном движении системы как целого.

**6.3.** Осталось еще посмотреть, что делается при преобразованиях Галилея с моментом

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a].$$

В этом случае интересно исследовать результат действия общего преобразования Галилея, включающего пространственный сдвиг:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0;$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}_0.$$

Подставляя это преобразование (и получающееся из него умножением на массы преобразование импульсов отдельных частиц

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}'_a + m_a \mathbf{V}_0)$$

в выражение для момента, получим сперва

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathbf{M}' + t [\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{P}'] + [\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{P}'] + M [\mathbf{R}' \cdot \mathbf{V}_0] + \\ + Mt [\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0] + M [\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{V}_0]. \end{aligned}$$

Члены правой части удобно сгруппировать здесь в три группы, записывая

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [(\mathbf{R}_0 + t\mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{P}'] + M [\mathbf{R}' \cdot \mathbf{V}_0]. \quad (17.3)$$

**6.3.1.** Обсудим полученное выражение. Прежде всего, не трудно видеть, что, в отличие от энергии и импульса, момент меняется при трансляции. Действительно, если рассмотреть чистую трансляцию, положив  $\mathbf{V}_0 = 0$ , то получим из (17.3)

**трансляция:** 
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{P}'].$$

Исключение составляют трансляции в той системе отсчета, в которой система материальных точек покоится как целое, т.е.  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' = 0$  (Такую систему отсчета принято называть **системой центра инерции** или **системой центра масс**, обозначая ее сокращенно буквами ЦИ или ЦМ), — тогда второй член обращается в нуль и момент не зависит от выбора начала отсчета.

**6.3.2.** Если выбрать теперь в качестве системы  $K$  произвольную систему отсчета, а в качестве системы  $K'$  систему ЦИ, так что будет

$$\mathbf{P}' = 0, \quad \text{а} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V} — \text{ скорости (в } K!) \text{ системы как целого,}$$

то произведение  $M\mathbf{V} = \mathbf{P}$  — импульсу в системе  $K$ , а  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}_{\text{ЦИ}}$  — независящему от выбора начала отсчета моменту в системе ЦИ. Поэтому мы получим тогда из (17.3)

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ЦИ}} + [\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}], \quad (15.3)$$

т. е. момент системы в произвольной системе отсчета равняется сумме ее момента в системе центра инерции  $\mathbf{M}_{\text{ЦИ}}$  (этот момент часто называют собственным моментом системы) и векторного произведения радиус-вектора центра инерции на импульс. Этот последний член опять имеет форму момента одной материальной точки, обладающей координатой  $\mathbf{R}$  и импульсом  $\mathbf{P}$ <sup>1)</sup>. Таким образом совокупность формул (15.1), (15.2) и (15.3) составляет доказательство того, что систему материальных точек — коль скоро не интересуются внутренними движениями в ней — можно рассматривать как одну материальную точку с массой (14) и радиус-вектором (16).

**6.4.** Обсудим еще, как преобразуются основные динамические переменные системы при бесконечно малых поворотах

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + [\delta\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{r}'_a]$$

— ведь такие преобразования тоже входят в число преобразований Галилея в широком смысле. Поскольку преобразования скоростей получаются отсюда дифференцированием, преобразования импульсов отдельных частиц — умножением на массы, и преобразования полного импульса — суммированием по всем частицам системы, а все эти операции в данном случае линейны, то импульс системы будет преобразовываться при поворотах так же, как и радиус-вектор каждой частицы.

Менее тривиально обстоит дело с преобразованием момента, являющегося квадратичной функцией линейно преобразующихся радиус-вектора и импульса. Для одной частицы приращение ее

---

<sup>1)</sup> Заметим, что только формула (15.3) окончательно оправдывает принятое выше определение  $\mathbf{R}$  (16) — ведь по смыслу вывода (16) радиус-вектор центра инерции определялся лишь с точностью до постоянной интегрирования, которую мы там произвольно положили равной нулю. Теперь видно, что при другом распоряжении этой постоянной нельзя было бы трактовать добавок к собственному моменту в (15.3) как момент одной материальной точки.

момента  $\delta \mathbf{m}_a$  при бесконечно малом повороте сложится по формуле Лейбница из приращений радиус-вектора и импульса:

$$\delta \mathbf{m}_a = [\delta \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a] + [\mathbf{r}_a \cdot \delta \mathbf{p}_a] = [[\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_a] \cdot \mathbf{p}_a] + [\mathbf{r}_a \cdot [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p}_a]].$$

Переставляя во втором члене порядок множителей в обоих векторных произведениях

$$\delta \mathbf{m}_a = [[\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}_a] \cdot \mathbf{p}_a] + [[\mathbf{p}_a \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}] \cdot \mathbf{r}_a],$$

мы сможем прибегнуть для объединения двух членов к имеющему для двойных векторных произведений место тождеству Якоби

$$[[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C}] + [[\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}] + [[\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}] \cdot \mathbf{A}] = 0.$$

Тогда приращение момента примет вид

$$\delta \mathbf{m}_a = - [[\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a] \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}] = [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a]] = [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{m}_a],$$

совпадающий с выражениями для приращений радиус-вектора или импульса. Переход к полному моменту системы требует опять только тривиального суммирования по частицам.

Заметим, что полученный вывод об одинаковости закона преобразования радиус-векторов, импульсов и моментов при пространственных поворотах является совершенно очевидным и естественным. Ведь он означает просто, что все эти величины суть векторы — а это уже сразу было видно из полученных для них выражений. По тем же причинам скалярные величины — энергия и функция Лагранжа — вовсе не должны преобразовываться при поворотах.

Итак, при бесконечно малых поворотах системы отсчета основные динамические переменные преобразуются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}' + [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{P}'], & E &= E'. \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}' + [\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{M}'], \end{aligned} \quad (18)$$

### 6.5. Роль законов сохранения в физике чрезвычайно велика.

Основная их ценность состоит в том, что они позволяют выявить некоторые основные черты явления, совершенно не вникая в его детальный механизм, который может быть и неизвестен — либо из-за сложности интегрирования уравнений, либо потому, что мы не знаем в подробностях устройства системы и управляющих ею законов.

В этом последнем случае законы сохранения часто служат единственным источником информации о протекающих в системе процессах. Особенно плодотворным оказывается такой подход, если интересующая нас система инвариантна еще и от-

носителем каких-то дополнительных преобразований — как говорят, обладает дополнительной симметрией, — тогда сведения, которые можно почерпнуть из одних законов сохранения могут оказаться весьма детальными<sup>1)</sup>.

При переходе к квантовому описанию значения сохраняющихся величин служат основой классификации состояний системы квантовыми числами.

По этим причинам энергию, импульс и момент, сохраняющиеся всегда для всякой замкнутой системы, называют часто **основными** или **фундаментальными** динамическими величинами.

Наконец в более простых случаях, когда уравнения движения системы нам известны и речь идет только об их интегрировании, законы сохранения могут послужить вспомогательным средством, упрощающим эту процедуру за счет снижения числа переменных, их разделения или даже сведения интересующей задачи к одномерной — с примерами этого мы познакомимся в следующих параграфах.

## 7. Инвариантность относительно преобразований Галилея<sup>2)</sup>

**7.1.** При рассмотрении в предыдущих двух параграфах следствий, которые можно извлечь из инвариантности описания замкнутой механической системы относительно определенных непрерывных преобразований, были обойдены молчанием преобразования Галилея в узком смысле (4). Причина этого была двоякой. Во-первых, хотя уравнения движения и инвариантны относительно таких преобразований, но функция Лагранжа — а, следовательно, и действие — не обладает, как было показано в § 4, этим свойством. Поэтому общая техника получения законов сохранения, содержащаяся в теоремах Нётер, не может быть приложена к этому случаю.

Во-вторых, для того специального класса динамических систем, которые описываются функциями Лагранжа типа (7), инвариантность уравнений относительно преобразований Галилея вообще не ведет ни к каким новым следствиям. Дело в том, что при преобразовании Галилея, как уже отмечалось при обсуждении

---

<sup>1)</sup> Именно с таким положением мы столкнулись сейчас в теории элементарных частиц и их сильных взаимодействий, где единственным надежно установленным фактом является существование многочисленных свойств симметрии.

<sup>2)</sup> Этот параграф может быть опущен при первом чтении без ущерба для дальнейшего.

преобразования энергии, второй член в выражении (7) вовсе не испытывает никаких изменений, и все сводится к изменению кинетической энергии, которая при выполнении допущения (7) есть просто сумма кинетических энергий отдельных материальных точек системы. А вид кинетической энергии одной свободной материальной точки как раз и устанавливался в § 4 исходя из требования максимально допустимого изменения при преобразовании Галилея — т. е. изменения на полную производную.

Таким образом требование инвариантности уравнений движения уже учтено в специальной форме (7) функции Лагранжа, и те следствия, которые были получены с использованием этой формы в предыдущем параграфе, фактически уже основывались на этой инвариантности. Если проследить внимательно рассуждения предыдущего параграфа с этой точки зрения, то можно заметить, что это касалось в первую очередь закона преобразования импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой и основанного на нем утверждения о равномерном и прямолинейном движении центра инерции (16); как мы сейчас увидим, как раз эти утверждения и являются собственно следствиями галилеевой инвариантности уравнений движения.

**7.2.** Итак, рассмотрим замкнутую механическую систему, описывающуюся в некоторой инерциальной системе отсчета  $K$  функцией Лагранжа  $L(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a)$  *не имеющей частного вида* (7). В другой инерциальной системе  $K'$ , связанной с  $K$  (пусть — бесконечно малым) преобразованием Галилея (4), та же механическая система будет описываться функцией Лагранжа  $L(\mathbf{r}'_a, \mathbf{v}'_a)$  (с той же функциональной зависимостью!).

Требование галилеевой инвариантности уравнений движения рассматриваемой системы означает, что эти две функции Лагранжа должны различаться не более чем на полную производную некоторой функции  $\Phi$  только координат, но не скоростей:

$$L(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a) = L(\mathbf{r}'_a, \mathbf{v}'_a) + \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{V}_0). \quad (*)$$

Мы написали здесь  $\Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{V}_0)$ , поскольку функция  $\Phi$  должна, конечно, зависеть от параметра преобразования (4), причем так, что  $\Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{0}) = 0$  — в системе  $K$  никакой добавочной функции нет. Поэтому, разлагая  $\Phi$  в ряд по  $\mathbf{V}_0$  и оставляя только первый член, можем записать ее как

$$\Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{V}_0) = \mathbf{V}_0 \Phi(\mathbf{r}_a),$$

где  $\Phi$  — новая (векторная) функция опять только от координат.

С другой стороны, приращения координат и скоростей частиц системы при бесконечно малом преобразовании (4) составляют

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_a &= \mathbf{r}'_a - \mathbf{r}_a = -\mathbf{V}_0 t, \\ \delta \mathbf{v}_a &= \mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_a = -\mathbf{V}_0, \end{aligned}$$



и, следовательно,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}', \mathbf{v}') &= L(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a) + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \delta \mathbf{v}_a = \\ &= L(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a) - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \mathbf{V}_0 t - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \mathbf{V}_0. \end{aligned}$$

Таким образом требование (\*) галилеевой инвариантности приводит к тому, что должно (при произвольных малых  $\mathbf{V}_0$ ) выполняться равенство:

$$\left( \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}_a) \right) \mathbf{V}_0 = 0.$$

Воспользовавшись здесь произвольностью  $\mathbf{V}_0$  и вспоминая (общее!) определение (10) импульсов отдельных частиц и полного импульса, заключаем отсюда о необходимости выполнения условия

$$t \frac{d}{dt} \sum_a \mathbf{p}_a + \sum_a \mathbf{p}_a - \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}_a) = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}t - \Phi(\mathbf{r}_a)) = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{P}t - \Phi(\mathbf{r}_a) = \text{const}. \quad (19)$$

Это и есть тот закон сохранения, выполнение которого следует из требования инвариантности относительно преобразований Галилея.

**7.3.** На первый взгляд кажется, что закон сохранения (19) содержит очень мало информации, — ведь вид входящей в сохраняющуюся комбинацию функции  $\Phi(\mathbf{r}_a)$  совершенно произволен. Тем не менее оказывается, что из него можно извлечь довольно существенные физические следствия.

Вспомним того ради, что входящий в левую часть (19) полный импульс сам тоже должен сохраняться для замкнутой системы,  $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ .

Воспользовавшись этим обстоятельством при выполнении дифференцирования в первом из равенств (19), мы получим из него, что

$$\mathbf{P} = \frac{d\Phi(\mathbf{r}_a)}{dt} = \sum_a \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}_b)}{\partial r_{a\alpha}} \dot{r}_{a\alpha} = \sum_a \left( \mathbf{v}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \right) \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (19a)$$

Но функция  $\Phi$  есть функция только координат, поэтому и ее частные производные, стоящие в качестве коэффициентов при скоростях в сумме по частицам, также суть функции только координат, *но не скоростей*. Следовательно, правая часть (19a) есть однородная линейная функция скоростей; значит, то же должно быть и для левой части. Итак,

Импульс замкнутой системы есть, как следствие инвариантности относительно преобразований Галилея, линейная однородная функция скоростей всех материальных точек системы.

**7.4. ЗАМЕЧАНИЕ:** Для одной материальной точки мы получаем отсюда одним интегрированием по скорости выражение (5) для функции Лагранжа, которое мы получили в § 4 рассуждениями. В самом деле, для одной материальной точки в силу линейности и однородности

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v},$$

где  $m(\mathbf{r})$  — пока произвольная функция единственного радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Интегрируя, получаем отсюда

$$L = \frac{m(\mathbf{r})}{2} \mathbf{v}^2 + b(\mathbf{r}),$$

где  $b(\mathbf{r})$  опять может пока быть произвольной функцией  $\mathbf{r}$ . Поэтому уравнениями Лагранжа–Эйлера для нашей системы будут

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{v}^2}{2} \frac{dm}{d\mathbf{r}} + \frac{db}{d\mathbf{r}}.$$

Но в силу однородности пространства импульс  $\mathbf{p}$  должен сохраняться, т. е. должно быть

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\mathbf{v}^2}{2} \frac{dm}{d\mathbf{r}} + \frac{db}{d\mathbf{r}} = 0,$$

откуда благодаря произвольности  $\mathbf{v}^2$  следует

$$\frac{dm}{d\mathbf{r}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{db}{d\mathbf{r}} = 0,$$

т. е. обе произвольные функции оказываются константами. Вторую из них в функции Лагранжа можно просто отбросить, и мы приходим к

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

что в точности совпадает с нашей старой формулой (5). ■

**7.5.** Вернемся теперь к общему случаю  $N$  материальных точек и сравним полные импульсы в системе  $K$  и  $K'$ . По общему определению они будут равны

$$\text{в } K: \quad \mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L(\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a)}{\partial \mathbf{v}_a}, \quad \text{а в } K': \quad \mathbf{P}' = \sum_a \frac{\partial L(\mathbf{r}'_a, \mathbf{v}'_a)}{\partial \mathbf{v}'_a}.$$

Но функции Лагранжа в этих двух системах отсчета связаны соотношением (\*). Поэтому:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \sum_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \left( \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{V}_0) \right) = \mathbf{P}' + V_{0\beta} \sum_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \frac{d\Phi_\beta(\mathbf{r}_a)}{dt} =$$

в силу (19.а)

$$= \mathbf{P}' + V_{0\beta} \sum_a \frac{\partial P_\beta}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{P}' + V_{0\beta} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}_a \partial v_{b\beta}}.$$

Итак, импульсы в системах  $K$  и  $K'$  связаны соотношением

$$P_\alpha = P'_\alpha + \mathfrak{M}_{\alpha\beta} V_{0\beta}, \quad (20a)$$

в котором тензор  $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$  который можно назвать «тензором масс» системы, определяется как

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \sum_{a,b} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{a\alpha} \partial v_{b\beta}}. \quad (21a)$$

Подчеркнем, что использованные до сих пор соображения ни в коей мере не требуют, чтобы его компоненты были постоянными, они с равным правом могут оказаться произвольными функциями координат (но не скоростей!).

Мы видим, что полученное соотношение весьма существенно отличается от найденного ранее для специальных функций Лагранжа вида (7) соотношения (17.1) и что рассматриваемые нами сейчас общие системы могут обладать весьма парадоксальными свойствами. Вместо скалярной массы у них появляется тензор масс, который к тому же может зависеть от координат, импульс может не совпадать по направлению со скоростью и т. д.

**7.6.** Дело в том, что пока мы использовали еще не все физические требования, которые следует предъявлять к описанию системы материальных точек. Как уже отмечалось в § 3, кроме требований инвариантности относительно преобразований Галилея в широком смысле, следует еще наложить на функцию Лагранжа требование *асимптотической аддитивности* (3).

Будем считать, что энергия системы достаточно велика (вид функции Лагранжа не зависит от численного значения энергии), чтобы для достаточно большого момента времени  $T$  все материальные точки системы разошлись бы сколь угодно далеко друг от друга. Тогда в момент времени  $T$  и при больших временах в силу асимптотической аддитивности в функции Лагранжа системы будут существенны только члены, отвечающие свободному движению составляющих ее материальных точек, которые образуют комбинацию (6). Следовательно, для достаточно больших времен тензор  $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$  примет вид

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}|_{t \geq T} = \delta_{\alpha\beta} \sum_a m_a = \delta_{\alpha\beta} M, \quad \text{где как и в (14)} \quad M = \sum_a m_a.$$

Но тогда соотношение (20а) примет (опять для больших времен) прежнюю форму (17.1)

$$\text{для } t \geq T: \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}' + M\mathbf{V}_0.$$

Однако полный импульс системы материальных точек должен сохраняться как в системе отсчета  $K$ , так и в  $K'$ ,  $\mathbf{P} = \text{const}$ ,  $\mathbf{P}' = \text{const}$ , т.е. в последнем равенстве все величины, кроме  $M$ , не зависят от времени. Следовательно, то же равенство должно иметь место в любой момент времени, т.е. должно быть

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V}_0 M. \quad (20b)$$

и

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \sum_{a,b} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{a\alpha} \partial v_{b\beta}} = \delta_{\alpha\beta} M, \quad M = \sum_a m_a. \quad (21b)$$

Подчеркнем еще раз, что это восстановление простых формул шестого параграфа произошло только как следствие асимптотической аддитивности, свойства, которое, как и правильное поведение при преобразованиях Галилея, изначально присуще функциям Лагранжа ранее рассматривавшегося класса (7).

Второе замечание, которое полезно здесь сделать, состоит в том, что отмеченное постоянство относится только к полной массе. *До суммирования* отдельные производные  $\frac{\partial^2 L}{\partial v_{a\alpha} \partial v_{b\beta}}$  могут произвольным образом зависеть не только от координат, но и от скоростей.

Дальнейшие рассуждения идут так же, как и в предыдущем параграфе. Определяем скорость системы как целого  $\mathbf{V}$  условием (15.1) как

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \mathbf{P},$$

и, интегрируя это равенство

$$\mathbf{V}t + \mathbf{R}_0 = \frac{1}{M} \int \mathbf{P} dt = \frac{1}{M} \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (16a)$$

обнаруживаем, что точка с радиус-вектором  $\mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  движется прямолинейно и равномерно.

Таким образом выясняется физический смысл входящей в (19) или (19а) величины  $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  — будучи поделенной на полную массу, она дает нам радиус-вектор центра инерции системы.

Подчеркнем, что равенства (16а) являются теперь *единственным определением* радиус-вектора центра инерции; фигурировавшее в (16) определение  $\mathbf{R}$  как взвешенного (с массами) среднего радиус-векторов всех точек системы теперь, вообще говоря, не обязано иметь место.

**7.7.** Перейдем теперь, повторяя программу § 6, к рассмотрению того, как преобразуется **момент** при преобразовании Галилея со сдвигом

$$\begin{cases} \mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}_0. \end{cases}$$

Правило для преобразования импульсов отдельных частиц теперь уже *нельзя* будет получить отсюда умножением второй строки на массы, и мы сможем только написать, что

$$p_{a\alpha} = p'_{a\alpha} + \sum_a \frac{\partial^2 L}{\partial v_{a\alpha} \partial v_{b\beta}} V_{0\beta}.$$

Чтобы выяснить смысл стоящей здесь суммы, обратимся снова к нашему «закону сохранения» (19a) и перепишем его в тензорном виде

$$P_\beta = \sum_a \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial r_{a\alpha}} v_{a\alpha} = \sum_a C_{a\alpha, \beta} v_{a\alpha}.$$

Введенные здесь обозначения  $C_{a\alpha, \beta}$  есть, в силу (19a), с одной стороны частные производные  $\Phi$  по радиус-векторам, а с другой в то же время — частные производные полного импульса по скоростям. Вспоминая еще определение импульса

$$P_\beta = \sum_b p_{b\beta} = \sum_b \frac{\partial L}{\partial v_{b\beta}},$$

ВИДИМ, ЧТО

$$\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial r_{a\alpha}} = C_{a\alpha, \beta} = \frac{\partial P_\beta}{\partial v_{a\alpha}} = \sum_a \frac{\partial^2 L}{\partial v_{a\alpha} \partial v_{b\beta}} \quad (19b)$$

(т. е. «тензор масс» (21a) есть  $\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \sum_a C_{a\alpha, \beta}$ ).

Эти следующие из (19a) тождества являются чрезвычайно плодотворными. В частности, для интересующего нас сейчас преобразования импульсов частиц при повороте мы получаем из (19b)

$$p_{a\alpha} = p'_{a\alpha} + C_{a\alpha, \beta} V_{0\beta} \quad \text{или} \quad \mathbf{p}_a = \mathbf{p}'_a + (\hat{C}_a \mathbf{V}_0),$$

если воспользоваться полусимволической прямой записью.

Теперь можно заняться вычислением преобразования момента

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_a [\mathbf{r}'_a + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{p}'_a + (\hat{C}_a \mathbf{V}_0)] = \\ &= \sum_a [\mathbf{r}'_a \cdot \mathbf{p}'_a] + \left[ \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0 \cdot \sum_a \mathbf{p}'_a \right] + \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot (\hat{C}_a \mathbf{V}_0)]. \end{aligned}$$

Суммирование во втором члене дает полный импульс, и, значит,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [(\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t) \cdot \mathbf{P}'] + \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot (\hat{C}_a \mathbf{V}_0)]. \quad (22a)$$

Рассмотрим опять два наиболее интересных частных случая. Если рассматриваемое преобразование есть чистый сдвиг,  $\mathbf{V}_0 = 0$ , то третий член и половина второго пропадают, и остается

$$\text{трансляция:} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{P}'] \quad (22b)$$

— выражение, в точности совпадающее с полученным в прошлом параграфе. Если теперь штрихованная система есть система центра инерции, т. е.

$$\mathbf{P}' = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{M},$$

то пропадает второй член, и мы приходим к

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ци}} + \frac{1}{M} \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot (\hat{C}_a \mathbf{P})].$$

На первый взгляд это выражение не имеет ничего общего с аналогичной формулой (15.3). Вернемся, однако, к определяющим  $C_a$  формулам (19b) и

$$\frac{1}{M} C_{a\alpha, \beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial r_{a\alpha}} = \frac{\partial R_\beta}{\partial r_{a\alpha}}.$$

Поэтому добавок к моменту при переходе от ЦИ-системы к произвольной системе  $K$  можно записать как

$$\sum_a \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_a} \right] (\mathbf{R} \mathbf{P}^\perp),$$

где крышечка над  $\mathbf{P}$  означает, что этот вектор не следует дифференцировать.

Далее, пока мы еще никак не сформулировали то требование, что  $\mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  должен быть действительно вектором (если не считать того, что изображали его полужирным шрифтом). Математическое условие векторности  $\mathbf{R}$  состоит, естественно, в том, что его изменение при произвольном бесконечно малом повороте  $\delta\boldsymbol{\Phi}$ ,

$$\delta\mathbf{R} = \sum_a \left( \delta\mathbf{r}_a \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_a} \right) \mathbf{R} = \sum_a \left( [\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r}_a] \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_a} \right) \mathbf{R} = \left( \delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \sum_a \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_a} \right] \right) \mathbf{R},$$

должно выражаться общей для всех векторов формулой (18):

$$\delta\mathbf{R} = [\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}]. \quad (18.4)$$

Таким образом, после скалярного умножения на  $\mathbf{P}$ , должно быть

$$\left( \delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \sum_a \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_a} \right] \right) (\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}^\perp) = (\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}),$$

откуда, в силу произвольности  $\delta\Phi$ ,

$$\sum_a \left[ \mathbf{r}_a \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}_a} \right] (\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}) = [\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}].$$

Благодаря этому тождеству добавок к моменту принимает вид векторного произведения радиус-вектора центра инерции и импульса т. е. мы получаем, для преобразования момента из ЦИ-системы в произвольную, формулу

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ЦИ}} + [\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}], \quad (22c)$$

идентичную по виду формуле (15.3). (Следует, конечно, все время помнить, что *смысл* этих двух формул может быть и различным, поскольку старое определение (16) для  $\mathbf{R}$  теперь, вообще говоря, не имеет места.)

**7.8.** Итак, эксплуатируя только требование инвариантности описания механической системы относительно преобразований Галилея в широком смысле (т. е. — принцип относительности) и условие асимптотической аддитивности и *не используя* специальное допущение (7) относительно вида функции Лагранжа, удалось привести все формулы для сохраняющихся величин к виду, полученному ранее в рамках этого специального допущения. Поэтому все отличие настоящего более общего рассмотрения сосредоточилось в свободе выбрать для зависимости радиус-вектора центра инерции от координат,  $\mathbf{R}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ , выражение, более общее, чем следовавшая из (7) простая формула (16)<sup>1)</sup>. Чтобы разобраться в том, какие дополнительные возможности при этом открываются, посмотрим, как происходит теперь отделение трансляционного движения от внутренних.

**7.9.** Для этой цели введем для описания рассматриваемой механической системы вместо радиус-векторов  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  ее материальных точек обобщенные координаты:

$$\left. \begin{array}{l} \text{определяемый (16a) радиус-вектор центра инерции } \mathbf{R}, \\ \text{и} \\ (N-1) \text{ линейно независимую разность } \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b \text{ радиус-векторов} \\ \text{отдельных точек; будем обозначать эти разности через} \\ \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1}; \quad \mathbf{p}_c = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b. \end{array} \right\}$$

Вид зависимости  $\mathbf{R}$  от  $\mathbf{r}_b$  неизвестен; однако из соображений трансляционной и ротационной инвариантности можно утверждать, что самым общим выражением для  $\mathbf{R}$  будет линейная комбинация

$$\mathbf{R} = \sum_b F^b \cdot \mathbf{r}_b$$

<sup>1)</sup> Конечно, одного совпадения выражений для фундаментальных сохраняющихся величин еще недостаточно для совпадения всей динамики двух систем. Поэтому, даже если  $\mathbf{R}$  будет задаваться формулой (16), функция Лагранжа все еще может не иметь вида (7).

всех векторов  $\mathbf{r}_b$ , коэффициенты  $F^b$  которой суть произвольные *ротационно-инвариантные* функции  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Тогда мы получим для введенных в (19b) коэффициентов  $C_{a\alpha, \gamma}$ :

$$\frac{1}{M} C_{a\alpha, \gamma} = \frac{\partial R_\gamma}{\partial r_{a\alpha}} = F_a \delta_{\alpha\gamma} + \sum_b \frac{\partial F^b}{\partial r_{a\alpha}} r_{b\gamma}.$$

Асимптотическая аддитивность (21b) требует, чтобы суммирование этих коэффициентов по  $a$  приводило бы к единичному тензору; при принятом анзаце для  $\mathbf{R}$  это приводит к

$$\frac{1}{M} \sum_a C_{a\alpha, \gamma} = \sum_a \frac{\partial R_\gamma}{\partial r_{a\alpha}} = \delta_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \sum_a F^a + \sum_b r_{b\gamma} \sum_a \frac{\partial F^b}{\partial r_{a\alpha}}.$$

В силу независимости всех векторов  $\mathbf{r}_b$  для выполнения последнего условия необходимо и достаточно, чтобы было сразу

$$\sum_a F^a = 1 \quad \text{и} \quad \sum_a \frac{\partial F^b}{\partial r_a} = 0; \quad b = 1, \dots, N.$$

Вторая группа требований означает, что все функции  $F^b$  должны обладать свойством  $F^b(\mathbf{r}_a + \mathbf{c}) = F^b(\mathbf{r}_a)$ , т.е. должны быть (ротационно-инвариантными) функциями не самих радиус-векторов  $\mathbf{r}_a$ , а только их (независимых) разностей  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ . Таким образом требование асимптотической аддитивности ограничивает принятый анзац зависимости  $\mathbf{R}$  от  $\mathbf{r}_a$  формой

$$\mathbf{R}_a = \sum_a F_a(\mathbf{p}_c) \cdot \mathbf{r}_a, \quad \text{где} \quad \sum_a F^a = 1.$$

Однако мы еще не использовали это требование до конца. Поскольку асимптотическая аддитивность требует, чтобы для больших взаимных расстояний функция Лагранжа принимала вид (6), а для таких функций Лагранжа радиус-вектор центра инерции выражается формулой (16), то предельные значения каждой из функций  $F_a$  при всех разностях  $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c$ , стремящихся по модулю к бесконечности, должны составлять просто  $\frac{m_a}{M}$ , где  $m_a$  — масса (по асимптотическим измерениям)  $a$ -й частицы. Иными словами, мы можем записать

$$F^a(\mathbf{p}_c) = \frac{1}{M} (m_a + f_a(\mathbf{p}_c)),$$

где

$$\lim_{\text{все } |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_c| \rightarrow \infty} f_a = 0 \quad \text{и} \quad \sum_a f_a(\mathbf{p}_c) = 0. \quad (16c)$$

Итак, наиболее общая форма зависимости  $\mathbf{R}$  от  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ , допускаемая из соображений трансляционной и ротационной инвариантности и требования асимптотической аддитивности, есть

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{M} + \frac{1}{M} \sum_a f_a(\mathbf{p}_c) \mathbf{r}_a, \quad (16b)$$



где  $f_a$  подчинены условиям (16с). Заметим еще, что в силу второго из этих условий второй член  $\{ \}_{\Pi}$  (16b) обладает свойством  $\{ \}_{\Pi}(\mathbf{r}_a + \mathbf{c}) = \{ \}_{\Pi}(\mathbf{r}_a)$ , т. е. является в целом опять функцией не самих  $\mathbf{r}_a$ , а только их разностей.

Поскольку  $\mathbf{p}_c$  не меняются при сдвиге, то полный импульс системы есть  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}}$ , и в силу (16а)

$$M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}}.$$

Интегрируя это соотношение по  $\dot{\mathbf{R}}$ , приходим к функции Лагранжа:

$$L(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{p}_c, \dot{\mathbf{p}}_c) = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + L_1(\mathbf{p}_c, \dot{\mathbf{p}}_c). \quad (23)$$

(От координаты  $\mathbf{R}$  второй член здесь зависеть не может, так как иначе уравнение Лагранжа–Эйлера по этой степени свободы приводило бы к изменению полного импульса со временем.) Это и есть наиболее общая функция Лагранжа, удовлетворяющая требованиям принципа относительности Галилея и асимптотической аддитивности.

Естественно, что для полного импульса эта функция Лагранжа возвращает нас к исходному выражению  $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$ , что же касается полного момента, то, поскольку «обобщенные координаты»  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{p}_c$  преобразуются при повороте по общему векторному правилу (18), то для него получается

$$\mathbf{M} = \sum_{c=1}^{N-1} [\mathbf{p}_c \cdot \boldsymbol{\pi}_c] + [\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}], \quad (22d)$$

если обозначив через  $\boldsymbol{\pi}_c$  (обобщенные) импульсы, сопряженные координатам  $\mathbf{p}_c$ ,

$$\boldsymbol{\pi}_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{p}}_c} = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\mathbf{p}}_c}.$$

Формула (22d) совпадает, конечно, с ранее полученным выражением (22с), в ней только явно учитывается, что собственный момент, обозначенный в (22с) через  $\mathbf{M}_{\text{Ци}}$ , зависит только от координат и импульсов относительного движения.

**7.10.** Можно ли еще сильнее сузить найденный класс допустимых зависимостей (23), (16b)?

Введем в (23) и (16b) вместо радиус-векторов частиц  $\mathbf{r}_a$  новые координаты  $\mathbf{R}_a$  с помощью соотношения

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \frac{1}{M} \sum_b f_b(\mathbf{p}_c) \mathbf{R}_b. \quad (*)$$

Это преобразование не затрагивает разности координат, поэтому векторы  $\mathbf{p}_c$  будут выражаться через  $\mathbf{R}_a$  так же, как и через  $\mathbf{r}_a$ ; что же до

радиус-вектора  $\mathbf{R}$  центра инерции, то он выразится через  $\mathbf{R}_a$  как

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{R}_a}{M} - \frac{\frac{1}{M} \sum_a m_a \sum_b f_b \mathbf{R}_b}{M} + \frac{1}{M} \sum_a f_a \mathbf{R}_a = \frac{\sum_a m_a \mathbf{R}_a}{M}$$

— т. е. в точности по старой формуле (16).

Таким образом, мы нашли такие новые координаты для частиц, в терминах которых выражение для радиус-вектора центра инерции возвращается к «простой» форме (16). Эти новые координаты  $\mathbf{R}_a$  ведут себя по отношению ко всем фундаментальным для нашего способа изложения преобразованиями симметрии — по отношению к сдвигам, поворотам и преобразованиям Галилея в узком смысле — точно так же, как и «старые» координаты  $\mathbf{r}_a$ :

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{R}'_a + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0 + [\boldsymbol{\delta\phi} \cdot \mathbf{R}'_a].$$

Поэтому из соображений поведения при преобразованиях симметрии нельзя будет сказать, какие из них «лучше», какие более заслуживают названия «настоящих радиус-векторов материальных точек системы». Нельзя выяснить это и на основании анализа асимптотического поведения — при стремлении всех разностей  $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$  к бесконечности дополнительный член в (\*) обратится в нуль, и  $\mathbf{r}_a$  не будут отличаться от  $\mathbf{R}_a$ . Наконец, условие «соприкосновения» какой-либо пары частиц  $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b = 0$  выражается только через разности координат, т. е. опять выглядит в терминах  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{R}_a$  одинаковым образом.

Иными словами, координаты материальных точек системы определяются введенными физическими требованиями лишь с точностью до преобразования (\*), и не видно никаких препятствий тому их выбору, при котором восстанавливается простая формула (16) для центра инерции, которая вместе с (23) определяет функцию Лагранжа через координаты  $\mathbf{R}_a$  отдельных материальных точек. Вид отвечающей относительным движениям части  $L_1(\rho, \dot{\rho})$  остается при этом произвольным; ограничения на него налагает лишь необходимость выполнения асимптотической аддитивности при любом разбиении системы на удаленные подсистемы.

## 8. Рассеяние частиц

Хорошим примером того, какую пользу могут сослужить законы сохранения, может быть задача двух тел, т. е. задача о поведении замкнутой системы, состоящей всего из двух материальных точек.

В § 6 уже было показано, что формулы (15) осуществляют отделение движения системы как целого от внутренних движений в системе. В случае двух материальных точек эти последние

будут движением одной материальной точки во внешнем поле, и всю программу разделения переменных, относящихся к трансляционному и к внутреннему движениям, удобно полностью провести выявляя.

**8.1.** Итак, пусть изучаемая система состоит из двух материальных точек с массами  $m_1$  и  $m_2$  и координатами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ :

$$m_1, \mathbf{r}_1; \quad m_2, \mathbf{r}_2.$$

В рамках допущения (7) ее функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

**8.1.1.** Введем в качестве новых координат радиус-вектор центра инерции  $\mathbf{R}$  и радиус-вектор первой материальной точки относительно второй  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Скорость центра инерции  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$  и относительная скорость  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  будут выражаться через скорости  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  обеих частиц в точности теми же формулами. Разрешая эти соотношения относительно  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , получим для обратного преобразования

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (*)$$

Поэтому в новых переменных  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  функция Лагранжа окажется равной

$$L = \frac{1}{2} \left\{ (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right\} - U = \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \left\{ \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r}) \right\},$$

где мы воспользовались полной массой (14)  $M = m_1 + m_2$  и ввели **приведенную массу**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

**8.1.2.** Итак, в соответствии с (15.2) функция Лагранжа разбилась у нас в сумму

$$L = L_{\text{tr}}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + L_{\text{in}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

членов, описывающих трансляционное и внутреннее движения, причем каждый из членов зависит лишь от «своих» координат и скоростей, т.е. переменные, относящиеся к каждому виду движения, полностью разделились.

Трансляционное движение является свободным, полностью задается формулой (16) из **6.1.3** и не представляет поэтому дальнейшего интереса, внутреннее же движение оказывается описываемым такой же функцией Лагранжа  $L_{\text{in}}$ , как для движения одной материальной точки с *приведенной массой*  $\mu$  во внешнем поле  $U(\mathbf{r})$ .

**8.1.3.** Для импульсов *каждой* материальной точки в новых переменных мы получим

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \dot{\mathbf{R}} + \mu \dot{\mathbf{r}} = m_1 \mathbf{V} + \mathbf{p} \quad \text{и} \quad \mathbf{p}_2 = m_2 \dot{\mathbf{R}} - \mu \dot{\mathbf{r}} = m_2 \mathbf{V} - \mathbf{p}, \quad (**)$$

если ввести **относительный импульс**

$$\mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

а для *полного* импульса —

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = M \dot{\mathbf{R}} + \mu \dot{\mathbf{r}} - \mu \dot{\mathbf{r}} = M \mathbf{V}$$

— т. е., как и должно было быть в силу (15.1), в него вносит вклад только трансляционное движение.

**8.1.4.** Несколько сложнее выкладка для момента:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m_1 [\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1] + m_2 [\mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2] = \\ &= m_1 [\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}] + \mu [\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}] + \mu [\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}] + \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} [\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}] + \\ &\quad + m_2 [\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}] - \mu [\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}] - \mu [\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}] + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} [\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}], \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R} \cdot M \dot{\mathbf{R}}] + [\mathbf{r} \cdot \mu \dot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}] + [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}]$$

в полном соответствии с (15.3).

**8.2. ЗАМЕЧАНИЕ:** Преобразование (\*) трактовалось как переход к новым (обобщенным) координатам. Однако сравнение выведенных формул с полученными в § 6 показывает, что то же преобразование можно трактовать как преобразование Галилея, переводящее произвольную первоначальную систему отсчета в систему центра инерции — тогда первый член  $\mathbf{R}$  в правых частях обеих формул (\*) будет осуществляющим преобразование сдвигом, а вторые члены — радиус-векторами  $\mathbf{r}_{10}$  и  $\mathbf{r}_{20}$ , в системе ЦИ первой и второй частиц соответственно. Радиус-вектор центра инерции в системе центра инерции  $\mathbf{R}_0 = \frac{m_1 \mathbf{r}_{10} + m_2 \mathbf{r}_{20}}{m_1 + m_2}$  по

определению равен нулю, и поэтому для определения конфигурации частиц в системе ЦИ достаточно разности их радиус-векторов  $\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ , т. е. относительной координаты  $\mathbf{r}$ . Аналогично формулы (\*) можно понимать как преобразование импульсов каждой частицы к той же системе — вторые члены в правых частях этих равенств,  $\mathbf{p}$  и  $-\mathbf{p}$ , суть импульсы  $\mathbf{p}_{10}$  и  $\mathbf{p}_{20}$  первой и второй частицы в системе ЦИ; они равны по величине и противоположны по направлению. ■

**8.3.** Проведенное разделение трансляционных и внутренних переменных в задаче двух тел позволяет вместе с законами сохранения получить ряд важных результатов, не зависящих от конкретного вида потенциальной энергии взаимодействия  $U(\mathbf{r})$ , в задаче о рассеянии или столкновении частиц.

Под этими словами имеется в виду следующая специальная постановка задачи в проблеме двух тел. Будем считать, что в проблеме двух тел начальные условия ставятся в далеком прошлом, в момент времени  $t_- \rightarrow -\infty$ , и что в это время составляющие систему частицы находятся сколь угодно далеко друг от друга. Тогда согласно условию асимптотической аддитивности каждая из них является свободной и движется с постоянным импульсом  $\mathbf{p}_1$  и, соответственно,  $\mathbf{p}_2$ , т. е. равномерно и прямолинейно. Именно эти равномерные и прямолинейные движения каждой из частиц задаются в качестве начальных условий; иными словами в качестве начального условия задается *асимптотическое поведение* радиус-векторов обеих частиц.

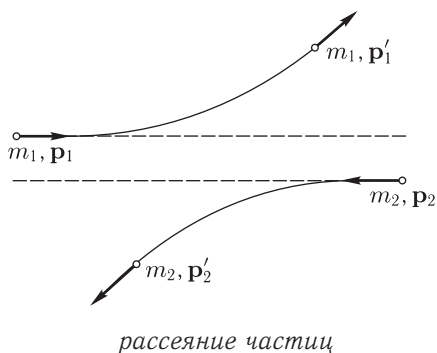
Далее, с течением времени, частицы могут сблизиться, так что взаимодействие  $U(r)$  окажется уже существенным и движение станет и криволинейным, и неравномерным. Детали этого движения не будут нас интересовать, мы зададимся только вопросом: что произойдет при  $t_+ \rightarrow +\infty$ , когда частицы снова разлетятся далеко друг от друга и опять будут двигаться равномерно и прямолинейно с постоянными импульсами  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$ <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Такой процесс называют **упругим рассеянием** частиц. Может, конечно, случиться, что в результате взаимодействия частицы образуют столь тесную систему, что уже не разойдутся на большие расстояния ни при каких временах — тогда мы будем говорить о процессе **захвата** частиц. Может быть и так, что в процессе рассеяния частицы изменят свою природу — например, изменится внутренняя энергия тех материальных тел, которые входят в наше рассмотрение в виде идеализированной модели точечных частиц — тогда говорят об **неупругом рассеянии**. Строго говоря, однако, процессы захвата или неупругого рассеяния — пока не сделано более детальных допущений об их механизме — находятся за пределами возможностей настоящего механического рассмотрения.

Иными словами, задача о рассеянии состоит в том, что считается заданной асимптотика движения при  $t \rightarrow -\infty$  и ищется асимптотика движения при  $t \rightarrow +\infty$ .

Описанная задача о рассеянии занимает центральное место во всей физике атомных или ядерных явлений и в физике элементарных частиц.



Причина этого состоит в том, что мы не случайно сосредотачиваем свой интерес на асимптотиках, оставляя без внимания детали движения во время сближения частиц — когда мы имеем дело с частицами атомных или еще меньших размеров, то имеющиеся у нас экспериментальные средства просто недостаточны, чтобы проследить за этими

детальями. Поэтому практически все грандиозные успехи, которые нам удалось достичь в XX веке в понимании микромира, основаны на изучении процессов упругого или неупругого рассеяния, захвата или распада.

**8.3.1.** При рассмотрении задачи о рассеянии приходится все время пользоваться двумя системами отсчета: одной, в которой задаются начальные асимптотические значения  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  и ищутся конечные асимптотические значения  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$ , и другой — системой ЦИ, в которой удобнее вести теоретическое рассмотрение. Преобразование импульсов от системы ЦИ к произвольной системе описывалось (ср. замечание 8.2) формулами (\*) из 8.1.3

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{P} + \mathbf{p}, \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{m_2}{M} \mathbf{P} - \mathbf{p}, \end{aligned} \right\}$$

где мы не поставили штрихов, считая что все величины относятся к асимптотике до рассеяния.

После рассеяния полный импульс  $\mathbf{P}$  должен остаться тем же по закону сохранения импульса, что же касается импульса  $\mathbf{p}$  относительного движения, то — поскольку в силу отсутствия взаимодействия на асимптотике внутренняя энергия  $E_{\text{ин}}$  сводится к одной кинетической энергии  $T_{\text{ин}}$ , которая в силу сохранения энергии должна быть одной и той же до и после рассеяния, —

должен сохраняться его квадрат

$$(\mathbf{p}')^2 = \mathbf{p}^2 \quad \text{или} \quad p' = p = \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|.$$

Итак, импульс относительного движения при рассеянии *только поворачивается*:

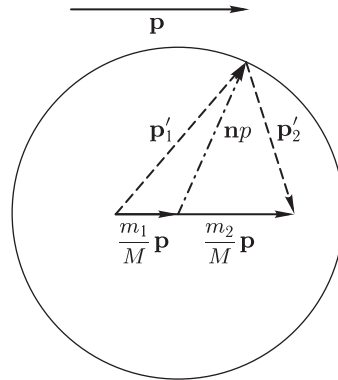
$$\mathbf{p}' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{n}^2 = 1.$$

Поэтому те же самые формулы (\*) дадут нам для асимптотических величин *после рассеяния*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{P} + \mathbf{n} \cdot p = \frac{m_1}{M} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \mathbf{n} \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \\ \mathbf{p}'_2 &= \frac{m_2}{M} \mathbf{P} - \mathbf{n} \cdot p = \frac{m_2}{M} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) - \mathbf{n} \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|. \end{aligned} \quad (25)$$

Итак, одни лишь законы сохранения позволяют выразить асимптотические импульсы обеих частиц после рассеяния через асимптотические величины до рассеяния и *один единичный вектор*  $\mathbf{n}$ , т.е. через два угла. Описываемые формулами (25) соотношения становятся очень наглядными, если изобразить их на графике.

**8.3.1.1.** Выберем ось абсцисс параллельно вектору  $\mathbf{P}$  и отложим (равные в сумме ему) векторы  $\frac{m_1}{M} \mathbf{P}$  и  $\frac{m_2}{M} \mathbf{P}$  так, чтобы первый из них кончался, а второй начинался в начале координат. Проведем далее вокруг начала координат окружность радиуса  $p$ . Тогда эта окружность будет геометрическим местом концов всех возможных векторов  $\mathbf{n}p$ , начинающихся в начале координат. (На самом деле следовало бы, конечно устроить трехмерный «чертеж», в котором роль окружности играла бы соответствующая сфера; однако соотношения (25) симметричны относительно вращений вокруг  $\mathbf{P}$  и мы реально изображаем сечение трехмерного чертежа проходящей через  $\mathbf{P}$  плоскостью). Как легко видеть, определяемые (25) импульсы частиц после рассеяния будут изображаться векторами, идущими (для первой частицы) от начала  $\frac{m_1}{M} \mathbf{P}$  к концу  $\mathbf{n}p$  и (для второй частицы) от конца  $\mathbf{n}p$  к концу  $\frac{m_2}{M} \mathbf{P}$ . Если двигать теперь конец вектора  $\mathbf{n}p$  по всей окружности (на самом деле — по всей поверхности



сферы), то мы получим все возможные пары значений импульсов частиц после рассеяния.

Практически особенно важен тот случай, когда одна из частиц — скажем, вторая — до рассеяния покоилась:

$$\mathbf{p}_2 = 0.$$

Именно этот случай отвечает большинству опытов, реально ставящихся в лабораториях, когда искусственно ускоренным частицам дают рассеяться на неподвижной «мишени»<sup>1)</sup>. Поэтому систему отсчета, в которой  $\mathbf{p}_2 = 0$ , называют обычно **лабораторной системой**.

#### 8.3.1.1.1. В лабораторной системе

$$\frac{m_2}{M} \mathbf{P} = \frac{m_2}{M} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{m_2}{M} \mathbf{p}_1 = \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{v}_1 = \frac{m_1 m_2}{M} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{p},$$

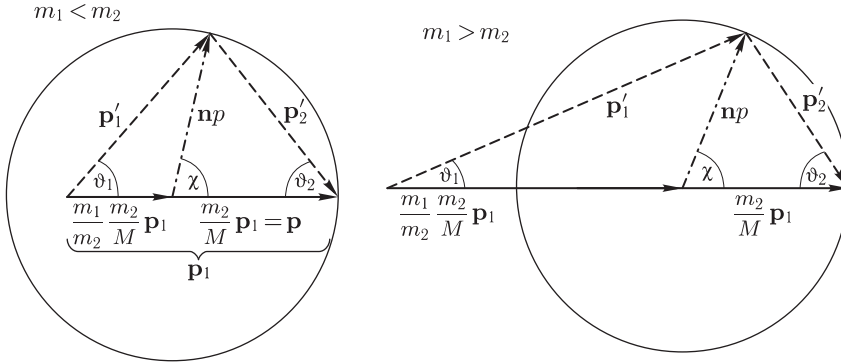
т. е. конец вектора  $\frac{m_2}{M} \mathbf{P}$  попадает на нашем графике на окружность. Что же касается положения, начала вектора  $\frac{m_1}{M} \mathbf{P}$ , то оно зависит от соотношения масс частиц  $\frac{m_1}{m_2}$ . Если  $m_1 < m_2$ , то начало вектора  $\frac{m_1}{M} \mathbf{P}$  лежит внутри окружности, если  $m_1 > m_2$ , то вне ее.

**8.3.2.** Определим **углы рассеяния** частиц. Углом рассеяния  $\chi$  в системе ЦИ называется угол между направлениями относительного импульса до и после рассеяния, угол  $\widehat{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ , т. е. один из углов, определяющих положение единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Углом рассеяния  $\vartheta_1$  первой частицы в лабораторной системе называется угол между направлениями ее импульса в этой системе до и после рассеяния, т. е. угол  $\widehat{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}_1}$ . Наконец в лабораторной системе можно ввести угол рассеяния второй частицы  $\vartheta_2$  как угол между векторами  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}'_2$ .

Для интерпретации результатов опытов по рассеянию приходится выражать одни углы рассеяния через другие; поэтому выведем соответствующие формулы, несмотря на их громоздкость.

<sup>1)</sup> Опыты, в которых разгоняются *обе* сталкивающиеся частицы — опыты со *встречными пучками* — начинают ставиться только в самые последние годы. Причина этого лежит в том, что реально достижимые плотности частиц в искусственно ускоряемых пучках несравненно меньше «естественных» плотностей в материальных телах. Поэтому вероятности того, что две частицы из разных пучков пролетят настолько близко, что испытают заметное отклонение, оказываются очень малыми.





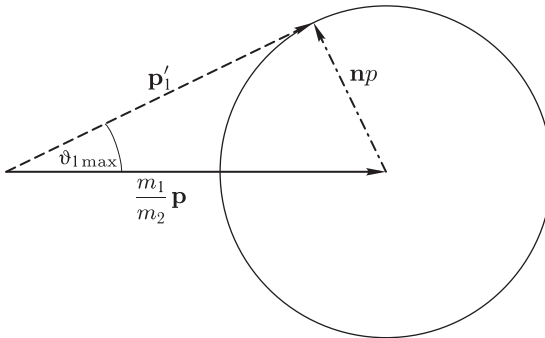
**8.3.2.2.** Связь угла  $\vartheta_2$  с углом  $\chi$  устанавливается просто. Из наших графиков видно, что треугольник, образуемый векторами  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}'_2$ , всегда равнобедренный, поэтому

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \quad (26.1)$$

Угол  $\chi$  рассеяния в ЦИ-системе может меняться от 0 (отсутствие рассеяния) до  $\pi$  (рассеяние назад). Из (26.2) видно, что при этом угол  $\vartheta_2$  рассеяния второй частицы в Л-системе меняется от  $\frac{\pi}{2}$  до нуля.

**8.3.2.1.** Сложнее обстоит дело с углом  $\vartheta_1$  рассеяния первой частицы. Из наших графиков видно, что случай  $m_1 < m_2$  и  $m_1 > m_2$  ведут здесь к существенно разным картинам.

**8.3.2.1.1.** В первом случае  $\vartheta_1$  равняется нулю для  $\chi = 0$ , монотонно растет по мере роста  $\chi$  — будучи, однако, все время меньше  $\chi$  — вплоть до значения  $\vartheta_1 = \pi$ , которое достигается для  $\chi = \pi$ . При этом отличие угла  $\vartheta_1$  от угла  $\chi$  тем меньше, чем меньше отношение  $\frac{m_1}{m_2}$ , и при  $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$  угол  $\vartheta_1 \rightarrow \chi$ .



**8.3.2.1.2.** Совершенно по-иному обстоит дело для  $m_1 > m_2$ . Угол  $\vartheta_1$  для малых  $\chi$  также начинает расти вместе с  $\chi$ , однако этот рост продолжается лишь до того значения  $\chi$ , для которого вектор  $\mathbf{p}'_1$  касается окружности; при дальнейшем росте  $\chi$  угол  $\vartheta_1$  убывает и при  $\chi = \pi$  обращается в нуль. Таким образом при  $m_1 > m_2$  зависимость  $\chi$  от  $\vartheta_1$  двузначна. Кроме того, при рассеянии более тяжелой частицы на более легкой ее угол отклонения не может быть сколь угодно велик, как видно из графика, всегда  $\vartheta_1 \leq \vartheta_{1\max}$ , где

$$\sin \vartheta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

**8.3.2.1.3.** Чтобы связать  $\vartheta_1$  с углом  $\chi$ , опустим из конца вектора  $\mathbf{p}'$  перпендикуляр на вектор  $\mathbf{p}$ : тогда образуется два прямоугольных треугольника, из сопоставления которых видно, что

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{p \sin \chi}{\frac{m_1}{m_2} p + p \cos \chi},$$

то есть

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}. \quad (26.2)$$

**8.3.2.3.** Что же до длин импульсов  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$  после рассеяния, то из тех же прямоугольных треугольников видим, что

$$p'_i = p \frac{\sin \chi}{\sin \vartheta_i}; \quad i = 1, 2,$$

то есть, что

$$\begin{aligned} p'_1 &= p \sin \chi \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \vartheta_1}} = p \sin \chi \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_2 \sin \chi} = \\ &= \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_2} p; \\ p'_2 &= p \frac{\sin \chi}{\cos \frac{\chi}{2}} = 2p \sin \frac{\chi}{2}. \end{aligned}$$

Выражая еще все через длину импульса  $\mathbf{p}_1$  первой частицы до рассеяния, получаем окончательно

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{M} p_1 = \sqrt{1 - \frac{4\mu}{M} \sin^2 \frac{\chi}{2}} p_1, \\ p'_2 &= \frac{2m_2}{M} \sin \frac{\chi}{2} p_1. \end{aligned} \quad (26.3,4)$$

**8.3.2.4.** Формулы (26) существенно упрощаются в том специальном случае, когда массы обеих частиц равны,  $m_1 = m_2 = m$ , и, следовательно,

$$M = 2m; \quad \frac{m_1}{M} = \frac{m_2}{M} = \frac{1}{2}; \quad \mu = \frac{m}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \chi}{1 + \cos \chi} = \operatorname{tg} \frac{\chi}{2},$$

то есть

$$\vartheta_1 = \frac{\chi}{2}; \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}; \quad p'_1 = \cos \chi \cdot p_1; \quad p'_2 = \sin \chi \cdot p_1. \quad (26a)$$

Заметим, что из этих формул видно, что  $\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = 0$ , т. е. в случае равных масс в Л-системе частицы всегда разлетаются после рассеяния под прямым углом.

Итак, законы сохранения позволили нам выразить все асимптотические величины после рассеяния через начальную асимптотику и единственный параметр — угол рассеяния  $\chi$  в ЦИ-системе. Найти этот угол можно, только реально решая соответствующую динамическую задачу.

## 9. Одномерное движение

**9.1.** Другим примером использования законов сохранения, примером, в котором за этот счет удастся вовсе обойти интегрирование уравнений движения, может служить случай системы с одной степенью свободы — случай одномерного движения во внешнем поле, не зависящем от времени.

Функция Лагранжа для такой системы может (в рамках допущения (7)) иметь наиболее общую форму

$$L = \frac{a(q) \dot{q}^2}{2} - U(q),$$

причем, поскольку  $U$  не зависит от  $t$ , энергия

$$E = \frac{a \dot{q}^2}{2} + U(q) = \text{const}$$

должна сохраняться. Разрешая это соотношение относительно  $\dot{q}$ , мы приходим для определения зависимости  $q$  от времени к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{a(q)} (E - U(q))},$$

которое для любого  $U(q)$  интегрируется в квадратурах

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}(E - U(q))}}. \quad (27.1)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Попытка непосредственно проинтегрировать в квадратурах уравнения движения смогла бы здесь привести к успеху лишь при привлечении искусственных приемов, в действительности эквивалентных использованию сохранения энергии. ■

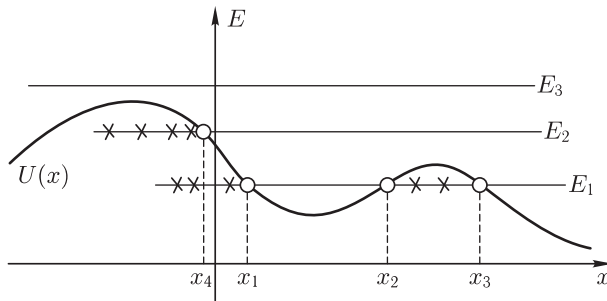
Если координата  $q$  — это декартова координата, скажем  $x$ , материальной точки, которая может двигаться только вдоль по прямой, то коэффициент  $a(q) = m$ , массе частицы, и закон движения принимает вид

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} + t_0. \quad (27.2)$$

**9.2.** Единственный вопрос, который требует теперь еще дополнительного исследования — это вопрос о выборе знаков корня и пределов интегрирования по  $x$  (или по  $q$ ). Того ради заметим, что под корнем в (27) стоит фактически кинетическая энергия, которая существенно положительна. Таким образом движение возможно только для тех значений  $x$ , для которых

$$U(x) \leq E.$$

(Как раз там, где интеграл (27) дает вещественное решение.) Разумно проиллюстрировать это обстоятельство графически, изобразив на одном и том же чертеже кривую потенциальной энергии



точки остановки

$U(x)$  и «прямую» полной энергии  $E$ , не зависящей от  $x$ . Области, где — при выбранном значении полной энергии  $E$  — движение запрещено, отмечены на рисунке крестиками.

Границей допустимых и запрещенных для движения областей являются точки, в которых

$$U(x) = E;$$

они называются **точками остановки** или **точками поворота**. В них кинетическая энергия — а, следовательно, и скорость — обращаются в нуль.

Относительно скорости можно утверждать и больше: вообще говоря *в точке остановки скорость меняет знак*. Действительно, если в точке остановки производная  $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$ , то отлична от нуля и  $\frac{dx}{dt}$ . Следовательно, значения  $\dot{x}$  в моменты  $\tilde{t} + \Delta t$  и  $\tilde{t} - \Delta t$ , где  $\tilde{t}$  — момент остановки, будут разных знаков<sup>1)</sup>, причем обоим этим значениям скорости будут соответствовать координаты  $x$ , лежащие с одной стороны от точки остановки — ведь с другой стороны движение невозможно. А интегралы (27) как раз и дают нам для каждого значения координаты *два* возможных движения, отличающихся знаком скорости.

Таким образом пределами интегрирования в (27) служат точки остановки, и при прохождении такой точки движение переходит с одной ветви корня на другую.

**9.3.** Наличие точек остановки может служить для классификации движения в целом. Если допустимая область движения ограничена точками остановки с обеих сторон (как для значения энергии, равного  $E_1$ , между точками  $x_1$  и  $x_2$  на рисунке), т. е. движение может происходить только в конечной области пространства, то такое движение называют **финитным**. Если имеется только одна точка остановки (как для движений справа от  $x_3$  при энергии  $E_1$ , или справа от  $x_4$  при энергии  $E_2$  на рисунке), то материальная точка может прийти из бесконечности, дойти до точки остановки, переменить там знак скорости и снова уйти в бесконечность. Если точек остановки нет вовсе (как при энергии  $E_3$  на рисунке), то материальная точка проходит из одной

---

<sup>1)</sup> Оговорка «вообще говоря» относится как раз к случаю равенства  $\frac{\partial U}{\partial x}$  в точке остановки нулю. Тогда может оказаться — и наверняка окажется, если  $U(x)$  аналитична в окрестности точки остановки, — что для достижения точки остановки необходимо бесконечное время, поэтому вопрос о знаке скорости после достижения точки остановки теряет смысл.

бесконечности в другую, сохраняя знак скорости неизменным. В обоих этих случаях движение называют **инфинитным**.

В случае *финитного* движения встает вопрос о его **периоде** — о промежутке времени, по истечении которого состояния системы, т. е. значения  $x$  и  $\dot{x}$ , повторяются. Поскольку движение между ограничивающими финитное движение точками остановки  $x_1$  и  $x_2$  требует одинакового времени в прямом и обратном направлении, то период будет равен удвоенному времени движения от одной точки остановки до другой:

$$T(E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (27.3)$$

Период системы является функцией ее энергии; вид этой функциональной зависимости определяется с помощью (27.3) видом потенциальной энергии  $U(x)$ . Может быть поставлена обратная задача выяснения того, какая потенциальная энергия приведет к заданной зависимости периода от энергии  $E$ . Ответ (который можно выразить в квадратурах) гласит, что предписание функции  $T(E)$  однозначно определяет симметричную относительно точки минимума часть функции  $U(x)$ ; антисимметричная часть остается произвольной.

**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАМЕЧАНИЕ:** При реальном вычислении периода по формуле (27.3) часто приходится делать запутанные замены переменных. При этом нет нужды следить, как будут преобразовываться точки остановки — они всегда определяются обращением подкоренного выражения в нуль; поэтому их проще находить из этого условия сразу в окончательных переменных. ■

## 10. Движение в центральном поле

**10.1.** Вернемся теперь к задаче двух тел. В § 8 мы отделили в ней движение центра инерции и установили некоторые асимптотические соотношения. Теперь нам надлежит заняться оставшейся задачей об относительном движении. Она эквивалентна задаче о движении одной частицы с приведенной массой  $\mu$  в центрально-симметричном поле  $U(r)$ , или, как кратко выражаются, *задаче о движении в центральном поле*. Соответствующая функция Лагранжа имеет, согласно § 8, вид

$$L = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - U(r).$$

Поскольку она не зависит явно от времени и обладает сферической симметрией, то должны сохраняться энергия

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) = \text{const}$$

и момент

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] = \text{const}.$$

Помножив последнее равенство скалярно на  $\mathbf{r}$ , получим

$$\mathbf{M}\mathbf{r} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = 0.$$

Но это (при постоянном  $\mathbf{M}$ ) есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Поэтому (1-е следствие из сохранения момента).

Движение в центральном поле происходит в одной плоскости.

Выберем эту плоскость за плоскость  $xy$ ; тогда момент будет направлен по оси  $z$ , т. е. будет

$$|\mathbf{M}| = M_z = M$$

— мы будем в оставшейся части параграфа обозначать буквой  $M$  без дополнительных значков не полную массу, которая нам нигде не встречается, а численное (сохраняющееся) значение момента. Для дальнейшего использования симметрии задачи естественно ввести на плоскости движения полярные координаты. В них

$$M = M_z = x p_y - y p_x = \mu (x \dot{y} - y \dot{x}) = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{const}$$

или

$$\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} = \frac{M}{\mu r^2} \quad ^1), \quad (28.1)$$

а функция Лагранжа и энергия приобретают вид:

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r) \quad (28.2)$$

и

$$E = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r).$$

---

<sup>1)</sup> Поскольку  $\frac{1}{2} r^2 d\phi = \frac{1}{2} \frac{M}{\mu} dt$  есть площадь, «заметаемая» радиус-вектором за время  $dt$ , то закон сохранения (28.1) утверждает, что радиус-вектор описывает за равные времена равные площади. Поэтому его называют **интегралом площадей** или — по имени первооткрывателя — **вторым законом Кеплера**.

Если выразить в последнем из этих равенств  $\dot{\phi}$  через сохраняющийся момент с помощью (28.1), то мы получим для энергии

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (28.3)$$

Таким образом (2-е следствие из сохранения момента).

Задача о движении в центральном поле сводится к задаче об одномерном движении с «эффективной» потенциальной энергией  $V(r)$ :

$$V(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r) \quad ^1). \quad (28.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1: «Эффективной» функцией Лагранжа будет

$$L_{\text{эфф}} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r).$$

Она отнюдь *не получается* подстановкой (28.1) в первоначальную функцию Лагранжа (28.2). Причина этого состоит в том, что для функции Лагранжа существенно ее выражение не только и не столько для *реальных* движений  $q(t)$ , сколько для *виртуальных движений*  $q(t) + \delta q(t)$ , для которых (28.1) не имеет места. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2: «Эффективное одномерное» движение в центральном поле имеет одно отличие от одномерного движения, рассматривавшегося в предыдущем параграфе: по самому смыслу координаты  $r$  она меняется только в пределах  $0 \leq r \leq \infty$ , а не от минус до плюс бесконечности. Это обстоятельство ведет к принципиальным инновациям в классификации возможных типов движения в целом <sup>2)</sup> (см. рисунок). Если потенциальная энергия  $U(r)$  *отрицательна*, что соответствует *силам притяжения*, и притом стремится к бесконечности при  $r \rightarrow 0$  быстрее чем  $\frac{1}{r^2}$  (или как  $\frac{1}{r^2}$ , но с коэффициентом, большим  $\frac{M^2}{2\mu}$ ), то значение координаты  $r$  может дойти до нуля, происходит «**падение на центр**». Такой тип движения называется **лимитационным**.

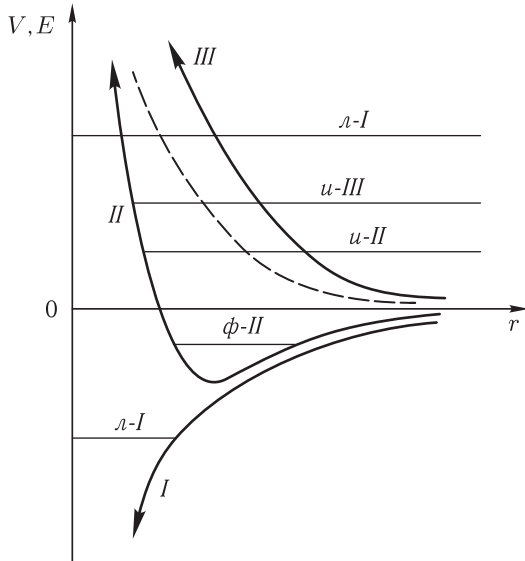
Если рассматриваемые нами материальные точки суть модели, приближенно описывающие частицы конечных размеров, то

<sup>1)</sup> Член  $\frac{M^2}{2\mu r^2}$  здесь называют **центробежной энергией**.

<sup>2)</sup> Переход от задачи на неограниченной прямой к задаче на полупрямой приводит к принципиальным изменениям также и при рассмотрении аналогичных задач в квантовой механике, см. часть 3.



возможность падения на центр означает физически, что частицы могут прийти в соприкосновение. Тогда потенциальную энергию  $U(r)$ , описывавшую взаимодействие *несоприкасающихся*



типы движений в центральном поле

Эффективная потенциальная энергия  $I$  отвечает силам притяжения, растущим быстрее центробежных, — и для положительных и для отрицательных энергий возможны только лимитационные движения  $л-I$ .

Эффективная потенциальная энергия  $II$  описывает силы притяжения, растущие медленнее центробежных, — возможны финитные движения  $ф-II$  для отрицательных и инфинитные  $u-II$  для положительных энергий.

Эффективная потенциальная энергия  $III$  относится к случаю сил отталкивания — возможны только инфинитные движения  $u-III$ .

Принято, что потенциальная энергия  $U(r)$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$  в соответствии с (3)

частиц, надо будет заменить другим выражением, учитывающим, что частицы пришли в непосредственный контакт. С точки зрения механических модельных представлений о частицах как о «твердых шариках» новая потенциальная энергия должна очень быстро расти для  $r$ , меньших суммы «радиусов» частиц; для «абсолютно твердых» шариков — просто обращаться при  $r$ , равном сумме радиусов, в  $+\infty$ . «Падение на центр» тем самым исключается.

Мы уже упоминали, однако, что в современной теории элементарных частиц приходится считать эти частицы *настоящими* материальными точками. В этом случае возникновение лимитационной ситуации оказывается тяжелым ударом, указывающим на физическую несостоятельность или неполноту используемой теории. В третьей части курса мы увидим, что как раз возникновение такого положения в задаче об атоме заставило нас отказаться от классической механики и перейти к квантовому описанию. ■

**10.2.** С учетом сделанных замечаний можно применить развитую для одномерного движения технику и записать дифференциальное уравнение первого порядка:

$$dt = \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V(r))}},$$

определяющее зависимость  $t$  от  $r$ .

Однако рассматриваемая теперь задача богаче одномерной — кроме переменных  $r$  и  $t$  в ней участвует еще и угловая переменная  $\varphi$ , связанная с ними дифференциальным уравнением (28.1). Правая часть этого уравнения существенно положительна, т. е.  $\dot{\varphi}$  монотонно возрастает с ростом времени. Это позволяет толковать  $\varphi$  как некоторое фиктивное «угловое время» и получить с помощью (28.1) из предыдущего уравнения дифференциальное уравнение (опять первого порядка)

$$d\varphi = \frac{M}{\mu} \frac{\frac{dr}{r^2}}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V(r))}},$$

определяющее зависимость «углового времени» от  $r$ . Формально оно совершенно подобно первому дифференциальному уравнению, физически же является уравнением, определяющим траектории движения. (Заметим себе, что в силу отсутствия в последнем уравнении обычного времени, траектории могут быть найдены без отыскания закона движения.) Интегрирование этих двух уравнений дает

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V(r))}}; \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{M}{\mu} \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V(r))}}. \quad (29)$$

**10.3.** Как и в одномерном случае, допустимая область движения — область интегрирования по  $r$  в (29) — находится из условия

$$E - V(r) = E - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r) \geq 0,$$

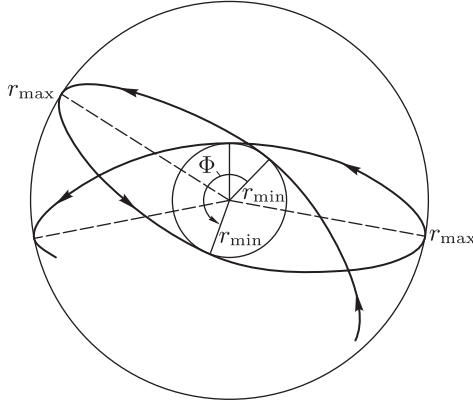
знак равенства в котором определяет точки поворота  $r_0$ . В соответствии с новой классификацией возможных типов движения (см. рисунок в **10.1**)

для **лимитационного** движения может быть только одна точка поворота  $r_0 = r_{\max}$  или же их нет вовсе;

для **инфинитного** движения есть одна точка поворота  $r_0 = r_{\min}$ ;

для **финитного** движения есть *две* точки поворота  $r_0 = r_{\min}$  и  $r_0 = r_{\max}$ , и  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ .

Как и в одномерном случае, оба решения (29) переходят при прохождении точки поворота с одной ветви корня на другую; так как эти ветви отличаются только знаком, то время движения между заданными  $r$  в обоих направлениях одинаково, а траектории симметричны относительно точек поворота.



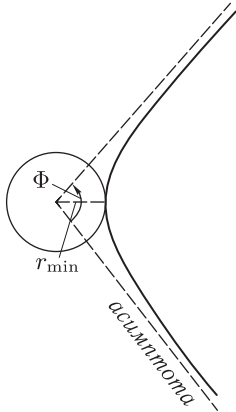
Остановимся подробнее на возможном виде траекторий. В случае финитного движения  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , поэтому траектории могут размещаться только в соответствующем кольце. «Период» по «угловому времени»  $\Phi$  очевидно равен

$$\Phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M}{\mu} \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V(r))}}.$$

Вообще говоря, этот «угловой период»  $\Phi$  не будет рациональным кратным  $2\pi$ ,

$$\Phi \neq \frac{m}{n} 2\pi,$$

и траектория образует незамкнутую кривую, заполняющую все кольцо между  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ . Важные исключения составляют  $U(r)$ , пропорциональные  $\frac{1}{r}$  и  $r^2$ , когда угловой период оказывается кратным  $2\pi$ , и траектории образуют эллипсы.



Для инфинитного (нелимитационного) движения вместо углового периода естественно ввести **полный угол отклонения**

$$\Phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu(E - V(r))}}, \quad (30)$$

полный угол отклонения

испытываемого частицей за все движение, начинающееся при бесконечном  $r$  и заканчивающееся уходом частицы на бесконечность. Этот угол равен углу между асимптотами, проведенными из притягивающего центра к траектории частицы.

## 11. Движение в кулоновом поле

**11.1.** Наибольший интерес, представляет движение в центральном поле сил, убывающих обратно пропорционально квадрату расстояния, — именно так ведут себя силы ньютонова закона всемирного тяготения или силы между двумя электрически заряженными частицами, взаимодействующими по закону Кулона.

Потенциальная энергия в этом случае имеет вид

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

причем  $\alpha > 0$  соответствует силам притяжения, а  $\alpha < 0$  — отталкивания.

Из общей формулы (29.2) (в ней удобно сделать подстановку  $\frac{1}{r} = u$ ) получаем тогда для траекторий:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} = - \int \frac{M du}{\sqrt{2\mu E + 2\mu\alpha u - M^2 u^2}} = \\ &= \int \frac{-d\left(Mu - \frac{\mu\alpha}{M}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{M^2} - \left(Mu - \frac{\mu\alpha}{M}\right)^2}} = \int \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arccos y, \end{aligned}$$

где

$$y = \frac{Mu - \frac{\mu\alpha}{M}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}}}; \quad y = \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Таким образом,

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\dots}}{M} y + \frac{\mu\alpha}{M^2} = \frac{1 + \frac{M}{\mu\alpha} \sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}{\frac{M^2}{\mu\alpha}},$$

то есть

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}{\frac{M^2}{\mu\alpha}} = \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p}. \quad (31.1)$$

Здесь решение нарочно сформулировано таким образом, что оно оказалось совпадающим с известным из аналитической геометрии уравнением для конических сечений в полярных координатах с началом координат в фокусе. Напомним, что длина  $p$  называется **параметром** кривой, а безразмерное число  $e$  — ее **эксцентриситетом** (точнее — численным эксцентриситетом). Итак, траектория движения в кулоновом поле есть плоская кривая второго порядка, один из фокусов которой совпадает с силовым центром, а параметр и эксцентриситет равны, соответственно,

$$p = \frac{M^2}{\mu\alpha}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (31.2,3)$$

**11.2.** Рассмотрим теперь подробнее возникающие здесь отдельные частные случаи. Начнем со случая сил притяжения и финитного движения:

$$(1) \quad \alpha > 0; E < 0, \quad \text{точнее: } -\frac{\mu\alpha^2}{2M^2} \leq E < 0.$$

В этом случае подкоренное выражение в (31.3) меньше 1, т. е.

$$p > 0; \quad 0 \leq e < 1,$$

и (31.1) описывает **эллипс**, большая и малая полуоси которого суть, соответственно,

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

В случае минимально возможной при данном моменте энергии эксцентриситет обращается в нуль, и эллипс вырождается в окружность.

Подставляя значения параметра и эксцентриситета, получаем для большой полуоси

$$a = \frac{M^2}{\mu\alpha} \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}\right)} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad (32.1)$$

т. е. *большая полуось зависит только от энергии*, но не от момента, и обратно — *энергия эллиптического движения в заданном кулоновом поле зависит только от большой полуоси*. Поэтому большая полуось равна радиусу той окружности, в которую вырождается траектория при максимально возможном для заданном энергии моменте.

Мы никак не аргументировали выбор положительного знака перед корнем в (31.1). Легко видеть, однако, что перемена этого знака эквивалентна добавлению  $\pi$  к постоянной интегрирования  $\varphi$ . Сделанный выбор соответствует тому, что при  $\varphi - \varphi_0 = 0$   $\frac{1}{r}$  принимает максимальное, следовательно,  $r$  — минимальное значение. Максимальное значение  $r$  получается при  $\varphi - \varphi_0 = \pi$ . Эти значения

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \quad \text{и} \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e)$$

называют часто, следуя астрономической традиции, **перигелием** и **афелием**.

Найдем период рассматриваемого финитного движения.

Согласно второму закону Кеплера (28.1)

$$dt = \frac{\mu}{M} r^2 d\varphi,$$

и, следовательно, период равен

$$T = \frac{2\mu}{M} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\varphi}{2}.$$

Но в силу сноски к формуле (28.1) стоящий здесь интеграл — это не что иное как площадь эллипса

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\varphi}{2} = S_{\text{элли}} = \pi ab = \pi p^2 \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$T = \frac{2\pi\mu p^2}{M} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} = 2\pi \frac{\mu p^2}{\sqrt{\mu\alpha}} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \left( \frac{p}{1-e^2} \right)^{3/2},$$

то есть

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{3/2}. \quad (32.2)$$

Если, наконец, рассматриваемое кулоново поле создано гравитационными силами, то постоянная  $a$  сама пропорциональна массе обращающейся частицы (если она много меньше массы тела, создающего поле), зависимость от массы в (32.2) пропадает, и мы приходим к утверждению **третьего закона Кеплера**

$$T^2 \sim a^3.$$

**11.3.** Перейдем теперь к *инфинитному* движению под действием сил притяжения, т. е. к случаю

$$(2) \quad \alpha > 0; \quad E > 0.$$

Тогда подкоренное выражение в (31.3) больше 1, и

$$p > 0; \quad e \geq 1$$

— уравнение (31.1) описывает (ближнюю к фокусу) ветвь **гиперболы** с полуосями

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

(Граничный случай  $e = 1$  соответствует движению по **параболе**. Физически он отвечает тому, что скорость частицы на бесконечности равна нулю.) Для большой полуоси получим теперь

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E},$$

т.е. она опять зависит лишь от энергии. Расстояние перигелия получается из (31.1) при положении  $\varphi - \varphi_0 = 0$ :

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e} = (e - 1)a.$$

Новое, сравнительно с эллиптическим случаем, обстоятельство состоит в том, что теперь надо специально позаботиться чтобы правая часть (31.1) не оказалась бы отрицательной, — ведь левая есть существенно положительная величина. Это приводит к условию

$$1 + e \cos \varphi \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad \cos \varphi \geq -\frac{1}{e},$$

или

$$-\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \leq \varphi \leq \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

(мы положили  $\varphi_0 = 0$ , т.е. отсчитываем угол  $\varphi$  от направления на перигелий). При граничных значениях  $\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$  траектория уходит на бесконечность в соответствии с инфинитностью движения — движение происходит по незамкнутой траектории, по которой частица сперва приближается из бесконечности к притягивающему центру вплоть до расстояния  $r_{\min}$ , а затем снова уходит на бесконечность. «Полный угол отклонения»  $\Phi$  составит очевидно

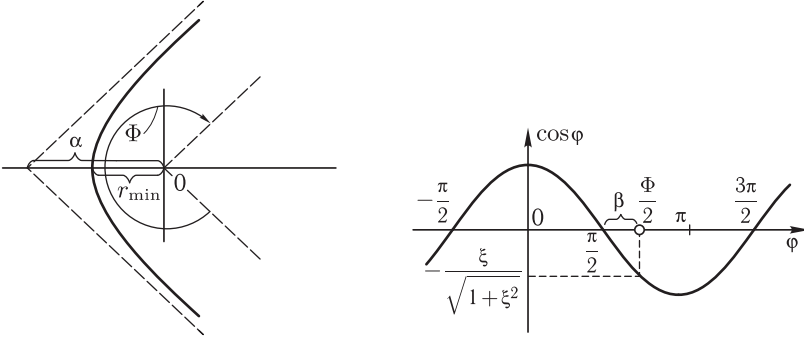
$$\Phi = 2 \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) = 2 \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}}\right).$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $-1 \leq -\frac{1}{e} \leq 0$ , то  $\frac{\pi}{2} \leq \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \leq \pi$ , т.е.  $\pi \leq \Phi \leq 2\pi$  в соответствии с наглядным впечатлением от рисунка.

Если записать аргумент арккосинуса в виде

$$\Phi = 2 \arccos\left(\frac{-\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}\right),$$





то есть

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \frac{-\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \xi = \frac{\alpha}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}},$$

и положить  $\frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2} + \beta$ , то будет

$$\sin \beta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \xi,$$

то есть

$$\beta = \operatorname{arctg} \xi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}.$$

Поэтому получаем удобное выражение для полного угла отклонения

$$\Phi = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}, \quad (32.3)$$

где для арктангенса берется главная ветвь.

**11.4.** Последний случай, который следует рассмотреть, — это случай сил отталкивания, когда возможны только инфинитные движения с положительной энергией:

$$(3) \quad \alpha < 0; \quad E > 0.$$

Подкоренное выражение в (31.3) опять будет больше 1, а параметр, получаемый при формальном использовании (31.2), оказывается отрицательным

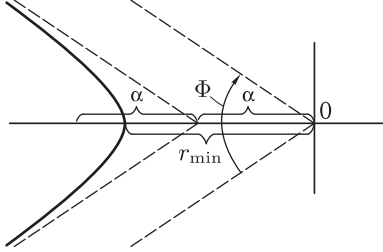
$$p < 0, \quad e \geq 1.$$

В этом случае удобно выбрать перед корнем (31.3) знак минус. Тогда уравнение траектории (31.1) примет форму

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)}{-|p|},$$

совпадающую с уравнением *дальней* от фокуса ветви **гипербо-  
лы**, а точка перигелия будет обладать координатами  $\varphi - \varphi_0 = 0$

(в дальнейшем опять положим  $\varphi_0 = 0$ , т. е. будем отсчитывать угловую координату от направления на перигелий) и



$$r = r_{\min} = \frac{|p|}{e - 1} = (e + 1) a.$$

Как и в случае сил притяжения, здесь возникнет условие положительности правой части (31.1), условие того, «чтобы  $r$  оставалось бы ближе бесконечности». Оно будет теперь требовать

$$1 - e \cos \varphi \leq 0, \quad \text{т. е.} \quad \cos \varphi \geq \frac{1}{e},$$

или

$$-\arccos \frac{+1}{e} \leq \varphi \leq \arccos \frac{+1}{e}.$$

Поэтому «полный угол отклонения» составит

$$\Phi = 2 \arccos \left( \frac{+1}{\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}} \right).$$

Совершенно аналогичными предыдущему случаю тригонометрическими преобразованиями это выражение приводится к форме

$$\Phi = \pi - 2 \arctg \frac{|\alpha|}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} = \pi + 2 \arctg \frac{\alpha}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}}, \quad (32.4)$$

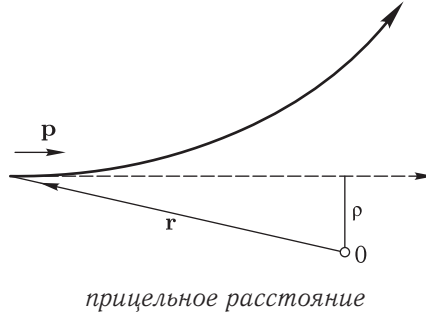
отличающейся от (32.3) лишь знаком  $\alpha$ .

Заметим, наконец, что физически безразлично, отсчитываем ли мы полный угол отклонения по или против часовой стрелки. Это значит, что углы отклонения  $\Phi$  и  $2\pi - \Phi$  физически эквивалентны.

С учетом этого замечания (32.4) дает тот же угол отклонения, что и (32.3). Значит, угол отклонения в кулоновом поле не зависит от знака потенциала, от того, имеет ли место притяжение или отталкивание.

## 12. Эффективное сечение

**12.1.** Когда мы говорили в § 8 о соотношениях, возникающих в задаче о рассеянии частиц, то подчеркивали, что речь в ней идет об *асимптотических* величинах, поскольку лишь такие поддаются непосредственному наблюдению на опыте. В применении к величинам, характеризующим частицы, совершающие инфинитное движение, ясно, что асимптотические характеристики могут включать лишь скорости и направления, но не сами координаты, стремящиеся к бесконечным пределам. Однако по отношению к этому утверждению надо сделать одну весьма существенную оговорку — могут существовать такие комбинации динамических переменных, включающие координаты, которые — если можно так выразиться — «выносятся на асимптотику» законами сохранения.



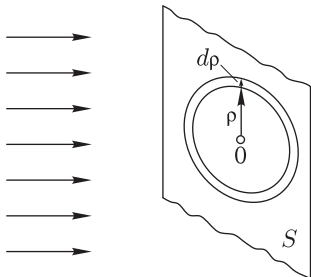
В самом деле, рассмотрим частицу, двигавшуюся на бесконечности равномерно и прямолинейно с импульсом  $\mathbf{p}$ , так что если бы она не испытывала сил со стороны рассеивающего центра  $O$ , то пролетела бы мимо него по штрихованной прямой (см. рисунок) на минимальном расстоянии  $\rho$ . В действительности из-за взаимодействия она двигается вблизи центра по некоторой кривой, изображенной на рисунке сплошной линией. Чему будет равен момент этой частицы? В центральном поле он сохраняется, поэтому его можно вычислять на еще не возмущенной асимптотической части траектории как произведение  $[\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}]_\infty$ . Из рисунка видно, что это произведение даст нам:

$$M = \rho p_\infty = \rho m v_\infty. \quad (33)$$

Итак, в явно асимптотическую величину  $M$  входит некоторое конечное расстояние  $\rho$ , которое называется **прицельным расстоянием**. Как же избавиться от прицельного расстояния — ведь измерить его в опытах с микрочастицами невозможно?

**12.2.** Физики прибегают для этого к чрезвычайно остроумному приему, состоящему в том, что переходят от (не поддающихся измерению) характеристик одного индивидуального ак-

та рассеяния к статистическим характеристикам, описывающим вероятностные свойства целого класса таких индивидуальных процессов. Именно, от рассмотрения задачи с точно заданным прицельным расстоянием переходят к рассмотрению совокуп-



ности задач, в которых прицельные расстояния распределены по некоторому заданному закону. Выгода состоит в том, что один такой закон может быть очень легко осуществлен экспериментально, в каком-то смысле даже осуществляется на опыте сам собой. Дело в том, что с точки зрения экспериментальных возможностей было бы весьма затруднительно направить на рассеивающий центр од-

ну единственную частицу; реально всегда имеют дело с *пучком* частиц, который за счет соответствующих экспериментальных предосторожностей можно сделать в желательной степени *монокроматическим* и *однородным* — т.е. добиться, чтобы все частицы имели — с некоторой степенью точности — скорости, одинаковые как по величине, так и по направлению, и чтобы через любую площадку, поставленную поперек пучка, проходило по одинаковому числу частиц в единицу времени через единицу площади, скажем

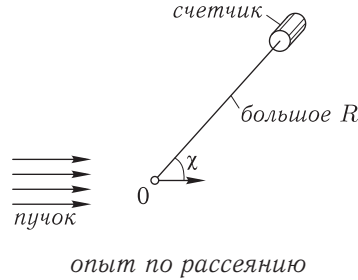
$$n \frac{\text{частиц}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}.$$

Тогда можно утверждать, что среднее в единицу времени число частиц, испытывающих на силовом центре рассеяние с прицельным расстоянием, лежащим в интервале  $(\rho, \rho + d\rho)$ , будет равно среднему числу частиц, которые при отсутствии взаимодействия с центром пролетели бы в единицу времени через построенное в проходящей через центр перпендикулярной пучку плоскости  $S$  кольцо, ограниченное окружностями радиуса  $\rho$  и  $\rho + \Phi$ , т.е. составит

$$2\pi\rho d\rho \cdot n.$$

Все эти частицы обладают, вследствие монокроматичности пучка, одинаковой скоростью  $v_\infty$  и одинаковым (с точностью до  $d\rho$ ) прицельным расстоянием  $\rho$ . Следовательно, все они будут обладать одинаковой энергией и, согласно (33), одинаковым моментом — поэтому, в силу результатов § 10, все они отклонятся на одинаковый угол  $\chi$ .

**12.3.1.** Величина, которую будет тогда рационально определять на опыте, есть отношение числа частиц, рассеянных в определенном направлении, к плотности потока падающих частиц. Первое из этих чисел измеряют с помощью счетчика, обладающего некоторой площадью  $dS$  и расположенного на (большом) расстоянии  $R$  от рассеивающего центра. (Расстояние  $R$  должно быть велико по сравнению с радиусом действия сил — это всегда так для любого макроскопического  $R$  — но кроме того,  $R$  должно быть еще достаточно велико, чтобы в счетчик не попадали частицы прямого пучка — это требует определенных предосторожностей.)



Ясно, что число частиц, рассеиваемых в площадь  $dS$ , будет убывать как  $\frac{1}{R^2}$ , поэтому разумно рассматривать отношение к плотности потока падающих частиц числа частицы  $dN$ , рассеиваемых в единицу времени в элемент *телесного угла*  $d\Omega$ .

**Эффективным (дифференциальным) сечением** называется отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{n}. \quad (34.1)$$

Оно имеет размерность площади.

**12.3.2.** Как мы только что напоминали, при движении в центральном поле угол рассеяния  $\chi$  зависит только от энергии и момента. Энергия всех частиц фиксирована заданием асимптотической скорости  $v_\infty$ , момент же при этом будет зависеть еще от прицельного расстояния  $\rho$ . Таким образом, при фиксированной  $v_\infty$  угол рассеяния  $\chi$  будет функцией только от  $\rho$  или, что то же самое, прицельное расстояние  $\rho$  будет функцией только угла  $\chi$ . Поэтому  $2\pi\rho d\rho \cdot n$  частиц, нацеленных в кольцо  $(\rho, \rho + d\rho)$ , отклонятся на угол  $\chi$  и попадут в интервал углов  $(\chi, \chi + d\chi)$ , где

$$d\chi = \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} d\rho, \quad \text{или} \quad d\rho = \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} d\chi.$$

Итак,

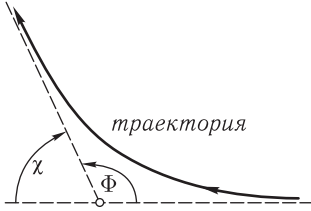
$$dN = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \cdot n,$$

или

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi = \frac{\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right|}{\sin \chi} d\mathcal{O}, \quad (34.2)$$

поскольку  $d\mathcal{O} = d\varphi \sin \chi d\chi = 2\pi \sin \chi d\chi$  (при аксиальной симметрии). Знак модуля введен в (34.2) по той причине, что обычно  $\rho$  падает с ростом  $\chi$  (рассеяние на большой угол требует более тесного приближения частицы к рассеивающему центру). Если  $\rho$  — неоднозначная функция  $\chi$ , то в формуле (34.2) надо сложить все ветви.

**12.3.3.** Вид зависимости  $\rho(\chi)$  прицельного расстояния от угла рассеяния надо, конечно, извлекать из решения динамической задачи о движении частицы в поле рассеивающего центра. Мы получили при ее рассмотрении в § 10 формулу (30) для «полного угла отклонения»  $\Phi$ . При этом угол  $\Phi$  определялся как угол между асимптотами к траектории, понимаемыми как лучи, одинаково направленные *от центра*. Угол же рассеяния  $\chi$  был определен



нами в § 8 как угол между асимптотами, понимаемыми в смысле лучей, направленных *по скоростям*. Поскольку при рассеянии скорость по отношению к центру меняет знак (см. рисунок), то видно, что

$$\chi = \pi - \Phi. \quad (30a)$$

Формулы (34.2), (30a) и (30) решают задачу о нахождении эффективного сечения по заданному закону зависимости потенциальной энергии от расстояния.

**12.3.4.** Перепишем формулу (30) еще раз, выражая энергию и момент через скорость и прицельное расстояние  $E = \frac{\mu v_\infty^2}{2}$ ,  $M = \mu v_\infty \rho$ :

$$\Phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu E - \frac{M^2}{r^2} - 2\mu U(r)}} = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\mu v_\infty \rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu^2 v_\infty^2 \rho^2}{r^2} - 2\mu U}}.$$

Иными словами,

$$\Phi = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v_{\infty}^2}}}. \quad (30')$$

В этой форме наглядно видно, что все определяется двумя безразмерными отношениями

$$\frac{\rho}{r} \quad \text{и} \quad \frac{U(r)}{T_{\infty}},$$

равно как и то обстоятельство, что для  $U = 0$  угол  $\Phi$  обращается в  $\pi$ , т. е. угол  $\chi$  — в нуль.

**12.4. Полное сечение рассеяния  $\sigma$**  определяется как отношение числа частиц  $N$ , как бы то ни было рассеянных в единицу времени, к плотности потока падающих частиц:

$$\sigma = \frac{N}{n}.$$

Очевидно, что

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi, \quad (35.2)$$

где интегрирование распространяется по всем возможным углам рассеяния.

Но согласно (34.2)

$$\int \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \int \frac{d\sigma}{d\rho} d\rho = 2\pi \int \rho d\rho,$$

где теперь интегрирование распространяется на все прицельные расстояния, при которых происходит хоть какое-либо рассеяние. Таким образом, если потенциальная энергия  $U(r)$  хотя и спадает с  $r$  сколь угодно быстро, но *не обращается точно в нуль*, начиная с некоторого  $r_0$ , то **полное эффективное сечение в классической механике расходится**.

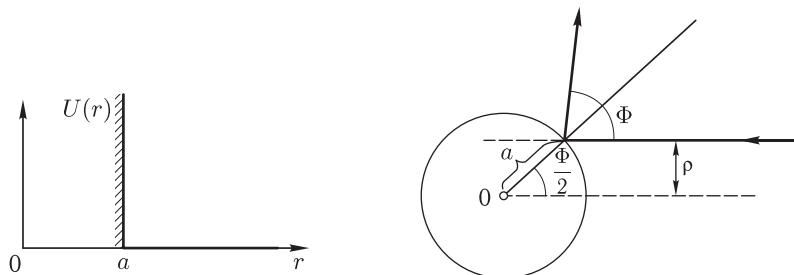
**ЗАМЕЧАНИЕ:** Физически этот результат парадоксален: невероятно, чтобы в науке, основанной на измерениях, сколь угодно малая величина могла бы вести к результатам, принципиально отличным от получаемых для точного нуля. В поисках выхода из этой трудности привлекалось то рассуждение, что для достаточно быстро убывающих потенциалов большие прицельные расстояния будут обуславливать рассеяние на столь малые углы, что рассеянные частицы нельзя будет экспериментально отли-

чить от частиц падающего пучка, и поэтому измеренное на опыте полное сечение окажется конечным. Однако то обстоятельство, что при этом значение физической величины должно было существенно зависеть от достигнутого прогресса в точности эксперимента, выглядело в равной степени неудовлетворительно. Лишь после создания квантовой механики выяснилось, что упомянутое ограничение на возможность различить рассеянные частицы от нерассеянных носит не приборный, а фундаментальный характер — грубо говоря, достаточно мало отклоненные частицы принципиально неотличимы от нерассеянных. Поэтому в квантовой механике мы увидим, что для  $U(r)$ , *не слишком медленно убывающих с ростом  $r$* , вычисление полного сечения рассеяния приводит к конечному результату. ■

**12.5.** Аналогично сечению рассеяния можно ввести и эффективные сечения каких-либо других процессов. При этом, если процесс зависит от непрерывного параметра, то удобно вводить дифференциальные сечения, если же нет — то только полные. Например для потенциалов, допускающих *лимитационные* движения, бывает интересно ввести эффективное сечение падения на центр (**сечение захвата**).

**12.6.** В качестве практически не требующего вычислений

ПРИМЕРА: найдем эффективное сечение для взаимного рассеяния частиц, описываемых моделью непроницаемых абсолютно твердых шаров радиуса  $\frac{a}{2}$ , в остальном не взаимодействующих друг с другом. Представление об непроницаемости означает, что частицы никоим образом нельзя сблизить больше чем до поверхностного соприкосновения, т. е. нельзя сделать расстояние между их центрами меньшим  $a$ . С точки зрения потенциальной энергии  $U(r)$  это означает, что для  $r < a$  она должна обращаться в  $\infty$ . Для  $r > a$  взаимодействия нет, и  $U(r)$  должна



равняться нулю (см. рисунок). Относительные траектории частиц для прицельных расстояний  $\rho \leq a$  имеют (см. рисунок) вид двух лучей с угловой точкой, лежащей на окружности радиуса  $a$ . При этом в силу



симметрии траекторий относительно точки поворота оба луча расположены симметрично относительно нормали к этой окружности. Поэтому (для  $\rho \leq a$ )

$$\rho = a \sin \frac{\Phi}{2} = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \chi,$$

для больших же  $a$  прицельных расстояний траектории суть прямые и угол рассеяния  $\chi = 0$ .

Итак,

$$d\sigma = 2\pi \left| \rho \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi = 2\pi a^2 \frac{1}{2} \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} d\chi = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi,$$

то есть

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} d\theta$$

— рассеяние изотропно,  $\frac{d\sigma}{d\theta}$  не зависит от углов.

В рассматриваемой модели потенциальная энергия  $U(r)$  локализована в ограниченной области; поэтому должно существовать *полное сечение*. Действительно, интегрируя по углам, получаем

$$\sigma = \oint d\sigma = \oint \frac{a^2}{4} d\theta = \pi a^2. \quad \blacksquare$$

**12.7.** Эффективное сечение непосредственно связано с динамикой в системе ЦИ, наблюдения же обычно проводятся в лабораторной системе. Поэтому надо вывести формулы для пересчета сечений из одной системы в другую.

**12.7.1.** Будем исходить из формулы (26.1) § 8:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \vartheta_1} = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}. \quad (26.1)$$

Для пересчета из системы ЦИ в Л-систему надо разрешить это соотношение относительно  $\chi$ . Имеем последовательно

$$m_2 \sin \chi \cos \vartheta_1 - m_2 \cos \chi \sin \vartheta_1 = m_1 \sin \vartheta_1,$$

$$\sin(\chi - \vartheta_1) = \frac{m_1}{m_2} \sin \vartheta_1 = \sin \psi, \quad \psi = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{m_1}{m_2} \sin \vartheta_1 \right),$$

то есть

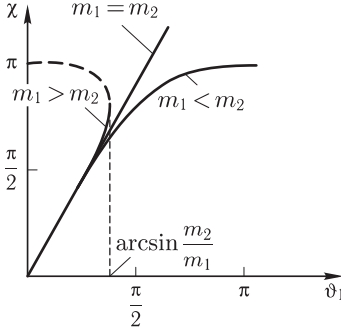
$$\chi = \vartheta_1 + \psi = \vartheta_1 + \arcsin \left( \frac{m_1}{m_2} \sin \vartheta_1 \right), \quad (36.1)$$

или

$$\chi = \vartheta_1 + \psi = \vartheta_1 + \pi - \arcsin \left( \frac{m_1}{m_2} \sin \vartheta_1 \right), \quad (36.1a)$$

если мы не позабудем о многозначности арксинуса и выпишем также и вторую существенную ветвь, считая что знак  $\arcsin$  обозначает все время главную ветвь.

**12.7.2.** Чтобы разобраться в нужных нам ветвях, проще всего вернуться к геометрическим соображениям раздела **8.3.2.1.3**. Если  $m_1 < m_2$ , то связь между  $\chi$  и  $\vartheta_1$  однозначна; следует пользоваться



только главной ветвью арксинуса (36.1) (области значений главной и второй (26.1a) ветвей арксинуса в этом случае не пересекаются). Если же  $m_1 > m_2$ , то зависимость  $\chi$  от  $\vartheta_1$  двузначна; она выражается обеими ветвями арксинуса, при  $\vartheta_1 = \arcsin \frac{m_2}{m_1}$

главная ветвь (36.1) переходит во вторую ветвь (36.1a); большие  $\vartheta_1$  физически невозможны. В граничном случае  $m_1 = m_2$  мы также находимся все время на главной ветви; зависимость  $\chi$  от  $\vartheta_1$  линейна.

Поэтому в выражении для косинуса  $\chi$

$$\cos \chi = \cos \vartheta_1 \cos \psi - \sin \vartheta_1 \sin \psi =$$

$$= -\frac{m_1}{m_2} \sin^2 \vartheta_1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_1} \cdot \cos \vartheta_1 \quad (36.2)$$

надлежит брать перед корнем знак  $+$  для главной ветви и знак  $-$  для ветви (36.1a).

**12.7.3.** Формулы (36.1, 1a, 2) объясняют, как пересчитывать  $\frac{d\sigma}{d\mathcal{O}}$ . Пересчет элемента телесного угла

$$d\mathcal{O}_\chi = 2\pi \sin \chi d\chi = -2\pi d(\cos \chi)$$

можно выполнить въявь. Дифференцируя (36.2), получаем

$$\begin{aligned} -d(\cos \chi) &= 2\frac{m_1}{m_2} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1 \pm \\ &\pm \frac{\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \vartheta_1\right) \sin \vartheta_1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \cdot \cos \vartheta_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_1}} d\vartheta_1, \end{aligned}$$

то есть

$$d\mathcal{O}_\chi = \left[ 2\frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta_1 \pm \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \vartheta_1}} \right] d\mathcal{O}_{\vartheta_1}.$$

В соответствии со сказанным о выборе ветвей, для  $m_1 < m_2$  здесь следует выбирать знак +:

$$m_1 < m_2: \quad d\mathcal{O}_\chi = \left[ 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \vartheta_1}} \right] d\mathcal{O}_{\vartheta_1}. \quad (36.3.1)$$

Для  $m_1 > m_2$ , когда дают вклад обе ветви, мы наблюдаем в  $\mathcal{L}$ -системе под некоторым углом  $\vartheta_1 < \arcsin \frac{m_2}{m_1}$  частицы, рассеянные в ЦИ-системе как под углом (36.1), так и под углом (36.1a); поэтому для получения сечения в  $\mathcal{L}$ -системе надо сложить *оба* ЦИ-сечения

$$\frac{d\sigma}{d\mathcal{O}_{\vartheta_1}} d\mathcal{O}_{\vartheta_1} = \left\{ \left. \frac{d\sigma}{d\chi} \right|_{(36.1)} \cdot \left| \frac{d\mathcal{O}_\chi}{d\mathcal{O}_{\vartheta_1}} \right| + \left. \frac{d\sigma}{d\chi} \right|_{(36.1a)} \cdot \left| \frac{d\mathcal{O}_\chi}{d\mathcal{O}_{\vartheta_1}} \right| \right\} d\mathcal{O}_{\vartheta_1}.$$

При этом (ср. рисунок) для основной ветви

$$\left| \frac{d\mathcal{O}_\chi}{d\mathcal{O}_{\vartheta_1}} \right| = 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \vartheta_1}}; \quad m_1 > m_2, \quad (36.3.2)$$

а для ветви (36.1a)

$$\left| \frac{d\mathcal{O}_\chi}{d\mathcal{O}_{\vartheta_1}} \right| = -2 \frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\vartheta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \vartheta_1}}; \quad m_1 > m_2, \quad (36.3.3)$$

поскольку для нее производная  $\frac{d\chi}{d\mathcal{O}}$  отрицательна. Наконец, в случае *равных* масс преобразование телесного угла резко упрощается

$$m_1 = m_2: \quad d\mathcal{O}_\chi = 4 \cos \vartheta_1 d\mathcal{O}_{\vartheta_1}. \quad (36.3.4)$$

### 13. Формула Резерфорда

**13.1.** Важнейшим случаем вычисления эффективного сечения в классической механике является тот, когда взаимодействие частиц происходит по закону Кулона. Особое внимание к этому случаю определяется совмещением трех обстоятельств. Во-первых, само кулоново взаимодействие занимает среди вза-

имодельствий микрочастиц очень видное место. Во-вторых, это один из немногих случаев, когда потребные для получения эффективного сечения квадратуры вычисляются в элементарных функциях. В-третьих, случай кулонова взаимодействия преподносит нам очень приятный сюрприз — оказывается, что в этом случае вычисленные в классической механике сечения сохраняют свой вид и при переходе к квантовомеханическому описанию (если только рассеиваемая и рассеивающая частицы не тождественны). Наконец будет вполне уместным упомянуть, что именно в этой задаче, в работе Резерфорда 1911 года, возник тот подход к проблеме рассеяния, который излагался в предыдущем разделе.

**13.2.** Все нужные для получения эффективного сечения в кулоновом поле вычисления у нас фактически уже проведены. Подставляя в формулу (30а) для угла рассеяния вычисленные нами в параграфе 11 выражения (32.3,4) для полного угла отклонения, видим, что

$$\chi = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}},$$

то есть

$$\frac{\alpha}{M} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} = -\operatorname{tg} \frac{\chi}{2}.$$

Переходя здесь от энергии и момента к асимптотической скорости и прицельному расстоянию, получаем отсюда

$$\frac{\alpha}{\mu v_{\infty} \rho} \sqrt{\frac{\mu \cdot 2}{2\mu v_{\infty}^2}} = \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2 \rho} = -\operatorname{tg} \frac{\chi}{2},$$

или — прямо в удобном для вычисления эффективного сечения виде —

$$\rho^2 = \left( \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}.$$

Остается только выполнить дифференцирование по  $\chi$ :

$$d\sigma = -\pi \frac{d\rho^2}{d\chi} = \pi \left( \frac{\alpha}{\mu v_{\infty}^2} \right)^2 2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} \frac{1}{2} d\chi, \quad (37)$$

и мы приходим к **формуле Резерфорда**:

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{2\mu v_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\mathcal{O}_{\chi}}{\sin^4 \frac{\chi}{2}},$$

полученной им в уже упоминавшейся работе 1911 года.

**13.3.** Формула (37) дает нам эффективное сечение рассеяния на кулоновом потенциале в системе центра инерции, или, что-то же самое, сечение рассеяния частицы на *неподвижном* рассеивающем центре. Последний случай осуществляется физически, если масса рассеивающего центра много больше массы рассеивающейся частицы — например, для рассеяния электронов на атомных ядрах.

Если массы рассеиваемой и рассеивающей частиц соизмеримы, то для сравнения с опытом надо еще пересчитывать формулу Резерфорда в Л-систему. Чтобы избежать громоздких выкладок, посмотрим, как производится этот пересчет в простом — но самом по себе важном — случае одинаковых масс

$$m_1 = m_2 = m.$$

Тогда  $\mu = \frac{m}{2}$  и, согласно (26а), углы рассеяния первой и второй частиц  $\vartheta_1 = \frac{\chi}{2}$ ,  $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}_\chi &= 2\pi \sin \chi d\chi = 2\pi \cdot 4 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1 = \\ &= 4 \cos \vartheta_1 d\mathcal{O}_{\vartheta_1} = 4 \cos \vartheta_2 |d\mathcal{O}_{\vartheta_2}|. \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем для сечения рассеяния падающих частиц в Л-системе

$$d\sigma_1 = \left( \frac{\alpha}{E_{\text{лаб}}} \right)^2 \frac{\cos \vartheta_1}{\sin^4 \vartheta_1} d\mathcal{O}_{\vartheta_1}; \quad E_{\text{лаб}} = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad (37\text{Л.1})$$

а для сечения рассеяния первоначально покоившихся частиц

$$d\sigma_2 = \left( \frac{\alpha}{E_{\text{лаб}}} \right)^2 \frac{\cos \vartheta_2}{\cos^4 \vartheta_2} d\mathcal{O}_{\vartheta_2}. \quad (37\text{Л.2})$$

Если, наконец, падающие и первоначально покоившиеся частицы не только обладают одинаковой массой, но и тождественны по всем своим свойствам, то на опыте невозможно отличить, какую из частиц мы наблюдаем. Тогда имеет смысл лишь эффективное сечение рассеяния какой-либо частицы под некоторым направлением, выражение для которого получится сложением обеих формул (37Л):

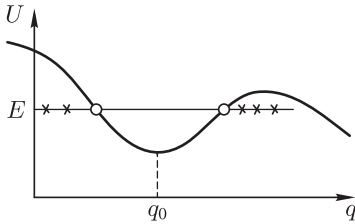
**Тождественные частицы:**

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{E_{\text{лаб}}} \right)^2 \left( \frac{1}{\sin^4 \vartheta} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta} \right) \cos \vartheta d\mathcal{O}_\vartheta. \quad (37\text{Л.3})$$

Именно эта формула не сохраняется в неизменном виде при переходе к квантовой механике, в ней появляется дополнительный член, связанный с принципиальными отличиями статистики совокупностей одинаковых квантовых объектов от статистики классических совокупностей.

## 14. Малые колебания

Вернемся к рассмотрению системы с одной степенью свободы. В § 9 мы установили, что для *финитного* движения такая система совершает колебания между двумя точками поворота. Особенно простым оказывается изучение такого движения в случае, когда амплитуда колебаний очень (в пределе — бесконечно) мала. Остановимся на нем несколько подробнее.



**14.1.** Колебания с малой амплитудой могут происходить вблизи минимума потенциальной энергии  $U(q)$ , пусть этот минимум имеет место в точке  $q = q_0$ . Тогда

$$\text{при } q = q_0: \quad \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$$

— второе условие есть условие устойчивости равновесия в точке  $q = q_0$ . Разложим оба члена функции Лагранжа

$$L = \frac{a(q) \dot{q}^2}{2} - U(q)$$

системы с одной степенью свободы в ряды вблизи точки  $q$  и обозначим разность  $q - q_0 = x$ . Мы получим тогда

$$L = \frac{(a(q_0) + \text{стар. члены.})}{2} \dot{x}^2 - U(q_0) - \\ - x \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_0} - \frac{x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_0} + \text{стар. чл.}$$

Нулевой член разложения потенциальной энергии  $U(q_0)$  есть константа, которую из функции Лагранжа можно выбросить, первый член  $-\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0}$  равен нулю в точке минимума. Поэтому

разложение  $U(q)$  эффективно начнется с квадратичного члена; более старшие члены мы отбросим. В разложении кинетической энергии первым существенным членом будет нулевой, поскольку он умножается на  $\dot{q}^2 = \dot{x}^2$ ; мы опять ограничимся им одним. Тогда, если ввести обозначения

$$m = a(q_0) > 0; \quad k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0,$$

функция Лагранжа примет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (38)$$

Систему, описываемую такой функцией Лагранжа, в физике называют обычно **(гармоническим) осциллятором**. Уравнением движения будет

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (39)$$

называется **(собственной) частотой** осциллятора. Мы видим, что гармонический осциллятор описывается *линейным* уравнением.

Это обстоятельство является чрезвычайно важным. Дело в том, что линейные дифференциальные уравнения — это практически единственный класс дифференциальных уравнений, для рассмотрения которых — рассмотрения в смысле *нахождения решений*, а не в смысле доказательства теорем существования — математика выработала общие и единые методы. Это побуждает физиков при рассмотрении очень многих задач стараться использовать такие приближения, которые сводили бы уравнения проблемы к линейным — линеаризовали бы задачу. Если это удается, то исходная проблема сводится к рассмотрению набора гармонических осцилляторов.

В самом деле, чтобы уравнения движения системы были линейными, ее функция Лагранжа должна быть квадратичной функцией координат и скоростей в совокупности. Поэтому кинетическая энергия, всегда являющаяся квадратичной функцией скоростей, должна быть квадратичной функцией скоростей (по общим свойствам — положительно определенной) с коэффициентами, не зависящими от координат. Потенциальная же энергия всегда может быть, освобождена от линейных по координатам членов их (координат) линейным преобразованием, а постоянный член в ней несуществен. Поэтому она также должна быть

квадратичной формой — теперь координат — и притом положительно определенной, если мы интересуемся финитными движениями. Итак, общий вид функции Лагранжа для системы, описываемой линейными уравнениями, есть

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j, \quad (38a)$$

где обе квадратичные формы  $T$  и  $U$  — положительно определены. Линейным однородным преобразованием координат можно, как то показывается в линейной алгебре, привести обе эти формы одновременно к главным осям, после чего в новых **нормальных координатах**  $Q_i$  функция Лагранжа примет вид суммы

$$L = \sum_i \frac{1}{2} (\dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2) \quad (38b)$$

функций Лагранжа (38) для каждой степени свободы, т.е. движение сведется к движению независимых гармонических осцилляторов в числе, равном числу степеней свободы.

Изложенные соображения побуждают нас заняться гармоническим осциллятором гораздо подробнее, чем казалось бы заслуживает эта достаточно тривиальная задача, и разработать на ее простом примере методы, истинная плодотворность которых выяснится в применении к наборам большого (особенно — бесконечно большого) числа подобных систем.

Вторая причина внимания к гармоническому осциллятору опять связана с тем, что уравнения движения для него решаются въявь, — он оказывается хорошим модельным примером, на котором можно «пощупать руками», как конкретно проявляются те или иные общие соображения, детальный механизм действия которых в более сложных случаях проследить затруднительно.

**14.2.** Общая теория предписывает искать решение уравнения движения (39) в экспоненциальном виде, именно, поскольку корнями характеристического уравнения будут  $\pm i\omega$ , в виде

$$x = ae^{-i\omega t} + be^{i\omega t},$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные интегрирования. Выполняя здесь комплексное сопряжение:

$$x^* = a^* e^{i\omega t} + b^* e^{-i\omega t},$$

видим, что для того, чтобы решение было вещественным, надо потребовать

$$b = a^*.$$



Кроме того, бывает удобно выделить из произвольных постоянных множитель  $\sqrt{2\omega}$  и записать, таким образом, общее решение (39) в виде

$$x(t) = \frac{e^{i\omega t} a^* + e^{-i\omega t} a}{\sqrt{2\omega}}. \quad (40.1)$$

Характеризующую решение (комплексную) произвольную постоянную  $a$  называют **(комплексной) амплитудой**. Ее модуль дает нам обычную вещественную амплитуду, а аргумент — фазу колебаний.

**14.3.** Выразим энергию через амплитуду. Заметим для этого сперва, что соответствующая решению (40.1) *скорость*

$$\dot{x} = \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} (e^{i\omega t} a^* - e^{-i\omega t} a)$$

представляется через *разность* тех же комплексных экспонент, сумма которых образует решение (40.1). Поэтому при подстановке в

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

квадратов скорости и координаты

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \frac{-\omega^2}{2\omega} (e^{2i\omega t} a^* a^* - 2a^* a + e^{-2i\omega t} a a), \\ \omega^2 x^2 &= \frac{\omega^2}{2\omega} (e^{2i\omega t} a^* a^* + 2a^* a + e^{-2i\omega t} a a) \end{aligned}$$

обе группы членов, зависящих (с удвоенной частотой) от времени, взаимно уничтожаются, и остается только не зависящая от времени часть:

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = 2\omega a^* a.$$

Итак, энергия

$$E = m\omega a^* a \quad (40.2)$$

- (а) не зависит от времени;
- (б) есть билинейная форма амплитуд  $a^*$  и  $a$ .

**14.4.1.** Бывает удобно ввести вместо  $x$  и  $\dot{x}$  новые, более тесно связанные с амплитудами переменные  $A^*(t)$  и  $A(t)$ , положив:

$$x(t) = \frac{A^*(t) + A(t)}{\sqrt{2\omega}}, \quad \dot{x}(t) = \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} (A^*(t) - A(t)). \quad (40.1a)$$

Обратное преобразование будет иметь вид

$$A^*(t) = \frac{\dot{x}(t) + i\omega x(t)}{i\sqrt{2\omega}} = \frac{\omega x - i\dot{x}}{\sqrt{2\omega}},$$

$$A(t) = \frac{\dot{x}(t) - i\omega x(t)}{-i\sqrt{2\omega}} = \frac{\omega x + i\dot{x}}{\sqrt{2\omega}}.$$

Выписав преобразование переменных (40.1a), мы предписали независимые выражения через новые переменные и координате  $x$ , и скорости  $\dot{x}$ . Поэтому надо еще ограничить его тем условием, что скорость есть действительно производная от координаты по времени,  $\frac{d}{dt}x = \dot{x}$ . Это условие дает нам  $A^* + A = i\omega(A^* - A)$ , т. е. должно тождественно выполняться:

$$(A^* - i\omega A^*) + (\dot{A} + i\omega A) = 0. \quad (41.3)$$

**14.4.2.** Найдем теперь уравнения движения для новых переменных. Дифференцируя второе равенство (40.1a) по времени» находим, что

$$\ddot{x} = \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} (\dot{A}^* - \dot{A}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} (\dot{A}^* - \dot{A}) + \frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega}} (A^* + A) = \\ &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}} (\dot{A}^* - i\omega A^*) + \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}} (\dot{A} + i\omega A) \end{aligned}$$

и уравнение движения (39) утверждает, что сумма этих двух членов должна равняться нулю. Но благодаря тождеству (41.3) эти члены равны друг другу, поэтому нулю должен равняться каждый из них.

Итак, уравнениями движения в новых переменных будут

$$i\sqrt{2\omega} (\dot{A}^* - i\omega A^*) = 0 \quad (41.1)$$

или

$$-i\sqrt{2\omega} (\dot{A} + i\omega A) = 0. \quad (41.2)$$

Только одно из этих уравнений независимо, поскольку другое получается из него комплексным сопряжением.

Теперь видно, в чем состоял смысл проведенного преобразования переменных (40.1a) — с его помощью мы перешли от уравнения *второго* порядка (39) к уравнению *первого* порядка, правда — комплексному.

**14.4.3.** Решением этого уравнения будет, конечно,

$$A^*(t) = e^{i\omega t} a^* \quad \text{или} \quad A(t) = e^{-i\omega t} a,$$

где  $a^*$  и  $a$  — взаимно комплексно-сопряженные постоянные, совпадающие с введенными выше амплитудами. Действительно, подставляя это решение в (40.1a), получим в точности старое решение (40.1) уравнения (39).

**14.4.4.** Заметим еще, что

$$A^* A = \frac{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}{2\omega},$$

т. е. энергия выражается через переменные  $A^*(t)$  к  $A(t)$  в точности так же

$$E = m\omega A^*(t) A(t), \quad (40.2a)$$

как и через не зависящие от времени амплитуды  $a^*$ ,  $a$ .

**14.5.** Конечно, для свободного осциллятора польза от преобразования (40.1a) невелика — мы и без того проинтегрировали (39) без каких-либо затруднений. Однако предложенная замена переменных оказывается очень удобной, если на осциллятор действует *произвольная внешняя сила*  $F(t)$ , т. е. уравнение движения (39) заменяется на

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t).$$

Тут уже иметь дело с уравнением *первого* порядка гораздо удобнее, чем второго.

**14.5.1.** Действительно, соответствующее уравнение первого порядка

$$\dot{A}^*(t) - i\omega A^*(t) = \frac{F(t)}{im\sqrt{2\omega}} \quad \left( \text{или} \quad \dot{A}(t) + i\omega A(t) = \frac{F(t)}{-im\sqrt{2\omega}} \right) \quad (42)$$

можно интегрировать методом вариации произвольной постоянной, полагая

$$A^*(t) = a^*(t) e^{i\omega t}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: В старых переменных эта подстановка имела бы вид

$$x = \frac{e^{i\omega t} a^*(t) + e^{-i\omega t} a(t)}{\sqrt{2\omega}},$$

т. е. означала бы, что мы ищем решение в форме (40.1), но с *амплитудами, зависящими от времени*. Таким образом подстановка (\*) приводит к отделению тривиальной экспоненциальной зависимости от времени, характерной для свободного осциллятора, от дополнительной зависимости, обусловленной внешней силой. В переменных  $A^*$ ,  $A$  эта процедура совершенно естественна; в первоначальных переменных  $x$ ,  $\dot{x}$  об ней было бы не так легко догадаться. ■

Подстановка (\*) приводит для  $a^*(t)$  к уравнению

$$\frac{da^*(t)}{dt} = \frac{1}{im\sqrt{2\omega}} F(t) e^{-i\omega t},$$

которое интегрируется непосредственно, приводя к

$$a^*(t) = \int \frac{F(t) dt}{im\sqrt{2\omega} e} e^{-i\omega t} = \int_0^t \frac{F(t') dt'}{im\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t'} + a^*,$$

где мы обозначили новую постоянную интегрирования опять через  $a^*$  без аргумента. Таким образом, общее решение уравнения (42) для  $A^*(t)$  имеет вид

$$A^*(t) = \int_0^t \frac{dt' e^{i\omega(t-t')}}{im\sqrt{2\omega}} F(t') + e^{i\omega t} a^*, \quad (42.a)$$

где первое слагаемое есть частное решение неоднородного уравнения, а второе — общее решение однородного.

**14.5.2.** Для самой же координаты  $x(t)$  получится

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{\omega m} \int_0^t dt' \sin \omega(t-t') F(t'), \quad (43)$$

где  $x_0(t)$  есть общее решение (40.1) однородного уравнения, а второе, интегральное слагаемое — частное решение неоднородного уравнения. Легко видеть, что это частное решение обладает тем специальным свойством, что обращается в нуль вместе со своей первой производной при  $t = 0$ . Для самого решения это очевидно из выбранных пределов интеграла, а для производной следует еще и из того, что под интегралом стоит синус, также обращающийся для малых аргументов в нуль. Поэтому решение (43) — это такое решение неоднородного уравнения, которое при  $t = 0$  совпадает, вместе со своей первой производной, с решением  $x_0(t)$ , т. е. есть решение задачи Коши с начальными условиями:

$$\text{при } t = 0: \quad x(t) = x_0(t) \quad \text{и} \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t). \quad (43a)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Следует обратить внимание на не совсем обычную формулировку начального условия (43a): мы не просто задаем численные значения функции  $x(t)$  и ее производной в начальный момент времени  $t = 0$ , а требуем в этот момент времени совпадения  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  с другой функцией — решением свободного уравнения  $x_0(t)$  — и ее производной. При таком подходе

можно определить для всякого решения неоднородного уравнения целое однопараметрическое семейство «касательных» к нему решений однородного уравнения — решений, совпадающих с ним (вместе с первой производной) в различные моменты времени  $t_0$ . Либо напротив — для всякого решения  $x_0(t)$  свободного уравнения можно определить однопараметрическое семейство решений неоднородного уравнения, совпадающее с  $x_0(t)$  (вместе с первой производной) в различные моменты времени  $t_0$ . Такой способ установления соответствия между решениями однородного и неоднородного уравнений (или — в более общем случае — между решениями невозмущенной и возмущенной задачи) оказывается полезным во многих физических проблемах. ■

**14.5.3.** Рассмотрим теперь такой случай, когда для  $t < 0$  осциллятор находится в покое,  $x(t) = \dot{x}(t) = 0$  для  $t < 0$ , а начиная с момента  $t = 0$  на него начинает действовать внешняя сила  $F(t)$ , и зададимся вопросом о том, какую энергию приобретет осциллятор за счет действия этой силы к некоторому моменту времени  $t$ .

Рассматриваемым начальным условиям соответствует, очевидно, выбор  $a^*$  в (43а) равным нулю; поэтому в (40.2а) нужно подставлять только интегральный член из (43а), члены с  $t$  в показателях уничтожаются, и в результате мы получаем

$$E(t) = m\omega A^*(t) A(t) = \frac{1}{2m} \left| \int_0^t dt' e^{-i\omega t'} F(t') \right|^2. \quad (44.1)$$

В частности, если мы хотим найти энергию, накапливаемую осциллятором *за все время* действия внешней силы, то верхний предел интеграла в (44.1) следует устремить к  $+\infty$ ; нижний же предел интегрирования можно опустить до  $-\infty$ , поскольку для  $t < 0$  сила  $F(t)$  все равно равна нулю. Итак, энергия, получаемая первоначально покоившимся осциллятором за все время действия внешней силы  $F(t)$ , есть

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} F(t) \right|^2 = \frac{1}{2m} |\tilde{F}^*(\omega)|^2, \quad (44.2)$$

т. е. пропорциональна квадрату модуля компоненты Фурье внешней силы с основной частотой осциллятора.

**14.6.** Теперь наступило самое время приостановить выкладки и задаться вопросом о том, что мы, собственно говоря, вычисляли в обеих формулах (44)? На первый взгляд в этом вычислении

мы провели довольно странную операцию — найдя из (43а) значение переменной  $A^*(t)$  для удовлетворяющего выбранным начальным условиям решения *неоднородного уравнения* (42), мы подставили это значение в выражение (40.2а) для энергии, выведенное для решений *однородных уравнений* (41). Или, выражаясь физически, решение для *осциллятора с внешней силой* подставили в выражение для энергии *свободного осциллятора*.

Чтобы разобраться в возникшей ситуации, полезно вернуться к вопросу о том, что же собственно имеют в виду, когда говорят об энергии осциллятора, на который действует внешняя сила, или, более общим образом, об энергии системы, находящейся во внешнем поле.

**14.6.1.** Согласно § 4 функцию Лагранжа для системы, находящейся во внешнем поле, можно записать в виде

$$L = L_0 - U_{\text{ext}},$$

где  $L_0$  — та часть функции Лагранжа, которая зависит только от координат и скоростей,  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  интересующей нас незамкнутой системы I (ср. 4.6):

$$L_0 = L_0(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - U_{\text{ext}}(q_i),$$

а  $U_{\text{ext}}$  — та часть потенциальной энергии, которая зависит как от координат  $q_i$ , так и от координат  $q_{\text{II}}$  большой системы, которые можно считать явными заданными функциями времени:

$$U_{\text{ext}} = U_{\text{I,II}}(q_i, q_{\text{II}}(t)) = U_{\text{ext}}(q_i, t).$$

Уравнениями движения будут

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} = - \frac{\partial U_{\text{ext}}(q_i, t)}{\partial q_i} = F_i^{\text{ext}}(q_i, t), \quad (*)$$

где перенесенные в правую часть производные  $\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial q_i}$  играют роль *внешних сил*, действующих на  $i$ -ю степень свободы.

Наряду с системой во внешнем поле можно рассматривать соответствующую ей замкнутую, будем говорить *свободную* систему, функция Лагранжа которой есть просто  $L_0$ . Уравнениями движения свободной системы будут уравнения (\*) с правыми частями, равными нулю. Если образовать для свободной системы комбинацию

$$E_0 = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - L_0,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum \dot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - L_0 \right) &= \sum \left\{ \ddot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial q_i} - \ddot{q}_i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} \right\} = \\ &= \sum_i \dot{q}_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L_0}{\partial q_i} \right\}. \end{aligned}$$

т. е. в силу свободных уравнений движения

$$\frac{dE_0}{dt} = 0.$$

— энергия  $E_0$  свободной системы сохраняется.

**14.6.1.1.** Для системы во внешнем поле полная производная энергии  $E_0$  по времени будет в силу той же выкладки равна

$$\frac{dE_0}{dt} = - \sum \dot{q}_i \frac{\partial U_{\text{ext}}(q_i, t)}{\partial q_i}. \quad (**)$$

Мы можем записать здесь правую часть как

$$- \frac{d}{dt} U_{\text{ext}}(q_i, t) + \frac{\partial U_{\text{ext}}(q_i, t)}{\partial t}$$

и, перенося полную производную  $\frac{dU}{dt}$  налево, привести (\*\*) к форме

$$\frac{d}{dt} (E_0 + U_{\text{ext}}(q_i, t)) = \frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial t}.$$

**Если** теперь энергия взаимодействия с внешним полем  $U_{\text{ext}}$  не зависит от времени явно,  $\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial t} = 0$ , то стоящая в левой части последнего равенства комбинация  $E_0 + U_{\text{ext}}$  будет сохраняться. Поэтому разумно ввести для нее специальное обозначение, назвав

$$E_0 + U_{\text{ext}}(q) = E$$

*энергией системы во внешнем поле.* Именно с такой энергией мы имели дело например в задаче о движении частицы во внешнем центральном поле.

**14.6.1.2.** Если, однако,  $\frac{\partial U_{\text{ext}}}{\partial t} \neq 0$ , то энергия системы во внешнем поле  $E$  все равно не будет сохраняться, и ее введение не несет с собой никакой выгоды. Единственная энергия, о которой имеет смысл говорить в этом случае, это энергия  $E_0$ . Она, конечно, не сохраняется, но в силу (\*\*) и (\*) ее изменение во времени можно представить в форме

$$\frac{dE_0}{dt} = \sum_i \dot{q}_i F_i^{\text{ext}}(q_i, t), \quad (***)$$

т. е. как сумму **работ**  $F_i^{\text{ext}} dq_i$ , производимых всеми внешними силами за единичное время. Именно так понимаемая энергия и выражается формулами (44).

**14.6.2.** Физическое значение энергии  $E_0$  можно пояснить следующим рассуждением. Предположим, что в некоторый момент времени  $t = \tilde{t}$  мы сразу *выключаем* действовавшее на систему внешнее поле. Тогда система превращается в свободную систему, дальнейшая эволюция которой определяется значениями координат и скоростей  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ , которые имела система в поле в момент  $t = \tilde{t}$  — для возникшей свободной системы эти значения будут начальными условиями. В терминах замечания после формулы (43а) это будет свободная система, «касательная» к системе в поле в момент  $t = \tilde{t}$ . Для этой свободной системы энергия  $E_0$  будет точно сохраняться, численно же она будет равна энергии  $E_0$ , вычисленной для системы в поле в момент  $\tilde{t}$ .

Итак, под энергией в некоторый момент времени  $\tilde{t}$  системы, находящейся в зависящем от времени внешнем поле, разумно понимать энергию соответствующей свободной системы, касательной к системе в поле в момент  $t = \tilde{t}$ .

После этого несколько затянувшегося отступления вернемся снова к формуле (44.2) и сделаем относительно нее еще одно замечание.

Согласно (44.2) энергия, переданная внешней силой гармоническому осциллятору, пропорциональна квадрату модуля компоненты Фурье внешней силы с собственной частотой осциллятора  $\omega$ . Спрашивается, а как же будет обстоять дело, если на осциллятор действует *периодическая* внешняя сила с некоторой частотой  $\omega' \neq \omega$  — ведь в ее фурье-разложении будет присутствовать только ее частота  $\omega'$ , а в то же время известно, что под действием такой силы осциллятор приходит в состояние колебаний с той же частотой  $\omega'$ ?

Объяснение состоит в том, что мы должны каким-то образом *включить* внешнюю силу; за счет включения она уже не будет строго периодической, в ее фурье-разложении появятся все частоты, в том числе и собственная частота осциллятора  $\omega$ .

## 15. Функции Грина

Мы проинтегрировали уравнения движения осциллятора, находящегося под действием произвольной внешней силы, с помощью несколько искусственного приема сведения к (комплексному) уравнению первого порядка. В этом разделе для той же



самой задачи будет развита другая, пожалуй — более естественная, техника, основанная на построении и использовании **функций Грина**. Такая техника чрезвычайно широко применяется и в теории поля, и в квантовой механике, поэтому будет уместным не пожалеть места, чтобы разработать ее на этом простом примере во всех подробностях.

**15.1.** Итак, пусть нам задано уравнение движения для осциллятора, находящегося под действием внешней силы:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (45)$$

(массу ради простоты кладем равной единице).

Будем искать решение этого уравнения в форме интеграла Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega) \quad (46.1)$$

и таким же образом представим внешнюю силу <sup>1)</sup>

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{F}(\omega). \quad (46.2)$$

Обратное преобразование будет иметь вид

$$\tilde{F}(\omega) = \int dt' e^{i\omega t'} F(t'). \quad (46.3)$$

Уравнение движения (45), переписанное для фурье-образов  $\tilde{x}(\omega)$  и  $\tilde{F}(\omega)$ , станет алгебраическим:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{F}(\omega) + \underbrace{\text{const} (\omega_0^2 - \omega^2) \delta(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (45a)$$

Разрешая его относительно  $\tilde{x}(\omega)$ , получим

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \underbrace{C \delta(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (45b)$$

**15.1.1.** При переходе от (45a) к (45b) мы поделили обе части уравнения на множитель  $(\omega_0^2 - \omega^2)$ , который может обращаться в нуль. Чтобы не потерять возникающий из-за этого дополнительный произвол, мы прибегли здесь к часто употребляемому формальному приему. Именно, мы добавили к правой части (45a)

<sup>1)</sup> Ниже будет много интегрирований в бесконечных пределах, поэтому ради краткости мы не будем эти пределы выписывать, подразумевая именно такое интегрирование, коль скоро не оговорено что-либо иное. В физических статьях такое сокращение обычно и, как правило, не оговаривается.

(члены, подчеркнутые угловой скобкой) произведение  $\delta$ -функций от «подозрительного» множителя  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  на сам этот множитель и на произвольную константу. Произведение  $\delta$ -функции на ее аргумент есть нуль, поэтому дополнительный член в (45a) тождественно равен нулю и его всегда можно добавить. В (45b), однако, множителя  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  у дополнительного члена уже нет, и поэтому член этот дает конечную добавку к фурье-образу  $\tilde{x}(\omega)$ . Что это за добавка? Из-за  $\delta$ -функции она даст в решение  $x(t)$  только вклады с частотами  $\pm\omega_0$  — но это как раз частоты *свободного* решения соответствующего уравнения без правой части. Таким образом, дополнительный член в (45b) дает нам *решение свободного уравнения* (и притом *общее* решение: поскольку аргумент  $\delta$ -функции в (45a) имеет *два* корня, произвольные константы для каждого из этих корней можно выбрать независимо; тем самым вклад дополнительного члена зависит от *двух* произвольных констант, как то и должно быть для общего решения уравнения второго порядка). Главный же, пропорциональный  $\tilde{F}(\omega)$  член в (45b) дает *частное решение неоднородного* уравнения (45); таким образом *все* выражение (45b) приводит к *общему* решению (45).

**15.2.** Займемся *частным* решением неоднородного уравнения. Подстановка (45b) и (46.1) с использованием (46.3) дает для  $x(t)$  ответ

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \int dt' e^{i\omega t'} F(t'),$$

что можно, поменяв порядок интегрирования, записать в виде

$$x(t) = \int dt' G(t, t') F(t'), \quad (47.1)$$

если ввести функцию от двух аргументов:

$$G(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (47.2)$$

— **функцию Грина** уравнения (45).

**15.2.1.** Функция Грина, как легко убедиться, удовлетворяет уравнению

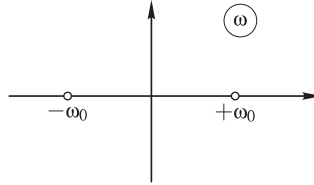
$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(t, t') = \delta(t - t'),$$

т.е. уравнению (45) с  $\delta$ -образной внешней силой. Таким образом, с наглядной точки зрения представление решения в форме (47) можно понять как представление решения уравнения (45) с про-

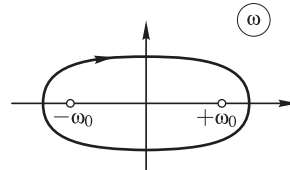
извольной правой частью в виде суперпозиции решений того же уравнения с внешними силами в виде кратких импульсов, действующих в различные моменты времени.

Формулами (47) заканчивается формальная теория интегрирования уравнения (45) с помощью функции Грина. Однако настоящая наука о функциях Грина — вся еще впереди.

**15.2.2.** Дело в том, что подинтегральное выражение в (47.2) имеет полюса в точках  $\omega = \pm\omega_0$ . Поэтому безоговорочное вычисление интеграла в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т.е. вдоль вещественной оси в комплексной плоскости  $\omega$ , бессмысленно — интеграл в обычном смысле не существует. Чтобы придать ему смысл, надо сперва исключить из области интегрирования особенности, а затем избавиться от этого исключения с помощью какого-либо предельного перехода. В качестве такой операции удобно применять деформацию контура интегрирования, выводящего его в комплексную плоскость, с последующим предельным возвратом на вещественную ось. Тем самым возникает вопрос, как именно деформировать контур интегрирования, т.е. как обходить полюса?



полюса в плоскости  $\omega$



контур  $C$

**15.2.3.** Чтобы выяснить это, посмотрим, что произойдет, если *изменить* обход полюса, т.е. *обойти вокруг* него. Посмотрим, например, что даст интегрирование по контуру (см. рисунок), обходящему оба полюса в отрицательном смысле, — это отвечает разности интегралов, вычисленных по контурам, проходящим из  $-\infty$  в  $+\infty$  *над* и *под* вещественной осью. Для изображенного на рисунке контура с помощью теоремы о вычетах имеем:

$$\frac{-1}{2\pi} \oint_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} = \frac{-2\pi i}{2\pi} \left[ \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{2\omega_0} + \frac{e^{i\omega_0\tau}}{-2\omega_0} \right],$$

то есть

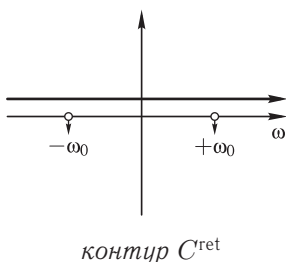
$$\frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0\tau, \quad \tau = t - t'.$$

Но получившаяся функция  $\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 (t - t')$  есть *решение однородного уравнения*. Следовательно,

изменение правила обхода сводится к добавлению к решению уравнения (47) решения однородного уравнения.

**15.2.4.** Это значит, что *принципиально* выбор обхода безразличен — ведь мы сейчас ищем *частное* решение неоднородного уравнения, и для получения общего все равно будем добавлять к нему общее решение однородного. *Практически*, однако, выбор конкретного обхода может составить заметное преимущество — удачным выбором обхода можно вообще избавиться от необходимости добавлять общее решение однородного уравнения или придать добавляемому общему решению более прозрачный физический смысл. Поэтому остановимся сейчас на детальном рассмотрении нескольких возможностей в выборе контура интегрирования, которые оказываются физически интересными.

**15.3. Запаздывающая функция Грина** получается, если провести путь интегрирования *над* вещественной осью, т.е.



обойти оба полюса *сверху*. В показателе экспоненты в подынтегральном выражении стоит  $-i\omega$ , поэтому при  $\tau > 0$  можно замкнуть контур снизу, добавив к нему (равный нулю!) интеграл по нижней половине большого круга — оба полюса окажутся при этом внутри контура, и получится тот же результат, что для контура  $C$ . Если же  $\tau < 0$ , то замыкать контур надо *сверху*, оба полюса оказываются вне контура и интеграл — равным нулю. Итак,

для контура  $C^{\text{ret}}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C^{\text{ret}}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau & \text{для } \tau > 0, \\ 0 & \text{для } \tau < 0. \end{cases}$$

Полученная при таком выборе контура функция Грина называется **запаздывающей** и обозначается обычно буквой  $D$  с индексом  $\text{ret}$  (или просто  $\text{r}$ ) — первыми буквами слова *retarded*. Чтобы компактно записать ее, удобно воспользоваться ступенчатой функцией, которую в физике обычно обозначают символом  $\vartheta$ :

$$\vartheta(\tau) = \begin{cases} +1 & \text{для } \tau > 0, \\ 0 & \text{для } \tau < 0; \end{cases}$$

с ее помощью

$$D^{\text{ret}}(\tau) = \vartheta(\tau) \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau. \quad (48r)$$

**15.3.1.** Физический смысл запаздывающей функции Грина становится ясным, если заметить, что в выраженном с ее помощью частном решении

$$x^{\text{ret}}(t) = \int dt' D^{\text{ret}}(t - t') F(t')$$

в силу обращения  $D^{\text{ret}}$  в нуль для отрицательных аргументов интегрирование выполняется только по  $-\infty < t' < t$ , т.е. функция эта выражает запаздывающее влияние на решение в некоторый момент времени внешней силы, действовавшей в *предыдущие* времена. Ею естественно пользоваться, если начальные условия задаются в бесконечном прошлом.

**15.3.2.** Вместо того, чтобы смещать (вверх) контур интегрирования, можно оставить его проходящим по вещественной оси, но *сместить* (бесконечно мало) *особенности* в противоположную сторону (вниз). Такое смещение достигается добавлением к координатам обоих полюсов  $\pm \omega_0$  бесконечно малой мнимой добавки  $-i\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , которая должна быть устремлена к нулю *после* выполнения интегрирования по  $\omega$ . Тогда дробь  $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$  переходит в

$$\begin{aligned} \frac{-1}{[\omega - (\omega_0 - i\epsilon)][\omega - (-\omega_0 - i\epsilon)]} &= \frac{-1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon(\omega + \omega_0) + i\epsilon(\omega - \omega_0)} = \\ &= \frac{-1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon\omega}. \end{aligned}$$

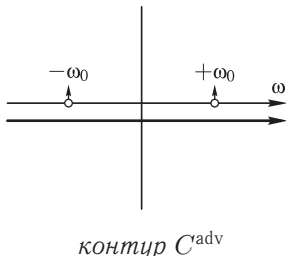
Таким образом, для фурье-образа запаздывающей функции Грина можно написать символическое выражение, *включающее* указание о способе обхода особенностей:

$$\tilde{D}^{\text{ret}}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\epsilon\omega}, \quad (49r)$$

в котором необходимость выполнить предельный переход  $\epsilon \rightarrow 0$  после интегрирования по  $\omega$  держится в уме.

**15.4. Опережающая функция Грина** получается, если провести путь интегрирования *под* вещественной осью. Тогда при замыкании контура снизу для  $\tau > 0$  внутри него не окажется особенностей и интеграл будет равен нулю, а при замыкании сверху для  $\tau < 0$  обе особенности окажутся внутри контура,

который, однако, будет теперь обходиться в *положительном* смысле, так что результат будет отличаться от найденного для контура  $C^{\text{ret}}$  знаком. Итак,



$$D^{\text{adv}}(\tau) = -\vartheta(-\tau) \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau. \quad (48a)$$

Для обозначения опережающей функции используется индекс *adv* (или просто *a*) — первые буквы слова *advanced*. Она отлична от нуля только для *отрицательных* аргументов, т. е. приводит к частному решению, зависящему, в некоторый момент времени, от действия внешней силы в *последующие* моменты. Поэтому опережающая функция Грина находит себе применение в таких задачах, в которых предписывается «конечное» условие при  $t = +\infty$ .

**15.4.2.** Если заменить, как то делалось для запаздывающей функции, смещение контура интегрирования смещением полюсов, то оба полюса должны быть смещены *вверх*, и мы получим для фурье-образа опережающей функции символическое выражение

$$\tilde{D}^{\text{adv}}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega}, \quad (49a)$$

которое следует понимать в том же смысле, что и (49г).

**15.5. D-функция Паули.** Найденное выше специальное решение свободного уравнения, получавшееся при интегрировании по контуру  $C$ , также имеет особое название — его называют **D-функцией Паули** по имени одного из крупнейших теоретиков первой половины нашего века, который ввел это решение в задачах релятивистской теории полей, и обозначают

$$D(\tau) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau. \quad (48)$$

**15.5.1.** Сравнивая (48г) и (48a), легко заметить, что

$$D(\tau) = D^{\text{ret}}(\tau) - D^{\text{adv}}(\tau). \quad (50)$$

**15.5.2.** В силу линейности фурье-преобразования такое же соотношение должно существовать и между соответствующими

Фурье-образами, Поэтому, пользуясь символическими выражениями (49г) и (49а), можно написать для фурье-образа  $\tilde{D}(\omega)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{D}(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\epsilon\omega} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\epsilon\omega} = \frac{2i\epsilon\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \epsilon^2\omega^2} = \\ &= 2i \frac{\omega}{|\omega|} \frac{\epsilon'}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \epsilon'^2} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_0^2 \neq \omega^2, \\ \infty, & \text{если } \omega_0^2 = \omega^2. \end{cases}\end{aligned}$$

Обнаруженные свойства  $\tilde{D}(\omega)$  заставляют заподозрить, что оно содержит  $\delta$ -функцию от  $(\omega^2 - \omega_0^2)$ . Чтобы проверить такое предположение, проинтегрируем его по всем  $(\omega^2 - \omega_0^2)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega^2 - \omega_0^2) \epsilon'}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \epsilon'^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \text{arctg } y|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

Поскольку для  $\delta$ -функции такой интеграл должен равняться 1, то наше предположение подтверждается; попутно мы нашли полезное символическое выражение для  $\delta$ -функции

$$\delta(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\xi^2 + \epsilon^2},$$

которое следует понимать в том же смысле стремления  $\epsilon$  к нулю *после интегрирования*, как и все формулы (49). Итак, если ввести еще знаковую функцию, которую в физике обозначают символом  $\epsilon$  (не путать с бесконечно малым  $\epsilon$ , фигурирующим в наших символических формулах! Перенасыщенность обозначений освящена традицией),

$$\epsilon(\omega) = \frac{\omega}{|\omega|},$$

то мы получим для фурье-образа  $D$ -функции:

$$\tilde{D}(\omega) = 2\pi i \epsilon(\omega) \cdot \delta(\omega^2 - \omega_0^2). \quad (49)$$

**15.6.** Для обычной постановки задачи Коши, когда начальные значения задаются в некоторый *не бесконечный* момент времени  $t = t_0$ , удобной функцией Грина будет

$$\begin{aligned}G(t, t' | t_0) &= [\vartheta(t - t') - \vartheta(t_0 - t')] \frac{\sin \omega_0(t - t')}{\omega_0} = \\ &= [\vartheta(t - t') - \vartheta(t_0 - t')] D(t - t'). \quad (480)\end{aligned}$$

Легко видеть, что  $G(t, t' | t_0)$  обращается при  $t = t_0$  в нуль вместе со своей производной. Для функции это видно сразу, а для производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(t, t' | t_0) = & -[\vartheta(t - t') - \vartheta(t_0 - t')] \cos \omega_0(t - t') + \\ & + \delta(t - t') \frac{\sin \omega_0(t - t')}{\omega_0} \end{aligned}$$

получается за счет того, что

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau).$$

**15.6.1.** Поэтому решение, записанное в виде

$$x(t) = x_{t_0}(t) + \int G(t, t' | t_0) F(t') dt', \quad (43')$$

где  $x_{t_0}(t)$  — решение однородного уравнения, будет обладать тем свойством, что

$$\text{при } t = t_0: \quad x(t) = x_{t_0}(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_{t_0}(t), \quad (43a')$$

т. е. будет решением, *касательным* к свободному решению  $x_{t_0}(t)$  в момент времени  $t_0$  в смысле замечания после формул (43) предыдущего параграфа. Легко видеть и то, что решение (43') буквально совпадает с найденным там решением (43) — для этого достаточно перенести заключенные в  $\vartheta$ -функции в (48<sub>0</sub>) неравенства в пределы интегрирования.

**15.6.2.** Чтобы перейти отсюда к решению собственно задачи Коши с начальными значениями

$$x(t) = f_1 \quad \text{и} \quad \dot{x}(t) = f_2 \quad \text{в момент} \quad t = t_0, \quad (*)$$

надо еще выразить решение  $x_{t_0}(t)$  однородного уравнения в произвольный момент времени через значения его и его производной в момент  $t_0$

$$x_{t_0}(t)|_{t=t_0} = f_1 \quad \text{и} \quad \dot{x}_{t_0}(t)|_{t=t_0} = f_2.$$

**15.6.2.1.** Заметим для этого, что рассматривавшееся выше специальное решение свободного уравнения  $D(t - t_0)$  обладает свойствами:

$$\text{при } t = t_0: \quad D(t - t_0) = 0; \quad \dot{D}(t - t_0) = 1; \quad \ddot{D}(t - t_0) = 0. \quad (51)$$



**15.6.2.2.** Поэтому, если построить выражение

$$x_{t_0}(t) = \dot{D}(t - t_0)f_1 + D(t - t_0)f_2,$$

то оно

- (а) будет решением однородного уравнения;
- (б) при  $t = t_0$

$$x_{t_0}(t) = f_1; \quad \dot{x}_{t_0}(t) = f_2.$$

**15.6.3.** Итак, решением задачи Коши с начальными значениями (\*) является

$$x(t) = \dot{D}(t - t_0)f_1 + D(t - t_0)f_2 + \int G(t, t' | t_0) F(t') dt'. \quad (43'')$$

Кроме уже рассмотренных, бывает полезно ввести еще некоторые специальные функции Грина.

**15.7. Симметричная функция Грина**  $\bar{D}$  определяется тем, что полюса в (47.2) обходятся в смысле главного значения. Очевидным образом она равняется полусумме опережающей и запаздывающей функций:

$$\bar{D}(\tau) = \frac{1}{2} [D^{\text{ret}}(\tau) + D^{\text{adv}}(\tau)] = \frac{\varepsilon(\tau)}{2} D(\tau) = \frac{\sin \omega_0 |\tau|}{2\omega_0}, \quad (\bar{48})$$

и то же самое справедливо для ее фурье-образа:

$$\tilde{\bar{D}}(\omega) = \frac{1}{2} [\tilde{D}^{\text{ret}}(\omega) + \tilde{D}^{\text{adv}}(\omega)] = P \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (\bar{49})$$

Комбинируя (50) и  $(\bar{48})$ , получим, что

$$D^{\text{ret}}(\tau) = \bar{D}(\tau) + \frac{1}{2} D(\tau) \quad \text{или} \quad \tilde{D}^{\text{ret}}(\omega) = \tilde{D}(\omega) + \frac{1}{2} \tilde{D}(\omega). \quad (50a)$$

В развернутом виде второе из этих равенств гласит:

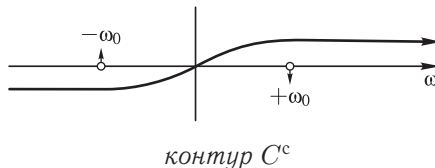
$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\varepsilon\omega} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\varepsilon(\omega) \cdot \varepsilon'} = P \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} + i\pi\varepsilon(\omega) \delta(\omega_0^2 - \omega^2).$$

Отсюда получается полезное *символическое тождество*:

$$\lim_{\substack{\varepsilon' > 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \frac{1}{y' - y - ia\varepsilon'} = P \frac{1}{y' - y} + i\pi a \delta(y' - y)$$

(предельный переход подразумевается, конечно, быть выполненным после интегрирования по  $y'$  или  $y$ ), которое находит себе богатые приложения при вычислениях с обобщенными функциями.

**15.8.** В задачах о рассеянии в квантовой механике часто бывает полезно вводить **причинную функцию Грина**  $D^c$ , определяемую



обходом по контуру  $C^c$  (см. рисунок), который можно, по развитому выше образцу, заменить смещением полюсов в точки

$$-(\omega_0 - i\epsilon) \quad \text{и} \quad +(\omega_0 - i\epsilon).$$

Мы получаем тогда для фурье-образа

$$\tilde{D}^c(\omega) = \frac{-1}{[\omega - (\omega_0 - i\epsilon)][\omega + (\omega_0 - i\epsilon)]} = \frac{-1}{\omega^2 - (\omega_0 - i\epsilon)^2},$$

то есть

$$\tilde{D}^c(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\epsilon}. \quad (49c)$$

Вычисление интегралов (его приходится теперь делать заново) дает

$$\text{для } \tau > 0: \quad D^c(\tau) = -\frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \frac{e^{-i\omega_0\tau}}{2\omega_0} = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0\tau},$$

$$\text{для } \tau < 0: \quad D^c(\tau) = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i\omega_0\tau}}{-2\omega_0} = \frac{i}{2\omega_0} e^{i\omega_0\tau}.$$

Таким образом:

$$D^c(\tau) = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0\tau} \vartheta(\tau) + \frac{i}{2\omega_0} e^{i\omega_0\tau} \vartheta(-\tau) = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|\tau|}. \quad (48c)$$

В отличие от других, введенных ранее, причинная функция Грина — комплексна. Поэтому основное применение она находит себе в квантовой механике. Ее вещественная часть

$$\text{Re } D^c(\tau) = \frac{\sin \omega_0 |\tau|}{2\omega_0} = \bar{D}(\tau)$$

равняется симметричной функции Грина.

**15.9. ЗАМЕЧАНИЕ:** Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что функции Грина получаются из решений однородного уравнения домножением на *разрывные* функции  $\vartheta(\tau)$  (или  $\epsilon(\tau)$ ). Покажем, что именно за этот счет они и становятся функциями Грина. ■

Рассуждение проведем на примере функции  $D^{\text{ret}}(\tau)$ . По определению

$$D^{\text{ret}}(\tau) = \vartheta(\tau) D(\tau), \quad \text{где} \quad \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) D(\tau) = 0.$$

Поддействуем дифференциальным оператором  $\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right)$  на  $D^{\text{ret}}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) \vartheta(\tau) D(\tau) &= \frac{d^2 \vartheta(\tau)}{d\tau^2} D(\tau) + 2 \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \dot{D}(\tau) + \\ &+ \vartheta(\tau) \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) D(\tau) = \dot{\delta}(\tau) D(\tau) + 2\delta(\tau) \dot{D}(\tau) \end{aligned}$$

— поскольку производная  $\vartheta$ -функции равна  $\delta$ -функции, а третий член обращается в нуль. Смысл производных, сидящих на  $\delta$ -функции, состоит в том, что их надо снимать интегрированием по частям. Следовательно,

$$\dot{\delta}(\tau) D(\tau) = -\delta(\tau) \dot{D}(\tau) - \delta(\tau) D(\tau) \frac{d}{d\tau} \text{ }^1),$$

где свободный оператор  $\frac{d}{d\tau}$  будет действовать на другие функции от  $\tau$ , на которые нам возможно будет благоугодно умножить это тождество. Впрочем, в нашем конкретном случае  $\delta(\tau) D(\tau) = 0$ , так что член со свободным оператором исчезает.

Итак,

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) \vartheta(\tau) D(\tau) = \delta(\tau) \dot{D}(\tau) = \delta(\tau)$$

в силу (51), т.е.  $\vartheta(\tau) D(\tau)$  действительно образует функцию Грина.

## 16. Уравнения Гамильтона

В составлявшем до сих пор наш основной метод лагранжевом формализме система с  $n$  степенями свободы описывалась  $n$  уравнениями второго порядка. Иногда бывает удобнее перейти от них

---

<sup>1)</sup> Более аккуратно это рассуждение проводится следующим образом. Умножая  $\delta D$  на какую-либо основную функцию  $\varphi(\tau)$  и интегрируя по  $\tau$ , находим

$$\begin{aligned} \int d\tau \dot{\delta}(\tau) D(\tau) \varphi(\tau) &= - \int d\tau \delta(\tau) \frac{d}{d\tau} [D(\tau) \varphi(\tau)] = \\ &= - \int d\tau \delta(\tau) \dot{D}(\tau) \varphi(\tau) - \int d\tau \delta(\tau) D(\tau) \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}, \end{aligned}$$

откуда и следует выписанное в тексте символическое равенство.

к  $2n$  уравнениям первого порядка. Такие уравнения оказываются более красивыми и симметричными, если в качестве основных переменных выбрать не координаты и скорости, а координаты и импульсы

$$p_i = p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (12.1)$$

**16.1.** Преобразование переменных, описываемое формулой (12.1), когда новые переменные  $p_1, \dots, p_n$  суть частные производные по старым переменным  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$  от некоторой одной функции, называется **преобразованием Лежандра**, а эта функция называется **производящей функцией** по отношению к *преобразуемым* переменным. Итак, импульсы получаются из скоростей преобразованием Лежандра, причем производящей функцией является функция Лагранжа системы. Координаты  $q_1, \dots, q_n$  и время  $t$  играют в этом преобразовании роль параметров.

Если детерминант  $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$ , что мы будем предполагать (в противном случае возникают существенные осложнения), то такое преобразование обратимо.

Тогда

(1) Обратное преобразование тоже будет обладать производящей функцией.

В самом деле, в силу (12.1)  $\sum_i p_i d\dot{q}_i = (dL(q, \dot{q}, t))_{q_i, t}$  — полному дифференциалу функции Лагранжа при постоянных «параметрах»  $q_i, t$ . Если предположить теперь, что соответствующее выражение для обратного преобразования также образует полный дифференциал некоторой новой функции  $H(q, p, t)$ , — т. е. что

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (12.1a)$$

$$\sum_i \dot{q}_i(q, p, t) dp_i = (dH(q, p, t))_{q_i, t},$$

— то, складывая два последних равенства

$$(dL)_{q, t} + (dH)_{q, t} = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right),$$

увидим, что это действительно так, поскольку разность двух полных дифференциалов есть полный дифференциал.

Выпишем теперь выражения для полных дифференциалов  $L$  и  $H$  без предположения о *постоянстве* «параметров»  $q_i, t$

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ dH &= \sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

(производные по  $q_i$  и  $t$  берутся у  $L$  при постоянных  $\dot{q}_i$ , а у  $H$  — при постоянных  $p_i$ !) и сложим эти два выражения

$$d(L + H) = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) dq_i + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt.$$

Отсюда видно, что

$$L + H - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

есть некоторая функция *только координат и времени*. Положим эту функцию равной нулю.

Тогда производящая функция для обратного преобразования от импульсов к скоростям будет равна

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p, q, t) - L(q, \dot{q}(p, q, t), t). \quad (52)$$

Она называется **функцией Гамильтона**. Далее:

(2) Частные производные функций Лагранжа и Гамильтона по играющим в преобразовании Лежандра роль параметров координатам и времени будут связаны соотношениями

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_{\dot{q}_i, t} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)_{p_i, t}; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q, \dot{q}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{q, p}. \quad (52a)$$

(Такова же и связь частных производных функций Лагранжа и Гамильтона по каким-либо иным параметрам, не являющимся динамическими переменными.) Утверждения (1) и (2) носят имя теорем Донкина.

**16.2.** Обратное преобразование (12.1a), соотношения (52a) и воспоминание о том, что в силу уравнения Лагранжа  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$ , позволяют выписать полный дифференциал функции Гамильтона в виде

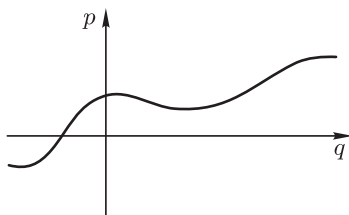
$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (52b)$$

Эта форма уже содержит в себе систему основных уравнений механики, записанных как уравнения первого порядка в переменных  $q$  и  $p$ , — **уравнения Гамильтона**:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (53)$$

В силу красоты и симметрии этих уравнений их называют также **каноническими** уравнениями механики, а переменные — координаты и импульсы — в терминах которых выписываются эти уравнения, — **каноническими переменными**. Для дальнейшего имеет особое значение то обстоятельство, что именно такой выбор уравнений и переменных оказывается наиболее удобным при переходе от классического описания к квантовому.

**16.3.** В лагранжевом формализме состояние механической системы (в некоторый момент времени) фиксировалось (2.5, 2.4.2) заданием значений всех обобщенных координат и всех обобщенных скоростей. При использовании для описания системы канонических уравнений естественно фиксировать состояние заданием (в некоторый момент времени) значений всех координат и импульсов. Поэтому, если построить (для системы с  $n$  степенями свободы)  $2n$ -мерное пространство, координатами которого служат обобщенные координаты и импульсы системы, то каждая точка в нем будет отвечать определенному состоянию системы. Такое пространство называют обычно **фазовым пространством**, а его точки, изображающие состояния системы в некоторый момент времени, — **изображающими точками**.



фазовая траектория

Совокупность точек, изображающих состояния системы в различные моменты времени, образует в фазовом пространстве некоторую кривую. Ее называют **фазовой траекторией** системы.

Поскольку, по самому смыслу понятия состояние, задание состояния системы в некоторый момент  $t = t_0$  предопределяет ее состояние во все другие моменты времени, то задание изображающей точки в некоторый момент  $t = t_0$  предопределяет всю фазовую траекторию (в отличие от задания положения системы в конфигурационном пространстве, оставляющего широкий простор для возможных конфигурационных траекторий). Таким образом, через каждую точку фазового пространства проходит только одна фазовая траектория.

**16.3.1.** Даже самая общая — топологическая — картина расположения фазовых траекторий в фазовом пространстве позволяет сделать ряд заключений о характере возможных движений системы. Чтобы составить себе такую картину, удобно исследовать (53) с помощью качественной теории дифференциальных уравнений. Особенно успешно оказывается такое исследование в простейшем случае одной степени свободы.

**16.3.1.1.** Если система, как в **9.2**, описывается функцией Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x); \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

то особыми точками уравнений (53) будут те, в которых одновременно

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Первое условие выполняется при  $p = 0$ ; второе означает, что потенциальная энергия в особой точке должна иметь экстремум.

Если этот экстремум есть минимум, то в окрестности экстремальной изображающей точки  $(0, x_0)$  функции Лагранжа и Гамильтона будут иметь вид, изучавшийся в § 14:

$$H(p, x) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k(x - x_0)^2}{2}.$$

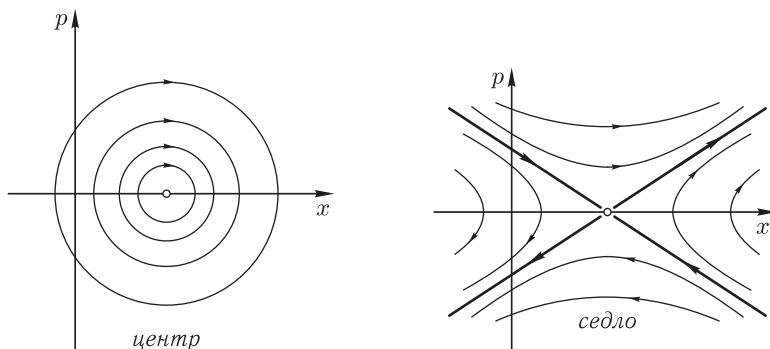
Поскольку энергия сохраняется, то фазовыми траекториями будут линии постоянной энергии — эллипсы с центром в особой точке  $(0, x_0)$ . В частности, сама особая точка будет образовывать фазовую траекторию. В теории дифференциальных уравнений такую особую точку называют **центром**. Если экстремум есть минимум, но такой, в котором разложение  $U$  по  $(x - x_0)$  начинается не со второй, а с более высокой (четной) степени, то конкретный вид фазовых траекторий изменится, однако качественная картина однопараметрической совокупности замкнутых кривых, окружающих особенность, сохранится.

Если экстремум есть максимум, то в окрестности экстремальной изображающей точки  $(0, x_0)$  функция Гамильтона запишется как

$$H(p, x) = E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k(x - x_0)^2}{2} + E_0$$

и фазовыми траекториями будут гиперболы с центром в особой точке  $(0, x_0)$ .

Изображающая точка движется по фазовым траекториям в направлениях, указанных стрелками; они определяются из того соображения, что для  $p > 0$  координата  $x$  должна расти с ростом времени. Видим, что траектории разбиваются на четыре класса: когда  $x$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; от  $+\infty$  до  $-\infty$  (этим классам



движений отвечает  $E - E_0 > 0$ ); когда  $x$  меняется от  $-\infty$  до некоторого конечного значения, а затем снова убывает до  $-\infty$ ; когда  $x$  меняется от  $+\infty$  до некоторого конечного значения, а затем снова возрастает до  $+\infty$  (этим классам отвечает  $E - E_0 < 0$ )<sup>1)</sup>.

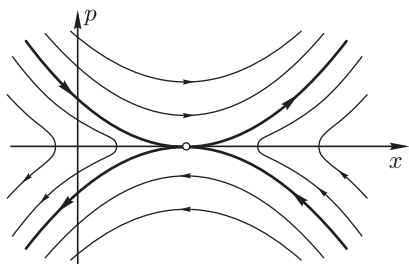
Траектории разных классов разделяются на фазовой плоскости парой пересекающихся прямых, называемых **сепаратрисами**; находящаяся в некоторый момент времени на сепаратрисе изображающая точка движется вдоль по ней. Поэтому в том, что сепаратрисы пересекаются, можно было бы заподозрить противоречие со сделанным выше утверждением, что через каждую точку проходит лишь одна фазовая траектория. В действительности, однако, противоречие отсутствует благодаря тому, что для достижения особой точки по сепаратрисе потребно бесконечное время (ср. пример в § 9), и сепаратрисы, рассматриваемые как фазовые траектории, состоят из пяти объектов — четырех лучей и одной изолированной точки  $(0, x_0)$  — каждый из которых сам по себе есть отдельная целая фазовая траектория. Такая особая точка называется **седлом**.

Если экстремум есть такой максимум, в котором разложение потенциальной энергии по  $(x - x_0)$  начинается с более высокой

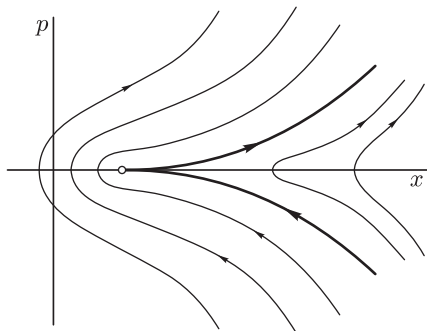
<sup>1)</sup> Упоминание о  $\pm\infty$  надо, конечно, понимать в «пиквикском» смысле, поскольку наше рассмотрение относится лишь к окрестности особой точки  $(0, x_0)$ .



чем вторая (четной) степени  $2n$ , то сепаратрисы будут непрямыми, а (соприкасающимися) параболами  $n$ -го порядка; в остальном качественный характер движений не изменится.



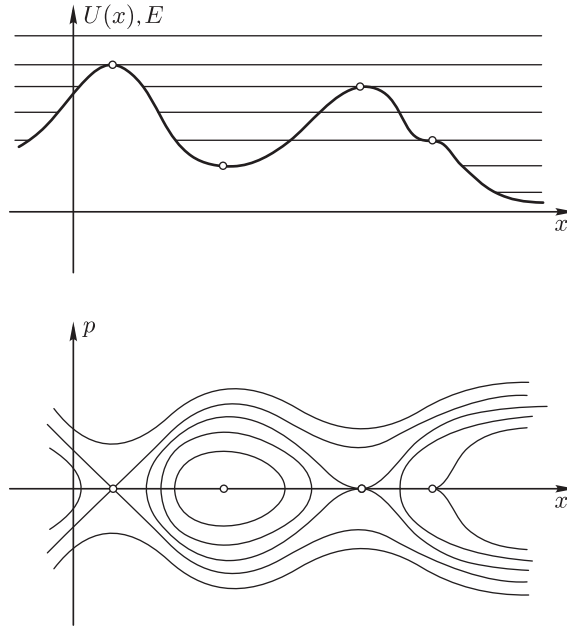
Если, наконец, экстремум есть точка перегиба — разложение потенциальной энергии начинается с *нечетной* степени  $n \geq 3$  — сепаратриса будет иметь в особой точке точку возврата, и фазовые траектории расположатся так, как указано на рисунке.



Для достижения особенности по-прежнему будет требоваться бесконечное время, и, следовательно, сепаратриса, рассматриваемая как фазовая траектория, будет состоять из *трех* самостоятельных объектов.

**16.3.1.2.** Зная поведение фазовых траекторий вблизи особых точек можно составить себе представление и об общем расположении траектории по всей фазовой плоскости. При этом бывает поучительно рассматривать картину фазовых траекторий параллельно с графиком потенциальной энергии, который служил нам для той же цели общей классификации возможных видов движения в **9.2** — эти два изображения являются как бы двумя «видами» (в принятой в черчении терминологии) — сбоку и сверху — одной и той же поверхности  $H = H(p, x)$  для

полного изображения которой требовался бы пространственный «чертеж». Для приводимого примера мы изобразили на рисунке все четыре сорта разобранных выше особенностей.



два вида поверхности энергии

**16.3.1.3.** В качестве еще одного примера использования картинок на фазовой плоскости, покажем, как с их помощью решается практически вообще без всяких интегрирований задача о движении материальной точки в центральном поле  $\sim \frac{1}{r}$ , разбиравшаяся в § 11.

Выпишем закон сохранения энергии

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (28.3)$$

и перейдем в нем с помощью (28.1) от независимой переменной  $t$  к новой независимой переменной  $\varphi$  — как мы то и делали в § 10:

$$E = \frac{M^2 r_\varphi^2}{2\mu r^4} + \frac{M^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}; \quad r_\varphi \equiv \frac{dr}{d\varphi}.$$

Если заменить в нем и зависимую переменную, полагая

$$r = \frac{1}{u}; \quad r_\varphi = -\frac{1}{u^2} u_\varphi = -r^2 u_\varphi,$$

то мы получим

$$\frac{2\mu E}{M^2} = u_\phi^2 + u^2 - 2 \frac{\mu\alpha}{M^2} u,$$

и еще одной — теперь линейной — заменой

$$u = v + \frac{\mu\alpha}{M^2}$$

приведем закон сохранения энергии на фазовой плоскости новых переменных  $v_\phi$ ,  $v$  к совершенно простому виду

$$v_\phi^2 + v^2 = \epsilon^2,$$

где обозначено

$$\epsilon^2 = \frac{2\mu E}{M^2} + \left(\frac{\mu\alpha}{M^2}\right)^2.$$

Таким образом, кривая  $U(v)$  потенциальной энергии в новых переменных есть парабола, а фазовые траектории на фазовой плоскости  $v_\phi$ ,  $v$  суть окружности «радиуса»  $\epsilon$ .

Такая картина фазовых траекторий соответствует осциллятору единичной частоты (по отношению к «времени»  $\phi$ ); поэтому закон движения можно сразу выписать как

$$v(\phi) = \epsilon \cos \phi$$

или, возвращаясь к переменной  $u$ , в виде

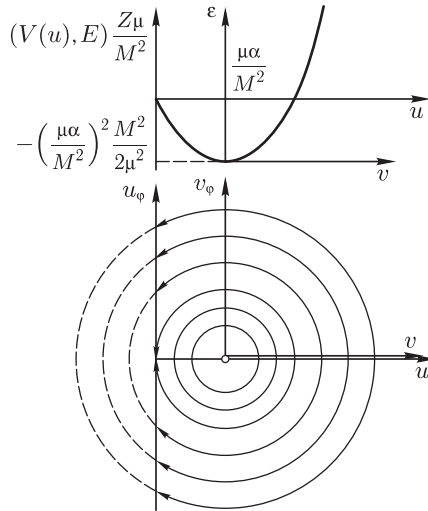
$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)} = \frac{\mu\alpha}{M^2} + \sqrt{\frac{(\mu\alpha)^2}{M^4} + \frac{2\mu E}{M^2}} \cos \phi = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2\mu M^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos \phi}{\frac{M^2}{\mu\alpha}},$$

который буквально совпадает с формулой (31) из § 11.

При ее интерпретации надо, конечно учесть, что переменная  $v$  отличается от координаты осциллятора в том весьма существенном смысле, что не все ее значения допустимы. Действительно, переменная  $u$  должна была быть существенно положительной, почему допустимые значения  $v$  ограничены неравенством

$$v \geq -\frac{\mu\alpha}{M^2}.$$

В соответствии с этим все наши фазовые траектории — окружности — разбиваются на два класса: лежащих целиком в допустимой



кулонова фазовая плоскость

области  $v$ , и выходящих за ее пределы — для траекторий второго класса мы вправе рассматривать не всю окружность, а только ту ее часть, которая лежит в разрешенной фазовой полуплоскости<sup>1)</sup>. При переходе к «настоящей» переменной  $r$  траекториям первого класса будут соответствовать замкнутые кривые на плоскости  $(r, \varphi)$  — эллипсы, а траекториям второго — разомкнутые гиперболы. Легко видеть, что критерием попадания движения в первый или второй класс является знак энергии: для  $E < 0$  мы получаем эллипс, а для  $E > 0$  — гиперболу. Граничному случаю  $E = 0$ , когда на фазовой плоскости  $v_\varphi$ ,  $v$  окружность касается границы разрешенной части, соответствует на «обыкновенной» плоскости  $(r, \varphi)$  парабола.

**16.4.** Вычислим полную производную функции Гамильтона по времени:

$$\frac{dH}{dt} = - \sum \dot{p} \dot{q} + \sum \dot{q} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (54)$$

Значит, если функция Гамильтона не зависит от времени явно — а в силу (52а) это равносильно тому, что не зависит от времени явно функция Лагранжа, — то она **сохраняется**. Вспоминая определение (9.2) энергии системы, видим, что если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то ее численное значение совпадает с энергией системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Оговорка «если не зависит от времени явно» весьма существенна. В § 14 мы убедились, что для системы, находящейся в *зависящем от времени* внешнем поле, введение понятия энергии не является самоочевидным, и физически разумное определение (несохраняющейся!) энергии не совпадает с (9.2).

Следует упомянуть, что такая неприятность с определением физически разумной энергии может случиться и тогда, когда  $H$  *не зависит* от времени явно. Именно, такое может произойти, если используемые обобщенные координаты получены из декартовых преобразованием, зависящим от времени. Конечно, функция  $H$  будет и в этом случае сохраняться, буде она не зависит от времени явно, но ее значение может оказаться отличным от того, что физически естественно называть энергией системы. В конце этой части мы приведем пример, иллюстрирующий такую

<sup>1)</sup> Легко убедиться, что изображающая точка не может покинуть разрешенную часть фазовой плоскости, поскольку для этого было бы потребно бесконечное время.

ситуацию. Ее полное прояснение проистекает, парадоксальным образом, только в квантовой теории. ■

**16.5.** Как уже подчеркивалось, гамильтонова форма теории пожалуй даже важнее лагранжевой; поэтому вид функции Гамильтона для простейших систем надо держать в памяти не менее твердо, чем вид соответствующих функций Лагранжа. Выпишем его для важнейших частных случаев.

Если

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

то

$$H(q, p) = T(q, \dot{q}(p, q)) + U(q) = T(q, p) + U(q).$$

Если

$$L = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_a),$$

то  $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$  и

$$H = \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + U(\mathbf{r}_a).$$

Для одной материальной точки во внешнем поле

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U.$$

В цилиндрической системе координат, в которой

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U,$$

получаем для функции Гамильтона

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + \frac{p_z^2}{2m} + U.$$

Наконец, в сферических полярных координатах, когда

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{mr^2 \sin^2 \vartheta}{2} \dot{\phi}^2 - U,$$

функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \vartheta} + U.$$

## 17. Вариационный принцип для уравнений Гамильтона

Уравнения движения в форме Лагранжа мы получали из вариационного принципа, именно из требования экстремальности функционала

$$\delta S = 0; \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (*)$$

относительно произвольных вариаций переменных  $q_i$  с условием  $\delta q_i = 0$  на границах области интегрирования, т. е. независимыми считались вариации координат, а вариации скоростей были их следствием:

$$\delta q_i \text{ незав.}; \quad \delta q_i = 0 \text{ на границах,} \quad \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i.$$

Теперь мы хотим так преобразовать этот вариационный принцип, чтобы он непосредственно давал нам уравнения в форме Гамильтона.

Перейдем того ради к независимому варьированию  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ , и в знак этого будем обозначать  $\dot{q}_i$  особыми буквами  $v_i$ , записывая действие в виде

$$S = \int dt L(q, v, t).$$

Будем варьировать здесь и  $q_i$  и  $v_i$ ; чтобы так формулируемый новый вариационный принцип был бы равносильным старому, надо, чтобы все время выполнялись **дополнительные условия**

$$v_i = \dot{q}_i \quad \text{или} \quad v_i - \dot{q}_i = 0,$$

т. е. мы приходим к задаче об *условном* экстремуме.

По известным из вариационного исчисления правилам нахождения условного экстремума будем искать вместо него безусловный экстремум функционала, получаемого из первоначального добавлением дополнительных условий, умноженных на неопределенные множители Лагранжа (которые нам будет удобно обозначить через  $p_i(t)$ ), т. е. потребуем безусловного экстремума выражения

$$\delta S' = 0; \quad S' = \int dt \left[ L(q, v, t) - \sum_i p_i (v_i - \dot{q}_i) \right] \quad (**)$$

по отношению к независимому варьированию координат  $q_i$ , скоростей  $v_i$  и множителей Лагранжа  $p_i$ . Вариации координат должны обращаться в нуль на границах; то же условие можно наложить и на вариации множителей Лагранжа. Итак, в (\*\*)

$$\delta q_i, \delta v_i, \delta p_i \text{ независимы;} \quad \delta q_i = 0, \quad \delta p_i = 0 \text{ на границах.}$$

Выполняя варьирование, получаем, что

$$\begin{aligned} \delta S' = \int dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} \right) \delta q_i + \underbrace{\int dt \frac{d}{dt} \sum_i p_i \delta q_i}_{\parallel 0} + \\ + \int dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} - p_i \right) \delta v_i - \int dt \sum_i (v_i - \dot{q}_i) dp_i. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнениями Лагранжа — Эйлера будут:

$$\text{при } \delta q_i: \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i; \quad (1)$$

$$\text{при } \delta v_i: \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}; \quad (2)$$

$$\text{при } \delta p_i: \quad v_i = \dot{q}_i. \quad (3)$$

Вторая группа этих уравнений объясняет, почему мы обозначали множители Лагранжа буквами  $p_i$ .

Более экономный переход к формализму первого порядка получается, если использовать в (\*\*) вместо множителей Лагранжа определение импульсов через  $L$ , т. е. написать

$$S' = \int dt \left[ L(q, v, t) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i} (v_i - \dot{q}_i) \right]$$

с независимым варьированием  $q_i$  и  $v_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \delta S' = \int dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \sum_j (v_j - \dot{q}_j) \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial q_i} \right) \delta q_i + \\ + \int dt \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial v_i} \delta q_i + \int dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial v_i} - \sum_j (v_j - \dot{q}_j) \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_i} \right) \delta v_i \end{aligned}$$

и уравнениями Лагранжа–Эйлера будут

$$\begin{aligned} \sum_j (v_j - \dot{q}_j) \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_i} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \sum_j (v_j - \dot{q}_j) \frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial q_i} = 0 \end{aligned}$$

в случае, когда в соответствии с предположением § 16,  $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \right| \neq 0$ , из первого уравнения следует

$$v_i = \dot{q}_i \quad (3)$$

и любой член второго порядка исчезает, так что остается

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}. \quad (1)-(2)$$

Перейдем теперь от задачи на безусловный экстремум (\*\*) снова к задаче на условный экстремум, но с *другим дополнительным условием*. Именно, выберем в качестве дополнительного условия уравнения (2). Поскольку эти условия возникли у нас в качестве множителей при  $\delta v_i$ , то в новой задаче скорости  $v_i$  уже *не надо* подвергать независимому варьированию, но следует выразить их в виде функций  $q$  и  $p$

$$v_i = v_i(q, p),$$

разрешая уравнения (2) относительно  $v_i$  (предположенное в § 16 отличие детерминанта  $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \right|$  от нуля позволяет это сделать!). Мы приходим тогда к вариационному принципу в форме:

$$\delta S'' = 0; \quad S'' = \int dt \left\{ \left[ L(q, v(q, p), t) - \sum_i p_i v_i(q, p) \right] + \sum_i p_i \dot{q}_i \right\}, \quad (***)$$

где независимо варьируются  $p_i$  и  $q_i$ :

$$\delta q_i, \quad \delta p_i \text{ независимы; } \delta q_i = 0, \quad \delta p_i = 0 \text{ на границах,}$$

а  $v_i$  суть функции от  $q$  и  $p$ .

Стоящая в (\*\*\*) в квадратных скобках величина — это как раз (взятая с обратным знаком) функция Гамильтона  $H(p, q, t)$ . Поэтому вариация функционала  $\delta S''$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \delta S'' = \int dt \sum_i \left[ -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_i} - \frac{dp_i}{dt} \right] \delta q_i + \underbrace{\int dt \frac{d}{dt} \sum_i p_i \delta q_i}_0 + \\ + \int dt \sum_i \left[ -\frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_i} + \frac{dq_i}{dt} \right] \delta p_i, \end{aligned}$$

и требование  $\delta S'' = 0$  даст в качестве уравнений Эйлера

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

т. е. как раз уравнения Гамильтона (53).



Итак, поставленная задача выполнена, и вариационный принцип (\*\*), приводящий непосредственно к уравнениям Гамильтона, можно записать, опуская теперь штрихи, в виде

$$\delta S = 0, \\ S = \int dt \left( \sum p_i \frac{dq_i}{dt} - H(p, q, t) \right) = \int \left[ \sum_i p_i dq_i - H(p, q, t) dt \right], \quad (55)$$

где независимо варьируются

$$p_i \text{ и } q_i, \text{ а } \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i, \text{ причем } \delta q_i = 0, \delta p_i = 0 \text{ на границах,} \quad (55a)$$

а интегрирование выполняется вдоль траекторий системы в фазовом пространстве.

В силу (55a) сформулированный вариационный принцип не изменится, если добавить к подинтегральному выражению полный дифференциал произвольной функции координат и импульсов. В частности, добавляя  $d\left(-\sum_i p_i q_i\right)$ , этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы привести (55) к другому виду:

$$S = \int \left( - \sum_i q_i dp_i - H dt \right), \quad (55')$$

сопоставление которого (55) с показывает, что и в вариационной формулировке гамильтонова формализма соблюдается полная симметрия координат и импульсов.

## 18. Скобки Пуассона

Механику в форме Гамильтона (часто говорят **гамильтонов формализм** для механики) можно привести к очень красивому виду, если ввести одно специальное образование, которое будет играть в дальнейшем очень существенную роль.

**18.1.** Пусть  $f$  и  $g$  — две функции (какие-то) координат, импульсов и времени

$$f = f(q, p, t) \text{ и } g = g(q, p, t).$$

**Скобкой Пуассона (СП)** величин  $f$  и  $g$  называется выражение:

$$(f, g) = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (56)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами:

(1) антисимметрии:

$$(f, g) = -(g, f); \quad (57.1)$$

(отсюда, в частности, следует, что

$$(f, f) = 0); \quad (57.1a)$$

(2) равенства нулю скобки с константой:

$$(f, c) = 0; \quad (57.2)$$

(3) линейности по каждому аргументу:

$$\left. \begin{aligned} (f_1 + f_2, g) &= (f_1, g) + (f_2, g), \\ (cf, g) &= c(f, g) \end{aligned} \right\} \quad (57.3)$$

и аналогично для  $g$ ; (в частности, отсюда получается равенство нулю СП двух линейно зависящих величин  $(f, cf) = 0$ );

(4) распределительным свойством по отношению к умножению, аналогичным правилу Лейбница для дифференцирования произведений:

$$\left. \begin{aligned} (f_1 f_2, g) &= (f_1, g) f_2 + f_1 (f_2, g), \\ (f, g_1 g_2) &= (f, g_1) g_2 + g_1 (f, g_2); \end{aligned} \right\} \quad (57.4)$$

(5) выполнением правила Лейбница для *частного* дифференцирования по времени и вообще по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial t} (f, g) = \left( \frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left( f, \frac{\partial g}{\partial t} \right); \quad (57.5)$$

(6) выполнением **тождества Якоби**:

$$(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0. \quad (57.6)$$

Первые пять свойств — тривиальны, доказательство же последнего тождества довольно громоздко; поэтому мы не будем проводить его целиком, а укажем лишь «скелетную схему» рассуждения.

Исходный пункт состоит в том наблюдении, что каждый член развернутого выражения двойной скобки Пуассона содержит вторые производные одного (и только одного) из множителей внутренней скобки. Поэтому, если желать собрать *все* вторые производные, скажем, функции  $f$  в левой части (57.6), то надо будет вычислять комбинацию

$$(g, (h, f)) + (h, (f, g)),$$

считая при вычислении *внешней* скобки второй элемент *внутренней* скобки постоянным. Это обстоятельство можно записать, отмечая не

подлежащий второму дифференцированию элемент, например, чертой снизу:

$$(g, (\underline{h}, f)) + (h, (f, \underline{g})).$$

Тогда, согласно свойству (3), можно будет вынести не подлежащий дифференцированию элемент за знак внешней скобки, т. е. внести операцию  $(g, \dots)$  под знак внутренней скобки. При этом, однако, первый элемент внешней скобки (которая теперь становится внутренней) попадает под знак внутренней скобки (которая становится внешней), но не должен, конечно, этой скобкой дифференцироваться, что и надлежит отметить нашим значком  $\_$ .

В применении к первому члену выписанного выражения это рассуждение выглядит как преобразование

$$(g, (\underline{h}, f)) = (h, (\underline{g}, f)),$$

после которого этот член тождественно уничтожается со вторым в силу свойства (1).

Таким образом оказывается, что все члены, содержащие вторые производные функции  $f$ , в сумме обращаются в нуль. Поскольку то же рассуждение проходит и по отношению к членам левой части (57.6), содержащим вторые производные функции  $g$  или функции  $h$ , а членов без вторых производных левая часть (57.6) не содержит, то отсюда следует равенство ее нулю, т. е. выполнение тождества (57.6).

Заметим еще, что тождество Якоби может быть интерпретировано как применимость правила Лейбница при вычислении скобки Пуассона со скобкой Пуассона

$$(f, (g, h)) = ((f, g), h) + (g, (f, h)). \quad (57.6')$$

**18.2.** Установим теперь значения некоторых важных специальных скобок Пуассона. Прежде всего

$$(f, q_i) = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad (f, p_i) = -\frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (58)$$

Затем, еще более специальные скобки,

$$(q_i, q_j) = 0; \quad (p_i, q_j) = \delta_{ij}; \quad (p_i, p_j) = 0. \quad (59)$$

**18.3.** Эти специальные значения сразу подсказывают нам, как использовать скобки Пуассона для усовершенствования записи гамильтонова формализма.

**18.3.1.** В самом деле, с помощью (58) уравнения Гамильтона (53) принимают вид

$$\dot{q}_i = (H, q_i); \quad \dot{p}_i = (H, p_i), \quad (53a)$$

замечательный симметрией, с которой в него входят координаты и импульсы. Однако в действительности эта симметрия еще шире.

**18.3.2.** В самом деле, возьмем любую динамическую величину — т. е. любую функцию  $f$  координат, импульсов и времени — и вычислим ее *полную* производную по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Сумма в правой части — это как раз скобка Пуассона.

Таким образом, для любой динамической величины  $f$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) \quad (60)$$

— **полная производная по времени равна частной производной плюс скобка Пуассона функции Гамильтона с этой величиной.**

Если же, в частности, динамическая величина  $f$  не зависит от времени явно, то

$$\frac{df}{dt} = (H, f), \quad \text{если} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (60a)$$

ее **полная производная по времени равняется скобке Пуассона функции Гамильтона с ней.**

Уравнения (60) представляют собой замечательно компактную и симметричную форму записи всей механики. Сами уравнения Гамильтона (в форме (53a)) получаются теперь из (60) в качестве частного случая.

**18.4.** Однако формализм скобок Пуассона позволяет не только элегантно записать уравнения механики, но и выписать их *общее решение*, конечно в виде разложения в ряд, параметром малости которого является время, протекшее с начала движения. Чтобы показать это, ограничимся сперва случаем, когда функция Гамильтона не зависит от времени явно, и будем искать зависимость от времени произвольной динамической переменной  $f(p, q)$ , также не зависящей явно от времени, т. е. описываемой уравнением движения (60a). Перепишем это уравнение в интегральном виде

$$f(p(t), q(t)) \equiv f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t dt' (H(t'), f(t')), \quad (60b)$$

и будем решать его итерациями, считая интегральный член малым. Для *нулевой* итерации получим, полностью пренебрегая интегральным членом,

$$f_0(t) = f(t_0) \equiv f_0. \quad (0)$$

Чтобы найти *первую* итерацию, заменим стоящую под интегралом скобку Пуассона ее нулевой итерацией

$$(H(t'), f(t'))_0 = (H(t_0), f(t_0)),$$

что приведет нас к

$$f_1(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t dt' (H(t_0), f(t_0)) = f_0 + (t - t_0)(H_0, f_0). \quad (1)$$

Продолжая этот процесс, получим для второй итерации  $f$

$$f_2(t) = f_0 + (t - t_0)(H_0, f_0) + \frac{1}{2!} (t - t_0)^2 (H_0, (H_0, f)). \quad (2)$$

(Мы воспользовались здесь при нахождении первой итерации скобки Пуассона тем, что, согласно (59), у нас  $H(t') = H(t_0)$  и так далее.)

Таким образом мы приходим для зависимости  $f$  от времени, т. е. для **движения**, к разложению

$$f(t) = f_0 + ((t - t_0) H_0, f_0) + \frac{1}{2!} \left( (t - t_0) H_0, ((t - t_0) H_0, f_0) \right) + \dots, \quad (60c)$$

о сходимости которого, конечно, нельзя сделать общих утверждений. Тем не менее это формальное решение основной задачи механики оказывается очень полезным в различных случаях.

**18.5.** В общем случае, когда как гамильтониан  $H = H(p(t), q(t), t)$ , так и рассматриваемая динамическая переменная  $f(p(t), q(t), t)$  могут зависеть от времени явно, требуются заметно более громоздкие и тонкие рассуждения.

**18.5.1.** Уравнение движения (60) для зависящей явно от времени динамической переменной  $f[p(t), q(t); t]$  гласит

$$\frac{df[p(t), q(t); t]}{dt} = (H[p(t), q(t); t], f[p(t), q(t); t])_{p(t), q(t)} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (60)$$

где мы прибегли к более подробной записи, в которой отмечено, по каким переменным вычисляется скобка Пуассона; ниже мы будем отмечать это — привносящее с собой основные осложнения — обстоятельство просто индексом  $t$ . Как и в рассмотренном выше случае, его можно переписать в интегральной форме, что, однако, несколько осложнено

двойной зависимостью — неявной и явной —  $f$  от  $t$ . Поэтому мы расцепим эти две зависимости и введем в рассмотрение динамическую переменную  $f$ , у которой неявное и явное времена различны:

$$f[p(t), q(t); \tau] \equiv f(t; \tau),$$

установив заодно сокращенное обозначение. Ясно, что

$$\frac{\partial f(t; \tau)}{\partial t} = (H(t; t), f(t; \tau))_t; \quad \frac{\partial f(t; \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial f[p(t), q(t); \tau]}{\partial \tau},$$

где вторая производная определяется явной зависимостью  $f$  от времени и не имеет отношения к динамике.

**18.5.2.** Первое же уравнение приводится к интегральной форме сразу:

$$f(t; \tau) = f(t_0; \tau) + \int_{t_0}^t dt' (H(t'; t'), f(t'; \tau))_{t'}. \quad (60b')$$

Мы видим, что под интегралом складываются скобки Пуассона, вычисляемые по разным переменным. Поэтому, если принять, как и в предыдущем рассуждении, что произведение  $(t - t_0)H$  содержит в себе параметр малости и искать  $f$  в виде ряда итераций

$$f(t; \tau) = f^{(0)}(t; \tau) + f^{(1)}(t; \tau) + f^{(2)}(t; \tau) + \dots,$$

то просто найдутся только нулевая итерация

$$f^{(0)}(t; \tau) = f(t_0; \tau) \quad (0')$$

и первая

$$f^{(1)}(t; \tau) = \int_{t_0}^t dt' (H(t_0; t'), f(t_0; \tau))_{t_0}. \quad (1')$$

Прямое вычисление всех следующих итераций потребовало бы преобразования скобок Пуассона от одних переменных к другим, а этого мы как раз и хотим избежать, ибо пока не умеем это делать.

**18.5.3.** Вместо этого займемся обещанными нагромождениями и введем динамические переменные, зависящие от *нескольких* явных времен  $f(t; \tau_1, \dots, \tau_m)$ . Конкретно нам понадобятся из величин такого рода  $m$ -кратные *мультискобки* Пуассона:

$$\begin{aligned} M_m(t; t', \dots, t^{(m)}; \tau) = \\ = (H(t; t^{(m)}), (H(t; t^{(m-1)}), \dots, (H(t; t'), f(t; \tau))_t \dots)_t) \end{aligned}$$

(аргумент  $\tau$  мы будем при ненадобности опускать). Легко видеть, что интегральные уравнения движения для этих мультискобок будут иметь вид:

$$M_m(t; t', \dots, t^{(m)}) = M_m(t_0; t', \dots, t^{(m)}) + \\ + \int_{t_0}^t dt^{(m+1)} M_{m+1}(t^{(m+1)}; t', \dots, t^{(m+1)}).$$

Заметим теперь, что в определении  $M_m$  уже имеется  $m$ -кратная малость (в дальнейшем войдут лишь интегралы от них по всем явным временам по областям, меньшим  $t - t_0$ ); поэтому итерационный ряд для  $M_m$  будет начинаться с  $m$ -го члена, именно:

$$M_m^{(k)} = 0 \quad \text{для } k < m; \quad M_m^{(m)}(t; t', \dots, t^{(m)}) = M_m(t_0; t', \dots, t^{(m)}).$$

**18.5.4.** Мы, конечно, не случайно построили последовательность переменных  $M$ . С их помощью основное уравнение (60b') преобразуется к виду

$$f(t; \tau) = f(t_0; \tau) + \int_{t_0}^t dt' M_1(t'; t'; \tau),$$

аналогичному интегральным уравнениям для  $M_m$ , если ввести естественное теперь обозначение  $f(t; \tau) = M_0(t; \tau)$ . Мы видим, что каждая следующая переменная  $M_{m+1}$  есть подынтегральное выражение в правой части уравнения для предыдущей  $M_m$ , причем последовательность начинается с  $M_0 = f$ .

Такая цепочка уравнений очень удобна для решения по теории возмущений. Для приближения порядка  $n > 0$  в основном уравнении для  $f$  мы имеем

$$f^{(n)}(t; \tau) = \int_{t_0}^t dt' M_1^{(n)}(t'; t'; \tau).$$

Далее, последовательно,

$$M_1^{(n)}(t'; t') = \int_{t_0}^{t'} dt'' M_2^{(n)}(t''; t', t'') = \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt''' M_3^{(n)}(t'''; t', t'', t''') = \dots \\ \dots = \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} M_n^{(n)}(t^{(n)}; t', \dots, t^{(n)}).$$

Но  $M_n^{(n)}(t^{(n)}; \dots) = M_n(t_0; \dots)$ , для следующих  $M_m$  с  $m > n$   $n$ -е приближение равно нулю. Таким образом построенная цепочка уравнений

обрывается, и мы получаем явное выражение  $n$ -го приближения для динамической переменной  $f(t; \tau)$

$$f^{(n)}(t; \tau) = \int_{t_0}^t dt' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \cdot M_n(t_0; t', \dots, t^{(n)}; \tau).$$

**18.5.4.1.** Теперь становится ясной суть той хитрости, к которой мы прибегли. Вместо того чтобы находить старшие приближения для интересующей нас динамической переменной  $f$ , непосредственно решая уравнение (60b'), мы построили такую последовательность новых динамических переменных, что приближение каждого порядка к  $f$  выражается через *младшее неисчезающее* приближение переменной того же номера. Для вычисления же последнего нужны лишь скобки Пуассона по координатам и импульсам в *один* момент времени  $t_0$  — тем самым удалось избежать пугавшего нас преобразования скобок от одних переменных к другим.

**18.5.5.** Вспоминая теперь определение переменных  $M_m$ , можем выписать весь ряд для интересующей нас  $f(t)$  (и, кстати, положить в нем  $t = \tau$ )

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^t dt' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \times \underbrace{\left( H(t_0; t^{(n)}), (H(t_0; t^{(n-1)}), \dots (H(t_0, t'), f(t_0; t))_{t_0}, \dots)_{t_0} \right)}_{n \text{ раз}}.$$

Мы видим, что все динамические переменные  $p$  и  $q$  во всех стоящих под интегралом гамильтонианах, равно как и в  $f(t_0; t)$ , *берутся* в этом разложении *в начальный момент времени*  $t_0$ , по тем же самым переменным вычисляются и все скобки Пуассона. Таким образом найденная формула действительно дает явное решение уравнений движения.

**18.5.6.** Принято считать, что мы получаем эстетическое преимущество, если выражаем в этой формуле пределы интегрирования с помощью  $\vartheta$ -функций и относим их к подинтегральному выражению, т. е. пишем

$$\begin{aligned} f[p(t), q(t); t] &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} dt' \dots dt^{(n)} \cdot \vartheta(t - t') \vartheta(t' - t'') \dots \vartheta(t^{(n-1)} - t^{(n)}) \times \\ &\times (H(\dots; t^{(n)}), (H(\dots; t^{(n-1)}), \dots, (H(\dots; t'), f[p(t_0), q(t_0); t])) \dots), \end{aligned} \quad (60c')$$



(в аргументах всех гамильтонианов стоят  $p(t_0)$ ,  $q(t_0)$ , в смысле тех же переменных берутся все скобки Пуассона). Все подинтегральное выражение здесь называют **запаздывающей мульти-скобкой Пуассона**.

Если явная зависимость от времени и у  $f$  и у гамильтониана отсутствует, то это выражение должно переходить в (60с). Легко видеть, что это в самом деле так — мультискобку Пуассона можно вывести тогда из-под знака интеграла, и оставшийся интеграл по « $n$ -мерному треугольнику» даст как раз стоящую в (60с)  $n$ -ую степень  $(t - t_0)$ , деленную на  $n!$ .

**18.6.** Итак, мы познакомились с одним из плодотворных применений понятия пуассоновых скобок. Другое важное применение скобок Пуассона открывается тем обстоятельством, что скобки Пуассона являются эффективным инструментом образования одних динамических переменных из других.

**18.6.1.** С этой точки зрения важно найти полную производную по времени от скобки Пуассона. Имеем последовательно

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f, g) &= \frac{\partial}{\partial t}(f, g) + (H, (f, g)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) + \\ &+ ((H, f), g) + (f, (H, g)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (H, f), g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} + (H, g)\right), \end{aligned}$$

т. е. для взятия *полной* производной по времени от скобки Пуассона применимо то же правило Лейбница

$$\frac{d}{dt}(f, g) = \left(\frac{df}{dt}, g\right) + \left(f, \frac{dg}{dt}\right), \quad (61)$$

что и для частного дифференцирования (свойство (5)).

**18.6.2.** Если, в частности, обе рассматриваемые динамические величины  $f$  и  $g$  суть *интегралы движения*,  $\frac{df}{dt} = 0$ ,  $\frac{dg}{dt} = 0$ , то и величина  $(f, g)$  *будет интегралом движения*:

$$(f, g) = \text{const}, \quad \text{если} \quad f = \text{const} \quad \text{и} \quad g = \text{const}. \quad (61a)$$

Последнее утверждение носит название **теоремы Пуассона**.

**18.6.3.** Теорема Пуассона может иногда дать возможность найти новые интегралы движения. Именно, если мы уже знаем несколько ( $> 1$ ) интегралов движения системы, то, вычисляя их скобки Пуассона, мы опять получим по (61a) интегралы движения. Может, конечно, случиться, что так вычисленные интегралы движения окажутся функциями уже известных, или тождественно обратятся в нуль — такие случаи не представляют

интереса. Но возможен и третий случай, когда скобка Пуассона окажется существенно новым интегралом движения.

**18.7.** Напомним, что для замкнутой системы имеют место семь законов сохранения: законы сохранения энергии, трех компонент импульса и трех компонент момента,

$$E, \mathbf{P} \text{ и } \mathbf{M}.$$

Для системы, находящейся во внешнем поле, их будет меньше (или вообще не будет). Теорема Пуассона позволяет легко установить, какие именно комбинации компонент импульса и момента могут сохраняться одновременно.

**18.7.1.** Чтобы выяснить это, найдем скобки Пуассона компонент импульса и момента. Будем, для простоты вычисления, считать, что система материальных точек описывается декартовыми координатами, и, следовательно,

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a; \quad \mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a] \quad \text{или} \quad M_\alpha = e_{\alpha\mu\nu} \sum_a r_{a\mu} p_{a\nu}.$$

Тогда сразу ясно, что

$$(P_\alpha, P_\beta) = 0. \quad (62.1)$$

**18.7.2.** Вычисляя теперь скобку Пуассона компонент момента и импульса, получим последовательно <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} (M_\alpha, P_\beta) &= e_{\alpha\mu\nu} \sum_a \left( \frac{\partial r_{a\mu} p_{a\nu}}{\partial p_{a\gamma}} \frac{\partial p_{a\beta}}{\partial r_{a\gamma}} - \frac{\partial r_{a\mu} p_{a\nu}}{\partial r_{a\gamma}} \frac{\partial p_{a\beta}}{\partial p_{a\gamma}} \right) = \\ &= e_{\alpha\mu\nu} \sum_a (0 - \delta_{\mu\gamma} p_{a\nu} \cdot \delta_{\beta\gamma}) = -e_{\alpha\beta\nu} P_\nu. \end{aligned}$$

Таким образом скобка Пуассона компонент момента и импульса дает нам другую компоненту импульса, номер которой определяется антикруговой перестановкой

$$(M_\alpha, P_\beta) = -e_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma. \quad (62.2)$$

<sup>1)</sup> При проведении подобных выкладок сперва появляются *три* суммы по частицам  $\sum_a \sum_b \sum_c \dots$ , первая из которых возникает из первого элемента скобки Пуассона, третья — из второго, а вторая — из суммирования в определении скобки. В силу аддитивности импульса и момента, однако, при выполнении предписываемых (56) дифференцирований возникают  $\delta_{ab}$  и  $\delta_{bc}$ , поэтому всюду остается только по одной сумме.

**18.7.3.** Несколько более громоздко проходит вычисление скобки Пуассона двух компонент момента:

$$\begin{aligned}
 (M_\alpha, M_\beta) &= \sum_a \left( \frac{\partial M_{a\alpha}}{\partial p_{a\gamma}} \frac{\partial M_{a\beta}}{\partial r_{a\gamma}} - \frac{\partial M_{a\alpha}}{\partial r_{a\gamma}} \frac{\partial M_{a\beta}}{\partial p_{a\gamma}} \right) = \\
 &= \sum_a \frac{\partial M_{a[\alpha}}{\partial p_{a\gamma}} \frac{\partial M_{a\beta]} }{\partial r_{a\gamma}} = e_{[\alpha\mu\nu} e_{\beta]\rho\sigma} \sum_a r_{a\mu} \delta_{\nu\gamma} \delta_{\rho\gamma} p_{a\sigma} = \\
 &= e_{[\alpha\mu\nu} e_{\beta]\nu\sigma} \sum_a r_{a\mu} p_{a\sigma} = \dots
 \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$e_{\alpha\mu\gamma} e_{\beta\gamma\sigma} = -e_{\alpha\mu\gamma} e_{\beta\sigma\gamma} = -\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\sigma} + \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\mu\beta},$$

где первое произведение  $\delta$ -символов обратится в нуль при антисимметрировании по  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому, продолжая цепочку равенств, можем написать, выполняя антисимметрирование  $\nu\gamma$ ,

$$\dots = -(\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\mu}) \sum_a r_{a\mu} p_{a\sigma} = -e_{\alpha\beta\rho} e_{\mu\sigma\rho} \sum_a r_{a\mu} p_{a\sigma} = -e_{\alpha\beta\rho} M_\rho.$$

Итак, скобка Пуассона двух компонент момента дает нам его третью компоненту, причем знак опять определяется правилом антикруговой перестановки:

$$(M_\alpha, M_\beta) = -e_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma. \quad (62.3)$$

Формулы (62) содержат ответ на поставленный вопрос о возможных комбинациях сохраняющихся величин. Из них видно, что если сохраняются две разные компоненты момента, то обязательно будет сохраняться и третья; если сохраняется весь момент и одна составляющая импульса, то сохраняется и весь импульс; если сохраняется одна компонента импульса и одна перпендикулярная ей составляющая момента, то будет сохраняться и другая составляющая импульса, перпендикулярная сохраняющейся компоненте момента.

**18.8.** Однако действительное значение этих формул гораздо больше. Вспомним, что возникновение законов сохранения было следствием инвариантности описания изучаемой системы относительно тех или иных преобразований из группы движений трехмерного пространства. Поэтому на самом деле соотношения (62) не связаны с конкретными свойствами рассматриваемой системы, а выражают собой структуру самой группы трехмерных движений.

**18.8.1.** В этой связи весьма поучительно вычислить скобки Пуассона полных импульса  $\mathbf{P}$  и момента  $\mathbf{M}$  с координатой  $a$ -й частицы  $\mathbf{r}_a$  и ее импульсом  $\mathbf{p}_a$ . Удобнее при этом взять не сами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ , а их скалярные произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}$  и  $\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{M}$  с бесконечно малыми постоянными векторами  $\mathbf{a}$  и  $\delta\boldsymbol{\Phi}$ . Имеем:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}, \mathbf{r}_a) = \sum_b \left( \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P})}{\partial \mathbf{p}_b} \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \mathbf{r}_b} - \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P})}{\partial \mathbf{r}_b} \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \mathbf{p}_b} \right) = \mathbf{a}$$

и

$$(\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{r}_a) = \sum_{b,c} \frac{\partial(\delta\boldsymbol{\Phi} \mathbf{r}_c \mathbf{p}_c)}{\partial \mathbf{p}_b} \delta_{ab} = [\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r}_a],$$

и аналогично для импульса:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}, \mathbf{p}_a) = - \sum_b \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P})}{\partial \mathbf{r}_b} \frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial \mathbf{p}_b} = 0$$

и

$$(\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{p}_a) = - \sum_{b,c} \frac{\partial(\delta\boldsymbol{\Phi} \mathbf{r}_c \mathbf{p}_c)}{\partial \mathbf{r}_b} \delta_{ab} = [\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{p}_a].$$

**18.8.2.** Легко видеть, что в правых частях этих равенств у нас получились как раз изменения координат и импульсов отдельных материальных точек при бесконечно малых сдвигах и поворотах. (Ср. замечания в **6.4** перед формулой (18).). Поэтому если прочесть их справа налево, то эти равенства будут говорить нам, что изменения как координат, так и импульсов частиц при бесконечно малых сдвигах и поворотах выражаются скобками Пуассона с величинами  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P})$  и  $(\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{M})$ , соответственно,

$$\delta_a \mathbf{r}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}, \mathbf{r}_b); \quad \delta_a \mathbf{p}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}, \mathbf{p}_b), \quad (63.1)$$

$$\delta_{\delta\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{r}_b = (\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{r}_b); \quad \delta_{\delta\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{p}_b = (\delta\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{M}, \mathbf{p}_b). \quad (63.2)$$

В дополнение к этим соотношениям можно выписать еще и изменения при бесконечно малом *временном* сдвиге на  $\tau$ , которые получаются из уравнений Гамильтона в форме (53а):

$$\delta_\tau \mathbf{r}_b = (\tau H, \mathbf{r}_b) \quad \text{и} \quad \delta_\tau \mathbf{p}_b = (\tau H, \mathbf{p}_b). \quad (63.3)$$

**18.8.3.** В чем преимущество новой формы (63) для бесконечно малых изменений координат и импульсов при движениях по сравнению с выписывавшимися в § 6 явными выражениями? Оно той же природы, что преимущество формы (53а) для уравнений Гамильтона: как легко сообразить, рассуждения, совершенно аналогичные приведшим нас от (53а) к (60), ведут от выраже-

ний (63) для декартовых координат и импульсов  $\mathbf{k}$  в точности таким же выражениям для изменений при бесконечно малых движениях для *любой* динамической переменной, не зависящей явно от координат или углов.

Можно сказать, что бесконечно малая динамическая переменная

$$\delta G = \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{M} \quad (64)$$

осуществляет по закону

$$\delta f = (\delta G, f) \quad (63a)$$

преобразование любой другой динамической переменной  $f$ , вызываемое сдвигом пространства на  $\mathbf{a}$  и поворотом на  $\delta \boldsymbol{\varphi}$ , точно так же, как функция Гамильтона  $H$  осуществляет преобразование, вызванное сдвигом по времени, т. е. движение.

**18.8.3.1.** В частности, из общей формулы (63a) можно теперь сразу получить все правила, которые мы выводили в § 6 для преобразования полных импульсов и момента при сдвигах и вращениях. Например, при сдвиге, когда  $\delta \boldsymbol{\varphi} = 0$ ,

$$\delta M_\alpha = \alpha_\beta (P_\beta, M_\alpha) = a_\beta e_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma, \quad \text{т. е.} \quad \delta \mathbf{M} = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}] \text{ и т. п.}$$

**18.8.4.** Рассмотрим теперь *две* величины (64)  $\delta G_1$  и  $\delta G_2$ , отличающиеся значениями параметров  $\mathbf{a}$  и  $\delta \boldsymbol{\varphi}$ , которые соответственно осуществляют два преобразования динамических переменных  $T_1$  и  $T_2$ :

$$\begin{aligned} T_1 f &= f + (\delta G_1, f) = f + \delta_1 f, \\ T_2 f &= f + (\delta G_2, f) = f + \delta_2 f. \end{aligned}$$

Применим к системе сперва преобразование  $T_1$ , а потом —  $T_2$ . Существенно не упустить, что преобразование  $T_1$  преобразует *все* динамические величины системы, в том числе и *величину*  $\delta G_2$ :

$$T_1 \delta G_2 = \delta G_2 + (\delta G_1, \delta G_2).$$

Поэтому результатом применения к некоторой величине  $f$  двух преобразований, сперва  $T_1$ , а потом  $T_2$ , будет

$$\begin{aligned} T_2 T_1 f &= f + (\delta G_1, f) + (\delta G_2 + (\delta G_1, \delta G_2), f + (\delta G_1, f)) = \\ &= f + (\delta G_1, f) + (\delta G_2, f) + (\delta G_2, (\delta G_1, f)) + ((\delta G_1, \delta G_2), f) = \\ &= f + \delta_1 f + \delta_2 f + (\delta G_1, (\delta G_2, f)) = (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_2 \delta_1) f. \end{aligned}$$

Применение же тех же самых двух преобразований *в обратном порядке* даст нам

$$T_1 T_2 f = f + \delta_2 f + \delta_1 f + (\delta G_2, (\delta G_1, f)).$$

Вычитая эти результаты друг из друга, мы получим, что

$$(T_2 T_1 - T_1 T_2) f = (\delta G_1, (\delta G_2, f)) - (\delta G_2, (\delta G_1, f)),$$

то есть, что

$$(T_2 T_1 - T_1 T_2) f = ((\delta G_1, \delta G_2), f). \quad (64a)$$

Но такая разность двух пар последовательных преобразований пространства, выполненных в разном порядке, должна опять быть движением в трехмерном пространстве, которому должна соответствовать своя динамическая переменная  $\delta G_3$ , осуществляющая преобразование всех динамических переменных по общему правилу (63a). Значения параметров  $\mathbf{a}_3$  и  $\delta \phi_3$  этой динамической переменной должны выражаться через параметры  $\mathbf{a}_1$ ,  $\delta \phi_1$  и  $\mathbf{a}_2$ ,  $\delta \phi_2$  двух первоначальных движений, и притом чисто геометрическим образом, совершенно независимым от природы динамической системы, которой мы интересуемся. Сравнение этого замечания с формулой (64a) показывает, что полученный в § 18.7 вывод, что скобки Пуассона компонент импульса и момента выражаются через них самих, можно было предсказать заранее, и что значения коэффициентов могут зависеть только от природы группы трехмерных вращений. Их называют **структурными константами** этой группы.

## 19. Канонические преобразования

**19.1.** Общая форма (2) лагранжевых уравнений движения, согласно замечанию 4 в § 3, не менялась при любом переходе от одних обобщенных координат к другим, т. е. при произвольном (но разумеемся — невырожденном) преобразовании вида

$$Q_i = Q_i(q_j, t) \quad \left( \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \neq 0 \right).$$

Ясно, что то же должно быть справедливым и для уравнений Гамильтона (53). Оказывается, однако, что последние уравнения инвариантны и относительно более широкого класса преобразований, именно, относительно некоторых (но не всех!) преобразований, перемешивающих координаты и импульсы.

Введем новые координаты и новые импульсы

$$Q_i = Q_i(q, p, t); \quad P_i = P_i(q, p, t) \quad (65)$$

как (пока — произвольные, с единственным условием обратимости:

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \neq 0 \quad (65.3)$$

функции старых координат, старых импульсов и (вообще говоря) времени.

Если такое преобразование сохраняет форму (53) уравнений Гамильтона, то оно называется **каноническим преобразованием**.

**19.2.1.** Чтобы выделить канонические преобразования из всех преобразований (65), естественно обратиться к вариационному принципу (55), из которого непосредственно получались уравнения Гамильтона — каноническими будут те из преобразований (65), для которых действие, выраженное через новые переменные, сохраняет форму (55), т. е. для которых

$$S = \int \left( \sum_i P_i dQ_i - H'(P, Q, t) dt \right).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Выражаясь более точно, для сохранения формы уравнений Эйлера требуется инвариантность не самого функционала (55), а только его вариаций. Поэтому, — если, как то имеет место в нашем вариационном принципе (55), независимые вариации обращаются в нуль на границе области интегрирования, — подынтегральные выражения в старых и новых переменных вполне могут отличаться на полный дифференциал любой функции координат, импульсов и времени <sup>1)</sup>. ■

**19.2.2.** Таким образом, достаточное условие каноничности преобразования (65) можно записать как

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum P_i dQ_i - H' dt + df,$$

или же в виде требования

$$df = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (66)$$

чтобы стоящая в левой части комбинация образовывала бы полный дифференциал некоторой функции  $f$ . Функция  $f$  есть функция  $2n$  переменных (кроме времени); в качестве этих ее аргументов можно выбрать любую группу  $2n$  независимых величин из числа  $4n$  переменных  $q_i$ ,  $p_i$ ,  $Q_i$  и  $P_i$ . Однако из (66) видно,

---

<sup>1)</sup> Это замечание совершенно аналогично отмеченной в замечании 4 к принципу наименьшего действия в § 3 возможности добавлять к функции Лагранжа полную производную любой функции координат (и времени)  $\frac{d}{dt}f(q_i, t)$ . Стоит обратить внимание на то обстоятельство, что такое преобразование индуцирует в гамильтоновом формализме (не самое общее) преобразование

$$P_i = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}; \quad Q_i = q_i$$

типа (65).

что если выразить  $f$  (с помощью (65)) как функцию *старых* и *новых координат*  $q_i$  и  $Q_i$ , то она окажется по отношению к этим переменным производящей функцией для преобразования Лежандра от  $\{q_i, Q_i\}$  к  $\{p_i, P_i\}$ . Таким образом условием каноничности преобразования (65) от старых координат и импульсов к новым координатам и импульсам,

$$\{q_i, p_i\} \Rightarrow \{Q_i, P_i\},$$

оказывается то требование, чтобы переход от старых и новых координат к старым и новым импульсам,

$$\{q_i, Q_i\} \Rightarrow \{p_i, P_i\},$$

был бы преобразованием Лежандра.

Производящая функция этого преобразования Лежандра  $f(q, Q, t)$  называется **производящей функцией** канонического преобразования (65).

**19.2.3.** Как и для всякого преобразования Лежандра, новые и старые переменные связаны с производящей функцией соотношениями

$$p_i = \frac{\partial f(q, Q, t)}{\partial q_i}; \quad P_i = \frac{\partial f(q, Q, t)}{\partial Q_i}; \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (67)$$

в понимании которых возможны две точки зрения: или можно считать заданными явно выражающие преобразование формулы (65) (или хотя бы часть из них) и искать производящую функцию, или же считать заданной производящую функцию и получать из (67) выражающие каноническое преобразование формулы (65).

**19.2.4.** Если стоять на первой точке зрения, то, прежде всего, надо выразить из уравнений (65.1) старые импульсы  $p_i$  в виде функций  $p_i = p_i(q_j, Q_j, t)$  старых и новых координат (и времени). Условием возможности этого является отличие от нуля функционального детерминанта

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0. \quad (68)$$

Если это условие не выполнено, то производящей функции по отношению к старым и новым координатам не существует, что, однако, еще не означает, что соответствующее преобразование не может быть каноническим.

**19.2.5.** Действительно, из § 17 мы знаем, что формулировка вариационного принципа для каждой совокупности перемен-



ных — новых или старых — допускает произвол, связанный с добавлением полного дифференциала и позволяющий преобразовывать функционал (55) к виду (55'). Если воспользоваться этим произволом, скажем, для новых переменных, то к правой части (66) добавится  $d \sum Q_i P_i$ , и мы придем к другому достаточному условию каноничности преобразования (65)

$$d\varphi = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H) dt \quad (66a)$$

с другой производящей функцией  $\varphi$ . Если выбрать в качестве аргументов  $\varphi$  *старые координаты* и *новые импульсы*, полагая

$$\varphi = \varphi(q, P, t),$$

то (66a) будет утверждать, что преобразование (65) окажется каноническим, коль скоро переход от старых координат и новых импульсов к новым координатам и старым импульсам есть преобразование Лежандра, и приведет вместо (67) к соотношениям

$$p_i = \frac{\partial \varphi(q, P, t)}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \varphi(q, P, t)}{\partial P_i}; \quad H' = H + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (67a)$$

Для нахождения производящей функции по заданным связям (65) теперь надо будет находить  $p_i = p_i(q, P, t)$ , разрешая *вторую* группу (65) относительно старых импульсов, условием возможности чего теперь будет отличие от нуля якобиана

$$\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0. \quad (68a)$$

**19.2.5.1.** Отмеченным произволом в формулировке вариационного принципа можно воспользоваться не только для новых переменных, но и для старых. Кроме того, этот произвол можно эксплуатировать независимо для каждой степени свободы — для каждой степени свободы можно произвольным образом выбирать в качестве аргументов производящей функции одну старую и одну новую переменную, каждая из которых может быть либо координатой, либо импульсом. Соответственно будет варьироваться и вид выражающего разрешимость якобиана, и хотя бы один из них будет отличен от нуля — иначе обратился бы в нуль полный якобиан всего преобразования (65.3).

**19.2.5.2. ЗАМЕЧАНИЕ:** На самом деле, только что обсуждавшееся затруднение вообще не является существенным. Практически, если якобиан (68) обращается в нуль, то оказывается возможным рассмотреть вместо одного преобразования некоторое семейство, зависящее от параметра, такое, что (68) обращается в нуль только для некото-

рого критического значения этого параметра — тогда окончательные формулы для критического значения параметра можно восстановить по непрерывности. ■

Поясним сказанное

**ПРИМЕРОМ:** Пусть система имеет одну степень свободы и преобразование (65) не меняет координату:  $Q = q$ . Это уравнение совсем не содержит импульса, почему его, очевидно, и нельзя разрешить относительно  $p$ .

Построим, однако, семейство преобразований, имеющих вид поворота на угол  $\alpha$  в фазовом пространстве:

$$Q = \cos \alpha \cdot q + \sin \alpha \cdot p; \quad P = -\sin \alpha \cdot q + \cos \alpha \cdot p.$$

Тогда из (65.1)

$$p = \frac{Q}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} q = \frac{\partial f(q, Q)}{\partial q}.$$

Интегрируя по  $q$ , находим

$$f(q, Q) = \frac{Qq}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{q^2}{2} + f_1(Q),$$

где произвольная  $f_1(Q)$  — постоянная интегрирования. Тогда из (67.2) новый импульс будет равен

$$P = -\frac{\partial f}{\partial Q} = -\frac{q}{\sin \alpha} - f'_1(Q),$$

а из обоих уравнений (65) —

$$P = -\sin \alpha \cdot q - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} q + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} Q = -\frac{1}{\sin \alpha} q + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} Q.$$

Приравнявая эти два выражения, найдем, что

$$f'_1(Q) = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} Q, \quad f_1(Q) = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{Q^2}{2},$$

и, следовательно,

$$f(q, Q) = -\frac{\cos \alpha \cdot q^2 - 2qQ + \cos \alpha \cdot Q^2}{2 \sin \alpha}.$$

Для  $\alpha = 0$  это выражение, конечно, расходится, но все остальные формулы сохраняют смысл. ■

**19.2.6.** Более существенно другое обстоятельство — неудачу взятое преобразование (65), вообще говоря, не будет каноническим, т. е. для него нельзя будет подобрать никакой функции  $f$ ,

полным дифференциалом которой стала бы правая часть (66). Действительно, производящая функция находится, как было продемонстрировано на примере, интегрированием уравнений (66.1), которое в случае более чем одной степени свободы, вообще говоря, невозможно, так как уравнения не обязаны быть совместными. Далее возникающие при интегрировании произвольные функции от  $Q_i$ , вообще говоря, нельзя подобрать так, чтобы удовлетворить уравнениям (65.2). Эти трудности не меняются при переходе к другой форме вариационного принципа. Поэтому, если стоять на той точке зрения, что исходными являются преобразования (65), то только в виде исключения можно найти каноническое преобразование, общим же результатом не слишком краткого исследования будет тот вывод, что заданное преобразование неканонично.

**19.3.** Другой подход к соотношениям (67) состоит, как уже упоминалось, в том, чтобы считать заданной производящую функцию  $f(q, Q, t)$ . Тогда, разрешая (67.1) относительно  $Q_j$ , мы получим (65.1) и, подставляя найденные зависимости в (67.2), найдем выражения (65.2) для новых импульсов.

Неудобство этого подхода состоит в том, что из-за условия (68) ограничиться лишь рассмотрением производящих функций вида  $f(q, Q, t)$  нельзя — мы не получим при этом всех канонических преобразований. Если же ввести в рассмотрение обсуждавшиеся выше производящие функции от любых комбинаций старых и новых переменных, то, как можно показать, мы действительно получим *все* канонические преобразования. Однако при этом каждое преобразование встретится нам по многу раз, возникая из разных производящих функций.

Другое, менее принципиальное неудобство состоит в том, что при таком подходе трудно догадаться, какую производящую функцию нужно брать, чтобы получить каноническое преобразование желательной формы.

**19.4.** Поэтому иногда оказывается удобен несколько иной подход, не использующий вовсе производящих функций.

**19.4.1.** Рассмотрим снова все преобразования вида (65) и выделим из них специальный класс таких преобразований, которые *оставляют скобки Пуассона инвариантными*:

$$(f, g)_{pq} = (f, g)_{PQ} \quad \text{для любых функций } f \text{ и } g. \quad (69)$$

**19.4.2.** Займемся левой частью этого равенства и преобразуем ее так, чтобы ввести промежуточные дифференцирования по новым

импульсам и координатам:

$$\begin{aligned}
 (f, g) &= \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) = \\
 &= \sum_{ijl} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} \right) \right\} = \\
 &= \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial P_l} (P_j, P_l)_{pq} + \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_l} (P_j, Q_l)_{pq} + \\
 &\quad + \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_l} (Q_j, P_l)_{pq} + \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_l} (Q_j, Q_l)_{pq}.
 \end{aligned}$$

В третьем члене здесь удобно поменять индексы  $j$  и  $l$ , а затем воспользоваться свойством антисимметрии скобок Пуассона:

$$\sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_l} (Q_j, P_l)_{pq} = - \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial Q_l} \frac{\partial g}{\partial P_j} (P_j, Q_l)_{pq}$$

— тогда становится ясным, что если скобки Пуассона новых импульсов и координат, вычисленные по отношению к старым, суть

$$(P_j, P_l)_{pq} = (Q_j, Q_l)_{pq} = 0, \quad (P_j, Q_l)_{pq} = \delta_{jl}, \quad (70)$$

то

$$(f, g)_{pq} = (f, g)_{PQ},$$

т.е. равенства (70) составляют *достаточное* условие того, чтобы преобразование (65) относилось бы к специальному классу, удовлетворяющему (69).

**19.4.3.** Легко видеть, что это условие является и необходимым — для этого надо только подставить в (69) последовательно в качестве  $f$  и  $g$  все пары  $P_j, P_l; Q_j, Q_l; P_j, Q_l$  и вспомнить, что скобки Пуассона всякого набора импульсов и координат, *вычисленные по отношению к ним самим*, имеют (см. (59)) как раз форму (70).

Итак, характерным признаком специального класса преобразований (65), сохраняющих скобки Пуассона, является выполнение условий (70), которое легко проверяется для всякого конкретного преобразования.

**19.5.** Покажем, что этот класс преобразований, сохраняющих скобки Пуассона, совпадает с введенным выше классом канонических преобразований. Рассмотрим сперва преобразова-

ния (65), не содержащие времени, и удовлетворяющие условиям (70). Тогда для новых координат и импульсов их производные по времени будут, по общей формуле (60a) равняться

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= (H, Q_i)_{pq} = (H, Q_i)_{PQ} = \frac{\partial H(P, Q)}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= (H, P_i)_{pq} = (H, P_i)_{PQ} = -\frac{\partial H(P, Q)}{\partial Q_i}\end{aligned}$$

— т.е. для новых координат и импульсов будут выполняться уравнения Гамильтона (53), и, следовательно, рассматриваемое преобразование будет каноническим.

Пусть теперь (сохраняющее скобки Пуассона!) преобразование (65) содержит время. Повторяя предыдущую выкладку, получаем

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= (H, Q_i)_{pq} + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial t}\right)_{pq} = \left(\frac{\partial H}{\partial P_i}\right)_{PQ} + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial t}\right)_{pq}, \\ \dot{P}_i &= (H, P_i)_{pq} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)_{pq} = -\left(\frac{\partial H}{\partial Q_i}\right)_{PQ} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)_{pq}.\end{aligned}$$

Если можно построить такую новую функцию Гамильтона  $H'(P, Q, t)$ , что

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial H'}{\partial P_i}\right)_{PQt} &= \left(\frac{\partial H}{\partial P_i}\right)_{PQt} + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial t}\right)_{pq} \\ \left(\frac{\partial H'}{\partial Q_i}\right)_{PQt} &= \left(\frac{\partial H}{\partial Q_i}\right)_{PQt} - \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)_{pq} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

то уравнения движения для новых координат и импульсов опять примут гамильтонову форму

$$\dot{Q}_i = (H', Q_i), \quad \dot{P}_i = (H', P_i),$$

т.е. рассматриваемое преобразование опять окажется каноническим.

Естественно, что уравнения (71) только тогда действительно определяют новую  $H'(P, Q, t)$ , когда будут выполнены соответствующие условия интегрируемости. Однако тут можно показать — мы не будем проводить этой довольно громоздкой, хотя и совершенно прямолинейно идущей выкладки, — что условиями интегрируемости уравнений (71) будут как раз равенства (70), необходимые и достаточные, чтобы рассматриваемое преобразование сохраняло бы скобки Пуассона.

Таким образом, всякое преобразование (65), сохраняющее скобки Пуассона, есть каноническое преобразование. Справедливо и обратное утверждение, которое мы опять-таки не будем доказывать.

Итак, мы видим, что формализм скобок Пуассона предоставляет нам простой критерий (70), позволяющий сразу выяснить, является ли преобразование вида (65) каноническим или нет. Оказывается, однако, что из этого формализма можно извлечь и большую пользу, именно, построить способ записи канонических преобразований, альтернативный методу производящих функций.

**19.6.** Чтобы показать это, нам придется установить несколько дополнительных свойств скобок Пуассона. Выберем некоторую динамическую переменную (т. е. функцию координат, импульсов и, быть может, времени)  $K$ , которую будем считать на протяжении следующих рассуждений фиксированной. Для всякой другой динамической переменной  $f = f(p, q, t)$  определим преобразованную с помощью  $K$  динамическую переменную  $\tilde{f}$  по правилу

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= f + (K, f) + \frac{1}{2!} (K, (K, f)) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(K, (K, \dots, (K, f) \dots))}_{n \text{ раз}} = e^{(K, \dots f)} \quad (72)\end{aligned}$$

(последнее выражение в цепочке равенств есть просто символическая запись предыдущего ряда).

Тогда

если  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  — преобразованные с помощью  $K$  динамические переменные  $f$  и  $g$ ,

$$\tilde{f} = f + (K, f) + \frac{1}{2!} (K, (K, f)) + \dots,$$

$$\tilde{g} = g + (K, g) + \frac{1}{2!} (K, (K, g)) + \dots,$$

то все алгебраические связи между  $f$  и  $g$  остаются неизменными:

$$\left. \begin{aligned}(1) \quad & \widetilde{(f+g)} \equiv (f+g) + (K, f+g) + \frac{1}{2!} (K, (K, f+g)) + \dots = \tilde{f} + \tilde{g}, \\ (2) \quad & \widetilde{fg} \equiv fg + (K, fg) + \frac{1}{2!} (K, (K, fg)) + \dots = \tilde{f}\tilde{g}, \\ (3) \quad & \widetilde{(f,g)} \equiv (f,g) + (K, (f,g)) + \frac{1}{2!} (K, (K, (f,g))) + \dots = (\tilde{f}, \tilde{g}).\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (1) тривиально.

(2) Перемножая разложения для  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$ , получаем

$$\begin{aligned}\tilde{f}\tilde{g} = f\underline{g} + \underline{(K, f)g + f(K, g)} + \frac{1}{2!}(K, (K, f))g + (K, f)(K, g) + \\ + \frac{1}{2!}f(K, (K, g)) + \dots\end{aligned}$$

С другой стороны преобразуем разложение для  $\tilde{f}\tilde{g}$  с помощью распределительного свойства СП (57.4):

$$(K, fg) = (K, f)g + f(K, g),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(K, (K, fg)) &= \frac{1}{2}(K, \{(K, f)g + f(K, g)\}) = \\ &= \frac{1}{2}\{(K, (K, f))g + (K, f)(K, g) + (K, f)(K, g) + f(K, (K, g))\}.\end{aligned}$$

после чего видим, что младшие члены обеих частей (73.2) соответственно совпадают. Далее доказательство легко может быть продолжено по индукции.

(3) Заметим, что тождество Якоби в форме

$$(f, (g_1, g_2)) = ((f, g_1), g_2) + (g_1, (f, g_2)) \quad (57.6')$$

алгебраически изоморфно распределительному свойству (57.4) по отношению к умножению. Поэтому доказательство (3) изоморфно доказательству (2).

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Именно такая форма тождества Якоби обычно удобна в приложениях. ■

**СЛЕДСТВИЕ 1:** Если СП динамических переменных  $f$  и  $g$  есть константа,

$$(f, g) = C,$$

то она не меняется при преобразовании с помощью  $K$  (любого!),

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = (f, g).$$

В самом деле, по (3)

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = (\widetilde{f, g}) = (f, g) + (K, (f, g)) + \dots = (f, g),$$

поскольку СП любого  $K$  с константой тождественно равны нулю. ■

**СЛЕДСТВИЕ 2:** Скобки Пуассона преобразованных с помощью  $K$  координат и импульсов  $\tilde{q}_i$  и  $\tilde{p}_i$  (взятые относительно *непреобразованных* координат и импульсов) сохраняют свои значения (59). ■

СЛЕДСТВИЕ 3: Преобразование с помощью  $K$  (72) в применении к координатам и импульсам

$$\begin{aligned} Q_i &\equiv \tilde{q}_i = q_i + (K, q_i) + \frac{1}{2!} (K, (K, q_i)) + \dots, \\ P_i &\equiv \tilde{p}_i = p_i + (K, p_i) + \frac{1}{2!} (K, (K, p_i)) + \dots \end{aligned} \quad (74)$$

осуществляет над ними преобразование (65), сохраняющее скобки Пуассона, т. е. *каноническое преобразование*. ■

Итак, мы действительно указали другой способ построения канонических преобразований — с помощью разложений (74). Этот способ особенно существен в связи с его переносом в квантовую теорию, где в его формулировке удастся избавиться от неуклюжего разложения в ряд.

Отметим еще одно следствие, которое получается из найденных свойств преобразования (72).

СЛЕДСТВИЕ 4: Применим преобразование (72) с помощью одного и того же  $K$  ко *всем входящим в теорию динамическим переменным*. Тогда, если СП каких-то двух динамических переменных  $f$  и  $g$  имела вид

$$(f, g)_{pq} = F(p, q),$$

где буква  $F$  характеризует не значение величины, а *форму зависимости* от координат и импульсов, то свойство (73), (3) дает нам

$$(\tilde{f}, \tilde{g})_{p,q} = \widetilde{F(p, q)} = F(\tilde{p}, \tilde{q})$$

где второе равенство написано на основании сохранения ((73), (1), (2)) при преобразовании (72) всех алгебраических соотношений. Поскольку, однако, в применении к координатам и импульсам (72) осуществляет каноническое преобразование, то

$$(\tilde{f}, \tilde{g})_{pq} = (\tilde{f}, \tilde{g})_{\tilde{p}\tilde{q}},$$

и, следовательно,

$$\text{если } (f, g)_{pq} = F(p, q), \quad \text{то } (\tilde{f}, \tilde{g})_{\tilde{p}\tilde{q}} = F(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad (75)$$

— т. е. при одновременном преобразовании с помощью (72) всех динамических переменных сохраняются не только все алгебраические соотношения, но и все соотношения в скобках Пуассона, т. е. преобразованная теория оказывается полностью изоморфной первоначальной. ■

Если теперь сравнить преобразование с помощью  $K$  (72) с полученным в предыдущем параграфе общим решением (60с)



уравнений движения, то нетрудно видеть, что второе совпадает с первым, если выбрать в нем

$$K = (t - t_0)H_0.$$

Таким образом:

**движение есть каноническое преобразование.**

Мы доказали это утверждение для систем с функцией Гамильтона, не зависящей от времени явно; оно сохраняет свою справедливость и в общем случае.

## 20. Пример на канонические преобразования: осциллятор

Проиллюстрируем применение канонических преобразований на чрезвычайно подробно разбиравшемся выше примере гармонического осциллятора:

$$L = \frac{\dot{x}^2 - \omega^2 x^2}{2}; \quad q = x; \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}; \quad H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}.$$

**20.1.** Введем новые импульс и координату (преобразование (65)) по формулам:

$$P = iA^* = i \frac{p + i\omega q}{\sqrt{2\omega}}, \quad Q \equiv A = \frac{p - i\omega q}{\sqrt{2\omega}}.$$

Вычисляя единственную скобку Пуассона, найдем что

$$(P, Q) = i(A^*, A) = i \left( \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}\sqrt{2\omega}} - \frac{i\omega}{2\omega} \right) = i \frac{-2i\omega}{2\omega} = 1,$$

то есть

$$(A^*, A) = -i; \quad (P, A) = 1$$

— предлагаемое преобразование является каноническим.

В новых переменных

$$PA = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{-i2\omega},$$

то есть

$$H = -i\omega PA = \omega A^* A,$$

и, следовательно, уравнениями движения будут

$$\dot{A} = (H, A) = -i\omega A,$$

$$\dot{P} = i\dot{A}^* = -\frac{\partial H}{\partial A} = i\omega P = i\omega iA^*; \quad \dot{A}^* = i\omega A^*.$$

Решение уравнений движения есть

$$A = ae^{-i\omega t}, \quad A^* = a^*e^{i\omega t} \quad (a, a^* - \text{константы}).$$

Для функции Гамильтона  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , следовательно,  $H$  сохраняется:

$$H = E = \omega a^* a.$$

**20.2.** Постоянные интегрирования  $a^*$  и  $a$  можно, однако, рассматривать и как динамические переменные, как функции  $A^*$ ,  $A$  и явно входящего времени  $t$ :

$$a^* = e^{-i\omega t} A^*, \quad a = e^{i\omega t} A. \quad (*)$$

В таком аспекте можно вычислить скобку Пуассона динамических переменных  $a^*$  и  $a$ :

$$(a^*, a) = e^{-i\omega t} e^{i\omega t} (A^*, A) = -i.$$

Таким образом, две пары динамических переменных —  $a^*$ ,  $a$ , с одной стороны, и  $A^*$ ,  $A$  — с другой — обладают *одинаково зависящими от них функциями Гамильтона и одинаковыми скобками Пуассона*. Тем не менее их движения совершенно различны, например

$$\frac{da}{dt} = (H, a) + \frac{\partial a}{\partial t} = -i\omega a + i\omega a = 0.$$

Дело в том, что:

«большие»  $A$  не зависят от времени явно, и потому зависят от времени,

в то время как

«малые»  $a$  зависят от времени явно, и потому не зависят от времени!

**20.3.** Но разве нельзя «забыть» про явную зависимость «малых»  $a$  от времени? Можно, но это будет означать, что мы хотим ввести их в качестве основных канонических переменных — координаты и импульса (с точностью до  $i$ ), а это можно сделать лишь с помощью канонического преобразования, *зависящего от времени*.

Иными словами, соотношения (\*) надо будет для этого рассматривать как вводящие каноническое преобразование уравнения (65). Поскольку эти уравнения явно содержат время, то новая функция Гамильтона  $H'$  не будет более совпадать со старой,

ее надо будет искать из уравнений (71), которые примут вид

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial \pi}\right)_{a,t} = \left(\frac{\partial H}{\partial \pi}\right)_a + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_{P,A}; \quad \left(\frac{\partial H'}{\partial a}\right)_{\pi,t} = \left(\frac{\partial H}{\partial a}\right)_\pi - \left(\frac{\partial \pi}{\partial t}\right)_{P,A};$$

$$\pi \equiv i a^*.$$

Отсюда

$$H' = H + \int \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_{PA} d\pi = H + \int i\omega a d\pi = H + i\omega a\pi + f(a).$$

В то же время

$$H' = H - \int \left(\frac{\partial \pi}{\partial t}\right)_{PA} da = H - \int (-i\omega\pi) da = H + i\omega a\pi + g(\pi).$$

Следовательно,  $f(a) = g(\pi) = 0$  и

$$H' = H + i\omega\pi a = \omega a^* a - \omega a^* a = 0.$$

Итак, если рассматривать «малые»  $a$  как канонические координату и импульс, то новая функция Гамильтона тождественно обращается в нуль, и уравнения движения для (теперь *не зависящих* от времени *явно*!)  $a$  и  $a^*$  по-прежнему дадут

$$\dot{a} = (0, a); \quad \dot{a}^* = (0, a^*), \quad \text{т. е.} \quad a = \text{const}; \quad a^* = \text{const}.$$

**20.4.** Проведенное в рассмотренном примере преобразование к новым каноническим переменным  $a, \pi$  — такое, что новая функция Гамильтона  $H'(\pi, a) \equiv 0$  и, следовательно, новые канонические переменные постоянны во времени, — не является каким-либо монстром, но составляет основу одного из самых могучих методов интегрирования уравнений движения.

Именно, рассматривая теперь уже произвольную механическую систему, сделаем каноническое преобразование с производящей функцией  $\Phi = \Phi(q, P, t)$ , так что

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad (*)$$

причем постараемся выбрать производящую функцию так, чтобы новая функция Гамильтона

$$H'(P, Q, t) = H(p, q) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{обратилась бы в нуль:} \quad H' = 0. \quad (76)$$

Записанное через производящую функцию  $\Phi$  это требование приобретает форму

$$H\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (77)$$

— т. е. является по отношению к  $\phi$  дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и степеней: первой — по отношению ко времени, второй — по отношению к остальным переменным, если функция Гамильтона имеет вид суммы кинетической и потенциальной энергии.

Это уравнение называется **уравнением Гамильтона–Якоби**.

В новых переменных  $P_i$  и  $Q_i$  динамическая задача тривиальна, поскольку  $P_i = \text{const}$  и  $Q_i = \text{const}$  и все сводится к установлению связи новых переменных со старыми, т. е. к интегрированию уравнения (77).

Для наших целей интересен так называемый полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, зависящий от  $n$  произвольных постоянных  $P_1, \dots, P_n$

$$\phi = \phi(q_1, \dots, q_n; t; P_1, \dots, P_n).$$

Если полный интеграл известен, то можно принять фигурирующие в нем  $n$  произвольных постоянных за новые (постоянные в силу  $H' = 0$ ) импульсы, а частные производные по ним — за новые (постоянные!) координаты  $Q_i$ : тогда  $2n$  уравнений (\*) позволят нам выразить старые координаты и импульсы в виде функций времени и новых (постоянных) импульсов и координат.

**20.5.** Как в рассмотренном примере, так и в общем случае преобразования Гамильтона–Якоби мы сталкиваемся с ситуацией, описанной в замечании после формулы (54) в § 16: новая функция Гамильтона  $H'$  не зависит от времени явно, но, тем не менее, не совпадает с физической энергией системы.

Этот парадокс находит себе исчерпывающее объяснение лишь в квантовой механике, где выясняется, что рассмотренному нами зависящему от времени каноническому преобразованию Гамильтона–Якоби отвечает переход от представления Гейзенберга к представлению Шредингера, в котором появляется «другая» функция Гамильтона, управляющая изменением во времени состояния системы — концепции, не имеющей себе в классической механике прямого аналога. Тогда оказывается, что роль физической энергии играет, грубо говоря, сумма этих двух гамильтоновых функций — она-то и сохраняется или не сохраняется, судя по тому, замкнута ли физическая система или нет.

## Часть II

# МЕХАНИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

---

### 1. Принцип относительности и принцип постоянства скорости света

**1.1.** Классическая механика, излагавшаяся в первой части, основывалась по существу на двух фундаментальных физических допущениях: принималось, что

(1) справедлив принцип относительности, т. е. все инерциальные системы отсчета равноправны <sup>1)</sup>;

(2) состояние системы — следовательно, в частности, и силы, действующие на некоторую частицу, — в какой-либо момент времени определяется полностью координатами и скоростями всех частиц системы *в тот же момент времени* — т. е. принималось представление о *мгновенности* распространения взаимодействий.

(Кроме этих двух постулатов требовалось еще и допущение об однородности и изотропии пространства и времени в инерциальных системах. Это допущение полностью сохраняется в теории относительности, однако сейчас нет нужды концентрировать на нем свое внимание.)

**1.2.** При переходе от чисто механических явлений к области оптики и электродинамики — а эти два раздела физики бурно развивались во второй половине XIX века — выяснилось <sup>2)</sup>, что в природе существует процесс — распространение света или

---

<sup>1)</sup> Это утверждение часто формулируют в виде «принципа невозможности»: никакими механическими опытами нельзя установить выделенное положение какой-либо одной инерциальной системы отсчета относительно всех остальных. Такие принципы невозможности удобны для формулировки фундаментальных физических положений — можно напомнить читателю формулировку закона сохранения энергии в форме принципа невозможности построения вечного двигателя первого рода.

<sup>2)</sup> Мы не будем здесь вдаваться ни в историю экспериментальных открытий, ни в изложение последовательной эволюции теоретических представлений,

электромагнитных волн — обладающий парадоксальными свойствами. Именно, с одной стороны, для явлений, включающих этот процесс,

(1) *принцип относительности сохраняется,*

— т. е. оптические или электромагнитные эффекты также не позволяют преимущественно выделить какую-либо частную инерциальную систему отсчета; но в то же время

(2) *скорость света не зависит от движения источника*

— под этим имеется в виду, что в некоторой инерциальной системе отсчета  $K$  скорость света, испускаемого движущимся в этой системе источником  $S'$ , та же, что и для испускаемого покоящимся (в  $K$ ) источником  $S$ <sup>1)</sup>.

Чтобы понять, почему эти свойства света парадоксальны, заметим, что первое из утверждений представлялось бы совершенно естественным в рамках корпускулярной теории света: если испускание света есть просто испускание некоторых — очень легких и быстрых — частиц, то это есть типичный механический процесс, и неудивительно, если для него сохраняется справедливый для всех механических процессов принцип относительности. Однако в такой теории следовало бы ожидать, что источник, движущийся со скоростью  $v$ , испускал бы — в соответствии с механическим законом сложения скоростей (1.4а) — в направлении своего движения свет со скоростью  $c + v$ , а в противоположном — со скоростью  $c - v$ , если  $c$  есть скорость распространения света от неподвижного источника.

Напротив, второе утверждение самоочевидно с точки зрения волновой теории света, которая представляет себе свет в виде возмущений, волн, распространяющихся, подобно звуковым волнам в упругих средах, в некоторой гипотетической мировой среде — **эфире** — последовательно от одной точки к соседней со скоростью, которая может зависеть лишь от свойств среды, но никак не от природы первоначального возмущения. Однако тогда с этой универсальной мировой средой — с эфиром — можно было бы связать (инерциальную) систему отсчета, которая была бы

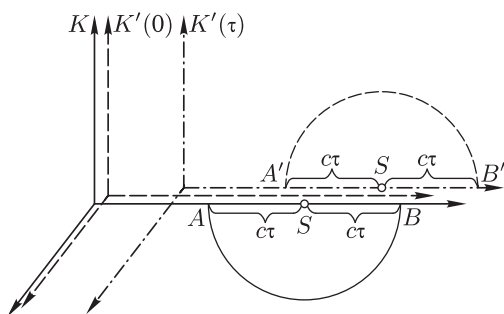
---

а ограничимся формулировкой основных выводов из накопившихся к началу XX века опытных фактов.

<sup>1)</sup> То, что скорость света в  $K$ , испускаемого *покоящимся в ней* источником  $S$ , совпадает со скоростью света, испускаемого источником  $S'$ , *в той* (инерциальной) *системе* отсчета  $K'$ , в которой источник  $S'$  *покоится*, — это не есть новое утверждение, но часть утверждения (1)! Мы специально подчеркиваем это обстоятельство, поскольку во многих (даже хороших!) книгах — утверждение (2) формулируется небрежно, что ведет к недоразумениям.

выделена из всех прочих — т.е. первое утверждение было бы нарушено.

Мы видим таким образом, что утверждения (1) и (2) кажутся противоречащими друг другу. Противоречие это не связано с рассматривавшимися конкретными механизмами распространения света. В самом деле, рассмотрим две системы отсчета, «неподвижную» систему  $K$  и движущуюся относительно нее систему  $K'$ , и пусть в момент времени  $t = 0$  начала отсчета этих двух систем совпадают (см. рисунок). Тогда спустя некоторое время  $\tau$  эти две системы сдвинутся относительно друг друга. Пусть теперь в момент времени  $t = 0$  в точке с координатами  $x = x'$  источник  $S$  (в силу утверждения (2) состояние его движения для нас безразлично!) испускает световой сигнал. К моменту  $\tau$  этот сигнал достигнет в системе  $K$  точек  $A$  и  $B$  с координатами  $x - c\tau$  и  $x + c\tau$ . Однако в силу утверждения (1) этот сигнал



должен достигнуть в тот же момент в системе  $K'$  точек  $A'$  и  $B'$  с координатами  $x' - c\tau$  и  $x' + c\tau$ . Поскольку система  $K'$  движется относительно  $K$ , то в момент  $\tau$   $A'$  не будет совпадать с  $A$ , а  $B'$  — с  $B$ . Но световой сигнал приходит в момент  $\tau$  в какие-то *определенные* точки вне зависимости от того, в какой системе отсчета мы описываем его распространение — т.е. мы приходим к противоречию.

**1.3.** Научный подвиг Эйнштейна, подвиг, потребовавший исключительной отваги мысли, состоял в том, чтобы пойти в разрешении образовавшегося парадокса по самому простому пути, — коль скоро оба утверждения (1) и (2) суть прямые обобщения опытных фактов, то они *не могут* находиться в логическом противоречии друг с другом. Поэтому оба эти утверждения следует постулировать как основные физические принципы — **принцип относительности** (1) и **принцип постоянства скорости света** (2). Источник же только что проиллюстрированного противо-

речия следует искать не в неверности одного из этих принципов, а в некритическом использовании представлений, основанных на обычном «здравом смысле».

Если пересмотреть проведенное рассуждение с такой точки зрения, то можно заметить, что мы неявно допустили в нем, что время *течет* в движущихся друг относительно друга системах отсчета  $K$  и  $K'$  *одинаковым образом*, т. е. допустили **абсолютность времени** (3). Таким образом в логическом противоречии оказываются не *два* утверждения (1) и (2), а три — (1), (2) и (3). Одно из них должно быть неверным, и поскольку только третье, как показал проведенный Эйнштейном анализ, не имело на самом деле никакого опытного подтверждения, то именно им и приходится пожертвовать.

Таким образом за логическую совместность принципов относительности и постоянства скорости света приходится расплачиваться отказом от «очевидного» представления об абсолютности времени, приходится принимать, что каждой инерциальной системе отсчета  $K'$  соответствуют не только *свои координаты*  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , но и *свое время*  $t'$ . В дальнейшем построении вытекающей из принципов (1) и (2) теории — такая теория называется **специальной теорией относительности**, а в качестве притяжательного прилагательного употребляют слово **релятивистский** — мы не будем — в соответствии с общей нашей методической установкой — точно следовать оригинальным рассуждениям Эйнштейна, но в целях упрощения изложения сразу воспользуемся предложенной Минковским в 1908 году геометрической интерпретацией.

**1.4.** Основным понятием этой интерпретации является понятие **события**, которое характеризуется местом, где и временем, когда оно происходит. Это место и время могут быть указаны только по отношению к некоторой (инерциальной! другие пока вовсе исключаются из рассмотрения) системе отсчета  $K$  — в ней событие характеризуется четверкой чисел (**координат события**)

$$\{t, x, y, z\} = \{t, \mathbf{r}\}.$$

Таким образом в каждой системе отсчета координаты событий образуют некоторое четырехмерное многообразие. В другой системе  $K'$  координаты событий

$$\{t', x', y', z'\} = \{t', \mathbf{r}'\}.$$

образуют другое четырехмерное многообразие.



Чтобы установить связь между 4-многообразиями, изображающими события в двух системах отсчета, обратимся к основным принципам (1) и (2).

**1.4.1.** Рассмотрим два события:  $S_1$  — состоящее в испускании светового сигнала в некотором месте в некоторый момент, и  $S_2$  — состоящее в регистрации того же сигнала в другой момент в другом месте. Будем рассматривать эту пару событий с точки зрения двух разных инерциальных систем  $K$  и  $K'$ . Тогда:

$$\begin{array}{l|l} \text{В системе отсчета:} & K' \\ \hline \text{координатами } S_1 \text{ будут} & \{t_1, x_1, y_1, z_1\} \\ \text{координатами } S_2 \text{ будут} & \{t_2, x_2, y_2, z_2\} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} K \\ \hline \{t'_1, x'_1, y'_1, z'_1\} \\ \{t'_2, x'_2, y'_2, z'_2\} \end{array} \right.$$

В соответствии с (1) и (2) распространение света в обеих системах отсчета происходит с одной и той же скоростью  $c$ , т. е.

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

и

$$c(t'_2 - t'_1) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2},$$

причем можно утверждать, что из выполнения одного из этих равенств должно следовать выполнение другого.

**1.4.2.** Высказанное утверждение можно сформулировать в красивой геометрической форме, если соотнести *каждой* паре координат событий — число  $s$ , называемое **интервалом**, по формуле

$$-s_{21}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (1)$$

Тогда то обстоятельство, что события  $S_1$  и  $S_2$  могут состоять в испускании и регистрации одного и того же светового сигнала, можно записать — в силу только что приведенной аргументации в *любой* системе отсчета — в форме требования:

$$\text{в } K: \quad s_{21} = 0; \quad \text{в } K': \quad s'_{21} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Итак, в силу принципов (1) и (2) факт обращения интервала между двумя событиями в нуль *не зависит от системы отсчета*; это обстоятельство характеризуют словами, что нулевые интервалы **инвариантны**, или суть **инварианты**.

**1.4.3.** Бывает удобно рассматривать интервал между двумя бесконечно близкими событиями

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1a)$$

Для таких интервалов, конечно, тоже сохраняется выражающее принципы (1) и (2) основное свойство, что из обращения интервала между двумя событиями в нуль в одной системе отсчета следует его обращение в нуль в другой и наоборот:

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow ds'^2 = 0. \quad (2a)$$

Не составляет труда показать, что это свойство может быть выполнено только в том случае, если бесконечно малые (не равные нулю!) интервалы в разных системах отсчета пропорциональны:

$$ds^2 = \gamma ds'^2$$

с коэффициентом пропорциональности, в принципе зависящем от координат, времени и относительной скорости рассматриваемых систем отсчета. Однако зависимость  $\gamma$  от координат или времени противоречила бы (ср. § I, 4) однородности пространства и времени в инерциальной системе отсчета, а зависимость от направления относительной скорости двух систем — изотропии пространства, и остается только зависимость от квадрата относительной скорости  $\mathbf{V}^2$ . Однако и такая возможность исключается, если рассмотреть два последовательных преобразования, сперва от системы  $K$  и  $K'$ , а затем от  $K'$  к  $K$ , — при этом интервал  $ds$  приобрел бы множитель  $\gamma^2$  и в то же время должен был бы равняться первоначальному значению.

Таким образом, мы пришли от (2a) к значительно более сильному утверждению

$$ds^2 = ds'^2 \quad (3a)$$

об инвариантности не только нулевых, но и произвольных бесконечно малых интервалов.

**1.4.4.** Чтобы перейти от бесконечно малых интервалов к конечным, надо использовать еще то обстоятельство, что при переходе от одной инерциальной системы к другой равномерно-прямолинейное движение остается равномерно-прямолинейным — в комбинации с (3a) оно приведет нас к выводу, что координаты и время одной системы должны выражаться через координаты и время другой *линейно*, из чего и будет сразу следовать перенос утверждения (3a) на *конечные* интервалы

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2. \quad (3)$$

**1.4.5.** Итак, основные физические принципы (1) и (2) позволяют установить в многообразии координат событий квадратичную форму (1), значение которой *не зависит* от выбора

системы, отсчета. Пользуясь этим можно, продолжая построение намеченной геометрической интерпретации, ввести в многообразии событий **метрику**, полагая «квадрат расстояния» между событиями равным значению формы (1), и превратить тем самым многообразие событий в пространство, точками которого эти события являются. Выбор частной инерциальной системы отсчета  $K$  будет отвечать тогда введению в этом пространстве частной (ортогональной) системы координат. Таким образом в нашей геометрической интерпретации обычное трехмерное пространство и время объединяются в одно четырехмерное пространство (далее будем говорить для краткости 4-пространство), которое называют **пространством Минковского** или (постепенно выходящий из употребления термин) — **миром Минковского** <sup>1)</sup>.

**1.5.** Метрика (1) мира Минковского содержит (как и в евклидовом пространстве) только квадраты разностей координат, но один из них входит со знаком «+», а три другие — со знаком «-»; такое пространство принято называть **псевдоевклидовым** (точнее, псевдоевклидовым с сигнатурой  $(+, -, -, -)$ ). Благодаря индефинитности метрики псевдоевклидова пространства его геометрия в некотором смысле богаче содержанием, чем евклидова. В то время как пары точек евклидова пространства могут качественно находиться (если они не совпадают) только в одном соотношении друг с другом, квадрат псевдоевклидова «расстояния»

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2, \quad (\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

может быть как положительным, так и отрицательным или (для несовпадающих точек!) равным нулю. В соответствии с этим возникают три качественно разные возможности взаимного расположения двух мировых точек:

если квадрат разделяющего их интервала:

$s^2 > 0$ , то интервал называют **времениподобным**;

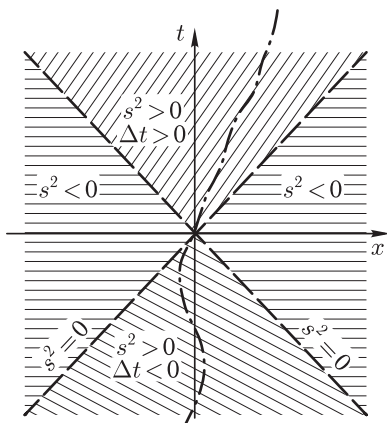
$s^2 = 0$ , — **светоподобным**;

$s^2 < 0$ , — **пространственноподобным**.

Те же термины употребляют и по отношению к самой паре: говорят «точка  $A$  пространственноподобна точке  $B$ » и т. п.

<sup>1)</sup> В соответствии с последним термином, события, являющиеся точками мира Минковского, называют **мировыми точками** (термин, постепенно выходящий из употребления; чаще говорят 4-точка), а линии в этом пространстве — (термин вполне живой) **мировыми линиями**.

**1.5.1.** Если фиксировать одну из точек пары, — скажем принять ее за начало отсчета некоторой системы координат, — то все остальные мировые точки разобьются в смысле этого отношения на три класса, т. е. все 4-пространство разобьется (по отношению к началу координат) на три области. Такое разбиение поучительно проиллюстрировать на рисунке <sup>1)</sup>.



структура псевдоевклидова пространства

две прямые  $x = \pm ct$ ). Световой конус служит границей областей, пространственноподобных и времениподобных началу координат. На чертеже **каждая** из этих областей выглядит в свою очередь разбитой на две несвязные подобласти; однако в реальном 4-случае, как легко сообразить, пространственноподобная область связна (хотя и не односвязна); времениподобная область действительно распадается на две несвязные подобласти соответственно знаку разности временной координаты. Таким образом фактически все 4-пространство разбивается даже не на три, а на четыре различные области.

**1.6.** Чтобы установить физический смысл проведенной классификации возможных взаимных расположений точек псевдоевклидова пространства, будем, как и при ее иллюстрации на графике, рассуждать сперва в рамках какой-то определенной системы координаты в 4-пространстве Минковского. С обычной трехмерной точки зрения выбор системы 4-координат — это

по отношению к началу координат) на три области. Такое разбиение поучительно проиллюстрировать на рисунке <sup>1)</sup>. Поскольку условие  $s^2 = 0$  есть уравнение, то размерность области, занятой точками, светоподобными началу координат, будучи на единицу меньше размерности пространства, будет образовывать в нем 3-мерную (на чертеже — одномерную) **гиперповерхность**. Эта гиперповерхность называется световым **конусом** (на чертеже виден только след, образовавшийся при сечении светового конуса плоскостью  $y = z = 0$ :

<sup>1)</sup> Естественно, что на листе бумаги нельзя изобразить 4-пространство, поэтому нам придется ограничиться осью времени и *одной* из пространственных осей; но и с этим ограничением псевдоевклидову плоскость нельзя метрически точно наложить на евклидову; поэтому предлагаемый чертеж, как и все дальнейшие графики, будет давать нам только *аффинное* соответствие.

выбор некоторой инерциальной системы отсчета, а инерциальная система отсчета фиксируется, как мы знаем, заданием каких-либо материальных тел (или материального тела), которые принимаются в этой системе за неподвижные.

**1.6.1.** Но материальное тело занимает в каждый момент времени некоторое определенное положение в пространстве; поэтому, если отвлечься от его размеров, то оно представляется в геометрической интерпретации Минковского непрерывной цепочкой событий — мировой линией. В частности, материальное тело, олицетворяющее начало координат обычного 3-пространства в выбранной системе отсчета, есть совокупность событий, образующих в 4-пространстве прямую линию — ось времени системы координат в 4-мире.

Интервал между любой парой принадлежащих этой линии событий, поскольку для них  $\Delta l = 0$ , всегда времениподобен:  $\Delta s^2 > 0$ . Это свойство, будучи инвариантным, не может зависеть от того, связали ли мы с телом систему отсчета или нет. Один из старейших прозелитов релятивизма, известный английский астроном А. С. Эддингтон, характеризует его в своей превосходной книге «Теория относительности» словами: «Материальная частица, понимаемая как совокупность событий, является системой, у которой линейное протяжение обладает временным характером» — в переводе на менее изысканный способ выражения это означает, что мировая линия, изображающая материальную частицу, **всюду времениподобна**, т. е. любая пара ее точек разделена времениподобным интервалом.

Итак, пары событий, разделенных времениподобными интервалами, могут физически соответствовать двум разным моментам «жизни» одной и той же материальной частицы или — выражаясь более абстрактно — лежать на оси времени некоторой (инерциальной) системы отсчета — этим и объясняется принятый в их отношении термин.

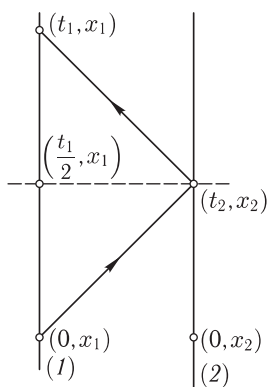
**ЗАМЕЧАНИЕ:** Отсюда мы видим, в частности, что материальное тело в теории относительности не может ни в какой системе отсчета  $K$  двигаться со скоростью, большей скорости света  $c$ . В самом деле, если некоторое материальное тело двигалось бы со скоростью, большей  $c$ , то оно изображалось бы на нашем графике (стр. 164) мировой линией, лежащей *вне* светового конуса; пары событий на такой линии были бы разделены (в системе  $K$ ) *пространственноподобными* интервалами. Однако с этим телом можно было бы, как и с каждым материальным телом, связать систему отсчета  $K'$ , в которой оно покоится, — в ней та же

мировая линия была бы осью времени, т.е. интервалы между лежащими на ней событиями были бы *времениподобны*. Таким образом знак интервала зависел бы от системы отсчета, что в силу инвариантности интервала невозможно. ■

**1.6.2.** Физический смысл *светоподобного* расположения двух событий нам уже известен — это события, которые могут быть связаны световым сигналом, а световой конус есть просто геометрическое место траекторий таких сигналов, испускаемых из одной 4-точки (или принимаемых в ней).

### 1а. Одновременность и пространство<sup>1)</sup>

Прежде чем перейти к физическому смыслу *пространственноподобного* расположения двух событий, уточним, что, собственно, имеют в виду, когда говорят о пространстве. С четырехмерной точки зрения под пространством (в некоторый момент времени)



синхронизация часов

естественно понимать совокупность всех одновременных друг другу событий. Таким образом пространство оказывается определяемым через понятие **одновременности**. Однако как раз с понятием одновременности в теории относительности дело обстоит совсем не просто — мы уже видели, что два основных принципа несовместны с интуитивным представлением о независимости одновременности от выбора системы отсчета.

**1а.1.** Поэтому будем сперва рассуждать в рамках некоторой фиксированной инерциальной системы отсчета  $K$  и допустим, что одновременность событий, происходящих в ней в разных местах, как-то установлена, т.е. что мы каким-то способом (неизвестно — хорошим или плохим) умеем синхронизовать часы, покоящиеся в разных точках, скажем в точках  $x_1$  и  $x_2$ <sup>2)</sup>. На рисунке изображены

<sup>1)</sup> Он же, по логической классификации, 1.6.3.

<sup>2)</sup> Заметим, что в классической (нерелятивистской) теории в специальном определении одновременности нет надобности, поскольку в принципе она может быть установлена с помощью допускаемых в ней мгновенно распространяющихся взаимодействий. Реальная же измерительная практика использует для этой цели два способа: (α) перевозку хронометров и (β) синхронизацию с помощью световых (или радио-, что то же самое) сигналов. Подробный анализ

мировые линии (1) и (2) этих часов и «одновременные» события  $(0, x_1)$  и  $(0, x_2)$ .

**1а.1.1.** Произведем теперь два (мысленных) опыта. Во-первых, испустим в пространственной точке  $x_1$  в момент времени 0 (событие  $(0, x_1)$ ) световой сигнал и зарегистрируем его приход в пространственную точку  $x_2$  в момент  $t_2$  (событие  $(t_2, x_2)$ ). Во-вторых, одновременно с регистрацией сигнала направим из точки  $x_2$  (то же событие  $(t_2, x_2)$ ) ответный сигнал в точку  $x_1$ . Пусть его прибытие в  $x_1$  будет зарегистрировано в момент  $t_1$  (событие  $(t_1, x_1)$ ).

Каждый из этих опытов может служить для определения скорости света, причем из первого опыта мы получим для нее значение

$$c = \frac{|x_2 - x_1|}{t_2}, \quad \text{а из второго} \quad c = \frac{|x_2 - x_1|}{t_1 - t_2}.$$

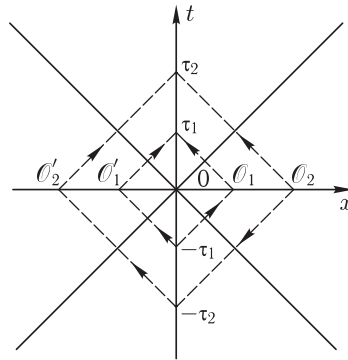
Однако из-за изотропии пространства скорость света не может зависеть от направления распространения сигнала, т. е. *оба* опыта должны (при *правильной* синхронизации часов в разных местах!) дать *один и тот же* результат, т. е. должно быть:

$$t_1 - t_2 = t_2 \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{t_1}{2}.$$

Иными словами, событием в пространственной точке  $x_1$ , одновременным событию  $(t_2, x_2)$ , должно быть событие  $\left(\frac{t_1}{2}, x_1\right)$ .

**1а.1.2.** Рассмотренные мысленные опыты позволяют теперь сформулировать **определение одновременности**:

Назовем событие  $\mathcal{O}'$  **одновременным** событию  $\mathcal{O}$ , имеющему координаты  $t = 0, x = 0$  (и  $y = 0, z = 0$ ), если световой сигнал, испущенный в момент  $t = -\tau$  по часам, покоящимся (в системе  $K$ ) в пространственной точке  $x = 0$  (и  $y = 0, z = 0$ ), вернется после отражения (событие  $\mathcal{O}'$ ) в то же место  $x = 0$  (и  $y = 0, z = 0$ ) в момент  $t = +\tau$  по тем же часам.



определение одновременности

показывает, что в теории относительности оба способа ведут к тождественным результатам, а поскольку второй из них принципиально проще, то именно его рассмотрением мы и ограничиваемся ниже.

На рисунке изображены две пары таких одновременных  $O$  событий  $O_1, O'_1$  и  $O_2, O'_2$ , отличающиеся направлением испущенного сигнала (внутри пары) и временем распространения сигнала  $2\tau$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1: Нетрудно показать, что сформулированное определение обладает свойствами рефлексивности и транзитивности. ■

**1a.2.** Поэтому можно дать дальнейшее определение:

Для всех  $\tau$  и всех направлений распространения события  $O'$  образуют в совокупности гиперплоскость  $t = 0$ , называемую **пространством** в момент  $t = 0$ .

В силу сделанного замечания 1 пространство не будет зависеть от того, относительно какой его точки его начали строить.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: Принятая процедура определения одновременности позволяет, в частности, установить также и способ *измерения пространственных расстояний без использования масштабов*, с помощью лишь одних часов. В самом деле, поскольку свет всегда распространяется со скоростью  $c$ , то событие  $O'$  потребовавшее время  $2\tau$  для распространения светового сигнала от начала координат в пространстве до  $O'$  и обратно, должно быть расположено на расстоянии  $\frac{2\tau}{2}c = c\tau$  от начала координат, т. е. иметь координату  $x = c\tau$  (или  $x = -c\tau$ , судя по направлению посылки сигнала). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3: Определения одновременности и пространства основывались на использовании часов, *покоящихся* в некоторой частной инерциальной системе  $K$ . Поэтому может случиться (и — в силу рассуждений начала параграфа — следует ожидать), что определенные понятия относятся к этой частной системе. Покажем, что это действительно так. ■

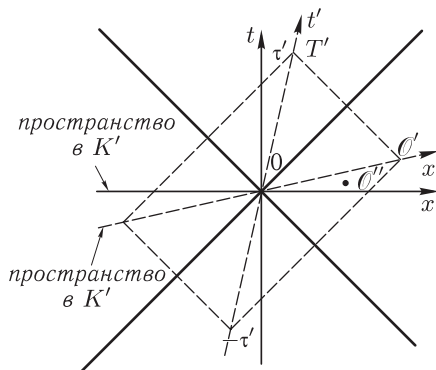
**1a.3.** Рассмотрим вторые часы, движущиеся в системе  $K$  равномерно и прямолинейно со скоростью  $V$ . В мире Минковского их изображением будет прямая мировая линия  $x = Vt$ , и если связать с этими часами новую инерциальную систему отсчета  $K'$ , то эта прямая будет осью времени  $O't'$  системы  $K'$ . Повторяя со вторыми часами предписанную определением одновременности процедуру посылки световых сигналов, получим в качестве совокупности мировых точек, *одновременных точек*  $O$  в системе  $K'$ , т. е. в качестве *пространства в системе  $K'$* , гиперплоскость  $Ox'$ .

Итак, пространство в системе отсчета  $K'$  не совпадает с пространством в системе отсчета  $K$ ; понятие одновременности двух



событий оказывается — в полном соответствии с рассуждениями в начале параграфа 1 — не абсолютным, а относительным, зависящим от выбора инерциальной системы отсчета: события  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{O}'$ , одновременные в  $K'$ , неодновременны в  $K$ <sup>1)</sup>.

ЗАМЕЧАНИЕ 1: (не принципиальное): На чертеже системы отсчета  $K$  и  $K'$  выглядят неравноправно — координатные оси системы  $K'$  кажутся неортогональными. В действительности это — чисто кажущийся



одновременность в разных системах отсчета

эффект лишь аффинного соответствия евклидовых рисунков псевдоевклидову объекту: в псевдоевклидовом мире Минковского системы  $K$  и  $K'$  совершенно равноправны. ■

**1а.4. ЗАМЕЧАНИЕ 2:** (очень важное): Временной порядок пары событий, разделенных времениподобным (или светоподобным) интервалом, не зависит от выбранной системы отсчета. Напротив, порядок следования во времени двух событий, которые разделены *пространственноподобным* интервалом, может быть установлен выбором системы отсчета по произволу (например, на чертеже событие  $\mathcal{O}''$  происходит *позже*  $\mathcal{O}$  в системе  $K$ , но *раньше*  $\mathcal{O}$  в системе  $K'$ ). В частности, для любой пары событий, разделенных пространственноподобным интервалом, всегда можно найти систему отсчета, в которой они *одновременны*. ■

Поскольку общепризнанный принцип причинности требует, чтобы причина всегда предшествовала бы следствию во времени, то из замечания 2 видно, что причинно-следственные соотно-

<sup>1)</sup> Напомним, что уже в классической механике следствием равноправия всех инерциальных систем отсчета была «относительность одновременности»: события, происходящие в системе отсчета  $K'$  в одном месте, скажем  $\mathcal{O}$  и  $T'$  на чертеже, в системе  $K$  происходили в разных местах.

шения могут связывать лишь пары событий, интервал между которыми *времениподобен*. Но о всякой паре событий  $A$  и  $B$ , связанных соотношениями причины — следствия, всегда можно сказать, что из 4-точки  $A$  посылался сигнал, принятый в 4-точке  $B$ . Такими образом, оказывается, что в теории относительности любой сигнал из некоторой 4-точки  $A$  может быть послан лишь в 4-точки, отделенные от  $A$  времениподобным интервалом<sup>1)</sup>. Но этому всегда будет соответствовать скорость распространения сигнала, *меньшая скорости света  $c$*  (или, в крайнем случае светоподобного интервала, *равная ей*). Таким образом выясняется, что в теории относительности скорость света **есть максимально возможная скорость сигнала или максимально возможная скорость распространения взаимодействий**<sup>2)</sup>.

Итак,

механика теории относительности отличается от классической механики тем, что в ней существует **максимальная скорость распространения взаимодействий**.

## 16. Замедление времени<sup>3)</sup>

**16.1.** Вернемся к рассмотрению часов, покоящихся в некоторой инерциальной системе отсчета  $K$ ; в четырехмерной картине они будут изображаться прямой мировой линией, параллельной оси времени системы  $K$ . Пусть  $T_0, T_1, T_2 \dots$  — события, состоящие в том, что часы показывают время  $0, \tau_1, \tau_2, \dots$  соответ-

<sup>1)</sup> Точнее, в 4-точки, лежащие *в* или *на* верхней половине светового конуса. В немецкой литературе для этой половины существует образный термин «Nachkegel», что можно было бы перевести как **послеконус**. Аналогично, нижнюю половину конуса, объединяющую события, могущие служить *источниками* сигналов, принимаемых в  $A$ , по-немецки называют **предконусом** — «Vorkegel».

Ниже мы будем использовать обозначение  $A > B$  (читается:  $A$  **позже**  $B$ ) чтобы отметить, что 4-точка  $A$  лежит в послеконусе  $B$  (или — что то же самое — 4-точка  $B$  лежит в предконусе  $A$ ). Для пары же пространственноподобных событий будем применять значок  $A \sim B$  (читается: **пространственно подобно**). Удобство этих — предложенных Н. Н. Боголюбовым — обозначений состоит в том, что для всякой пары 4-точек  $A$  и  $B$  всегда имеет место точно) одна из четырех возможностей:  $A > B$ ,  $A < B$  (читается:  $A$  **раньше**  $B$ ),  $A \sim B$  или  $A = B$  (т. е. точки  $A$  и  $B$  просто совпадают).

<sup>2)</sup> Скорости, не могущие служить для передачи сигнала, *не ограничены* этим пределом. Так — популярный пример — если поворачивать источник остронаправленного светового пучка, то на достаточно удаленном «экране» образуемый этим пучком «зайчик» может двигаться сколь угодно быстро.

<sup>3)</sup> Он же формально 1.7.

ственно, тогда события  $T_2$  будут отделены от  $T_0$ , поскольку для покоящихся часов  $\Delta l = 0$ , интервалами  $s_i = c(\Delta t)_i = c\tau_i$ . Но — аргументация, к которой мы прибегаем уже не первый раз — значение интервалов между событиями не зависит от системы отсчета, те же самые интервалы будут разделять события  $T_i$  и  $T_0$  и в такой системе отсчета, в которой часы движутся. Мы приходим, таким образом, к важному выводу:

Показания покоящихся или движущихся равномерно и прямолинейно часов пропорциональны интервалу между прочтением показаний и установлением нуля на часах.

Иными словами, с четырехмерной точки зрения часы есть прибор для *измерения* (времениподобных) *интервалов*; лишь в той частной системе отсчета, где они покоятся, они измеряют одновременно и временную координату.

Для *неравномерно* движущихся часов их показания могут зависеть от деталей конструкции — от того, насколько она чувствительна к ускорениям. Часы считаются *хорошими*, если они и в этих условиях продолжают измерять интервалы. Ставшие в последние годы практически доступными атомные часы очень хороши с этой точки зрения.

**16.2.** Рассмотрим теперь материальное тело, движущееся по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета  $K$  произвольным образом (не обязательно равномерно и прямолинейно). Время  $\tau$ , измеренное с помощью «хороших» часов, постоянно связанных с телом, называют **собственным временем** для данного материального тела.

Определим дифференциал собственного времени  $d\tau$ . «Хорошие» часы измеряют (разделенный на  $c$ ) интервал, Следовательно,

$$d\tau = \frac{1}{c} dc = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4a)$$

где  $v(t)$  — скорость материального тела в системе  $K$  в момент  $t$ . Конечный промежуток собственного времени получается отсюда интегрированием

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Поскольку

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1,$$

то  $\Delta\tau$  всегда  $\leq \Delta t$ , т. е.:

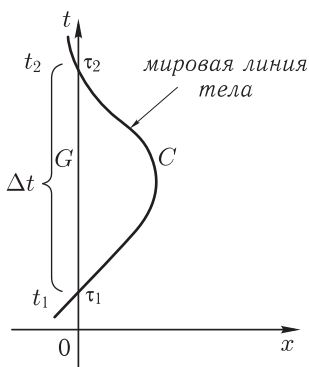
Собственное время всегда течет *не быстрее*, чем координатное время в какой-либо системе отсчета.

Этот эффект носит название эйнштейнова **замедления времени**.

**16.3.** Может возникнуть опасение, не находится ли эффект замедления времени в противоречии с принципом равноправия всех инерциальных систем отсчета — разве мы не можем связать с рассматриваемым телом (хотя бы в том случае, когда его движение равномерно и прямолинейно) систему отсчета  $K'$ , относительно которой должно было бы замедляться координатное время  $t$  — собственное время тех материальных тел, которые реализуют систему отсчета  $K$ ?

Чтобы разобраться в этом кажущемся парадоксе, разберемся подробнее в условиях, в которых может наблюдаться эффект замедления времени. Оказывается, что тут возможны две принципиально разные ситуации.

**16.3.1.** Первая возможность состоит в том, что мы хотим измерять начало и конец промежутка  $\Delta t$  координатного времени *в одном месте* системы  $K$ . Но для этого движение материального тела обязательно должно быть *неравномерным*, его мировая линия не может быть прямой. В этом случае речь идет, следовательно, о сравнении длин (в 4-смысле, конечно) прямой  $G$

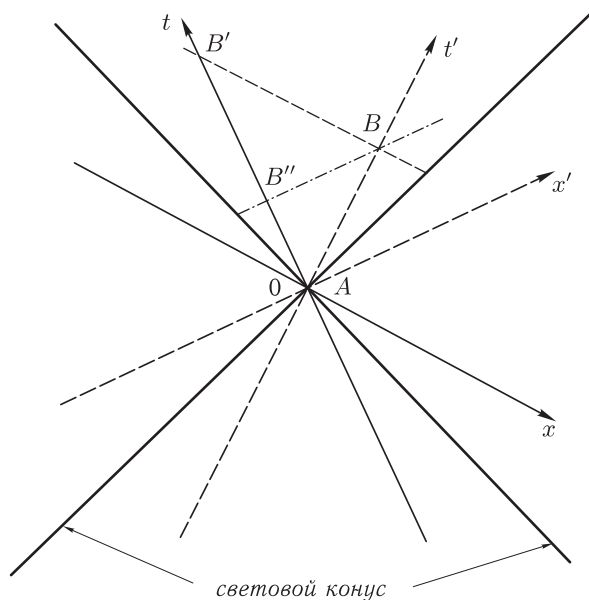


замедление времени 1

и кривой  $C$ , имеющих общие концы, — ясно, что эти длины должны быть разными; то что длина кривой оказывается *меньше* длины прямой, объясняется псевдоевклидовостью 4-мира. Итак, первая возможность явно несимметрична по отношению к замене рассматриваемого материального тела на тела, осуществляющие систему  $K$ .

**16.3.2.** Вторая возможность состоит в наблюдении эффекта замедления времени для *равномерно* (и *прямолинейно*) движущегося тела. С таким телом действительно можно будет связать другую инерциальную систему  $K'$ , саму по себе равноправную с  $K$ . Однако тогда начало и конец промежутка  $\Delta t$  координатного времени обязательно придется измерять в разных пространственных точках системы  $K$ . (См. рисунок на стр. 173, где 4-точки начала и конца рассматриваемого отрезка движения тела обозначены через  $A$  и  $B$ . Координатные оси системы  $K$  нанесены сплошными, а  $K'$  — пунктирными

линиями; мы расположили их евклидово-симметрично относительно конуса, тогда вдоль них сохраняется и метрическое соответствие с псевдоевклидовой картиной.) Для измерения этой разности в одном месте («одними часами»), надо будет сперва построить на оси времени системы  $K$  событие, *одновременное* событию  $B$ . Но ведь одновременность различна в  $K$  и  $K'$ ; к какой из них надо прибегнуть? Если речь идет о наблюдении движения тела в системе  $K$ , то мы должны строить событие  $B'$ , одновременное  $B$  в этой системе — тут-то и нарушается равноправие обеих систем отсчета и возникает замедление времени  $t'$  относительно времени  $t$ . Если бы мы строили на оси  $t$  событие  $B''$ , одновременное  $B$  в системе  $K'$  — а это отвечало бы наблюдению движения тел, осуществляющих систему  $K$ , в системе  $K'$ , — то пришли бы не к замедлению, а к *ускорению* времени  $t'$  относительно времени  $t$  (на тот же самый множитель), т. е. к замедлению времени  $t$  относительно времени  $t'$ . Таким образом,



замедление времени 2

в случае равномерного прямолинейного движения неравноправие лежит не в свойствах двух систем отсчета (или мировых линий двух движений), а в условиях постановки опыта.

## 2. Преобразования Лоренца

Как мы видели, в геометрической интерпретации Минковского переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой соответствует преобразование координат в псевдоевклидовом 4-пространстве, оставляющее инвариантным «расстояние» (1):

$$\begin{aligned}s^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = \\ &= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2.\end{aligned}$$

Нам надлежит найти теперь явный вид этих преобразований.

### 2.1. Сделаем сперва одно

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Из обычной геометрии евклидова пространства: известно, что преобразования, оставляющие в нем расстояния неизменными, образуют группу, включающую **сдвиги** (*неоднородные* преобразования, которые не будут пока нас интересовать) и *однородные* преобразования, которые в свою очередь делят на *собственные* преобразования — **повороты** (или **вращения**), детерминант матрицы которых равен  $+1$ , и *несобственные* преобразования — **отражения**, с детерминантом  $-1$  (сдвиги также являются собственными преобразованиями). При этом число независимых сдвигов равно  $n$  — числу измерений пространства, число независимых поворотов —  $\frac{n(n-1)}{2}$ , а независимое отражение существует только одно — например, преобразование, меняющее знак нечетного *числа* координат. Преобразование, состоящее в последовательном проведении двух таких отражений — т.е. преобразование, меняющее знаки *четного* числа координат, — оказывается уже вращением. ■

Новый момент, возникающий при переходе к псевдоевклидову пространству, обусловлен тем, что в нем мы должны различать «времениподобные» и «пространственноподобные» координаты. Поэтому появляются *два* независимых отражения — изменение знака единственной временной координаты и изменение знака нечетного числа пространственных координат, причем последовательное проведение двух отражений разных сортов уже не оказывается более вращением <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Отражение времени, т.е. преобразование

$$t = -t'; \quad x = x'; \quad y = y'; \quad z = z';$$

принято обозначать символом  $T$ :  $T\{t, x, y, z\} = \{-t, x, y, z\}$ . В качестве независимого пространственного отражения выбирают обычно инверсию — одно-

В свою очередь из вращений можно выделить преобразования, затрагивающие только  $x$ ,  $y$  и  $z$ , но не  $t$ , — это будут обычные пространственные повороты (напомним, что независимых среди них *три*), действие которых на трехмерный радиус-вектор  $r = (x, y, z)$  определено общей формулой (I, 18).

Нетривиальными являются три остальных независимых вращения — повороты в плоскостях  $(x, t)$ ,  $(y, t)$  или  $(z, t)$ . Чтобы получить аналитическую форму этих преобразований, воспользуемся удобным формальным приемом, позволяющим сводить псевдоевклидову метрику к евклидовой.

**2.2.** Будем для (как мы увидим ниже — очень существенного) сокращения письма обозначать пространственные координаты  $x, y, z$  одной буквой  $x$  с индексами 1, 2, 3 соответственно, а вместо времени  $t$  введем четвертую *чисто мнимую* координату

$$x_4 = ict, \quad (5)$$

так что выражение для интервала примет формально евклидов вид

$$-s^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2. \quad (5a)$$

**2.2.1.** Тогда линейные преобразования, оставляющие (5a) инвариантным и затрагивающие только координаты  $x_1 = x$  и  $x_4 = ict$ , запишутся в хорошо знакомой форме

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \psi x'_1 - \sin \psi x'_4, \\ x_4 &= \sin \psi x'_1 + \cos \psi x'_4, \end{aligned}$$

где  $\psi$  — параметр поворота. Чтобы выяснить его физический смысл, будем считать, что рассматриваемый поворот соответствует переходу от некоторой инерциальной системы отсчета  $K$  к другой инерциальной системе  $K'$ , движущейся относительно  $K$  вдоль оси  $x$  с (постоянной!) скоростью  $V$ . Тогда движение материальной точки, имеющей в  $K'$  во все моменты «времени»  $x'_4$  постоянную координату  $x'_1 = 0$ , должно изображаться в систе-

---

временное изменение знака всех трех пространственных координат; это преобразование принято обозначать символом  $P$ :  $P\{t, x, y, z\} = \{t, -x, -y, -z\}$ . В этих обозначениях только что сделанное утверждение гласит: « $PT$  не есть вращение». В классической (в смысле некантовой) теории, которой мы пока занимаемся, его значение не очень существенно, но в релятивистской квантовой теории оно играет важную роль.

ме  $K$  уравнением  $x - Vt$ , т.е.  $x_1 = \frac{V}{ic} x_4$ . Из выписанных же формул мы получаем

$$\frac{x_1}{x_4} = -\operatorname{tg} \psi.$$

Следовательно, угол  $\psi$  «евклидова поворота» оказывается чисто мнимым, причем

$$\operatorname{tg} \psi = i \frac{V}{c}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \sin \psi = \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

**2.2.2.1.** Как следует поступить здесь с выбором *знака* у корня? Если выбрать в обоих случаях знак «+», то мы придем к формулам

$$x_1 = \frac{x'_1 - i \frac{V}{c} x'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{i \frac{V}{c} x'_1 + x'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6a)$$

Эти преобразования называют **специальными преобразованиями Лоренца** или **преобразованиями Лоренца в узком смысле** по имени голландского физика Гендрика Антоона Лоренца, впервые их написавшего. (Надо отметить, что *смысл*, который придавал Лоренц этим преобразованиям, существенно отличался от того, который, следуя Эйнштейну, придаем им мы.)

**Общими же преобразованиями Лоренца** называют любые преобразования, оставляющие инвариантным (1) (впрочем, в последние годы возникла тенденция сохранить этот термин только для *однородных* преобразований, привлекая для обозначения *неоднородных* имя французского математика Пуанкаре). Они могут быть получены путем последовательного применения («перемножения») специальных преобразований Лоренца в плоскостях  $(x, t)$ ,  $(y, t)$  и  $(z, t)$ , пространственных поворотов и отражений  $P$  и  $T$ . Преобразования Лоренца, не включающие отражений, называют часто **собственными** преобразованиями Лоренца.

**2.2.2.2.** Выбор знака «−» у корня в выражении для синуса не даст нам ничего нового, так как это сведется к замене знака скорости  $V$ . Если же, однако, выбрать знак «−» в выражениях и для синуса и для косинуса, то мы придем к преобразованиям нового рода, не связывающихся непрерывно с преобразованиями (6a) ни при каких значениях параметра  $V$ . В частности, при



значении параметра  $V = 0$  мы приходим при таком выборе не к тождественному преобразованию, а к преобразованию

$$\{t, x\} = TP_x\{t', x'\} = \{-t, -x'\},$$

меняющему знаки времени и одной пространственной координаты, — это есть пример декларированного выше рода преобразований, которые, будучи произведением двух отражений, не суть вращения.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Любопытно проследить, в каком именно месте проявляется здесь отличие псевдоевклидова случая от евклидова. В последнем выражения синуса и косинуса угла поворота через тангенс также содержат иррациональность и ставят вопрос о знаках. Однако для *вещественной* угла, с которым мы имеем дело в евклидовом случае, и синус и косинус могут иметь *оба* знака, поэтому изменение знака корня для *обеих* функций можно интерпретировать как изменение аргумента. В псевдоевклидовом же случае, когда угол чисто мним, т. е. в обличье тригонометрических функций выступают на самом деле *гиперболические*, гиперболический косинус существенно положителен и изменение его знака никакой заменой аргумента компенсировано быть не может. ■

**2.2.3.** Мы записали специальное преобразование Лоренца в плоскости  $(x, t)$  через формальное мнимое «время»  $x_4$ . Перепи-санное через настоящее время  $t$ , оно будет выглядеть как

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6b)$$

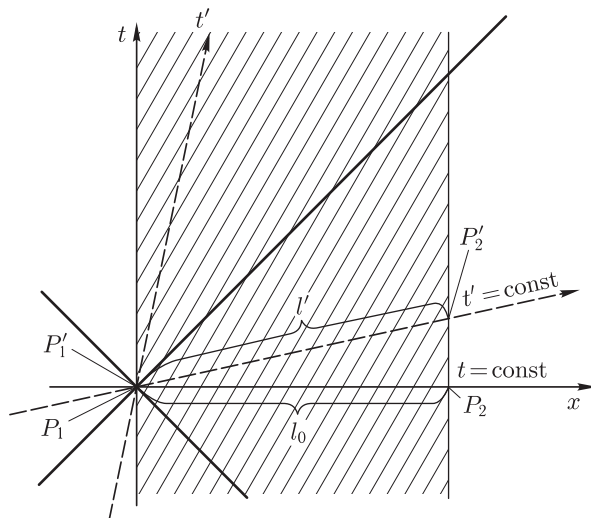
**2.2.3.1.** Если перейти в преобразовании Лоренца к случаю скоростей  $V$ , малых по сравнению со скоростью света, выполняя формальный предельный переход  $c \rightarrow \infty$ , то мы получим из (6b)

$$x_1 = x'_1 + Vt, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad t = t' \quad (6c)$$

— хорошо знакомое по первой части преобразование Галилея (I.4). Таким образом, для кинематики теории относительности выполняется **принцип соответствия**: в той области физических явлений, в которой все скорости малы по сравнению со скоростью света, релятивистское описание совпадает с описанием классической механики. Обратим внимание на то обстоятельство, что в (6c)  $t = t'$  — при предельном переходе к малым скоростям время становится абсолютным.

Преобразования Лоренца (6) определяют все кинематические соотношения к теории относительности. Рассмотрим два важных их применения.

**2.3. Лоренцево сокращение.** Пусть в системе  $K$  расположено некоторое неподвижное твердое тело — по историческим причинам обычно говорят о «стержне» или «масштабе», — длина



лоренцево сокращение

которого (в направлении  $x$ ) есть  $l_0$ . Какую длину припишет тому же телу наблюдатель, проводящий измерения в системе  $K'$ , движущейся относительно  $K$  со скоростью  $V$ ?

В (двумерном на нашем чертеже) мире Минковского неподвижное в  $K$  тело изобразится полосой, ограниченной мировыми линиями его концов — прямыми, параллельными оси  $t$ . Под **длиной** тела мы понимаем разность пространственных координат  $x$  *одновременных друг другу* 4-точек этих мировых линий. Поскольку, однако, одновременность зависит от системы отсчета, то оказывается, что под длинами тела в разных системах  $K$  и  $K'$  мы понимаем разность пространственных координат *разных* пар 4-точек: на нашем чертеже это будут 4-точки  $P_1$  и  $P_2$  в системе  $K$  и 4-точки  $P'_1$  и  $P'_2$  в системе  $K'$ , причем пара  $(P_1, P_2)$  имеет одинаковую координату  $t$ , пара  $(P'_1, P'_2)$  — одинаковую координату  $t'$ , а пары  $(P_1, P'_1)$  и  $(P_2, P'_2)$  — соответственно одинаковые координаты  $x$ :  $x = x_1$  и  $x = x_2$ .

Выразим с помощью (6b) пространственные координаты 4-точек  $P'_1$  и  $P'_2$  в системе  $K$  через их координаты в  $K'$ :

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

и вычтем эти выражения друг из друга

$$x_1 - x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

В левой части полученного равенства оказывается тогда как раз длина  $x_2 - x_1$  тела в системе  $K$ , в которой она покоится; ее называют **собственной длиной** и обозначают через  $l_0$ . В числителе же правой стоит длина  $l' = x'_2 - x'_1$  того же тела в системе  $K'$ . Итак,

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (7)$$

то есть

В той системе отсчета, относительно которой материальное тело движется, его длина в направлении движения  $l$  сокращается сравнительно с собственной длиной  $l_0$ .

Этот эффект называется **лоренцевым сокращением длины** <sup>1)</sup>.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Подчеркнем, что этот результат получился только за счет того, что под длинами стержня в  $K$  и в  $K'$  мы понимаем разности пространственных координат *разных* пар точек. Если бы речь шла о сравнении разностей пространственных координат *фиксированной* пары точек, скажем, событий  $P_1$  и  $P_2$  одновременных в  $K$ , то мы получили бы, совершая преобразование Лоренца от  $K$  к  $K'$ :

$$x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}; \quad x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}; \quad t_2 = t_1,$$

что

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

— т. е. эффект был бы прямо противоположным (7). Это замечание существенно для правильного преобразования пределов интегрирования,

<sup>1)</sup> Некоторые говорят: **сокращение Фицджеральда**.

выполняемого вдоль *фиксированной* гиперповерхности, при переходе от одной системы отсчета к другой. ■

Поскольку поперечные (к направлению движения) измерения тела не затрагиваются преобразованием (6), то его *объем*  $\mathcal{V}$  в движущейся системе сокращается по тому же закону (7):

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (7a)$$

**2.4. Сложение скоростей.** В качестве второго важного примера применения преобразований Лоренца, посмотрим, как складываются в релятивистской кинематике скорости, т. е. выясним, с какой скоростью  $v$  будет двигаться относительно системы  $K$  материальное тело, которое движется со скоростью  $v'$  относительно системы  $K'$ , в свою очередь движущейся относительно  $K$  со скоростью  $V$ . Напомним, что классические преобразования Галилея приводили к простому ответу

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (*)$$

на этот вопрос; теперь такой результат явно невозможен, так как при сложении двух скоростей  $\frac{c}{2} < v', V < c$  он приводил бы к  $v > c$ .

Перепишем преобразование (6b) для дифференциалов:

$$dx = \frac{dx'_1 + V dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dx_2 = dx'_2, \quad dx_3 = dx'_3, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

и поделим почленно первые три равенства на четвертое. Вспоминая определение скорости как производной координаты по времени, получим тогда

$$v_1 = \frac{dx'_1 + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'_1}, \quad v_2 = \frac{dx'_2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'_1}, \quad v_3 = \frac{dx'_3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'_1}$$

или

$$v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{v'_2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_3 = \frac{v'_3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}.$$

Мы видим таким образом, что — в отличие от координат — при переходе к другой системе отсчета преобразуются не только составляющая  $v_1$  скорости по оси  $x_1$ , но и составляющие  $v_2$  и  $v_3$ , и притом различным способом. Поэтому чтобы переписать полученные формулы в векторном виде, приходится выделять у  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  продольные (вдоль  $\mathbf{V}$ ) и поперечные составляющие:

$$\mathbf{V}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{V}}{1 + \frac{\mathbf{V}\mathbf{v}'_{\parallel}}{c^2}}; \quad \mathbf{V}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}'_{\perp}}{1 + \frac{\mathbf{V}\mathbf{v}'_{\parallel}}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}}. \quad (8)$$

Формула (8) и есть искомый релятивистский закон сложения скоростей, заменяющий простое галилеево правило (\*).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Если обе складываемые скорости  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{V}$  параллельны друг другу, то закон (8), который можно записать тогда в скалярной форме, значительно упрощается:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

В частности, из него видно, что если обе складываемые скорости  $v'$  и  $V$  меньше скорости света, то такой же будет и результирующая скорость  $v$ . Можно показать, что это утверждение тем более справедливо в общем случае (8). ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** В случае непараллельных скоростей  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{V}$  обе эти скорости входят в (8) несимметрично. Это значит, что результат сложения двух скоростей в теории относительности зависит от порядка. Поскольку всякую скорость (меньшую  $c$ !) можно рассматривать как параметр преобразования Лоренца от одной инерциальной системы к другой, то отсюда следует, что и результат двух последовательных специальных преобразований Лоренца, выполняемых в несовпадающих плоскостях, зависит от порядка их выполнения. ■

### 3. Четырехмерные векторы и тензоры

Как мы видели, интерпретация Минковского позволяет перевести кинематические соотношения на геометрический язык. Поэтому полезно познакомиться с наиболее удобным геометрическим аппаратом — векторным и тензорным исчислением в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве.

**3.1.** Совокупность четырех координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$  мировой точки можно рассматривать как компоненты проведенного из начала координат в эту точку 4-радиус-вектора

$$x_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

(в дальнейшем мы будем всегда считать, что *латинские* индексы пробегают *четыре* значения 1, 2, 3, 4, а *греческие* по-прежнему *три*: 1, 2, 3). При переходе от одной системы отсчета к другой эти компоненты преобразовываются в соответствии с формулами (6а) или аналогичными общеизвестными формулами для чисто пространственных поворотов. Совокупность компонент радиус-вектора во всех системах отсчета образует сам радиус-вектор; в четырехмерной геометрии трудно развить символику *прямого исчисления*, аналогичного трехмерным *векторным* обозначениям, поэтому прибегают к аналогу трехмерного *тензорного* исчисления и не делают в записи различия между радиус-вектором и его компонентами в какой-то системе отсчета, обозначая его тем же символом  $x_i$ . В последнее время, впрочем, входит в моду опускать индекс и писать просто  $x$ , предоставляя читателю догадываться, о какой величине идет речь.

**3.1.1.** В аналогии с радиус-вектором любой набор заданных в каждой системе отсчета упорядоченных четверок чисел  $A_1, A_2, A_3, A_4$  называют **4-вектором**

$$A_i = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \{\mathbf{A}, A_4\} = A,$$

если при переходе от одной системы отсчета к другой они преобразуются по тем же формулам

$$A_i = \alpha_{ij} A'_j, \quad (9.1)$$

что и радиус-вектор, т. е. с помощью матрицы  $\alpha_{ij}$  — задаваемой (6а) для специальных преобразований Лоренца и имеющей обычный вид для пространственных поворотов.

В формуле (9.1) подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу  $j$  от 1 до 4; мы будем систематически пользоваться этим *соглашением о суммировании*, подразумевающим, что по каждому дважды входящему в один член латинскому индексу должно быть проведено суммирование от 1 до 4.

### 3.1.2. 4-тензором $s$ -го ранга

$$A_{i_1, \dots, i_s}$$

называют совокупность заданных в каждой системе отсчета  $4^s$  чисел, преобразующихся при переходе от одной системы отсчета

к другой с помощью произведений матриц  $\alpha_{ij}$ :

$$A_{i_1, \dots, i_s} = \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_s j_s} A'_{j_1, \dots, j_s} \quad ^1). \quad (9.2)$$

**3.2.** Как и в трехмерном тензорном исчислении, основными алгебраическими операциями являются:

*сложение* тензоров одинакового ранга,

*умножение*, в результате которого образуется тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей, и

*свертывание* по паре индексов, в результате которого образуется тензор на две единицы меньшего ранга.

Удобно, особенно для двух векторов, рассматривать операцию, состоящую в последовательном проведении умножения и свертывания; ее называют *скалярным умножением*. Если два вектора в сокращенной записи (без индексов) записаны рядом, то это всегда означает их скалярное произведение:

$$\begin{aligned} A \cdot B = AB = A_i B_i = A_i B_k \delta_{ik} &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 = \\ &= \mathbf{AB} + A_4 B_4. \quad ^2) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Скалярное произведение вектора на самого себя образует его квадрат

$$A^2 = A_i^2 = \mathbf{A}^2 + A_4^2 = \mathbf{A}^2 - A_0^2. \quad (10.2)$$

В частности, квадрат радиус-вектора равен

$$x^2 = \mathbf{x}^2 - c^2 t^2 = -s^2. \quad (10.3)$$

**3.3.** В нашем определении временная часть радиус-вектора входит в его квадрат со знаком минус (а пространственная — со знаком плюс); о таком определении говорят как о выборе *отрицательной сигнатуры*. Не менее часто используется и *положительная сигнатура*, при выборе которой квадрат радиус-вектора определяется с противоположным знаком

$$x^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = s^2 \quad (+ \text{сигнатура!}). \quad (10.3')$$

4-радиус-вектор выбран у нас так, что его пространственные составляющие вещественны, а временная  $x_4$  — чисто мнима. Очевидно, что тем же свойством должны обладать и любые другие векторы, изображающие вещественные физические величины. Что же касается (изображающих вещественные физические величины) 4-тензоров, то

<sup>1)</sup> Из этого определения видно, что вектор есть тензор первого ранга, а тензором *нулевого* ранга можно считать инвариант — число, не меняющееся при изменении системы отсчета.

<sup>2)</sup> Где, как обычно,  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  и  $= 0$  при  $i \neq k$ .

те их компоненты, номер которых содержит нечетное число четверок, должны быть чисто мнимы, все же остальные — вещественны. Поскольку ниже мы будем интересоваться только вещественными величинами в вещественном псевдоевклидовом пространстве, то мы ограничим (с одним тривиальным исключением, которое будет вскоре описано) класс допустимых тензоров обладающими этим свойством.

Появление мнимых составляющих векторов и тензоров обусловлено только тем, что мы для внешней аналогии с евклидовым пространством ввели вместо времени мнимую четвертую координату  $x_4$ , как говорят, мы пользуемся *мнимой системой координат*. В этом нет необходимости; не менее часто пользуются *вещественной системой координат*, вводя вместо времени вещественную координату размерности длины

$$x^0 = ct \quad (x_4 = ix^0) \quad (5')$$

и поступая аналогичным образом для всех векторов:

$$A_4 = iA^0$$

и тензоров.

Если пользоваться вещественной системой координат, то для скалярного произведения приходится писать

$$A \cdot B = \mathbf{AB} - A^0 B^0 = g_{ik} A^i B^k,$$

и *метрический тензор*  $g_{ik}$  не будет уже единичным, но будет иметь на главной диагонали три плюса и один минус или три минуса и один плюс, судя по выбираемой сигнатуре. Поэтому приходится различать ко- и контравариантные (нижние и верхние) индексы; например при положительной сигнатуре, для контравариантного вектора  $A^i = \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$  соответствующим ему ковариантным будет

$$A_i = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{A^0, -A^1, -A^2, -A^3\}.$$

Суммирование (от 0 до 3) надо будет выполнять только по паре совпадающих индексов, один из которых ко-, а другой — контравариантен, появление же пары одинаковых верхних или нижних индексов в одном члене служит указанием на бессмысленность выписанного выражения. Квадрат вектора запишется в этом случае как скалярное произведение контравариантного вектора на соответствующий ему ковариантный

$$A^2 = A^i A_i = (A^0)^2 - (\mathbf{A})^2, \quad (10.2')$$

если не привлекать явно метрический тензор  $g_{ik}$ .

Как мы видим, избавление от мнимых составляющих достигается при выборе вещественной системы не слишком дешево; поэтому мы будем использовать в дальнейшем мнимую систему, однако в некоторых случаях будем располагать индексы и внизу и сверху (в мнимой систе-



ме положение индекса безразлично), так чтобы формулы сохранили бы смысл и при переходе к вещественной системе координат <sup>1)</sup>.

**3.4.** Кроме перечисленных выше алгебраических операций в тензорном исчислении играет важную роль *операция перестановки индексов*. С ее помощью можно выделить из числа тензоров второго ранга **симметричные** тензоры, обладающие свойством

$$T_{ik} = T_{ki}, \quad (11.1)$$

и **антисимметричные**, удовлетворяющие

$$A_{ik} = -A_{ki}. \quad (11.2)$$

Произвольный тензор второго ранга может быть однозначно представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного.

Свертывая симметричный тензор  $T_{ik}$  по двум его индексам, получаем инвариант

$$\text{Spur } T_{ik} = T_{ii}, \quad (11.3)$$

называемый **следом** тензора  $T_{ik}$  (говорят также **шпур**). Всякий симметричный тензор второго ранга однозначно представим в виде суммы

$$T_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{4} T_{jj} + \left( T_{ik} - \frac{1}{4} \delta_{ik} T_{jj} \right)$$

единичного тензора и тензора со следом, равным нулю.

С разложением тензоров высших рангов на составляющие, обладающие определенной симметрией, дело обстоит значительно сложнее.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Легко понять, что преобразования (9.2) не меняют свойств симметрии тензоров. Иными словами, наличие определенной симметрии у тензора есть свойство, инвариантное относительно выбора системы координат. Поэтому, если мы разбиваем тензор на части, обладающие противоположной симметрией, то компоненты каждой из этих частей в новой системе координат будут выражаться с помощью (9.2) только через компоненты той же части в старой системе. ■

Особую роль играют **тензоры с постоянными компонентами**, т. е. такие, компоненты которых не меняются при преобразованиях (9.2). В существенном имеется только один такой

---

<sup>1)</sup> Читатель может быть несколько оглушен избытком соописываемых систем обозначений. Беда, однако, в том, что все они реально сосуществуют в распространенной литературе — сравнимая анархия царит, пожалуй, только в нормировке преобразований Фурье или каких-либо популярных специальных функций.

тензор — тензор второго ранга  $\delta_{ik}$ , совпадающий с символом Кронекера; его называют **единичным** тензором. Все остальные тензоры с постоянными компонентами получаются из единичного применением алгебраических операций, перечисленных выше.

**3.5.** До сих пор мы определили поведение компонент тензоров только по отношению к собственным преобразованиям Лоренца. Поскольку квадрат всякого отражения есть собственное преобразование, то принятое определение предписывает поведение тензора при отражении с точностью до множителя  $\pm 1$ : тензор может либо преобразовываться и при отражениях так же (9.2), как произведение соответствующего числа радиус-векторов, либо испытывать дополнительную перемену знака. В первом случае его называют истинным тензором или просто тензором, а во втором — *псевдотензором*<sup>1)</sup>.

**3.5.1.** При включении в рассмотрение псевдотензоров, совокупность возможных объектов с постоянными компонентами расширяется. Действительно, рассмотрим (псевдо) тензор четвертого ранга, антисимметричный относительно перестановки любой пары индексов. Такой тензор имеет только одну не равную нулю существенную компоненту — все его компоненты, имеющие совпадающие индексы, равны нулю, а компоненты с четырьмя разными индексами равны  $\pm$  компоненте с индексами 1, 2, 3, 4, судя по тому, образуют ли индексы четную или нечетную перестановку этого набора. Полагая единственную существенную компоненту равной единице, мы приходим к **дискриминантному тензору**

$$e_{iklm} = \pm 1, 0,$$

судя по сформулированному выше правилу. Мы определили значения компонент дискриминантного тензора сразу во всех системах отсчета. Поэтому следует проверить, будут ли они преобразовываться по закону (9.2). Легко увидеть, что по отношению к собственным преобразованиям Лоренца это действительно так, при отражении же какой-либо координатой оси  $e_{iklm}$  остается неизменным, в то время как истинный тензор должен был бы переменить знак. Таким образом дискриминантный тензор есть *псевдотензор*<sup>2)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Строго говоря, в псевдоевклидовом пространстве тензор может вести себя по-разному относительно временных и пространственных отражений. В соответствии с этим можно было бы рассматривать, кроме истинных тензоров, псевдотензоры *трех* разных сортов. Однако в классической (неквантовой) теории в этом не встречается нужды.

**3.5.2.** В трехмерном пространстве с помощью дискриминантного тензора можно было построить из всякого антисимметричного тензора второго ранга псевдотензор первого ранга — псевдовектор (или аксиальный вектор). В четырехмерном пространстве мы приходим на этом пути к тому, что всякому антисимметричному тензору второго ранга  $A_{lm}$  можно сопоставить **дуальный** ему антисимметричный псевдотензор второго ранга

$$a_{ik}^* = \frac{1}{2} e_{iklm} A_{lm}, \quad \text{причем} \quad a_{ik}^{**} = A_{ik}, \quad (12.1)$$

так что задание дуального псевдотензора полностью определяет первоначальный тензор. Полностью антисимметричному тензору *третьего* ранга  $A_{klm}$  можно таким же образом сопоставить дуальный ему *псевдовектор*:

$$a_i^* = \frac{1}{3!} e_{iklm} A_{klm}, \quad \text{причем} \quad A_{klm} = -e_{klmj} a_j^*. \quad (12.2)$$

Наконец, полностью антисимметричному тензору *четвертого* ранга  $A_{iklm}$ , имеющему только одну существенную компоненту, можно сопоставить дуальный псевдотензор нулевого ранга — как говорят, **псевдоскаляр**, величину, не меняющуюся при собственных преобразованиях Лоренца, но меняющую знак при отражении, —

$$a^* = \frac{1}{4!} e_{iklm} A_{iklm}; \quad A_{iklm} = e_{iklm} a^*. \quad (12.3)$$

Поскольку псевдовектор или псевдоскаляр менее громоздки, чем антисимметричные тензоры соответственно третьего или четвертого ранга, то последними обычно и не пользуются.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы назначили не равным нулю компонентам дискриминантного тензора значения  $\pm 1$ , между тем номер каждой такой компоненты содержит одну четверку — т. е. мы нарушили наше правило о распределении вещественных и мнимых компонент в тензорах. Из-за этого все дуальные величины будут иметь распределение вещественных и мнимых компонент, противоположное нормальному — т. е. будут включать лишний множитель  $i$ . ■

---

<sup>2)</sup> В некотором смысле дискриминантный тензор есть объект более элементарный, чем единичный, поскольку последний можно получить из него средствами тензорной алгебры:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{3!} e_{ilmn} e_{klmn}.$$

**3.6.** В четырехмерном пространстве можно интегрировать по линии, по 2-поверхности, по трехмерной гиперповерхности и по 4-объему.

**3.6.1.** Для линейного интеграла элементом интегрирования является бесконечно малое смещение  $dx_i$  вдоль линии; если линия задана в параметрической форме  $x_i = x_i(\lambda)$ , то это смещение можно записать как  $dx_i = \frac{dx_i}{d\lambda} d\lambda$ .

**3.6.2.** Элемент площади двумерной поверхности есть, как известно из дифференциальной геометрии, антисимметричный тензор второго ранга  $d\sigma_{ij}$ , образуемый в форме детерминанта из двух независимых смещений  $d^1x_i$  и  $d^2x_i$  вдоль поверхности:

$$d\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} d^1x_i & d^1x_j \\ d^2x_i & d^2x_j \end{vmatrix} = d^1x_i d^2x_j - d^1x_j d^2x_i. \quad (13.1)$$

Если поверхность задана в параметрической форме  $x_i = x_i(\lambda_1, \lambda_2)$ , то эти независимые смещения можно записать как  $d^1x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_1} d\lambda_1$ ,  $d^2x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_2} d\lambda_2$ . Иногда удобно использовать вместо элемента интегрирования  $d\sigma_{ij}$  дуальный ему «ортогональный» поверхности элемент

$$d\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2!} e_{ijkl} d\sigma_{kl} = e_{ijkl} d^1x_k d^2x_l = e_{ijkl} \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_1} \frac{\partial x_l}{\partial \lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (13.1^*)$$

**3.6.3.** Элемент площади трехмерной гиперповерхности есть детерминант, образованный из трех независимых смещений:

$$dS_{ijk} = \begin{vmatrix} d^1x_i & d^1x_j & d^1x_k \\ d^2x_i & d^2x_j & d^2x_k \\ d^3x_i & d^3x_j & d^3x_k \end{vmatrix} = d^1x_i d^2x_j d^3x_k + \text{(еще 5 членов, получающихся, перестановками индексов } i, j, k \text{ с соответствующими изменениями знаков)}. \quad (13.2)$$

Если гиперповерхность задана параметрически

$$x_i = x_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \text{то} \quad d^1x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_1} d\lambda_1, \dots$$

Вместо антисимметричного тензора третьего ранга всегда удобнее использовать дуальный ему (звездочку здесь писать не принято)

$$dS_l = \frac{1}{3!} e_{ijkl} dS_{jkl} = e_{ijkl} d^1x_j d^2x_k d^3x_l. \quad (13.2^*)$$

Рассмотрим составляющую  $dS_1$ :

$$dS_1 = e_{1jkl} d^1 x_j d^2 x_k d^3 x_l,$$

Выберем в качестве параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  координаты  $x_2, x_3, x_4$  (этого нельзя сделать только в том случае, когда рассматриваемый элемент гиперповерхности ортогонален гиперплоскости  $(x_2, x_3, x_4)$ , но тогда нормальный элементу поверхности вектор  $dS_i$  лежит в этой гиперплоскости, и, следовательно, его составляющая  $dS_1$  равна нулю). Тогда

$$\begin{aligned} d^1 x_j &= \left( \delta_{j2} + \delta_{j1} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) dx_2, \\ d^2 x_k &= \left( \delta_{k3} + \delta_{k1} \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \right) dx_3, \\ d^3 x_l &= \left( \delta_{l4} + \delta_{l1} \frac{\partial x_1}{\partial x_4} \right) dx_4. \end{aligned}$$

Поэтому

$$dS_1 = dx_2 dx_3 dx_4. \quad (13.2')$$

Такое же рассуждение дает для остальных компонент  $dS_i$ :

$$\begin{aligned} dS_2 &= dx_1 dx_3 dx_4, & dS_3 &= dx_1 dx_2 dx_4, \\ dS_4 &= -dx_1 dx_2 dx_3 = -dV. \end{aligned} \quad (13.2')$$

Именно элементом гиперповерхности в виде (13.2') единственно и пользуются при реальных интегрированиях.

**3.6.4.** Элементом интегрирования по четырехмерному многообразию — 4-объему — будет по общему правилу антисимметричный тензор четвертого ранга  $d\Omega_{ijkl}$ , образованный в виде аналогичного (13.1) и (13.2) детерминанта четвертого порядка из компонент четырех независимых смещений. При его раскрытии мы получили бы  $4! = 24$  члена, отличающихся лишь порядком расстановки индексов и соответствующими знаками. При образовании дуального элемента число этих членов опять сократится с нормирующим множителем из (12.3), и мы получим

$$d\Omega = \frac{1}{4!} e_{ijkl} d\Omega_{ijkl} = d^1 x_i d^2 x_j d^3 x_k d^4 x_l \cdot e_{ijkl}. \quad (13.3')$$

Повторяя рассуждение с рациональным выбором параметрического представления (теперь удобно выбрать в качестве четырех параметров  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  четыре координаты  $x_1, \dots, x_4$ ), придем для элемента 4-объема к единственно употребляемому выражению

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = ic dV dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1: Поскольку  $dS_i$  и  $d\Omega$  получились свертыванием с дискриминантным тензором, то они содержат «лишний множитель  $i$ »; никаких неудобств это не приносит. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2: Формально  $dS_i$  и  $d\Omega$  суть *псевдо-вектор* и *псевдо-скаляр*; однако фактически лишние перемены знака при отражении всегда бессознательно компенсируются изменением порядка *пределов интегрирования*. Поэтому можно считать их *вектором* и *скаляром*. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3: Для трехмерного элемента объема  $dV$  употребляют еще и обозначения  $(d\mathbf{x})_3$  или  $(dr)$ . Аналогично, для элемента 4-объема кроме  $d\Omega$  пишут еще и  $(dx)_4$ ,  $(dx_i)$  или даже  $dx$ . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4: В формуле (13.2) используется *разная* параметризация для разных компонент  $dS_i$ . Если гиперповерхность  $\sigma$ , по которой производят интегрирование, **пространственноподобна** (т. е. пространственноподобна *любая* пара точек этой гиперповерхности), то  $dS_4$  никогда не равно нулю, и параметризацию для всех четырех компонент можно выбрать единообразно, приняв за независимые параметры три *пространственные* координаты  $x_1, x_2, x_3$  и описывая гиперповерхность уравнением  $x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$ . Тогда

$$d^\alpha x_j = \left( \delta_{j\alpha} + \delta_{j4} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \right) dx_\alpha.$$

и

$$dS_i = e_{ijkl} \left( \delta_{j1} + \delta_{j4} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \left( \delta_{j2} + \delta_{j4} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \left( \delta_{j3} + \delta_{j4} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3,$$

то есть

$$dS_1 = e_{1234} \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathcal{V}; \quad dS_2 = e_{2143} \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathcal{V};$$

$$dS_3 = e_{3124} \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathcal{V} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathcal{V}; \quad dS_4 = e_{4123} \mathcal{V} = -\mathcal{V},$$

что можно записать как

$$dS_i = \left( \frac{df}{d\mathbf{x}}, -1 \right) d\mathcal{V} = n_i d\tau,$$

где  $n_i$ ,  $n_i^2 = -1$ , — единичный вектор (направленной в будущее) нормали к  $\sigma$ , а  $d\tau$  — инвариантный элемент интегрирования:

$$d\tau = \sqrt{1 + \left( \frac{df}{d\mathbf{x}} \right)^2} d\mathcal{V}.$$

Выбор знака у корня соответствует здесь выбору направления нормали

$$n_i = \frac{\left\{ -i \frac{df}{d\mathbf{x}}, i \right\}}{\sqrt{1 + \left( \frac{df}{d\mathbf{x}} \right)^2}}.$$

Единичный вектор  $n_i(\mathbf{x})$  определяет <sup>1)</sup> в каждой точке  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  гиперповерхности новую систему отсчета  $K'$ :  $(\mathbf{x}', t')$ , движущуюся относительно первоначальной системы  $K$  со скоростью

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = ic \frac{\mathbf{n}}{n_4} = c^2 \frac{dt}{d\mathbf{x}}$$

Через эту скорость:

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{\left\{ \frac{\mathbf{V}}{c}, i \right\}}{\sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \right)^2}}, \quad d\tau \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \\ dS_i &= i \cdot \frac{\left\{ \frac{\mathbf{V}}{c}, i \right\}}{\sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \right)^2}} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \right)^2} d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (13.2'')$$

В системе  $K'$  имеет место

$$\mathbf{n}'_i = (0, i), \quad dS'_4 = 0, \quad dS_4 = -\mathcal{V}' = -d\tau,$$

и формулы (13.2'') суть просто результат преобразования 4-векторов  $n_i$  и  $dS_i$  из системы  $K'$  в систему  $K$  согласно формулам преобразования Лоренца (6а):

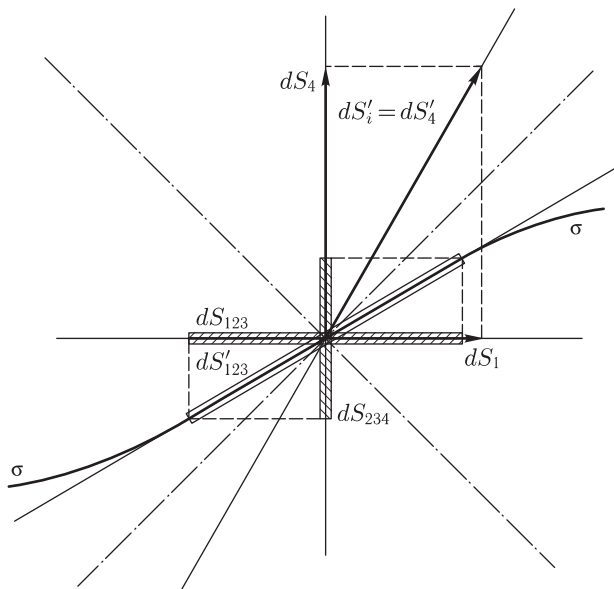
$$dS_4 = \frac{dS'_4}{\sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \right)^2}}, \quad dS = i \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{dS'_4}{\sqrt{1 - \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \right)^2}}.$$

Несколько неожидан другой наш вывод — то что «элемент объема» гиперповерхности  $\sigma$  испытывает вместо лоренцева сокращения (7а) — растяжение

$$d\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{V}'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

---

<sup>1)</sup> Вместе с условием, чтобы проекции пространственных осей системы  $K'$  на гиперплоскость  $t = \text{const}$  были бы соответственно параллельны пространственным осям системы  $K$ .



Причину этого обстоятельства мы уже обсуждали в замечании к сокращению Лоренца — при проектировании элемента гиперповерхности из  $K'$  в  $K$  речь идет о сравнении разностей пространственных координат фиксированной пары точек («концов» элемента  $dS'_{123}$ ), а не о сравнении пространственных «ширин» полосы, которая получилась бы из этого элемента, если сдвигать его в направлении  $x'_4$ . ■

**3.7.** Как и в привычном случае векторного анализа в трехмерном евклидовом пространстве, в пространстве Минковского имеют место интегральные теоремы, позволяющие преобразовывать интеграл по замкнутому многообразию  $m$  измерений в интеграл по заключенному в нем многообразию  $(m + 1)$  измерения. В 4-мерном случае  $m$  может, очевидно, принимать значения 3, 2 и 1. Если обозначить временно элемент интегрирования для любого  $m$  одним значком  $df$  с равным  $m$  числом индексов, то все такие интегральные теоремы можно записать единообразно как

$$\oint df_{j_1 \dots j_m} = \int df_{ij_1 \dots j_m} \frac{\partial}{\partial x_i} \dots, \quad (13.4)$$

где интегрирование справа выполняется по  $(m + 1)$ -мерному многообразию, а слева по «ограничивающему» его замкнутому  $m$ -мерному многообразию, многоточие же означает остальную часть подинтегрального выражения, которая может иметь любую тензорную размерность. Придавая теперь  $m$  значения 1, 2, 3,



получим отсюда для

$$m = 1, \quad \oint d\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \dots, \quad (13.4.1)$$

**теорему Стокса:**

$$m = 2: \quad \oint d\sigma_{jk} \dots = \int dS_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \dots, \quad (13.4.2)$$

$$m = 3, \quad \oint dS_{jkl} \dots = \int d\Omega_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \quad (13.4.3)$$

**теоремы Гаусса:**

— последняя встретится нам особенно часто. В двух последних формулах надо, конечно, перейти к дуальным элементам интегрирования, в результате чего они примут форму

$$m = 2: \quad \oint d\sigma_{ij}^* \dots = \int \left( dS_i \frac{\partial}{\partial x_j} - dS_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \dots, \quad (13.4.2^*)$$

$$m = 3, \quad \oint dS_i \dots = \int d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \dots, \quad (13.4.3^*)$$

**теоремы Гаусса:**

в которой их обычно и выписывают в книгах.

**3.8.** Из линейных интегралов чаще всего приходится встречаться с интегрированием вдоль мировой линии материальной точки.

В нерелятивистской теории при рассмотрении интегралов вдоль траектории частиц мы использовали в качестве независимого параметра время  $t$ , записывая движение как  $x_\alpha = x_\alpha(t)$ ; координаты и время входили в эту запись совершенно неравноправным образом. Теперь такой выбор (хотя и всегда возможен) не всегда удобен, поскольку, не говоря уже о нарушении четырехмерной симметрии, время не есть инвариант.

Чтобы восстановить симметрию, напомним четыре уравнения вместо трех:

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(\lambda), \\ ict &= x_4(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad x_i = x_i(\lambda);$$

— тем самым мы привлекаем для описания движения одной материальной точки *четыре* функции вместо *трех*, но зато у нас появляется свобода в выборе параметра  $\lambda$ , который мы пока оставили произвольным.

Иногда бывает удобно некоторое время сохранять этот произвол, иногда оказывается все-таки полезной 4-несимметричная запись через  $\lambda = t$  (четвертое уравнение оказывается тогда тождеством). Однако чаще всего прибегают к непосредственной инвариантизации нерелятивистского способа записи, выби-

рая в качестве независимого параметра введенное формулой (4) *собственное время*  $\tau$  или отличающуюся от него лишь множителем  $c$  4-длину мировой линии  $s = c\tau$  и записывая <sup>1)</sup>

$$x_i = x_i(s).$$

Эта запись напоминает движение нерелятивистской системы с четырьмя степенями свободы. Не надо, однако, упускать из виду два существенных отличия:

- (1) в отличие от  $dt$ ,  $ds$  (или  $d\tau$ ) *не есть полный дифференциал*,
- (2) из четырех выписанных уравнений только три — независимы; причем связь формулируется в неявной интегральной форме (4), служащей для определения  $s$ .

**3.8.1.** Элемент смещения вдоль мировой линии,  $dx_i$ , запишется тогда как  $dx_i = \frac{dx_i}{ds} ds$ .

4-вектор

$$u_i = \frac{dx_i}{ds} = \frac{dx_i}{\sqrt{c^2 dt^2 - (dx)^2}} = \frac{\left\{ \frac{d\mathbf{x}}{dt}, ic \right\}}{c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2}},$$

оказывающийся при таком выборе параметризации аналогом скорости, называют **4-скоростью**. Через обычную трехмерную скорость  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  он выражается в форме

$$u_i = \frac{\{\mathbf{v}, ic\}}{c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (14)$$

Не все компоненты 4-скорости независимы. Действительно, возводя (14) в скалярный квадрат, убеждаемся что

$$u_i^2 = -1, \quad (14a)$$

т.е. 4-скорость есть (времениподобный) *единичный* вектор.

Выполняя еще одно дифференцирование по  $ds$ , приходим к **4-ускорению**

$$w_i = \frac{du_i}{ds}. \quad (15)$$

---

<sup>1)</sup> Такой выбор обычен в дифференциальной геометрии.

В силу тождества (14а) 4-ускорение всегда ортогонально 4-скорости

$$u_i w_i = 0. \quad (15a)$$

#### 4. Динамика свободной материальной точки

**4.1.** В нерелятивистской механике нам не удалось построить для свободной материальной точки действие, инвариантное относительно преобразований Галилея, — этим свойством обладала лишь его вариация. Выражение для действия одной свободной материальной точки, инвариантное относительно преобразований Лоренца, построить можно. Умножая (векторный) элемент  $dx_i$  мировой линии частицы скалярно на единственный локальный вектор  $u_i = \frac{dx_i}{ds}$ , который можно построить из характеристики мировой линии  $x_i = x_i(s)$ , не прибегая к производным старшего порядка, приходим к пригодному для роли действия инвариантному интегралу

$$S = \alpha \int_{P_1}^{P_2} u_i dx_i = \alpha \int_{P_1}^{P_2} \frac{dx_i^2}{ds} = -\alpha \int_{P_1}^{P_2} ds, \quad (16)$$

где  $\alpha$  — постоянная, которая должна быть положительной, так как в псевдоевклидовом пространстве можно, как мы видели,

удлинением траектории сделать  $\int_{P_1}^{P_2} ds$  между времениподобными  $P_2 > P_1$  сколь угодно малым.

Действие в форме (16) приводит, однако, при использовании его в вариационном принципе к одному неудобству: поскольку  $ds$  не есть полный дифференциал, то при выполнении интегрирования в (16) между фиксированными 4-точками  $P_1$  и  $P_2$ , пределы интегрирования по  $s$  сами будут изменяться при варьировании траектории. Поэтому удобно ввести временно вместо длины дуги  $s$  другой (в остальном — произвольный) независимый параметр  $\lambda$ , значения которого в точках  $P_1$  и  $P_2$  можно было бы, однако, держать фиксированными. Мы приходим тогда к

$$S = \alpha \int_{P_1}^{P_2} u_i dx_i = \alpha \int_{P_1}^{P_2} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_i}{d\lambda} d\lambda = -\alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{-dx_i^2}{\sqrt{-dx_i^2} \sqrt{(d\lambda)^2}} d\lambda;$$

$$S = -\alpha \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)^2} d\lambda. \quad (16')$$

В таком виде действие имеет уже привычную нам по первой части форму, и к нему можно применить развитый там общий формализм. Роль времени в (16') играет параметр  $\lambda$ , поэтому «функцией Лагранжа» будет

$$L_\lambda \left( x_i, \frac{dx_i}{d\lambda}, \lambda \right) = -\alpha \sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2}. \quad (17)$$

«Импульсом» будет теперь производная от функции Лагранжа по «скорости»  $\frac{dx_i}{d\lambda}$ :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i}{d\lambda}} = -\alpha \frac{-2 \frac{dx_i}{d\lambda}}{2 \sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2}} = \frac{\alpha \frac{dx_i}{d\lambda}}{\sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2}} \quad ^1). \quad (18)$$

Уравнения движения будут по общему правилу гласить

$$\frac{d}{d\lambda} p_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\alpha \frac{dx_i}{d\lambda}}{\sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2}} \right) = 0. \quad (19)$$

т. е. «импульс»  $p_i$  будет сохраняться

$$p_i = \text{const},$$

как то и должно было быть в силу (4-мерной) трансляционной инвариантности действия, ради обеспечения которой мы приняли, что функция Лагранжа не может зависеть от самих координат частицы  $x_i(\lambda)$ .

Наконец, построение формального аналога функции Гамильтона

$$\begin{aligned} H_\lambda = p_i \frac{dx_i}{d\lambda} - L_\lambda &= \alpha \frac{\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2}{\sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2}} - \left( -\alpha \sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2} \right) = \\ &= -\alpha \sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2} + \alpha \sqrt{-\left( \frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2} = 0 \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Поскольку мы не требовали инвариантности  $\lambda$ , то и скорость  $\frac{dx_i}{d\lambda}$  или импульс  $p_i$  не обязаны быть 4-векторами, хотя и несут один тензорный индекс. Правда, конкретный импульс (18) *есть* 4-вектор: поскольку  $d\lambda$  в числителе и знаменателе сокращаются, то он не зависит от выбора  $\lambda$ , а при инвариантном  $\lambda$  обязан быть 4-вектором.

(сумма по *четырем* степеням свободы) приводит к тождеству

$$H_\lambda = p_i \frac{dx_i}{d\lambda} - L_\lambda = 0 \quad \text{или} \quad p_i \frac{dx_i}{d\lambda} = L_\lambda. \quad (20)$$

**4.2.** Теперь можно заняться рациональной конкретизацией  $\lambda$ . Подчеркнем, что конкретный выбор  $\lambda$  *не влияет* на существо полученных результатов, а затрагивает только форму их записи. Форма, наиболее близкая к нерелятивистской теории, получается, если выбрать  $\lambda = t$ . Тогда

$$L_t = -\alpha \sqrt{-\left(\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}\right)^2 - (ic)^2} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}},$$

где  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  — обычная 3-скорость. В предельном случае *малых* скоростей получаем отсюда

$$L_t \approx -\alpha c \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}\right) = -\alpha c + \frac{\alpha}{c} \frac{\mathbf{v}^2}{2},$$

или, поскольку постоянный член в функции Лагранжа несущественен

$$L_t = \frac{\alpha}{c} \frac{\mathbf{v}^2}{2}.$$

Отсюда видно, что для соблюдения принципа соответствия характеризующая частицу постоянная  $\alpha$  должна равняться

$$\alpha = mc,$$

где  $m$  — масса частицы. Следовательно,

$$L_t = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (17t)$$

Для «импульса»  $p_i$  мы получаем теперь из (18)

$$p_i = mc \frac{\{\mathbf{v}, ic\}}{c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

Пространственные компоненты дают нам здесь релятивистское выражение обычного *импульса*

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, \quad (18.1)$$

четвертая же компонента

$$p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}.$$

Тождество (20) удобно записать теперь в форме

$$-p_4 \frac{dx_4}{dt} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L,$$

откуда видно, что (умноженная на  $-\frac{dx_4}{dt} = -ic$ ) компонента  $p_4$  есть *энергия* материальной точки:

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (18.2)$$

Для скорости  $\mathbf{v} = 0$  энергии  $\mathcal{E}$  не обращается в нуль, а стремится к константе

$$\text{при } \mathbf{v} = 0 \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = mc^2, \quad (18.3)$$

называемой **энергией покоя**.

Для малых, но не равных нулю, скоростей выражение (18.2) для энергии превращается в

$$\text{при } \mathbf{v} \rightarrow 0; \mathbf{v} \neq 0 \quad \mathcal{E} = mc^2 + \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

отличающееся лишь постоянной  $\mathcal{E}_0$  от обычного нерелятивистского вида кинетической энергии.

Наконец, для  $v \rightarrow c$  энергия  $\mathcal{E}$  **стремится к бесконечности**. Отсюда видно, что для того, чтобы разогнать материальную частицу любой *конечной* массы до скорости, *равной* скорости света, потребовалось бы затратить бесконечно много энергии<sup>1)</sup>.

Из (18.1) и (18.2) получается важная формула

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}. \quad (18.4)$$

<sup>1)</sup> Поэтому состояние движения *быстрых* частиц практически неудобно задавать значением их скорости; гораздо рациональнее пользоваться для этого отношением их энергии к энергии покоя (или импульса к энергии покоя, деленной на скорость света).

Из нее, в частности, можно усмотреть, что теория относительности не противоречит существованию частиц, постоянно движущихся со скоростью света, для них соотношение (18.4) превращается в  $p = \frac{\mathcal{E}}{c}$ . Масса таких частиц должна, естественно, равняться нулю. Такие частицы на самом деле существуют в природе — их примером могут служить **кванты света (фотоны)**.

В силу аналогии (18.4) с нерелятивистской формулой  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , иногда называют  $\frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$  **массой, зависящей от скорости**.

Вообще надо сказать, что слову «масса» очень не повезло в теории относительности. В ее ранние годы почему-то представлялось большим облегчением для понимания существа теории сохранить это слово для релятивистских аналогов всех многочисленных ипостасей, в которых выступает масса в классической механике. А так как каждая «ипостась» обобщалась при переходе к теории относительности по-разному, то возникло целое семейство разных релятивистских «масс». Так, например, желая придать релятивистским уравнениям движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad \left( \begin{array}{c} \text{если частица} \\ \text{свободна} \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f} \quad \left( \begin{array}{c} \text{если частица} \\ \text{находится под действием} \\ \text{внешних сил } \mathbf{f} \end{array} \right)$$

привычный вид  $\tilde{m} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}$ , приходили к очень громоздкому выражению для  $\tilde{m}$ . Оно упрощалось, если «сила»  $\mathbf{f}$  была направлена перпендикулярно или параллельно скорости  $\mathbf{v}$ . В первом случае, когда сила меняет скорость только по направлению, получалось

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \perp \mathbf{v}: \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

и величина  $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$  называлась «поперечной массой» (она совпадала с «массой, зависящей от скорости»). Во втором случае, когда скорость менялась только по величине, приходилось дифференцировать и корень, приходя к результату

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \parallel \mathbf{v}: \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

и величину  $\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$  называли «продольной массой». Сейчас, вся эта терминология, равно как и развивавшаяся по ее поводу «философия», имеют лишь исторический интерес.

Выразим энергию через импульс. Из (18.1)

$$\mathbf{p}^2 - \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{v}^2}{c^2} = m^2 \mathbf{v}^2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{c^2 m^2 + \mathbf{p}^2}.$$

Поэтому

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{c^2 m^2 + \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 + c^2 m^2}}} = c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}.$$

Энергия, выраженная через импульс, есть функция Гамильтона. Итак, для свободной материальной точки в теории относительности функция Гамильтона (три степени свободы!) есть

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (19)$$

Для импульсов, много меньших характерного импульса  $mc$ ,  $|\mathbf{p}| \ll mc$ , отсюда получается  $\mathcal{H} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  — сумма энергии покоя и обычной нерелятивистской функции Гамильтона.

Для импульсов, удовлетворяющих противоположному сильному неравенству  $|\mathbf{p}| \gg mc$ , можно пренебречь под корнем членом с массой, и мы получаем  $\mathcal{H} \approx c|\mathbf{p}|$  — как раз формулу (18.4) для безмассовых частиц. Результат вполне естественный — для энергий, много больших энергии покоя, эта последняя перестает быть существенной.

**4.3.** Другая разумная возможность выбора параметра  $\lambda$  состоит в том, чтобы *после проведения вариационной программы*<sup>1)</sup> положить его равным инвариантному параметру  $s$ . Тогда «скорость»  $\frac{dx_i}{ds} = u_i$  есть 4-вектор (14), и в силу тождества (14а)

$$-\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = -u_i^2 = 1,$$

<sup>1)</sup> До этого полагать  $\lambda = s$  в силу сделанного выше замечания нельзя. Действительно, при такой попытке выясняется, что формально  $L_s = -mc$ , т. е. константе!



благодаря чему из (18) и (19) получаем уравнения движения:

$$\frac{d m c u_i}{ds} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{du_i}{ds} = 0, \quad (20)$$

и выражение для сохраняющегося 4-вектора импульса:

$$p_i = m c u_i = \text{const}. \quad (21)$$

Подставляя в (21) выражение (14) для 4-скорости и сравнивая с формулами (18.1) и (18.2), находим, что

$$p_i = \left\{ \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, \frac{i m c}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \right\} = \left\{ \mathbf{p}, \frac{i \mathcal{E}}{c} \right\}. \quad (21a)$$

Таким образом, импульс (18.1) и энергия (18.2) образуют один 4-вектор<sup>1)</sup> — он называется **4-импульс**.

Как и всякий 4-вектор, 4-импульс преобразуется при преобразованиях Лоренца с помощью формул (6а). Отсюда получается правило для преобразования трехмерного импульса и энергии:

$$p_1 = \frac{p'_1 + \frac{V \mathcal{E}'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_2 = p'_2, \quad p_3 = p'_3, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + V p'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (18.5)$$

Возводя (21) в квадрат, получаем, в силу тождества (14а) для 4-скорости, связь между энергией и импульсом, выраженную в 4-симметричной форме:

$$p_i^2 = -m^2 c^2. \quad (19')$$

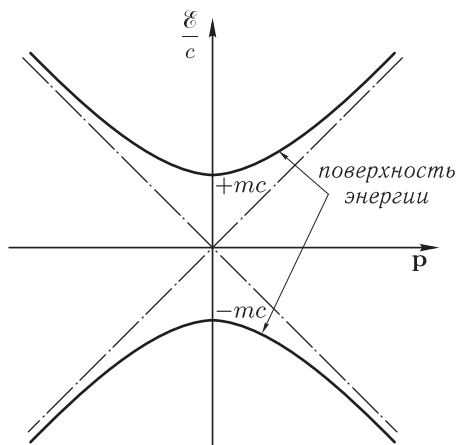
Если выразить здесь компоненты 4-импульса через трехмерные импульс и энергию, то получим

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + (m c)^2. \quad (19'')$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Если извлечь из (19'') почленно квадратный корень, то мы опять придем к формуле (19), но с одной существенной оговоркой: при извлечении корня возникает двойной знак. Таким образом формально в теории относительности энергия частицы может быть, не только положительной, но и отрицательной.

<sup>1)</sup> Поэтому нельзя выбросить из (18.2) энергию покоя — мы не получили бы тогда 4-вектора.

Поучительно изобразить эту зависимость  $\mathcal{E}$  от  $\mathbf{p}$  в виде поверхности в псевдоевклидовом-4-пространстве, координатами которого служат  $i\frac{\mathcal{E}}{c}$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  — **в импульсном пространстве**



*поверхность энергии*

**стве.** Она имеет вид двуполого гиперboloида, лежащего внутри светового конуса, к которому приближается асимптотически при  $\mathcal{E} \rightarrow \pm\infty$ .

Эту поверхность называют **поверхностью энергии**; ее *верхняя* пола отвечает функции Гамильтона (19).

Для знака минус (нижняя пола гиперboloида)

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) \leq \mathcal{E}(\mathbf{p} = 0) = -mc^2 < 0,$$

т. е. с *ростом* импульса — по мере ускорения частицы — ее энергия *уменьшалась* бы, а энергия покоя была бы отрицательна. Это значит, что нижняя пола поверхности энергии *соответствовала бы частицам отрицательной массы!*

В некантовой теории эта трудность не имеет существенного значения, ибо непрерывный переход из положительных энергий в отрицательные невозможен, поскольку они разделены энергетической «щелью» ширины  $2mc^2$ . В кантовой теории, однако, это обстоятельство доставляло много неприятностей, пока не было выяснено, что эта двузначность действительно реализуется в природе, хотя и совсем не прямым образом, и проявляется в том, что каждой элементарной частице соответствует «античастица». ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2: В нерелятивистской теории функции Лагранжа и Гамильтона находились в соотношении определенной симметрии друг к другу (ср. I, 16). В релятивистской теории эта симметрия нарушается их различным тензорным характером. Действительно, функция Лагранжа является *скаляром* (правда, в несколько «пиквикском» смысле, поскольку для неинвариантной параметризации это не так, а для инвариантной ее нельзя варьировать). Функция же Гамильтона есть, как мы теперь видим, четвертая компонента вектора. Это обстоятельство приводит к тому следствию, что гамильтонова формулировка уравнений всегда оказывается не обладающей *явной* релятивистской инвариантностью. ■

## 5. Десять фундаментальных величин

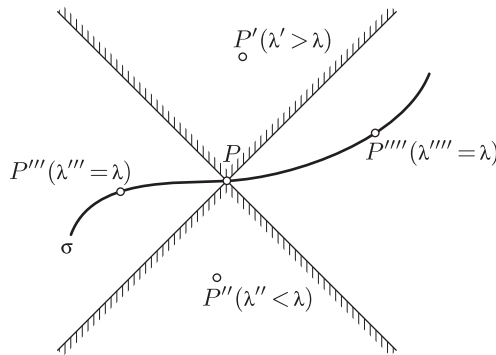
**5.1.** Рассмотрим теперь систему не взаимодействующих друг с другом свободных материальных точек. Действие для нее представится суммой по номеру  $a$  частицы выражений (16)

$$\begin{aligned} S &= \sum_a -m_a c \int ds^a = \sum_a -m_a c \int_{\lambda_1^a}^{\lambda_2^a} \sqrt{-\left(\frac{dx_i^a}{d\lambda^a}\right)^2} d\lambda^a = \\ &= \sum_a -m_a c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} dt. \quad (16'') \end{aligned}$$

**5.1.1.** Что следует выбрать здесь за независимый параметр, за формальное «время»? Ведь для того, чтобы с действием (16'') можно было обращаться, как с целым, оно должно быть представлено *одним* интегралом, значит, надо выражать координаты мировых линий всех частиц в функции *одного* общего параметра.

Пока у нас была одна частица, мы могли выбирать независимый параметр для параметрического представления ее мировой линии совершенно произвольным образом, с тем единственным ограничением, чтобы он монотонно возрастал вдоль мировой линии в направлении от прошлого к будущему. (Тут было бы неплохо объяснить, чем отличается будущее от прошлого, но это-то как раз мы и не умеем делать, хотя считаем, что все это и так понимают!). Коль скоро, однако, у нас есть несколько — хотя бы и не взаимодействующих друг с другом — частиц, то если мы хотим трактовать какие-либо их *совокупные* свойства, желательно выбрать параметризацию таким образом, чтобы всякий

раз, когда мировые линии (хотя бы) пары частиц пересекаются (т. е. две частицы оказываются в одном месте в один и тот же момент времени (с точки зрения *любой* инерциальной системы отсчета!)), значения параметров, служащих для описания движения каждой из частиц, *совпадали бы*. (Мы уже знаем, что собственное время  $\tau$  или взятый вдоль мировой линии интервал  $s$  не удовлетворяют этому желанию!)



Поскольку мировыми линиями частиц могут быть в принципе любые (достаточно гладкие, конечно) времениподобные кривые в пространстве Минковского, то сформулированное пожелание означает, что в каждой 4-точке пространства Минковского значение независимого параметра на любой проходящей через нее времениподобной линии должно зависеть только от точки, но не от конкретной линии. А поскольку мировая линия какой-либо частицы может оказаться проходящей через любую 4-точку, то всякой 4-точке  $P$  следует приписать свое значение параметра, который мы будем называть  $\lambda$ . Естественно принять, что параметр:  $\lambda$  непрерывно (и достаточно гладко) зависит от 4-точки  $P$ .

Рассмотрим какую-либо мировую точку  $P$  и будем считать, что мы приписали этой точке некоторое значение параметра, скажем  $\lambda$ . В любую близкую к ней точку  $P'$ , расположенную в «послеконусе» точки  $P$  ( $P' > P$ ), из  $P$  может направиться мировая линия какой-либо частицы — значит, значение  $\lambda'$  нашего параметра в такой 4-точке  $P'$  должно быть больше значения  $\lambda$ ,  $\lambda' > \lambda$ . Точно так же всякой точке  $P''$  из окрестности  $P$ , лежащей в ее «предконусе»,  $P > P''$ , необходимо приписать значение  $\lambda'' < \lambda$ .

Таким образом, те точки  $P'''$  из окрестности  $P$ , которым соответствуют значения  $\lambda(P''') = \lambda(P)$ , могут быть расположены только *пространственноподобно*  $P$ :  $P''' \sim P$ . Продолжая это

рассуждение, приходим к выводу, что совокупность 4-точек, которым мы можем приписать то же значение параметра  $\lambda$ , что и выбранное для точки  $P$ , должны образовывать в мире Минковского некоторую *пространственноподобную гиперповерхность*, которую будем обозначать символом  $\sigma(P)$ . Те же аргументы применимы, очевидно, ко всякой 4-точке и ко всякому значению параметра. Итак:

рациональная параметризация 4-пространства состоит в том, что в нем выбирается произвольное однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей, такое, что через каждую 4-точку проходит одна и только одна поверхность семейства.

Такая операция может быть проведена бесчисленно различными способами, и любой из них представит нам независимый параметр, «время», для построения лагранжева формализма для системы материальных точек. С точки зрения выполнения релятивистской инвариантности и причинности все эти времена равноправны. Чтобы сузить класс «времен», удобных для физики, уместно вспомнить, что лагранжев формализм служит основой для получения по теореме Нётер сохраняющихся величин, и что согласно замечанию 2 в **1.5.2** эти величины приобретают особенно простую — аддитивную — форму для тех преобразований симметрии, которые не затрагивают независимой переменной. Чтобы не упустить эту возможную выгоду, надо, очевидно, наложить на выбор семейства гиперповерхностей  $\sigma$  то ограничение, чтобы — хотя бы для некоторых преобразований симметрии 4-пространства (т. е. — элементов неоднородной группы Лоренца) — соответствующие преобразования координат  $x_{\alpha i}(\lambda)$  частиц не затрагивали бы независимую переменную  $\lambda$ .

На геометрическом языке это значит, что мы хотим, чтобы некоторые (чем больше — тем лучше) преобразования Лоренца не смещали бы гиперповерхностей  $\sigma$ , но двигали бы их самих по себе, осуществляли бы на них внутренние движения. Такое возможно лишь для поверхностей постоянной кривизны — пространственноподобных гиперплоскостей или «сфер» (пространственноподобная сфера в псевдоевклидовом пространстве скорее походит — во всяком случае, на наших чертежах — на двуполый гиперболоид, см. в виде примера чертеж «поверхности энергии» на стр. 202) или — предельный случай — световых конусов, либо наконец, — другой особый случай — гиперплоскостей, касающихся светового конуса. В соответствии с этим оказывается, что релятивистскую динамику можно строить в трех различных

формах: **мгновенной**, когда за гиперповерхности  $\sigma$  принимается семейство параллельных гиперплоскостей — такая форма представляется наиболее обычной с точки зрения аналогии с нерелятивистской теорией, **точечной**, когда за  $\sigma$  выбираются гиперсферы, и **фронтальной**, когда гиперповерхностями являются гиперплоскости, касающиеся светового конуса.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эти соображения о существовании различных форм релятивистской динамики были впервые развиты Дираком в работе: P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys., 21, 392 (1949). Их упоминание здесь есть некоторо излишество, поскольку в рассматриваемом случае системы *невзаимодействующих* материальных точек *все* сохраняющиеся величины аддитивны уже благодаря аддитивности лагранжиана. Когда же мы включим ниже в рассмотрение взаимодействие, то явным образом будем использовать только гиперплоскости, и при том вида  $x_4 = \lambda$ . ■

**5.1.** Итак, проведя параметризацию всего 4-мира с помощью зависящего от одного параметра  $\lambda$  семейства пространственно-подобных гиперповерхностей, мы сможем выразить и четверки координат каждой материальной точки в функции того же параметра, т. е. записать действие (16'') для системы материальных точек в виде *одного* интеграла

$$S = - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sum_a m_a c \sqrt{- \left( \frac{dx_i^a}{d\lambda} \right)^2}. \quad (16''')$$

При такой форме записи любые преобразования координат не будут затрагивать независимой переменной  $\lambda$  и, согласно теореме Нётер, из инвариантности действия относительно преобразования  $x_i^a \rightarrow x_i^a + \delta x_i^a$  будет следовать закон сохранения (удобно исходить из (1.8.4)) вида

$$\frac{d}{d\lambda} \sum_a p_i^a \delta x_i^a = 0; \quad p_i^a = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i^a}{d\lambda}}.$$

**5.1.2.** Выбирая в качестве преобразования, относительно которого действие должно остаться инвариантным, 4-сдвиг

$$\delta x_i^a = l_i,$$

придем к закону сохранения **4-импульса** системы

$$P_i = \sum_a p_i^a = \sum_a m_a c u_i^a = \text{const}. \quad (22)$$

В силу аддитивности действия он равен сумме 4-импульсов отдельных частиц.

**5.1.3.** Выберем теперь в качестве преобразования симметрии бесконечно малое однородное (общее) преобразование Лоренца. Такое преобразование можно записать как

$$x_i^a \rightarrow x_i'^a = x_i^a + \delta x_i^a; \quad \delta x_i^a = x_k^a \delta \Omega_{ki}, \quad \text{где} \quad \delta \Omega_{ki} = -\delta \Omega_{ik} \quad (23)$$

бесконечно малые параметры. Действительно, тогда

$$(x_i'^a)^2 = (x_i^a)^2 + 2x_i^a x_k^a \delta \Omega_{ik} = (x_i^a)^2$$

в силу антисимметрии  $\delta \Omega_{ik}$ . (Антисимметричный тензор  $\delta \Omega_{ik}$  имеет 6 независимых компонент — как раз столько, сколько независимых поворотов в 4-пространстве.)

Из инвариантности действия относительно (23) будет тогда следовать, что

$$\frac{d}{d\lambda} \sum_a (p_i^a x_k^a \delta \Omega_{ki}) = \frac{d}{d\lambda} \sum_a (x_i p_k - x_k p_i) \cdot \frac{\delta \Omega_{ik}}{2} = 0,$$

т. е. что для системы свободных материальных точек сохраняется антисимметричный тензор второго ранга

$$M_{ik} = \sum_a (x_i^a p_k^a - x_k^a p_i^a) = \sum_a m_{ik}^a = \text{const}. \quad (24)$$

Этот тензор называется **4-момент**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы отнормировали 4-момент так, чтобы было

$$\delta S = M_{ik} \frac{\delta \Omega_{ik}}{2}.$$

Тогда пространственная часть дает

$$\delta S = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \delta \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\mu} M_\gamma \delta \varphi_\mu = (\mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi})$$

в полном согласии с нормировкой, избранной нами в формулах (13) нерелятивистской теории. ■

**5.1.3.1.** Как всякий антисимметричный тензор, 4-момент имеет *шесть* независимых компонент. Три из них получаются, если придавать индексам  $i, k$  только значения  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Эта **пространственная** часть 4-момента образует трехмерный антисимметричный тензор второго ранга

$$M_{\alpha\beta} = \sum (x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha);$$

в *трехмерном* пространстве его можно заменить дуальным псевдовектором

$$M_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\mu\nu} M_{\mu\nu} = e_{\alpha\mu\nu} \sum x_\mu p_{\nu i}; \quad \mathbf{M} = \sum [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}]. \quad (24a)$$

Итак, пространственная часть 4-момента есть та величина, которую мы называли просто *моментом*; выраженный через координаты и импульсы он записывается точно так же, как и в нерелятивистском случае (конечно, при выражении через координаты и *скорости* мы не получим простой нерелятивистской формулы, так как для импульсов войдут выражения (18.1)).

**5.1.3.2.** Остальные три компоненты момента получатся, если придать первому индексу значение 4, а второму  $\alpha = 1, 2, 3$ . Эти компоненты образуют 3-вектор относительно чисто пространственных вращений, а так как в числе 4-индексов все они содержат одну четверку, то чтобы сделать этот вектор вещественным, надо выделить из него множитель  $i$ . Итак, полагая

$$M_{4\alpha} = ic \sum_a \left( t^a p_\alpha^a - \frac{\mathcal{E}^a r_\alpha^a}{c^2} \right) = ic N_\alpha = \text{const}, \quad (24b)$$

видим, что три смешанные компоненты закона сохранения 4-момента приводят с трехмерной точки зрения к сохранению вектора:

$$\mathbf{N} = \sum_a \left( t^a \mathbf{p}^a - \frac{\mathcal{E}^a \mathbf{r}^a}{c^2} \right) = \text{const}. \quad (25)$$

Вектор  $\mathbf{N}$  не имеет твердо установившегося названия. Мы будем называть его **лоренцев момент** (поскольку он сохраняется вследствие инвариантности относительно специальных преобразований Лоренца (6)).

**5.1.4.** Чтобы выяснить физический смысл лоренцева момента, выберем прежде всего в качестве параметра  $\lambda$  время  $t$ , которое вынесется из под суммы

$$\mathbf{N} = t \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \sum \mathcal{E} \mathbf{r},$$

и поделим это равенство на  $\frac{1}{c^2} \sum \mathcal{E}$ . Мы получим тогда

$$\frac{\sum \mathcal{E} \mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} = c^2 \frac{\mathbf{P}}{\sum \mathcal{E}} t + \mathbf{R}_0; \quad \mathbf{R}_0 = \text{const}. \quad (25')$$



В таком виде это равенство утверждает, что точка с радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E} \mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} \quad (25''.1)$$

движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\mathbf{V} = c^2 \frac{\mathbf{P}}{\sum \mathcal{E}}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{V}t + \mathbf{R}_0. \quad (25''.2)$$

Векторы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{V}$  суть, конечно, релятивистское обобщение радиус-вектора и скорости центра инерции системы. Таким образом, закон сохранения лоренцева момента устанавливает тот физический факт, что у замкнутой системы материальных точек существует центр инерции, движущийся равномерно и прямолинейно. Как мы видим, в релятивистской механике — в отличие от классической, где получение аналогичного результата из инвариантности вариации действия относительно преобразований Галилея потребовало довольно тонких рассуждений — этот вывод совершается совершенно непринужденно.

**5.1.5. ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Хотя для свободных частиц и сохраняются их импульсы  $p_i^a$  и моменты  $m_{ik}^a$  по отдельности, а как описывать взаимодействие, мы пока не знаем, тем не менее законы сохранения для системы частиц имеют свое дополнительное содержание. В самом деле, предположим, что в некоторый начальный момент мы имеем дело с системой невзаимодействующих частиц, затем эти частицы сближаются, как-то — мы не знаем как — взаимодействуют друг с другом, и наконец расходятся на большие расстояния и становятся опять свободными. Тогда можно утверждать, что значения полных 4-импульса  $P_i$  и 4-момента  $M_{ik}$  для системы после взаимодействия будут равны их исходным значениям до него, в то время как для 4-импульсов и 4-моментов отдельных частиц такого, конечно, утверждать нельзя. На основе этого замечания можно было бы провести аналогичное сделанному в I, 8. исследование поведения частиц, при рассеянии; мы не будем этим заниматься. ■

**5.1.6. ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Запишем выражение для (сохраняющегося) вектора лоренцева момента  $\mathbf{n}$  для одной свободной частицы и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{p} + t \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2} - \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Но импульс и энергия свободной частицы сохраняются сами по себе (как следствие инвариантности относительно пространственных и временных сдвигов),

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Поэтому в качестве следствия сохранения лоренцева момента остается соотношение

$$\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2} \quad (*)$$

— т.е. как раз формула (18.4). А из этой формулы легко восстанавливается вид функции Лагранжа или функции Гамильтона.

В самом деле, функция Гамильтона равна энергии (если выразить ее через импульс), а с другой стороны  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}$ . Поэтому (\*) приводит к дифференциальному уравнению

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \mathcal{H}.$$

Поскольку  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = 0$  из-за сохранения  $p$ , то отсюда следует

$$\mathbf{p} d\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \mathcal{H} d\mathcal{H}, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{p}^2 = \frac{1}{c^2} \mathcal{H}^2 + \text{const}$$

или

$$\mathcal{H} = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + \text{const}}.$$

Но это и есть как раз полученный выше вид (19) релятивистской функции Гамильтона (естественно, с неопределенной постоянной вместо массы). С помощью соотношения  $L = \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathcal{H}$  отсюда сейчас же получается и выражение

$$L = \text{const} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$$

для функции Лагранжа. ■

Таким образом, наша исходная формула (17t), постулированная выше на основе полуинтуитивных рассуждений, теперь получается как точное следствие требования инвариантности относительно специальных преобразований Лоренца.

**5.1.7.** Итак, мы установили что для системы невзаимодействующих материальных точек сохраняется 10 динамических величин: 4 компоненты 4-импульса и 6 компонент 4-момента. Поскольку основой этого вывода было требование инвариантности действия относительно преобразований полной группы Лоренца,

то эти 10 величин должны сохраняться и для *любой* системы. Поэтому их называют **фундаментальные динамические величины** системы.

**5.2.** Установим соотношения в скобках Пуассона между фундаментальными динамическими величинами

$$\mathcal{H} = \sum c \sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}; \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{p};$$

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \quad \text{и} \quad \mathbf{N} = \sum \left( t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right).$$

**5.2.1.** Заметим для этого прежде всего, что выражения для  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  остались у нас в точности теми же, что и в классической механике. Поэтому:

$$\begin{aligned} 1. & \quad (P_\alpha, P_\beta) = 0; \\ 2. & \quad (M_\alpha, M_\beta) = -e_{\alpha\beta\gamma} M_\delta; \\ 3. & \quad (M_\alpha, P_\beta) = -e_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma; \end{aligned} \quad (26)$$

Не переменятся и скобки Пуассона импульса и момента с гамильтонианом:

$$\begin{aligned} 4. & \quad (\mathcal{H}, P_\alpha) = 0; \\ 5. & \quad (\mathcal{H}, M_\alpha) = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

Новыми будут все скобки Пуассона, включающие лоренцев момент  $\mathbf{N}$ . Для их вычисления полезно заметить, что, дифференцируя (19''), мы получаем

$$\frac{1}{c^2} \mathcal{E} d\mathcal{E} = \mathbf{p} d\mathbf{p}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_\lambda} = \frac{p_\lambda}{\mathcal{E}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 6. & \quad (\mathcal{H}, N_\beta) = \sum \frac{c^2 p_\lambda}{\mathcal{E}} (-1) \frac{\mathcal{E}}{c^2} \delta_{\beta\lambda} = -P_\beta \quad ^1); \\ 7. & \quad (P_\alpha, N_\beta) = \sum \delta_{\alpha\lambda} (-1) \frac{\mathcal{E}}{c^2} \delta_{\beta\lambda} = -\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{c^2} \mathcal{H}; \end{aligned} \quad (26)$$

---

<sup>1)</sup> Отсюда  $\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} + (\mathcal{H}, \mathbf{N}) = \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0$  — лоренцев момент не зависит от времени как раз благодаря тому, что зависит от времени явно!

Далее

$$\begin{aligned}(M_\alpha, N_\alpha) &= \sum e_{\alpha\mu\nu} x_\mu \delta_{\nu\lambda} (-1) \frac{\mathcal{E}}{c^2} \delta_{\beta\lambda} - \sum e_{\alpha\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} p_\nu \cdot \left( t \delta_{\beta\lambda} - \frac{p_\lambda}{\mathcal{E}} x_\beta \right) = \\ &= \sum e_{\alpha\beta\mu} \frac{\mathcal{E} x_\mu}{c^2} - \sum e_{\alpha\beta\nu} t p_\nu + \sum e_{\alpha\mu\nu} p_\mu p_\nu \frac{x_\beta}{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

Последний член здесь равен нулю по симметрии, а первые два как раз восстанавливают лоренцев момент, и мы получаем

$$8. \quad (M_\alpha, N_\beta) = -e_{\alpha\beta\gamma} N_\gamma; \quad (26)$$

Наконец,

$$\begin{aligned}(N_\alpha, N_\beta) &= \sum \left[ \left( t \delta_{\alpha\lambda} - \frac{p_\lambda x_\alpha}{\mathcal{E}} \right) (-1) \frac{\mathcal{E}}{c^2} \delta_{\beta\lambda} - \left( -\frac{\mathcal{E}}{c^2} \delta_{\alpha\lambda} \right) \left( t \delta_{\beta\lambda} - \frac{p_\lambda x_\beta}{\mathcal{E}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum (x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = \frac{1}{c^2} e_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma,\end{aligned}$$

то есть

$$9. \quad (N_\alpha, N_\beta) = \frac{1}{c^2} e_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma. \quad (26)$$

**5.2.2.** Мы уже имели случай отмечать, что СП-соотношения между сохраняющимися величинами характеризуют ту группу преобразований, из-за инвариантности действия относительно которых эти сохраняющиеся величины возникают, а не механическую систему, для которой они конкретно находятся. Поэтому найденные выше соотношения в скобках Пуассона (26) между десятью фундаментальными динамическими величинами должны выполняться для *любой* системы, инвариантной относительно преобразований полной группы Лоренца. Это есть условия *релятивистской инвариантности теории*, записанной в гамильтоновой форме.

**5.2.3.** Условия (26) записаны у нас в трехмерных обозначениях. Перепишем их в четырехмерном виде, как соотношения между 4-вектором  $P_i = \left\{ P_\alpha, i \frac{\mathcal{H}}{c} \right\}$  и 4-тензором

$$M_{ij}: \quad M_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma; \quad M_{4\beta} = ic N_\beta; \quad M_{\alpha 4} = -ic N_\alpha.$$

Соотношения 1. и 4. объединятся тогда в одно соотношение

$$(1) \quad (P_i, P_k) = 0; \quad (1. \text{ и } 4.). \quad (27)$$

Перейдем в соотношении 3. от компонент аксиального вектора к компонентам антисимметричного 3-тензора

$$3'. \quad (M_{\alpha\beta}, P_\gamma) = -e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\sigma}P_\sigma = -(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma})P_\sigma.$$

Четырехмерным обобщением этого соотношения будет

$$(2) \quad (M_{ij}, P_k) = -(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})P_l = -\frac{1}{2}e_{ijmn}e_{klmn}P_l; \quad (3., 5., 7., 6.) \quad (27)$$

Проверим, что (2) действительно содержит в себе 3., 5., 7. и 6. Если все индексы в (2) пространственны:  $ij = \alpha\beta$ ,  $k = \gamma$ , то непосредственно получается 3. в только что приданной ему форме 3'. Если  $ij = \alpha\beta$ ,  $k = 3$ , то все символы Кронекера равны нулю и мы получаем соотношение 5. Пусть  $ij = 4\beta$ . Тогда из (2):

$$ic(N_\beta, P_k) = -(\delta_{4k}\delta_{\beta l} - \delta_{4l}\delta_{\beta k})P_l;$$

если здесь  $k = \gamma$ , то  $ic(N_\beta, P_\gamma) = \delta_{\beta\gamma}\frac{i\mathcal{H}}{c}$ ;  $(P_\alpha, N_\beta) = -\frac{\delta_{\alpha\beta}\mathcal{H}}{c^2}$ . т.е. 7.,

если здесь  $k = 4$ , то  $ic\frac{i}{c}(N_\beta, \mathcal{H}) = (\mathcal{H}, N_\beta) = -P_\beta$ , т.е. 6. Проверка завершена.

Точно так же, переходя от аксиальных векторов к антисимметричным тензорам в 2., получим

$$(M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}) = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho}(M_\gamma, M_\rho) = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho}(-1)e_{\gamma\rho\sigma}M_\sigma = -e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho}M_{\gamma\sigma} = - \\ -\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\rho}M_{\gamma\rho} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\mu}M_{\gamma\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}M_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\rho}M_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\nu}M_{\gamma\rho} + \\ + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu}M_{\gamma\rho},$$

то есть

$$2'. \quad (M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}) = -\delta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} + \delta_{\beta\nu}M_{\alpha\nu} + \delta_{\alpha\nu}M_{\beta\mu} - \delta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} = \\ = -e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho}M_{\gamma\rho}.$$

Четырехмерным обобщением этого соотношения будет

$$(3) \quad (M_{ij}, M_{kl}) = -\frac{1}{2!}e_{ijms}e_{klms}M_{mn} = \\ = -\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{jk} - \delta_{jl}M_{ik} \quad (2., 8. и 9.) \quad (27)$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что это соотношение действительно содержит в себе кроме 2. еще и 8. и 9.

## 6. Взаимодействие в теории относительности. Неизбежность понятия поля

**6.1.** В нерелятивистской механике мы описывали взаимодействие частиц с помощью понятия *потенциальной энергии*. Например, для системы заряженных материальных точек, взаимодействующих по закону Кулона, мы должны были ввести в функцию Лагранжа  $L$  кроме их кинетической энергии еще и потенциальную энергию

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{r_{ab}}. \quad (*)$$

Мы уже говорили, что введение потенциальной энергии, зависящей только от координат частиц, соответствует представлению о мгновенном распространении взаимодействия на любое расстояние — изменение координаты какой-то, скажем  $c$ -й, частицы в некоторый момент времени  $t$  в *тот же момент времени* сказывается на силах, действующих на какую-либо другую, скажем  $d$ -ю, частицу, как бы далеко ни были расположены друг от друга частицы с номерами  $c$  и  $d$ . Такое, введенное — для гравитационных сил — еще Ньютоном, представление о непосредственном действии частиц друг на друга через расстояние, *actio in distans*, с самого начала вызывало недоумение с физической точки зрения.

Однако в классической механике оно по крайней мере не вело к логическим противоречиям. Теперь же оно недопустимо, поскольку позволяет устроить сигнал со скоростью, большей скорости света. Поэтому в теории относительности мы должны искать другие способы описания взаимодействия. Чтобы получить к тому наводящие соображения, подвергнем (\*) некоторым, сперва чисто формальным, преобразованиям.

**6.2.** Введем прежде всего понятие электростатического потенциала  $\varphi(r)$  некоторой системы зарядов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_b \frac{e_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|} \quad (**)$$

— в нем сидит пока то же самое действие на расстоянии. Тогда из (\*) получится

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi(\mathbf{r}_a).$$

Теперь мы хотим заменить оставшуюся сумму объемным интегралом. Для того введем *плотность распределения зарядов*

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (28)$$

с помощью которой получим

$$U = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}).$$

Заметим еще, что в силу известного соотношения

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

для нашего потенциала  $\phi(r)$ :

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -4\pi \sum_b e_b \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b) = -4\pi \rho(\mathbf{r}),$$

т. е. введенный с помощью (\*\*) потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона. Поэтому плотность заряда можно выразить через него

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \phi(\mathbf{r}),$$

и переписать тем самым  $U$  через один лишь потенциал:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{8\pi} \int dV (\Delta \phi(\mathbf{r})) \cdot \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int dV \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) \cdot \phi = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int dV \operatorname{div}(\phi \cdot \operatorname{grad} \phi) + \frac{1}{8\pi} \int dV \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \phi. \end{aligned}$$

Первый член преобразуется здесь с помощью теоремы Гаусса в поверхностный интеграл

$$-\frac{1}{8\pi} \oint dS (\phi \operatorname{grad} \phi)$$

по бесконечно удаленной поверхности, который обращается в нуль, и остается только второй. Вводя еще вектор

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi,$$

приводим (\*) к окончательной форме

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{r_{ab}} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV. \quad (***)$$

Таким образом мы представили потенциальную энергию взаимодействия на расстоянии в виде интеграла от плотности энер-

гии  $\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}$ , распределенной по всему пространству. Тем самым мы ввели новый физический объект — поле вектора  $\mathbf{E}$ , который нигде не локализован, а распределен по всему пространству, и, главное, ввели новое представление о природе взаимодействия частиц.

В то время как раньше мы стояли на той точке зрения, что частица непосредственно взаимодействует с другой путем *actio in distance*, теперь мы хотим принять, что непосредственным, элементарным является лишь взаимодействие каждой частицы с полем  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в окрестности той точки  $\mathbf{r}$ , где расположена частица, — частицы возбуждают поле согласно уравнению  $\text{div } \mathbf{E} = -\Delta\phi = 4\pi\rho$  и, в свою очередь, поле возмущает движение частицы

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} = -e_a \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{E}(\mathbf{r}_a) \cdot e_a,$$

— перенос же взаимодействия из одной точки в другую совершается полем в соответствии с его «законами движения», которые нам еще предстоит открыть. Иными словами, мы хотим

считать элементарным актом взаимодействия взаимодействие частицы с полем, а само взаимодействие частиц трактовать как вытекающий из этого элементарного взаимодействия вторичный эффект.

**6.3.** Естественно, что эта новая точка зрения будет обоснована лишь в том случае, если нам удастся обнаружить такие проявления поля, которые не сводятся к простому *actio in distance* — ведь пока поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} \sum_b \frac{e_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_b|}$$

по-прежнему *полностью определяется координатами частиц (или видом плотности  $\rho$ ) в данный момент времени!* Ясно, что таких новых эффектов поля можно ждать лишь в области явлений, связанных с *быстрыми* движениями частиц — ведь для *медленных* движений, которыми мы занимались в классической механике, представление о непосредственном действии на расстоянии великолепно объясняло все опытные факты.

Итак, уже само понятие поля подсказывает нам направление возможного обобщения: *естественно заподозрить, что поле определяется координатами источников в тот же момент времени лишь для достаточно медленных движений зарядов*, — подобно тому, как координаты осциллятора определяются внешней силой в тот же момент времени лишь для внешних



сил, меняющихся достаточно медленно сравнительно с его периодом, — для быстрых же движений следовало бы принять во внимание возможное **запаздывание** поля.

Чтобы реально продвинуться по такому пути, нам надо ввести *уравнения движения для поля*. Мы попробуем строить такие уравнения, следуя той общей схеме *механики*, которая была развита в первой части.

**6.4.** Будем считать, что **поле** описывается одной или несколькими функциями координат и времени, определенными во всем 4-мире:

$$\varphi^{(a)} = \varphi^{(a)}(x); \quad x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

При формулировке *лагранжева формализма* удобно сохранять 4-мерную симметрию и рассматривать все четыре координаты  $x_1, x_2, x_3, x_4$  как *равноправные аргументы*, т. е. рассматривать поле как механическую систему с *конечным* числом степеней свободы (определяемых значением индекса  $(a)$ ) над *многомерным временем*.

При формулировке *гамильтонова формализма* 4-мерная симметрия все равно теряется<sup>1)</sup> и удобнее сохранять в качестве аргумента только одно время  $x_4$ . Пространственные координаты  $\mathbf{x}$  выступают тогда в роли параметра, своеобразного непрерывного номера степени свободы. Таким образом, в гамильтоновом формализме поле рассматривается как

$$\varphi^{(a)} = \varphi_{\mathbf{x}}^{(a)}(x_4),$$

как *система с бесконечным числом степеней свободы*, но над обычным временем.

Никакой принципиальной разницы между этими двумя способами описания нет, и выбор какого-либо одного определяется лишь соображениями удобства. Мы прибегнем к первому и будем строить

## 7. Лагранжев формализм для поля

В лагранжевом формализме *действие* для поля надо, очевидно, записать в виде 4-кратного интеграла «по всем временам  $x_1, x_2, x_3, x_4$ » т. е. по 4-объему

$$S = \int_R d\Omega L(\varphi^a(x), \varphi^a_{,i}(x), x); \quad \delta S = 0 \quad (29)$$

<sup>1)</sup> Ср. замечание в конце § 4.

от «плотности функции Лагранжа» или **лагранжиана**  $L$ , зависящего от функций поля  $\varphi^a(x)$  (мы обозначаем номер компоненты поля, который *не обязан* быть тензорным индексом, первыми буквами латинского алфавита), их первых производных

$$\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^l} \equiv \varphi^a{}_{,l}(x)$$

(такое сокращенное обозначение производных является обычным и мы будем им пользоваться) и, может быть, явно от координат (времен)  $x_i$ . Дальнейшие рассуждения будем строить так, чтобы одни и те же выкладки послужили и для получения уравнений движения и для нахождения законов сохранения с помощью теоремы Нётер.

**7.1.** Будем считать, что при бесконечно малом преобразовании координат

$$x^k \rightarrow x'^k = x^k + \delta x^k; \quad \delta x^k = \Lambda^k{}_\alpha C^\alpha, \quad (31.1)$$

где  $C^\alpha$  — независимые параметры преобразования, функции поля  $\varphi^a(x)$  преобразуются по тому или иному линейному представлению группы Лоренца:

$$\varphi^a(x) \rightarrow \varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \delta^* \varphi^a(x); \quad \delta^* \varphi^a(x) = \sum_b \mathcal{L}^{ab}{}_\alpha \varphi^b(x) C^\alpha. \quad (31.2)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Индекс  $\alpha$  нумерует независимые параметры рассматриваемой группы преобразований, он не должен ни быть тензорным, ни иметь какое-либо отношение к индексам  $a$ ,  $b$ , нумерующим функции поля. В качестве рассматриваемой группы преобразований можно выбрать какую-либо подгруппу полной группы Лоренца, но можно ввести в рассмотрение и какие-либо другие непрерывные преобразования, не связанные с выбором системы отсчета, — для таких преобразований матрицы  $\Lambda^k{}_\alpha$  будут равны нулю. ■

Вариации  $\delta^* \varphi^a$  непереставимы с дифференцированием по  $x^i$ ; с ним переставимы *вариации формы*

$$\delta \varphi^a(x) = \varphi'^a(x) - \varphi^a(x); \quad \delta \varphi^a(x) = \delta^* \varphi^a(x) - \varphi^a{}_{,k} \delta x^k. \quad (31.3)$$

Описанные вариации понадобятся нам для доказательства теоремы Нётер; чтобы вывести уравнения Лагранжа–Эйлера, надо будет добавить в вариации формы (31.3) к членам, вызываемым

параметрами  $C^a$ , еще и произвольные вариации  $\delta_1\varphi^a$ , т. е. написать вместо (31.3)

$$\delta\varphi^a(x) = \delta^*\varphi^a(x) - \varphi^a_{,k}(x)\delta x^k + \delta_1\varphi^a(x), \quad (31.3')$$

где первые два члена управляются независимыми параметрами  $C^a$ , а вариации  $\delta_1\varphi^a$  последнего члена сами являются независимыми. Чтобы получить *уравнения движения*, надо будет положить параметры  $C^a$  равными нулю и потребовать равенства нулю вариации действия при произвольных вариациях  $\delta_1\varphi^a$ , равных нулю на границах области  $R$ . Чтобы вывести *законы сохранения*, нужно положить равными нулю вариации  $\delta_1\varphi^a$  и потребовать неизменности действия  $\delta S = 0$  по отношению к произвольным изменениям параметров  $C^a$ .

**7.2.** Вычислим вариацию интеграла (29); вычисление это совершенно аналогично выполненному в I, 5, поэтому теперь можно проводить его с меньшей подробностью:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{R'} L'(x') d\Omega' - \int_R L(x) d\Omega = \int_{R'} (L(\dots, x) + \delta^*L) d\Omega' - \int_R L d\Omega = \\ &= \int_R \left\{ \left( L + \delta L + \frac{dL}{dx^k} \delta x^k \right) \left( 1 + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^k} \right) - L \right\} d\Omega = \dots \end{aligned}$$

Здесь  $\left| \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \right| = \left| \delta_j^k + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^j} \right| = 1 + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^k}$  — якобиан для перехода от переменных  $x'$  к переменным  $x$ , а  $\frac{d}{dx^k}$  означает «полную частную производную», которая имеет в виду дифференцирование не только по явно входящим в лагранжиан координатам  $x^k$ , но и по неявной зависимости  $L$  от них через функции поля. Продолжая выкладку, получаем

$$\delta S = \int_R \left( \delta L + \frac{d}{dx^k} (L \delta x^k) \right) d\Omega.$$

Но

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} \delta \varphi^a + \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \delta \varphi^a_{,k} \right) = \\ &= \sum_a \delta \varphi^a \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \right) + \frac{d}{dx^k} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \delta \varphi^a. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно

$$\delta S = \int_R d\Omega \sum_a \delta\varphi^a \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a{}_{,k}} \right) + \\ + \int_R d\Omega \frac{d}{dx^k} \left( L \delta x^k + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a{}_{,k}} \delta\varphi^a \right). \quad (32)$$

**7.3.** Займемся сперва уравнениями движения. Тогда независимые вариации суть

$$\delta\varphi^a = \delta_1\varphi^a(x); \quad \delta_1\varphi^a(x) = 0 \quad \text{на границах области } R; \quad \delta x^k = 0.$$

Второй интеграл в (32) можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса

$$\int d\Omega \frac{d}{dx^k} \dots = \oint dS_k \dots$$

в интеграл по (3-мерной) гиперповерхности, ограничивающей область  $R$ ; на ней по условию  $\delta_1\varphi^a = 0$  и этот интеграл пропадает. Из требования же равенства нулю первого интеграла заключаем, в силу произвольности и независимости  $\delta_1\varphi^a(x)$ , что должно быть

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^a} - \frac{d}{dx^k} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a{}_{,k}} = 0. \quad (33)$$

Это и есть **уравнения движения** для поля. Поскольку  $L$  зависит от функций поля и их первых производных, а (33) включает еще одно дополнительное дифференцирование, то это суть уравнения в частных производных второго порядка. Следовательно, состояние поля определяется полностью, если задать на какой-либо пространственноподобной гиперповерхности все *функции поля* и их *первые производные*. Именно для этого мы требовали, чтобы лагранжиан содержал только первые производные полей. Как и в механике, последнее свойство не нарушится, если включить в лагранжиан вторые производные *линейно*.

**7.4. ПРИМЕР:** Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда поле имеет только *одну* компоненту  $\varphi^{(a)} \equiv \varphi$ . При преобразованиях Лоренца эта компонента может преобразовываться только сама через себя, т.е., в силу допущения о линейности, только умножаться на некоторый множитель, который может зависеть лишь от якобиана преобразования, т.е. детерминанта матрицы  $\|\alpha_{ij}\|$ . Но этот детерминант равен  $+1$  для всех непрерывных преобразований и  $-1$  для отражений — таким образом для поведения однокомпонентного поля при преобразованиях Лоренца остаются лишь две возможности: оно

может или вообще быть инвариантным или испытывать дополнительную переменную знака при отражениях (ср. примечание в 3.5). В первом случае говорят о **скалярном поле**, для него всегда

$$\varphi'(x') = \varphi(x);$$

во втором — о **псевдоскалярном**.

И в том и в другом случае лагранжиан может зависеть лишь от двух инвариантных комбинаций  $\varphi^2$  и  $\varphi_{,i}^2$ <sup>1)</sup>, вид этой зависимости из общих соображений установить нельзя. Если, однако, желать еще, чтобы уравнения движения (33) были бы *линейны*, то лагранжиан однозначно с точностью до одной константы должен иметь вид

$$L = \frac{1}{2} (\varphi_{,i}^2 + \kappa^2 \varphi^2).$$

Поэтому  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \kappa^2 \varphi$ ;  $\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,k}} = \varphi_{,k}$  и, следовательно, уравнением движения будет

$$\kappa^2 \varphi - \frac{d}{dx_k} \varphi_{,k} = 0 \quad \text{или} \quad \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \kappa^2 \right) \varphi = 0.$$

Оператор  $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$  обобщающий оператор Лапласа на  $(3+1)$ -пространство, называют **оператором д'Аламбера**, а отличающийся от него на константу  $K = \square - \kappa^2$  — **оператором Клейна–Гордона**. С их помощью уравнение движения для скалярного поля записывается как

$$(\square - \kappa^2) \varphi = 0 \quad \text{или} \quad K \varphi = 0;$$

его тоже называют **уравнением Клейна–Гордона**.

Если искать частное решение этого уравнения в форме плоской волны

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

(а из теоремы об интеграле Фурье следует, что общее решение можно получить в виде суперпозиции таких частных), то уравнение даст нам связь между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{1}{c^2} \omega^2 = \mathbf{k}^2 + \kappa^2 \quad \text{или} \quad \omega(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + \kappa^2}.$$

Мы видим таким образом, что для уравнения Клейна–Гордона всегда  $|\omega(\mathbf{k})| \geq |\mathbf{k}|$ , т. е. нормаль к поверхности волнового фронта всегда вре-

---

<sup>1)</sup> А в скалярном случае — еще и от самого  $\varphi$ , но такая зависимость устраняется тривиальной заменой  $\varphi \rightarrow \varphi + a$ , где  $a$  — постоянная.

мениподобна, следовательно, сам волновой фронт образует пространственноподобную гиперповерхность, а **фазовая скорость** волны

$$v_{\text{ph}} = \frac{|\omega(\mathbf{k})|}{|\mathbf{k}|} = c \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\mathbf{k}^2}}$$

зависит от волнового вектора и всегда *больше* скорости света. Напротив, **групповая скорость**

$$\mathbf{v}_{\text{gr}} = \frac{d\omega(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}} = \pm \frac{c\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + \kappa^2}}$$

всегда *меньше* скорости света.

Все перечисленные свойства решений уравнения Клейна–Гордона существенно зависят от того, что мы приписали единственной входящей в лагранжиан скалярного поля постоянной определенный знак, записав ее в виде  $\kappa > 0$ . При другом выборе знака интерпретация решений вступила бы в конфликт с требованиями причинности. ■

## 8. Законы сохранения

**8.1.** Будем рассматривать теперь только действительные движения, для которых выполняются (33), и потребуем равенства нулю вариации действия,  $\delta S = 0$ , для таких вариаций координат (31.1) и функций поля (31.3), которые обусловлены только описываемыми параметрами  $C^\alpha$  преобразованиями симметрии. Тогда в (32) будет равен нулю первый член, во втором же можно будет переписать подинтегральное выражение в виде

$$\frac{d}{dx^k} \left\{ \left( L\delta_i^k - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi^a_{,i} \right) \delta x^i + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \delta^* \varphi^a \right\}$$

или, выражая все вариации через независимые параметры  $C^\alpha$  как

$$C^\alpha \frac{d}{dx^k} \left\{ \left( L\delta_i^k - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi^a_{,i} \right) \Lambda^i_\alpha + \sum_{a,b} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \mathcal{G}^{ab}_\alpha \varphi^b \right\}.$$

Определяя теперь величины

$$N_\alpha^k(x) = \left( L\delta_i^k - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi^a_{,i} \right) \Lambda^i_\alpha + \sum_{a,b} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \mathcal{G}^{ab}_\alpha \cdot \varphi^b \quad (34.1)$$

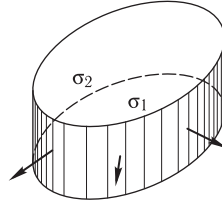
видим, что условие инвариантности действия относительно рассматриваемого преобразования свелось к

$$C^\alpha \int_R d\Omega \frac{d}{dx^k} N_\alpha^k = 0.$$

Здесь опять приходится прибегнуть к аргументу о произвольности области  $R$ , позволяющему из равенства нулю интеграла заключить о равенстве нулю подинтегрального выражения, с помощью которого мы приходим к выводу, что *величины  $N_\alpha^k$  удовлетворяют дифференциальному закону сохранения*

$$\frac{dN_\alpha^k}{dx^k} = 0. \quad (34.2)$$

**8.2.** Если проинтегрировать теперь (34.2) по 4-области, имеющей форму (не обязательно — правильного) 4-цилиндра, основания которого образованы двумя пространственноподобными гиперповерхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а боковая гиперповерхность включает времениподобное направление, и преобразовать объемный интеграл с помощью теоремы Гаусса в интеграл по ограничивающим цилиндр гиперповерхностям, то, удаляя неограниченно боковую гиперповерхность на пространственную бесконечность, где нет поля, сведем результат к разности интегралов по пространственноподобным гиперповерхностям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (разности, поскольку меняется знак одной нормали). Итак,



$$\int_{\sigma_1} dS_k N_\alpha^k = \int_{\sigma_2} dS_k N_\alpha^k.$$

Определим теперь динамические величины (интегральные):

$$\mathcal{N}_\alpha[\sigma] = \int_\sigma dS_k N_\alpha^k. \quad (35.1)$$

Тогда результат только что проведенного рассуждения означает, что интегральные динамические величины  $\mathcal{N}_\alpha$  не зависят от выбора пространственноподобной гиперповерхности  $\sigma$ :

$$\mathcal{N}_\alpha[\sigma_1] = \mathcal{N}_\alpha[\sigma_2]. \quad (35.2)$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{\delta \mathcal{N}_\alpha[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = 0. \quad (35.3)$$

Заметим, кстати, что

$$\mathcal{N}_\alpha(\sigma) = \int_\sigma dS_k \Lambda_\alpha^k L + \int dS_k \dots \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} = \frac{\partial}{\partial C^a} \int dS_k \delta x^k + \dots = 0 + \dots,$$

если всюду  $\delta x^k \perp dS_k$ , т.е. тогда, когда преобразование (31.1) сдвигает  $\sigma$  по ней самой (или делает на ней перенумерацию).

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Стоит обратить внимание на то, каким чрезвычайно любопытным способом тут фактически восстановилась выделенная роль времени. В удовлетворяющем требованию четырехмерной симметрии лагранжевом формализме мы все время трактовали три пространственные координаты и время на равных правах, и дифференциальный закон сохранения (34.2) блюл эту симметрию. Теперь, однако, мы вспоминаем, что в псевдоевклидовом пространстве есть выделенный класс — пространственноподобных — гиперповерхностей, и интегрируем именно по ним. Тем самым восстанавливается особая роль — но не времени, а времениподобных направлений, без выделения какой-либо частной системы отсчета. Мы можем даже, как видим, вернуться обратно к дифференциальной формулировке (35.3)! Поэтому можно сказать, что рассмотрение класса произвольных пространственноподобных гиперповерхностей  $\sigma$  в каком-то смысле позволяет вновь ввести в теорию относительности инвариантное описание времени. Эти соображения сыграли очень важную роль в *квантовой теории поля*. ■

В частности, если выбрать в качестве поверхностей  $\sigma$  семейство всевозможных пространственноподобных гиперплоскостей

$$\xi_i x_i + \tau c = 0; \quad \xi_i^2 = -1,$$

то из (35.3) воспоследует, что интегральные величины

$$\mathcal{N}_\alpha(t) = \int_{x^4=\text{const}} dV N_\alpha^4 \quad (35.1')$$

(1) сохраняются во времени (**интегральный закон сохранения**):

$$\mathcal{N}_\alpha(t) = \text{const}; \quad (35.4)$$

(2) преобразуются при преобразованиях Лоренца как параметры  $C^\alpha$  (точнее — контравариантно им, но в мнимой системе координат это безразлично).

Последнее утверждение следует из того замечания, что интеграл

$$\int_\sigma dS_k N_\alpha^k \cdot C^\alpha,$$

взятый по фиксированной гиперповерхности  $\sigma$ , должен быть инвариантен, а, значит, интеграл (35.1)  $\int_\sigma dS_k N_\alpha^k$  по фиксированной



гиперповерхности  $\sigma$  — вести себя по отношению к преобразованиям Лоренца контравариантно параметрам  $C^\alpha$ . В силу же (35.2) значение интегралов (35.1) от выбора  $\sigma$  не зависит; поэтому, преобразуя (35.1') в другую систему отсчета, мы вправе заменить интегрирование по гиперплоскости  $\sigma$ :  $x_4 = \text{const}$  на интегрирование по  $\sigma'$ :  $x'_4 = \text{const}$ . Отсюда следует, что тем же законам преобразования будут удовлетворять и величины (35.1'), в которых подразумевается интегрирование в каждой системе отсчета по своей гиперплоскости — 3-пространству в этой системе.

**8.3. Тензор энергии–импульса.** Выберем в качестве преобразования (31) *сдвиг*. Этому должен отвечать выбор

$$\alpha \equiv i = \{1, 2, 3, 4\}; \quad C^\alpha = a^i; \quad (36)$$

$$\Lambda^k_\alpha = \delta_i^k, \quad \text{т. е.} \quad \delta x^k = a^k \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^{ab}_\alpha = 0.$$

Соответствующая величина  $N_\alpha^k = N_i^k$  называется тогда **тензором энергии–импульса** и обозначается буквой  $T$ :

$$T_i^k = L\delta_j^k - \sum_a \varphi^a_{,i} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}}. \quad (37.1)$$

Согласно (34.2) тензор энергии–импульса удовлетворяет дифференциальному закону сохранения

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0; \quad (37.2)$$

интегрированием по пространству получаем из него полный 4-импульс поля

$$P_i(t) = \int_{t=\text{const}} dV T_i^4 = \text{const}, \quad (37.3)$$

сохраняющийся во времени.

**8.4. Момент.** Чтобы получить закон сохранения *момента*, рассмотрим в качестве преобразований (31) пространственные и лоренцевы повороты.

**8.4.1.** Такие повороты описываются шестью независимыми параметрами  $\delta\Omega_{kj}$ , поэтому нужно положить:

$$\alpha = \{k, j\}; \quad C_\alpha = \delta\Omega_{kj};$$

$$\Lambda^i_{kj} = \frac{1}{2} (x_k \delta_j^i - x_j \delta_k^i) = \frac{1}{2} (\delta_j^i \delta_k^l - \delta_k^i \delta_j^l) x_l = \frac{1}{2} \frac{1}{2!} e^{ilmn} e_{jkmn} x_l \quad (38)$$

— действительно, тогда

$$\delta x^i = \Lambda^i_{kj} \delta\Omega^{kj} = x_k \delta_j^i \delta\Omega^{kj} = x_k \delta\Omega^{ki}$$

в согласии с (23). Что же до матрицы  $\mathcal{L}^{ab}_{kj}$ , по которой преобразуются компоненты поля, то ее вид определяется поведением поля относительно преобразований Лоренца (или, лучше, наоборот: задание этой матрицы определяет поведение поля при преобразованиях Лоренца): если, например, поле описывается однокомпонентной скалярной (или псевдоскалярной) функцией, то матрица  $\mathcal{L}_{kj}$  равна нулю; если компоненты поля образуют 4-вектор,  $\varphi^a = \varphi^m$ , то матрица будет такой же, как и матрица  $\Lambda$  для координат:

$$\delta^* \varphi^m = \mathcal{L}^{mn}_{kj} \varphi_n \delta \Omega^{kj}; \quad \mathcal{L}^{mn}_{kj} = \frac{-\delta^m_k \delta^n_j + \delta^m_j \delta^n_k}{2} \quad \text{и т. п.} \quad (38V)$$

(Из (38V) легко сообразить, что для *тензора ранга s*:

$$\mathcal{L}^{m_1 \dots m_s; n_1 \dots n_s}_{kj} = \sum_{1 \leq p \leq s} g^{m_1 n_1} \dots \mathcal{L}^{m_p n_p}_{kj} \dots g^{m_s n_s}, \quad (38T)$$

где  $\mathcal{L}^{m_p n_p}_{kj}$ , берутся из (38V)).

**8.4.2.** Соответствующая величина  $N_a^k = \frac{1}{2} M_{ij}^k$  (напоминаем замечание в **5.1.3**, что  $\delta S = \frac{1}{2} M_{ij} \delta \Omega^{ij}$  называется теперь **тензор плотности момента**:

$$M_{ij}^k = 2 \left( L \delta^k_l - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi^a_{,l} \right) \Lambda^l_{ij} + 2 \sum_{a,b} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \mathcal{L}^{ab}_{ij} \varphi^b = -M_{ji}^k.$$

Он складывается из двух разнородных членов: в первом в скобке стоит тензор энергии-импульса (37.1), поэтому он имеет одинаковую форму для всех полей и обязан своим происхождением тому, что при 4-повороте смещается точка, в которой рассматривается поле; второй же специфичен для поля каждой тензорной природы и проистекает из-за того, что при повороте происходит перемешивание полевых компонент. Относительно этого второго члена нельзя более сделать никаких общих утверждений, мы обозначим его через

$$l^k_{;ij} = -l^k_{;ji} = 2 \sum_{a,b} \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \mathcal{L}^{ab}_{ij} \varphi^b. \quad (39.2)$$

В первый же член можно подставить (38) и воспользоваться обозначением  $T_i^k$ . Мы находим тогда

$$M_{ij}^k = x_i T_j^k - x_j T_i^k + l^k_{;ij}. \quad (39.1)$$

Согласно (34.2) этот тензор удовлетворяет дифференциальному закону сохранения (начиная с этого места, будет удобнее писать все тензорные индексы снизу, что позволительно в мнимой системе)

$$\frac{\partial M_{ij;k}}{\partial x_k} = T_{ji} - T_{ij} + \frac{\partial l_{k;ij}}{\partial x_k} = 0, \quad (39.3)$$

где мы воспользовались тем, что  $T_{ij}$  уже удовлетворяет закону сохранения (37.2). Тензор энергии импульса  $T_{ij}$  не обязан быть симметричным; мы видим, что закон сохранения момента связывает его симметризацию со вторым — специальным — членом тензора плотности момента (39.1). Эту связь можно сделать более непосредственной, если удастся представить  $l_{k;ij}$  в виде разности двух тензоров, также антисимметричных по второй паре индексов:

$$l_{k;ij} = f_{j;ik} - f_{i;jk}, \quad f_{j;ik} = -f_{j;ki}. \quad (40.1)$$

**8.4.3.** Легко убедиться, что это возможно. В самом деле, мы можем переписать (40.1) в виде

$$l_{k;ij} + f_{i;jk} + f_{j;ki} = 0. \quad (*)$$

Поэтому естественно искать  $f_{i;jk}$  в форме

$$f_{i;jk} = l_{i;jk} + \lambda (l_{i;jk} + l_{j;ki} + l_{k;ij})$$

с неопределенным коэффициентом  $\lambda$ . Подстановка в (\*) дает

$$(1 + 2\lambda) (l_{i;jk} + l_{j;ki} + l_{k;ij}) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lambda = -1/2.$$

Итак  $f_{i;jk}$  можно найти:

$$f_{i;jk} = l_{i;jk} - \frac{1}{2} (l_{i;jk} + \dots + \dots) = \frac{1}{2} (l_{i;jk} - l_{j;ki} - l_{k;ij}). \quad (40.2)$$

**8.3.1.** Теперь мы можем ввести вместо  $T_{ij}$  новый тензор

$$\theta_{ij} = T_{ij} + \frac{\partial f_{i;jk}}{\partial x_k}, \quad (39.4)$$

который в силу закона сохранения момента (39.3) будет *симметричен*:

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}. \quad (37.4a)$$

Покажем, что тензор  $\theta_{ij}$  можно использовать вместо тензора  $T_{ij}$ . Во-первых, он удовлетворяет тому же закону сохранения (37.2)

$$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f_{i;jk}}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (37.2')$$

поскольку первый член исчезает в силу (37.2), а второй — в силу антисимметрии (40.1) тензора  $f_{i,jk}$ . Во-вторых, при подстановке в (37.3)  $\theta_{ij}$  приведет к тому же самому полному 4-импульсу, поскольку вклад второго члена можно будет преобразовать с помощью 3-мерной теоремы Гаусса в интеграл по бесконечно удаленной (обычной) поверхности, где нет поля. (Заметим, что для обоих выводов была существенна только антисимметрия  $f_{i,jk}$  по второй паре индексов).

Тензор энергии-импульса  $\theta_{ij}$  называют **симметричный** тензор энергии-импульса (иногда говорят — **метрический**, поскольку в *общей теории относительности* показывают, что его можно получить варьированием действия по метрическому тензору  $g_{ij}$ ); наш первоначальный  $T_{ij}$ , в отличие от него, называют **канонический** тензор энергии-импульса.

**8.4.4.** Основное преимущество симметричного тензора энергии-импульса состоит в том, что из него можно построить — автоматически сохраняющийся вследствие (37.2') и (37.4а) — тензор

$$\mu_{ij;k} = x_i \theta_{jk} - x_j \theta_{ik}; \quad \frac{\partial \mu_{ij;k}}{\partial x_k} = 0. \quad (39.4)$$

Подставим в него выражение (37.4) для  $\theta_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \mu_{ij;k} &= x_i T_{jk} - x_j T_{ik} + x_i \frac{\partial f_{j,kl}}{\partial x_l} - x_j \frac{\partial f_{i,kl}}{\partial x_l} = \\ &= x_i T_{jk} - x_j T_{ik} - f_{j,ki} + f_{i,kj} + \frac{\partial}{\partial x_l} [x_i f_{j,kl} - x_j f_{i,kl}]. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\mu_{ij;k} = M_{ij;k} + \frac{\partial}{\partial x_l} [x_i f_{j,kl} - x_j f_{i,kl}], \quad (39.4')$$

и, в силу таких же соображений, которые только что приводились при сравнении  $\theta_{ij}$  и  $T_{ij}$ , тензор  $\mu_{ij;k}$  может на равных правах с  $M_{ij;k}$  служить в качестве *тензора плотности момента*. Специального названия у него нет; тензор  $M_{ij;k}$  называют иногда **канонический**.

**8.4.** Полный **4-тензор момента** получается по общему правилу интегрированием четвертых по последнему индексу компонент тензора плотности момента (по сказанному — все равно какого) по 3-пространству:

$$M_{ij} = \int_{t=\text{const}} dV M_{ij;4} = \int_{t=\text{const}} dV \mu_{ij;4} = \text{const}. \quad (39.5)$$

Как и 4-импульс, он сохраняется во времени.

**8.5. ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Мы выяснили, что, в отличие от полных фундаментальных динамических величин, локализация их в пространстве, занимаемом полем, не устанавливается лагранжевым формализмом однозначно. Однозначным образом локализация энергии, импульса и момента находится только в релятивистской теории тяготения — общей теории относительности. При этом выясняется, что правильное распределение в пространстве описывается симметричным тензором энергии импульса  $\theta_{ij}$  и тензором  $\mu_{ij;k}$ . Это распределение обладает еще и той добавочной особенностью, что восстанавливает для *плотностей*, имевшееся в теории частиц соотношение (24) между моментом и импульсом: если записать  $\theta_{i4} dV$  как  $dP_i$ , то выражение полного момента через  $\mu_{ij;4}$  можно представить как

$$M_{ij} = \int_{t=\text{const}} (x_i dP_j - x_j dP_i) \quad \left( \text{и 4-импульс} \quad P_i = \int_{t=\text{const}} dP_i \right). \quad (39.6)$$

С каноническим тензором плотности момента такая интерпретация невозможна. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Мы использовали для перехода от канонического тензора энергии–импульса к симметричному соображения сохранения момента и структуру канонического тензора его плотности, выразив «добавок»  $f_{i;jk}$  через  $f_{i;jk}$ . Практически часто удобнее другой путь: пользуясь тем, что от тензора  $f_{i;jk}$  фактически требуется лишь антисимметрия по последним индексам и что он должен, очевидно, быть построен только из функций, поля и их первых производных, бывает проще *догадаться*, какую величину  $f_{i;jk}$  надо выбрать, чтобы она симметризовала тензор энергии–импульса. Если это удастся, то тензор плотности момента  $\mu_{ij;k}$  строится по (39.4), и всю длинную процедуру с исследованием трансформационных свойств поля удастся обойти. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3:** Мы применили технику теоремы Нётер, чтобы найти величины, сохраняющиеся в силу инвариантности действия относительно преобразований полной группы Лоренца. Та же техника применима и для случая каких-либо других непрерывных преобразований, относительно которых есть основания требовать инвариантности действия. Вычисления даже упрощаются, поскольку преобразование не затрагивает координаты. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4: Могло бы показаться, что *симметричный* тензор  $\theta_{ij}$  определяется однозначно. В самом деле, чтобы заменить симметричный  $\theta_{ij}$  на другой симметричный  $\theta'_{ij}$ :

$$\theta'_{ij} = \theta_{ij} + \frac{\partial f'_{i,ik}}{\partial x_k},$$

надо добавить к нему симметричный в  $i$  и  $j$   $\frac{\partial f'_{i,ik}}{\partial x_k}$ . Между тем, если  $f'_{i,jk}$  симметричен в  $i, j$ , то это значит согласно (40.1), что соответствующий

$$l'_{k,ij} = -(f'_{i,jk} - f'_{j,ik}) = 0$$

и, поскольку  $f$  и  $l$  однозначно выражаются один через другой, что и  $f'_{i,jk} = 0$ . Однако в действительности рассуждение это несостоятельно: симметрия  $f'_{i,jk}$  есть достаточное, но не необходимое условие симметрии  $\frac{\partial f'_{i,jk}}{\partial x^k}$ ; и симметричные в  $i$  и  $j$  выражения  $\frac{\partial f'_{i,jk}}{\partial x_k}$  могут быть отличны от нуля. ■

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим интересный и сам по себе ПРИМЕР: однокомпонентного (скалярного или псевдоскалярного) поля  $\varphi^a(x) = \varphi(x)$  с лагранжианом  $L = \frac{1}{2}(\varphi_{,l}^2 + \kappa^2 \varphi^2)$ , к которому мы уже обращались (см. 7.4) для иллюстрации уравнений движения. В этом случае канонический тензор  $T_{ij}$  сразу симметричен:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\varphi_{,l}^2 + \kappa^2 \varphi^2) - \varphi_{,i} \varphi_{,j}.$$

Вычислим его след:

$$\text{Spur } T_{ij} = T_{ii} = 2\varphi_{,l}^2 + 2\kappa^2 \varphi^2 - \varphi_{,i}^2 = 2\kappa^2 \varphi^2 + \varphi_{,l}^2$$

— он, вообще говоря, не равен нулю. Более того, он не равен нулю и для того случая, когда само поле  $\varphi$  не входит в лагранжиан,  $\kappa = 0$ :

$$\text{Spur } T_{ij}|_{\kappa=0} = \varphi_{,l}^2.$$

Этот результат физически неприемлем. Чтобы пояснить природу возникающей трудности, приходится, к сожалению, обратиться к квантовомеханическим аргументам. В квантовой теории каждому полю сопоставляются частицы, и притом таким способом, что групповая скорость волны равна скорости частицы. Как мы видели в 7.4, при  $\kappa^2 = 0$  все решения уравнения Клейна–Гордона обладают одной и той же групповой скоростью, равной  $c$ . Но частицы, движущиеся со скоростью света, должны обладать нулевой массой, а вычисление тензора энергии–импульса для совокупности *классических* (невзаимодействующих) частиц показывает, что если масса частиц равна нулю, то должен быть равен нулю и след этого тензора.

Чтобы исправить дело, попробуем подобрать такую  $f_{i,jk}$ , производная которой не испортила бы симметрии канонического  $T_{ij}$  и в то же время изменила бы его след. В нашем случае выбор невелик: чтобы не испортить линейности теории, нельзя привлекать степени поля выше второй и в то же время надо набрать три тензорных индекса. Единственная возможность — это образование типа  $\delta_{ij}\varphi_{,k}\varphi$ ; чтобы достичь требуемой для  $f_{i,jk}$  антисимметрии, его надо антисимметризовать по двум индексам, что можно выполнить единственным способом. В результате приходим к «кандидату»

$$f_{i,jk} = \lambda (\delta_{ij}\varphi_{,k}\varphi - \delta_{ik}\varphi_{,j}\varphi),$$

где  $\lambda$  — пока неопределенная постоянная. Дифференцирование (с учетом уравнения движения) дает

$$\frac{\partial f_{i,jk}}{\partial x_k} = \lambda (\varkappa^2 \varphi^2 + \varphi_{,k}\varphi_{,k}) \delta_{ij} - \lambda \varphi_{,i}\varphi_{,j} - \lambda \varphi_{,i,j}\varphi,$$

т. е. действительно симметричное выражение.

Итак, «исправленный» тензор энергии–импульса  $\theta_{ij}$  будет равен

$$\theta_{ij} = \frac{1+2\lambda}{2} \delta_{ij} (\varphi_{,k}^2 + \varkappa^2 \varphi^2) - (1+\lambda) \varphi_{,i}\varphi_{,j} - \lambda \varphi_{,i,j}\varphi.$$

Сравнительно с  $T_{ij}$  он обладает одним недостатком — в него явно входят вторые производные поля; однако чисто пространственные или смешанные — пространственно-временные — вторые производные еще не составляют нетерпимого дефекта, а производную  $\varphi_{44}$  можно исключить, пользуясь уравнением движения.

Вычисляя след  $\theta_{ii}$ , находим, что

$$\theta_{ii} = (1+3\lambda) \varphi_{,k}^2 + (2+3\lambda) \varkappa^2 \varphi^2.$$

Поэтому для нашей цели следует выбрать  $\lambda = -\frac{1}{3}$ ; тогда

$$\theta_{ij} = \frac{1}{6} \delta_{ij} (\varphi_{,k}^2 + \varkappa^2 \varphi^2) - \frac{2}{3} \varphi_{,i}\varphi_{,j} + \frac{1}{3} \varphi_{,i,j}\varphi,$$

или

$$\theta_{ij} = \frac{2}{3} \left( \frac{\delta_{ij}}{4} \varphi_{,k}^2 - \varphi_{,i}\varphi_{,j} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\delta_{ij}}{2} \varkappa^2 \varphi^2 + \varphi_{,i,j}\varphi \right)$$

и

$$\theta_{ij} = \varkappa^2 \varphi^2.$$

Любопытно отметить (мы не будем приводить соответствующих формул), что «исправленный» тензор  $\theta_{ij}$  можно получить в качестве канонического из измененного лагранжиана, приводящего к тому же самому уравнению движения. Этот лагранжиан содержит, конечно, вторые производные (линейно!) и отличается от первоначального на полную дивергенцию. ■

## 9. Электромагнитное поле

**9.1.** В обычной — макроскопической и атомной — физике основную роль агента, переносящего взаимодействие между частицами, берет на себя **электромагнитное поле**. Электромагнитное поле характеризуется задаваемым в каждой мировой точке  $x_i$  4-вектором

$$A_i = A_i(x) = \{\mathbf{A}, i\phi\}, \quad (40)$$

который называется **4-потенциал** (электромагнитного поля). Его пространственная и временная составляющие,  $\mathbf{A}$  и  $\phi$ , называются, соответственно, **векторным и скалярным** потенциалами.

**9.2.** Лагранжиан для электромагнитного поля должен состоять из двух частей — лагранжиана свободного электромагнитного поля  $L_{\text{ph}}$  и лагранжиана, описывающего взаимодействие этого поля с заряженными частицами —  $L_{\text{int}}$ . (Кроме того, в действии должен быть, конечно, еще и «кинетический» член, отвечающий свободным частицам — мы его уже знаем, он выражается формулой (16'') из § 5.)

«Вывести» форму обоих членов действия для электромагнитного поля с помощью какой-либо умозрительной аргументации, конечно, невозможно — выбор определенной формы лагранжианов оправдывается только согласием с опытом. Тем не менее полезно сформулировать те полученные из опытных фактов общие свойства электромагнитного поля, которые оказываются для этого выбора определяющими.

**9.2.1.** Таких основных свойств — три: электромагнитное поле

- (1) распространяется со скоростью, *точно равной* скорости света  $c$  (свет — это и есть свободное электромагнитное поле);
- (2) удовлетворяет принципу суперпозиции — поведение нового электромагнитного поля в какой-либо области пространства не зависит от того, было ли уже там какое-нибудь другое электромагнитное поле или нет;
- (3) обладает свойством **градиентной инвариантности**.

Последнее утверждение означает, что поля, описываемые потенциалами  $A_i(x)$  и  $A'_i(x)$ , связанными соотношением

$$A'_i(x) = A_i(x) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \quad (41)$$

где  $\lambda(x)$  — произвольная функция 4-точки, по своим физическим свойствам тождественны.



К сформулированным трем физическим требованиям можно добавить еще наше стандартное условие:

(4) описывающие поле уравнения должны быть не старше второго порядка.

Кроме того, мы хотим, конечно, чтобы описание электромагнитного поля было релятивистски инвариантным, — и это, пожалуй, самое сильное ограничение.

**9.3.1.** В силу (2) лагранжиан  $L_{\text{ph}}$  должен быть *квадратичен* по полевым величинам (чтобы уравнения оказались *линейными*), в силу (1) — не должен содержать самого потенциала  $A_i$ <sup>1)</sup>, в силу (4) должен содержать только первые производные поля и притом, в силу (3), лишь в комбинации

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}; \quad F_{ik} = -F_{ki}. \quad (42)$$

Эта комбинация имеет специальное имя — **тензор электромагнитного поля**.

Легко сообразить, что из тензора поля  $F_{ik}$  можно образовать лишь *две* квадратичные комбинации без индексов

$$F_{ml}F_{ml} = F_{ml}^2 \quad \text{и} \quad \epsilon_{iklm}F_{ik}F_{lm}$$

и что только первая из них есть скаляр, в то время как вторая — псевдоскаляр. Поэтому для привлечения в лагранжиан остается единственная возможность — он должен быть  $\sim F_{lm}F_{lm}$ . Коэффициент пропорциональности зависит от выбора единиц; мы примем, что

$$L_{\text{ph}} = \frac{-1}{16\pi ic} F_{lm}^2; \quad S_{\text{ph}} = \frac{-1}{16\pi ic} \int d\Omega F_{lm}^2. \quad (43)$$

**9.3.2.** Что же касается *лагранжиана взаимодействия* поля с частицами, то мы примем, что соответствующий член в действии имеет вид:

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{e_a}{c} \int dx_i^a A_i(x^a), \quad (44)$$

где  $e_a$  есть *скалярная* характеристика  $a$ -й частицы, определяющая ее отношение к электромагнитному полю, называемая **зарядом** частицы ( $e_a$  может быть и положительным и отрицательным),  $dx_i^a$  — элементарное смещение вдоль мировой линии  $a$ -й

<sup>1)</sup> Аргументация этого утверждения станет очевидной ниже, когда мы займемся *решениями* уравнений поля, пока же можно только сослаться на пример **7.4**, в котором мы видели, что групповая скорость обращается в  $c$  для  $\kappa^2 = 0$ , т. е. если само поле  $\phi$  не входит в лагранжиан.

частицы, а интегрирование производится вдоль мировых линий всех частиц.

**9.3.2.1.** Выбор для действия именно выражения (44) представляет собой определенную гипотезу о характере взаимодействия (что взаимодействие частицы с полем определяется *одной* и *скалярной* характеристикой), которая, строго говоря, ниоткуда не следует. Если рассматривать взаимодействие с электромагнитным полем *макроскопических* тел, то опыт показывает, что они могут кроме заряда обладать еще и *моментами* <sup>1)</sup> возрастающих порядков; если же говорить об *элементарных* частицах, то взаимодействие такого рода опять оказывается гипотезой, называемой тогда гипотезой *минимальности электромагнитного взаимодействия*. Непонятным образом пока не найдено случаев нарушения этой гипотезы — точнее, все случаи отступления от нее находят рациональное объяснение в своего рода неэлементарности рассматриваемой частицы.

Выбор константы в (44) опять определяется, конечно, избираемой системой единиц, прежде всего — единицами измерения заряда. Наш выбор соответствует использованию *гауссовой симметричной системы CGS*.

**9.3.2.2.** В свете сказанного выше при взгляде на (44) возникает естественный вопрос: как же быть с градиентной инвариантностью? — ведь в (44) мы ввели сам потенциал. Легко видеть, однако, что при проведении преобразования (41) дополнительный член в действии будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sum \frac{e_a}{c} \int dx_i^a \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} &= \sum \frac{e_a}{c} \int d\lambda = \sum \frac{e_a}{c} \int ds_a \frac{dx_i^a}{ds} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^a} = \\ &= \sum \frac{e_a}{c} \int ds_a \frac{d}{ds_a} (\lambda(x_i^a)), \end{aligned}$$

т. е. к функции Лагранжа добавится полный дифференциал, а к действию — константа, не влияющая на вариации.

Можно добиться и того, чтобы действие вовсе не менялось, если одновременно с (41) провести над действием для каждой частицы преобразование

$$S_a = -m_a c \int ds_a \Rightarrow -m_a c \int ds_a - \frac{e_a}{c} \int ds_a \frac{d}{ds_a} (\lambda(x_i^a)), \quad (41')$$

добавляющее к нему не меняющую уравнений движения производную по  $s$  функции  $\lambda(x_i^a)$  только от координат  $x_i^a$ . Именно такой путь избирают обыкновенно в квантовой механике.

<sup>1)</sup> Смысл термина будет разъяснен ниже в подходящем месте

**9.3.3.** Итак, полное выражение для действия системы материальных точек, находящихся во взаимодействии с электромагнитным полем, есть сумма выражений (16'') + (43) + (44):

$$S = S_m + S_{\text{int}} + S_{\text{ph}} = \sum_a -m_a c \int ds_a + \sum_a \frac{e_a}{c} \int dx_i^a A_i(x_a) - \frac{1}{16\pi i c} \int d\Omega F_{lm}^2. \quad (45)$$

Чтобы получить полный набор уравнений движения этой системы, мы должны проварьировать (45) по координатам частиц  $x_i^a$  и по «координатам» поля  $A_i(x)$ .

**9.4.** Уравнения движения для *частиц в поле* получаются варьированием по координатам частиц  $x_i^a$ ; поскольку они входят лишь в *два первых* члена (45), то достаточно варьировать эти члены, которые того ради удобно переписать (ср. § 4), выражая координаты мировых линий частиц в функции одного произвольного параметра  $\lambda$  (не путать с  $\lambda$  в (41)!) )

$$S_{m+\text{int}} = \sum_a \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left( -m_a c \sqrt{-\left(\frac{dx_i^a}{d\lambda}\right)^2} + \frac{e_a}{c} \frac{dx_i^a}{d\lambda} A_i(x^a) \right). \quad (46)$$

**9.4.1.** Для 4-импульса  $a$ -й частицы в поле  $P_i^a$  мы получаем тогда

$$P_i^a = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_i^a}{d\lambda}} = p_i^a + \frac{e_a}{c} A_i(x^a) \quad (47.1)$$

(в правой части можно уже положить  $\lambda = s_a$ ), где  $p_i^a = m c u_i^a$  — импульс *свободной*  $a$ -й частицы, а для *полного 4-импульса системы частиц в поле* —

$$P_i = \sum_a P_i^a. \quad (47.2)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Импульс  $P_i^a$  — это обобщенный импульс, канонически сопряженный координате  $x_i^a$ ; именно он должен фигурировать в таких образованиях, как функция Гамильтона, скобки Пуассона и т. п., и, если частица находится во внешнем поле, не должен, конечно, сохраняться. Однако наши координаты  $x_i^a$  — декартовы: поэтому если мы дополняем систему частиц в поле, описываемую лагранжианом (46), до замкнутой системы (45), добавляя к ней действие поля  $S_{\text{ph}}$ , то  $P_i^a$  будет как раз вкладом  $a$ -й частицы в полный сохраняющийся 4-импульс, а  $P_i$  — вкладом в этот 4-импульс от всех частиц; поэтому, чтобы получить

сохраняющийся 4-импульс полной системы (45), надо добавить к (47.2) только 4-импульс, извлекаемый по теореме Нётер из одного лишь  $S_{\text{ph}}$ . Мы используем ниже это обстоятельство. ■

#### 9.4.2. В уравнениях движения

$$\frac{d}{d\lambda} P_i^a = \frac{\partial L}{\partial x_i^a} = \frac{e_a}{c} \frac{dx_j^a}{d\lambda} \frac{\partial A_j}{\partial x_i^a}$$

тоже полагаем  $\lambda = s^a$  и, замечая что

$$\frac{dA_i(x_a)}{ds^a} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j^a}{ds^a} \quad \text{и} \quad \frac{dx_j^a}{ds} = u_j^a,$$

находим окончательно

$$mc \frac{du_i^a}{ds_a} = \frac{e_a}{c} \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) u_j^a = \frac{e_a}{c} F_{ij} u_j^a. \quad (48)$$

Таким образом, изменение скорости  $u_i^a$  — а как раз в этом и состоит физически наблюдаемый эффект — зависит только от градиентно-инвариантной комбинации  $F_{ij}$ .

### 10. Уравнения электромагнитного поля

Прежде чем переходить к варьированию действия (45) по полю, чтобы получить уравнения движения поля в присутствии зарядов, удобно будет преобразовать  $S_{\text{int}}$  (44) к другой форме, так, чтобы в нем, так же как и в  $S_{\text{ph}}$ , вошло бы интегрирование по 4-объему, а не по мировым линиям частиц.

**10.1.** Того ради заметим, что интеграл (или сумму интегралов), берущихся вдоль мировых линий частиц, можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_a ds_a \dots &= \sum \int dt c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \dots = \\ &= \sum \int dt (d\mathbf{r}) c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \dots = \\ &= \frac{1}{i} \sum \int d\Omega \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \dots \end{aligned}$$

**10.1.1.** Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_a \frac{e_a}{c} \int ds_a u_i^a A_i(x_a) &= \\ &= \frac{1}{ic} \int d\Omega A_i(x) \sum_a \frac{e_a}{c} c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} u_i^a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \\ &= \frac{1}{ic} \int d\Omega A_i(x) j_i(x), \end{aligned}$$

если определить **4-вектор тока** или **4-ток** (так как действие и элемент объема — инварианты, а  $A_i$  — 4-вектор, то и  $j_i(x)$  есть 4-вектор) выражением:

$$j_i(x) = \sum_a e_a c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} u_i^a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \{\mathbf{v}_a; ic\}. \quad (49)$$

С трехмерными величинами 4-ток связан с помощью соотношения

$$j_i = \{\mathbf{j}; ic\}, \quad (49a)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (28.1)$$

есть (трехмерная) **плотность заряда**, а

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (28.2)$$

— трехмерный вектор, который называется **плотность тока** (говорят и просто ток, что не совсем точно).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Так как  $u_i$  есть 4-вектор, то из (49) видно, что

$$\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

есть инвариант. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Комбинация  $\{\mathbf{v}; ic\} = \frac{dx_i}{dt}$ . Следовательно,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx_i^a}{dt}$$

есть 4-вектор. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3:** Поскольку заряды  $e_a$  были определены как *инвариантные* характеристики частицы, то из (28), (49a) видно, что *трех-*

мерная плотность инварианта не есть инвариант, а ведет себя как четвертая компонента вектора, как  $\frac{dt}{ds}$ . ■

**10.2.** С помощью 4-вектора тока можно переписать действие взаимодействия  $S_{\text{int}}$  в виде интеграла по 4-объему:

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{e_a}{c} \int dx_i^a A_i(x^a) \equiv \frac{1}{ic^2} \int d\Omega j_i(x) A_i(x). \quad (44')$$

**10.1.2.** Если предпринять здесь над потенциалом градиентное преобразование (41), то  $S_{\text{int}}$  получит дополнительный член:

$$\frac{1}{ic^2} \int d\Omega j_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{1}{ic^2} \int d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} (j_i \lambda) - \frac{1}{ic^2} \int d\Omega \lambda \frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

Первый интеграл здесь может быть преобразован по теореме Гаусса в интеграл по границам рассматриваемой пространственно-временной области, где он добавит к действию только не меняющуюся при варьировании константу. Требование же обращения в нуль второго интеграла для произвольных  $\lambda$  дает

$$\text{уравнение непрерывности:} \quad \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0 \quad (50.1)$$

— новый дифференциальный закон сохранения.

Интегрируя его по такой же области, что и в 8.2, найдем, что соответствующая интегральная динамическая величина — **полный заряд**  $Q$  —

$$Q[\sigma] = \frac{1}{ic} \int_{\sigma} dS_i j_i = \text{const} \quad (50.2)$$

не зависит от выбора пространственноподобной гиперповерхности  $\sigma$ , т.е. удовлетворяет *интегральному закону сохранения*, что, как мы знаем, можно выразить и в виде

$$\frac{\delta Q[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = 0. \quad (50.3)$$

Любопытно, что в этом рассуждении мы выяснили некоторое свойство *системы зарядов* (ведь к ним относился 4-ток, через который определен полный заряд) на основании свойства градиентной инвариантности *электромагнитного поля*.

**10.1.3.** Проверим, что ток (49) действительно сохраняется. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{ic}{\partial t} \sum_a e_a \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))}{\partial t} = \\ &= \sum_a e_a \left( \mathbf{v}_a \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \right) = 0, \end{aligned}$$

если заметить, что  $\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{v}_a$  и  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ , так что два члена в скобках взаимно уничтожаются.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Заряды  $e_a$  отдельных частиц были введены как инвариантные характеристики каждой частицы. Не могли они меняться и с ходом собственного времени  $s_a$  частицы, так как иначе их нельзя было бы считать постоянными при получении уравнений Лагранжа–Эйлера. Поэтому *новое* утверждение, которое мы можем извлечь из (50), состоит в том, что если в ходе взаимодействия одни частицы превращаются в другие, то всегда

$$\sum_{\substack{a \\ \text{до взаимодей.}}} e_a = \sum_{\substack{a' \\ \text{после взаимодей.}}} e_{a'} .$$

Это утверждение нетривиально. Например, для другой инвариантной характеристики частицы, не меняющейся с ходом собственного времени, — для массы — при превращениях одних частиц в другие сумма масс *не обязана сохраняться*:

$$\sum_{\substack{a \\ \text{до взаимодей.}}} m_a \neq \sum_{\substack{a' \\ \text{после взаимодей.}}} m_{a'} . \blacksquare$$

**10.3.** После всех этих приготовлений, теперь можно перейти к выводу уравнений движения для электромагнитного поля, используя в качестве лагранжиана сумму подинтегральных выражений в (43) и (44'):

$$L_{\text{int+ph}} = \frac{1}{ic} \left\{ \frac{1}{c} j_i A_i - \frac{1}{16\pi} F_{lm}^2 \right\} . \quad (*)$$

**10.3.1.** Для вычисления производной от  $F_{lm}^2$  проще всего вычислить его вариацию:

$$\delta F_{lm}^2 = 2F_{lm} \delta F_{lm} = 2F_{lm} \delta(A_{m,l} - A_{l,m}) = 4F_{lm} \delta A_{m,l}; \quad \frac{\partial F_{lm}^2}{\partial A_{i,k}} = 4F_{ki}.$$

Поэтому уравнения движения (33) примут теперь вид

$$\frac{1}{c} j_i - \frac{1}{16\pi} \frac{d}{dx_k} 4F_{ik} = 0$$

или

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad \begin{array}{l} \text{вторая пара} \\ \text{уравнений Максвелла} \end{array} \quad (51.2)$$

Это уравнение называется **вторая пара уравнений Максвелла** (пара потому, что в трехмерной записи оно распадается на два уравнения).

**10.3.2.** Первая же пара уравнений Максвелла фактически уже была неявно введена нами, когда мы *определили* тензор поля (иногда говорят просто **поле**)  $F_{ik}$  как 4-ротор потенциала  $A_i$ . В самом деле, введем псевдотензор  $F_{ik}^*$ , дуальный  $F_{ik}$ :

$$F_{ik}^* = \frac{1}{2} e_{iklm} F_{lm} = e_{iklm} A_{m,l}. \quad (42^*)$$

Его дивергенция будет тождественным нулем по соображениям симметрии:

$$\frac{\partial F_{ik}^*}{\partial x_k} = e_{iklm} A_{m,l,k} \equiv 0. \quad (51.1^*)$$

Возвращаясь к  $F_{lm}$ , получаем отсюда

$$e_{iklm} F_{lm,k} = 0$$

или, снова переходя к дуальному — теперь всей левой части — тензору 3-го ранга, находим

$$e_{irst} e_{iklm} F_{lm,k} = 0.$$

Но стоящая теперь перед  $F_{lm,k}$  комбинация дискриминантных тензоров есть, как легко видеть, просто оператор суммирования по всем перестановкам индексов  $lmk$ , причем четные перестановки берутся со знаком  $+$ , а нечетные со знаком  $-$ . Эти минусы устранятся перестановкой индексов тензора поля. Поэтому окончательно получим сумму *трех* членов

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{первая пара} \\ \text{уравнений Максвелла} \end{array} \quad (51.1)$$

Это и есть **первая пара уравнений Максвелла**. Как видно из проведенного вывода, это не столько уравнение движения, сколько своеобразное условие интегрируемости — если быть совсем точным, это есть условие того, что антисимметричный тензор поля  $F_{ik}$  может быть представлен в виде (42) 4-ротора некоторого 4-вектора.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** В обычном трехмерном виде обе пары уравнений Максвелла очень похожи по форме. В нашей записи (51.1) не



имеет внешне ничего общего с (51.2), однако эта симметрия формы восстанавливается, если перейти в одном из уравнений к дуальному тензору поля (42\*): (51.1\*) очень напоминает (51.2). ■

## 11. Энергия и импульс электромагнитного поля

**11.1.** Займемся теперь законами сохранения для электромагнитного поля. Наша система состоит из взаимодействующих друг с другом частиц и поля; ее действие представляется суммой трех членов в (45). 4-импульс, возникающий из двух первых членов действия, мы уже нашли в § 9 (формулы (47)), нам осталось заняться поэтому только сохраняющимися величинами, получаемыми из действия  $S_{\text{ph}}$  для одного поля. Канонический тензор энергии — импульса из лагранжиана  $L_{\text{ph}}$  получается по общей формуле (37.1), которая в применении к нашему случаю гласит

$$T_{ik} = L_{\text{ph}} \delta_{ik} - A_{l,i} \frac{\partial L_{\text{ph}}}{\partial A_{l,k}}.$$

Подставляя сюда  $L_{\text{ph}}$  из (43) и используя только что найденное значение  $4F_{kl}$  для  $\frac{\partial F_{mn}^2}{\partial A_{l,k}}$ , получаем

$$T_{ik} = \frac{-1}{16\pi ic} (F_{lm}^2 \delta_{ik} - A_{l,i} 4F_{kl}),$$

то есть

$$T_{lk}^{\text{ph}} = \frac{1}{4\pi ic} \left( A_{l,i} F_{kl} - \frac{F_{lm}^2}{4} \delta_{ik} \right). \quad \begin{array}{l} \text{канонический тензор} \\ \text{энергии-импульса} \\ \text{эл.-маг. поля} \end{array} \quad (52a)$$

**11.2.** Этот канонический тензор *не симметричен*. Кроме того, — и это гораздо хуже — он *градиентно не инвариантен*. Чтобы перейти от него к симметричному тензору  $\theta_{ik}$ , воспользуемся приемом, упомянутым в замечании 2 в **8.5**: попробуем подобрать  $f_{i,kl} = -f_{i,lk}$ .

Имеющиеся в нашем распоряжении величины — 4-потенциал  $A_i$  и тензор поля  $F_{kl}$  подсказывают нам форму  $f_{i,kl} = \frac{a}{4\pi ic} A_i F_{kl}$ , где  $a$  — постоянная, которую надо подобрать. Тогда

$$\frac{\partial f_{i,kl}}{\partial x^l} = \frac{a}{4\pi ic} \left( A_{i,l} F_{kl} + A_i \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} \right) = \frac{a}{4\pi ic} \left( A_{i,l} F_{kl} + \frac{4\pi}{c} A_i F_{jk} \right),$$

откуда видно, что нужно выбрать  $a = -1$ , т. е. положить

$$f_{i,jk} = \frac{-1}{4\pi ic} A_i F_{jk}.$$

С таким выбором  $f_{i,jk}$  мы получаем для  $\theta_{ik}$ :

$$\theta'_{ik}{}^{\text{ph}} = \frac{1}{4\pi ic} \left[ F_{il} F_{kl} - \delta_{ik} \frac{F_{lm}^2}{4} \right] - \frac{1}{ic^2} A_i j_k. \quad (52b)$$

В этом выражении симметризована часть, относящаяся к *чистому электромагнитному полю*, но зато появился несимметричный член  $A_i j_k$ . Этот член относится не к чистому полю, а к *взаимодействию* поля с зарядами: если бы зарядов вообще не было (т.е. правая часть уравнения движения (51.2) была бы равна нулю), то тензор (52b) был бы симметричен.

**11.3.** Однако с вкладом взаимодействия в энергию и импульс мы уже имели дело — соответствующий член, происшедший из  $S_{\text{int}}$ , входил в выражение (47) для полного 4-импульса системы частиц в поле. Реальный смысл сохраняющейся величины имеет только полный 4-импульс всей системы зарядов и поля, взаимодействующих друг с другом; он получится, если сложить (47) с интегралом от (52b) по пространству. Мы получим тогда

$$P_i = \sum_a p_i^a + \sum_a \frac{e_a}{c} A_i(x_a) - \frac{1}{ic^2} \int dV A_i j_4 + (\text{интеграл от первого члена в (52b)}). \quad (*)$$

Преобразуем третий член этой суммы. Четвертая компонента 4-тока есть  $icr = ic \sum e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ . Поэтому интеграл по  $dV$  вычисляется, приводя к результату

$$-\frac{1}{c} \sum_a e_a A_i(x_a).$$

Таким образом третий член в (\*), происшедший из огорчившего нас несимметричного добавка в (52b), *уничтожается вторым*<sup>1)</sup>. Значит, если ввести *симметричный тензор энергии—*

<sup>1)</sup> Это рассуждение можно провести и в обратном порядке. Преобразуем градиентно не инвариантный член в (52a)

$$\begin{aligned} A_{i,i} F_{kl} &= F_{il} F_{kl} + A_{i,l} F_{kl} = F_{il} F_{kl} + \frac{\partial}{\partial x_l} (A_i F_{kl}) - A_i \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} = \\ &= F_{il} F_{kl} - \frac{4\pi}{c} A_i j_k + \frac{\partial}{\partial x_l} (A_i) F_{kl} \end{aligned}$$

— первый член справа градиентно инвариантен, второй уничтожает градиентно не инвариантный член взаимодействия, а третий есть как раз та полная производная, которую мы добавили к  $T_{ik}$  в основном тексте.

импульса «как бы для поля без зарядов»<sup>1)</sup>

$$\theta_{ik} = \frac{1}{4\pi ic} \left[ F_{il} F_{kl} - \frac{\delta_{ik} F_{lm}^2}{4} \right], \quad \begin{array}{c} \text{симметричный тензор} \\ \text{энергии-импульса} \\ \text{эл.-магн. поля} \end{array} \quad (52c)$$

то мы получим для *полного* 4-импульса зарядов и поля, *взаимодействующих* друг с другом,

$$P_i = \sum_a p_i^a + \int dV \theta_{i4}. \quad \begin{array}{c} \text{полный 4-импульс} \\ \text{зарядов и поля} \end{array} \quad (52d)$$

И поле и все заряженные частицы нужно брать при вычислении (52d) в один и тот же момент времени  $t$ .

**11.4.** Итак, полный 4-импульс системы заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем, любопытным образом представляется суммой 4-импульсов *свободных* частиц и 4-импульса поля, также вычисленного в предположении, что это поле *свободно*. Это обстоятельство, конечно, ни в коей мере не служит указанием на то, что взаимодействие зарядов с полем. исчезло — оно просто служит иллюстрацией того, насколько условно подразделение энергии (и импульса) на «кинетические» части и части взаимодействия; реальный смысл такое разделение имеет только для величин, определяющих динамику, — для функций Лагранжа или Гамильтона. (Если мы попытаемся превратить *энергию* (52) в *функцию Гамильтона*, заменивши скорости на обобщенные импульсы (что для электромагнитного поля *не тривиально*), то распадение на два независимых члена, один из которых зависит только от переменных частиц, а другой — только от переменных поля, сейчас же исчезнет!).

**11.5.** Тот же результат (52) можно получить и несколькими иным способом, представляющим самостоятельный интерес.

**11.5.1.** Введем по аналогии с плотностью заряда  $\rho$  (28) **плотности массы** и **4-импульса** для частиц, т. е. запишем

$$\begin{aligned} M &= \sum_a m_a = \int dV \mu(\mathbf{r}) = \int dV \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \\ \vec{P} &= \sum_a m_a c \vec{u}_a = \int dV \sum_a m_a c \vec{u}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \end{aligned} \quad (53)$$

<sup>1)</sup> В отличие от  $T_{ik}$ , тензор  $\theta_{ik}$  *градиента инвариантен*. Кроме того, его след  $\theta_{ii} = 0$  (ср. обсуждение в **8.5**).

Следовательно, если ввести формально **тензор энергии–импульса частиц**  $\overset{m}{T}_{ik}$ , то (53.2) должна будет представляться в форме  $\int dV \overset{m}{T}_{i4}$ , т. е. должно будет быть:

$$\begin{aligned} \overset{m}{T}_{i4} &= \sum_a m_a c u_i^a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \\ &= \sum_a u_i^a \cdot \frac{c}{i} m_a \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \cdot \frac{ic}{c \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

где мы представили правую часть в виде произведения трех множителей, первый из которых есть 4-вектор  $u_i$ , второй (ср. замечание 1 в связи с формулой (49)) — скаляр, а третий — четвертая компонента  $u_4$  того же 4-вектора  $u_i$ . Следовательно, весь  $\overset{m}{T}_{ik}$  будет иметь вид

$$\overset{m}{T}_{ik} = \frac{1}{i} \sum_a c m_a u_i^a u_k^a \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad \begin{array}{l} \text{тензор энергии–} \\ \text{импульса свобод-} \\ \text{ных частиц} \end{array} \quad (54)$$

**11.5.2.** Теперь можно провести такое же рассуждение для плотности 4-импульса *частиц в поле* (47) и записать для него

$$\overset{m+\text{int}}{P}_i = \int dV \overset{m}{T}_{i4} + \sum_a \frac{e_a}{c} A_i(x_a).$$

Второй член здесь — это 4-импульс, получившийся из  $S_{\text{int}}$ ; как преобразовать его в интеграл по объему (от величины, которую естественно назвать  $\overset{\text{int}}{T}_{i4}$ ), мы уже знаем (см. 11.3). Итак, можно положить

$$\overset{\text{int}}{T}_{ik} = \frac{1}{ic^2} A_i j_k,$$

и, следовательно,

$$\overset{m+\text{int}}{T}_{ik} = \frac{1}{i} \sum_a c m_a u_i^a u_j^a \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \frac{1}{ic^2} A_i(x) j_k(x) \quad (55)$$

**тензор энергии–импульса «частицы + взаимодействие»**

есть тензор энергии–импульса, построенный из *двух первых* членов  $S_m + S_{\text{int}}$  действия (45).

**11.5.3.** Поэтому *полный канонический* тензор энергии–импульса получится, если прибавить к (55) канонический тензор энергии–импульса (52a), образованный из третьего члена  $S_{\text{ph}}$  действия (45)

$$T_{ik}^{m+\text{int}+\text{ph}} = T_{ik}^{m+\text{int}} + T_{ik}^{\text{ph}}. \quad (55.2)$$

Симметризуя этот полный тензор с помощью того же  $f_{i;kl}$  сразу придем к **полному симметричному тензору энергии–импульса**:

$$\begin{aligned} \Theta_{ik}^{m+\text{int}+\text{ph}} = & \frac{1}{i} \sum_a c m_a u_i^a u_k^a \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}_a^2}{c^2}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \\ & + \frac{1}{4\pi i c} \left[ F_{il} F_{kl} - \frac{1}{4} \delta_{ik} F_{lm}^2 \right]. \quad (52e) \end{aligned}$$

Из этого тензора энергии–импульса, конечно, опять получается то же выражение (52d) для полного вектора 4-импульса и (раньше мы не могли этого утверждать!) аналогичная формула для 4-момента в виде суммы 4-моментов «свободных» частиц и поля.

## 12. Трехмерная формулировка

Мы развили теорию электромагнитного поля, взаимодействующего с заряженными частицами, в четырехмерных тензорных обозначениях. Такая символика позволила получать и записывать результаты наиболее компактным образом. Из соображений наглядности, однако, полезно представить всю теорию и в более привычных терминах трехмерного векторного анализа.

**12.1.** Мы уже отмечали, что с такой точки зрения 4-потенциал. есть объединение

$$A_i = \{\mathbf{A}, i\phi\} \quad (40)$$

трехмерных вектора и скаляра.

Выразим через трехмерные величины компоненты тензора поля  $F_{ik}$  (42). Полагая  $ik = \alpha\beta$ , получаем для его чисто пространственных компонент

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Но вместо трехмерного антисимметричного тензора второго ранга всегда пользуются дуальным ему аксиальным вектором

$$F_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} F_{\gamma}^*; \quad F_{\alpha}^* = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} A_{\gamma} = (\text{rot } \mathbf{A})_{\alpha}.$$

Этот аксиальный вектор называют **напряженностью магнитного поля** или, короче, просто **магнитным полем**  $H$ :

$$\mathbf{H} = \text{rot } A; \quad F_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma\mu} H_{\mu}. \quad \text{магнитное поле} \quad (42.1)$$

(Мы обозначаем трехмерные формулы теми же номерами, что и соответствующие четырехмерные, с дополнительными цифрами 1, 2 и т. д.).

Смешанные компоненты тензора поля  $F_{4\alpha} = -F_{\alpha 4}$  образуют с трехмерной точки зрения (настоящий) вектор

$$F_{4\alpha} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_{\alpha}} = \frac{1}{ic} \dot{A}_{\alpha} - i \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} = i \left( -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \right)_{\alpha} = iE_{\alpha}.$$

Этот вектор называют **напряженностью электрического поля** или просто **электрическим полем** и обозначают буквой  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad F_{4\alpha} = -F_{\alpha 4} = iE_{\alpha}. \quad \text{электрическое поле} \quad (42.2)$$

В статическом случае электрическое поле  $\mathbf{E}$  сводится к (взятому со знаком минус) градиенту скалярного потенциала  $\phi$ .

Если записать компоненты тензора  $F_{ik}$  в виде матрицы, в которой индекс  $i$  нумерует строки, а индекс  $k$  — столбцы, то она будет иметь вид

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (42.3)$$

Выпишем еще и матрицу дуального тензора поля  $F_{ik}^*$  ((42\*)):

$$F_{ik}^* = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & H_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & H_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & H_z \\ -H_x & -H_y & -H_z & 0 \end{pmatrix}; \quad (42.3^*)$$

она (с точностью до множителя) получается из (42.3) перестановкой электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

**12.1.1. ЗАМЕЧАНИЕ:** В евклидовом 4-пространстве мы могли бы образовать из  $F_{ik}$  и  $F_{ik}^*$  и линейные комбинации  $F_{ik} \pm F_{ik}^*$  — *самодуальный* и *антисамодуальный* антисимметричные тензоры вто-

рого ранга, каждый из которых имел бы только *три* существенные компоненты (соответствовал бы *одному* 3-вектору). При любых поворотах эти два тензора преобразовывались бы независимо друг от друга (но переходили бы один в другой при отражениях). В *псевдоевклидовом* пространстве, однако, тензор  $F_{ik}^*$  содержит лишний множитель  $i$ . Поэтому самодуальный (антисамодуальный) антисимметричный тензор второго ранга будет иметь лишь три существенные компоненты, но три *комплексные* (и будет соответствовать одному *комплексному* 3-вектору — в нашем случае вектору  $\mathbf{H} \mp i\mathbf{E}$ ), так что число существенных *вещественных* компонент не изменится.

Этот множитель  $i$  в  $F_{ik}^*$  не случаен. Если прибегнуть к *вещественной* системе координат, то он скажется в том, что квадрат операции образования дуального тензора *той же вариантности* будет равен  $-1$ .

В самом деле, в вещественной системе координат надо различать *два* дискриминантных псевдотензора: контравариантный  $e^{ijkl}$  и ковариантный  $e_{ijkl}$ . *Один* из них мы можем отнормировать по произволу, положив, например,  $e^{0123} = +1$ ; но тогда

$$\begin{aligned} e_{0123} &= g_{0i}g_{1j}g_{2k}g_{3l}e^{ijkl} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}e^{0123} = \\ &= (-)(+)(+)(+)e^{0123} \quad (\text{или} = (+)(-)(-)(-)e^{0123}), \end{aligned}$$

т. е. обязательно  $e_{0123} = -1$ .

Операция  $*$  образования дуальной величины превращает ковариантный тензор в *контравариантный* (псевдо) тензор и наоборот; поэтому при двойном проведении этой операции приходится один раз использовать  $e^{ijkl}$  и один раз  $e_{ijkl}$

$$(F_{lm})^{*ik} = \frac{1}{2}e^{iklm}F_{lm} = G^{ik}, \quad (G^{ik})_{np}^* = \frac{1}{2}e_{npik}G^{ik}.$$

Таким образом в силу противоположной нормировки  $e^{ijkl}$  и  $e_{ijkl}$ :

$$(G^{ik})_{np}^* = ((F_{lm})^*)_{np}^* = \frac{1}{4}e_{npik}e^{iklmn}F_{lm} = -\delta_n^l\delta_p^mF_{lm} = -F_{np},$$

т. е. действительно

$$((F^*)^*) = -F. \quad (*)$$

Таким образом, если бы мы захотели построить из антисимметричного тензора второго ранга  $F$  самодуальную и антисамодуальную величину в виде линейной комбинации  $aF + bF^*$ , то нам надо было бы найти решение уравнения

$$(aF + bF^*)^* = \lambda(aF + bF^*), \quad \lambda = \pm 1.$$

Однако в силу  $(*)$  это уравнение свелось бы к системе

$$\lambda a + b = 0; \quad a - \lambda b = 0,$$

условие разрешимости которой дало бы нам  $\lambda^2 + 1 = 0$ ;  $\lambda = \pm i$ , т. е. для  $\lambda = \pm 1$  решений не было бы:

В вещественном псевдоевклидовом пространстве не существует само-дуальных (антисамодуальных) тензоров.

Положение можно было бы исправить, введя вместо  $*$  новую операцию  $^+$ :  $(F)^+ = \pm i(F)^*$ . Требование самодуальности (антисамодуальности) относительно новой операции

$$(aF + bF^+) \equiv (\pm i)(aF \pm ibF^*)^* = \lambda'(aF \pm ibF^*) \equiv \lambda'(a + bF^+)$$

привело бы тогда к системе

$$\lambda'a - b = 0; \quad a - \lambda'b = 0$$

с характеристическим уравнением  $-\lambda'^2 + 1 = 0$ ;  $\lambda = \pm 1$ , все оказалось бы в порядке — но эта новая операция  $+$  и есть как раз операция перехода к дуальной величине в мнимой системе координат! К сему два пояснения:

(1) Неудача с построением самодуальной (антисамодуальной) величины в вещественной системе самоочевидна: рассматривая  $*$  как оператор в пространстве «векторов» — антисимметричных тензоров второго ранга, видим из  $(*)$ , что его квадрат  $(*)^2 = -1$  обладает единственным собственным значением  $-1$ , следовательно, сам оператор  $*$  может обладать лишь собственными значениями  $\pm i$ .

(2) Построение операции  $+$  также не искусственно. Дело в том, что если быть совсем риторичным, то в вещественной системе тензором надо считать не  $e^{ijkl}$ , а  $\sqrt{g} e^{ijkl}$ , где  $g = |g_{ik}|$  есть детерминант метрического тензора, как раз и равный  $-1$ . ■

**12.2.1.** Для инварианта  $F_{lm}^2$  получим через трехмерные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned} F_{lm}^2 &= F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F_{4\beta}F_{4\beta} + F_{\alpha 4}F_{\alpha 4} = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}H_\mu H_\nu - 2\mathbf{E}^2 = \\ &= 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2). \end{aligned}$$

Поэтому *действие для поля* запишется теперь как

$$S_{\text{ph}} = \frac{1}{8\pi} \int dt \int dV (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2), \quad (43.1)$$

т. е. в трехмерной нормировке плотность функции Лагранжа равна  $\frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi}$ .

**12.2.2.** Для действия взаимодействия в первой форме (44)

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{e_a}{c} \int dt \frac{dx_i^a}{dt} A_i(x_a) = \sum_a \frac{e_a}{c} \left[ \int dt \mathbf{v}_a \mathbf{A}(\mathbf{r}_a) - c\phi(\mathbf{r}_a) \right],$$



то есть

$$S_{\text{int}} = \int dt \sum_a \left( \frac{e_a}{c} \mathbf{v}_a \mathbf{A} - e_a \Phi \right). \quad (44.1)$$

Поэтому описывающая взаимодействие частиц с полем часть функции Лагранжа есть

$$L_{\text{int}} = - \sum_a \left( e_a \Phi(\mathbf{r}_a) - e_a \frac{\mathbf{v}_a}{c} \mathbf{A} \right). \quad (44.2)$$

Первый член здесь совершенно аналогичен нерелятивистской «потенциальной энергии во внешнем поле», второй же приводит к силам, зависящим от скорости.

**12.3.1.** Займемся теперь поведением частицы в электромагнитном поле. Полагая в уравнениях движения (48)  $\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k$  индекс  $i$  равным  $\alpha$ , имеем

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{e}{c} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} (F_{\alpha\beta} v_\beta + F_{\alpha 4} (-ic)) = \frac{e}{c} \frac{cE_\alpha + e_{\alpha\beta\gamma} v_\beta H_\gamma}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}},$$

то есть

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]. \quad \text{сила Лоренца} \quad (48.1)$$

**12.3.1.1.** Стоящее здесь в правой части выражение есть с трехмерной точки зрения *сила*, ее называют **сила Лоренца**. Лоренцева сила состоит из двух частей, первая не зависит от скорости, а вторая (честь открытия которой собственно и принадлежит Лоренцу) пропорциональна скорости частицы и направлена перпендикулярно к ней. С точки зрения изучения электромагнитного поля по поведению заряженных частиц в нем именно это отличие служит основанием для разделения поля на *электрическое* и *магнитное*.

**12.3.2.** Временная составляющая (48) даст нам

$$\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \frac{d\frac{i\mathcal{E}}{c}}{dt} = \frac{e}{c} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} iE_\alpha v_\alpha,$$

где, впрочем, было бы логичнее писать не  $\mathcal{E}$ , а  $\mathcal{T}$ , поскольку  $p_4$  есть 4-я компонента 4-импульса *свободной* частицы и должна

быть пропорциональна *кинетической* энергии,  $p_4 = \frac{i\mathcal{T}}{c}$ . Итак, при  $i = 4$  мы получаем из (48)

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}), \quad (48.2)$$

т.е. закон изменения кинетической энергии частицы под действием поля. Но увеличение кинетической энергии частицы есть *работа*, совершаемая над нею силами поля. Мы видим, что работу совершает только электрическое поле. Поэтому действие магнитного поля является хорошим способом изменить направление движения заряженной частицы, не меняя ее энергии.

**12.3.3.** Выпишем еще в 3-виде выражения (47.1) для полных импульса и энергии частицы в поле:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}; \quad \mathcal{E} = \mathcal{T} + e\phi. \quad (47.1.1)$$

Здесь  $\mathcal{T}$  — кинетическая энергия, а  $\mathbf{p}$  — импульс без учета поля, его иногда называют *кинетический импульс*:

$$\mathcal{T} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (47.1.2)$$

**12.3.3.1.** Перенеся в (47.1) член с 4-потенциалом в левую часть и возведя все соотношение в квадрат, мы получим

$$\left(P_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2 = p_i^2 = m^2 c^2 u_i^2 = -m^2 c^2$$

или, переходя к трехмерным обозначениям,

$$\left(\frac{\mathcal{E} - e\phi}{c}\right)^2 = \left(P - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + m^2 c^2.$$

Если разрешить это соотношение относительно  $\mathcal{E}$  (напоминаем замечание 1 в конце § 4 относительно знака корня), то, поскольку каноническим *импульсом* в смысле гамильтонова формализма является именно  $\mathbf{P}$ , а не  $\mathbf{p}$ , мы получим *функцию Гамильтона*

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t) = \mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2} + e\phi(\mathbf{r}, t). \quad (56)$$

**функция Гамильтона для частицы в поле**

**12.4.** Вектор тока через 3-величины мы уже выписывали (49a), перепишем в трехмерном виде *уравнение непрерывности* (50.1);

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (50.1.1)$$

**12.5.1.** Перейдем к уравнениям Максвелла. Начнем со второй пары (51.2)  $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i$ .

Полагая индекс  $i$  равным  $\alpha$ , находим

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial (-iE_\alpha)}{ic \partial t} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha; \quad e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} H_\gamma - \frac{1}{c} \frac{\partial E_\alpha}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha,$$

а полагая  $i = 4$ ,

$$i \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} i c \rho.$$

Итак, в трехмерных векторных обозначениях мы получаем действительно *пару* уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{вторая пара} \\ \text{уравнений Максвелла} \end{array} \quad (51.2.1)$$

**12.5.2.** Чтобы получить трехмерный вид первой пары, проще всего обратиться к трехмерным выражениям (42.1,2) полей через потенциалы. Применяя к (42.2) операцию  $\operatorname{rot}$ , находим, поскольку  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}$ . В применении же к (42.1) даст нуль операция  $\operatorname{div}$ . Итак,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{первая пара} \\ \text{уравнений Максвелла} \end{array} \quad (51.1.1)$$

Тот же самый результат можно было бы получить, повторяя рассуждения, использованные при выводе трехмерного вида второй пары, в применении к *дуальному* тензору поля  $F_{ki}^*$  (42\*).

**12.5.3. ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Мы видим, что — если абстрагироваться от источников — обе пары уравнений чрезвычайно сходны: одна получается из другой заменой  $\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}$  и изменением знака *одного* из полей. Поэтому, если ввести комплексную линейную комбинацию  $\mathbf{F} = \mathbf{H} - i\mathbf{E}$ , то, складывая (51.2.1) и (51.1.1), мы получим

$$\operatorname{rot} (\mathbf{H} - i\mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\mathbf{E} - i\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

то есть

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} + \frac{1}{ic} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

а складывая (51.2.2) и (51.2.1) —

$$\operatorname{div} (\mathbf{H} - i\mathbf{E}) = -\frac{4\pi}{c} ic\rho, \quad (51.3.1)$$

то есть

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{4\pi}{i} \rho, \quad (51.3.2)$$

— обе пары уравнений Максвелла *объединяются*.

При собственных преобразованиях Лоренца компоненты вектора  $\mathbf{F}$  преобразуются только через себя, но при *отражениях* вектор  $\mathbf{F}$  переходит в комплексно-сопряженный вектор  $\bar{\mathbf{F}}$ .

С четырехмерной точки зрения образование величин  $\mathbf{F}$  и  $\bar{\mathbf{F}}$  означает переход от взаимно дуальных тензоров  $F_{ik}$  и  $F_{ik}^*$  к самодуальному и антисамодуальному, каждому из которых соответствует *один* трехмерный вектор, — мы уже говорили, что в псевдоевклидовом случае он обязательно *комплексен*. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Главное отличие первой пары уравнений Максвелла от второй состоит в том, что она не содержит в правой части *источников* поля. Это не случайно. В самом деле, в отличие от  $\mathbf{E}$  магнитное поле  $\mathbf{H}$  есть *аксиальный* вектор. Поэтому, будь в правой части первой пары источники, они должны были бы быть *аксиальным* вектором и (трехмерным) *псевдоскаляром*. Классический способ описания материальных частиц во всяком случае не дает возможности построить из динамических переменных частицы величины такого рода. ■

**12.6.** Теперь осталось только записать через трехмерные величины составляющие тензора (52с) энергии-импульса и выяснить их наглядный смысл.

**12.6.1.** Начнем с компоненты  $\theta_{44} = \frac{1}{4\pi ic} \left( F_{4l}^2 - \frac{1}{4} F_{lm}^2 \right)$ . Квадрат тензора поля мы уже считали:  $F_{lm}^2 = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)$ . Поэтому

$$\theta_{44} = \frac{1}{4\pi ic} \left( -\mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{E}^2}{2} - \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi},$$

и, так как

$$P_4 = \frac{i}{c} \mathcal{E} = \int \theta_{44} dV,$$

то плотность энергии поля  $W$  есть

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}; \quad \mathcal{E}^{\text{ph}} = \int W dV. \quad \text{энергия поля} \quad (52.1)$$

Плотность импульса получится из смешанных компонент  $\theta_{\alpha 4}$ :

$$\theta_{\alpha 4} = \frac{1}{4\pi ic} F_{\alpha\beta} F_{4\beta} = \frac{i}{4\pi ic} e_{\alpha\beta\gamma} E_{\beta} H_{\gamma} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}]_{\alpha} = \frac{S_{\alpha}}{c^2} = \theta_{\alpha 4}.$$

Итак, импульс поля равен

$$\mathbf{P}^{\text{ph}} = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{S} dV, \quad \text{импульс поля} \quad (52.2)$$

если ввести вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}], \quad \text{вектор Пойнтинга} \quad (52.3)$$

называемый **вектором Пойнтинга**. Итак,

плотность импульса поля равна вектору Пойнтинга, деленному на квадрат скорости света.

**12.6.2.** Займемся теперь вопросом о *перемещении* электромагнитной энергии из одних мест пространства в другие. Рассмотрим для этой цели дифференциальный закон сохранения

$$\frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial (T_{ik}^m + \theta_{ik}^{\text{ph}})}{\partial x_k} = 0$$

для *полного* тензора энергии-импульса (52с) поля и зарядов  $\theta_{ik}$  (для простоты мы опускаем указание  $m + \text{int} + \text{ph}$ ), ограничившись для определенности его четвертой компонентой, и проинтегрируем это равенство по *конечному* 4-цилиндру, образованному двумя гиперплоскостями  $t = t_1$  и  $t = t_2$  и боковой гиперповерхностью, параллельной оси  $t$

$$0 = \int d\Omega \frac{\partial \theta_{4k}}{\partial x_k} = \oint dS_k \theta_{4k}.$$

Разделяя интегралы по основаниям цилиндра и по боковым поверхностям, получаем отсюда

$$\begin{aligned} \int_{V, t=t_2} \theta_{44} dV - \int_{V, t=t_1} \theta_{44} dV &= \frac{i\mathcal{E}_2}{c} - \frac{i\mathcal{E}_1}{c} = \\ &= - \oint_{\substack{\text{по боков.} \\ \text{поверхн.}}} \theta_{4\alpha} dS_{\alpha} = -ic \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_f df_{\alpha} \theta_{4\alpha}, \end{aligned}$$

где последний интеграл берется по (обычной) поверхности  $f$ , которая ограничивает трехмерный объем  $V$ , вырезаемый 4-цилиндром из гиперплоскостей  $t = \text{const}$ .

Будем теперь считать, что на границе  $f$  объема  $V$  есть только чистое электромагнитное поле, но не заряды. Тогда на этой границе  $\theta_{4\alpha} = \theta_{4\alpha}^{\text{ph}} = \frac{1}{c^2} S_\alpha$  и

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = -c^2 \int dt \oint df \frac{\mathbf{S}}{c^2},$$

то есть

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \oint df \mathbf{S}. \quad \begin{array}{c} \text{поток энергии} \\ \text{из объема} \end{array} \quad (57.1)$$

Но слева стоит разность полных энергий системы частицы + поле в объеме  $V$  в моменты времени  $t_2$  и  $t_1$ . Поэтому, в силу элементарного понимания закона сохранения энергии в правой части должна стоять (со знаком минус) энергия, *вытекающая* из этого объема за время  $t_2 - t_1$ , а под интегралом по  $t$  — полный **поток энергии**, вытекающий из рассматриваемого объема. Однако на границах объема  $f$  у нас есть только электромагнитное поле. Следовательно, интеграл в правой части (57) дает нам полный поток энергии электромагнитного поля, пересекающий (в единицу времени) поверхность  $f$ . Поскольку форма этой поверхности ничем не выделена, то подинтегральное выражение в правой части (57) должно описывать *плотность потока энергии электромагнитного поля*. Итак,

плотность потока энергии в электромагнитном поле равна вектору Пойнтинга.

**12.6.2.1.** Если принять теперь, что и *внутри* рассматриваемого объема нет зарядов, и устремить сам объем к нулю, то мы получим из (57.1)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{S} \quad (57.2)$$

— закон сохранения энергии для одного электромагнитного поля в дифференциальной форме. Естественно, что мы могли бы получить то же самое прямо из дифференциального закона сохранения энергии-импульса для свободного электромагнитного поля  $\frac{\partial \theta_{ik}^{\text{ph}}}{\partial x_k}$ , полагая в нем  $i = 4$  и переходя к трехмерным величинам.

**12.6.3.** Все последние рассуждения мы провели для временной компоненты дифференциального закона сохранения для

полного тензора энергии–импульса. Точно так же они проходят для *пространственных* составляющих — мы пришли бы тогда к понятию *плотности потока импульса* электромагнитного поля, которая выражалась бы чисто пространственной частью  $\theta_{\alpha\beta}^{\text{ph}}$  тензора энергии–импульса. Следуя Максвеллу, ее называют иногда (трехмерным) **тензором натяжений** электромагнитного поля.

### 13. Решение уравнений поля

**13.1.1.** Вернемся ко второй паре уравнений Максвелла (51.2). Выразим в них (что возможно в силу (51.1)!) поле  $F_{ik}$  через 4-потенциал  $A_i$  с помощью (42). (Решать уравнения *второго* порядка чаще проще, чем первого!). Мы получим тогда уравнение для 4-потенциала

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = \frac{4\pi}{c} j_i, \quad (59')$$

равносильное системе уравнений Максвелла.

Второй член в его левой части содержит оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square, \quad \text{оператор д'Аламбера}$$

который называется **оператором д'Аламбера**<sup>1)</sup>; содержащие его уравнения хорошо изучены. Первый же член в левой части (59') неудобен.

**13.2.** Чтобы избавиться от него, воспользуемся произволом в выборе потенциала, связанным с градиентным преобразованием (41), и, как говорят, выберем калибровку так, чтобы было

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad \text{условие Лоренца} \quad (58)$$

Это условие называют **условием Лоренца**; легко видеть, что всегда можно подобрать градиентное преобразование, переводящее произвольный потенциал  $A_i$  в удовлетворяющий этому условию. О 4-потенциале, удовлетворяющем (58), говорят как о потенциале в *лоренцевой калибровке*. Можно выбирать и другие калибровки потенциала — иногда это бывает удобно, — но

<sup>1)</sup> Оператор д'Аламбера можно рассматривать как обобщение оператора Лапласа  $\Delta$  на 4-пространство. Существенно, однако, что в силу псевдоевклидовости он оказывается уже не эллиптическим, а гиперболическим.

лоренцева калибровка есть единственная, налагаемая релятивистски инвариантным способом, т. е. не зависящая от выбора системы отсчета.

**13.2.1. ЗАМЕЧАНИЕ:** Условие Лоренца не фиксирует 4-потенциал однозначным образом: остается еще возможность изменять потенциал за счет *специальных градиентных преобразований*:

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}, \quad \text{где} \quad \square \lambda = 0. \quad \blacksquare \quad (41a)$$

**13.1.2.** Условие Лоренца уничтожает первый член в (59'), и мы приходим к основному уравнению электродинамики, выраженному через потенциалы

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j^2} = \square A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i. \quad \begin{array}{l} \text{основное уравнение поля} \\ \text{(только в лоренцевой} \\ \text{калибровке!)} \end{array} \quad (59)$$

Его называют волновым уравнением или уравнением д'Аламбера с правой частью.

Займемся решением этого уравнения.

**13.3.** Будем поступать с ним так же, как мы обошлись в **I.15.** с уравнением для осциллятора с произвольной правой частью. Разложим искомое поле  $A_i$  и заданный ток  $j_k$  в четырехмерные интегралы Фурье

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \int (dk)_4 e^{ik_j x_j} \tilde{A}_i(k); \\ j_i(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \int (dk)_4 e^{ik_j x_j} \tilde{j}_i(k). \end{aligned} \quad (60)$$

Мы обозначили здесь четыре фурье-переменных через  $k_1, k_2, k_3, k_4$  и требуем, чтобы они образовывали бы 4-вектор

$$k_i = \left\{ \mathbf{k}, i \frac{\omega}{c} \right\} \quad (61)$$

— тогда переход к фурье-образам будет релятивистски инвариантным. Элемент 4-объема в « $k$ -пространстве» мы обозначаем через

$$(dk)_4 = dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 = (d\mathbf{k}) \frac{i}{c} d\omega.$$

Вектор  $k_i$  называется волновым 4-вектором, его пространственная часть  $\mathbf{k}$  — просто волновым вектором.



Обратное фурье-преобразование в избранной нормировке будет иметь форму (выпишем его для тока)

$$\tilde{j}_i(k) = \frac{1}{i} \int d\Omega e^{-ik_j x_j} j_i(x). \quad (60')$$

**13.1.3.** Во введенных фурье-образах уравнение движения (59) переписется как

$$k_i^2 \tilde{A}_i(k) = \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_i(k) + \tilde{F}_i(k) k_j^2 \delta(k_l^2) \quad (59a)$$

— мы здесь опять прибегаем к тому же приему, что и в **I,15.**, добавляя в правую часть тождественный нуль  $k_j^2 \delta(k_l^2)$ , умноженный — теперь уже не на произвольную константу, а на *произвольную функцию* переменных  $k_i$ , регулярную на световом конусе  $k_j^2 = 0$ . После того как мы поделим обе части (59a) на  $k_j^2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i(k) &= \tilde{A}_i^0(k) + \frac{4\pi}{c} \frac{\tilde{j}_i(k)}{k_l^2}, \\ \tilde{A}_i^0(k) &= \tilde{F}_i(k) \delta(k_j^2), \end{aligned} \quad (62)$$

добавленный член уже не будет нулем, а будет описывать произвольное решение  $A_i^0$  *свободного волнового уравнения*:

$$\square A_i = 0. \quad (59.0)$$

### 13а. Однородное уравнение

**13а.1.** Займемся сперва этим свободным решением. Оно удовлетворяет (в координатном представлении) волновому уравнению  $\square A_i^0(x) = 0$  и условию Лоренца  $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$ , тем не менее в нем еще сохраняется произвол в выборе потенциала, связанный с возможностью провести специальное градиентное преобразование (41а). Поскольку каждая компонента  $A_i$  сама удовлетворяет волновому уравнению, то этим произволом можно воспользоваться, чтобы обратить какую-нибудь одну компоненту 4-потенциала в нуль; потребуем, чтобы нулю равнялась четвертая компонента  $A_4 = i\phi = 0$ . Заметим, что это требование уже не инвариантно; поэтому дальнейшее будет относиться к какой-либо одной системе отсчета, а при переходе к другой системе надо будет, чтобы сохранить формулы неизменными, совершать каждый раз еще и градиентное преобразование типа (41а).

**13a.2.** Итак, произвольное свободное решение имеет форму

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}}^0(k) &= \mathbf{F}(k) \delta\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2\right) = \\
 &= \mathbf{F}(k) \left( \frac{\delta\left(\frac{\omega}{c} - |\mathbf{k}|\right)}{2|\mathbf{k}|} + \frac{\delta\left(\frac{\omega}{c} + |\mathbf{k}|\right)}{2|\mathbf{k}|} \right) = \\
 &= \frac{c}{2|\mathbf{k}|} (\mathbf{F}(\mathbf{k}, c|\mathbf{k}|) \delta(\omega - c|\mathbf{k}|) + \mathbf{F}(\mathbf{k}, -c|\mathbf{k}|) \delta(\omega + c|\mathbf{k}|)) = \\
 &= \frac{c}{2|\mathbf{k}|} (\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{k}) \delta(\omega - c|\mathbf{k}|) + \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{k}) \delta(\omega + c|\mathbf{k}|)),
 \end{aligned}$$

где мы явно учли, что  $\delta$ -функция  $\delta\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \mathbf{k}^2\right)$  приводит, при заданном векторе  $\mathbf{k}$ , к *двум* возможным значениям для  $\omega$ , в соответствии с чем произвольная функция  $\mathbf{F}(k)$  четырех аргументов сводится реально к двум произвольным функциям  $\mathbf{F}^{(\mp)}(\mathbf{k})$  от *трех* аргументов каждая.

Условие Лоренца (58) при сделанном дополнительном уточнении калибровки сводится к равенству

$$\mathbf{k} \tilde{\mathbf{A}}^0(k) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{k} \mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{k} \mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{k}) = 0. \quad (58')$$

Таким образом каждая из двух векторных функций  $\mathbf{F}^{\mp}$  имеет только две независимые компоненты, т.е. ее можно разложить по двум единичным и взаимно-перпендикулярным векторам  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , ортогональным  $\mathbf{k}$  (удобно принять, что векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$  образуют правый единичный репер, **местный** или **локальный** репер в  $k$ -пространстве:

$$\mathbf{k} \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) = 0; \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0; \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1; \quad [\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2] = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \mathbf{n}(\mathbf{k}). \quad (63)$$

Поэтому об условии (58') говорят как об **условии поперечности** свободного электромагнитного поля.

Итак, многообразие решений свободного уравнения (59) описывается *четырьмя* скалярными функциями волнового вектора  $\mathbf{k}$ , в соответствии с возможностью для каждого  $\mathbf{k}$  двояким образом выбрать как знак частоты  $\omega$ , так и направление векторов  $\bar{\mathbf{F}}^{(\mp)}$  по  $\mathbf{e}_1$  или  $\mathbf{e}_2$  — как говорят, *направление поляризации*. Оказывается, что две из этих функций комплексно сопряжены

двум другим. В самом деле, 4-потенциал (60) должен быть вещественным; это налагает на фурье-образ  $A_i(k)$  условие

$$\tilde{A}_i^*(-k) = \tilde{A}_i(k).$$

В применении к свободному решению оно переносится на  $\mathbf{F}^{(\mp)}$  и дает

$$\mathbf{F}^{(-)}(-\mathbf{k}) = (\mathbf{F}^{(+)}(\mathbf{k}))^*; \quad \mathbf{F}^{(+)}(-\mathbf{k}) = (\mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{k}))^*.$$

С учетом этого обстоятельства удобно переименовать нормировку и выразить  $\mathbf{F}^{(\mp)}$  через новые произвольные **амплитуды**  $a_\alpha(\mathbf{k})$  и  $a_\alpha^*(\mathbf{k})$  ( $\alpha = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(-)}(\mathbf{k}) &= \sqrt{2\omega(\mathbf{k})} (2\pi)^{3/2} \mathbf{e}_\alpha a_\alpha(\mathbf{k}); \\ \mathbf{F}^{(+)}(-\mathbf{k}) &= \sqrt{2\omega(\mathbf{k})} (2\pi)^{5/2} \mathbf{e}_\alpha a_\alpha^*(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (64a)$$

**13а.3.** Через эти произвольные амплитуды общее свободное решение уравнения (59) запишется в обычно используемой форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{c(d\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \times \\ &\times \{e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_\alpha(\mathbf{k}) + e^{i\omega(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_\alpha^*(\mathbf{k})\}, \\ \omega(k) &= c \cdot |\mathbf{k}|, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (64.1)$$

(Обратите внимание на аналогию с решением в форме (I.40.1) для координаты гармонического осциллятора!)

Найдем выражения для электрического и магнитного полей, соответствующие решению (64). Поскольку скалярный потенциал  $\phi$  в нашей калибровке равен нулю, то *электрическое* поле  $\mathbf{E}$  получится дифференцированием  $\mathbf{A}$  по времени:

$$\mathbf{E}^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \dots i|\mathbf{k}| \cdot \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \{\dots - \dots\}. \quad (64.2)$$

(В силу аналогии с выражением (64.1) мы выписали здесь в основном лишь те детали, которые *отличают* эту форму от предыдущей.) Аналогично, чтобы получить *магнитное* поле, надо вычислить ротор вектор-потенциала, что дает

$$\mathbf{H}^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \dots i|\mathbf{k}| [\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k})] \{\dots - \dots\}. \quad (64.3)$$

Мы видим таким образом, что общее решение для свободного электромагнитного поля оказывается суперпозицией плоских

волн со всеми возможными длинами и направлениями распространения (задаваемыми волновым вектором  $\mathbf{k}$ ), причем *групповая скорость*  $\frac{d\omega(\mathbf{k})}{d|\mathbf{k}|}$  всех волн одинакова, совпадает с **фазовой скоростью**  $\frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}$  и равна скорости света  $c$ <sup>1)</sup>). При заданном вол-

новом векторе имеется 4 независимых амплитуды  $a_{\alpha}^{\pm}(\mathbf{k})$ ; значки  $\pm$  отвечают двум независимым фазам — косинусу и синусу, а значения  $\alpha = 1, 2$  — двум **поляризациям**.

В последнем пункте стоит разобраться подробнее.

**13а.3.1.** В формулах (64) коэффициентом при определенной экспоненте  $e^{-i\omega(\mathbf{k})t+i\mathbf{k}\mathbf{x}}$  является сумма  $(\mathbf{e}_1(\mathbf{k})a_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2(\mathbf{k})a_2(\mathbf{k}))$ . Поскольку амплитуды  $a_{\alpha}(\mathbf{k})$  комплексны, то эта сумма зависит от четырех параметров — вещественных частей амплитуд  $a_{\alpha}(\mathbf{k})$  и мнимых —  $\beta_{\alpha}(\mathbf{k})$ ; эти параметры удобно записать в виде матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ . Легко сообразить, однако, что не все эти параметры физически существенны. Действительно, в нашей записи коэффициента при экспоненте присутствуют два произвольных момента.

Во-первых, местный репер  $\{\mathbf{e}_1(\mathbf{k}), \mathbf{e}_2(\mathbf{k}), \mathbf{n}(\mathbf{k})\}$  можно, не меняя никаких использованных его свойств, поворачивать вокруг направления  $\mathbf{k}$ , такие повороты образуют однопараметрическое семейство, переводящее матрицу  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$  в новую матрицу  $\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$  которая получается из нее умножением *справа* на матрицу ортогонального поворота на плоскости:

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Во-вторых, из обеих амплитуд  $a_1(\mathbf{k}), a_2(\mathbf{k})$  можно выделить общий фазовый множитель  $e^{i\psi}$  и отнести его к экспоненте. Такое, тоже однопараметрическое, преобразование соответствует повороту на угол  $\psi$  в *комплексной* плоскости; легко убедиться что его действие на матрицу

<sup>1)</sup> Когда мы перечисляли в § 9 основные физические свойства электромагнитного поля, определяющие выбор его лагранжиана, мы сослались на это обстоятельство как на опытный факт и связали его с отсутствием в лагранжиане 4-потенциала  $A_i$ . Теперь можно пояснить эту связь. Если бы 4-потенциал  $A_i$  входил в лагранжиан электромагнитного поля, то, как и в примере 7.4, в уравнении (59) появился бы еще и член, пропорциональный потенциалу, скажем  $\kappa^2 A_i$ , где  $\kappa^2$  — константа. Тогда мы получили бы при проведении фурье-преобразования в качестве выражения для частоты не  $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$ , а  $\omega = \pm \sqrt{c^2 \mathbf{k}^2 + \kappa^2}$  — групповая и фазовая скорости были бы различны и зависели бы от длины волны.

параметров сводится к умножению ее *слева* опять-таки на матрицу ортогонального поворота:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1'' & \alpha_2'' \\ \beta_1'' & \beta_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Таким образом, преобразования, не меняющие физического смысла матрицы параметров, оказываются аналогичными тем преобразованиям, которые используются обычно для приведения квадратичной формы к главным осям за счет ортогонального поворота системы координат; разница состоит лишь в том, что в последнем случае обе ортогональные матрицы были бы взаимно обратны:  $\psi = -\varphi$ . Зато наша матрица параметров отличается от матрицы квадратичной формы тем, что не обязана быть симметричной,  $\beta_1 = \alpha_2$ . Лишняя степень произвола в допустимых преобразованиях идет как раз на уничтожение лишнего коэффициента первоначальной матрицы, и результат оказывается тем же самым — описанные допустимые преобразования всегда позволяют привести матрицу параметров к виду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

**13а.3.2.** Итак, векторный потенциал для волны с фиксированным волновым вектором  $\mathbf{k}$  всегда можно привести к виду

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\psi}(\mathbf{e}_1\alpha_1 + i\mathbf{e}_2\beta_2) + e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\psi}(\mathbf{e}_1\alpha_1 - i\mathbf{e}_2\beta_2) = \\ = \mathbf{e}_1 \cdot 2\alpha_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} - \psi) + \mathbf{e}_2 \cdot 2\beta_2 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} - \psi)$$

— при фиксированном  $\mathbf{x}$  (в фиксированном месте пространства) конец вектора  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$  описывает эллипс с полуосями  $\alpha_1$  и  $\beta_2$ , направленными по направлениям  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Такая волна называется **эллиптически поляризованной**. В частности, один из параметров  $\alpha_1$  или  $\beta_2$  может равняться нулю, тогда эллипс вырождается в отрезок прямой; в этом случае говорят о **линейно поляризованной** волне. Мы видим, что эллиптически поляризованную волну можно рассматривать как суперпозицию двух волн, линейно поляризованных в направлении главных осей эллипса, фазы которых сдвинуты одна относительно другой на  $\frac{\pi}{2}$ <sup>1)</sup>. Другой

---

<sup>1)</sup> Если сдвиг фаз отличен от  $\frac{\pi}{2}$ , то суперпозиция двух линейно поляризованных волн приводит к волне, поляризованной по эллипсу, главные оси которого не совпадают с направлениями поляризации первоначальных волн.

важный частный случай получается, когда  $\alpha_1 = \beta_2$ , т. е. эллипс вырождается в круг; тогда говорят о **циркулярной** или **круговой** поляризации.

Вектор *электрического* поля в монохроматической эллиптически поляризованной волне вращается (как видно из (64.2) или просто из  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ) по тому же (точнее — подобному) эллипсу, что и  $\mathbf{A}$ , но отстает от него на  $\frac{\pi}{2}$ ;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\mathbf{x}, t) = & \mathbf{e}_1 \cdot 2 |\mathbf{k}| \alpha_1 \sin(\omega t - \mathbf{kx} - \psi) - \\ & - \mathbf{e}_2 \cdot 2 |\mathbf{k}| \beta_2 \cos(\omega t - \mathbf{kx} - \psi). \end{aligned}$$

Что же касается *магнитного поля* монохроматической волны  $\mathbf{H}_k(x, t)$ , то из (64.3) видно, что оно получается из  $\mathbf{E}_k(x, t)$  векторным умножением на  $\mathbf{n}(\mathbf{k})$ ; но в плоскости  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  такая операция просто поворачивает вектор на прямой угол. Поэтому магнитное поле во всякий момент времени ортогонально электрическому и конец вектора  $\mathbf{H}_k$  вращается по эллипсу, такому же, как у электрического поля, но повернутому относительно его на прямой угол:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k(\mathbf{x}, t) = & \mathbf{e}_2 \cdot 2 |\mathbf{k}| \alpha_1 \sin(\omega t - \mathbf{kx} - \psi) + \\ & + \mathbf{e}_1 \cdot 2 |\mathbf{k}| \beta_2 \cos(\omega t - \mathbf{kx} - \psi). \end{aligned}$$

**13а.4.** Итак, в монохроматической плоской электромагнитной волне, т. е. в частном решении свободного уравнения (59), относящемся к определенному волновому вектору  $\mathbf{k}$ ,

(1) и электрическое и магнитное поля лежат в плоскости  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , т. е. всегда направлены *поперек* направления распространения волны  $\mathbf{n}(\mathbf{k})$ . Поэтому свободная электромагнитная волна *поперечна* (когда мы отметили в (58') аналогичное обстоятельство для вектор-потенциала, ему нельзя было придавать, много значения, поскольку потенциал неоднозначен).

(2) Электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу.

(3) Электрическое и магнитное поля равны друг другу по величине.

Все три свойства можно записать в виде двух векторных формул:

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}) = [\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})] \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(\mathbf{k}) = -[\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k})]. \quad (64.4)$$

**13а.5.** Поучительно вычислить, как выражаются через амплитуды  $a_\alpha^*(\mathbf{k})$  и  $a_\alpha(\mathbf{k})$  фундаментальные динамические величины поля, например энергия. Оставляя проведение довольно громоздкого вычисления читателю (ленивый читатель может попытаться заглянуть в конец параграфа), приведем прямо результат:

$$\mathcal{E}^{\text{ph}} = \int d\mathcal{V} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} = \frac{1}{4\pi} \int (d\mathbf{k}) \omega(\mathbf{k}) a_\alpha^*(\mathbf{k}) a_\alpha(\mathbf{k}). \quad (65)$$

Мы видим, что энергия свободного электромагнитного поля представляется в виде суммы энергий отдельных (**парциальных**) монохроматических волн, — *интерференционные члены отсутствуют* — причем для каждой парциальной волны получается в точности то же самое выражение (1.40.2), которое мы получили в механике для осциллятора (единичной массы). Если принять (ср. I.20.) амплитуды  $a_\alpha(\mathbf{k})$  за обобщенные координаты поля, то обобщенными импульсами окажутся (с точностью до множителя  $i$ )  $a_\alpha^*(\mathbf{k})$ , а (65) станет *функцией Гамильтона*; поэтому распадение (65) в сумму (интеграл) функций Гамильтона для парциальных степеней свободы означает, что движение каждой степени свободы происходит независимо от остальных. В этом смысле часто говорят о *разложении поля на независимые осцилляторы*.

Аналогичные (65) выражения получаются и для остальных фундаментальных динамических величин; мы не будем их выписывать.

**13а.6.** Итак, мы выяснили, что свободное уравнение электромагнитного поля (59.0) *допускает нетривиальные* (т. е. приводящие к неравным нулю энергии, электрическому и магнитному полям) *решения*. Это значит, что в природе может существовать электромагнитное поле, *не связанное с зарядами*, как совершенно автономный физический объект, распространяющийся в пространстве со скоростью света. Тем самым поле, введенное сперва со сравнительно скромной целью описать необходимое в теории относительности запаздывание взаимодействия частиц, приобретает самостоятельное, не зависимое от этих частиц бытие.

Чтобы окончательно убедиться, что этот новый вид материи с неотвратимостью должен занять подобающее ему место в нашей общей картине физического мира, остается еще обнаружить, что он не отгорожен от привычного нам мира частиц никакой китайской стеной, что в процессе взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами они действительно могут обмениваться с ним своими динамическими характеристиками —

энергией, импульсом, моментом — т. е. что в природе действительно может иметь место процесс **излучения** (и **поглощения**) электромагнитного поля движущимися зарядами.

Этой задаче будет посвящен следующий раздел.

**13а.3.3. ДОПОЛНЕНИЕ 1: Восстановление амплитуд  $a_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{k})$  по полям**<sup>1)</sup>. Формулы (64) очень похожи на трехмерное преобразование Фурье, в котором время выступает в роли параметра. Дело осложняется, однако, тем, что они выражают, скажем, электрическое поле через *два* трехмерных фурье-образа —  $a_\alpha(\mathbf{k})$  и  $a_\alpha^*(\mathbf{k})$  (для краткости —  $a_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{k})$ ). Поэтому ясно, что для восстановления этих фурье-образов задания одной функции  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  при фиксированном  $t$  недостаточно, нужна еще и другая, в качестве которой естественно призвать  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$  (при том же фиксированном  $t$ ).

Попробуем построить линейную комбинацию обратных фурье-преобразований этих двух функций, именно, вычислим интеграл вида

$$I^\mp = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{(d\mathbf{x})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{q})}} e^{\mp i q x} \left( \mp i \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \right); \quad q_4 = \frac{i\omega(\mathbf{q})}{c}.$$

С помощью прямого фурье-разложения (64.2) получим для него

$$I^\mp = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{(d\mathbf{k})(d\mathbf{x})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k}) \cdot 2\omega(\mathbf{q})}} \omega(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \times \\ \times \left\{ e^{i(k \mp q)x} \left( \pm 1 + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{q})} \right) a_\alpha(\mathbf{k}) + e^{-i(k \pm q)x} \left( \mp 1 + \frac{\omega(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{q})} \right) a_\alpha^*(\mathbf{k}) \right\}.$$

В этом выражении есть *три* интегрирования по  $d\mathbf{x}$ , которые превратят три экспоненты в  $\delta$ -функции, однако экспонент здесь *четыре*. Поскольку, однако,  $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{q})$ , если  $\mathbf{k} = \pm \mathbf{q}$ , то при верхнем знаке в первом и нижнем — во втором члене фигурных скобок временная экспонента превращается в единицу. При двух же других знаках обращаются в нуль круглые скобки! По-этому наша линейная комбинация дает нам

$$I^\mp = \int \frac{(d\mathbf{k})}{2\omega(\mathbf{k})} 2\omega(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) a_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{q}) a_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{q}).$$

Но это значит, что

$$a_\alpha^{(\mp)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{(d\mathbf{x})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} e^{\mp i k x} \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \left( \mp i \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \right). \quad \blacksquare \quad (64.5)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Левая часть (64.5) не зависит от времени. Следовательно, и значение интеграла в правой части, вычисляемого

<sup>1)</sup> или «Полезные маленькие хитрости. 1.»



по пространству в некоторый момент времени  $t$ , от выбора этого момента не зависит. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Мы выяснили, что амплитуды  $a^\pm(\mathbf{k})$  однозначно определяются заданием  $\mathbf{E}$  и  $\dot{\mathbf{E}}$  в один момент времени. Но согласно первому уравнению второй максвелловой пары, в отсутствие зарядов  $\dot{\mathbf{E}} = \text{rot } \mathbf{H}$ . Поэтому для определения амплитуд  $a^\pm(\mathbf{k})$  достаточно задать лишь сами электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в один момент времени.

Но если амплитуды  $a^\pm(\mathbf{k})$  известны, то формулы (64.2,3) дают нам поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  во все моменты времени; поэтому задание полей при  $t = t_0$  определяет их для всех  $t$ , т. е. фиксирует задачу Коши для свободного электромагнитного поля. Мы могли бы, пользуясь этими соображениями, построить и ее явное решение, однако это будет гораздо проще сделать, опираясь на некоторые понятия, которые появятся в следующем разделе в связи с неоднородными уравнениями. ■

**13а.5.1. ДОПОЛНЕНИЕ 2: Вычисление энергии свободного поля**<sup>1)</sup>. При подстановке разложений (64.2,3) для электрического и магнитного полей в формулу (52.1) для энергии поля мы сталкиваемся с тем же затруднением, что и в Дополнении 1, — число интегрирований по  $\mathbf{x}$ -пространству меньше числа экспонент. В половине членов — тех, которые содержат произведения амплитуд типа  $a^*a$  — лишняя временная экспонента опять обратится в единицу, но в другой половине — в которой стоят  $a^*a^*$  и  $aa$  — останутся временные экспоненты с двойной частотой:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{hp}} = & \frac{1}{8\pi} \int \frac{(d\mathbf{k})}{2\omega(\mathbf{k})} c^2 \mathbf{k}^2 \{ \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\beta(\mathbf{k}) + [\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k})] \cdot [\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_\beta(\mathbf{k})] \} \times \\ & \times (a_\alpha^*(\mathbf{k}) a_\beta(\mathbf{k}) + a_\alpha(\mathbf{k}) a_\beta^*(\mathbf{k})) + \\ & + \frac{-1}{8\pi} \int \frac{(d\mathbf{k})}{2\omega(\mathbf{k})} c^2 \mathbf{k}^2 \{ \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k}) \mathbf{e}_\beta(-\mathbf{k}) + [\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k})] \cdot [\mathbf{n}(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_\beta(-\mathbf{k})] \} \times \\ & \times (e^{2i\omega(\mathbf{k})t} a_\alpha^*(\mathbf{k}) a_\beta^*(-\mathbf{k}) + e^{-2i\omega(\mathbf{k})t} a_\alpha(\mathbf{k}) a_\beta(-\mathbf{k})). \end{aligned}$$

Кроме того, коэффициенты при произведениях амплитуд выглядят очень громоздко.

Обе болезни лечатся одним лекарством: мы замечаем, что операция  $[\mathbf{n}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_\alpha]$  просто поворачивает  $\mathbf{e}_\alpha$  на  $\frac{\pi}{2}$  в плоскости, ортогональной  $\mathbf{k}$ . Поэтому второе скалярное произведение в первой фигурной скобке — это произведение тех же векторов  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ , что и в первом скалярном

<sup>1)</sup> или «Полезные маленькие хитрости. 2»

произведении, только повернутых *оба на один и тот же угол*, значит оно, как и первое, равно просто  $\delta_{\alpha\beta}$ . Во второй фигурной скобке оба сомножителя второго скалярного произведения тоже получаются из сомножителей первого —  $\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{e}_\beta(-\mathbf{k})$  — поворотом на  $\frac{\pi}{2}$ , но поскольку  $\mathbf{n}(-\mathbf{k}) = -\mathbf{n}(\mathbf{k})$ , поворотом в *противоположных направлениях* — поэтому эти два произведения взаимно уничтожаются и второй интеграл, содержащий двойные частоты, исчезает. Чтобы получить стоящую в основном тексте формулу (65) остается только учесть, что  $c^2 \mathbf{k}^2 = \omega^2(\mathbf{k})$ . ■

### 136. Уравнения с правой частью

**136.1.** Вернемся к частному решению неоднородного уравнения. Как и в случае разобранный в части I задачи для осциллятора, будем выписывать решение через функцию Грина. Из фурье-разложений (60) и уравнения (62) следует:

$$A_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int (dk)_4 \frac{1}{i} \int (dy)_4 e^{ik_l x_l} e^{-ik_l y_l} \frac{4\pi}{c} \frac{j_i(y)}{k_l^2};$$

$$A_i(x) = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{i} \int (dy)_4 G(x-y) j_i(y), \quad (66.1)$$

где

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int (dk)_4 \frac{e^{ik_l(x-y)_l}}{k_j^2} \quad \text{функция Грина} \quad (66.2)$$

— функция Грина.

**136.1.1.** Разделяя здесь интегрирование по волновому вектору  $\mathbf{k}$  и частоте  $\omega$ , получаем последовательно

$$G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{2\pi c} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} G(t-t').$$

«Чисто временная» функция Грина

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2(\mathbf{k}) - \omega^2} \quad (I.47.2)$$

— это в точности тот же объект, который мы изучали в § 15 первой части. Поэтому можно сразу заимствовать оттуда нужный нам результат, причем нам удобно будет избрать *запаздывающую* функцию Грина

$$D^{\text{ret}}(t - t') = \frac{\vartheta(t - t')}{\omega(\mathbf{k})} \sin[\omega(\mathbf{k})(t - t')]. \quad (1.48\text{r})$$

Ее подстановка в (66) дает четырехмерную запаздывающую функцию Грина

$$D^{\text{ret}}(z) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\vartheta(\tau)}{\omega(\mathbf{k})} \sin(\omega(\mathbf{k})\tau); \quad z \equiv \{\mathbf{R}, i c\tau\} = x - y, \quad (66\text{r})$$

и нам остается только выполнить трехмерное фурье-преобразование.

**136.1.2.** Перейдем к сферическим координатам в  $\mathbf{k}$ -пространстве, и обозначим ради простоты письма

$$|\mathbf{R}| = R, \quad |\mathbf{k}| = k,$$

так что это будут не 4-векторы, а длины 3-векторов. Тогда  $\omega(\mathbf{k}) = ck$  и

$$\begin{aligned} D^{\text{ret}} &= \frac{c}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d\mu e^{ikR\mu} \frac{\vartheta(\tau)}{ck} \sin(ck\tau) = \\ &= \frac{2\pi c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \cdot 2 \frac{\sin kR}{kR} \frac{\vartheta(\tau) \sin ck\tau}{ck} = \\ &= \frac{\vartheta(\tau)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk \sin kR \sin ck\tau = \frac{\vartheta(\tau)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk [\cos k(R - c\tau) - \cos k(R + c\tau)] \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Но  $\int_0^\infty dk \cos k\lambda = \pi\delta(\lambda)$ . Поэтому

$$D^{\text{ret}}(z) = \frac{\pi}{4\pi^2} \frac{1}{R} \vartheta(\tau) [\delta(R - c\tau) - \delta(R + c\tau)].$$

Обратим здесь внимание на ступенчатую функцию  $\vartheta(\tau)$ . Она отлична от нуля только для  $\tau > 0$ . Но  $R > 0$  по своему определению. Поэтому аргумент второй  $\delta$ -функции существенно положителен и ее можно выбросить. А в качестве множителя при *первой*  $\delta$ -функции функция  $\vartheta(\tau)$  не нужна — эта  $\delta$ -функция может отличаться от нуля только для *положительных*  $\tau$ .

Итак, в выбранной функции Грина остался только член, в котором расстояние  $R$  *растет* с ростом времени  $\tau$ . Далее, функция Грина не зависит от углов. Таким образом найденная функция Грина изображает сферически-симметричную волну, причем волну, *расходящуюся*. Последнее обусловлено тем, что мы выбрали в качестве временной функции Грина *запаздывающую* функцию. Если бы мы избрали *опережающее* решение, то  $\delta$ -функции поменялись бы своей судьбой — выжила бы только вторая, и мы получили бы вместо расходящейся волны — волну *сходящуюся*.

С учетом этих замечаний можем выписать окончательное выражение для запаздывающей функции Грина

$$D^{\text{ret}}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - c(t - t')). \quad (67\text{г})$$

**136.1.3.** Соответствующая формула для *опережающей* функции имела бы вид

$$D^{\text{adv}}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + c(t - t')). \quad (67\text{а})$$

**136.1.4.** Выбросивши в предыдущей выкладке одну из  $\delta$ -функций и опустив «ненужную»  $\vartheta$ -функцию, мы упростили выражения (67), но зато потеряли релятивистскую инвариантность, которой, по-видимому, обладала форма (66.2), — мы говорим «по-видимому», поскольку пока неясно, не теряется ли инвариантность уже в момент выбора конкретного контура интегрирования.

Чтобы разобраться в этом, восстановим в (67 г) ненужную  $\vartheta(\tau)$ :

$$D^{\text{ret}}(z) = \frac{1}{4\pi} \vartheta(\tau) \frac{\delta(R - c\tau)}{R}$$

Это выражение можно последовательно преобразовать как

$$\begin{aligned} D^{\text{ret}}(\tau) &= \frac{2}{4\pi} \vartheta(\tau) \frac{\delta(R - c\tau)}{2R} = \frac{2}{4\pi} \vartheta(\tau) \frac{\delta(R - c\tau)}{R + c\tau} = \\ &= \frac{2}{4\pi} \vartheta(\tau) \delta((R - c\tau)(R + c\tau)) = \frac{2}{4\pi} \vartheta(\tau) \delta(R^2 - (c\tau)^2). \end{aligned}$$

Мы получаем тем самым для  $D^{\text{ret}}$  новую форму:

$$D^{\text{ret}}(z) = \frac{2}{4\pi} \vartheta(\tau) \delta(z^2), \quad (67\text{г}')$$

обладающую тем преимуществом, что из нее сразу видна *инвариантность*  $D^{\text{ret}}$  относительно *ортохронных* преобразований

Лоренца. Действительно, под знаком  $\delta$ -функции стоит инвариантный интервал  $z^2$ , что же до знаковой функции  $\vartheta(\tau)$ , то она могла бы меняться при ортохронных преобразованиях Лоренца только для пространственноподобных  $z$ , а для них  $\delta(z^2)$  обращается в нуль.

В полной аналогии опережающую функцию Грина можно записать в явно инвариантной форме

$$D^{\text{adv}}(z) = \frac{2}{4\pi} \vartheta(-\tau) \delta(z^2). \quad (67a')$$

Что же касается инвариантности относительно обращения времени, то она действительно потерялась при конкретизации контура интегрирования в (66.2) — запаздывающая функция переходит при таком преобразовании в опережающую и наоборот.

**136.2.1.** Разность запаздывающей и опережающей функций Грина

$$D^{\text{ret}}(z) - D^{\text{adv}}(z) = D(z) = \frac{\varepsilon(\tau)}{2\pi} \delta(z^2) \quad (67')$$

должна быть решением свободного уравнения (59.0). Это решение — мы поторопились ввести его еще в механике для одного осциллятора и знаем, что его зовут *D-функция Паули* — выделяется своими особыми свойствами, поэтому его стоит изучить подробнее.

Прежде всего, из (67') явствует, что  $D(z)$  — функция, инвариантная относительно ортохронных преобразований Лоренца, а при изменении знака времени она меняет знак — *D-функция Паули* есть «антисимметричное инвариантное решение» свободного уравнения (59.0):

$$\square D(z) = 0; \quad D(\mathbf{R}, -\tau) = -D(\mathbf{R}, \tau). \quad (67'.1)$$

Можно показать, что это — единственное решение с такими свойствами и вместе с «симметричным инвариантным решением»  $D^{(1)}(z)$ , которое нам пока не понадобится, — одно из двух инвариантных решений.

Из свойств антисимметрии при замене  $\tau \rightarrow -\tau$  следует, в частности, что для совпадающих времен

$$D(\mathbf{R}, 0) = 0. \quad (67'.2)$$

Еще одно важное свойство *D-функции* найдется, если вернуться к формулам (66), подставляя в них вместо «чисто вре-

менной» запаздывающей функции (I.48r) «чисто временную»  $D$ -функцию

$$D(\tau) = \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \sin(\omega(\mathbf{k})\tau). \quad (\text{I.48})$$

Мы найдем тогда для трехмерного фурье-разложения функции Паули

$$D(z) = \frac{c}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})\tau)}{\omega(\mathbf{k})}. \quad (66)$$

Дифференцируя его по времени, выясняем, что

$$\frac{\partial D(\mathbf{R}, i\tau)}{\partial \tau} = \frac{c}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \cos(\omega(\mathbf{k})\tau) \Big|_{\tau=0} = c\delta(\mathbf{R}) \quad (67'.3)$$

и

$$\frac{\partial^2 D(\mathbf{R}, i\tau)}{\partial \tau^2} = -\frac{c}{(2\pi)^3} \int (d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \omega(\mathbf{k}) \sin(\omega(\mathbf{k})\tau) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (67'.4)$$

Покажем, что найденные свойства (67.1–4) функции Паули позволяют с ее помощью решить задачу Коши для свободного уравнения д'Аламбера.

**136.2.2.** Пусть нам заданы значения вектор-потенциала  $\mathbf{A}^0$  свободного поля и его первой производной  $\dot{\mathbf{A}}^0$  в некоторый фиксированный момент времени  $t = t' = \text{const}$ .

Сконструируем образование:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0(x) &= \\ &= \frac{1}{c} \int_{t'=\text{const}} (d\mathbf{r}') \left( D(x-x') \frac{\partial \mathbf{A}^0(x')}{\partial t'} + \frac{\partial D(x-x')}{\partial t} \mathbf{A}^0(x') \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{c} \int_{t'=\text{const}} (d\mathbf{r}') D(x-x') \frac{\partial \mathbf{A}^0(x')}{\partial t'} \quad (68.0) \end{aligned}$$

Тогда

(α)  $\square \mathbf{A}^0(x) = 0$ , поскольку  $D$  и  $\dot{D}$  суть решения свободного уравнения д'Аламбера;

$$(\beta) \quad \mathbf{A}^0(\mathbf{r}, t') = \frac{1}{c} \int_{t'=\text{const}} (d\mathbf{r}') c\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}^0(\mathbf{r}', t') = \mathbf{A}^0(\mathbf{r}, t');$$

$$(\gamma) \quad \frac{\partial \mathbf{A}^0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Big|_{t=t'} = \frac{1}{c} \int_{t'=\text{const}} (d\mathbf{r}') c\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{A}^0(x')}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{A}^0(\mathbf{r}, t')}{\partial t'}$$

— т. е. построенное выражение есть такое решение свободного волнового уравнения, которое имеет на гиперплоскости  $t = t'$  заданные значения функции и нормальной производной, т. е. есть решение задачи Коши.

Легко видеть, что если начальные условия заданы не на плоскости, а на произвольной пространственноподобной гиперповерхности  $\sigma$ , то решением задачи Коши будет естественно обобщающее (68.0) образование:

$$\mathbf{A}^0(x) = i \int_{\sigma} dS_i D(x - x') \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A}^0(x'). \quad (68.0\sigma)$$

Решение задачи Коши, поставленной для полей, а не для потенциала, получается из этих формул дифференцированием.

**136.3.** С помощью запаздывающей функции Грина мы можем получить теперь явную форму частного решения неоднородного уравнения (59):

$$A_i(x) = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{i} \frac{1}{4\pi} \int i c dt' \int (d\mathbf{r}') \frac{j_i(x') \delta(c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Используя  $\delta$ -функцию, здесь можно проинтегрировать по  $t'$ , причем временной аргумент стоящего под интегралом тока заменится на **запаздывающее время**

$$t' = t - \frac{R}{c}, \quad \text{где опять} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (68a)$$

Таким образом частное решение примет форму

$$A_i^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') \frac{j_i\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \quad \text{запаздывающие потенциалы} \quad (68г)$$

Это решение неоднородных уравнений поля называют **решением в форме запаздывающих потенциалов** или просто **запаздывающими потенциалами**.

Общее решение уравнений (59) запишется тогда как

$$A_i(x) = A_i^0(x) + A_i^{\text{ret}}(x). \quad \text{общее решение} \quad (69г)$$

**136.4.** Решение (69г) в форме запаздывающих потенциалов занимает в теории поля особое место. Чтобы пояснить, почему это происходит, сделаем сперва несколько замечаний относи-

тельно смысла выраженного через посредство какой-то функции Грина  $G'(x - x')$  общего решения

$$A_i(x) = A_i'^0(x) + \frac{4\pi}{ic} \int dx' G'(x - x') j_i(x) \quad (69')$$

уравнения (59).

**136.4.1.** Если мы интересуемся только *численным значением* решения, т. е. тем, каким числам будут равны компоненты 4-потенциала в каждой точке  $x_k$ , то ничего не изменится, если мы перейдем в (69') от  $G'$  к какой-либо *другой* функции Грина  $G''$  (скажем, от  $D^{\text{ret}}$  — к  $D^{\text{adv}}$ ): поскольку разность двух функций Грина есть решение свободного уравнения (см. **I,15**),

$$G' = G'' + D; \quad \square D(x - x') = 0,$$

то тот же самый 4-потенциал запишется в аналогичной (69') форме

$$A_i(x) = A_i''^0(x) + \frac{4\pi}{ic} \int dx' G''(x - x') j_i(x'), \quad (69'')$$

где *другое* свободное решение  $A_i''^0(x)$  будет связано со старым соотношением

$$A_i''^0(x) = A_i'^0(x) + \frac{4\pi}{ic} \int dx' D(x - x') j_i(x'). \quad (*)$$

В соответствии с этим и говорят обычно, что конкретный выбор частной функции Грина в решении типа (69) несуществен.

**136.4.2.1.** Действительно *существенный* момент выбора решения состоит не в том, через какую функцию Грина его записать, а в том, чтобы решить, *какое свободное решение мы считаем не зависящим от тока  $j_i(x')$* ! Сама постановка такого вопроса означает, что мы хотим взглянуть на решение (69) с новой точки зрения, рассматривая его как (неоднородный) линейный функционал  $A_i(x, [j(x')])$  от тока  $j_i(x')$  и интересуясь не только численным значением 4-потенциала, но и видом его функциональной зависимости от тока.

Из соотношения (\*) видно, что если мы хотим, чтобы (69') и (69'') определяли бы одно и то же решение и в этом новом понимании, то не зависеть от  $j_i$  может *только одно* свободное поле — или  $A_i'^0(x)$  или  $A_i''^0(x)$ . Решить, какое именно, — это значит *сделать физический выбор*, эквивалентный выбору начального условия для уравнения (59).

**136.4.2.2.** Можно стать и на иную точку зрения, и согласиться, что всякий раз, когда мы пишем решение в форме (69) —



с какой бы то ни было функцией Грина — свободное поле  $A'_i(x)$  *всегда не зависит от  $j_i(x')$* . При таком соглашении переход от (69') к (69'') уже *не есть* тождественное преобразование, поскольку два решения — обозначим их как  $A'_i(x, [j])$  или  $A''_i(x, [j])$ , — будучи численно равными, *по-разному зависят* (функционально) от  $j$ , и разные функции Грина становятся неэквивалентными.

**136.4.3.** С этими разъяснениями мы можем теперь сделать выбор преимущественной функции Грина. Мы знаем, что в силу принципа причинности в теории относительности в некоторую 4-точку  $x$  могут приходить сигналы только из 4-точек  $x'$ , лежащих в *нижней* половине построенного в  $x$  светового конуса (только из предконуса точки  $x$ ) — для такого взаимного расположения точек  $x$  и  $x'$  используют обозначение  $x > x'$  (читается —  $x$  **позже**  $x'$ ). Но влияние тока  $j$  в точке  $x'$  на 4-потенциал  $A$  в точке  $x$  есть частный вид сигнала, получаемого в  $x$  из 4-точки  $x'$ ; следовательно, **условие причинности** для поля состоит в том, что 4-потенциал  $A(x)$  может зависеть от 4-токов  $j(x')$  *только в тех точках  $x'$ , которые лежат в предконусе точки  $x$ ,  $x > x'$* . Аналитически это условие можно записать в виде равенства

$$\frac{\delta A_i(x)}{\delta j_k(x')} = 0, \quad \text{если } x' \gtrsim x^1),$$

где запись  $x' \gtrsim x$  означает или  $x' > x$  или  $x' \sim x$  пространственноподобно  $x$  ( $x' \sim x$ ).

**136.4.3.1.** Применение (70) к решению в форме (69) дает нам

$$\frac{\delta A_i(x)}{\delta j_k(x')} = \frac{4\pi}{ic} \delta_{ik} G(x - x'),$$

т. е. приводит к *условию причинности для функции Грина*:

$$G(x - x') = 0, \quad \text{если } x' \gtrsim x. \quad (70')$$

Это требование выполнено для *запаздывающей* функции Грина  $D^{\text{ret}}(x - x')$ . Можно показать, что  $D^{\text{ret}}$  есть *единственная* релятивистски инвариантная функция Грина, обладающая этим свойством.

**136.4.4.** Итак, при использовании в (69) в качестве функции Грина запаздывающей функции  $D^{\text{ret}}$  достигаются одновременно две цели: выполняется условие причинности, и в то же время полное решение  $A_i(x)$ , записанное в форме (69г), явным образом

<sup>1)</sup> Такая форма условия причинности принадлежит Н. Н. Боголюбову.

разделяется на два члена, из которых второй описывает электромагнитное поле, создаваемое зарядами системы, а первый не имеет к этим зарядам никакого отношения и есть существующее само по себе свободное электромагнитное поле, как говорят, **падающее на систему излучение**.

**136.5. ЗАМЕЧАНИЕ:** Во всем этом параграфе, решая уравнения (59), мы считали 4-ток  $j_i(x')$  *заданной функцией* координат  $x'$  и времени  $t'$ . Реально, однако, 4-ток определяется, как мы знаем ((49)), *движением зарядов*, а оно — в свою очередь — электромагнитным полем согласно уравнениям движения (48).

Поэтому может показаться, что мы занялись не слишком осмысленным делом, выделивши совершенно произвольно из существенно *нелинейной* проблемы лишь одну *линейную* стадию<sup>1)</sup> и сможем на этом пути достигнуть, самое большее, преобразования уравнений движения поля из дифференциальной формы в интегральную<sup>2)</sup>.

В действительности, однако, дело обстоит гораздо хитрее, и с такой полной нелинейной проблемой очень редко приходится сталкиваться. В большинстве случаев в самой физической постановке задачи обнаруживается некоторый параметр малости, позволяющий прибегнуть к методу последовательных приближений. Параметр этот в разных задачах может быть различным, но в конечном счете смысл его всегда сводится к малости обмена энергией между полем и зарядами сравнительно с их полной энергией.

Прежде всего, в правой части уравнений движения зарядов (48) кроме силы Лоренца могут стоять еще и другие силы, действующие на заряды — **сторонние силы**, и если эти последние превосходят силу Лоренца, то найденные выражения (69) для поля при заданном движении зарядов приобретают ясный смысл в рамках **теории возмущений** — решения полной задачи последовательными приближениями.

Правда, в *релятивистской* динамике сторонние силы тоже должны быть силами, действующими на заряды со стороны каких-то *полей*, а пока мы не спускаемся до масштабов, существенно меньших размеров атомов, в природе не существует никаких других полей, которые могли бы переносить взаимодействие между заряженными частицами, кроме электромагнитного

<sup>1)</sup> Оправданием этому мог бы служить лишь **принцип пьяного**, искавшего потерянную в темном проулке трешку под фонарем, *ибо там светлее*.

<sup>2)</sup> В квантовой теории поля эту последнюю называют **уравнениями Янга–Фельдмана**.

поля (другое поле классической физики — поле тяготения — становится существенным только для очень больших — астрономических — размеров).

Тем не менее бывает удобно исключить из явного рассмотрения большую часть электромагнитных взаимодействий, связанную с поддержанием атомной и молекулярной структуры вещества или с обеспечением наблюдаемой стабильности твердых тел, — их адекватное описание все равно возможно лишь в **квантовой механике** — и считать поэтому движение зарядов заданным через некоторые феноменологические параметры — с точностью до малых возмущений, вызываемых явно рассматриваемой частью электромагнитного поля.

Далее, малым параметром разложения теории возмущений часто может служить малое отношение скорости зарядов к скорости света — с задачами в такой постановке мы познакомимся ниже.

Могут встретиться и другие источники появления малого параметра. Если же никакого малого параметра нет, то «теоретический опыт» показывает, что уже в самой постановке задачи — в формулировке начальных условий — возникают большие трудности. ■

## 14. Электростатика

**14.1.** Займемся обсуждением найденных решений уравнений поля и начнем с того частного случая, когда все заряды *покоятся*, т.е.  $j_i$  не зависит от времени, — случая **электростатики**. Тогда не зависит от времени и потенциал (68):

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') \frac{j_i(\mathbf{r}')}{R}. \quad (68 \text{ stat})$$

Поэтому естественно требовать того же и от общего решения (69). Но добавляемое в последнем к частному решению (68) общее решение для свободного поля обязательно зависит от времени. Следовательно, в классе *статических* решений решение (68) оказывается *общим* и определяется в то же время зарядами единственным образом. Это существенная особенность статического случая объясняется тем, что в статическом случае уравнение д'Аламбера (59) превращается в уравнение Лапласа — эллиптическое уравнение, не обладающее — при граничных условиях убывания на бесконечности — нетривиальными однородными решениями.

Подставляя в подинтегральное выражение статического потенциала выражение (49) для 4-вектора тока

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \{\mathbf{v}_a; ic\},$$

надо учесть, что для покоящихся зарядов все  $\mathbf{v}_a = 0$ . Таким образом, не равной нулю остается только четвертая компонента 4-тока  $j_4 = ic\rho$ . Следовательно, исчезает и векторный потенциал  $\mathbf{A}$ ; для скалярного же потенциала  $\phi$  получаем теперь

$$\phi(\mathbf{r}) = \int (d\mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (71)$$

Взятое для одного заряда это выражение для потенциала называют **законом Кулона**.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Итак, мы видим, что в статическом случае мы возвращаемся к тому самому выражению (\*\*\*) (стр. 214) для потенциала в классической механике, которое послужило нам в § 6 исходным пунктом обобщения, приведшего в конце концов к понятию поля. Теперь мы можем утверждать, что это выражение является хорошим приближением для описания взаимодействия зарядов только в предельном случае, когда все скорости  $\mathbf{v}_a$  исчезающе малы сравнительно со скоростью света. ■

**14.2.** Найдем энергию поля, создаваемого зарядами в статическом случае — **электростатическую** энергию системы зарядов. Общее выражение (52.1) даст нам, поскольку магнитное поле  $\mathbf{H}$  равно нулю,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (d\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}). \quad (72 \text{ E})$$

Выражая здесь электрическое поле  $\mathbf{E}$  через градиент потенциала, выделяя полную дивергенцию и прибегая к теореме Гаусса (причем интеграл по поверхности даст нуль, поскольку поверхность растет как  $r^2$ , потенциал убывает как  $\frac{1}{r}$ , а  $\frac{\partial \phi}{\partial r_\alpha}$  — как  $\frac{1}{r^2}$ , получим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (d\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{1}{8\pi} \int (d\mathbf{r}) \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} = \frac{1}{2} \int (d\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}).$$

Таким образом, если воспользоваться еще для потенциала формулой (71), мы придем к выражению электростатической энергии через распределение плотности зарядов

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int (d\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int (d\mathbf{r}) (d\mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (72 \rho)$$

Хотя подинтегральное выражение в (72p) и имеет особенность при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , для *непрерывного* распределения зарядов со *всюду конечной* плотностью  $\rho(\mathbf{r})$  электростатическая энергия конечна.

Не составляет труда убедиться, что энергия остается конечной и в случае, когда плотность заряда имеет изолированные особенности не более сильные, чем

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-\alpha}; \quad \alpha < \frac{5}{2}.$$

В нашем изложении, однако, мы последовательно развивали представление о *точечных* зарядах; для таких зарядов плотность (28) содержит более сильные  $\delta$ -образные особенности, и в электростатической энергии появляются бесконечные члены. В самом деле, подстановка (28) в (72p) преобразует энергию электростатического поля в двойную сумму по зарядам

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (72e)$$

В диагональных членах этой суммы знаменатель  $|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$  обращается при  $a = b$  в нуль, т. е. все они бесконечны. Каждый такой (бесконечный) член

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{2} \frac{e_a^2}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_a|},$$

возникающий как энергия взаимодействия заряда со своим собственным электростатическим полем, называют **собственной энергией** соответствующего заряда.

**14.3.** История борьбы физиков с бесконечностью собственной энергии заряженных элементарных частиц столь же стара, как само применение максвелловой электродинамики — которая самим автором строилась как *существенно макроскопическая* теория — к первой найденной в природе элементарной частице — электрону.

**14.3.1.1.** Простейшая идея состояла, конечно, в том, чтобы принять в качестве модели элементарной частицы («электрона») не точку, а некоторое протяженное распределение заряда, например, по шару малого радиуса  $a$ . Тогда электростатическая энергия сразу становилась конечной, равной по порядку величины  $\frac{e^2}{a}$ .

В самом деле, если принять для распределения заряда по «шарику», скажем, степенную функцию с неопределенным показателем

$$\rho(r) = \begin{cases} = \frac{C}{r^\alpha} & r < a, \\ = 0, & r > a, \end{cases}$$

то заряд внутри объема радиуса  $r$  составит

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 dr' \rho(r') = \begin{cases} = 4\pi C \int_0^r (r')^{2-\alpha} dr' = \frac{4\pi C}{3-\alpha} r^{3-\alpha}, & r \leq a, \\ = e, & r \geq a. \end{cases}$$

Требование совпадения обоих выражений при  $r = a$  определит нам константу  $C$ :

$$C = e \frac{3-\alpha}{4\pi a^{3-\alpha}}, \quad \text{т. е.} \quad Q(r) = \begin{cases} = e \left(\frac{r}{a}\right)^{3-\alpha}, & r \leq a, \\ = e, & r \geq a. \end{cases}$$

Для сферически симметричного распределения заряда из второго уравнения (51.2.2) второй максвелловой пары  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$  интегрированием по шару радиуса  $r$  получается

$$4\pi \int_{r' < r} (d\mathbf{r}') \rho(r') = \int (d\mathbf{r}') \frac{d}{d\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') = \oint_{r'=r} r^2 d\vec{\theta} \mathbf{E} = 4\pi r^2 E(r),$$

т. е.  $E(r) = \frac{Q(r)}{r^2}$ . Следовательно, электростатическая энергия нашего распределения составит

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi} 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{Q^2(r)}{r^4} = \frac{e^2}{2} \left\{ \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} + \int_0^a \frac{dr}{r^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{6-2\alpha} \right\} = \\ &= \frac{e^2}{a} \frac{1}{2} \left\{ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 x^{6-2\alpha-2} dx \right\} = \frac{e^2}{a} F(\alpha) \end{aligned}$$

— первый член представляет здесь энергию электрического поля *вне* шарика и не зависит от внутреннего распределения заряда, а второй — зависящую от распределения заряда энергию внутреннего поля. Итак, электростатическая энергия действительно оказывается равной  $\frac{e^2}{a}$ , умноженному на безразмерный численный множитель  $F(\alpha)$ , зависящий от распределения заряда «внутри частицы». Интегрирование дает

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{5-2\alpha} x^{5-2\alpha} \Big|_0^1,$$

значит, для конечности  $F$  на показатель  $\alpha$  надо наложить ограничение  $\alpha < \frac{5}{2}$ , уже упоминавшееся выше. Тогда

$$F(\alpha) = \frac{3-\alpha}{5-2\alpha},$$

т. е. для допустимых значений показателя  $-\infty < \alpha < \frac{5}{2}$ , множитель  $F$  может меняться в довольно широких пределах от  $\frac{1}{2}$  до  $\infty$ . Можно

отметить, что значению  $\alpha = -\infty$  отвечает шарик, равномерно заряженный по поверхности, этой модели соответствует  $F = \frac{1}{2}$ ; равномерно заряженному по объему шару ( $\alpha = 0$ ) соответствует  $F = \frac{3}{5}$ ; значению  $\alpha = 2$ , когда одинаковый заряд содержится в каждом сферическом слое одинаковой толщины  $dr$ , соответствует  $F = 1$  и т. п.

Итак, протяженная модель электрона решает вопрос о конечности собственной энергии его электростатического поля. В релятивистской теории этой энергии  $\mathcal{E}_0$  должна отвечать масса  $m_{\text{el}} = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}$ , составляющая часть массы электрона. Чрезвычайно соблазнительной представляется та идея, что «электрическая» масса  $m_{\text{el}}$  составляет *всю* массу электрона — эту идею называют **гипотезой полевой массы**.

**14.3.2.1.** Если принять эту гипотезу, то можно — с точностью до неопределенности, вносимой структурным множителем  $F$ , — определить порядок величины  $\lambda_0$  размеров электрона. Действительно, приравнивая электростатическую энергию  $\mathcal{E}_0$  умноженной на  $c^2$  экспериментальной массе  $m$  электрона:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e^2}{\lambda_0} = mc^2,$$

получаем для  $\lambda_0$  выражение

$$\lambda_0 = \frac{e^2}{mc^2}. \quad (73)$$

Эта длина называется **классическим радиусом электрона** и составляет по современным данным

$$\lambda_0 = (2,817\,938 \pm 0,000\,007) \cdot 10^{-13} \text{ см} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (73a)$$

Накопившиеся к настоящему времени сведения об элементарных частицах дали очень большое число фактов, косвенно говорящих в пользу гипотезы полевой массы. Прежде всего, в природе существует частица — нейтрино, — отличающаяся от электрона только отсутствием электрического заряда, и ее масса близка к нулю. Затем, все элементарные частицы с массами, значительно большими электронной, способны и к иным (и при том более сильным!) взаимодействиям, кроме взаимодействия с электромагнитным полем; поэтому их большие массы естественно объясняются в рамках той же гипотезы, как происходящие от этих иных взаимодействий. (Правда, тут есть единственное исключение: в природе существует частица —  $\mu$ -мезон или мюон — которая примерно в 200 раз тяжелее электрона, но тем не менее ведет себя относительно всех взаимодействий совершенно тож-

дественно электрону; многие теоретики сохраняют надежду, что будут обнаружены взаимодействия, в которых участвуют  $\mu$ -мезоны, но не электроны.) Наконец, многие элементарные частицы объединяются в группы, члены которых различаются лишь электрическим зарядом (наиболее известный пример — группа, объединяющая протон и нейтрон) — *разности* масс членов группы, которые естественно отнести за счет энергии электромагнитного поля, оказываются того же порядка, что и масса электрона.

**14.3.1.2.** Тем не менее простейшее осуществление гипотезы полевой массы — классическая модель протяженного электрона, с которой мы только что познакомимся, — оказывается внутренне противоречивой. Противоречие обнаруживается, если кроме энергии электрического поля заряженной частицы вычислить также и импульс, который будет нести электромагнитное поле, если привести частицу в движение со скоростью  $\mathbf{v}$ . В этом вычислении можно избежать выхода за рамки электростатики и необходимости каких-либо новых гипотез о том, что случится с распределением заряда, когда весь заряд приводится в движение, если заметить, что покоящийся в какой-либо системе отсчета  $K$  заряд движется равномерно и прямолинейно в другой, движущейся относительно  $K$  со скоростью  $-\mathbf{v}$ , инерциальной системе  $K'$ , которая в силу принципа относительности физически равноправна  $K$ . В силу этого замечания чтобы найти импульс электромагнитного поля движущегося заряда, достаточно преобразовать его электростатическое поле в другую систему отсчета и проинтегрировать в ней соответствующие компоненты тензора энергии-импульса. В результате (для малых скоростей) для импульса получается выражение

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3} \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \mathbf{v}, \quad (74)$$

отличающееся множителем  $\frac{4}{3}$  от правильного выражения для импульса частицы с массой  $m = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}$ .

**14.3.2.2.** Итак, энергия и импульс электромагнитного поля, создаваемого распределением заряда, статическим и сферически симметричным в одной системе отсчета (системе покоя частицы), *не образуют* компонент 4-вектора. Физическая причина этого понятна — такое распределение заряда не будет устойчивым и, поэтому, не сможет поддерживаться более чем в начальный момент времени, если только заряд не сдерживается какими-то дополнительными силами неэлектромагнитной природы, вклад



которых в энергию и импульс не учитывается этим вычислением. Не менее существенным возражением против протяженных моделей элементарных частиц служит и то замечание, что внутри такой частицы, если она является жестким образованием, происходило бы мгновенное распространение сигналов, что означало бы, с релятивистской точки зрения, нарушение причинности. Правда, такое нарушение происходило бы в области пространственно-временных масштабов, в которой у нас нет прямой возможности экспериментальной проверки причинности, однако можно опасаться, что и такие «нарушения причинности в малом» могут сказаться на наблюдаемых эффектах, например на процессах рассеяния.

**14.3.3.** Наконец замечание, которое имеет для обсуждаемой проблемы в некотором смысле технический характер. Мы знаем теперь, что для расстояний порядка (73) (и даже много больших!) и соответствующих промежутков времени классическое описание неприменимо и следует использовать *квантовую* механику. Поэтому с количественной стороны приведенные выкладки имеют чисто исторический интерес, однако лежащая в их основе физическая идея, равно как и отмеченные принципиальные трудности, переходит в квантовую теорию без изменений. Трудность с бесконечностью собственной энергии точечной частицы взаимодействующей с (не обязательно — электромагнитным) полем остается и в квантовомеханическом рассмотрении. До сих пор предпринимаются попытки найти выход на пути, физически аналогичном введению представления о протяженных частицах, и эти попытки сталкиваются с нарушением причинности в малом (с нарушением релятивистской ковариантности научились, бороться) или (и) с появлением объектов — полей или частиц — не наблюдаемых в природе. Заметного успеха до сих пор не достигнуто, и общепринятым, ортодоксальным представлением современной теории является представление о *точечных* элементарных частицах.

**14.4.** Но что же тогда делать с входящими в сумму (72e) бесконечностями? В теории с точечными частицами разубаюют гордиев узел — грубо говоря, просто вычитают из суммы бесконечные диагональные члены и заменяют (72e) выражением

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (72e')$$

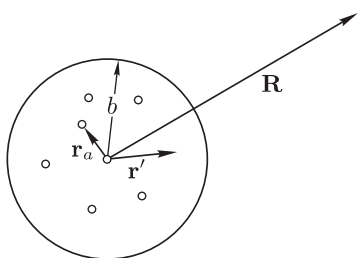
Разумеется, такая процедура вычитания двух бесконечностей с целью получить конечный результат не является слишком

хорошо определенной математической операцией, и следы допущенной вольности сказываются в некоторых выводах теории — например, попытка последовательного учета взаимодействия точечного заряда с его собственным полем приводит, даже после вычитания бесконечной собственной энергии, и появлению таких решений, в которых скорость заряда неограниченно нарастает со временем.

В последовательном для элементарных частиц квантовом рассмотрении идея, в принципе аналогичная переходу от  $(72e)$  к  $(72e')$ , была развита около 30 лет назад релятивистски инвариантным образом в виде так называемого **метода перенормировок**, который до сих пор не приводил ни к каким явным противоречиям и позволил предсказать в электродинамике элементарных частиц много тонких эффектов с совершенно поразительной точностью. Надо, однако, подчеркнуть, что, во-первых, все результаты метода перенормировок получаются только способом последовательных приближений, а проблема самого существования точных решений остается открытой, и, во-вторых, что, исключая величины типа собственной энергии из выражений для наблюдаемых величин, метод перенормировок в принципе отказывается от вычисления собственных энергий, а, значит, и от возможности объяснить упоминавшиеся выше закономерности в массах элементарных частиц за счет полевой гипотезы.

## 15. Электростатическое поле вне системы зарядов

**15.1.** Рассмотрим определяемое (71) поле системы зарядов для того случая, когда все они сосредоточены в конечной области пространства, скажем внутри некоторой сферы радиуса  $b$ , центр которой мы выберем в качестве начала отсчета радиус-векторов.



Интересоваться же мы будем полем в точках  $\mathbf{R}$ , расположенные *вне* сферы, так что радиус-векторы зарядов  $\mathbf{r}_a$  (или  $\mathbf{r}'$ , если пользоваться плотностью заряда  $\rho$ ) и точки наблюдения  $\mathbf{R}$  будут ограничены неравенствами

$$r_a < b < R \quad (\text{или } r' < b < R). \quad (75a)$$

(Мы обозначаем теперь радиус-вектор точки наблюдения  $\mathbf{R}$  большой буквой, а не малой, как в (71), чтобы подчеркнуть, что он

велик.) Специальное же обозначение для знаменателя нам не понадобится, поскольку мы сразу разложим его в ряд

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R} - r'_\alpha \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} r'_\alpha r'_\beta \frac{\partial^2}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \frac{1}{R} + \dots$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{1}{R} &= \frac{-1}{R^2} \frac{R_\alpha}{R}, \\ \frac{\partial^2}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \frac{1}{R} &= -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R^3} + R_\alpha \frac{3}{R^4} \frac{R_\beta}{R} = \frac{3R_\alpha R_\beta - \delta_{\alpha\beta} R^2}{R^5}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{R} \int dV \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{R^2} \frac{R_\alpha}{R} \int dV r'_\alpha \rho(\mathbf{r}') + \\ &+ \frac{1}{R^3} \frac{3R_\alpha R_\beta - \delta_{\alpha\beta} R^2}{R^2} \int dV \frac{1}{2} \left( r'_\alpha r'_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta} r'^2}{3} \right) \rho(\mathbf{r}') + \dots \end{aligned}$$

Здесь в третьем члене стоящий вне интеграла тензор

$$\frac{3R_\alpha R_\beta}{R^2} - \delta_{\alpha\beta}$$

имеет след, равный нулю. Поэтому и под интегралом можно оставить только бесследовый тензор, поскольку произведение бесследового тензора на единичный дает при полном свертывании нуль. Мы воспользовались этим замечанием, заменив тензор

$$r'_\alpha r'_\beta \quad \text{на} \quad r'_\alpha r'_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta} r'^2}{3}.$$

**15.2.** Таким образом явно выписанные три младших члена разложения потенциала зависят от свойств системы зарядов только через интегральные константы, называемые **моментами**:

$$Q = \int dV \rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a, \quad (75.0)$$

$$\mathbf{d} = \int dV \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \mathbf{r}_a, \quad (75.1)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int dV \left( r'_\alpha r'_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r'^2 \right) \rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \left( r_\alpha^a r_\beta^a - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r_a^2 \right). \quad (75.2)$$

Момент нулевого порядка  $Q$  есть просто полный заряд системы. Момент первого порядка  $d_\alpha$  есть 3-вектор, который называют **дипольным моментом** системы. Момент второго порядка  $D_{\alpha\beta}$

есть симметричный тензор второго ранга со следом нуль; его называют **квадрупольным моментом**.

Аналогично определяются моменты высших порядков.  $l$ -кратные производные  $\frac{1}{R}$  должны образовывать совершенно симметричный тензор  $l$ -го ранга, и при том такой, что его свертывание по любой паре индексов дает нуль (последнее — из-за того, что  $\frac{1}{R}$  удовлетворяет уравнению Лапласа) Поэтому и коэффициент при этой производной в разложении потенциала должен быть тензором той же симметрии (добавки другой симметрии дадут нуль при полном свертывании, ср. аргументацию при выводе квадрупольного момента), образованным из компонент  $r'_\alpha$ , с дальнейшим умножением на  $\rho$  и интегрированием по объему

$$d_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \int dV \mathcal{I} r_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \cdot \rho(\mathbf{r}), \quad (73, l)$$

где символом  $\mathcal{I}$  обозначена операция образования тензора должной симметрии, что достигается, как и в квадрупольном случае, вычитанием из произведения  $r_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  соответственно подобранной комбинации его следов умноженных на единичные тензоры. Мы не будем заниматься явным выписыванием этих моментов  $l$ -го порядка, которые принято называть  **$2^l$ -полями**, а ограничимся тремя замечаниями.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Поскольку совершенно симметричный тензор ранга  $l$  в  $n$ -мерном пространстве имеет  $\frac{(l+1) \dots (l+(n-1))}{(n-1)!}$  независимых компонент, следовательно в 3-мерном пространстве  $\frac{(l+1)(l+2)}{2}$ , а условие обращения в нуль при свертывании по паре индексов есть требование обращения в нуль тензора ранга  $(l-2)$ , т. е. совокупность  $\frac{l(l-1)}{2}$  условий, то  $2^l$ -поль обладает  $\frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{l(l-1)}{2} = 2l+1$  независимыми компонентами. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Найденное число независимых компонент  $2^l$ -поля совпадает с числом независимых сферических функций  $l$ -го порядка, поэтому возникает подозрение, что они должны быть связаны друг с другом. Подозрение это оправдывается: если выделить из подинтегрального выражения  $2^l$ -поля множитель  $\rho(\mathbf{r})r^l$ , то независимые компоненты остающегося после этого безразмерного тензора линейно выражаются через  $2l+1$  сферическую функцию порядка  $l$ . Проще всего это обстоятельство усматривается из следующего рассуждения. Выделенные нами в разложении  $\phi(\mathbf{R})$  в отдельные множители безразмерные тензоры, зависящие от  $\mathbf{R}$ ,

$$1; \quad \frac{R_\alpha}{R}; \quad \frac{3R_\alpha R_\beta - \delta_{\alpha\beta} R^2}{R^2}; \quad \dots$$

суть решения уравнения Лапласа, и при том зависящие от углов, а не от  $R$ ; а в классе таких решений сферические функции образуют полную систему. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 3:** Согласно своим определениям (75) мультипольные моменты не независимы от выбора начала отсчета. Легко сообразить, однако, что *первый неисчезающий момент не зависит* от этого выбора, т. е., например, для системы с нулевым полным зарядом не зависит от выбора начала отсчета дипольный момент, для систем с равными нулю зарядом и дипольным моментом — квадрупольный и т. п. ■

**15.3.** Итак, потенциал системы зарядов *вне* области, занимаемой ими, можно представить разложением:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{R}) &= \frac{Q}{R} + \frac{d\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta} \frac{3R_\alpha R_\beta - \delta_{\alpha\beta} R^2}{R^2} \frac{1}{R^3} + \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left( \frac{\partial^l}{\partial R_{\alpha_1} \dots \partial R_{\alpha_l}} \frac{1}{R} \right) \cdot d_{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \quad (75)\end{aligned}$$

которое обычно называют **разложением поля по мультиполям**.

**15.3.1.** Легко сообразить, что ряд (75) сходится для всех  $R > b$ . Таким образом потенциал всякой системы зарядов **вне ее** полностью определяется последовательностью мультипольных моментов системы, т. е. мы видим, что для фиксации потенциала *вне системы* существен не весь ход функциональной зависимости  $\rho(\mathbf{r})$ , а только значения счетного набора чисел — мультипольных моментов. Набор этот зависит от *двух* параметров — номера момента и номера компоненты в нем — в то время как распределение плотности заряда имеет *три* степени свободы: описывается функцией  $\rho$  от *трех* переменных, скажем  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Таким образом при переходе от плотности заряда к создаваемому ей потенциалу электростатического поля вне системы происходит *уменьшение числа степеней свободы*. Это обстоятельство связано, конечно, с тем, что зависимость потенциала от трех переменных  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  не произвольна, а ограничена вне системы уравнением Лапласа  $\Delta\varphi(r, \vartheta, \varphi) = 0$ , т. е. потенциал в пустоте есть — эффективно — функция только *двух* переменных, например  $\vartheta$  и  $\varphi$ .

Итак, два *разных* распределения плотности зарядов внутри системы,  $\rho_1(\mathbf{r})$  и  $\rho_2(\mathbf{r})$ , будут приводить к одному и тому же полю вне ее, если только все их мультипольные моменты совпадают. В частности, электростатическое поле произвольной системы *вне*

ее совпадает с суммой полей, создаваемых помещенными в начало отсчета *точечными* полным зарядом, дипольным моментом, квадрупольным моментом и т. д. *Внутри* системы такая эквивалентность, естественно, не может иметь места, поскольку по потенциалу (71) плотность заряда восстанавливается однозначно как  $\rho(\mathbf{R}) = \frac{\Delta\phi(\mathbf{R})}{4\pi}$ , а для ряда (75)  $\Delta\phi = 0$  всюду, кроме точки  $\mathbf{R} = 0$ . Следовательно, внутри системы, для  $R < b$ , ряд (75) *не может сходиться* к функции  $\phi(\mathbf{R})$ .

Практически интересным разложение (75) будет, как всегда в физике, только для тех  $\mathbf{R}$ , для которых ряд не только сходится, но и сходится *достаточно быстро*, так что можно ограничиться в нем одним, в крайнем случае двумя членами. Так, в частности, будет обстоять дело, если мы интересуемся *асимптотикой* потенциала при  $R \rightarrow \infty$  — тогда достаточно оставить в (75) первый не исчезающий член (напомним, что соответствующий момент не зависит от выбора начала отсчета).

**15.3.2.** Электрическое поле вне системы получается дифференцированием (75) по радиус-вектору точки наблюдения  $\mathbf{R}$ . Вычислим в качестве примера электрическое поле дипольного члена (75). Имеем последовательно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^d(\mathbf{R}) &= -\text{grad } \phi^d(\mathbf{R}) = -(\mathbf{dR}) \text{grad } \frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^3} \text{grad } (\mathbf{dR}) = \\ &= \frac{3(\mathbf{dR}) \cdot \mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}^2}{R^5}, \quad (75.1a) \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{E}^d(\mathbf{R}) = \frac{3(\mathbf{dR})\mathbf{R} - R^2\mathbf{d}}{R^5}.$$

Это выражение часто встречается в практических задачах.

**15.4.** Перейдем теперь к задаче, в некотором смысле обратной рассмотренной — пусть система зарядов сконцентрирована вблизи точки с радиус-вектором  $\mathbf{R}$  (скажем, внутри сферы радиуса  $b$ , описанной вокруг точки  $\mathbf{R}$ ), так что если написать

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_a, \quad \text{то будет} \quad |\boldsymbol{\rho}_a| < b < R \quad (76a)$$

( $\boldsymbol{\rho}_a$  — не плотность!). Если эта система находится во внешнем электрическом поле с потенциалом  $\phi^{\text{BH}}(\mathbf{r})$ , то ее потенциальная энергия в этом *внешнем поле* составит

$$U = \sum_a e_a \phi^{\text{BH}}(\mathbf{r}_a).$$

Будем теперь считать, что внешнее поле *медленно меняется* на протяжении размеров системы  $2b$ , так что можно написать:

$$\begin{aligned}\varphi^{\text{BH}}(\mathbf{r}_a) &= \varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_a) = \\ &= \varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R}) + \boldsymbol{\rho}_a \frac{d\varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R})}{d\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \left\{ \rho_\alpha^a \rho_\beta^a - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \rho_a^2 \right\} \frac{\partial^2 \varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R})}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} + \dots\end{aligned}$$

(второй член в фигурных скобках в третьем члене разложения добавлен на том основании, что внешний потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и потому его вторые производные образуют симметричный тензор *со следом нуль*). Тогда суммирование в выражении для потенциальной энергии будет распространяться только на множители при производных внешнего потенциала, т. е. опять приведет к последовательным мультипольным моментам (75), только теперь к моментам *системы, находящейся в поле*, а не системы, создающей поле; будем для определенности отмечать величины этой системы индексом 2. Итак, мы приходим для потенциальной энергии системы зарядов в медленно меняющемся внешнем поле (системы 2) к выражению:

$$U = Q_2 \varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R}) + \mathbf{d}_2 \frac{d\varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R})}{d\mathbf{R}} + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta}^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi^{\text{BH}}(\mathbf{R})}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} + \dots, \quad (76)$$

которое очень напоминает формулу (75).

**15.5.** Пусть теперь внешнее поле с потенциалом  $\varphi^{\text{BH}}$  «вблизи  $\mathbf{R}$ » само создается некоторой системой зарядов 1, расположенных «вблизи нуля», так что точка  $\mathbf{R}$  находится вне некоторой сферы, вмещающей все заряды системы 1. Тогда для этого потенциала можно будет прибегнуть к разложению (75). Тем самым мы придем к выражению для потенциальной энергии взаимодействия систем 1 и 2 в виде двойного ряда по их мультипольным моментам:

$$\begin{aligned}U_{12} &= \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_2}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{d}_1 \mathbf{R}_{12}}{R_{12}} - \frac{Q_1}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{d}_2 \mathbf{R}_{12}}{R_{12}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Q_2}{R_{12}^3} \frac{3R_\alpha R_\beta - \delta_{\alpha\beta} R_{12}^2}{R_{12}^2} D_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{Q_1 D_{\alpha\beta}^{(2)}}{R_{12}^3} \frac{3R_\alpha R_\beta - \delta_{\alpha\beta} R_{12}^2}{R_{12}^2} + \\ &+ \frac{1}{R_{12}^3} \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 R_{12}^2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{R}_{12})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^2} + O\left(\frac{1}{R_{12}^4}\right), \quad (77)\end{aligned}$$

где явно выписаны все члены вплоть до третьей обратной степени расстояния  $|\mathbf{R}_{12}| = |\mathbf{R}|$  между системами 1 и 2. Как и предыдущие, эта формула практически интересна, когда расстояние  $R_{12}$  между системами много больше размеров  $b_1$  и  $b_2$  обеих систем; тогда члены ряда быстро убывают и наибольшее значение имеет первый не исчезающий член. Из (77) видно, что если первыми не равными нулю моментами систем 1 и 2 будут  $2l_1$ -поль и  $2l_2$ -поль, то потенциальная энергия взаимодействия обеих систем будет убывать как  $1/R_{12}^{1+l_1+l_2}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Сила, действующая на систему 1 со стороны системы 2, получается дифференцированием потенциальной энергии по  $\mathbf{R}_{12}$ . Мы видим из (77), что все члены, кроме первого, дадут в эту силу и составляющие, *не направленные по  $\mathbf{R}_{12}$* . Таким образом, если материальная частица обладает кроме заряда еще и электрическими мультипольными моментами, то силы взаимодействия между такими материальными частицами не будут центральными. ■

## 16. Стационарное поле. Магнетостатика

Если создающие поле заряды движутся, т. е.  $\mathbf{j} \neq 0$ , то, вообще говоря, надо учитывать запаздывание, т. е. пользоваться общим решением (68), (69). Существует, однако, один важный частный случай, когда, несмотря на движение зарядов, запаздывание учитывать не надо — случай *стационарного* поля.

**16.1.** Пусть заряды, взаимодействующие с полем, совершают *финитное* движение. Тогда все координаты (и скорости) зарядов остаются все время конечными, и имеет смысл образовать из каждой динамической переменной  $l(t)$  **среднее по времени**

$$\bar{l} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt l(t).$$

Нам будет важно то их свойство, что среднее полной производной по времени любой динамической переменной равно нулю. Действительно,

$$\frac{d\bar{l}(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \frac{dl(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [l(T) - l(-T)] = 0$$

в силу ограниченности  $l(T)$  и  $l(-T)$ .



Проведем усреднение по времени уравнений Максвелла. Первой паре уравнений равносильны выражения полей через потенциалы; при их усреднении по времени получается

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}}; \quad \bar{\mathbf{E}} = -\text{grad } \bar{\varphi} - \frac{1}{c} \frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dt} = -\text{grad } \bar{\varphi}, \quad (42.1, 2)$$

т. е. магнитное поле выражается только через векторный, а электрическое — только через скалярный потенциал. Аналогично, во второй паре уравнений Максвелла (51.2.1,2) при усреднении по времени пропадает член с  $\frac{d\bar{\mathbf{E}}}{dt}$ , и мы получаем для усредненных полей

$$\text{div } \bar{\mathbf{E}} = 4\pi\bar{\rho}; \quad \text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}. \quad (51.2.1, 2)$$

В условии Лоренца (58) при усреднении по времени пропадает член с  $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\text{div } \bar{\mathbf{A}} = 0, \quad (58)$$

и, наконец, в уравнении непрерывности (50.1.1) — производная по времени от плотности заряда —

$$\text{div } \bar{\mathbf{j}} = 0. \quad (50.1.1)$$

Если рассмотреть теперь оставшиеся уравнения для усредненных по времени величин, то легко заметить, что все характеризующие электромагнитное поле величины распались на две группы, не связанные более между собой уравнениями. В первую группу входят скалярный потенциал, электрическое поле и плотность заряда; они связаны уравнениями

$$\bar{\mathbf{E}} = -\text{grad } \bar{\varphi}; \quad \text{div } \bar{\mathbf{E}} = 4\pi\bar{\rho}, \quad (78)$$

эквивалентными, как легко понять, уравнениями электростатики, изучавшимся в двух предыдущих параграфах в интегральной форме.

Вторую группу образуют векторный потенциал, магнитное поле и плотность тока; для них остается система уравнений

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}}; \quad \text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}} \quad \text{и} \quad \text{div } \bar{\mathbf{A}} = 0; \quad \text{div } \bar{\mathbf{j}} = 0, \quad (79)$$

которую называют уравнениями **магнестатики**.

**16.2.** Итак, в стационарном случае средние по времени от единого электромагнитного поля разбиваются на два отдель-

ных поля — электростатическое и магнетостатическое<sup>1)</sup>. Исторически именно этот случай очень долгое время единственно составлял предмет опытов (или, скорее, наблюдений); поэтому создалось представление о существовании двух самостоятельных областей физических явлений — электричества и магнетизма — представление, следы которого можно и до сих пор заметить в построении школьных программ.

Как мы уже видели, описываемая уравнениями (78) электростатика осуществляется и для *не усредненного по времени* поля, если все создающие поле заряды неподвижны  $\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{v}_a = 0$ . Стационарный случай не дает здесь ничего нового.

Напротив, описываемая уравнениями (79) магнетостатика может реализоваться в классической (в смысле — неквантовой) микроскопической электродинамике, которой мы занимаемся, *только для временных средних*, так как не усредненный по времени ток (49) не может не зависеть от времени.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** В *макроскопической* электродинамике (получающейся из микроскопической усреднением всех величин по объемам, включающим много атомов и молекул), которая может пренебрегать дискретным строением вещества, не зависящие от времени токи могут существовать. Соответственно в ней может осуществляться и магнетостатика не усредненных по времени полей и токов. Любопытным образом случай «статической магнетостатики» оказывается реализуемым и в «противоположном» предельном случае *квантового* рассмотрения микрочастиц — в квантовой механике не зависящие от времени токи опять могут осуществляться. ■

**16.3.** Общее решение уравнений магнетостатики (79) проще всего получить, усредняя (68) по времени<sup>2)</sup>:

$$\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') \frac{\overline{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}. \quad (80)$$

<sup>1)</sup> Следует подчеркнуть, что разбиение на электрические и магнитные величины происходит лишь в той мере, в какой мы рассматриваем поля, создаваемые заданными распределениями и движениями зарядов. В полной задаче, включающей рассмотрение движения зарядов под действием сил электромагнитного поля, такого разделения *не происходит*; средние по времени плотность заряда и ток не определяются *только* средними по времени полями.

<sup>2)</sup> Как и в электростатике, добавлять к (68) решение однородного уравнения не надо. Впрочем легко видеть, что такое решение (64) при усреднении исчезает — при усреднении экспонент остается лишь член с нулевой частотой и нулевым волновым вектором, не несущий ни энергии, ни импульса.

**16.4.1.** Изучим, как мы то сделали в предыдущем параграфе для электростатики, более подробно структуру этого решения вне области, занятой зарядами и токами.

Записывая опять

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R} + \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}'}{R^3} + \dots,$$

получим из (80)

$$\overline{\mathbf{A}(\mathbf{R})} = \frac{1}{cR} \int (d\mathbf{r}') \overline{\mathbf{j}(\mathbf{r}')} + \frac{R_{\beta}}{cR^3} \int (d\mathbf{r}') r'_{\beta} \overline{\mathbf{j}(\mathbf{r}')} + \dots$$

**16.4.1.1.** Для дальнейших преобразований этого разложения чрезвычайно существенно, что (см. (79.4)) дивергенция тока в стационарном случае обращается в нуль; из этого следует последовательность тождеств, из которых сейчас нам понадобятся два. Дифференцируя по  $r'_{\beta}$ , произведение  $r'_{\alpha} j'_{\beta}$  (мы положили здесь и далее  $\overline{\mathbf{j}(\mathbf{r}')} = \mathbf{j}'$ ), получаем

$$\frac{\partial}{\partial r'_{\beta}} (r'_{\alpha} j'_{\beta}) = j'_{\alpha} + r'_{\alpha} \operatorname{div}' \mathbf{j}' = j'_{\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{j}' = \frac{\partial}{\partial r'_{\beta}} (\mathbf{r}' j'_{\beta}). \quad (\alpha)$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial r'_{\gamma}} (r'_{\alpha} r'_{\beta} j'_{\gamma}) = r'_{\beta} j'_{\alpha} + r'_{\alpha} j'_{\beta} + r'_{\alpha} r'_{\beta} \operatorname{div}' \mathbf{j}', \quad (\beta)$$

т. е.

$$r'_{\beta} j'_{\alpha} = -r'_{\beta} j'_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial r'_{\gamma}} (r'_{\alpha} r'_{\beta} j'_{\gamma}).$$

Поэтому, если разбить  $r'_{\beta} j'_{\alpha}$  на два члена и оставить один из них в первоначальном виде, а другой преобразовать по только что полученному тождеству, то окажется, что

$$r'_{\beta} j'_{\alpha} = \frac{1}{2} r'_{\beta} j'_{\alpha} - \frac{1}{2} r'_{\alpha} j'_{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r'_{\gamma}} (r'_{\alpha} r'_{\beta} j'_{\gamma}). \quad (\gamma)$$

Тождества  $(\alpha)$  и  $(\gamma)$  понадобятся ниже для преобразования выражений, стоящих под знаком интегрирования по  $\mathbf{r}'$ ; поэтому полные производные в их правых частях можно будет проинтегрировать по теореме Гаусса, преобразуя их в интегралы по поверхности, охватывающей все заряды и токи (например, по сфере радиуса  $b$ ), интегралы, равные нулю, поскольку токов на этой поверхности нет.

**16.4.2.** Итак, нулевой член в выписанном разложении вектор-потенциала равен нулю, а из первого остается

$$\overline{A_{\alpha}^{(1)}}(\mathbf{R}) = \frac{R_{\beta}}{2cR^3} \int (dr') (r'_{\beta} j'_{\alpha} - r'_{\alpha} j'_{\beta}).$$

**16.4.3.** Выполним здесь антисимметризацию подинтегрального выражения въявь:

$$r'_{\beta} j'_{\alpha} - r'_{\alpha} j'_{\beta} = e_{\beta\alpha\mu} e_{\gamma\delta\mu} r'_{\gamma} j'_{\delta} = e_{\beta\alpha\mu} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}]_{\mu}.$$

Поэтому, если определить **магнитный момент** системы стационарных токов как

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int dV [\mathbf{r} \cdot \overline{\mathbf{j}(\mathbf{r})}], \quad \text{магнитный момент,} \quad (81.1)$$

то первый (и в отличие от электрического поля — главный!) член разложения векторного потенциала вне области, занимаемой токами, запишется в виде

$$\overline{A^{(1)}}(R) = \frac{[\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (81^{(1)})$$

имеющем, хотя и неполную, аналогию с видом соответствующего члена в (75).

Оказывается, что аналогия становится полной, если перейти от вектор-потенциала к магнитному полю. В самом деле,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{H}} &= \text{rot } \overline{\mathbf{A}} = \text{rot } \frac{[\mathbf{m}\mathbf{R}]}{R^3} = \left[ \text{grad } \frac{1}{R^3} \cdot [\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}] \right] + \\ &+ \frac{1}{R^3} \left( \mathbf{m} \text{ div } \mathbf{R} - \left( \mathbf{m} \frac{d}{d\mathbf{R}} \right) \mathbf{R} \right) = \frac{-3}{R^5} [\mathbf{R} \cdot [\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}]] + \frac{\mathbf{m}}{R^3} (3 - 1) = \\ &= \frac{-3\mathbf{R}^2 \mathbf{m} + 3\mathbf{R} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}) + 2R^2 \mathbf{m}}{R^5}, \end{aligned}$$

то есть

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{m}) - \mathbf{R}^2 \mathbf{m}}{R^5}, \quad (81.^{(1)}a)$$

— что уже в точности совпадает с выражением дипольной части электрического поля (75.1a) через электрический дипольный момент.

**16.5.** Определение высших магнитных моментов, через которые записываются старшие члены разложения поля, опирается на эту только что вскрытую нами тесную аналогию магнитного и электрического случаев.

**16.5.1.** Разложим, как и при построении высших *электрических мультипольных* моментов, в выражении (80) для векторов-потенциала функцию Грина  $\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}$  в ряд по степеням  $\frac{r'}{R}$ :

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left( \frac{\partial^l}{\partial R_{\alpha_1} \dots \partial R_{\alpha_l}} \frac{1}{R} \right) r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}.$$

Соответствующий ряд для вектор-потенциала запишется тогда как

$$\overline{A_{\sigma}(\mathbf{R})} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \overline{j_{\sigma}},$$

где мы обозначили ради краткости совершенно симметричные тензоры  $l$ -го ранга со следом нуль:

$$\frac{\partial^l}{\partial R_{\alpha_1} \dots \partial R_{\alpha_l}} \frac{1}{R} \equiv R_{\alpha_1 \dots \alpha_l}.$$

**16.5.1.1.** Теперь настало время прибегнуть к старшим тождествам, следующим из равенства нулю дивергенции тока. Вычисляя

$$\frac{\partial}{\partial r'_{\beta}} (r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} r'_{\sigma} \overline{j'_{\beta}}) = r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \overline{j'_{\sigma}} + \sum_{i=1}^l \underbrace{r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}}_{\text{без } i} r'_{\sigma} \overline{j'_{\alpha_i}},$$

получаем, поскольку полную производную можно обратить в нуль с помощью теоремы Гаусса, что *под интегралом* выполняются тождества

$$r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \overline{j'_{\sigma}} = - \sum_{i=1}^l \underbrace{r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}}_{\text{без } i} r'_{\sigma} \overline{j'_{\alpha_i}} = -l r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-1}} r'_{\sigma} \overline{j'_{\alpha_l}}, \quad (l)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем обстоятельством, что все рассматриваемое выражение будет далее свертываться с симметричным тензором  $R_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ , почему все равно существенна только его симметричная часть.

Далее, как и при получении дипольного магнитного момента, нам будет удобно разбить  $r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \overline{j'_{\sigma}}$  на две части с неопределенными пока весами  $(1 - \lambda)$  и  $\lambda$ , и, оставив первую из них неприкосновенной, преобразовать вторую с помощью (l), т. е. написать

$$r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \overline{j'_{\sigma}} = (1 - \lambda) r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \overline{j'_{\sigma}} - \lambda r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-1}} r'_{\sigma} \overline{j'_{\alpha_l}}.$$

Произвольный множитель  $\lambda$  мы выберем теперь так, чтобы правая часть оказалась бы антисимметричной в  $\alpha_l$  и  $\sigma$ , т. е. потребуем, чтобы было

$$1 - \lambda = \lambda; \quad \lambda = \frac{1}{l+1}; \quad 1 - \lambda = \frac{l}{l+1}.$$

Тем самым мы приходим к тому выводу, что в подинтегральных выражениях в разложении вектор-потенциала можно сделать замены

$$\begin{aligned} r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \bar{j}'_{\sigma} &\Rightarrow \frac{l}{l+1} r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-1}} (r'_{\alpha_l} \bar{j}'_{\sigma} - r'_{\sigma} \bar{j}'_{\alpha_l}) = \\ &= \frac{l}{l+1} r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-1}} e_{\alpha_l \sigma \tau} e_{\chi \varphi \tau} r'_{\chi} \bar{j}'_{\varphi}. \end{aligned}$$

**16.5.2.** Итак, эксплуатируя вытекающие из равенства нулю дивергенции тока тождества, можно преобразовать разложение вектор-потенциала к форме

$$\overline{A_{\sigma}(\mathbf{R})} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{l! (l+1)} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-1}} e_{\alpha_l \sigma \tau} e_{\tau \chi \varphi} r'_{\chi} \bar{j}'_{\varphi}.$$

Чтобы вскрыть аналогию этого выражения с соответствующим электростатическим разложением, запишем его, как то мы уже делали для первого члена, не для вектор-потенциала, а для магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Имеем

$$\overline{H_{\mu}} = e_{\mu \nu \sigma} \frac{\partial \overline{A_{\sigma}(\mathbf{R})}}{\partial R_{\nu}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!} R_{\nu \alpha_1 \dots \alpha_l} e_{\mu \nu \sigma} e_{\alpha_l \sigma \tau} e_{\tau \chi \varphi} \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-1}} r'_{\chi} \bar{j}'_{\varphi}.$$

Но  $e_{\mu \nu \sigma} e_{\alpha_l \sigma \tau} = -\delta_{\mu \alpha_l} \delta_{\nu \tau} + \delta_{\mu \tau} \delta_{\nu \alpha_l}$  и второй член справа даст нуль при умножении на (бесследовый!)  $R_{\nu \alpha_1 \dots \alpha_l}$ . Поэтому все тензорные множители перед интегралом дают

$$-R_{\nu \alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \mu} e_{\nu \chi \varphi} = -\frac{\partial}{\partial R_{\mu}} R_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \nu} e_{\nu \chi \varphi}.$$

**16.5.3.** Но это значит, что мы представили магнитное поле  $\overline{\mathbf{H}}$ , которое было определено как *ротор* векторного потенциала, в форме *градиента* некоторой скалярной функции точки  $\varphi^m(\mathbf{R})$ , т.е. можем написать

$$\overline{\mathbf{H}(\mathbf{R})} = -\text{grad } \varphi^m(\mathbf{R}), \quad (79.5)$$

где скалярная функция  $\varphi^m(\mathbf{R})$  представляется выражением

$$\varphi^m(\mathbf{R}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') \underbrace{r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}}_{\text{без } i} ([\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}'])_{\alpha_i},$$

в записи которого мы восстановили явную симметрию интеграла в индексах  $\alpha_1 \dots \alpha_l$ . Эту симметрию можно сделать еще очевиднее, если заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \underbrace{r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}}_{\text{без } i} [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}']_{\alpha_i} &= [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}']_{\mu} \frac{\partial}{\partial r'_{\mu}} (r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial r'_{\mu}} \left( [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}']_{\mu} \cdot r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \right) - r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \cdot \text{div } [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}'], \end{aligned}$$

т. е. что *под интегралом*

$$\sum_{i=1}^l \underbrace{r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}}_{\text{без } i} ([\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}'])_{\alpha_i} = -r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \cdot \operatorname{div} [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}'] .$$

Поэтому:

$$\Phi^m(\mathbf{R}) = - \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^l}{(l+1)!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \frac{1}{c} \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \cdot \operatorname{div} [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}'] .$$

Найденная новая форма для  $\bar{\mathbf{H}}$  теперь уже *совершенно аналогична* представлению электрического поля через градиент скалярного потенциала  $\Phi$ . Функция  $\Phi^m$  называется **скалярным магнитным потенциалом**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Подчеркнем, что описание магнитного поля с помощью скалярного магнитного потенциала возможно только в стационарном случае и только *вне области, занятой зарядами и токами*. При этом, если свободная от зарядов область *неодносвязна* (в наших разложениях это невозможно, но при использовании точных выражений (80), (79.1) для поля такая возможность может встретиться), то скалярный магнитный потенциал, вообще говоря, оказывается *бесконечнозначным*, в соответствии с тем, что *во всем пространстве* «силовые линии» безисточникового ( $\operatorname{div} \bar{\mathbf{H}} = 0$ ) магнитного поля всегда замкнуты. ■

Сама возможность представить магнитное поле в области, где нет токов, во второй форме (79.5) объясняется, конечно, тем, что в такой области одновременно и  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  (условие существования векторного потенциала) и  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  (условие существования скалярного потенциала).

**16.5.4.** Теперь ясно, что в поисках точной аналогии магнестатического и электростатического разложений надо сравнить только что выписанное разложение для скалярного магнитного потенциала  $\Phi^m$  с полученным в предыдущем параграфе разложением (75) электростатического потенциала. Эти разложения действительно оказываются совершенно аналогичными, если на месте электрических мультипольных моментов

$$d_{\alpha_1 \dots \alpha_l} : \quad d_{P(\alpha_1 \dots \alpha_l)} = d_{\alpha_1 \dots \alpha_l} ; \quad \delta_{\alpha_i \alpha_j} d_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = 0$$

поставить интегральные характеристики распределения токов системы

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} &= \frac{-1}{(l+1)c} \int (d\mathbf{r}') \mathcal{J}'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \cdot \operatorname{div} [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}'] \equiv \\ &\equiv \frac{-1}{(l+1)c} \int (d\mathbf{r}') \sum_{i=1}^l \mathcal{J}'_{\alpha_1} \dots \underbrace{r'_{\alpha_l}}_{\text{без } i} [\mathbf{r}' \cdot \bar{\mathbf{j}}']_{\alpha_i} , \end{aligned}$$

называемые **магнитными моментами  $l$ -го порядка** или **магнитными  $2^l$ -полями**. В силу бесследовости тензоров  $R_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  магнитные моменты всегда можно определять удовлетворяющими тому же свойству; как и в электрическом случае, этого можно достичь, вычитая из подинтегрального выражения в (81.1) некоторую линейную комбинацию его следов, умноженных на единичные тензоры. Мы опять не будем формулировать эту операцию явно, а просто укажем на нее символом  $\mathcal{J}$ .

**16.5.5.** С помощью введенного понятия магнитных моментов выражение для скалярного магнитного потенциала записывается в виде

$$\varphi^m(\mathbf{R}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \quad (81.ф)$$

уже совершенно тождественном электростатическому разложению (75): единственное отличие состоит в том, что в (81.ф) суммирование начинается не с нуля, а с единицы, в соответствии с тем, что аналогичный электрическому заряду магнитный момент нулевого порядка тождественно равен нулю.

**16.6. ЗАМЕЧАНИЕ:** В трехмерном пространстве векторное поле, скажем  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , имеет *три* компоненты:  $B_x(\mathbf{r})$ ,  $B_y(\mathbf{r})$  и  $B_z(\mathbf{r})$ . Поэтому естественно ожидать, что такое поле можно фиксировать заданием трех *инвариантных* функций точки, т. е. трех скалярных полей.

Действительно, оказывается, что произвольное векторное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  полностью определяется тремя скалярными полями <sup>1)</sup>

$$\Phi_0(\mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r});$$

$$\Phi_1(\mathbf{B}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \Phi_2(\mathbf{B}) = \operatorname{div} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}] = -\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

в том смысле, что всякое векторное поле, для которого все эти три инвариантные функции тождественно равны нулю, само есть тождественный нуль.

Для того случая, когда векторным полем является магнетостатическое поле усредненного по времени тока,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \overline{\mathbf{j}(\mathbf{r})}$ , первая инвариантная функция  $\Phi_0(\mathbf{r}, [\overline{\mathbf{j}}])$  равна нулю тождественно. Найденная нами форма (81.1) для магнитных моментов показывает, что магнетостатическое поле *вне* системы стационарных токов зависит не от всего векторного поля  $\overline{\mathbf{j}(\mathbf{r})}$ , а только от *одного* из двух фиксирующих такое поле скалярных полей, от

$$\Phi_2(\mathbf{j}) = \operatorname{div} [\mathbf{r} \cdot \overline{\mathbf{j}}] = -\mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{j}},$$

<sup>1)</sup> Здесь  $\Phi_i$  суть функции  $\mathbf{r}$  и функционалы от  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ .



в то время как значение второго инварианта

$$\Phi_1(\mathbf{j}) = \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{j}}$$

никак не сказывается на магнитном поле вне системы. Итак, если для электростатического поля вне системы были, грубо говоря, существенны только две степени свободы из *трех*, которыми обладала функция  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  распределения зарядов, то для магнестатического поля опять существенны только *две* степени свободы, но теперь из *шести*, присущих стационарному распределению токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  с  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Иными словами, если распределение электрических зарядов сохраняло при, фиксированном внешнем поле *одну* степень свободы, то распределение стационарных токов сохраняет при фиксированном внешнем магнитном поле целых *четыре* степени свободы. В частности, никак не сказывается на внешнем магнитном поле системы описываемое вторым инвариантом  $\Phi_1(\mathbf{j}) = \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{j}}$  распределение радиальных составляющих тока.

Поэтому отсутствие внешнего магнитного поля у какой-либо системы еще в меньшей степени, чем в электростатике, может служить указанием на отсутствие внутри системы токов  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ . Простейшим «макроскопическим» примером служит тороидальный соленоид, все магнитное поле которого сосредоточено внутри тора. ■

**16.5.6.** Конечно, «отнормированные» по скалярному магнитному потенциалу магнитные моменты можно ввести теперь и в разложение векторного потенциала. Мы получим тогда

$$\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{R}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l} e_{\sigma \tau \alpha_l} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \tau}. \quad (81.A)$$

Именно этим выражением и пользуются обычно в магнестатике в качестве основного; однако без промежуточного обращения к скалярному потенциалу рациональные определения магнитных мультиполей было бы трудно установить.

**16.5.7.** Выражение для магнитного поля можно получить теперь, или вычисляя  $(-\text{grad})$  от (81.ф), или ротор от (81.A). В первом случае получаем сразу

$$\bar{H}_{\beta}(\mathbf{R}) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{\partial R_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\partial R_{\beta}} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l \beta} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l},$$

во втором же дифференцирование дает

$$\bar{H}_{\beta}(R) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (R_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_l} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \beta} - R_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-1} \beta \alpha_l} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}),$$

что сводится к предыдущему в силу симметрии и «бесследовости»  $R_{\alpha_1 \dots \alpha_{l+1}}$ . Итак,

$$\bar{H}_\beta(\mathbf{R}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l!} R_{\alpha_1 \dots \alpha_l \beta} \mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}. \quad (81.H)$$

Естественно, что относительно сходимости разложений (81) можно буквально повторить то же самое, что говорилось относительно сходимости разложения (75) в электростатике. Физически опять, конечно, интересно разложение в той области, где оно сходится быстро, так что можно удовлетвориться первым неисчезающим членом — в большинстве случаев дипольным членом (81<sup>(1)</sup>).

**16.7.** Перейдем теперь, опять следуя примеру электростатики, к рассмотрению «обратной» задачи: найдем *энергию* системы стационарно движущихся зарядов (системы 2) в медленно меняющемся в пространстве внешнем магнитном поле.

**16.7.1.** Для одной частицы функция Гамильтона во внешнем электромагнитном поле имеет вид (56)

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi.$$

Будем считать здесь внешнее поле малым, так что можно будет оставить только первую степень  $\mathbf{A}$ .

Тогда

$$\mathcal{H} \approx \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P^2 - 2c^2 \frac{e}{c} \mathbf{P} \mathbf{A}} + e\varphi \approx \mathcal{H}_0 - \frac{e}{c} \frac{c^2 \mathbf{P} \mathbf{A}}{\mathcal{H}_0} + e\varphi.$$

Но с той же точностью,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{2c^2 \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)}{2(\mathcal{H} - e\varphi)} \approx \frac{c^2 \mathbf{P}}{\mathcal{H}_0}.$$

Значит,

$$\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_0 - \underbrace{\frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}} + e\varphi.$$

Второй, подчеркнутый, член здесь и есть энергия взаимодействия заряженной частицы с внешним магнитным полем.

**16.7.2.** Для *среднего по времени* значения этой дополнительной энергии для всей системы 2 мы получим, суммируя по частицам,

$$\bar{U}_{\mathbf{H}} = -\frac{1}{c} \sum e_a \mathbf{v}_a \mathbf{A}(\mathbf{r}_a) = -\frac{1}{c} \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int dV \overline{\mathbf{j}(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{A}(\mathbf{r})}.$$

Здесь мы прибегли к тому допущению, что движение зарядов в системе 2 и изменение со временем внешнего магнитного поля происходят *совершенно несогласованно*, так что среднее по времени от произведения  $\mathbf{j}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , будет равняться произведению средних значений тока и потенциала. О таком допущении говорят как о допущении *некогерентности* тока и потенциала. Если только само движение зарядов не определяется существенно внешним полем (ср. замечания в конце § 13), то допущение о некогерентности выполняются очень хорошо.

**16.7.3.** Как и в электростатическом случае, будем считать, что все заряды системы 2 постоянно сконцентрированы вблизи точки с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , так что (буквальное повторение)

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_\alpha; \quad |\boldsymbol{\rho}_\alpha| < b < R. \quad (76a)$$

Поэтому для векторного потенциала медленно меняющегося внешнего поля можно будет написать, ограничиваясь лишь двумя членами разложения,

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = A_\alpha(R) + \rho_\beta \frac{\partial A_\alpha(\mathbf{R})}{\partial R_\beta}.$$

Подставляя это разложение в выражение для магнитной энергии и принимая, что в описании распределения токов системы 2 начало отсчета принято в точке с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , получим

$$\bar{U}_H = -\frac{1}{c} \overline{\mathbf{A}(\mathbf{R})} \int (d\boldsymbol{\rho}) \bar{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{\partial \overline{A_\alpha(\mathbf{R})}}{\partial R_\beta} \frac{1}{c} \int (d\boldsymbol{\rho}) \rho_\beta \bar{j}_\alpha.$$

С помощью тождеств  $(\alpha)$  и  $(\gamma)$  первый интеграл здесь обращается в нуль применением теоремы Гаусса, а второй сводится к магнитному моменту системы 2:

$$\bar{U}_H = -\frac{\partial \overline{A_\alpha(\mathbf{R})}}{\partial R_\beta} e_{\beta\alpha\mu} \mathbf{m}_\mu^{(2)} = -\overline{H_\mu(\mathbf{R})} \mathbf{m}_\mu^{(2)}.$$

Итак, энергия взаимодействия системы зарядов с медленно меняющимся внешним магнитным полем составляет в первом приближении

$$\bar{U}_H = -\overline{\mathbf{H}(\mathbf{R})} \cdot \mathbf{m} \quad (82)$$

— выражение, совершенно тождественное дипольному члену соответствующей электростатической формулы (76).

**16.8.** Теперь мы в состоянии выписать дипольный член (самый важный) и для энергии магнитного взаимодействия двух систем 1 и 2:

$$U_{12} = \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2) R_{12}^2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}_{12})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{R}_{12})}{R_{12}^5} \quad (83)$$

— он опять совершенно подобен члену взаимодействия двух электрических диполей в (77).

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Любопытно сравнить относительную силу электростатического (77) и магнетостатического (83) взаимодействия двух пространственно ограниченных систем зарядов. Вообще говоря, магнитное взаимодействие должно быть гораздо слабее электрического: прежде всего, в (83) вовсе отсутствует главный в (77) зарядовый член, это приводит к ослаблению взаимодействия в отношении  $\left(\frac{b}{R}\right)^2$ , где  $b$  — размеры систем, а  $R$  — расстояние между ними. Затем в определение магнитного момента входит дополнительный (сравнительно с электрическим диполем) множитель  $\frac{v}{c}$ , где  $v$  — порядок скоростей зарядов системы, — это ведет к уменьшению энергии взаимодействия в отношении  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ . Для всех обычных движений — как макроскопических, так и внутриатомных — отношение  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  очень мало, порядка  $10^{-4}$  для атомных электронов. В результате магнитное взаимодействие должно было бы составлять лишь ничтожную поправку к электростатическому.

Повседневный опыт общения с электротехникой учит нас прямо противоположному — магнитные взаимодействия оказываются достаточно сильными, чтобы на их использовании жидилась вся электротехника сильных токов, в то время как электростатическое притяжение проявляет себя лишь в лабораторных демонстрациях с «электрической машиной» да в том, что в современных пересушенных помещениях синтетические ткани, а иногда даже и листы бумаги слипаются друг с другом. В чем же тут дело?

Объяснение этого кажущегося парадокса лежит в невероятной огромности числа Авогадро, выражающего количество молекул во всяком макроскопическом теле. Поскольку всякая молекула содержит по меньшей мере десятки или сотни заряженных частиц, то столь же невероятно велики и полные положительный и отрицательный заряды каждого макроскопического тела. Но в состав молекул входят положительные и отрицательные

заряды в равном количестве, поэтому огромные положительные и отрицательные заряды макроскопического тела всегда скомпенсированы, причем с такой тщательностью, что не остается и некомпенсированных мультипольных моментов.

Когда мы пытаемся с помощью каких-либо воздействий нарушить эту компенсацию, то такое нарушение удастся провести лишь в ничтожной мере — в «заряженном» с макроскопической точки зрения теле избыток зарядов одного знака составляет ничтожную долю суммарного заряда. Современными средствами мы просто не умеем макроскопически разделить заметную часть содержащихся в веществе зарядов.

Напротив, привести в макроскопический порядок магнитные моменты если не всех, то заметной доли внутримолекулярных движений удастся сравнительно легко — существует специальный класс веществ — ферромагнетики — в которых заметная макроскопическая ориентация магнитных моментов молекул достигается воздействием уже сравнительно слабого внешнего поля.

Итак, макроскопические магнитные силы оказываются сильнее электрических только за счет того, что для них мы умеем поднимать на макроуровень большую часть того «запаса», что хранится в «молекулярном подвале». ■

## 17. Излучение электромагнитного поля

**17.1.1.** Вернемся теперь снова к общему случаю, когда решение уравнений поля представляется запаздывающими потенциалами (68). Как и в двух последних разделах, будем специально интересоваться полем на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы зарядов, и, соответственно, использовать введенные в § 15 обозначения, т. е. писать  $\mathbf{R}$  вместо  $\mathbf{r}$  (значит, 4-точка  $x$  будет теперь иметь координаты

$$x = \{\mathbf{R}, ict\})$$

и  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$  вместо  $\mathbf{R}$ . В этих обозначениях (68) запишется как

$$A_i(x) = \frac{1}{c} \int \frac{(d\mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} j_i \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right). \quad (68)$$

Далее, мы опять можем написать

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}'| = R - \mathbf{r}' \frac{\partial R}{\partial \mathbf{R}} + \dots = R - \mathbf{r}' \frac{\mathbf{R}}{R} + \dots = R - \mathbf{r}' \mathbf{n} + \dots,$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ .

В дальнейшем использовании этого разложения в применении к запаздывающим потенциалам (68) возникает, однако, существенно новый момент. Дело в том, что  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$  входит в (68) *дважды*: в знаменатель и в выражение для запаздывающего времени. Разложение  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$  в знаменателе ведет к совершенно таким же результатам, что и в рассмотренных статическом и стационарном случаях — последовательные члены получают лишние степени  $\frac{r'}{R} \sim \frac{b}{R}$  и при  $R \rightarrow \infty$  не только стремятся к нулю, но и становятся исчезающе малыми сравнительно с главным членом порядка  $\frac{1}{R}$ .

**17.1.2.** С разложением запаздывающего времени дело обстоит гораздо более тонко. Основным членом в нем является на первый взгляд  $\left(-\frac{R}{c}\right)$ , для растущих  $R$  он стремится к бесконечности. Хитрость состоит однако в том, что для системы зарядов, совершающих финитное движение в конечной области пространства, поле которой мы рассматриваем, зависимость  $\mathbf{j}$  от времени обязательно имеет периодический или приближенно периодический характер, поэтому существуют только изменения времени «по модулю периода», и член  $-\frac{R}{c}$ , сколь бы велико ни было  $R$ , не будет эффективно большим, чем характерный период системы  $T$ . Если выделить в аргументе тока множитель  $\frac{1}{c}$

$$j_i \left( \underbrace{\frac{1}{c} \left[ (ct - R) \right]}_{\sim \lambda} + \underbrace{\mathbf{r}' \mathbf{n}}_{\sim b} + \underbrace{b \mathcal{O} \left( \frac{b}{R} \right)}_{\sim b \cdot \frac{b}{R}} \right),$$

то роль отдельных членов в нем можно охарактеризовать следующим образом. Главным членом всегда будет сумма  $(ct - \mathbf{R})$ , но эффективно она будет всегда лишь порядка  $\lambda$ , длины излучаемых системой волн. Следующий член  $\mathbf{r}' \mathbf{n}$  будет порядка размеров  $b$  системы. Поэтому взаимная величина двух первых членов будет определяться совсем не значением  $R$ , а относительной величиной *размеров системы и длины излучаемых ею волн* <sup>1)</sup>. Наконец, все

<sup>1)</sup> Если движение зарядов системы достаточно сложно, так что его спектральное разложение включает сильно различающиеся частоты, то может случиться, что для одних излучаемых волн главным будет первый член, а для других — второй.

старшие члены будут порядка размеров системы, умноженных минимум на одну степень отношения  $\frac{b}{R}$ .

Итак, если мы интересуемся только асимптотикой создаваемого системой зарядов электромагнитного поля, т.е. только членами, убывающими по мере роста  $R$  медленнее всего, как  $\frac{1}{R}$  (ниже мы покажем, что для системы *движущихся* зарядов члены такого порядка никогда не обращаются в нуль), то мы должны сохранить в разложении  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$  только *один* член в знаменателе, но *два* члена в аргументе 4-тока, т.е. для векторного потенциала асимптотическое выражение будет иметь вид

$$R \gg b: \quad \mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \int (d\mathbf{r}') \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right), \quad \tilde{t} = t - \frac{R}{c}. \quad (84)$$

Совершенно аналогично будет выглядеть и асимптотика для  $\phi$ .

**17.1.3.** Самое интересное обстоятельство выясняется, однако, если мы начнем дифференцировать асимптотические потенциалы, чтобы получить поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В статическом и стационарном случае мы могли дифференцировать только знаменатель аналогичного (84) выражения, и при этом возникали дополнительные степени  $\frac{1}{R}$ , т.е. *поля убывали быстрее потенциалов*.

В выражении (84)  $\mathbf{R}$  входит не только в знаменатель, но и в аргумент тока. При дифференцировании знаменателя возникает дополнительный множитель  $\frac{1}{R}$ , но при дифференцировании тока

$$\frac{\partial \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right)}{\partial R_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial R_\alpha} = -\frac{R_\alpha}{cR} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{n_\alpha}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \tilde{t}},$$

значит,

$$\frac{\partial j}{\partial R} \sim \frac{1}{c} \frac{\partial j}{\partial \tilde{t}} \sim \frac{1}{Tc} j \sim \frac{1}{\lambda} j,$$

т.е. возникает не  $\frac{1}{R}$ , а  $\frac{1}{\lambda}$ ! Поэтому на расстояниях  $R \gg \lambda$  главными членами в производных потенциалов окажутся те, в которых дифференцировался ток, и эти члены будут убывать лишь как  $\frac{1}{R}$ . Итак, при вычислении полей из асимптотических потенциалов (84) *поля убывают не быстрее потенциалов*, но по тому же закону  $\frac{1}{R}$ .

Та (асимптотическая) область, в которой члены порядка  $\frac{1}{R}$  в полях оказываются основными, называется **волновой зоной**; мы видим из проведенного сравнения, что волновая зона определяется не только условием  $R \gg b$ , но и требованием:

$$R \gg \lambda. \quad \text{волновая зона} \quad (85)$$

При выполнении пространственных дифференцирований в волновой зоне нужно, как мы убедились, дифференцировать только по  $R$ , входящему неявно, через запаздывающее время

$$\tilde{t} = t - \frac{R}{c},$$

т. е. в ней имеет место операторное равенство

$$\frac{\partial}{\partial R_\alpha} = -\frac{n_\alpha}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}. \quad (85a)$$

**17.1.4.** Если, как то бывает во многих важных случаях, длина излучаемых системой волн много больше размеров системы,  $b \ll \lambda$ , то в области  $R > b$ , в которой вообще применимы разложения по степеням  $\frac{r'}{R}$ , кроме волновой зоны существует еще одна, характеризующаяся неравенствами

$$b \ll R \sim \lambda.$$

В этой зоне одинаковые степени  $\frac{b}{\lambda}$  и  $\frac{b}{R}$  будут одного порядка величины. Поэтому и в потенциалах и в полях уже нельзя будет ограничиться членами  $\sim \frac{1}{R}$ , а нужно будет и при разложении в ряд и при выполнении дифференцирований учитывать отличие  $|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|$  от  $R$  как в знаменателе, так и в аргументе тока. Наконец, на расстояниях  $R$ :  $b < R \ll \lambda$  время запаздывания становится малым сравнительно с характерным временем  $T$  системы и можно вернуться к статическим разложениям предыдущих параграфов, в которых время останется лишь в роли параметра.

Условие  $b \ll \lambda$  можно сформулировать и иначе. Для зарядов, совершающих приблизительно периодическое движение, их скорости

$$v \sim \frac{r'}{T} \sim \frac{b}{\lambda/c} = \frac{b}{\lambda} c.$$



Таким образом,  $\frac{b}{\lambda} \sim \frac{v}{c}$ , и наше условие  $b \ll \lambda$  принимает вид  $v \ll c$  — движение всех зарядов совершается со скоростями, много меньшими скорости света. Это условие

$$b \ll \lambda \quad \text{или} \quad v \ll c \quad \text{условие квазистационарности} \quad (86)$$

называется условием **квазистационарности**.

Его физический смысл состоит в том, что энергия, излучаемая системой зарядов за характерное для нее время, мала сравнительно с запасенными системой — кинетической или потенциальной — энергиями. Поэтому, если условие квазистационарности выполнено, то при изучении движения зарядов системы можно пренебрегать влиянием, которое оказывает на это движение потеря энергии на излучение, т. е. сперва искать движение зарядов, а потом находить поле, излучаемое зарядами, движущимися уже известным образом<sup>1)</sup>.

**17.1.5.** Существование волновой зоны имеет решающее значение для всей теории электромагнитного поля. В самом деле, поток энергии электромагнитного поля описывается, как мы знаем, вектором Пойнтинга (52.3). Поскольку поля в волновой зоне убывают лишь как  $\frac{1}{R}$ , то вектор Пойнтинга будет убывать

как  $\frac{1}{R^2}$ , а значит, поток вектора Пойнтинга через окружающую систему сферу радиуса  $R$  совсем *не будет зависеть от этого радиуса*. Но это значит, что будет существовать отличный от нуля поток энергии, вовсе покидающей систему зарядов, — энергия системы зарядов переходит в энергию свободного электромагнитного поля. Происходит *излучение энергии*.

Итак, существование волновой зоны показывает, что заряды могут передавать свою энергию электромагнитному полю, которое распространяется далее в пространстве совершенно независимо от «породившей» его системы зарядов. Именно этот факт заставляет нас считать электромагнитное поле самостоятельным физическим объектом, а не просто элегантным способом описания (запаздывающего) взаимодействия зарядов.

Нам надо еще, конечно, проверить качественные оценки вычислением, равно как и исследовать поле в волновой зоне более подробно.

**17.2.** Заметим прежде всего, что нет необходимости исследовать все четыре компоненты решения (68) — в нестатическом

<sup>1)</sup> Ср. замечание 136, 5.

случае скалярный потенциал не является независимым. В самом деле, на потенциалы наложено дополнительное условие Лоренца (58)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} = 0.$$

Проинтегрируем это соотношение по времени, причем будем считать, что знак неопределенного интеграла  $\int dt \dots$  означает то его частное значение, для которого средние по времени

$$\overline{\int dt \dots} = 0.$$

Тогда

$$\phi(\mathbf{R}, t) = -c \int dt \operatorname{div} \mathbf{A} + \phi_{\text{coul}}(\mathbf{R}), \quad (87)$$

где постоянная интегрирования  $\phi_{\text{coul}}(\mathbf{R})$  будет как раз статическим потенциалом параграфов 14, 15.

Таким образом переменная (во времени) часть скалярного потенциала однозначно определяется векторным (причем опять *переменной* его частью, поскольку  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0$ ). Поэтому при вычислении электрического поля мы получим

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi_{\text{coul}}(R) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} + c \int \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} \cdot dt.$$

Но  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}$ ; стало быть, если ввести под интеграл по  $t$  и второй член  $-\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$ , то мы получим под интегралом

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

поскольку поле в пустоте удовлетворяет уравнению д'Аламбера. Итак,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{coul}} + c \int dt \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{E}_{\text{coul}} + c \int dt \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad (87.E)$$

(эту формулу можно, конечно, получить и непосредственно, интегрируя по времени первое уравнение второй максвелловой пары). В (87.E) безразлично, что писать под интегралом,  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  или  $\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \dot{\bar{\mathbf{H}}})$ , поскольку вне зарядов  $\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ: Независимость  $\phi$  не случайна — его можно вообще убрать с помощью не меняющего условия Лоренца (58) специального градиентного преобразования (41a)<sup>1)</sup>. Действительно, выберем в гра-

<sup>1)</sup> Ср. аналогичную операцию, примененную при изучении общего решения свободного уравнения в **13a.1**.

диентном преобразовании

$$\varphi = \varphi - \frac{1}{c} \dot{\lambda}; \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \lambda$$

$\lambda$  так, чтобы в новом скалярном потенциале остался только статический член  $\varphi' = \varphi_{\text{coul}}(\mathbf{R})$ . Для этого нужно, чтобы было

$$\frac{1}{c} \dot{\lambda} = -c \int \text{div } \mathbf{A} dt,$$

то есть

$$\lambda = -c^2 \iint dt dt \text{ div } \mathbf{A}$$

(постоянную интегрирования можно положить равной нулю, так как она не повлияет ни на скалярный, ни на векторный потенциал). Тогда

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - c^2 \iint dt dt \text{ grad div } \mathbf{A}$$

и, если опять преобразовать здесь  $\text{grad div}$ ,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \iint dt dt \ddot{\mathbf{A}} - c^2 \iint \text{rot rot } \mathbf{A} dt dt.$$

Поскольку для наших интегралов

$$\overline{\int dt \dots} = 0,$$

то в разности двух первых членов остается только  $\overline{\mathbf{A}(\mathbf{R})}$ , т.е. мы получаем в качестве новых скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi'(\mathbf{R}, t) = \varphi_{\text{coul}}(R); \quad \mathbf{A}'(\mathbf{R}, t) = \overline{\mathbf{A}(R)} - c^2 \iint dt dt \text{ rot rot } \mathbf{A}. \quad (87')$$

Дифференцирование (87') возвращает нас, конечно, к формуле (87.Е). ■

**17.3.** В волновой зоне выражения переменной части скалярного потенциала и полей через  $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$  претерпевают дальнейшие упрощения. (Мы будем ниже заниматься только переменными частями и не будем выписывать  $\varphi_{\text{coul}}$  и  $\overline{\mathbf{A}}$ .) Правила (85а) дифференцирования в волновой зоне сразу дают нам

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n}]; \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{c} [[\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}] = [\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}]. \end{aligned} \quad (88)$$

**17.3.1.** Мы видим, что для фиксированного  $\mathbf{R}$  электромагнитное поле в волновой зоне устроено так же, как в распространяющейся в направлении  $\mathbf{n}$  плоской волне:

(1) Электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны направлению распространения  $\mathbf{n}$ , перпендикулярны друг другу,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ , и равны по величине,  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ .

(2) Существенна только *поперечная* часть вектор-потенциала; часть вектор-потенциала  $\sim \mathbf{n}$  не дает никакого вклада в поля.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из (87') мы знаем, что такую часть  $\mathbf{A}$  всегда можно убрать градиентным преобразованием. Практически удобнее, однако, не выполнять такого преобразования явно, а держать эту возможность про запас в качестве аргумента, позволяющего выбрасывать из  $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$  (или добавлять в него) любые пропорциональные  $\mathbf{n}$  члены. ■

**17.3.2.** Электрическое и магнитное поля позволяют найти вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}] = \frac{c\mathbf{H}^2}{4\pi} \mathbf{n} = \frac{c\mathbf{E}^2}{4\pi} \mathbf{n}. \quad (88.4)$$

Он направлен по  $\mathbf{n}$  (с существенно положительным коэффициентом!) — значит, во всякой точке  $\mathbf{R}$  волновой зоны, если только электромагнитное поле в ней не равно нулю, существует поток энергии, направленный *от системы зарядов* в направлении  $\mathbf{n}$ . Наше главное утверждение относительно поля в волновой зоне подтверждено.

**17.3.3.** Поток энергии через элемент  $d\sigma$  поверхности сферы радиуса  $R$ , видный из начала отсчета под телесным углом  $d\mathcal{O}$ , будет равен

$$d\mathcal{J} = \mathbf{S} \cdot d\sigma = S n d\mathcal{O} R^2,$$

т. е.

$$d\mathcal{J} = c\mathbf{H}^2 R^2 \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} = c\mathbf{E}^2 R^2 \frac{d\mathcal{O}}{4\pi}. \quad (88.5)$$

Поскольку в волновой зоне  $\mathbf{H} \sim R^{-1}$ , он не зависит от  $R$ , а только от направления  $\mathbf{n}$  и угла  $d\mathcal{O}$ . Полный поток энергии через сферу большого (все равно какого!) радиуса получится отсюда интегрированием по углам; в силу закона сохранения этот поток должен равняться энергии, теряемой системой. в единицу времени. Итак,

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{J} = \frac{1}{4\pi} \int d\mathcal{O} c\mathbf{H}^2 R^2 = cR^2 \overline{\mathbf{H}^2} = cR^2 \overline{\mathbf{E}^2}, \quad (88.6)$$

где теперь черта сверху означает усреднение не по времени, а по углам, фиксирующим направление  $\mathbf{n}$ .

Формулы (88.6), (88.5) и (88.2) решают вопрос о полной потере энергии системой и о распределении излучаемой энергии по направлениям; чтобы воспользоваться ими, осталось только

найти выражения для вектор-потенциала в волновой зоне, более детальные, чем общая формула (84). Мы посвятим этому два следующих параграфа, но сперва сделаем еще одно

**17.4. ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы только что убедились, что поле излучения в волновой зоне локально, вблизи какого-либо фиксированного  $\mathbf{R}$ , есть плоская, волна, распространяющаяся в направлении  $\mathbf{n}$ . Эта оговорка «локально» существенна; для волны в целом не только аналогия с плоской волной не оказывается полной, но и сама концепция волновой зоны — вполне последовательной.

Оставляя подробное обсуждение этого обстоятельства до параграфа 19, скажем пока только, что источник трудностей лежит в том, что хотя связь скалярных полей  $\Phi_i$  (см. **16.6**) с  $\mathbf{A}$  и локальна, само сопоставление векторному полю над некоторым пространством скалярных полей существенно зависит от свойств пространства как целого, что проявляется хотя бы в том, что обратные выражения векторного поля  $\mathbf{A}$  через  $\Phi_i$  интегральны. В частности, в доказательстве теоремы об обращении в нуль векторного поля, все три инварианта которого суть нули, существенно использовалось то обстоятельство, что после обращения  $\Phi_1$  в нуль задача о построении ненулевого  $\mathbf{A}$  с равными нулю  $\Phi_0$  и  $\Phi_2$  сводится к нахождению нетривиального векторного (двумерного) поля, удовлетворяющего уравнению Лапласа на всюду ортогональной  $\mathbf{R}$  поверхности. На сфере таких решений не существует, но на касательной к сфере плоскости, которую мы получаем, заменяя поле в волновой зоне плоской волной, такие нетривиальные решения есть. Поэтому, если мы хотим сопоставлять векторному потенциалу инвариантные скалярные поля, то мы должны (даже в волновой зоне!) учитывать кривизну сферы — волнового фронта излучаемой системой волны — что сводится к учету возникающих при дифференцированиях старших членов в разложении по  $\frac{1}{R}$ , выбрасываемых правилами (85a). Если восстановить эти члены, то парадокс исчезает — хотя бы одно из полей  $\Phi_0$  и  $\Phi_2$  оказывается отличным от нуля. ■

## 18. Дипольные и квадрупольное излучения

**18.1.** Разложим, пользуясь условием квазистационарности, аргумент тока под интегралом в (84) в ряд по степеням  $\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}$  (т. е. по малому параметру  $\frac{b}{\lambda}$ ) и выпишем пока в этом ряду два первых члена:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \int (d\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tilde{t}) + \frac{1}{cR} \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right) \frac{d}{dt} \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tilde{t}) + \dots,$$

живо напоминающие по строению первые члены разложения вектор-потенциала в магнестатическом случае в **16.4.1**.

**18.1.1.** В § 16 мы использовали для преобразования подинтегральных выражений в этих членах тождества  $(\alpha)-(\gamma)$ , при выводе которых использовалось то обстоятельство, что в стационарном случае  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . Теперь, согласно уравнению непрерывности,  $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  и в правых частях тождеств появляются дополнительные члены, в результате чего тождества принимают вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tilde{t}) = \frac{\partial}{\partial r'_\beta} (\mathbf{r}' j'_\beta) - \mathbf{r}' \operatorname{div} \mathbf{j}' = \mathbf{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r'_\beta} (\mathbf{r}' j'_\beta) \quad (\alpha')$$

и

$$\mathbf{r}'_\beta j'_\alpha (\mathbf{r}'; \tilde{t}) = \frac{1}{2} e_{\beta\alpha\gamma} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}']_\gamma + \frac{1}{2} r'_\alpha r'_\beta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r'_\gamma} (r'_\alpha r'_\beta j'_\gamma). \quad (\gamma')$$

При подстановке под интеграл полные производные можно будет обратить в нуль, используя теорему Гаусса; тем самым два младших члена разложения вектор-потенциала дадут нам

$$A_\alpha = \frac{1}{cR} \frac{d}{dt} \int (d\mathbf{r}') r'_\alpha \rho(\mathbf{r}', \tilde{t}) + \\ + \frac{1}{cR} \frac{n_\beta}{c} \frac{d}{dt} \int (d\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{2} e_{\beta\alpha\gamma} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}']_\gamma + \frac{1}{2} r'_\alpha r'_\beta \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right\},$$

— т. е. мы получаем сумму производных по времени от трех интегралов по распределению токов и зарядов.

**18.1.2.** В первом из этих интегралов сразу узнается *электрический дипольный момент* системы зарядов (75.1). Вторым интеграл приводится к *магнитному дипольному моменту* (81.1), вычисляемому, однако, для истинной плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ , а не для усредненной по времени  $\bar{\mathbf{j}}$ . С третьим интегралом ситуация уже несколько сложнее. Он напоминает электрический квадрупольный момент (75.2), с тем, однако, отличием, что подинтегральное выражение содержит образованный из  $\mathbf{r}'$  простейший симметричный тензор второго ранга  $r'_\alpha r'_\beta$ , а не симметричный тензор второго ранга со следом нуль  $r'_\alpha r'_\beta - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{\alpha\beta}$ , фигурирующий в (75.2); мы будем называть такое образование **приводимым электрическим квадрупольным моментом**. В статическом случае мы тоже получили при непосредственном выполнении разложения (там — по степеням  $\frac{b}{R}$ ) сперва приводимый квадрупольный момент, но могли заменить его на **неприводимый** (75.2), прибегая к тому аргументу, что там

квадрупольный момент свертывался с симметричным тензором, след которого равнялся нулю благодаря тому, что потенциал вне системы зарядов удовлетворял в статике уравнению Лапласа. Теперь эта аргументация неприменима, и при замене приводимого квадрупольного момента на неприводимый в разложении вектор-потенциала появится дополнительный член:

$$\frac{n_\alpha}{R} \cdot \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \int (d\mathbf{r}') \frac{r'^2}{3} \rho(\mathbf{r}'; \tilde{t}).$$

Для электрического квадрупольного момента этот член оказывается *направленным по  $\mathbf{n}$* ; поэтому, согласно сделанному в предыдущем параграфе замечанию этот член можно убрать градиентным преобразованием, и оставлять его в выражении для  $\mathbf{A}$  нет нужды.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Фигурирующая в этом члене интегральная характеристика распределения заряда зависит только от изотропной части плотности; поэтому она должна была бы служить поправкой к *нулевому* электрическому моменту (75.0) — полному заряду системы. Но полный заряд системы *не зависит от времени* (как раз вследствие инвариантности относительно градиентных преобразований!) и, значит, не может давать вклада в нестатическую часть поля. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** В статическом случае электрические и магнитные мультипольные моменты были константами. Если  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  зависят от времени, то они становятся *функциями времени*. В нашем разложении все они берутся в момент времени  $\tilde{t} = t - \frac{R}{c}$ , учитывающий запаздывание на пути от центра системы  $\mathbf{0}$  до точки наблюдения  $\mathbf{R}$ . ■

**18.1.3.** С учетом этих замечаний младшие члены разложения вектор-потенциала можно теперь записать в компактной форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{R} \frac{1}{c} \dot{\mathbf{d}}(\tilde{t}) + \frac{1}{R} \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{m}}(\tilde{t}) \cdot \mathbf{n}] + \frac{1}{R} \frac{1}{2c^2} (\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}) + \dots, \quad (89)$$

где  $(\hat{D}\mathbf{n})_\alpha$  есть краткое обозначение для  $D_{\alpha\beta}n_\beta$ . Отдельные члены этой формулы называют, соответственно, электрическим дипольным, магнитным дипольным и электрическим квадрупольным членами в излучении.

**18.2.1.** Для электрического дипольного излучения,  $\mathbf{A}^{ie} = \frac{1}{Rc} \dot{\mathbf{d}}$ , электрическое и магнитное поля и вектор Пойнтинга находятся по общим формулам (88.2–4) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{1e} &= \frac{1}{Rc^2} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] ; \quad \mathbf{E}^{1e} = \frac{1}{Rc^2} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] \mathbf{n}] = \frac{\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}) - \ddot{\mathbf{d}}}{Rc^2}; \\ \mathbf{S}^{1e} &= \frac{\mathbf{n}}{4\pi R^2} \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}]^2}{c^3}. \end{aligned} \quad (90.1E)$$

Подставляя эти значения в (88.5), получим для потока энергии, излучаемой в единицу времени в элемент телесного угла  $d\mathcal{O}$ ,

$$d\mathcal{J}^{1e} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}]^2}{c^3} \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2 - (\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n})^2}{c^3} \frac{d\mathcal{O}}{4\pi}. \quad (91.1E)$$

Если дипольный момент меняется только по величине, то удобно ввести полярную систему координат с осью, направленной по единственному выделенному направлению  $\ddot{\mathbf{d}} \parallel \mathbf{d}$ ; в ней выражение для энергии, излучаемой в направлении  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , примет вид

$$d\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} \sin^2 \vartheta d\mathcal{O} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta}{2c^3}. \quad (91.1E')$$

**18.2.2.** Полная энергия, теряемая системой на дипольное излучение в единицу времени, получается, согласно (88.6), усреднением (91.1E) по углам. Поскольку единственной зависящей от направления величиной в (91.1E) является единичный вектор  $\mathbf{n}$ , то задача сводится к усреднению произведений  $n_\alpha n_\beta$  компонент единичного вектора.

Результат такого усреднения должен быть *единичным* тензором второго ранга — а такой тензор может отличаться лишь множителем от тензора  $\delta_{\alpha\beta}$ . Итак, должно быть

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta}.$$

Значение числового множителя установим, свертывая это выражение по  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$1 = \bar{1} = \overline{n_\alpha n_\alpha} = \lambda \delta_{\alpha\alpha} = \lambda \cdot 3;$$

значит,  $\lambda = \frac{1}{3}$  и

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \quad ^1)$$

<sup>1)</sup> Те же самые рассуждения применимы и к усреднению произведений большего числа векторов  $\mathbf{n}$ . При этом усреднение *нечетного* числа векторов  $\mathbf{n}$  дает нуль, поскольку единичных тензоров нечетного ранга не существует, а средние от произведений четного числа векторов выражаются через соответствующим образом симметризованные произведения тензоров  $\delta_{ij}$ .



Итак,

$$-\frac{d\mathcal{E}^{1e}}{dt} = \mathcal{J}^{1e} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2 - (\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n})^2}{c^3} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_\alpha \ddot{d}_\beta \overline{n_\alpha n_\beta}}{c^3} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}, \quad (92.1E)$$

т.е. мы видим, что дипольное излучение системы пропорционально второй производной ее дипольного момента. В частности, если система состоит из одного единственного заряда  $e$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}(t)$ , то  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ , значит  $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$ , и

$$\mathcal{J}^{1e} = \frac{2e^2}{3c^3} \mathbf{w}^2, \quad (92.1E')$$

т.е. дипольное излучение одного заряда, пропорционально квадрату его *ускорения* — чтобы заряд излучал, необходимо, чтобы он двигался ускоренно<sup>1)</sup>. Это условие совершенно понятно: если заряд не испытывает ускорения, то он движется равномерно и прямолинейно, и можно выбрать инерциальную систему отсчета, в которой он неподвижен и, следовательно, создает лишь статическое кулоново поле.

**18.2.3.** Оценим порядок величины энергии, теряемой системой на излучение согласно (92.1E). Заметим для этого, что дипольный момент системы есть величина порядка ее размеров  $b$ , умноженных на заряд  $e$ ,  $d \sim eb$ , а дифференцирование по времени приводит к вхождению в знаменатель характерного времени системы  $T$ . Поэтому  $\mathcal{J}^{1e} \sim \left(\frac{eb}{T^2}\right)^2 \frac{1}{c^3}$ , что удобно записать, комбинируя множители, как  $\left(\frac{e^2}{b}\right) \left(\frac{b}{T}\right)^3 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{T}$ . Но первый множитель здесь  $\frac{e^2}{b}$  есть величина порядка электростатической энергии взаимодействия зарядов системы, значит, вообще говоря, порядка полной энергии  $\mathcal{E}$  системы. Отношение же  $\frac{b}{T}$  размеров системы к характерному времени порядка скорости  $v$  зарядов в системе. Итак, потеря энергии на дипольное излучение в *еди-*

<sup>1)</sup> Справедливо и обратное — всякий движущийся ускоренно заряд излучает. Для *одного* заряда это следует из (92.1E'); если заряд входит в систему зарядов, совершающих когерентное (ускоренное) движение, то дипольное излучение разных зарядов системы может взаимно скомпенсироваться, однако для старших членов разложения вектор-потенциала это невозможно — для системы из конечного числа зарядов в результате компенсации может обратиться в нуль лишь конечное число членов разложения вектор-потенциала.

ницу времени  $-\frac{d\mathcal{E}^{1e}}{dt} \sim \mathcal{E} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^3 \frac{1}{T}$ . Более показательна, конечно, потеря энергии за характерное время системы  $T$ ; мы получаем для нее

$$-\Delta_T \mathcal{E}^{1e} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^3 \mathcal{E}. \quad (93.1E)$$

Итак, относительная потеря энергии на дипольное излучение за характерное время системы порядка *третьей степени* отношения скоростей зарядов системы к скорости света. Тем самым мы подтвердили сделанное после формулы (86) предыдущего параграфа утверждение о смысле условия квазистационарности. Теперь мы можем и уточнить это утверждение: поскольку потери энергии на излучение пропорциональны  $\left(\frac{v}{c}\right)^3$ , то с точностью  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  этими потерями можно пренебрегать и рассматривать систему зарядов как изолированную, движение которой описывается некоторой функцией Лагранжа, зависящей от координат и скоростей *только зарядов*, но не поля. Такую функцию Лагранжа действительно можно построить.

**18.2.4.** Дипольный член является главным в ряду (89), и если он отличен от нуля, то следующие члены играют, обычно, роль малых поправок. Если, однако, дипольный момент системы есть нуль, то они могут стать основными.

**18.3.1.** Для **магнитного дипольного излучения**  $\mathbf{A}^{1m} = \frac{1}{Rc} [\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}]$ , формулы (88.2–4) приводят нас к выражениям

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{1m} &= \frac{1}{Rc^2} [[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}] \mathbf{n}]; \quad \mathbf{E}^{1m} = \frac{1}{Rc^2} [[[ \ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}] \mathbf{n}] \mathbf{n}] = -\frac{[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]}{Rc^2}; \\ \mathbf{S}^{1m} &= \frac{\mathbf{n}}{4\pi R^2} \frac{[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]^2}{c^3}, \end{aligned} \quad (90.1M)$$

все отличие которых от электрического дипольного случая состоит в том, что электрическое и магнитное поля поменялись местами. Поэтому формулы (91) и (92) для излучения по направлению  $\mathbf{n}$  и полного излучения вообще не претерпят никаких изменений, и мы сможем просто переписать их (заменяя, конечно, электрический дипольный момент на магнитный) в неизменном виде:

$$d\mathcal{G}^{1m} = \frac{[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]^2}{c^3} \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} = \frac{\ddot{\mathbf{m}} - (\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n})^2}{c^3} \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} \quad (91.1M)$$

и

$$\mathcal{J}^{1m} = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3}.$$

**18.3.2.** С физической точки зрения, однако, в них имеется существенное отличие от электрического дипольного случая. В определении (81.1) магнитного момента фигурирует лишний множитель  $c$  в знаменателе; кроме того, в нем участвует плотность тока  $\mathbf{j}$  вместо плотности заряда  $\rho$  в электрическом случае, т.е. лишний множитель  $v$ . Итак, магнитный момент отличается от электрического лишим множителем  $\left(\frac{v}{c}\right)$  (ср. дискуссию в конце § 16), что приводит при оценке порядка величины (91) и (92) к лишнему множителю  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ . Итак, по порядку величины магнитное дипольное излучение составляет

$$-\Delta_T \mathcal{E}^{1m} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^5 \mathcal{E}, \quad (93.1M)$$

т.е. оно в  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  раз слабее электрического.

**18.4.1.** Перейдем к **электрическому квадрупольному излучению**. Согласно (89) для него  $\mathbf{A} = \frac{1}{Rc} \frac{1}{2c} (\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})$ , поэтому выражения для магнитного и электрического поля и вектора Пойнтинга получатся из электрических дипольных формул заменой  $\mathbf{d} \rightarrow \frac{1}{2c} (\dot{\mathbf{D}}\mathbf{n})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{2e} &= \frac{1}{2Rc^3} [(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]; & \mathbf{E}^{2e} &= \frac{1}{2Rc^3} [[(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}]; \\ \mathbf{S}^{2e} &= \frac{\mathbf{n}}{4\pi R^2} \frac{[(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]^2}{4c^5}. \end{aligned} \quad (90.2E)$$

Поток энергии, излучаемой в направлении  $\mathbf{n}$ , составит

$$\begin{aligned} d\mathcal{G}^{2e} &= \frac{1}{4c^5} [(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]^2 \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} = \frac{1}{4c^5} \left\{ (\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})^2 - (\mathbf{n}\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})^2 \right\} \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} = \\ &= \frac{1}{4c^5} \{ \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\mu\nu} n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu \} \frac{d\mathcal{O}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (91.2E)$$

**18.4.2.** В нем появился член с *четырьмя* единичными векторами  $\mathbf{n}$ , поэтому для вычисления полного квадрупольного излучения надо научиться усреднять произведения четырех  $n_\alpha$ . Из соображений симметрии

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu} = \lambda (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}).$$

Свертывая по  $\alpha = \beta$  и  $\mu = \nu$ , находим

$$1 = \overline{n_\alpha n_\alpha n_\mu n_\mu} = \lambda(3 \cdot 3 + 3 + 3) = 15\lambda,$$

т. е.  $\lambda = \frac{1}{15}$ . Далее,  $\ddot{D}_{\alpha\beta}\ddot{D}_{\mu\nu}\frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) = \frac{2}{15}(\ddot{D}_{\alpha\beta})^2$ , поскольку  $\text{Spur } D_{\alpha\beta} = 0$ . Поэтому

$$\ddot{D}_{\alpha\beta}\ddot{D}_{\alpha\gamma}\overline{n_\beta n_\gamma} - \ddot{D}_{\alpha\beta}\ddot{D}_{\mu\nu}\overline{n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu} = (\ddot{D}_{\alpha\beta})^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{15} \right) = \frac{(\ddot{D}_{\alpha\beta})^2}{5}.$$

Итак,

$$\mathcal{J}^{2e} = \frac{1}{5c^5} \frac{1}{4} (\ddot{D}_{\alpha\beta})^2, \quad (92.2E)$$

— т. е. квадрупольное излучение определяется уже не второй, а *третьей* производной электрического квадрупольного момента.

**18.4.3.** Это обстоятельство приводит при оценке порядка величины (92.2E) к появлению в знаменателе лишнего множителя  $T^2$ ; далее, сам квадрупольный момент пропорционален второй, а не первой степени размеров  $b$  системы — это вносит в (92.2E) лишний  $b^2$  в числитель; наконец, в знаменателе (92.2E) явно стоит на две степени скорости света больше, чем в дипольных формулах. Все это вместе взятое вносит в порядок величины квадрупольного излучения лишний множитель  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ , и мы получаем

$$-\Delta_T \mathcal{E}^{2e} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^5 \mathcal{E} \quad (93.2E)$$

— суммарное электрическое квадрупольное излучение оказывается того же пятого порядка по параметру квазистационарности  $\frac{v}{c}$ , что и дипольное магнитное.

**18.5. ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы вычисляли вектор Пойнтинга и излучаемую энергию для каждого члена в (89) по отдельности. Но вектор Пойнтинга квадратичен по полям, поэтому в нем должны появиться интерференционные члены  $\mathbf{S}^{1e}$ ,  $\mathbf{S}^{1e,2e}$  и  $\mathbf{S}^{1m,2e}$ . Легко проверить, что такие члены действительно появляются. Оказывается, однако, что при интегрировании по углам все они обращаются в нуль, и суммарное излучение системы, излучающей сразу электрическим дипольным, магнитным дипольным и электрическим квадрупольным образом, тем не менее представляется простой суммой трех формул (92).

Для интерференционных членов  $\mathbf{S}^{1e1m}$  и  $\mathbf{S}^{1e2e}$  это утверждение следует из простого подсчета степеней единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Действительно, в  $1e$ -члене магнитное поле содержит нечетное, а элек-

трическое — четное число множителей  $\mathbf{n}$ , а в  $1m$ - и в  $2e$ -членах — наоборот. Поэтому векторы Пойнтинга  $\mathbf{S}^{1e1m}$  и  $\mathbf{S}^{1e2e}$  будут содержать лишь *четные* степени  $\mathbf{n}$ , а, значит, соответствующие члены в  $d\mathcal{J}$  — только *нечетные*, которые обязательно дадут нуль при усреднении по углам.

Менее очевидно исчезновение  $1m$ - $2e$  интерференции. Из (90.1M, 2E):

$$\mathbf{S}^{1m2e} \sim \left\{ -[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}] \cdot [(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})\mathbf{n}] + [ [(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})\mathbf{n}] \mathbf{n} ] \cdot [\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}] \right\}.$$

Оба вектора второго векторного произведения получены из векторов первого произведения поворотом на  $-90^\circ$  вокруг  $\mathbf{n}$ , поэтому оба произведения равны друг другу, и можно рассматривать только первое

$$[ [(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})\mathbf{n}] \cdot [\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}] ] = \mathbf{n} \cdot [(\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{n})\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}].$$

Таким образом,

$$d\mathcal{J}^{1m2e} \sim e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_{\alpha\delta} n_\delta n_\beta \ddot{m}_\gamma$$

При усреднении по углам мы получим  $\overline{n_\delta n_\gamma} = \frac{1}{3} \delta_{\delta\gamma}$  и, следовательно,

$$\mathcal{J}^{1m2e} \sim e_{\alpha\beta\gamma} \ddot{D}_{\alpha\gamma} \ddot{m}_\beta = 0$$

благодаря симметрии тензора  $D_{\alpha\gamma}$ . ■

## 19. Старшие мультипольные излучения

В предыдущем параграфе мы подробно исследовали нулевой и первый члены разложения асимптотического вектор-потенциала (84) в ряд по степеням запаздывания внутри системы  $\left(\frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}\right)$ . При дальнейшем непосредственном продолжении этого разложения возникают некоторые особенности, новые как сравнительно с первыми членами, так и по сравнению с рассмотренными выше статическими разложениями, и появляются довольно существенные осложнения. Осложнения эти обусловлены в конечном счете тем, что основные величины, с помощью которых мы описываем электромагнитное поле, — поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  или вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  — суть векторы. Дело сильно упростилось бы, если бы можно было иметь вместо них дело со скалярами.

**19.1.** Способ, позволяющий сопоставить всякому векторному полю — скажем полю вектора  $\mathbf{A}$  — три эквивалентных ему скалярных поля  $\Phi_0(\mathbf{A})$ ,  $\Phi_1(\mathbf{A})$  и  $\Phi_2(\mathbf{A})$ , нам уже известен — мы познакомились с ним в **16.6.** при рассмотрении магнетостатики. Если, однако, прибегнуть к этой процедуре в волновой зоне,

когда вектор-потенциал задается формулой (84), а пространственные дифференцирования выполняются с помощью равенства (85а), то мы наткнемся на одну неприятность.

Именно, вычисляя таким способом три связанных с вектор-потенциалом скалярных поля и выбирая притом «поперечную» калибровку (87'), мы получим:

для вектор-потенциала

$$\mathbf{A}'(\mathbf{R}, t) = -[\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}]] \perp \mathbf{n};$$

для скалярных полей

$$\Phi_0[\mathbf{A}'] = \frac{d}{d\mathbf{R}} \mathbf{A}' = \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{A}}] = 0;$$

$$\Phi_1[\mathbf{A}'] = \mathbf{R} \mathbf{A}' = -R \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{A}}] = 0;$$

$$\Phi_2[\mathbf{A}'] = -R \mathbf{n} \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) [\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{A}}] = 0;$$

т.е. все три связанных с полем вектор-потенциала инварианта тождественно обращаются в нуль. По теореме, на которую мы ссылались в **16.6**, это должно было бы означать тождественное обращение в нуль и самого векторного поля  $\mathbf{A}'(\mathbf{R}, t)$ !

Хитрость состоит тут в том, что для вычисления связанных с вектор-потенциалом  $\mathbf{A}$  (или полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) скалярных полей  $\Phi_i$  правила дифференцирования в волновой зоне (85а) (а может быть и асимптотическое выражение (84)?) оказываются слишком грубыми. Действительно, в определение полей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  входит *умножение на  $\mathbf{R}$* ; поэтому, чтобы получить результат, правильный вплоть до членов  $\sim \frac{1}{R}$ , который нас интересует в волновой зоне, надо было бы вычислять  $\mathbf{A}$  (или  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) *вплоть до членов  $\sim \frac{1}{R^2}$* . Напротив члены  $\sim \frac{1}{R}$  в векторном потенциале (которые привели бы в  $\Phi_i$  к членам порядка  $R^0$ ) при вычислении скалярных полей — как мы только что убедились — полностью сокращаются и не дают никакого вклада в результат. Взаимно уничтожается и большая часть членов  $\sim \frac{1}{R^2}$  (например, все  $\sim \frac{1}{R^2}$ -поправки к формуле (84)), так что реальное вычисление действительно существенных для  $\Phi_i$  членов не очень трудоемко, однако аккуратное выяснение того, какие именно члены единственно нужно вычислять, оказывается довольно громоздким.

Поэтому оказывается проще не вычислять  $\Phi_i$  из решения (68) для  $\mathbf{A}$  и  $\phi$ , а преобразовать сами уравнения Максвелла таким

образом, чтобы соответствующие скаляры  $\Phi$  прямо вошли бы в уравнения — тогда они найдутся непосредственным интегрированием.

**19.2.** Будем исходить из уравнений Максвелла в трехмерной форме (51.1,2.1,2):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

и введем скалярные поля, ассоциированные с магнитными и электрическими полями  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0[\mathbf{H}] &= \operatorname{div} \mathbf{H}; & \Phi_1[\mathbf{H}] &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{H}; \\ \Phi_2[\mathbf{H}] &= -\mathbf{R} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \mathbf{H}; \\ \Phi_0[\mathbf{E}] &= \operatorname{div} \mathbf{E}; & \Phi_1[\mathbf{E}] &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}; \\ \Phi_2[\mathbf{E}] &= -\mathbf{R} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (94)$$

Тогда первая строка максвелловых уравнений даст нам сразу

$$\Phi_0[\mathbf{H}] = 0; \quad \Phi_0[\mathbf{E}] = 4\pi\rho$$

— первую пару уравнений для скалярных полей. Умножая скалярно на  $-\mathbf{R}$  вторую максвеллову строку, получим вторую пару уравнений:

$$\Phi_2[\mathbf{H}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1[\mathbf{E}] - \frac{4\pi}{c} \Phi_1[\mathbf{j}]; \quad \Phi_2[\mathbf{E}] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1[\mathbf{H}].$$

Чтобы получить еще одну пару (всего для шести функций  $\Phi_i[\mathbf{H}/\mathbf{E}]$ , нужны, очевидно, шесть уравнений), применим ко второй максвелловой строке оператор  $-\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]$ :

$$\begin{aligned} -\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2[\mathbf{E}] + \frac{4\pi}{c} \Phi_2[\mathbf{j}]; \\ -\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2[\mathbf{H}]. \end{aligned}$$

Для преобразования левых частей этих уравнений научимся вычислять  $-\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} = \Phi_2[\operatorname{rot} \mathbf{B}]$ , где  $\mathbf{B}$  — произвольный вектор. Имеем:

$$\begin{aligned} -\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} &= -\mathbf{R} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\mathbf{R} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} + \mathbf{R} \Delta \mathbf{B} = \\ &= -\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \Phi_0[\mathbf{B}] + \Delta \Phi_1[\mathbf{B}] - \Phi_0[\mathbf{B}], \end{aligned}$$

поскольку

$$\Delta(\mathbf{R}\mathbf{B}) = \frac{\partial^2}{\partial R_\beta^2} R_\alpha B_\alpha = \frac{\partial}{\partial R_\beta} \left( \delta_{\alpha\beta} B_\alpha + R_\alpha \frac{\partial B_\alpha}{\partial R_\beta} \right) = \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{div} \mathbf{B} + \mathbf{R} \Delta \mathbf{B},$$

Итак,

$$\Phi_2 [\operatorname{rot} \mathbf{B}] = \Delta \Phi_1 [\mathbf{B}] - \left( 2 + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right) \Phi_0 [\mathbf{B}]. \quad (*)$$

С помощью этого тождества приводим, поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , магнитное уравнение третьей пары к виду

$$\Delta \Phi_1 [\mathbf{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2 [\mathbf{E}] + \frac{4\pi}{c} \Phi_2 [\mathbf{j}].$$

Соответствующее электрическое оказывается чуть сложнее:

$$\Delta \Phi_1 [\mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_2 [\mathbf{H}] + \left( 2 + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right) \Phi_0 [\mathbf{E}].$$

Как видим, нам действительно удалось преобразовать уравнения Максвелла в систему шести уравнений для шести скалярных функций, ассоциированных с полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Более того, источники поля — плотности заряда и тока, вошли в эту систему опять-таки лишь в виде трех скаляров, ассоциированных с векторным полем  $\mathbf{j}$  — это становится ясным, если вспомнить, что плотность заряда  $\rho$  связана с  $\Phi_0[\mathbf{j}]$  уравнением непрерывности  $\dot{\rho} = -\Phi_0[\mathbf{j}]$ .

Удобно слегка преобразовать эту систему. Введем, прежде всего, для двух из шести скалярных полей специальные обозначения, положив

$$\mu = \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} = \Phi_1 [\mathbf{H}] \quad \text{и} \quad \varepsilon = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E} = \Phi_1 [\mathbf{E}], \quad (94')$$

и выразим, далее  $\Phi_2[\mathbf{E}]$  и  $\Phi_2[\mathbf{H}]$  в первом и втором уравнении третьей пары с помощью второго и первого уравнений второй пары, соответственно. Тогда в каждом из уравнений третьей пары образуется полный оператор д'Аламбера, т. е. они примут вид неоднородных волновых уравнений для скалярных полей  $\varepsilon$  и  $\mu$ , правые части которых содержат только инвариантные функции источников:

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mu &= \frac{4\pi}{c} \Phi_2 [\mathbf{j}]; \\ \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varepsilon &= 4\pi \left( 2 + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right) \rho + \frac{4\pi}{c} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1 [\mathbf{j}]. \end{aligned} \quad (95)$$



Что же касается остальных четырех уравнений,

$$\Phi_0[\mathbf{H}] = 0; \quad \Phi_0[\mathbf{E}] = 4\pi\rho; \quad (95a)$$

$$\Phi_2[\mathbf{H}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \Phi_1[\mathbf{j}]; \quad \Phi_0[\mathbf{E}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad (95b)$$

то они оказываются не уравнениями, а дополнительными условиями, поскольку не содержат производных остальных четырех функций ни по координатам, ни по времени, но явно выражают эти четыре функции  $\Phi_0[\mathbf{H}]$ ,  $\Phi_2[\mathbf{H}]$ ,  $\Phi_0[\mathbf{E}]$  и  $\Phi_2[\mathbf{E}]$  в какой-либо точке  $\mathbf{R}$ ,  $t$  либо через остальные две скалярные функции  $\mu$  и  $\epsilon$ , либо через значения источников —  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — в той же точке. Итак, в новой системе переменных электромагнитное поле исчерпывающе описывается всего лишь *двумя функциями* —  $\mu$ , и  $\epsilon$  — удовлетворяющими неоднородным уравнениям д'Аламбера. Этот результат совершенно естествен — так и должно быть для векторного поля «без массы» (т. е. для поля, у которого и в уравнения и в лагранжиан входят только производные, но не сама функция) согласно общей теории представлений группы Лоренца (см., например книги Гельфанда или Наймарка). При обычном описании, однако, для электромагнитного поля используются целых *шесть* функций — если работать с полями — или *четыре* функции — если работать с потенциалами. Дополнительное условие Лоренца уменьшает в последнем случае число требуемых функций до *трех*, дальнейшая же редукция оказывается затруднительной: для *свободного* поля три функции  $A'_x$ ,  $A'_y$ ,  $A'_z$  связаны одним *дифференциальным* условием  $\operatorname{div} \mathbf{A}' = 0$ , поэтому выделение независимых компонент легко совершается лишь для фурье-образов (ср. соответствующие рассуждения в § 13a); для поля в присутствии источников не удастся и это

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Основной принцип «научной бухгалтерии» утверждает, что никакой результат не дается даром — за всякий успех приходится чем-то расплачиваться, «Jeder Vorteil bringt seinen Nachteil mit». Что же теряем мы, выбирая в качестве переменных поля  $\mu$  и  $\epsilon$ ? Не так мало — трансляционную инвариантность — ведь в их определение явно входит радиус-вектор  $\mathbf{R}$ . Поэтому использование таких переменных удобно лишь в задачах, в которых все равно нет трансляционной инвариантности, т. е. есть выделенное место в пространстве. Как раз так обстоит дело для занимающей нас задачи об излучении пространственно ограниченной системой зарядов. ■

**19.3.** Займемся следствиями, которые можно получить из системы (95–95b).

**19.3.1.** В вакууме (95) превращаются в однородные уравнения д'Аламбера

$$\square \mu = 0; \quad \square \epsilon = 0, \quad (95.V)$$

обе функции  $\Phi_0$  согласно (95a) обращаются в нуль, а функции  $\Phi_2$  оказываются в силу (95b) просто производными  $\epsilon$  и  $\mu$ , по времени. В статическом случае в отсутствии зарядов не равными нулю остаются, поэтому, только  $\mu$  и  $\epsilon$ , каждая из которых удовлетворяет однородному уравнению Лапласа.

**19.3.2.** При наличии зарядов в статическом случае система уравнений распадается на две отдельные системы электростатики и магнетостатики

$$\overline{\Phi_0[\mathbf{H}]} = 0; \quad \overline{\Delta \mu} = \frac{4\pi}{c} \overline{\Phi_2[\mathbf{j}]}; \quad \overline{\Phi_2[\mathbf{H}]} = -\frac{4\pi}{c} \overline{\Phi_1[\mathbf{j}]} \quad (95.ESt)$$

и

$$\overline{\Phi_0[\mathbf{E}]} = 4\pi \bar{\rho}; \quad \overline{\Delta \epsilon} = 4\pi \left(2 + \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right) \bar{\rho}; \quad \overline{\Phi_2[E]} = 0. \quad (95.MSt)$$

**19.3.2.1.** Решением электростатической системы будет

$$\bar{\epsilon} = - \int \frac{(d\mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} \left(2 + \mathbf{r}' \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}'}\right) \bar{\rho}(\mathbf{r}'). \quad (96.ESt)$$

Совершая в нем во втором члене под интегралом интегрирование по частям, получим для электростатического решения последовательно:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= -2 \int \frac{(d\mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} \bar{\rho}' + \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{d}{d\mathbf{r}'} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} \right) \bar{\rho}' = -2 \int \frac{(d\mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} \bar{\rho}' + \\ &+ \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{d}{d\mathbf{r}'} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{R}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{R}|} \right) \bar{\rho}' + \mathbf{R} \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{d}{d\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} \right) \bar{\rho}' = \\ &= 0 - \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \int (d\mathbf{r}') \frac{\bar{\rho}'}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = -\mathbf{R} \text{grad } \phi_{\text{coul}}(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

— т.е. (96.ESt) действительно ведет для  $\epsilon$  к тому же результату, что и полученная интегрированием уравнений для потенциалов формула (71).

**19.3.2.2.** Магнетостатическая система (95.MSt) имеет решением

$$\bar{\mu} = -\frac{1}{c} \int \frac{(d\mathbf{r}') \Phi_2[\mathbf{j}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{c} \int \frac{(d\mathbf{r}') \text{div}' [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}'] }{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}. \quad (96.MSt)$$

Из него сразу очевидно то, установленное нами в § 16 не без сложностей, обстоятельство, что *вне* системы стационарных токов ее маг-

нитное поле зависит только от  $\Phi_2[\mathbf{j}] = \text{div}[\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}]$ . Разложение (96.MSt) по степеням  $\mathbf{r}'/R$  прямо приводит к последовательности стационарных магнитных моментов, которые мы уже строили в § 16.

**19.3.3.** Совершенно неожиданным оказывается, однако, то обстоятельство, что и в *общем нестационарном случае в присутствии зарядов* система (95–95b) также распадается на две независимые подсистемы. Одна из них включает полевые величины  $\mu$ ,  $\Phi_0[\mathbf{H}]$ ,  $\Phi_2[\mathbf{E}]$  и источники  $\Phi_2[\mathbf{j}]$ . Ее составляют уравнения (95.1), (95a.1) и (95b.2). Другая подсистема — уравнения (95.2), (95a.2) и (95b.1) — налагается только на полевые величины  $\epsilon$ ,  $\Phi_0[\mathbf{E}]$  и  $\Phi_2[\mathbf{H}]$ . Ее источниками служат  $\rho$  и  $\Phi_1[\mathbf{j}]$ .

**19.3.3.1.** Таким образом мы видим, что все электромагнитное поле распадается на две совершенно независимые друг от друга части; иногда говорят (особенно вне источников) о разбиении поля на *электрические* ( $\epsilon \neq 0$ ,  $\mu = 0$ ) и *магнитные* ( $\epsilon = 0$ ,  $\mu \neq 0$ ) волны <sup>1)</sup>.

**19.3.3.2.** Как обычно, физически интересно (ср. § 13) *запаздывающее* решение (95):

$$\mu = - \int \frac{(d\mathbf{r}') \text{div} \left[ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'| c}; \quad (96.M)$$

$$\epsilon = - \int \frac{(d\mathbf{r}') \left( 2 + \mathbf{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right) \rho \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} - \int \frac{(d\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'| c^2}. \quad (96.E)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:**  $\mathbf{r}'$  входит в аргументы источников в (96.M, E) дважды: непосредственно и через запаздывающее время; поэтому приходится различать частные и полные производные по  $\mathbf{r}'$ . В обеих формулах (95) участвует только *частное* дифференцирование по явному  $\mathbf{r}'$ , что мы отметили круглыми  $\partial$ .

<sup>1)</sup> Подчеркнем условность этих названий. При описании поля с помощью векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а не скаляров  $\epsilon$  и  $\mu$ , и «электрические» и «магнитные» волны обладают ненулевыми электрическим  $\mathbf{E}$  и магнитным  $\mathbf{H}$  полями (подробнее см. ниже **19.7**).

Частные производные по  $\mathbf{r}'$  связаны с полными очевидным соотношением

$$\frac{d}{d\mathbf{r}'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{R}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{R}|} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Это тождество позволяет с помощью серии интегрирований по частям, подобных подробно проведенным для электростатики, убедиться в том, что решения (96) эквивалентны обычным нашим решениям через запаздывающие потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\phi$ . ■

**19.3.4.** Нас будет в дальнейшем интересовать в основном поле, создаваемое системой зарядов и токов, *вне* этой системы, там где  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  равны нулю. Специальная форма (95–95b), которую мы придали системе максвелловых уравнений, разделив их на уравнения (95) и дополнительные условия (95a, b), позволяет нам теперь утверждать, что в такой области два скаляра  $\Phi_0[\mathbf{H}]$  и  $\Phi_0[\mathbf{E}]$  будут тождественными нулями, а другие два  $\Phi_2[\mathbf{E}]$  и  $\Phi_2[\mathbf{H}]$  окажутся просто производными по времени от последней пары  $\Phi_1[\mathbf{H}] = \mu$  и  $\Phi_1[\mathbf{E}] = \epsilon$ . Таким образом, единственно существенными будут задаваемые формулами (96)  $\mu$  и  $\epsilon$ . Задание этих двух величин полностью определяет электромагнитное поле системы вне ее.

**19.3.4.1.** Скаляр  $\mu$  зависит при этом, как и в магнетостатическом случае (96.MSt), *только* от ассоциированного с током скаляра  $\Phi_2[\mathbf{j}] = \text{div}[\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}]$ . Поэтому при его разложении в волновой зоне по степеням запаздывания войдут, как мы ниже убедимся, только *магнитные моменты* системы.

**19.3.4.2.** Напротив, скаляр  $\epsilon$  зависит не только от  $\rho$  (т.е. в существенном от  $\Phi_0[\mathbf{j}] = \text{div}[\mathbf{j}]$ ), но и от третьего ассоциированного с током скаляра  $\Phi_1[\mathbf{j}] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}$ . Поэтому при его разложении в волновой зоне, если поступать попросту, кроме *электрических моментов* системы появятся моменты еще одного семейства, моменты от  $\Phi_1[\mathbf{j}]$ , которые называют иногда **ананольными моментами**. Существенно, однако, что электрические и ананольные моменты входят в характеризующее поле вне системы величины не независимым образом, а только в определенной, предписываемой (96.E) комбинации. Поэтому для поля излучения существенны не сами электрические и ананольные моменты, а только эти их комбинации, и если мы задаем, чтобы определить излучение системы, и ее электрические и ее ананольные моменты, то мы сообщаем о системе больше сведений, чем это действительно нужно — можно было бы ограничиться меньшим. Ниже мы покажем, что это действительно можно сделать, вводя для излучающей системы вместо электрических и ананольных

только одну последовательность моментов — их можно назвать обобщенными электрическими моментами<sup>1)</sup>.

Описанное «не вполне полноправное» появление третьего семейства моментов составляет наиболее существенное отличие старших членов разложения излучения системы по мультиполям, как от статических разложений, так и от рассмотренных в предыдущем параграфе младших членов излучения, в которых анапольные моменты не появлялись.

**19.4М.** Займемся сперва более подробным изучением *магнитной* части поля вне системы. В волновой зоне в общем выражении (96.М) можно пренебречь  $\mathbf{r}'$  в знаменателе и написать

$$\mu = \frac{-1}{Rc} \int (d\mathbf{r}') \operatorname{div} \left[ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{c} \right) \right]; \quad \tilde{t} = t - \frac{R}{c}. \quad (96.MW)$$

Иногда удобно сперва преобразовать (96.М) с помощью (97) к виду

$$\mu = \int \frac{(d\mathbf{r}') ((\mathbf{R} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2 c^2} + \int \frac{(d\mathbf{r}') ((\mathbf{R} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^3 \cdot c}, \quad (96.M')$$

где второй член вообще несуществен в волновой зоне, а первый дает в ней

$$\mu = \frac{1}{Rc} \int (d\mathbf{r}') \frac{\left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right) \right)}{c}. \quad (96.MW')$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням запаздывания  $\left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right)$ , приходим к

$$\mu = \frac{1}{Rc} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^l (-\operatorname{div} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}']); \quad \mathbf{j}' \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}'; \tilde{t})$$

(член с  $l = 0$  в этой сумме можно обратить в нуль интегрированием по частям; поэтому реально суммирование начинается с единицы!).

<sup>1)</sup> Заметим, что такое любопытное положение возникло не случайно. Оно обусловлено тем, что мы выражаем электромагнитное поле, имеющее, как мы выяснили, только две существенные компоненты, через вектор тока, все три компоненты которого независимы. Если бы вместо электродинамики мы занимались бы задачей об излучении «поля с массой», которое обладало бы *тремя* существенными компонентами, то *все три* семейства моментов вошли бы независимо.

Если вынести здесь еще из-под интегралов по  $\mathbf{r}'$  и единичные векторы  $\mathbf{n}$ , то в качестве параметров, характеризующих свойства излучающей системы, останутся образования

$$\mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}}(\tilde{t}) = \frac{-1}{(l+1)c} \int (d\mathbf{r}') \mathbf{r}'_{\alpha_1} \dots \mathbf{r}'_{\alpha_l} \operatorname{div} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}'],$$

которые мы назовем **приводимыми магнитными моментами**.

**19.4М.1.** Мы встречаемся тем самым еще с одной особенностью, отличающей разложения по мультиполям в проблеме излучения от аналогичной статической задачи — в § 16 мы могли, пользуясь тем, что скалярный магнитный потенциал удовлетворял уравнению Лапласа, оставить в разложении лишь тензоры  $\mathbf{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  со следом, равным нулю, — **неприводимые** магнитные моменты (81.1) (см. **16.5.4**), отличавшиеся от введенных теперь *приводимых* тем, что к произведению  $r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}$  под интегралом применялась обращающая все следы в нуль «операция  $\mathcal{J}$ ». Теперь такая редукция невозможна, поскольку она изменила бы электромагнитное поле. Мы вернемся ниже к обсуждению этого обстоятельства.

Множитель  $(l+1)c$ , введенный в определение приводимых моментов, не имеет особого смысла и объясняется соответствием с определением (81.1) неприводимых, которые были отнормированы в § 16 по разложению скалярного магнитного потенциала (81. ср). Удобно ввести еще специальное обозначение  $\mathbf{m}^{(l)}$  для магнитного  $2^l$ -польного момента, скалярно умноженного на  $(l-1)$  единичный вектор  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{m}_{\alpha_1}^{(l)} = m_{\alpha_1 \dots \alpha_l} n_{\alpha_2} \dots n_{\alpha_l} \quad \text{и} \quad m_{\alpha_1}^{(l)\text{red}} = m_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}} n_{\alpha_2} \dots n_{\alpha_l}. \quad (81.1')$$

**19.4М.2.** С помощью понятия приводимых магнитных моментов разложение для  $\mu$  в волновой зоне принимает форму:

$$\mu(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l! c^l} \mathbf{n} \cdot \frac{d^l \mathbf{m}^{(l)\text{red}}}{d\tilde{t}^l}. \quad (98.М)$$

**19.4Е.** Перейдем к изучению скаляра  $\varepsilon$ .

Воспользуемся для преобразования (96.Е) соотношением

$$\left(2 + \mathbf{r}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \cdot \mathbf{r}' - 1\right)$$

и перейдем с помощью (97) от частного дифференцирования по  $\mathbf{r}'$  к полному, после чего можно будет проинтегрировать по частям, причем

проинтегрированный член обратится в нуль. Мы придем тогда для  $\varepsilon$  к выражению:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \int \frac{(d\mathbf{r}') (\mathbf{R} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \dot{\rho} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2 c} + \int \frac{(d\mathbf{r}') \rho \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} - \\ & - \int \frac{(d\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2 c^2} + \int \frac{(d\mathbf{r}') (\mathbf{R} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}' \dot{\rho} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (96.E')$$

Последний член здесь ведет себя как  $1/R^2$  и поэтому в волновой зоне несуществен<sup>1)</sup>; из первых же трех получаем обычным образом

$$\varepsilon = \frac{1}{Rc} \int (d\mathbf{r}') (\mathbf{n}\mathbf{r}') \dot{\rho} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right) + \frac{1}{R} \int (d\mathbf{r}') \rho - \frac{1}{Rc} \int (d\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{j})}{c}. \quad (96.EW')$$

Разложение по степеням запаздывания дает:  
в первом члене:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\mathbf{r}') \dot{\rho} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right) \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n})^{m+1}}{c^m} \frac{d^{m+1}}{d\tilde{t}^{m+1}} \rho \left( \mathbf{r}', \tilde{t} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lc}{l!} \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right)^l \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \rho \left( \mathbf{r}', \tilde{t} \right); \end{aligned}$$

во втором:

$$\rho \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right) \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c}{l!} \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right)^l \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \rho \left( \mathbf{r}', \tilde{t} \right); \quad \rho' \equiv \rho \left( \mathbf{r}', \tilde{t} \right)$$

и в третьем

$$-\frac{1}{c} \mathbf{r}'\mathbf{j} \left( \mathbf{r}', \tilde{t} + \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right) \right) = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{c}{l!} \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right)^l \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{j}}{c^2} \right).$$

<sup>1)</sup> В статическом разложении по мультиполям как раз он играет главную роль.

Поэтому, объединяя две первые однородные суммы в одну, можем написать для  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{1}{R} \int (d\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', \tilde{t}) + \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l!} \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right)^l \rho' - \\ - \frac{1}{Rc} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c}{l!} \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c} \right)^l \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{j}'}{c^2} \right).$$

Мы выделили здесь в первой сумме нулевой член, поскольку стоящий в нем интеграл есть просто полный заряд системы, который не зависит от времени. Поэтому этот нулевой член для *переменной* части поля несуществен.

**19.4Е.1.** В остальных интегралах первой суммы легко угадать **приводимые  $2^l$ -польные электрические моменты**:

$$d_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}}(\tilde{t}) = \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \rho(\mathbf{r}', \tilde{t}), \quad (75.l.\text{red})$$

после введения которых она принимает вид, совершенно аналогичный «магнитной» формуле (98.М)<sup>1)</sup>. В виде же интегралов» стоящих во второй сумме, появляются как раз те моменты третьего семейства, о которых мы уже говорили.

Мы определим **приводимые анапольные моменты** как

$$\mathbf{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}} = \frac{-1}{(l+1)} \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \left( \frac{\mathbf{r}'\mathbf{j}'}{c^2} \right), \quad (99.l.\text{red})$$

опять оставляя читателю построение формул (99.l) и (99.1').

**19.4Е.2.** Таким образом, разложение для  $\epsilon$  в волновой зоне принимает вид:

$$\epsilon = \frac{Q}{R} + \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l! c^l} \mathbf{n} \cdot \frac{d^l \mathbf{d}^{(l)\text{red}}}{d\tilde{t}^l} + \frac{1}{Rc} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l! c^l} \mathbf{n} \cdot \frac{d^l \mathbf{a}^{(l)\text{red}}}{d\tilde{t}^l}. \quad (98.E)$$

**19.4Е.3.** Мы видим, что, как мы уже говорили, электрические и анапольные моменты входят сюда не независимо, а только, фактически, в виде комбинаций

$$\mathbf{d}^{l\text{red}} + \mathbf{a}^{l\text{red}}. \quad (*)$$

Эти комбинации нельзя, однако, непосредственно записать в форме моментов какой-либо функции от  $\Phi_0[\mathbf{j}]$  и  $\Phi_1[\mathbf{j}]$ , по-

<sup>1)</sup> Если восстановление невыписанных формул (75.l') вызывает у читателя затруднения, то, значит, он читает слишком быстро.



скольку (75.l) и (99.l) нормированы у нас различным образом («самоочевидная» функция выглядела бы как  $\rho - \frac{1}{(l+1)} \frac{(\mathbf{r}\dot{\mathbf{j}})}{c^2}$ ). Поэтому, желая объединить электрические и анапольные моменты, приходится прибегать к некоторой хитрости, результат применения которой, впрочем, тоже слегка протiwоестествен, хотя и позволяет — в случае, когда мы интересуемся только переменной частью поля — придать выражению для  $\epsilon$  более изящную форму.

**19.5.1.** Вернемся к системе (95–95b), и рассмотрим уравнение (95.2). Для *переменных* полей, для которых

$$\epsilon = \int dt \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial t},$$

мы ничего не потеряем, если продифференцируем это уравнение по времени:

$$\square \dot{\epsilon} = 4\pi \left\{ \left( 2 + \mathbf{r} \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}} \right) \dot{\rho} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_1 [\mathbf{j}] \right\},$$

что можно записать и как

$$\square \dot{\epsilon} = 4\pi \left\{ - \left( 2 + \mathbf{r} \cdot \frac{d}{d\mathbf{r}} \right) \Phi_0 [\mathbf{j}] + \Delta \Phi_1 [\mathbf{j}] - \Delta \Phi_1 [\mathbf{j}] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_1 [\mathbf{j}] \right\}.$$

Два первых члена можно теперь объединить с помощью тождества (\*) из **19.2**, а два последних образуют как раз оператор д'Аламбера, применяемый к  $\Phi_1 [\mathbf{j}]$ . Поэтому его рационально перенести в левую часть, и мы получаем таким образом вместо (95.2):

$$\square (\dot{\epsilon} + 4\pi \Phi_1 [\mathbf{j}]) = 4\pi \Phi_2 [\text{rot } \mathbf{j}]. \quad (95.2)$$

В левой части этого уравнения возникла комбинация  $\dot{\epsilon} + 4\pi \Phi_1 [\mathbf{j}]$ . Та же комбинация уже стоит в правой части (95b.1)

$$\Phi_2 [\mathbf{H}] = -\frac{1}{c} (\dot{\epsilon} + 4\pi \Phi_1 [\mathbf{j}]). \quad (\widetilde{95b.1})$$

Наконец, дифференцируя (95a.2) по времени и вспоминая, что в силу уравнения непрерывности  $\dot{\rho} = -\Phi_0 [\mathbf{j}]$  получаем вместо него

$$\Phi_0 [\dot{\epsilon} + 4\pi \mathbf{j}] = 0. \quad (\widetilde{95a.2})$$

**19.5.2.** Итак, «электрическая» система уравнений, записанная для новых функций

$$\widetilde{\epsilon}: \quad \dot{\widetilde{\epsilon}} = \dot{\epsilon} + 4\pi \Phi_1 [\mathbf{j}] \quad \text{и} \quad \widetilde{\Phi}_0 [\mathbf{E}]: \quad \dot{\widetilde{\Phi}}_0 [\mathbf{E}] = \Phi_0 [\dot{\epsilon} + 4\pi \mathbf{j}], \quad (**)$$

становится — для переменных полей — совершенно аналогичной «магнитной» системе (95.1), (95a.1), (95b.2), в которой только источники  $\Phi_2[\mathbf{j}]$  магнитной системы заменяются — для  $\tilde{\epsilon}$  — на  $c\Phi_2[\text{rot } \mathbf{j}]$  или — для  $\tilde{\epsilon}$  — на  $c \int dt \Phi_2[\text{rot } \mathbf{j}]$ . Заметим, что в силу определения  $\Phi_1$  замена (\*\*) эквивалентна замене электрического вектора  $\mathbf{E}$  на новый вектор

$$\tilde{\mathbf{E}}: \quad \tilde{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}} + 4\pi \mathbf{j} \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + 4\pi \int \mathbf{j} dt. \quad (***)$$

В силу аналогии новой электрической системы с магнитной решение будет фактически повторять формулу (96.М):

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = - \int \frac{(d\mathbf{r}') \operatorname{div} \left[ \mathbf{r}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} - 4\pi \Phi_1[\mathbf{j}]. \quad (\widetilde{96.E})$$

**19.5.3.** Замена (\*\*) любопытна тем, что *вне системы зарядов* ее нет:  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$ . Поэтому вне области занятой зарядами и интересуясь только переменной частью поля, мы можем написать:

$$\epsilon = - \int (d\mathbf{r}') \frac{\operatorname{div} \left[ \mathbf{r}' \cdot \int dt \operatorname{rot} \mathbf{j} \right]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|}. \quad (\widetilde{\widetilde{96.E}})$$

и, соответственно, в волновой зоне

$$\dot{\epsilon} = - \frac{1}{R} \int (d\mathbf{r}') \operatorname{div} \left[ \mathbf{r}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j} \left( \tilde{t} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right) \right]. \quad (\widetilde{96.EW})$$

Разложение по степеням запаздывания проводится в точности так же, как в магнитном случае, и приводит, если определить **обобщенные электрические приводимые моменты** равенствами

$$\dot{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}} = \frac{-1}{l+1} \int (d\mathbf{r}') r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \cdot \operatorname{div} [\mathbf{r}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j}'], \quad (100.l.\text{red})$$

к результату

$$\epsilon = \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l! c^l} \frac{d^l}{dt^l} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(l)\text{red}}). \quad (\widetilde{98.E})$$

**19.5.4.** Итак, мы достигли поставленной цели — выразили, скаляр  $\epsilon$  в виде разложения по (новым) моментам *одного* рода. Посмотрим, однако, как связаны эти новые обобщенные электрические моменты с входившими ранее в разложение той же величины  $\epsilon$  обычными электрическими и анапольными моментами.

Удобнее сразу рассматривать входящую в (98.Е) комбинацию

$$\frac{1}{c^l} \mathbf{n} \dot{\mathbf{D}}^{(l)\text{red}} = \frac{-1}{l+1} \int (d\mathbf{r}') \left( \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c} \right)^l \text{div} [\mathbf{r}' \cdot \text{rot} \mathbf{j}']$$

и воспользоваться тождеством

$$[\mathbf{r}' \cdot \text{rot} \mathbf{j}'] = \mathbf{j}' + \text{rot} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}'] - \mathbf{r}' \cdot \text{div} \mathbf{j}' + \text{grad} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}').$$

При подстановке под интеграл первого члена правой части этого тождества сразу образуются моменты от плотности заряда  $\dot{\rho}$ ; во втором члене дивергенция ротора даст нуль; в третьем члене надо будет сделать одно интегрирование по частям, после чего опять возникнут моменты от  $\dot{\rho}$ ; наконец, в четвертом, где образуется оператор Лапласа, интегрировать по частям придется дважды, после чего там возникнут анапольные моменты порядка  $(l-2)$ . В конечном результате мы придем к формуле

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{D}}^{(l)\text{red}}}{c^l} = \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}^{(l)\text{red}}}{c^l} + \frac{l(l-1)^2}{l+1} \int dt \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^{(l-2)\text{red}}}{c^{l-2}}.$$

Если переписать полученное соотношение для самих тензоров  $D_{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \dots$ , то оно будет гласить

$$\dot{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}} = \dot{d}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}} + \frac{2c^2(l-1)}{(l+1)} P \delta_{\alpha_{l-1} \alpha_l} \cdot \int dt \mathbf{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_{l-2}}^{\text{red}},$$

где буква  $P$  означает, что нужно взять сумму по всем  $\frac{l!}{(l-2)!2!}$  способам, выделяющим из индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  какую-либо фиксированную пару в качестве индексов у символа Кронекера. Из последней записи ясно видно то любопытное обстоятельство, что анапольная составляющая тензора  $D_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{\text{red}}$  не имеет неприводимой части и является на самом деле комбинацией (анапольных) моментов порядка  $(l-2)$ .

В этом и состоит прокламированная выше «противоестественность» объединения электрических и анапольных моментов в единые обобщенные электрические моменты. Хотя и можно найти такую величину —  $\Phi_2[\text{rot} \mathbf{j}]$ , — моменты которой объединяют электрические и анапольные свойства излучающей системы как раз в той комбинации, которая определяет излучение, но эти моменты будут тогда объединять электрические и анапольные моменты *разной мультипольности*.

ЗАМЕЧАНИЕ: С чисто формальной стороны это обстоятельство довольно очевидно уже из того, что, при одинаковых значениях  $l$ , анапольные моменты включают, сравнительно с электрическими, две лишние степени малого параметра  $\frac{r'}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ . ■

**19.6.1.** Как мы уже подчеркивали, в построенные пока разложения (98.М), (98.Е), (98.Е) скаляров  $\mu$  и  $\epsilon$  входят *приводимые* моменты (81.l.red), (75.l.red), (99.l.red) или (100.l.red). Поэтому иногда говорят, что определяющие излучение мультипольные моменты имеют больше компонент, чем статические — такая позиция в какой-то мере естественна, если смотреть на излучение с точки зрения излучающей системы.

**19.6.2.** Можно однако, как и в только что обсужденной проблеме объединения электрических и анапольных моментов, занять и другую позицию, рассматривая излучение только с точки зрения строения излучаемой волны, т. е. зависимости  $\mu$  и  $\epsilon$  от вектора  $\mathbf{n}$ . Тогда естественно разложить, например в (81.l.red) симметричные тензоры  $\alpha'_1 \dots \alpha'_l$  по бесследовым симметричным тензорам убывающих рангов, записывая

$$r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} = \mathcal{J}'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} + C_{l1} r'^2 \cdot P \cdot \mathcal{J}'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-2}} \cdot \delta_{\alpha_{l-1}\alpha_l} + \\ + C_{l2} r'^4 \cdot P \cdot \mathcal{J}'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l-4}} \cdot \delta_{\alpha_{l-1}\alpha_l} + \dots,$$

где  $C_{ls}$ ,  $s = 0, 1, \dots$ ;  $C_{l0} = 1$  — надлежаще подобранные численные коэффициенты, а  $P$  — операторы перестановок индексов, которые необходимо выполнить, дабы не потерять свойства полной симметрии. Подставив это разложение под интеграл в (81.l.red) и свертывая, как то потребно для разложения (98.М), с  $l$  векторами  $\mathbf{n}$ , заметим, что — поскольку  $n_{\alpha_i} n_{\alpha_j} \delta_{\alpha_i \alpha_j} = \mathbf{n}^2 = 1$  —  $s$ -й член правой части (+) даст в

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^l}{dt^l} \mathbf{nm}^{(l)} \text{ red} \quad \text{вклад} \quad C_{l1} \left( \frac{r'^2}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \right)^s \left( \frac{1}{c^{l-2s}} \frac{d^{l-2s}}{dt^{l-2s}} \mathbf{nm}^{(l-2s)} \right),$$

который ведет себя в смысле зависимости от  $\mathbf{n}$  совершенно так же, как и  $\frac{1}{c^{l'}} \frac{d^{l'}}{dt^{l'}} \mathbf{nm}^{(l')}$  — главный, неприводимый, вклад приводимого момента  $\mathbf{m}^{(l')} \text{ red}$  с  $l' = l - 2s$ .

**19.6.3.** Естественно, поэтому, собрать все такие вклады, проистекающие от всех  $l > l'$ , вместе для каждого  $l'$ . Мы придем тогда для  $\mu$  к разложению вида

$$\mu = \frac{1}{Rc} \sum_{l'=1}^{\infty} \frac{(l'+1)c}{l'!c^{l'}} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_{l'}} \frac{d^{l'}}{dt^{l'}} \frac{-1}{(l'+1)c} \int (d\mathbf{r}') \mathcal{J}(r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_{l'}}) \times \\ \times \left\{ \text{div} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}'] + d_{l'1} \frac{r'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}'] + d_{l'2} \left( \frac{r'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^2 \text{div} [\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}'] + \dots \right\},$$

где  $d_{l'1}, d_{l'2}, \dots$  — некоторые новые численные коэффициенты. Оно содержит уже только *неприводимые* моменты, но построенные не из

самого ассоциированного с током скаляра  $\Phi_2[\mathbf{j}'] = \text{div}[\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}']$ , а из некоторого эффективного скаляра

$$\phi_2^l[\mathbf{j}'] = \Phi_2[\mathbf{j}'] + d_{l1} \frac{r'^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_2[\mathbf{j}'] + \dots = \int d\tau K^l(\mathbf{r}', \tilde{t} - \tau) \Phi_2[\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau)] \quad (101.M)$$

учитывающего фактически некоторую долю запаздывания внутри системы.

**19.6.4.** Итак, второе усложнение, с которым мы встречаемся при исследовании мультипольного разложения в задаче об излучении, связано с необходимостью различать *приводимые* (81.l. red) и эффективные *неприводимые*

$$\tilde{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\tilde{t}) = \frac{-1}{(l+1)c} \int (d\mathbf{r}') \mathcal{J}(r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l}) \Phi_2^l[\mathbf{j}'] \quad (102.M)$$

мультипольные моменты, в чем в статических разложениях не было нужды. Первые непосредственно выражаются через характеризующие распределение зарядов и токов излучающей системы скаляры  $\Phi_2[\mathbf{j}']$  (или — в электрическом случае —  $\Phi_2[\text{rot} \mathbf{j}']$ ), но содержат в себе *больше* информации о системе, чем то действительно нужно знать для однозначного определения ее поля излучения. Вторые олицетворяют как раз тот набор сведений о свойствах излучающей системы, который необходимо и достаточно знать для однозначного определения ее излучения — но зато их надо строить не из действительных скаляров  $\Phi_2[\mathbf{j}']$  (или  $\Phi_2[\text{rot} \mathbf{j}']$ ), а из эффективных скаляров  $\phi_2^l$ , своих для всякого  $l$ . Попытка построить явное выражение для этих эффективных скаляров  $\phi_2^l$  (т.е. найти значения коэффициентов  $d_{ls}$  или вид функции  $K$  в (101.M)) элементарными тензорными методами, которыми мы здесь пользуемся, приводит к громоздкой комбинаторике. С другой стороны, оно довольно непринужденно находится, если прибегнуть к аппарату сферических функций, изучаемых обычно в курсах математической физики. Поэтому мы не будем вдаваться здесь в такое решение этой задачи, подробности которого можно посмотреть, например, в книгах Джексона или Блатта и Вайскопфа.

**19.6.5.** Характеризующий магнитную часть излучаемого поля скаляр  $\mu$  запишется теперь в виде разложения по эффективным неприводимым магнитным моментам как

$$\mu(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l! c^l} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l} \frac{d^l}{d\tilde{t}^l} \tilde{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\tilde{t}). \quad (103.M)$$

**19.6Е.** Мы подробно обсудили переход от приводимых к эффективным неприводимым моментам для магнитной части поля. Для электрической части все рассуждения — в применении к обобщенным электрическим моментам (100.l.red) — проходят совершенно аналогично и приводят к определению *эффективных* обобщенных неприводимых электрических моментов

$$\tilde{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(\tilde{t}) = \frac{-1}{(l+1)} \int (d\mathbf{r}') \mathcal{J} r'_{\alpha_1} \dots r'_{\alpha_l} \cdot \phi_2^l [\text{rot } \mathbf{j}'] \quad (102.E)$$

и разложению для  $\epsilon$

$$\epsilon(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)c}{l! c^l} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l} \frac{d^l}{dt^l} \tilde{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}. \quad (103.E)$$

Как и ранее, будет удобно использовать обозначения  $\tilde{\mathbf{m}}^{(l)}$  и  $\tilde{\mathbf{D}}^{(l)}$  для результатов свертывания (102) с  $(l-1)$  единичным вектором  $\mathbf{n}$ .

**19.7.** Введение двух скалярных характеристик электромагнитного поля —  $\mu$  и  $\epsilon$  — позволило прийти к простым и симметричным формулам (103) для разложения поля системы зарядов по мультиполям; но эти разложения построены пока только для скаляров  $\mu$  и  $\epsilon$ . Нам надо теперь научиться, как восстанавливать по известным  $\mu$  и  $\epsilon$  величины, имеющие непосредственный физический смысл, — сами поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$  и полный поток у излучаемой системой энергии.

**19.7.1.** Вернемся того ради к основной системе максвелловых уравнений (51.1, 2.1, 2) и разобьем в ней источники на две группы согласно схеме:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^e + \rho^m; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^e + \mathbf{j}^m; \quad \rho^e = \rho; \quad \rho^m = 0; \\ \Phi_0[\mathbf{j}^e] &= \Phi_0[\mathbf{j}]; \quad \Phi_0[\mathbf{j}^m] = 0; \quad \Phi_1[\mathbf{j}^e] = \Phi_1[\mathbf{j}]; \quad \Phi_1[\mathbf{j}^m] = 0; \\ \Phi_2[\mathbf{j}^e] &= 0; \quad \Phi_2[\mathbf{j}^m] = \Phi_2[\mathbf{j}]. \end{aligned}$$

Тогда и поля (мы ведь все время занимаемся только частным — запаздывающим — решением неоднородных уравнений) разобьются на

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m,$$

причем каждая пара  $(\mathbf{E}^e, \mathbf{H}^e)$  и  $(\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m)$  будет сама по себе удовлетворять уравнения Максвелла с источниками  $(\epsilon^e, \mathbf{j}^e)$  и  $(\epsilon^m, \mathbf{j}^m)$  соответственно.

**19.7.2.** При переходе к скалярной системе (95) (в видоизменении (95)),

$$\square\mu = \frac{4\pi}{c} \Phi_2 [\mathbf{j}] \equiv \frac{4\pi}{c} \Phi_2 [\mathbf{j}^m]; \quad \square\tilde{\varepsilon} = 4\pi\Phi_1 [\text{rot } \mathbf{j}] \equiv 4\pi\Phi_2 [\text{rot } \mathbf{j}^e],$$

выяснится прежде всего, что благодаря принятому разбиению источников

$$\mu^m = \mu; \quad \mu^e = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon^m = 0; \quad \varepsilon^e = \varepsilon.$$

Потому остальные уравнения (94'), (95а, б) системы для «магнитной» части поля будут содержать только  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0 [\mathbf{H}^m] &= 0; & \Phi_0 [\mathbf{E}^m] &= 0; \\ \Phi_1 [\mathbf{H}^m] &= \mu; & \Phi_1 [\mathbf{E}^m] &= 0; \\ \Phi_2 [\mathbf{H}^m] &= 0; & \Phi_2 [\mathbf{E}^m] &= \frac{1}{c} \dot{\mu}, \end{aligned} \quad (104.M)$$

а для «электрической» части — только  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0 [\mathbf{H}^e] &= 0; & \Phi_0 [\mathbf{E}^e] &= 4\pi\rho; \\ \Phi_1 [\mathbf{H}^e] &= 0; & \Phi_0 [\mathbf{E}^e] &= \tilde{\varepsilon} - 4\pi\Phi_1 \left[ \int \mathbf{j} dt \right]; \\ \Phi_2 [\mathbf{H}^e] &= -\frac{1}{c} \dot{\tilde{\varepsilon}}; & \Phi_2 [\mathbf{E}^e] &= 0; \end{aligned} \quad (104.E)$$

**19.7.3.** Рассмотрим «электрическую половину» системы (104.M) для магнитной части поля. Последнее из ее уравнений гласит

$$\Phi_2 [\mathbf{E}^m] = - \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \mathbf{E}^m = \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

Попробуем «решить» его чисто формально, разделив обе части на оператор  $\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]$  и не задумываясь пока о смысле такого действия, т. е. написать

$$\mathbf{E}^m = - \frac{1}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]} \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

или, чтобы не иметь все-таки вектора в знаменателе,

$$\mathbf{E}^m = - \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \frac{1}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

Легко видеть, что такое решение формально удовлетворяет всем трем уравнениям «электрической половины» (104.M).

Действительно,

$$\frac{d}{d\mathbf{R}} \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{R} \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] = 0.$$

Далее, вектор  $\mathbf{H}^m$  можно восстановить по формально найденному  $\mathbf{E}^m$  с помощью первого уравнения (51.1.1) первой максвелловой пары, что дает:

$$\mathbf{H}^m = \text{rot} \frac{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} \mu.$$

Для такого  $\mathbf{H}^m$  скаляр  $\Phi_0[\mathbf{H}^m] = 0$  как дивергенция ротора,

$$\Phi_2[\mathbf{H}^m] = - \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left[ \frac{d}{d\mathbf{R}} \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \right] \frac{\mu}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} = 0,$$

— поскольку

$$\left[ \frac{d}{d\mathbf{R}} \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \right] = \mathbf{R} \cdot \Delta - \frac{d}{d\mathbf{R}} \left( 1 + \left( \frac{d}{d\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \right) \right),$$

а

$$\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \mathbf{R} = \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} = 0,$$

— и

$$\begin{aligned} \Phi_1[\mathbf{H}^m] &= \mathbf{R} \cdot \left[ \frac{d}{d\mathbf{R}} \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \right] \frac{\mu}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} = \\ &= \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \frac{\mu}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} = \mu, \end{aligned}$$

т.е. выполняются и все уравнения «магнитной половины» системы (104.М).

**19.7.4.** Итак, если образовать из скаляра  $\mu$  новый скаляр  $\widetilde{\mu}$ , с помощью пока чисто формальной операции деления на оператор

$$\widetilde{\mu} = \frac{\mu}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2}, \quad (105.М.1)$$

то уравнения (104.М) для «магнитной» части векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будут удовлетворены выражениями

$$\mathbf{E}^m = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \widetilde{\mu}; \quad \mathbf{H}^m = \text{rot} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \widetilde{\mu}, \quad (105.М.2,3)$$



которые, следовательно, решают задачу о восстановлении магнитной части полей по известному  $\mu$ , коль скоро формальной операции (105.М.1) удастся придать реальный смысл.

**19.7.5.** Совершенно аналогично проходит и рассмотрение системы (104.Е) для «электрической» части поля. Ее «магнитная половина» формально удовлетворяется образованием

$$\mathbf{H}^e = \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \frac{1}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{1}{d\mathbf{R}} \right]^2} \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t}.$$

Электрическая часть  $\mathbf{E}^e$  электрического поля восстанавливается по нему с помощью первого уравнения (51.2.1) второй максвелловой пары в форме

$$\mathbf{E}^e = \text{rot} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \frac{1}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} \tilde{\epsilon} - 4\pi \int \mathbf{j}^e dt,$$

и подстановка этого выражения в «электрическую половину» (104.Е) показывает, что эти уравнения также удовлетворяются.

**19.7.6.** Найденные выражения для «электрической» части векторов  $\mathbf{E}^e$  и  $\mathbf{H}^e$  упрощаются и становятся совершенно аналогичными выражениям (105.М) для магнитной части, если рассмотреть их вне системы зарядов, где  $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ , а  $\mathbf{j}^e = 0$ . Производя опять формальное построение нового электрического скаляра

$$\tilde{\tilde{\epsilon}} = \frac{\tilde{\epsilon}}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} = \frac{\epsilon}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2}, \quad (105.Е.1)$$

получим в такой области для  $\mathbf{E}^e$  и  $\mathbf{H}^e$ :

$$\mathbf{E}^e = \text{rot} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \tilde{\tilde{\epsilon}}; \quad \mathbf{H}^e = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \tilde{\tilde{\epsilon}}$$

— выражения, решающие (формально) задачу восстановления электрической части полей по известному  $\epsilon$ .

**19.8.** Зная поля, мы можем теперь найти по общим формулам (88.4–6) 17-го параграфа излучение системы.

**19.8.1.** При вычислении вектора Пойнтинга и полного излучения магнитной части поля удобно выражать все величины в формулах (88) через электрическое поле  $\mathbf{E}^m$  (т.е. пользоваться тем, что в волновой зоне  $\mathbf{H}^m = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^m]$ ). Мы получим тогда для полной потери энергии на излучение магнитных волн

$$\mathcal{J}^m = \frac{c}{4\pi c} \oint R^2 d\mathcal{O} \left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right) \left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right).$$

Но

$$\left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right) \left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right) = \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left( \dot{\tilde{\mu}} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right) - \dot{\tilde{\mu}} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2 \dot{\tilde{\mu}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m = & \frac{1}{4\pi c} \oint R \left[ R^2 d\mathcal{O} \mathbf{n} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left( \dot{\tilde{\mu}} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right) - \\ & - \frac{1}{4\pi c} \oint R^2 d\mathcal{O} \dot{\tilde{\mu}} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2 \dot{\tilde{\mu}} = \frac{1}{4\pi c} \oint \left[ d\sigma \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left( \dot{\tilde{\mu}} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \dot{\tilde{\mu}} \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi c} \oint R^2 d\mathcal{O} \dot{\mu} \frac{1}{-\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2} \dot{\mu}. \end{aligned}$$

Первый член здесь обращается в нуль в силу теоремы Стокса как поток ротора через замкнутую поверхность, второй же дает нам результат:

$$\mathcal{J}^m = \frac{R^2}{c} \int \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} \frac{\dot{\mu} \dot{\mu}}{-\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2}. \quad (106.M)$$

**19.8.2.** При вычислении излучения электрической части поля удобно выражать все через магнитное поле  $\mathbf{H}^e$  (т.е. пользоваться тем, что в волновой зоне  $\mathbf{E}^e = -[\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e]$ ); тогда совершенно тождественные рассуждения ведут к результату

$$\mathcal{J}^e = \frac{R^2}{c} \int \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} \frac{\dot{\tilde{\epsilon}} \dot{\tilde{\epsilon}}}{-\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2}. \quad (106.E)$$

Поскольку излучение  $\mathcal{J}$  квадратично по полям, то, если поле содержит и электрическую и магнитную части, могут возникнуть интерференционные члены  $\mathbf{S}^{em} + \mathbf{S}^{me}$  и  $\mathcal{J}^{em} + \mathcal{J}^{me}$ . В § 18 мы убедились, что для младших мультиполей такие члены в *полном излучении*  $\mathcal{J}$  исчезают. Покажем, что эта особенность сохраняется и в общем случае.

**19.8.3.** Смешанные члены в полном излучении задаются выражением

$$\mathcal{J}^{me} + \mathcal{J}^{em} = cR^2 \oint \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} (\mathbf{E}^m \cdot \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{E}^m) = \frac{cR^2}{2\pi} \oint d\mathcal{O} (\mathbf{E}^m \cdot \mathbf{E}^e).$$

В волновой зоне и в силу (105) здесь можно написать

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^m \cdot \mathbf{E}^e &= -\frac{1}{c} \left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \ddot{\tilde{\mu}} \right) [-\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e] = \\ &= \frac{1}{c} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left( \ddot{\tilde{\mu}} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e] \right) - \frac{1}{c} \ddot{\tilde{\mu}} \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e].\end{aligned}$$

Во втором члене

$$\begin{aligned}\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e] &= -2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e) - \mathbf{n} \left[ \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot \mathbf{H}^e \right] = \\ &= -\frac{n}{c} \left[ \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \right] \ddot{\tilde{\epsilon}},\end{aligned}$$

поскольку  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^e) = 0$ . Однако легко видеть, что

$$\begin{aligned}\left[ \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \right] &= \left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right) \mathbf{R} - \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] - \\ &- \left( \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \cdot \mathbf{R} \right) \frac{d}{d\mathbf{R}} = - \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right],\end{aligned}$$

поэтому второй член равен

$$\frac{1}{c} \left( \mathbf{n} \cdot \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \right) \ddot{\tilde{\epsilon}} = 0.$$

Что же касается первого члена в скалярном произведении  $\mathbf{E}^m \cdot \mathbf{E}^e$ , то после подстановки под интеграл его можно будет проинтегрировать с помощью теоремы Стокса; следовательно, его вклад в полное проинтегрированное по всем направлениям излучение тоже будет равно нулю. Таким образом

$$g^{em} = g^{me} = 0, \quad (106.EM)$$

— т. е. электрическая и магнитная часть *полного* излучения действительно не интерферируют.

**19.8.4.** Итак, мы нашли изящные формальные выражения (106) для энергии, излучаемой системой в виде магнитных и электрических волн. Пока, однако, эти выражения не имеют никакого смысла, поскольку неизвестно, что означает помещение оператора в знаменатель: наша запись, например (105.M.1),

$$\ddot{\tilde{\mu}} = \frac{\mu}{\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2}$$

говорит нам не более того, что  $\ddot{\tilde{\mu}}$  должно быть решением уравнения

$$\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2 \ddot{\tilde{\mu}} = \mu,$$

решением, которое еще предстоит найти (убедившись сперва в его существовании и единственности).

**19.9.** Оказывается, однако, что эта проблема очень легко решается, если воспользоваться для  $\mu$  и  $\varepsilon$  построенными выше разложениями (103) по *неприводимым* (эффективным) моментам, отдельные члены которых, как мы сейчас выясним, очень просто ведут себя по отношению к действию оператора  $\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]$ . Одновременно мы придем и к явным выражениям для электрического и магнитного полей излучающей системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Забегая вперед в область квантовой механики, поясним, в чем причина упрощения. Оператор  $\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]$  есть, с точностью до множителя  $i$ , квантовомеханический *оператор момента*, а бесследовые произведения  $\mathcal{I}n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l}$  единичных векторов суть, как уже отмечалось в § 15, линейные комбинации *сферических функций* — собственных функций квадрата этого оператора. При действии на них  $\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]^2$  превращается — мы сейчас в этом убедимся — в число, не равное нулю, которое, следовательно, можно перевести в знаменатель, не вызывая недоумения. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ К ЗАМЕЧАНИЮ:** По существу это тот же метод Фурье, которым мы воспользовались, чтобы найти решение уравнений электромагнитного поля. Только теперь положение упрощается тем, что среди собственных значений нет нуля, поэтому однородное уравнение не имеет решений, а решение неоднородного — единственно. ■

**19.9.1.** Существенная часть общего члена разложения (103.М) для  $\mu$  есть

$$\mathcal{I}n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l} \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \equiv n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l} \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \left(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)}\right).$$

**19.9.1.1.** Подействуем на него оператором  $\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]$ .

Замечая сперва, что

$$\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]_{\beta} n_{\alpha} = e_{\beta\mu\nu} R_{\mu} \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial R_{\nu}} = e_{\beta\mu\alpha} \cdot n_{\mu}$$

и, следовательно, что, если  $\mathbf{C}$  — постоянный вектор,

$$\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}) = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}] \quad \text{и} \quad \left(\mathbf{C} \cdot \left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right]\right) \mathbf{n} = -[\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}],$$

получаем без труда:

$$\left[\mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}}\right] \left(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)}\right) = l \left[\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)}\right]. \quad (107.1)$$

**19.9.1.2.** Далее

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left[ \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right] &= \left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] e_{\beta\mu\alpha_l} n_\mu \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_l}^{(l)} = \\
&= e_{\beta\mu\alpha_l} e_{\beta\sigma\mu} n_\sigma \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_l}^{(l)} + e_{\beta\mu\alpha_l} n_\mu \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \sum_{i=1}^{\infty} e_{\beta\sigma\alpha_i} \underbrace{n_\sigma n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_{l-1}}}_{\text{без } i} = \\
&= -2 \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right) - (l-1) \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right),
\end{aligned}$$

то есть

$$\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right] \left[ \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right] = -(l+1) \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right). \quad (107.2)$$

**19.9.1.3.** Комбинируя эти два правила действий, получим, в частности,

$$-\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2 \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right) = l(l+1) \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right) \quad (107.3)$$

— результат, который мы уже прокламировали: действие оператора  $-\left[ \mathbf{R} \cdot \frac{d}{d\mathbf{R}} \right]^2$  на каждый из членов разложения (103.М) (или (103.Е)) сводится к умножению на число  $l(l+1)$  (не равное нулю, поскольку суммирование в (103) начинается с  $l=1$ ).

**19.9.2.** Требуемое соотношениями (105.М, Е.1) деление не вызывает теперь затруднений, и мы можем записать мультипольные разложения для скаляров  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= \frac{-1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot l! \cdot c^{l-1}} \frac{d^l}{dt^l} \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right); \\
\tilde{\varepsilon} &= \frac{-1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot l! \cdot c^{l-1}} \frac{d^l}{dt^l} \left( \mathbf{n} \cdot \tilde{D}^{(l)} \right).
\end{aligned} \quad (108)$$

Правило (107.1) позволяет перейти от этих разложений к мультипольным разложениям для полей (при вычислении ротора в выражениях для  $\mathbf{H}^m$  и  $\mathbf{E}^e$  следует, конечно, использовать упрощение (85а) волновой зоны). Находим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^m &= \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! \cdot c^l} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} \left[ \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right]; \\
\mathbf{H}^m &= \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! \cdot c^l} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} \left[ \mathbf{n} \cdot \left[ \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right] \right];
\end{aligned} \quad (109.М)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^e &= \frac{1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! \cdot c^l} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} [\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \tilde{D}^{(l)}]]; \\ \mathbf{H}^e &= \frac{-1}{Rc} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! \cdot c^l} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} [\mathbf{n} \cdot \tilde{D}^{(l)}].\end{aligned}\quad (109.E)$$

**19.10.** Эти выражения можно привести к форме, внешне совершенно аналогичной выражениям для полей электрического и магнитного диполя из § 18 (90.1E) и (90.1M). Для этой цели надо ввести для системы зарядов единые характеристики, определяющие излучение системы *по данному направлению* (зависящие не только от свойств системы, но и от выбранного в пространстве направления  $\mathbf{n}!$ ), два вектора

$$\mathfrak{M}(\mathbf{n}, \tilde{t}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! \cdot c^{l-1}} \frac{d^{l-1}}{d\tilde{t}^{l-1}} \tilde{\mathfrak{m}}^{(l)}(\tilde{t}) \quad (110.M)$$

и

$$\mathbf{D}(\mathbf{n}, \tilde{t}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! \cdot c^{l-1}} \frac{d^{l-1}}{d\tilde{t}^{l-1}} \tilde{\mathbf{D}}^{(l)}(\tilde{t}). \quad (110.E)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Первые, главные в разложении по малому параметру квазистационарности, члены этих двух векторов совпадают соответственно с магнитным и электрическим дипольными моментами системы:

$$\mathfrak{M}(\mathbf{n}, \tilde{t}) = \tilde{\mathfrak{m}}(\tilde{t}) + \dots; \quad \mathbf{D}(\mathbf{n}, \tilde{t}) = \tilde{\mathbf{d}}(\tilde{t}) + \dots \quad \blacksquare \quad (110a)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Исходя из скаляров  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{\epsilon}$ , эти векторы можно определить как

$$-\frac{1}{Rc} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \tilde{t}} = \frac{d\tilde{\mu}}{d\mathbf{n}}; \quad -\frac{1}{Rc} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tilde{t}} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\mathbf{n}}; \quad (110b)$$

независимость компонент  $n_\alpha$  ( $n_\alpha n_\alpha = 1$ ) не должна нас смущать при выполнении дифференцирований в правых частях этих равенств, поскольку произведения  $n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l}$  входят в (108) лишь в виде полных свертки с бесследными моментами  $\tilde{\mathfrak{M}}$  или  $\tilde{D}$ .  $\blacksquare$

Поля выражаются через эти два вектора совершенно так же, как для электрического или магнитного диполя:

$$\mathbf{E}^m = \frac{[\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathfrak{M}}]}{Rc^2}; \quad \mathbf{H}^m = \frac{[\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathfrak{M}}]]}{Rc^2} \quad (90M)$$

и

$$\mathbf{H}^e = -\frac{[\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}}]}{Rc^2}; \quad \mathbf{E}^e = \frac{[\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}}]]}{Rc^2}, \quad (90E)$$

но аналогия эта, конечно, чисто внешняя, поскольку  $\mathfrak{M}$  и  $\mathbf{D}$  сами зависят от  $\mathbf{n}$ , почему действительная зависимость полей (90.E) и (90.M) от направления может быть сколь угодно сложной.

Это обстоятельство, однако, ни в коей мере не препятствует получить из (90.E, M) совершенно аналогичные (90.1E, M.3) и (91.1E, M) выражения для вектора Пойнтинга и полного излучения:

$$(90.E.3) \quad \mathbf{S}^e = \frac{\mathbf{n}}{4\pi R^2} \frac{[\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}}]^2}{c^3}; \quad \mathbf{S}^m = \frac{\mathbf{n}}{4\pi R^2} \frac{[\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathfrak{M}}]^2}{c^3} \quad (90.M.3)$$

и

$$(91.E) \quad \mathcal{J}^e = \oint \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} \frac{[\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}}]^2}{c^3}; \quad \mathcal{J}^m = \oint \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} \frac{[\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathfrak{M}}]^2}{c^3}. \quad (91.M)$$

**19.11.** Единственное, что нам еще осталось сделать, это — используя разложения (108) или (110) по неприводимым моментам — реально выполнить фигурирующие в формулах для полного излучения интегрирования по  $d\mathcal{O}$ , т. е. провести ту операцию, которую мы назвали в § 18 усреднением произведений единичных векторов по углам. В случае дипольных и квадрупольного излучения мы провели эту операцию непосредственным вычислением, использующим лишь соображения симметрии. Распространение этого способа на старшие моменты хотя и было бы возможно, но привело бы к весьма громоздкой комбинаторике. Счастливым образом оказывается, что ее можно избежать за счет искусственного приема.

Действительно, в ходе последних рассуждений мы получили два выражения для суммарного излучения: формулы (106) и (91); оба эти выражения должны, конечно, давать одинаковый результат. Оказывается, как раз этого требования достаточно для нахождения самого результата. Однако сперва несколько предварительных замечаний и простых выкладок.

**19.11.1.** Когда мы подставим, например в (106), разложения (103), то придем к двойной сумме интегралов (все численные множители пока несущественны) типа

$$\int d\mathcal{O} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_i} n_{\beta_1} \dots n_{\beta_{i'}} \tilde{m}_{\alpha_1 \dots \alpha_i} \tilde{m}_{\beta_1 \dots \beta_{i'}}.$$

При интегрировании («усреднении по углам») векторы  $\mathbf{n}$  объединяются (ср. подробное рассуждение в § 18) во всевозможные пары — образуют «свертки», — каждая из которых дает кронекеров символ с теми же индексами. Легко видеть, что ненулевой результат дадут лишь те члены, в которых «свертываются» исключительно пары  $n_{\alpha_i}$  и  $n_{\beta_i}$  —

иначе получилась бы  $\delta_{\alpha_i \alpha'_i}$ , или  $\delta_{\beta_j \beta_j}$ , которая дала бы нуль при внутреннем умножении на *неприводимый* момент. Следовательно, — первый вывод — в двойной сумме по  $l$  и  $l'$  останутся после интегрирования *лишь диагональные члены* с  $l = l'$ , т. е. она превратится в одинарную.

**19.11.2.** Выпишем теперь со всеми коэффициентами выражение, скажем для полного магнитного излучения, которое получается, исходя из (106.М). Подставляя (103.М), имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m &= \frac{\mathbf{R}^2}{c} \oint \frac{d\mathcal{O}}{4\pi} \frac{1}{R^2 c^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)^2}{l! l! c^{2l-2}} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l} n_{\beta_1} \dots n_{\beta_l} \times \\ &\quad \times \frac{d^{l+1} \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{\tilde{d}t^{l+1}} \frac{1}{l(l+1)} \frac{d^{l+1} \tilde{\mathbf{m}}_{\beta_1 \dots \beta_l}}{\tilde{d}t^{l+1}} = \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! l! c^{2l-2}} \frac{l+1}{l} \oint \frac{d^{l+1} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)})}{\tilde{d}t^{l+1}} \cdot \frac{d^{l+1} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)})}{\tilde{d}t^{l+1}} d\mathcal{O}. \end{aligned}$$

С другой стороны, то же полное излучение должно получаться из (91.М) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^m &= \frac{1}{4\pi c^3} \oint d\mathcal{O} [\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}}]^2 = \frac{1}{4\pi c^3} \oint d\mathcal{O} \left\{ \ddot{\mathbf{m}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}})^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \oint d\mathcal{O} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! l! c^{2l-2}} \left\{ \left( \frac{d^{l+1} \tilde{\mathbf{m}}^{(l)}}{\tilde{d}t^{l+1}} \cdot \frac{d^{l+1} \tilde{\mathbf{m}}^{(l)}}{\tilde{d}t^{l+1}} \right) - \left( \frac{d^{l+1} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)})}{\tilde{d}t^{l+1}} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы эти два выражения совпадали, надо, чтобы было тождественно

$$\oint d\mathcal{O} \left( \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} - (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)})^2 \right) = \frac{l+1}{l} \oint d\mathcal{O} (\mathbf{n} \tilde{\mathbf{m}}^{(l)})^2 \quad ^1). \quad (*)$$

Тождество (\*) — это наш второй вывод.

**19.11.3.** Рассмотрим теперь интеграл

$$I_l = \oint d\mathcal{O} (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)})^2.$$

В результате интегрирования все векторы  $n_{\alpha_i}$  и  $n_{\beta_j}$  в нем объединятся в пары, которые дадут кронекеровы  $\delta_{\alpha_i \alpha_j}$ , и после свертывания с обоими моментами  $l$ -го порядка может остаться только квадрат момента  $(\tilde{\mathbf{m}}_l)^2 = \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  с некоторым зависящим лишь от  $l$  численным коэффициентом  $C_l$ , который пока неизвестен:

$$I_l = C_l (\tilde{\mathbf{m}}_l)^2$$

— наш третий вывод.

<sup>1)</sup> Не составляет труда и прямая проверка этого тождества, опирающаяся на теорему Стокса и тождество (107.1).



**19.11.4.** Во второй форме выражения для  $\mathcal{J}^m$  кроме  $I_l$  участвуют еще и интегралы вида

$$I'_l = \oint dO \left( \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \cdot \tilde{\mathbf{m}}^{(l)} \right),$$

дающие на один  $\delta$ -символ меньше, чем  $I_l$ . Легко сообразить, что

$$I'_l = C_{l-1} \cdot (\tilde{\mathbf{m}}_l)^2,$$

С учетом этого замечания, тождество (\*) принимает вид

$$C_{l-1} (\tilde{\mathbf{m}}_l)^2 - C_l (\tilde{\mathbf{m}}_l)^2 = \frac{l+1}{l} C_l (\tilde{\mathbf{m}}_l)^2$$

или

$$\frac{2l+1}{l} C_l = C_{l-1}; \quad C_l = \frac{l}{2l+1} C_{l-1},$$

— т. е. ведет к рекуррентной формуле для коэффициентов  $C_l$ .

С учетом очевидного граничного условия  $C_0 = 4\pi$  это рекуррентное соотношение немедленно решается и приводит к

$$C_l = \frac{l!}{(2l+1)!!} 4\pi = 4\pi \frac{l! 2^l}{(2l+1)!}$$

и, следовательно, к выражению

$$\mathcal{J}^m = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l! l! c^{2c+1}} \frac{l+1}{l} \frac{l! l! 2^l}{(2l+1)!} \left( \frac{d^{l+1} \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{d\tilde{t}^{l+1}} \right)^2$$

для полного магнитного излучения  $\mathcal{J}^m$ .

**19.11.5.** Итак,

$$\mathcal{J}^m = \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{J}^{ml} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{l} \frac{1}{(2l+1)!} \frac{2^l}{c^{2l+1}} \left( \frac{d^{l+1} \tilde{\mathbf{m}}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{d\tilde{t}^{l+1}} \right)^2 \quad (92.M)$$

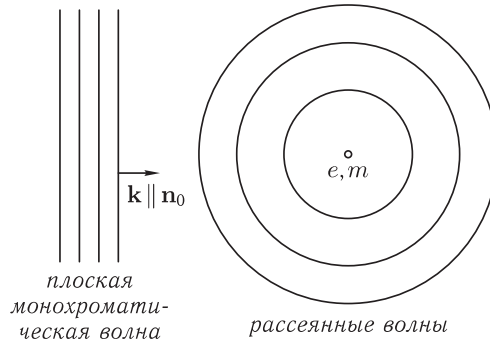
Рассуждения для полного электрического излучения совершенно аналогичны; поэтому мы не будем их повторять, а сразу выпишем результат:

$$\mathcal{J}^e = \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{J}^{el} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{l} \frac{1}{(2l+1)!} \frac{2^l}{c^{2l+1}} \left( \frac{d^{l+1} \tilde{D}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}}{d\tilde{t}^{l+1}} \right)^2. \quad (92.E)$$

Легко проверить, что, выбирая из этих формул члены с  $l = 1$  и с  $l = 2$ , мы снова вернемся к формулам (92.1E), (92.1M) и (92.2E) предыдущего параграфа.

## 20. Рассеяние света на свободных зарядах

**20.1.** В качестве — представляющего и самостоятельный интерес — примера на вычисление излучения системой зарядов, рассмотрим задачу о свободном заряде, находящемся в (заданном) поле плоской монохроматической электромагнитной волны.



Под действием этого поля заряд придет в (неравномерно прямолинейное) движение и в результате этого начнет излучать вторичные электромагнитные волны — с точки зрения асимптотического наблюдателя будет происходить рассеяние первоначальной волны.

Если падающая волна с волновым вектором  $\mathbf{k}$  обладает плотностью потока энергии  $\mathcal{J}_0 = |\mathbf{S}_0|$ , а поток энергии, уносимый вторичной — рассеянной — волной в направлении  $\mathbf{n}$  в телесный угол  $d\mathcal{O}$  есть, согласно (88.5),  $d\mathcal{J} = \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = |\mathbf{S}| R^2 d\mathcal{O}$ , то дифференциальным эффективным сечением рассеяния естественно назвать отношение  $\frac{d\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}$ . Тут следует только сделать одно замечание. Поля и в падающей и в рассеянной волне суть периодические функции времени, а обычные приборы для обнаружения электромагнитных волн обладают инерционностью, большой сравнительно с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$  колебаний. Поэтому реально измеряются всегда лишь энергетические величины, усредненные по промежутку времени, много большему периода колебаний. Поэтому и эффективное сечение рассеяния разумно определить как отношение таких средних, т. е. как

$$d\sigma = \frac{|\overline{d\mathcal{J}}|}{\overline{\mathcal{J}_0}}. \quad (111)$$

В падающей плоской монохроматической волне

$$\mathcal{J}_0 = |\mathbf{S}_0| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0| = \frac{c}{4\pi} |[\mathbf{E}_0 \cdot [\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0]]| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0|^2,$$

то есть

$$\bar{\mathcal{J}}_0 = \frac{c}{4\pi} \left| \overline{\mathbf{E}_0^2} \right|.$$

В рассеянной волне будем учитывать только электрическую дипольную часть — как мы знаем, эта часть, если она только не обращается в нуль (в чем мы сейчас убедимся), составляет основную часть излучения системы, а все остальные мультиполи дают лишь поправки, меньшие по крайней мере в отношении  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ . Поэтому, согласно (91.1E'),

$$\overline{d\mathcal{G}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\overline{\dot{\mathbf{d}}^2}}{c^3} \sin^2 \vartheta \cdot d\mathcal{O}.$$

Следовательно,

$$d\sigma = \frac{\overline{\dot{\mathbf{d}}^2}}{c^4 \mathbf{E}_0^2} \sin^2 \vartheta \cdot d\mathcal{O}$$

и остается только установить связь между  $\ddot{\mathbf{d}}$  и  $\mathbf{E}_0$ .

**20.2.** Для этой цели надо обратиться к уравнению движения нашего свободного заряда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)].$$

Принятое дипольное приближение для излучения будет хорошим, если для заряда  $v \ll c$ , т.е. если его движение можно считать нерелятивистским<sup>1)</sup>. Тогда в левой части уравнения движения можно заменить импульс заряда  $\mathbf{p}$  на произведение  $m\mathbf{v}$ , а в правой — пренебречь силой Лоренца  $\frac{e}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_0]$  сравнительно с электростатической силой  $e\mathbf{E}_0$ . Мы получаем

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t).$$

Но для одного заряда дипольный момент  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ , поэтому можно записать уравнение движения прямо для дипольного момента

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t).$$

---

<sup>1)</sup> Это предположение содержит в себе и то требование, что амплитуда падающей волны должна быть не слишком велика.

Как видим, его даже не нужно решать — в левой части стоит как раз та вторая производная, которую надо подставлять в выражение для сечения. Не требуется исследовать и усреднение по времени — средние по времени от квадрата поля в числителе и знаменателе формулы для эффективного сечения просто сокращаются<sup>1)</sup>, и мы приходим к искомому результату:

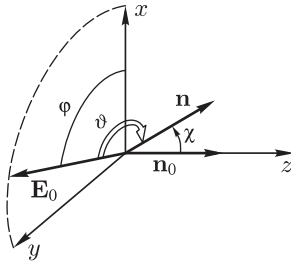
$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \cdot d\mathcal{O}, \quad (112)$$

по поводу которого уместно сделать несколько замечаний.

**20.3.** Прежде всего обратим внимание на то обстоятельство, что в формуле (112) из характеризующих частицу массы  $m$  и заряде  $e$  образовалась константа размерности длины. Если частица, на которой происходит рассеяние, есть электрон, то эта константа

$$\frac{e^2}{mc^2} = r_0$$

есть как раз та величина, которую мы назвали в § 14 *классическим радиусом электрона* и которая определяла порядок размеров протяженных моделей элементарных частиц. Сейчас,



однако, вычисляя рассеяние электромагнитной волны, мы исходили из представления о *точечной* заряженной частице; формула (112) показывает, что и такая частица демонстрирует в своем взаимодействии с электромагнитным полем некоторый размер, и притом как раз равный классическому радиусу. Второе замечание относится к тому, что входящий в (112) угол  $\vartheta$  есть угол

между направлением рассеяния  $\mathbf{n}$  и *направлением поляризации*  $\frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|}$  падающей волны, но не направлением ее *распространения*  $\mathbf{n}_0 \parallel \mathbf{k}$ . Если принять, что падающая волна распространяется вдоль оси  $z$ , рассеяние происходит в плоскости  $(xz)$ , а направление поляризации (лежащее в  $(xy)$ ) отклонено от оси  $Ox$  на

<sup>1)</sup> То есть сечение *не зависит от интенсивности* падающей волны. Это есть, конечно, следствие линейности уравнений Максвелла.

угол  $\varphi$ , и обозначить *угол рассеяния* буквой  $\chi$ , то:

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{E}_0}{E_0} \right); & \cos \chi &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0); \\ \mathbf{n}_0 &= \{0; 0; 1\}; & \mathbf{n} &= \{\sin \chi; 0; \cos \chi\}; \\ \frac{\mathbf{E}_0}{E_0} &= \frac{\ddot{\mathbf{d}}}{|\ddot{\mathbf{d}}|} = \{\cos \varphi; \sin \varphi; 0\}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\cos \vartheta = \sin \chi \cdot \cos \varphi, \quad \sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \chi.$$

Подставляя это значение  $\sin^2 \vartheta$  в (112), получаем эффективное сечение, выраженное через углы  $\chi$  и  $\varphi$ , определяющие направление рассеяния  $\mathbf{n}$  относительно направления  $\mathbf{n}_0$  распространения падающей волны и ее плоскости поляризации ( $\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_0$ ):

$$d\sigma(\varphi, \chi) = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 [1 - \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \chi] d\varphi \sin \chi d\chi. \quad (112a)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что эффективное сечение рассеяния линейно поляризованной волны *не обладает аксиальной симметрией*, — мы впервые встречаемся с таким явлением.

**20.4.** Свет от естественных источников редко обладает определенной поляризацией; обычно он бывает смесью линейно поляризованных волн со всевозможными направлениями поляризации, не когерентных между собой. Поэтому при вычислении эффективного сечения для рассеяния такого света складываются *энергии*, а не поля, т. е. следует просто усреднить (112a) по всем направлениям  $\varphi$  поляризации. Такое усреднение дает

$$\overline{1 - \sin^2 \chi \cos^2 \varphi} = 1 - \sin^2 \chi \overline{\cos^2 \varphi} = 1 - \frac{\sin^2 \chi}{2} = \frac{1 + \cos^2 \chi}{2}.$$

Поэтому для неполяризованной волны сечение рассеяния есть:

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \chi}{2} d\varphi \sin \chi d\chi = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{3 + \cos 2\chi}{4} dO_\chi.$$

В классической механике *полное* сечение рассеяния почти всегда оказывалось бесконечным; случай конечного полного се-

чения был в каком-то смысле исключительным. **Полное эффективное сечение рассеяния** света на свободном заряде конечно: интегрированием по углам получаем — равным образом из (112) или (112b) —

$$\sigma = \oint d\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad \text{полное сечение} \quad (113)$$

Эту формулу называют **формулой Томсона**.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Томсоново сечение не зависит от длины волны падающего света. В квантовой теории выясняется, что это обстоятельство справедливо только для достаточно длинных волн; для коротких волн сечение начинает убывать. ■

## Часть III

# ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

---

### 1. Историческое введение

В первой части, начиная рассмотрение классической механики, мы подчеркивали, что эта теория, строго говоря, вообще не имеет области применимости — для элементарных частиц, когда уже нет необходимости в статистическом усреднении, вступают в игру квантовые эффекты. Теперь как раз настало время заняться рассмотрением квантовомеханического описания. При изложении мы не будем следовать историческому пути — это заняло бы слишком много времени и хотя и было бы поучительно, но, пожалуй, не только не помогало бы преодолению трудностей в восприятии новых понятий, но, наоборот, способствовало бы их нагромождению. Тем не менее не будет лишним привести краткий перечень главнейших трудностей, непреодолимых для классического описания, и напомнить о времени возникновения важнейших новых идей, приведших нас к квантовой картине.

**1.1.** В конце XIX века у физиков господствовало то впечатление, что их наука близка к исчерпанию своего предмета — все главные законы природы уже открыты, и осталась лишь чисто техническая работа — применять их к конкретным задачам и повышать точность экспериментального определения различных констант. Один из крупнейших английских физиков сказал тогда, что в физике остались, собственно, три нерешенные задачи: вывести формулу для равновесного теплового излучения, узнать, что такое шаровая молния, и объяснить, почему гудят провода.

Первая из этих задач оказалась как раз тем орехом, на котором классическая физика сломала себе зубы.

**1.1.1.** Суть проблемы состояла в следующем. Статистическая физика учит, что для всякой системы, находящейся в термодинамическом равновесии, энергия распределяется равномерно по всем степеням свободы (мы не даем сейчас *точной* формулировки этой теоремы). Поскольку у электромагнитного поля,

как мы выяснили, например в **II.13a.**, число степеней свободы бесконечно велико, то отсюда следовал парадоксальный и не отвечающий опыту вывод, что система частиц (имеющая всегда *конечное* число степеней свободы) не может находиться в равновесии с электромагнитным полем — вся энергия должна была бы переходить в излучение.

За 17 дней до начала XX века Макс ПЛАНК предложил решение этой проблемы, но достиг его ценой того совершенно «ортогонального» всей классической физике предположения, что энергия осцилляторов (которые он выбрал в качестве модели состоящего из конечного числа частиц материального тела) может принимать не любые значения, а лишь значения, кратные некоторому наименьшему «кванту»  $\mathcal{E}$

$$E = n\mathcal{E}, \quad n \in N, \quad (1.1)$$

который в свою очередь надо было считать пропорциональным частоте осциллятора

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = h\nu, \quad (1.2)$$

где  $\hbar$  — фундаментальная мировая постоянная, по современным данным

$$\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}. \quad (2)$$

Величина  $\hbar$  была названа **квантом действия**.

**1.1.2.** Следующий шаг по расшатыванию здания классической физики был сделан в 1905 году Альбертом ЭЙНШТЕЙНОМ. «Слабым местом» оказался теперь фотоэффект — явление выбивания электронов из вещества под действием света. Поразительным с точки зрения классической электродинамики образом энергия электронов не зависела при этом от интенсивности света (т.е. от амплитуды электрического вектора в световой волне), но решительно зависела от его частоты. Эйнштейн показал, что это парадоксальное поведение можно объяснить, если принять, что свет определенной частоты состоит из отдельных частиц - **фотонов**, — обладающих энергией

$$E = \hbar\omega,$$

и что при взаимодействии с веществом могут поглощаться поодиночке лишь целые фотоны. Тогда для энергии фотоэлектронов получалась естественная формула

$$T_e = \hbar\omega - W,$$

где  $W$  — работа выхода, связанная с преодолением сил, удерживающих электрон в металле.



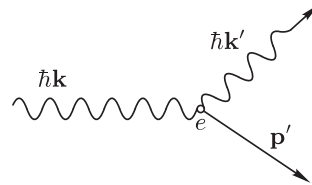
**1.1.2.1.** Введение представления о фотонах в какой-то степени возрождало корпускулярную теорию света. Оно получило дальнейшие подкрепления при рассмотрении еще ряда оптических явлений; особенно наглядно это проявилось в 1923 году, когда КОМПТОНОМ был открыт эффект, показывающий, что при рассеянии на электронах свет достаточно малой длины волны, сравнимой с (или меньшей) так называемой **комптоновой длиной волны**

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ см}$$

(длины волн такого порядка величины имеют рентгеновы лучи), ведет себя так, как будто происходят индивидуальные акты соударения фотонов с электронами, в которых выполняются все механические законы сохранения, причем фотонам оказывается необходимым приписать не только энергию  $\hbar\omega$ , но и импульс

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ .



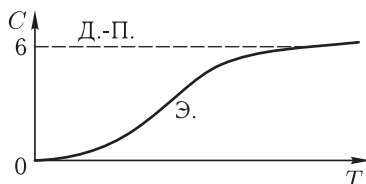
фотон, рассеивающийся на электроне

**1.1.2.2.** Однако в то же время оставались непоколебленными результаты многочисленных оптических опытов, связанных с явлениями интерференции и дифракции, поддававшиеся истолкованию только на основе волновой теории. Таким образом возникло то странное положение вещей, что все оптические явления разбивались на две группы, одна из которых поддавалась интерпретации в терминах корпускул, в то время как другая — лишь в терминах волн. Такая конфронтация двух казалось бы взаимно исключающих друг друга точек зрения получила имя **корпускулярно-волнового дуализма** и нашла себе объяснение лишь в квантовой механике.

**1.1.3.** Упомянем еще о проблеме теплоемкостей твердых тел. Согласно уже упоминавшейся теореме о равнораспределении по степеням свободы, теплоемкость должна была бы определяться числом степеней свободы. Для твердых тел получалось при этом, что если учитывать только степени свободы, описывающие движение атомов как целого, то для *всех* тел атомная теплоемкость должна была бы быть одинаковой и составить примерно  $6 \frac{\text{кал}}{\text{моль}}$  — это так называемый закон ДЮЛОНГА и ПТИ. Оставалось,

однако, неясным, почему у некоторых веществ — а при низких температурах практически у всех — теплоемкость оказывалась меньше этого значения, и почему, во-вторых, при подсчете теплоемкостей не следовало принимать во внимание внутренние степени свободы атомов — к тому времени было ясно, что они есть. В 1907 году Эйнштейн показал, что здесь мы сталкиваемся по существу с той же проблемой, что и рассмотренная Планком проблема «теплоемкости электромагнитного поля», и что принятие планковской гипотезы о «квантованности» энергий осцилляторов приводит к тому, что для температур, малых по сравнению с энергией осциллятора (1), соответствующая степень свободы перестает возбуждаться, «вымораживается». Эйнштейн выбрал в качестве модели твердого тела совокупность осцилляторов с одной единственной частотой, и получил одну универсальную кривую (с одним параметром) для всех тел. Вскоре ДЕБАЙ уточнил это рассмотрение и связал отступления от закона Дюлонга и Пти с упругими константами вещества.

Все описанное находилось, конечно, в разительном противоречии с классической физикой, однако все еще имело характер мелких поправок и заплаток, характер «некоторых дополнительных правил в отдельных частных вопросах». Настоящее



*теплоемкость твердого тела по Дюлонгу и Пти и по Эйнштейну*

крушение классической механика и электродинамика потерпели, столкнувшись с проблемой описания строения атома и объяснения атомных спектров.

**1.2.1.** К началу века было известно, что атомы любого вещества электрически нейтральны и совершенно стабильны — т.е. с не подвергающимся внешним

воздействиям атомом сколько угодно долго ничего не происходит (интригующее явление естественной радиоактивности по-видимому не имело к «обычным» атомам никакого отношения). В то же время было известно, что атому можно разнообразными способами сообщить дополнительную энергию — «возбудить» его — и что возбужденный атом отдает свою лишнюю энергию в виде электромагнитных волн — света. Частота света, испускаемого атомом каждого сорта, не может быть произвольной, а только равной некоторым избранным дискретным значениям — атом может испускать только отдельные «линии», которых может быть и весьма много.

В то же время было известно, что при еще большем возбуждении из атомов начинают вылетать электроны, заряженные отрицательно и имеющие ничтожную ( $\sim 10^{-4}$  от массы атома) массу, оставляя положительно заряженный «атомный остаток». Таким образом, можно было думать, что атом состоит из положительно заряженного «атомного остатка», несущего всю массу, и вкрапленных в него, как изюм в калорийную булочку, отрицательно заряженных электронов, и было бы вполне естественно допустить, что электроны связаны с остатком квазиупругим образом и при возбуждении атома начинают совершать колебания, что и приводит к излучению света по формулам, полученным нами в конце второй части. Однако по классической теории частота света должна равняться частоте колебаний или быть кратной ей, а частоты, испускаемые атомами, не оказывались целочисленными кратными не слишком большого числа фундаментальных частот. Таким образом, практически требовалось ввести столько же степеней свободы, сколько спектральных линий испускает атом. Это число степеней свободы даже для простейшего атома водорода оказывалось уже совершенно необозримым.

Подход к более разумной модели атома совершался исторически с двух совершенно независимых сторон.

**1.2.2.** С одной стороны, РИТЦ в 1908 году выдвинул «комбинационный принцип», согласно которому все многообразие испускаемых атомом частот можно получить в виде разностей некоторых величин, «термов», последовательность которых может быть очень простым образом выражена через целые числа. Так, для водорода термы образуют одну последовательность, «серию»

$$T(n) = \frac{R'}{n^2}, \quad R' - \text{константа} \quad (4.1)$$

и частоты равны

$$\nu_{nm} = T(n) - T(m) = R' \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (4.2)$$

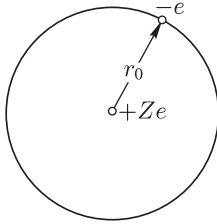
$$n = 1, 2, \dots; \quad m > n.$$

Ритц опирался при формулировке своего принципа на формулу, описывающую длины волн четырех последовательных линий водорода, которую еще в 1885 году нашел БАЛЬМЕР, учитель средней школы в Базеле, обессмертивший этой гениальной догадкой свое имя.

**1.2.3.** С другой стороны, в 1912 г. РЕЗЕРФОРД, проводя опыты по рассеянию  $\alpha$ -частиц на атомах и сравнивая их результаты с выведенной им «формулой Резерфорда» для эффек-

тивного сечения рассеяния в кулоновом поле, установил, что атомный остаток» отнюдь не занимает всего атома ( $\sim 10^{-8}$  см), а сосредоточен в области, не большей  $10^{-12} - 10^{-13}$  см, т. е. не большей, чем «размеры электрона». В заключение своей работы Резерфорд выдвинул для объяснения очень больших ( $\sim 10^{-8}$  см), с точки зрения этих результатов размеров всего атома ту гипотезу, что, возможно, атом устроен аналогично планетной системе, в которой электроны обращаются вокруг ядра подобно планетам, обращающимся вокруг Солнца, и все «материальные» составные части занимают еще меньшую долю совокупного пространства системы, чем даже в «практически совершенно пустой» системе Солнца<sup>1)</sup>.

**1.2.4.** Гипотеза Резерфорда не облегчила дела с атомными спектрами. Действительно, если электрон в атоме движется вокруг ядра, то атом должен обладать дипольным моментом,



зависящим от времени. В самом деле, если движение совершается в кулоновом поле ядра с зарядом  $Ze$  ( $e$  — заряд электрона), пусть, для простоты, по круговой орбите, то

$$x = r_0 \cos \varphi; \quad y = r_0 \sin \varphi; \quad z = 0$$

и

$$\mathbf{d} = -r_0 e \{ \cos \varphi, \sin \varphi, 0 \}.$$

круговая орбита

Согласно выводившимся в первой части курса формулам при этом (радиус орбиты  $r_0$  будет сразу большой полуосью эллипса  $a$  и его параметром  $p$ ) будет

$$p = r_0 = \frac{M^2}{\mu \alpha}; \quad r_0 = \frac{\alpha}{2|E|}; \quad \varphi = \frac{M}{\mu r_0^2} t = \omega t;$$

$$\omega^2 = \frac{M^2}{\mu^2 r_0^4}; \quad \alpha = Ze^2,$$

<sup>1)</sup> Мы уже имели случай указывать на беспримерную идейную насыщенность этой работы, в которой автор не только экспериментально установил действительные размеры «атомного остатка», но и впервые поставил проблему макроскопического исследования микросоударений, и решил ее для кулонова потенциала, да еще сформулировал модель атома, сохранившуюся практически до наших дней!<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Вместе с тем нельзя не отметить, что «планетарная модель» согласно второму закону Кеплера требует, чтобы атомы имели форму плоских дисков, что явно противоречит опыту. — *Примеч. ред.*

откуда

$$M^2 = \mu \alpha r_0; \quad \omega^2 = \frac{\mu \alpha r_0}{\mu^2 r_0^4} = \frac{Z e^2}{\mu r_0^3}; \quad |E| = \frac{Z e^2}{2 r_0};$$

$$\mathbf{d} = -r_0 e \{ \cos \omega t, \sin \omega t, 0 \}$$

и

$$|E| = \frac{\mu Z^2 e^4}{2 M^2}.$$

Но система с зависящим от времени дипольным моментом теряет за счет дипольного излучения в единицу времени (формула (65) второй части курса) энергию  $\frac{2(\ddot{\mathbf{d}})^2}{3c^3}$ . Таким образом энергия такой системы не может оставаться постоянной, а будет убывать со временем:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{d|E|}{dt} = \frac{2(\ddot{\mathbf{d}})^2}{3c^3},$$

откуда, переходя от энергии к однозначно с ней связанному радиусу орбиты, получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{Z e^2}{2 r_0} = \frac{2}{3c^3} (r_0 \omega^2 e)^2 = \frac{2}{3c^3} r_0^3 e^2 \frac{Z^2 e^4}{\mu^2 r_0^6},$$

то есть

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r_0} = \frac{4 Z e^4}{3 c^3 \mu^2} \frac{1}{r_0^4} \quad \text{или} \quad -\frac{dr_0}{dt} = \frac{4c}{3} Z \left( \frac{\frac{e^2}{\mu c^2}}{r_0} \right)^2.$$

Стоящая в числителе последней дроби длина  $\frac{e^2}{\mu c^2} \approx \frac{e^2}{m c^2}$  уже встречалась нам в электродинамике — через ее квадрат выражалось эффективное сечение рассеяния света свободными электронами, и мы назвали ее «классическим радиусом электрона»  $r_0$ . Она составляет приблизительно (сейчас она известна с шестью надежными значащими цифрами)  $2,8 \cdot 10^{-13}$  см. С другой стороны, радиус  $r_0$  орбиты электрона должен быть в резерфордской модели порядка размеров атомов, т. е. порядка  $10^{-8}$  см. Таким образом квадрат фигурирующего в последней формуле отношения составляет по порядку величины

$$\left( \frac{\frac{e^2}{\mu c^2}}{r_0} \right)^2 \approx \left( \frac{r_0}{r_0} \right)^2 \approx 10^{-10}.$$

Так как скорость света  $c$  есть  $3 \cdot 10^{10}$  см/сек, то «скорость»  $\frac{dr_0}{dt}$  убывания радиуса электронной орбиты за счет потери энергии на излучение имеет порядок одного (или, если обратить внимание и на небольшие численные множители даже  $10^1$ ) см/сек. Поскольку размеры атома составляют  $10^{-8}$  см, то этот результат означает, что атомы не только не могли бы быть совершенно стабильны, но вообще не могли бы существовать макроскопически заметное время — через  $10^{-8}$  сек электроны атомов должны были бы упасть на ядро.

Итак, с точки зрения классической физики в модели Резерфорда

(1) атом не только не мог бы быть стабильным, но и полностью терял бы свою энергию на излучение за время порядка  $10^{-8}$  сек;

(2) частота этого излучения, обратно пропорциональна радиусу орбиты в степени  $3/2$  (третий закон Кеплера), непрерывно изменялась бы, и никаких дискретных линий в спектре атома не было бы

**1.3.** В следующем 1913 году Нильс БОР сделал в каком-то смысле решающий шаг, объединивший два указанных подступа к проблеме строения атома: он применил к модели Резерфорда идею Планка о квантовании.

Именно, Бор допустил, что в планетарной модели возможны не любые «орбиты», а лишь некоторые избранные, для которых момент (его размерность совпадает с размерностью действия!) имеет значения, кратные планковской постоянной  $\hbar$ :

$$M = n\hbar. \quad \text{квантовое условие}$$

Находясь на этих избранных орбитах, электрон **не излучает**, вопреки классическим представлениям, хотя и движется с ускорением. Этим объясняется стабильность атома, если электрон занимает низшую допустимую орбиту с  $M = \hbar$ .

С «высших» же орбит электрон может переходить на низшие, совершая «квантовый скачок» и испуская один квант света. При этом частота испускаемого света определяется не частотой движения электрона, а фактически планковским условием (1), которое записывается теперь как

$$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m = \hbar\omega. \quad \text{условие частот} \quad (5)$$

Если мы посмотрим на связь энергии с моментом, которая получается из только что приводившихся формул кеплеровой

задачи,  $|E| = \frac{\mu Z^2 e^4}{2M^2}$ , то увидим, что эта связь вместе с квантовым условием и условием частот сразу приведет нас к серийной формуле (4), причем теперь можно будет вычислить и значение  $R'$  (или  $R$ ) постоянной Ридберга:

$$R' = \frac{1}{2\pi\hbar} R; \quad R = \frac{me^4}{2\hbar^2}, \quad m — \text{масса электрона},$$

(мы положили для водорода  $Z = 1$ ), которое оказывается в превосходном согласии с опытом.

**1.4.** Здесь уместно сделать несколько замечаний относительно натуральных единиц, которые определяют масштабы основных физических величин в атомной области.

**1.4.1.** В предыдущей части, в классической электродинамике, обсуждая вопрос об энергии собственного кулонова поля заряженной частицы, мы пришли к выводу, что для частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$  помимо естественной единицы энергии — энергии покоя  $\mathcal{E}_0 = mc^2$  существует и естественная единица длины

$$\lambda_0 = \frac{e^2}{\mathcal{E}_0} = \frac{e^2}{mc^2}.$$

Если рассматриваемая частица — это электрон, то соответствующие величины называют **собственной энергией электрона**

$$E_0 = mc^2 \approx 0,51 \text{ МэВ}$$

и его **классическим радиусом**

$$\lambda_0 = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Привлечение квантовых представлений добавляет нам новую фундаментальную постоянную — постоянную Планка (2), — за счет чего оказывается возможным сопоставить частице массы  $m$  еще одну длину — **комптонову длину волны**, уже упоминавшуюся в **1.1.2.1**.

Легко понять, как образуется эта величина. Из массы  $m$  электрона мы получаем по соотношению Эйнштейна его собственную энергию  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ . Этой энергии по основной гипотезе Планка (1) отвечает некоторая частота

$$\omega_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar},$$

из которой в свою очередь можно получить длину волны, поделив на нее универсальную скорость  $c$ :

$$\lambda_c = \frac{c}{\omega_0} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} \approx 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

**1.4.2.** Но коль скоро в нашем распоряжении есть *две* длины, связанные с одной и той же частицей, то, поделив их друг на друга, мы получим безразмерное отношение

$$\left( \frac{e^2}{mc^2} \right) : \left( \frac{\hbar}{mc} \right) = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha$$

— т. е. число, которое не зависит от выбора единиц измерения и про которое можно поэтому спросить, почему оно имеет именно такое значение, а не какое-нибудь иное.

Полученное нами сейчас число  $\alpha$  называется (по историческим причинам) **постоянной тонкой структуры**. Как видно, она пропорциональна квадрату заряда электрона и тем самым, поскольку заряд всех (заряженных) элементарных частиц (с точностью до знака) одинаков (поэтому говорят просто об **элементарном заряде**  $e$ ), характеризует «силу» самого электромагнитного взаимодействия.

Опыт показывает, что постоянная тонкой структуры с довольно высокой точностью равна

$$\alpha = \frac{1}{137}$$

— обратному целому числу 137 (точное современное значение — 137,0360). Таким образом электромагнитное взаимодействие оказывается взаимодействием довольно слабым. Это обстоятельство является весьма отрадным для теоретиков, так как позволяет вычислять многие эффекты этого взаимодействия приближенным образом, разлагая их в ряды по степеням малого параметра  $\alpha$ , члены которых весьма стремительно убывают (правда относительно *сходимости* таких рядов существуют настолько веские сомнения, что противоположная точка зрения представляется более обоснованной).

Почему именно постоянная тонкой структуры равна  $1/137$ , а не какой-либо другой величине, современная физика сказать не может. Особенно провоцирующим вызовом человеческой изобретательности представляется то обстоятельство, что обратное значение постоянной тонкой структуры есть *целое число* — это побуждает искать объяснение его значения на пути подсчета числа каких-то комбинаций.



Собственно говоря, способ получить такое большое число из числа меньшего и имеющего физический смысл известен уже около полувека. Число 137 можно представить в форме

$$137 = \frac{(4 \cdot 4)(4 \cdot 4 + 1)}{2} + 1,$$

где «исходное» число 4 есть число измерений пространства-времени, произведение  $(4 \cdot 4)$  можно осмыслить как число компонент какого-либо билинейного объекта в этом пространстве, образование дроби — как подсчет числа компонент симметричного билинейного объекта в пространстве билинейных объектов, а добавляемую единицу представить себе как происходящую из-за наличия некоторой дополнительной дискретной степени свободы. Дело остается за малым — заставить поверить — даже не в убедительность, а хотя бы в вероятность — спекуляций подобного рода других лиц, не являющихся их авторами. В этом направлении еще никому не удалось достичь успеха, хотя ему отдали дань такие исследователи, как известный английский астрофизик Эддингтон и один из создателей квантовой механики Гайзенберг.

Возвращаясь на более реальную почву, примиримся с тем значением, которое имеет постоянная тонкой структуры в нашем мире, и посмотрим, какие следствия можно извлечь из этого для интересующего нас вопроса о масштабах атомных явлений.

**1.4.3.** Начнем с характерных длин. Две такие длины — классический радиус электрона и его комптонову длину волны — мы уже ввели. Найдём теперь радиус первой разрешенной в модели Бора орбиты, соответствующей числу  $n = 1$ . Обращаясь опять к выписанным в **1.2.4** формулам кеплеровой задачи, найдём, что этот радиус — его принято называть просто **боровским радиусом** и обозначать  $a_B$  — равен

$$a_B = \frac{e^2}{2|E_1|} = \frac{e^2}{2} \frac{2\hbar^2 1^2}{me^4} = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{e^4} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{1}{\alpha^2} \lambda_0.$$

Следующую масштабную ступеньку мы получим, если оценим длину волны света, который может излучаться атомом при переходе электрона с одной орбиты на другую. Выписанная нами в **1.3** постоянная Ридберга  $R$  выражена в энергетических единицах и представляет собой (взятую по модулю) энергию электрона на первой разрешенной орбите. Соответствующая этой энергии по формуле (5) частота (конечно, чтобы получить по (5) частоту, надо брать *разность* энергий на двух орбитах, но поскольку мы интересуемся сейчас только порядками величин, то можем взять просто энергию) будет равна  $\omega = \frac{R}{\hbar}$ , и, следовательно, длина

излучаемой электромагнитной волны составит

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c \hbar}{R} = \frac{4\pi \hbar^3 c}{m e^4} = 4\pi \frac{\hbar c}{e^2} \frac{\hbar^2}{m e^2} = 4\pi \frac{1}{\alpha} a_B = \frac{4\pi}{\alpha^3} \lambda_0.$$

В числах это дает

$$\lambda \approx 12 \cdot 137 a_B = 1600 a_B = 800 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 800 \text{ \AA};$$

это соответствует далекому ультрафиолету. Длины волн видимого света еще примерно на порядок больше; это происходит за счет того, что видимому свету отвечают переходы не на первую орбиту.

Таким образом мы пришли к целой шкале характерных для микромира размеров, величина (одинаковых в логарифмическом масштабе) «ступеней» которой определяется умножением на обратные ступени постоянной тонкой структуры  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{m c^2} &= \lambda_0 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} && \text{классический радиус электрона} \\ \lambda_c = \frac{\hbar}{m c} &= \frac{1}{\alpha} \lambda_0 = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ см.} && \text{комптонова длина волны электрона} \\ a_B = \frac{\hbar^2}{m e^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \lambda_0 = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см.} && \text{боровский радиус} \\ \lambda \sim \frac{4\pi \hbar^3 c}{m e^4} &= \frac{4\pi}{\alpha^3} \lambda_0 = \frac{4\pi}{\alpha} a_B = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ см.} && \text{длины волн испускаемого атомами света} \end{aligned}$$

Третья ступень этой шкалы — боровский радиус — определяет порядок размеров атомов и, следовательно, расстояние между ними в твердых и жидких телах, где взаимное расположение атомов всегда близко к плотной упаковке.

Сравнивая теперь с третьей ступенью — четвертую, видим, что длины испускаемых атомами волн много больше атомных размеров. Выполнение такого неравенства было в электродинамике условием применимости квазистационарного приближения. Теперь мы можем сказать, что применимость условия квазистационарности — а, значит, и таких вещей, как разложение по мультипольным моментам и т. п. — обусловлено малостью постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , т. е. слабостью электродинамического взаимодействия.

**1.4.4.** Скажем еще несколько слов о характерных энергиях. Первая характерная единица на шкале энергий — это собственная энергия электрона  $m c^2$ . Характерная энергия атома — по-

стоянная Ридберга в энергетических единицах  $R$ , связана с ней соотношением

$$R = \frac{me^4}{2\hbar} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 mc^2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot mc^2 \cong 13,6 \dots \text{эВ},$$

т.е. опять сравнительная малость атомной энергии связи обусловлена малым значением постоянной  $\alpha$ .

**1.5. Крушение классических представлений.** Предложенный Бором «способ рассмотрения атомной модели составил основу того, что называли потом «старой квантовой механикой». Как мы видим, она представляла собой довольно своеобразную смесь классической теории и дополнительных чисто рецептурных правил. В последующие 12 лет эта теория усиленно развивалась и усложнялась. Были выработаны специальные рецепты о том, как следует проводить квантование в случае многих степеней свободы («квантовать» полагалось все степени свободы, отвечающие финитным движениям), проводилось обобщение на сложные системы типа молекул, вводились релятивистские поправки и т.д.

Однако теория в такой форме явно была логически не завершена. Не всегда хорошо обстояло дело и в смысле сравнения с опытом: некоторые системы упорно не поддавались расчету, иногда приходилось вводить вместо целых квантовых чисел — полуцелые и т.п. Тем не менее роль этой теории в развитии представлений, приведших нас от классического описания к современной квантовой механике, трудно переоценить. Сейчас, оглядываясь назад, мы знаем, что теория Бора осуществила наилучшее из возможных описаний квантовых объектов на классическом языке.

**1.6.** Следующий шаг был сделан в 1924 году де БРОЙЛЕМ. Действуя по аналогии с электромагнитным излучением, для которого, как мы уже упоминали, была выяснена необходимость двойного — корпускулярного и волнового — описания, и используя давно развитую ГАМИЛЬТОНОМ оптико-механическую аналогию, де Бройль пришел к тому, чтобы сопоставить каждой материальной частице — волну, частота и волновой вектор которой были бы связаны с энергией и импульсом частицы соотношением

$$\hbar\omega = E; \quad \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}, \quad (6)$$

т.е. волну, которая описывалась бы выражением вида  $e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})}$ . Принимая для  $E$  релятивистское выражение  $E = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}$

де Бройль получил, что фазовая скорость такой волны

$$\frac{\omega}{k} = \frac{E}{|\mathbf{p}|} = c \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\mathbf{p}}\right)^2}$$

всегда больше  $c$ , однако групповая скорость

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{d\mathbf{p}} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E} = \mathbf{v}$$

как раз равняется скорости частицы  $\mathbf{v}$ . Ему принадлежит также замечание, что на «разрешенных» боровых орбитах укладывается как раз целое число его волн. Однако ни уравнений для его волн — т. е. динамики, ни выяснения того, какое отношение эти волны имеют к частицам, у де Бройля еще не было.

**1.7.** Чуть позже, в 1925–26 годах, была открыта новая квантовая механика. Знаменательно, что открытие это было совершенно одновременно в двух формах:

Эрвином ШРЕДИНГЕРОМ в виде волновой механики

и

Вернером ГАЙЗЕНБЕРГОМ, Максом БОРНОМ и Паскуалем ИОРДАНОМ в виде матричной механики.

Последующие два-три года были «героическим временем» квантовой механики, периодом, в ходе которого она приняла фактически уже современную форму. В этой работе чрезвычайно велика была опять-таки роль Нильса БОРА, который нашел правильную (вероятностную) физическую интерпретацию теории, в частности вопросов, связанных с процедурой измерения, а также роль Поля Адриана Мориса ДИРАКА, придавшего математической форме теории весьма законченный и элегантный вид (с точки зрения физика, а не математика).

## 2. Состояния. Суперпозиция

**2.1.** Механическое описание какой-либо системы имеет два аспекта:

во-первых, надо как-то описывать **состояния** системы в данный фиксированный момент времени и,

во-вторых, описывать **изменение** состояния со временем, то, что мы собственно называем движением системы.

Классическая механика занимается по существу только вторым аспектом проблемы — именно изменения состояний во времени составляют предмет и кинематики и динамики. Что же

касается первого аспекта, то в классической механике он не представляется подающим повод для размышлений, и от него в лучшем случае отделяются замечанием, что состояние системы полностью характеризуется заданием значений обобщенных координат и их первых производных по времени — обобщенных скоростей — в некоторый момент времени.

Все новое, что привносит с собой квантовомеханическое описание, относится по существу к первому аспекту проблемы — описанию состояний системы в фиксированный момент времени. Наоборот, вся динамика может быть перенесена из классической теории практически без сколько-нибудь существенных изменений. Впрочем, как мы увидим ниже, как раз динамические проблемы оказываются в квантовом описании в каком-то смысле тривиальными.

**2.2.** Откуда же берутся те новые моменты, которые возникают при переходе от классического описания к квантовому? Их «источником» является логический анализ тех способов, которыми мы устанавливаем соответствие между математической теорией и существующими в природе объектами. Значения координат и скоростей, фигурирующие в классическом описании состояния, надо *измерить*. Спрашивается, можно ли, хотя бы в принципе, провести сколь угодно точное измерение так, чтобы сам процесс измерения не изменил измеряемой величины?

В классической механике на этот вопрос неявно отвечали положительно. Поэтому утверждения:

(α) Мы измерили (в каком-то порядке) у некоторой системы все координаты и импульсы и получили для них некоторые значения  $\{c\}$ ;

(β) Координаты и импульсы системы имеют некоторые значения  $\{c\}$ ;

и (γ) Если мы измерим у системы ее координаты и импульсы (в каком бы то ни было порядке), то наверняка получим для них некоторые значения  $\{c\}$

в классической механике эквивалентны <sup>1)</sup>.

Проведенный в 20-х годах подробный логический анализ этой проблемы, в детали которого мы не будем вдаваться, привел к тому выводу, что на самом деле это не так: измерение *всегда* возмущает измеряемую величину <sup>2)</sup>. Поэтому в квантовой меха-

---

<sup>1)</sup> Во всех трех утверждениях речь идет, разумеется, об одном и том же фиксированном наборе значений  $\{c\}$  в один и тот же момент времени.

<sup>2)</sup> Суть дела состоит в том, что у нас нет достаточно «нежных» агентов для наблюдения за частицами. С житейской точки зрения, при рассмотрении

нике утверждения ( $\alpha$ ) и ( $\gamma$ ) оказываются, как правило, различными, а утверждение ( $\beta$ ) без дальнейших пояснений — вообще непонятным.

В дальнейшем мы будем понимать под ( $\beta$ ), т. е. под словами: «некоторая величина имеет определенное значение» утверждение ( $\gamma$ ), точнее, что при измерении этой величины, выполненном *до всякого другого измерения*, мы наверняка получим интересующее нас значение. Поэтому, в частности, для проверки утверждения ( $\beta$ ) для  $n$  величин нам необходимо иметь не менее  $n$  экземпляров рассматриваемой системы — ведь после первого измерения всякий экземпляр уже портится.

Итак, в том, что касается проблемы описания состояний, из ряда мысленных экспериментов, обобщающих накопленный к 20-м годам *experience* о поведении атомных частиц, можно было только сделать вывод негативного характера: состояния в квантовой механике *нельзя* описывать заданием значений всех координат и импульсов (или скоростей) в некоторый момент времени. Более того, можно было утверждать, что отвечающие одной степени свободы координата и импульс либо вообще не существуют одновременно, либо — во всяком случае — не могут быть одновременно измерены. Это утверждение известно под именем **принципа неопределенности**. Он был сформулирован Гайзенбергом в 1927 году.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Дополнительность корпускулярно-волнового описания — «корпускулярно-волновой дуализм» — есть, конечно, тоже проявление принципа неопределенности. При квантовомеханическом описании света мы можем выбрать в качестве канонически сопряженных переменных «числа заполнения» (грубо говоря — число фотонов) и фазу волны, — а как раз от разностей фаз и зависит критическое для волновой картины

---

макроскопических тел мы всегда можем сказать «Мы совсем ничего не будем делать с интересующим нас объектом, мы только посмотрим на него». Но «посмотреть» — это значит дать рассеяться на интересующем нас объекте какому-то числу световых квантов, а у них есть энергия и импульс ((1), (3)), которыми они могут неконтролируемо обмениваться с измеряемым объектом, возмущая тем самым значения его динамических переменных.

Тут существует некоторая аналогия с теорией относительности. Подобно тому, как все ее логическое здание возведено на том допущении, что существует максимальная скорость любых взаимодействий, и достаточно допустить существование *хоть одного* сигнала, распространяющегося быстрее, чтобы все оно рухнуло, так и для квантовой механики существенно, что все объекты в природе подчиняются квантовым условиям (1), (3). Достаточно было бы *одного* не подчиняющегося им объекта, чтобы для всех оказались бы возможными сколь угодно мало возмущающие измерения.

явление интерференции. Поэтому интерференцию можно наблюдать лишь тогда, когда число фотонов неопределенно, а при известном числе фотонов нет интерференции. ■

**2.3.** Итак, согласно принципу неопределенности мы никогда не можем знать о системе столько, сколько мы знаем о ней в классической теории, мы никогда не можем однозначно предсказать результаты *всех* измерений, которые можно провести над системой

В квантовой теории задать состояние системы — это значит знать о ней столько, что любые дополнительные сведения могут быть включены лишь ценой потери некоторых из уже включенных,

т.е. уметь *однозначно* предсказать результаты стольких измерений, что возможность предсказать однозначно результат измерения еще какой-либо физической величины, не являющейся функцией первых, может быть достигнута лишь ценой отказа от однозначности каких-либо из уже сделанных предсказаний <sup>1)</sup>.

Итак, для системы, находящейся в некотором известном состоянии, мы можем однозначно предсказать результаты измерений *лишь некоторых* динамических переменных; результаты измерения остальных динамических переменных в том же состоянии не могут быть предсказаны однозначно: если мы будем проводить одно и то же измерение несколько раз (для этого, конечно, необходимо несколько идентичных экземпляров системы, находящихся каждый в том же состоянии), то будем получать *разные* результаты. Поэтому приходится говорить о **вероятности** получить при такого рода измерениях тот или иной результат. Эти вероятности, как мы увидим ниже, теория действительно позволит определить.

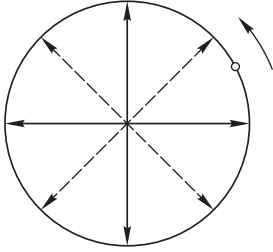
**2.4.** Важнейшей отличительной чертой **состояний** квантовой теории является то, что система, находящаяся в некотором состоянии, может в то же время частично находиться и в других.

---

<sup>1)</sup> Так, например, из принципа неопределенности прямо следует, что если система с одной степенью свободы находится в таком состоянии, когда мы можем точно предсказать результат измерения ее координаты, то мы не можем однозначно предсказать результат измерения импульса, если же перевести ее в такое состояние, в котором измерение импульса наверняка приведет к определенному результату, то в этом новом состоянии в результате измерения координаты нельзя будет сделать никаких определенных утверждений. Равным образом, поскольку энергия есть, вообще говоря, функция и координаты и импульса, то в состоянии, в котором можно точно предсказать результат измерения координаты, нельзя сделать однозначных предсказаний о значении энергии.

Чтобы понять, о чем идет речь в этом утверждении, рассмотрим классический пример с поляризацией колебаний

ПРИМЕР: Пусть у нас есть колебания, допускающие поляризацию, — все равно какие: может быть, чистая механика, например шарик, подвешенный на нити, или же электромагнитная система — световая волна, в которой электрический вектор может колебаться в двух направлениях, — и пусть «изображающая точка» движется по окружности, т. е. пусть



$$x = r_0 \cos \omega t, \quad y = r_0 \sin \omega t,$$

то есть

$$\mathbf{r} = \{r_0 \cos \omega t, r_0 \sin \omega t\}.$$

Это движение можно записать в виде суммы двух движений

$$\mathbf{r} = \{r_0 \cos \omega t, 0\} + \{0, r_0 \sin \omega t\},$$

*разложение циркулярно поляризованных колебаний на линейно поляризованные*

т. е. состояние круговой поляризации можно представить в виде суммы, суперпозиции двух состояний, линейно поляризованных вдоль осей  $x$  и  $y$ . Эти состояния реально существуют, их можно выделить подходящим анализатором (например, поляроидов в случае света) — после прохождения анализатора останется только одно. линейно поляризованное состояние.

Но неправильно было бы считать, что циркулярно поляризованное состояние «состоит» из двух состояний, линейно поляризованных по осям  $x$  и  $y$ , в том, скажем, смысле, в котором стол состоит из столешницы и ножек или атом водорода — из протона и электрона. С равным правом можно было бы рассматривать циркулярно поляризованное колебание как суперпозицию поляризованных плоско в других направлениях, скажем по  $\nearrow$  и  $\nwarrow$ . Более того, циркулярно поляризованное состояние ничем не менее элементарно, чем линейно поляризованные можно, наоборот, считать, что линейно поляризованное состояние есть суперпозиция двух состояний, поляризованных по кругу

$$\{r_0 \cos \omega t, 0\} = \frac{1}{2} \{r_0 \cos \omega t, r_0 \sin \omega t\}_r + \frac{1}{2} \{r_0 \cos \omega t, -r_0 \sin \omega t\}_l. \quad \blacksquare$$

ЗАМЕЧАНИЕ: В классической теории, с которой мы имели дело в этом примере, можно было считать, что циркулярно поляризованный свет **частично** проходит через «линейный» анализатор, а линейно поляризованный — частично проходит сквозь «циркулярный» анализатор. В квантовой теории имеется очень существенное отличие. В этом случае написанные соотношения надо относить к **одному** фотону. Но один фотон может только либо пройти «целиком» через анализатор, либо не пройти. Поэтому



наши формулы будут относиться теперь к **вероятностям** того, что циркулярно поляризованный фотон пройдет через линейный анализатор или наоборот. ■

При суперпозиции двух квантовомеханических состояний образуется такое состояние, что промежуточными для него будут не **результаты** наблюдения, а **вероятности** определенных результатов.

**Принцип суперпозиции.** Если измерение некоторой величины в состоянии  $A$  всегда дает результат  $a$ , а в состоянии  $B$  — результат  $b$ , то суперпозиция состояний  $A$  и  $B$  даст состояние, в котором в результате измерения той же величины может быть получено либо  $a$ , либо  $b$  с некоторыми вероятностями.

Итак, мы видим, что при переходе к квантовому описанию физической системы придется оперировать с совершенно новыми для классической теории понятиями: **состояниями**, удовлетворяющими принципу суперпозиции, **измерениями** динамических величин, не приводящими к одному определенному результату, **вероятностями** частных результатов измерений. Для дальнейшего развития этого описания надо поставить физической теории в соответствие некоторую математическую схему, придумать некоторую математическую модель, в которой этим новым физическим понятиям будут соответствовать какие-то математические объекты. Эта работа, в которой наша воспитанная на макроскопическом опыте интуиция не сможет нам помочь, займет еще и несколько следующих параграфов.

### 3. Векторы состояния и операторы

**3.1.** Попробуем ставить состояниям системы в соответствие векторы  $|\rangle$ <sup>1)</sup> некоторого (пока неизвестно какого) линейного пространства над полем комплексных чисел, причем каждому вектору будем ставить в соответствие одно состояние, и состояниям, которые физически нельзя различить и которые, поэтому, надо считать одним и тем же состоянием, будем (с одной оговоркой, которая сейчас будет сделана) ставить в соответствие один вектор. Внутри символа  $|\rangle$  вектора мы будем при необходимости располагать значки, отличающие один вектор от другого. Мы сознательно не хотим пока детализировать дальнейшие свойства

---

<sup>1)</sup> Мы будем последовательно использовать терминологию и обозначения, разработанные Дираком (P. A. M. Dirac) в его классической книге «Принципы квантовой механики», вышедшей в свет в 1930 году. Последний русский перевод (с 4-го английского издания) был опубликован в 2002 г.

вводимого векторного пространства, пока то не будут заставлять нас делать какие-либо физические требования, которые будут возникать по мере дальнейшего установления соответствий математической модели с физическими объектами<sup>1)</sup>.

Итак, мы приняли, что отвечающие состояниям векторы  $|\rangle$  (мы будем иногда говорить «кет-векторы») можно складывать и умножать на комплексные числа. Мы примем далее, что суперпозиции двух состояний  $A$  и  $B$  отвечает образование линейной комбинации отвечающих этим состояниям векторов:

$$|R\rangle = c_1 |A\rangle + c_2 |B\rangle. \quad (7.1)$$

Нам придется рассматривать не только конечные суммы, но и ряды:

$$|R\rangle = c_1 |A_1\rangle + c_2 |A_2\rangle + c_3 |A_3\rangle + \dots \quad (7.2)$$

или даже, если состояния зависят от непрерывного параметра, интегралы:

$$|Q\rangle = \int |x\rangle \rho(x) dx, \quad (7.3)$$

вопросов сходимости или существования которых мы пока не затрагиваем. Соотношение, скажем, (7.1) симметрично во всех трех векторах — если состояние  $R$  есть суперпозиция состояний  $A$  и  $B$ , то  $B$  есть суперпозиция состояний  $A$  и  $R$  и т. д.

**3.1.1.** Если провести суперпозицию состояния с ним самим, то согласно (7) такому состоянию будет отвечать вектор

$$c_1 |A\rangle + c_2 |A\rangle = (c_1 + c_2) |A\rangle.$$

Но в образующемся при такой суперпозиции состоянии значения всех динамических величин будут теми же, что и в исходном. Поэтому надо принять, что вектор

$$c |A\rangle; \quad c \neq 0 \text{ описывает то же состояние, что и } |A\rangle.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** В этом пункте квантовомеханическая суперпозиция отличается от классической суперпозиции, например, электромагнитных волн. ■

<sup>1)</sup> Тут сказывается коренное различие физического и математического подходов. Математик всегда может начать рассмотрение теории с набора аксиом, из которых остается затем лишь выводить строгие логические следствия. Физик лишен такой свободы, он не может назначать аксиомы своей теории по произволу — ведь их следствия должны соответствовать обнаруживаемым на опыте свойствам реального мира — и он не может знать заранее, какая именно математика для этого нужна. В физических теориях индуктивная часть составляет не менее важную долю, чем дедуктивная, и эта первая, естественно, никогда не может быть проведена с той строгостью, что вторая.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: Поэтому иногда говорят, что состояниям отвечают не векторы, а лучи. Последнее, однако, не совсем удобно: хотя векторы

$$|A\rangle \text{ и } a|A\rangle \text{ или, соответственно, } |B\rangle \text{ и } b|B\rangle$$

и описывают соответственно одни и те же состояния, но линейная комбинация

$$c_1|A\rangle + c_2|B\rangle$$

не будет, конечно, отвечать тому же состоянию, что и комбинация

$$c_1 \cdot a|A\rangle + c_2 \cdot b|B\rangle$$

с теми же самыми  $c_1$  и  $c_2$ , если только  $a \neq b$ . Таким образом, чтобы не нарушать соотношений линейной зависимости, можно помножить все векторы состояния только на *одинаковое* комплексное число. Поэтому, например, конкретная суперпозиция состояний  $A$  и  $B$  определяется *двумя* вещественными параметрами. ■

Теперь следовало бы ввести в нашем пространстве метрику, т. е. скалярное произведение. Оказывается, однако, что это удобнее делать не непосредственно, а обходным путем.

**3.2.** Введем сперва **линейные скалярные функции** векторов  $|\rangle$ :

$$\varphi(|A\rangle), \text{ такие, что } \varphi(c_1|A\rangle + c_2|B\rangle) = c_1\varphi(|A\rangle) + c_2\varphi(|B\rangle). \quad (8)$$

Сумму этих функций и произведение их на число определим обычными условиями

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(|A\rangle) &= \varphi_1(|A\rangle) + \varphi_2(|A\rangle), \\ (c\varphi)(|A\rangle) &= c \cdot \varphi(|A\rangle) \end{aligned} \right\} \text{ для любого } |A\rangle. \quad (9)$$

Тогда  $\varphi$  тоже будут образовывать **сопряженное** линейное векторное пространство, (иногда говорят — **дуальное**) исходному. Будем называть векторы этого пространства со-векторами<sup>1)</sup> или «бра-векторами», употреблять для их обозначения значок  $\langle|$ , зеркально симметричный обозначению кет-вектора (внутри него могут помещаться индексы, служащие, чтобы отличить один со-вектор от другого) и писать

$$\varphi(|A\rangle) = \langle B | A \rangle, \quad (8a)$$

<sup>1)</sup> Термин предложен В. А. Фоком.

рассматривая значение функции  $\phi$  как скалярное произведение со-вектора на вектор. Для этого произведения, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \langle B | \{ |A_1\rangle + |A_2\rangle \} &= \langle B | A_1 \rangle + \langle B | A_2 \rangle; \\ \{ \langle B_1 | + \langle B_2 | \} | A \rangle &= \langle B_1 | A \rangle + \langle B_2 | A \rangle; \\ \{ \langle B | c \} | A \rangle &= \langle B | \{ c | A \rangle \} = c \langle B | A \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Мы примем, кроме того, что

$$\left. \begin{aligned} \text{если } \langle B | P \rangle &= 0 \text{ для любого } |P\rangle, \\ \text{то } \langle B | &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Участвующие в этих определениях слова «для любого  $|P\rangle$ » нуждаются, строго говоря, в пояснениях. Вопросов не возникало бы, если бы в нашем пространстве  $\{| \rangle\}$  было бы не более конечного числа линейно независимых кет-векторов. В большинстве задач квантовой механики это не так — число линейно независимых векторов бесконечно. При этом вместо слов «любой вектор» следовало бы говорить о полной системе, разрешенных свойствах коэффициентов разложения по ней и т. п. Дело осложняется еще и тем, что в квантовой механике вопрос полноты — это вопрос не чисто математический, а иногда и физический: система, полная в одной постановке задачи, может не оказаться таковой в другой. ■

**3.3.1.** Итак, мы ввели скалярные произведения со-вектора на вектор (бра-вектор слева, кет-вектор — справа!). Скалярных же произведений двух кет-векторов или двух бра-векторов у нас нет. Вместо этого будем теперь считать, что между пространствами векторов и со-векторов установлено взаимно однозначное **антилинейное соответствие**  $\langle | = F(| \rangle)$ , такое что

$$\left. \begin{aligned} F(|A\rangle + |B\rangle) &= F(|A\rangle) + F(|B\rangle), \\ F(c|A\rangle) &= c^* F(|A\rangle). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Мы будем отмечать наличие этого соответствия, используя в обозначении вектора и соответствующего ему со-вектора одну и ту же букву (или группу букв) внутри значка:

$$F(|A\rangle) = \langle A|. \quad (11.3)$$

**3.3.2.** Теперь мы можем сопоставить каждому состоянию  $A$  не только вектор  $|A\rangle$ , но и соответствующий ему со-вектор  $\langle A|$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Такую пару вектора  $|A\rangle$  и со-вектора  $\langle A|$  называют (взаимно) **адьюнгированными** или **сопряженными**.

Поэтому для описания двух состояний  $A$  и  $B$  можно теперь привлечь

векторы:  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$ , со-векторы:  $\langle A|$  и  $\langle B|$ ,

из которых можно образовать смешанные скалярные произведения:

$$\begin{aligned} \langle B|A\rangle & \text{ линейное в } |A\rangle \text{ и антилинейное в } |B\rangle, \\ \langle A|B\rangle & \text{ антилинейное в } |A\rangle \text{ и линейное в } |B\rangle, \\ (\langle A|B\rangle)^* & \text{ линейное в } |A\rangle \text{ и антилинейное в } |B\rangle, \end{aligned}$$

— т. е. мы можем связать с двумя состояниями целых два числа, линейные в первом и антилинейные во втором. Это, как мы увидим ниже, слишком много для физических целей, что побуждает нас наложить на вводимое соответствие  $F$  между векторами и со-векторами условие

$$\langle B|A\rangle = (\langle A|B\rangle)^*. \quad (12.1)$$

Из него следует, что для  $|B\rangle = |A\rangle$ :  $(\langle A|A\rangle)^* = \langle A|A\rangle$ , т. е.  $\langle A|A\rangle$  вещественно. Мы потребуем еще большего, наложив второе условие

$$\langle A|A\rangle > 0 \text{ для } |A\rangle \neq 0. \quad (12.2)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Естественно, что мы могли бы с тем же успехом и не прибегать к обходной конструкции с сопряженным пространством, а прямо ввести в пространстве кет-векторов метрику. Условия (12) означали бы тогда: ( .1) эрмитовость этой метрики и ( .2) ее положительную определенность. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Зачем же нам понадобилась обходная конструкция с сопряженным пространством? Дело в том, что, казалось бы излишняя с точки зрения математики, она совершенно естественна физически. При сопоставлении квантовой механики с опытом состояния выступают как бы в двух «ипостасях» — с точки зрения их наблюдения и с точки зрения их «приготовления». Этим двум сторонам физического проявления состояний как нельзя лучше отвечает двойная математическая модель бра- и кет-векторов, связанных соответствием (11). Следует еще подчеркнуть, что физическое описание с помощью бра- и кет-векторов должно быть совершенно симметричным<sup>1)</sup> (Это есть

<sup>1)</sup> Поэтому «сопряженное» пространство — это не совсем то, что имеют в виду под этим словом в функциональном анализе, где между пространством функций определенного рода и «сопряженным» пространством функционалов

проявление изотропии времени.) — как раз это требование находит себе выражение в условии (12.1) эрмитовости метрики. Что же до условия (12.2) положительной определенности метрики, то, как мы увидим ниже, оно необходимо для возможности вероятностной интерпретации теории. ■

**3.3.3.** Скалярное произведение сопряженных векторов позволяет ввести — в обоих, бра- и кет-, пространствах — **норму**, полагая

$$\| |A\rangle \| = \| \langle A | \| = +\sqrt{\langle A | A \rangle}. \quad (12a)$$

С ее помощью можно уменьшить произвол, который был у нас в сопоставлении векторов состояниям. Именно, мы можем сопоставлять всем состояниям только **нормированные** векторы  $|A\rangle$  такие, для которых  $\| |A\rangle \| = 1$ , после чего останется лишь произвол в выборе фазового множителя:

$$|A\rangle \rightarrow |A\rangle e^{i\gamma}, \quad \gamma \in R. \quad (12b)$$

Впрочем, пользоваться только нормированными векторами состояния не всегда удобно и, главное, не всегда возможно. Как мы увидим, нам придется включить в рассмотрение и **ненормируемые** состояния, которым отвечают векторы с бесконечной нормой.

**3.4.1.** Следующий объект, который (математически) естественно ввести в нашем векторном пространстве, это линейные вектор-функции, значение  $|G\rangle$  которых можно рассматривать как

---

на этих функциях *нет* однозначного соответствия. Так, например, если пространство кет-векторов реализуется в форме пространства функций  $f(x)$  одной вещественной переменной, то можно ввести функционал

$$\Phi[f(x)] = f(x_0),$$

которому будет соответствовать бра-вектор (ядро функционала)  $\delta(x - x_0)$ :

$$\Phi[f(x)] = \int dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0).$$

Значит, аналогичный объект,  $\delta(x - x_0)$ , должен входить и в пространство **кет-векторов**.

В этой связи соотношение между взаимно сопряженными кет- и бра-векторами гораздо ближе соотношениям между контра- и ковариантными векторами в аффинной геометрии пространства конечного числа измерений.

действие на аргумент  $|A\rangle$  **линейного оператора**:

$$\left. \begin{array}{l} |G\rangle = \alpha |A\rangle, \\ \text{причем} \\ \alpha \{c_1 |A_1\rangle + c_2 |A_2\rangle\} = c_1 \alpha |A_1\rangle + c_2 \alpha |A_2\rangle \\ \text{и} \\ \alpha = 0, \text{ если } \alpha |P\rangle = 0 \text{ для любого } |P\rangle. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Назовем, по определению, суммой и произведением операторов операторы, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{array}{l} \{\alpha_1 + \alpha_2\} |P\rangle = \alpha_1 |P\rangle + \alpha_2 |P\rangle \quad \text{для любого } |P\rangle; \\ \{\alpha\beta\} |P\rangle = \alpha \{\beta |P\rangle\} \quad \text{для любого } |P\rangle. \end{array} \right\} \quad (14)$$

Хорошо известно, что такие определения не приводят к коммутативной алгебре, т. е. что, вообще говоря,  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ .

Если  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , то  $\alpha$  и  $\beta$  **коммутиативны**.

Отметим еще, что в качестве частного случая оператора можно рассматривать умножение на комплексное число, поэтому комплексные числа можно при желании считать операторами.

**3.4.2.** Чтобы определить действие оператора на со-вектор, рассмотрим скалярное произведение  $\langle B | \cdot \alpha | A \rangle$ . Оно является линейной скалярной функцией вектора  $|A\rangle$ , следовательно, равно скалярному произведению на  $|A\rangle$  некоторого со-вектора  $\langle B' |$

$$\langle B | \cdot \{\alpha | A \rangle\} = \langle B' | A \rangle.$$

Но со-вектор  $\langle B' |$  должен быть линейной со-вектор-функцией со-вектора  $\langle B |$ :  $\langle B' | = \langle B | \alpha'$ . Естественно положить  $\alpha' = \alpha$ <sup>1)</sup>. Итак, мы пришли к тому, чтобы **определить** действие оператора на со-вектор равенством

$$\{\langle B | \alpha\} | A \rangle = \langle B | \{\alpha | A \rangle\} \quad \text{для любого } |A\rangle. \quad (15)$$

Таким образом мы по сути допустили, что произведение бра-векторов, операторов и кет-векторов ассоциативно и что, следовательно, тройное произведение может быть записано просто как  $\langle B | \alpha | A \rangle$ . Последнее образование часто называют — по причинам, которые станут ясны ниже, — **матричным элементом оператора  $\alpha$  между состояниями  $A$  и  $B$** .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** к определениям (14.2) и (15): Мы фактически определили и произведение операторов и произведение оператора

<sup>1)</sup> Разумеется, при этом  $\langle B | \alpha \neq F(\alpha | B \rangle)$  ( $F$  из (11)).

на со-вектор по свойству ассоциативности. Такой путь обладает тем недостатком, что нарушает симметрию векторов и со-векторов, но в общей теории у нас просто не было иного выбора. В частных задачах бывает, что можно определить произведение оператора на со-вектор или операторов друг с другом непосредственным и естественным образом, притом сохраняющим желаемую симметрию. При этом может случиться, правда в довольно экстравагантных ситуациях, что независимо определенные произведения **не оказываются ассоциативными**, т. е. два возможных определения оказываются различными. Каким из них пользоваться — приходится тогда решать в каждом случае заново <sup>1)</sup>. ■

**3.4.3.** Введем теперь понятие **сопряженного** оператора. Вектор  $|Q\rangle$ , сопряженный со-вектору  $\langle P| \alpha = \langle Q|$ , зависит антилинейно от  $\langle P|$ , значит линейно от  $|P\rangle$ , поэтому получается из  $|P\rangle$  действием некоторого линейного оператора. Обозначим этот оператор через  $\alpha^+$  и будем называть оператором, **сопряженным** оператору  $\alpha$ . Итак,  $\alpha^+$  определяется условием:

$$\alpha^+|P\rangle = |Q\rangle, \quad \text{если} \quad \langle Q| = \langle P|\alpha \quad \text{для любого} \quad |P\rangle. \quad (16)$$

Если образовать скалярное произведение  $\langle B|\{\alpha^+|P\rangle\}$ , то в силу (16) и (12) будет

$$\langle B|\{\alpha^+|P\rangle\} = \langle B|Q\rangle = (\langle Q|B\rangle)^* = (\langle P|\alpha|B\rangle)^*,$$

то есть

$$\langle B|\alpha^+|P\rangle = (\langle P|\alpha|B\rangle)^*. \quad (16a)$$

Это соотношение с равным правом может служить в качестве определения  $\alpha^+$ . Легко получить, что  $(\alpha^+)^+ = \alpha$ .

**3.4.4.** Если

$$\alpha^+ = \alpha, \quad (17)$$

то оператор  $\alpha$  называется **эрмитовым** или **самосопряженным**.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Строго говоря, здесь надо проводить различие между эрмитовыми операторами, для которых достаточно (17), и самосопряженными, определение которых требует еще дополнительных свойств

<sup>1)</sup> Указанная трудность может возникнуть только для векторов, не вмещающихся в гильбертово пространство и неограниченных операторов, например для векторов и операторов, представляемых бесконечно-рядными матрицами (с неубывающими по мере роста номера элементами!) — тогда есть и «естественное» определение произведения по правилу матричного умножения. Ср. замечание в книге Бремермана, «Распределения, комплексные преобразования и преобразования Фурье», «Мир», 1968, дополнение.



областей определения и значений операторов, но мы здесь не будем вдаваться в эти тонкости, изложение которых можно найти, например, в книге фон Неймана «Математические основы квантовой механики». ■

Ясно, что оператор, сопряженный сумме, есть сумма сопряженных операторов

$$(\alpha + \beta)^+ = \alpha^+ + \beta^+.$$

Что есть оператор, сопряженный произведению? Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle B | \beta^+ \alpha^+ | A \rangle &= \{ \langle B | \beta^+ \rangle \{ \alpha^+ | A \rangle \} = \langle Q | P \rangle = (\langle P | Q \rangle)^* = \\ &= (\langle A | \alpha \beta | B \rangle)^* = \langle B | (\alpha \beta)^+ | A \rangle. \end{aligned}$$

Итак,

$$(\alpha + \beta)^+ = \alpha^+ + \beta^+; \quad (\alpha \beta)^+ = \beta^+ \alpha^+. \quad (18)$$

Отсюда видно, что если  $\xi = \xi^+$  и  $\eta = \eta^+$  эрмитовы, то их произведение  $(\xi \eta)^+ = \eta \xi \neq \xi \eta$ , вообще говоря, не будет, таким. Однако можно утверждать, что

$$\left. \begin{aligned} &\text{если } \xi^+ = \xi; \quad \eta^+ = \eta; \\ &\text{то } (\xi \eta + \eta \xi)^+ = (\xi \eta + \eta \xi); \quad (\xi \eta - \eta \xi)^+ = -(\xi \eta - \eta \xi). \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

**СЛЕДСТВИЕ:** степень  $\xi^n$  эрмитова оператора  $\xi$  эрмитова. ■

Докажем

**ЛЕММУ 1:** Если  $\xi = \xi^+$  и  $\xi^m | P \rangle = 0$ ,  $|P\rangle$  — фиксирован, то  $\xi | P \rangle = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Помножим равенство из условия слева на  $\langle P | \xi^{m-2}$ :

$$0 = \langle P | \xi^{m-2} \xi^m | P \rangle = \langle P | \xi^{m-1} \xi^{m-1} | P \rangle = \|\xi^{m-1} | P \rangle\|^2 = 0.$$

Следовательно, по (12.2),  $\xi^{m-1} | P \rangle = 0$ . Далее по индукции. ■

**3.4.5.** Специальный вид линейного оператора получится, если образовать произведение кет- и бра-векторов, в котором кет-вектор стоит слева:

$$|A\rangle\langle B|,$$

и считать, что действие такого образования на векторы и со-векторы определяется сочетательным законом:

$$\{|A\rangle\langle B|\} |P\rangle = |A\rangle \{ \langle B | P \rangle \}; \quad \langle Q | \{ |A\rangle\langle B| \} = \{ \langle Q | A \rangle \} \langle B|.$$

Для такого оператора, по определению сопряжения в (16),  $\{|A\rangle\langle B| \}^+ |P\rangle = |Q\rangle$ , если  $\langle Q| = \langle P|A\rangle\langle B|$ . Но в силу антилинейности (11.2) соответствия бра-векторов кет-векторам  $|Q\rangle = \{\langle P|A\rangle\}^*|B\rangle = \{\langle A|P\rangle\}|B\rangle = |B\rangle\langle A|P\rangle$ .

Следовательно,

$$(|A\rangle\langle B|)^+ = |B\rangle\langle A|. \quad (19)$$

**3.4.6.** В дальнейшем нам часто придется иметь дело с понятием проекционного оператора. Оператор  $P$  называется **проекционным оператором** (или **оператором проектирования**, или, совсем коротко, **проектором**), если

$$P^+ = P \text{ и } P^2 = P. \quad (20)$$

Перечислим некоторые свойства проекционных операторов:

$$(1) \quad (1 - P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - P, \text{ т. е.}$$

$$(1 - P) \text{ — проектор.}$$

$$(2) \quad \text{Для любого вектора } |A\rangle:$$

$$\langle A|P|A\rangle = \langle A|PP|A\rangle = \|P|A\rangle\|^2 \geq 0.$$

(3) Действуя на вектор, проектор может только уменьшить его норму:

Для произвольного вектора  $|A\rangle$

$$\langle A|A\rangle = \langle A|P|A\rangle + \langle A|1 - P|A\rangle = \|P|A\rangle\|^2 + \|(1 - P)|A\rangle\|^2,$$

где мы использовали свойства (1) и (2). Следовательно,

$$\| |A\rangle \|^2 \geq \|P|A\rangle\|^2.$$

Комбинируя (2) и (3), полезно выписать двойное неравенство:

$$\| |A\rangle \|^2 \geq \|P|A\rangle\|^2 \geq 0.$$

(4) Пусть у нас имеется несколько проекционных операторов  $P_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , и пусть  $\sum_r P_r = Q$ , где  $Q$  — опять проекционный оператор,  $Q^2 = Q$ .

Тогда

$$P_r P_{r'} = 0 \quad (r \neq r').$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Рассмотрим норму произвольного вектора  $|A\rangle$ . Для нее можно написать:

$$\begin{aligned} \| |A\rangle \|^2 &\geq \|Q|A\rangle\|^2 = \langle A|Q|A\rangle = \\ &= \sum_r \langle A|P_r|A\rangle \geq \langle A|P_r|A\rangle + \langle A|P_{r'}|A\rangle = \|P_r|A\rangle\|^2 + \|P_{r'}|A\rangle\|^2. \end{aligned}$$

Выберем теперь в качестве  $|A\rangle$  вектор  $P_r|B\rangle$ , где  $|B\rangle$  — опять произвольный вектор. Тогда крайние элементы предыдущей цепочки дадут неравенство  $\|P_r|B\rangle\|^2 \geq \|P_r|B\rangle\|^2 + \|P_{r'}P_r|B\rangle\|^2$ , из которого следует, что  $P_{r'}P_r|B\rangle = 0$ , а значит, в силу произвольности  $|B\rangle$ , и  $P_rP_{r'} = 0$ . ■

Справедливо, как легко видеть, и обратное утверждение:

(4а) Если проекционные операторы некоторого набора  $\{P_r\}$  взаимно-ортогональны,  $P_rP_{r'} = 0$ , то  $\sum_r P_r = Q$  будет опять проекционным оператором.

Если выбрать теперь в (19)  $|B\rangle = |A\rangle$ , то оператор  $|A\rangle\langle A|$  будет эрмитовым,  $(|A\rangle\langle A|)^+ = |A\rangle\langle A|$ . Далее  $(|A\rangle\langle A|)^2 = |A\rangle\langle A| \cdot \langle A|A\rangle$ . Поэтому, если  $|A\rangle$  нормирован, то  $|A\rangle\langle A|$  будет частным случаем проекционного оператора:

$$P_A = |A\rangle\langle A| \text{ есть оператор проектирования в состояние } |A\rangle. \quad (21)$$

Эти операторы будут играть ниже очень важную роль.

**3.5.** Мы ввели операторы в пространствах векторов состояния, следуя естественному ходу математической, а не физической мысли.

Действительно, физически казалось бы трудно найти какой-либо смысл в соотношении одному состоянию — другого, найти какое-либо место операции, которая преобразует состояние системы в некоторое новое состояние (Какие-либо аналогии можно протянуть только к изменениям системы под действием преобразований симметрии.).

Тем не менее мы сделаем теперь *физическое допущение*:

Динамическим переменным классической теории соответствуют в квантовом описании линейные операторы в пространстве векторов состояния. При этом вещественным динамическим переменным отвечают эрмитовы операторы.

— допущение, физически еще менее естественное, так как трудно себе представить, как это динамическая переменная, «действуя» на состояние системы, может перевести его в другое состояние. Однако, как мы сейчас увидим, оказывается возможным найти совершенно убедительные точки соприкосновения так вводимых динамических переменных с тем, что имеют в виду под этим словом в классической теории.

Заметим еще, что с чисто алгебраической стороны основное отличие «новых» динамических переменных от классических — это их **некоммутативность**. Ниже мы увидим, что как раз это отличие приведет нас к принципу неопределенности.

## 4. Проблема собственных значений

**4.1.** Когда мы говорили о состояниях, то отмечали, что всякая квантовомеханическая система может, в частности, находиться в состоянии, в котором какая-либо динамическая переменная имеет совершенно определенное значение — т. е. можно предсказать, что ее измерение наверняка приведет к одному фиксированному результату. Естественно допустить, что в таком состоянии изображающий эту переменную оператор ведет себя в каком-то смысле подобно соответствующей классической динамической переменной. Но динамические переменные классической механики ничего не делают с состояниями. Поэтому интересно найти такие случаи, когда *действие* квантовой динамической переменной на какое-то избранное состояние системы состоит в “*недействии*” на него. Поскольку векторы сопоставляются состояниям с точностью до числового множителя, то изображающий динамическую переменную оператор не будет «действовать» на состояние, если действие этого оператора на соответствующий состоянию вектор сведется к умножению этого вектора на число.

**4.2.** Такие соображения приводят нас к рассмотрению уравнения

$$\alpha |P\rangle = a |P\rangle. \quad (22)$$

Это уравнение, часто встречающееся во многих разделах математики, имеет специальное название — уравнения **проблемы собственных значений** (иногда, особенно в устной речи, употребляют и принятый в других языках термин «Eigenwertproblem»; мы будем иногда использовать сокращение EWP). Напомним, что постановка EWP состоит в том, что оператор  $\alpha$  считается заданным и ищутся такое число  $a$  и ненулевой вектор  $|P\rangle$  (или числа и векторы), которые удовлетворяли бы (22). Число  $a$  называется тогда **собственным значением** («Eigenwert», EW) оператора  $\alpha$ , а вектор  $|P\rangle$  — **собственным вектором** («Eigenvektor») оператора  $\alpha$ , **принадлежащим** собственному значению  $a$  (или «относящимся» к собственному значению  $a$ ). Наряду с (22) бывает удобно рассматривать и EWP-у для со-вектора:

$$\langle Q | \alpha = b \langle Q|. \quad (22a)$$

Если одному собственному значению принадлежит несколько линейно независимых собственных векторов

$$|P1\rangle, |P2\rangle, \dots, |Pn\rangle,$$

то собственным вектором, отвечающим тому же EW-у, будет и любая их линейная комбинация

$$c_1 |P1\rangle + c_2 |P2\rangle + \dots + c_n |Pn\rangle.$$

Если оператор  $\alpha$  есть число,  $\alpha = k$ , то у него будет единственный EW  $a = k$  и любой вектор будет собственным, принадлежащим этому собственному значению.

**4.3.** В дальнейшем нас будет интересовать EWP практически только для эрмитовых операторов  $\xi = \xi^+$ . В таком случае:

(1) все собственные значения вещественны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В самом деле, тогда из (22) следует

$$\langle P | \xi | P \rangle = a \langle P | P \rangle.$$

В правой части здесь  $\langle P | P \rangle$  вещественно и больше нуля, как норма, левая же часть вещественна по правилу сопряжения матричных элементов (16а) и эрмитовости  $\xi$ . Следовательно, вещественно и  $a$ . ■

(2) Со-вектор, сопряженный собственному вектору, есть собственный со-вектор, относящийся к тому же EW-у<sup>1)</sup>.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из

$$\xi | P \rangle = a | P \rangle; \quad a \in R \quad \Rightarrow \quad \langle P | \xi^+ = \langle P | \xi = a \langle P|. \quad \blacksquare$$

Эти два свойства позволяют провести:

**УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ:** Будем обозначать собственные значения эрмитова оператора  $\xi$  той же буквой в сопровождении какого-либо индекса или номера:  $\xi'$ ,  $\xi^n$ ,  $\xi^r$  и т. п.; тем же самым числом будем отмечать и собственные векторы, помещая его внутри символа кет- или бра-:  $|\xi'\rangle$  и т. п. Если одному EW-у принадлежат несколько собственных векторов, то будем, при нужде, различать их, добавляя дополнительные значки:  $|\xi'1\rangle$ , ... ■

Рассмотрим два собственных вектора оператора  $\xi$ , принадлежащих разным EW-м.

Пусть:

$$\xi | \xi' \rangle = \xi' | \xi' \rangle \quad \text{тогда:} \quad \langle \xi' | \xi = \langle \xi' | \xi' \Rightarrow \langle \xi' | \xi | \xi'' \rangle = \xi' \langle \xi' | \xi'' \rangle$$

и пусть

$$\xi | \xi'' \rangle = \xi'' | \xi'' \rangle \Rightarrow \langle \xi' | \xi | \xi'' \rangle = \xi'' \langle \xi' | \xi'' \rangle.$$

<sup>1)</sup> В общем случае неэрмитова оператора  $\alpha$  этот со-вектор будет собственным со-вектором, принадлежащим **сопряженному** EW-у  $a'^*$ .

Поэтому  $(\xi' - \xi'')\langle \xi' | \xi'' \rangle = 0$  и, поскольку  $\xi' - \xi'' \neq 0$ ,  $\langle \xi' | \xi'' \rangle = 0$ .  
Итак,

$$\langle \xi' | \xi'' \rangle = 0 \quad \text{для} \quad \xi' \neq \xi'', \quad \text{т. е.} \quad (23)$$

(3) Два собственных вектора, принадлежащих **различным** собственным значениям одного оператора, **ортогональны**.

На вопрос о **существовании** решения проблемы собственных значений для эрмитова оператора к сожалению нельзя дать исчерпывающего ответа. Можно, правда, указать классы операторов, для которых ЕВР всегда имеет решения и притом достаточно много решений, чтобы из собственных векторов можно было построить полную систему, однако эти классы оказываются для квантовой механики слишком узкими.

**4.4.** Теперь настало время наполнить физическим содержанием наш пока чисто формальный постулат о сопоставлении динамическим переменным эрмитовых операторов. Отталкиваясь от замечаний, сделанных в начале параграфа, мы потребуем для этого, чтобы:

(1) Если система находится в таком состоянии, что при измерении некоторой динамической переменной  $\xi$  мы наверняка получаем один определенный результат  $\xi'$ , то это состояние описывается **собственным вектором** оператора  $\xi$  с собственным значением  $\xi'$ .

(2) Обратно, если состояние системы описывается собственным вектором эрмитова оператора  $\xi$ , принадлежащим ЕВ-у  $\xi'$ , то в результате измерения динамической величины  $\xi$  обязательно получится значение  $\xi'$ .

(3) Если система находится в произвольном состоянии, то в силу принципа суперпозиции мы можем рассматривать это состояние как суперпозицию различных собственных состояний некоторого  $\xi$ . Измерение извлекает тогда из этой суперпозиции какое-либо одно определенное состояние, система скачком переходит в него, и мы опять получаем в качестве результата измерения одно из собственных значений  $\xi'$ , только теперь мы уже не сможем заранее сказать, какое именно.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Поскольку мы можем измерять любую динамическую величину в каком угодно состоянии и всегда должны получить при измерении какой-то результат, а в силу сделанных допущений этот результат может быть только одним из ЕВ-ов соответствующего оператора, то это значит, что **любое** состояние должно быть представимо в виде суперпозиции собственных состояний каждой физической величины, которую хотя

бы в принципе можно измерять. Но для этого надо, чтобы собственные векторы отвечающего такой динамической переменной оператора образовывали бы полную систему. ■

Динамические переменные, собственные состояния которых образуют полную систему, мы будем называть **наблюдаемыми**.

**4.5.** Как записать утверждение о полноте набора собственных векторов математически? Если наблюдаемая  $\xi$  обладает только дискретным спектром собственных значений, то полнота требует, чтобы любой вектор  $|P\rangle$  мог бы быть записан в виде

$$|P\rangle = \sum_r |\xi^r\rangle. \quad \text{Дискр. спектр} \quad (24.1)$$

Если спектр  $\xi$  непрерывен, то сумма заменяется интегралом:

$$|P\rangle = \int |\xi'\rangle d\xi'. \quad \text{Непрер. спектр} \quad (24.2)$$

Если, наконец, у  $\xi$  есть и дискретный и непрерывный спектр, то

$$|P\rangle = \int |\xi'c\rangle d\xi' + \sum_r |\xi^r d\rangle, \quad \text{Дискр. и непр. спектр} \quad (24.3)$$

где индексы  $c$  и  $d$  указывают на принадлежность к непрерывному или дискретному спектру. Заметим, что в разложении типа (24.3) непрерывный и дискретный спектры могут и перекрываться. Мы не пишем в (24) никаких коэффициентов  $C_r$ , фигурировавших, например, в формулах (7). Дело в том, что всякая линейная комбинация собственных векторов, принадлежащих одному и тому же собственному значению  $\xi^r$ , тоже будет собственным вектором, принадлежащим тому же EW-у. Поэтому мы можем считать, что в правых частях (24) стоят как раз те линейные комбинации, которые нужны, чтобы получить вектор  $|P\rangle$ .

**4.5.1.** Когда в разложении вектора по собственным векторам есть непрерывный спектр, то встает вопрос о разумной нормировке. Пусть  $|P\rangle$  и  $|Q\rangle$  — два вектора с разложением (24.2). Их скалярное произведение будет тогда равно

$$\langle P | Q \rangle = \iint d\xi' d\xi'' \langle \xi'p | \xi''q \rangle.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int d\xi'' \langle \xi'p | \xi''q \rangle.$$

Для  $\xi' \neq \xi''$   $\langle \xi'p | \xi''q \rangle = 0$  по свойству ортогональности. Следовательно надо, чтобы  $\langle \xi'p | \xi''q \rangle$  равнялось бы бесконечности — иначе весь интеграл просто обратится в нуль. Поэтому **нормиру-**

**емые** собственные векторы, принадлежащие EW-м непрерывного спектра, нам совершенно бесполезны — их вклад в большинство интересующих нас выражений будет равен нулю. Мы видим, что в таком случае приходится вводить собственные векторы, не нормируемые в обычном смысле, и нормировать их так, чтобы

$$\langle \xi' p | \xi'' q \rangle \text{ было бы } \sim \delta(\xi' - \xi'').$$

Постулируем, обобщая требование (12.2), что для векторов непрерывного спектра всегда

$$\int_D d\xi'' \langle \xi' p | \xi'' p \rangle > 0, \text{ коль скоро } \begin{cases} |\xi' p\rangle \neq 0, \\ \xi' \in D. \end{cases} \quad (25)$$

Дальнейшие подробности нормировки зависят от того, что за векторы сами  $|P\rangle$  и  $|Q\rangle$  и относятся ли они к дискретному или непрерывному спектру какого-либо оператора.

**4.6.** Оглядывая два последних раздела, мы видим теперь, каким нетривиальным и неожиданным образом вторгается понятие линейного оператора в физическое описание явлений в квантовой области.

Физически первичным оказывается не понятие самого оператора, а скорее понятие совокупности его собственных векторов  $|\xi'\rangle$  с принадлежащими им собственными значениями  $\xi'$ , как совокупности специальных состояний системы, в которых измерение величины  $\xi$  приводит всякий раз к определенным результатам  $\xi'$ . Оператор, выражаясь геометрическим языком, возникает в обличье своих главных направлений и характеристических чисел, его общая форма появляется только как вторичное понятие при переходе в описании состояний физической системы к их классификации по значениям какой-либо другой динамической переменной. Это отличие представляется столь сильным, что иногда отказываются от проводимой в нашем изложении тесной идентификации физической величины с отвечающим ей оператором, предпочитая скорее идентифицировать ее с EW-ми возникающих при измерении собственных состояний, так что приходится считать, что физические величины не присущи изначально квантовым системам, а лишь возникают в процессе измерения.

Более того, в отличие от привычного в математике подхода, вторичным представляется физику и понятие пространства векторов состояния, в котором действуют операторы, — оно возникает для него просто как совокупность векторов, растягиваемых всеми собственными векторами какой-либо наблюдаемой. Имен-



но последнее соображение удерживает нас от того, чтобы точно оговорить свойства рассматриваемого пространства, прежде чем начать изучение операторов, действующих в нем.

**4.7.** Мы уже говорили, что в общем случае затруднительно сказать, можно ли набрать из собственных векторов того или иного линейного эрмитова оператора полную систему, то есть установить, является ли он наблюдаемой. Мы заключим этот параграф разбором одного частного примера, в котором указанный вопрос можно исследовать до конца. Это случай, когда эрмитов оператор удовлетворяет целому алгебраическому уравнению степени  $n$ .

**4.7.1.** Именно, докажем:

**ЛЕММУ 2:** Если эрмитов оператор  $\xi$  удовлетворяет целому алгебраическому уравнению степени  $n$ :

$$\begin{aligned} Q_n(\xi) &= \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_n \equiv \\ &\equiv (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n) = 0, \quad (26) \end{aligned}$$

т. е. если  $Q_n(\xi) |A\rangle = 0$  для любого  $|A\rangle$  и если это — простейшее уравнение, которому он удовлетворяет, т. е. не существует никакого  $Q_{n'}(\xi) = 0$  с  $n' < n$ , то

( $\alpha$ ) оператор  $\xi$  имеет точно  $n$  собственных значений;

( $\beta$ ) все они различны (и вещественны)<sup>1)</sup>;

( $\gamma$ ) собственные векторы  $\xi$  образуют полную систему.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:**

(1) Собственными значениями могут быть только числа  $\xi_1, \dots, \xi_n$ :

Для любого EW-а  $\xi'$  и собственного вектора  $|\xi'\rangle$  должно быть

$$0 |\xi'\rangle = Q_n(\xi) |\xi'\rangle = Q_n(\xi') |\xi'\rangle, \text{ т. е. } Q_n(\xi') = 0,$$

значит,  $\xi'$  есть одно из чисел  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

Для дальнейшего запишем  $Q_n(\xi)$  в одной из  $n$  форм

$$Q_n(\xi) = (\xi - \xi_r) R_r(\xi); \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

(2) Каждое из чисел  $\xi_r$  есть EW:

<sup>1)</sup> То есть эрмитов оператор не может удовлетворять алгебраическому уравнению, которое, будучи рассматриваемо как уравнение для чисел, имело бы комплексные корни.

В самом деле, поскольку  $R_r(\xi)$  есть полином степени  $< n$ , то должен существовать вектор  $|A\rangle$  такой, что  $R_r|A\rangle \neq 0$ , но  $(\xi - \xi_r)R_r(\xi)|A\rangle = 0$ . Следовательно, все векторы  $R_r(\xi)|A\rangle \neq 0$  суть собственные векторы, принадлежащие EW-у  $\xi_r$ <sup>1)</sup>.

(3) Все  $\xi_r$  различны:

В самом деле, если  $\xi_s$  — кратный корень (26),  $(\xi - \xi_s)^m S_s(\xi)|A\rangle = 0$  для всех  $|A\rangle$ , то для  $|B\rangle = S_s|A\rangle$  мы получим по лемме 1 из  $(\xi - \xi_s)^m|B\rangle = 0 \Rightarrow (\xi - \xi_s)|B\rangle = 0$ , откуда  $(\xi - \xi_s)S_s(\xi)|A\rangle = 0$  для всех  $|A\rangle$ , т. е.  $\xi$  удовлетворял бы уравнению степени ниже  $n$ .

(4) Все  $\xi_r$  вещественны: как собственные значения эрмитова  $\xi$ .

(5) Собственные векторы  $\xi$  образуют полную систему:

Введем операторы

$$P_r(\xi) = \frac{R_r(\xi)}{R_r(\xi_r)}.$$

Поскольку (см. (2))  $R_r$  переводит произвольный вектор в собственный вектор  $|\xi_r\rangle$ , то то же справедливо и для  $P_r(\xi)$ . Рассмотрим теперь  $P_r^2(\xi)$ . Для любого  $|A\rangle$

$$P_r^2(\xi)|A\rangle = \frac{R_r(\xi)}{R_r(\xi_r)} P_r|A\rangle = \frac{R_r(\xi_r)}{R_r(\xi_r)} P_r|A\rangle = P_r(\xi)|A\rangle.$$

Следовательно,  $P_r^2 = P_r$ . Следовательно,  $P_r$  — оператор проектирования, точнее, *оператор проектирования на собственное подпространство, отвечающее EW-у  $\xi_r$* .

Вычислим  $\sum_r P_r(\xi)$ . Рассмотрим для этого  $\sum_r P_r(z)$ , где  $z$  не оператор, а (комплексное) число:

$$\sum_r P_r(z) = \sum_r \frac{R_r(z)}{R_r(\xi_r)} \frac{(z - \xi_r)}{(z - \xi_r)} = Q_n(z) \sum_r \frac{1}{(z - \xi_r) R_r(\xi_r)}.$$

Но

$$\frac{1}{Q_n(z)} = \frac{1}{(z - \xi_1) \dots (z - \xi_n)} = \sum_r \frac{1}{(z - \xi_r)} \underbrace{\frac{1}{(\xi_r - \xi_1) \dots (\xi_r - \xi_n)}}_{\text{без } r}.$$

(В последнем равенстве проще всего убедиться, заметив, что обе его части — аналитические функции с одинаковыми вычетами в совпа-

<sup>1)</sup> Заметим, что отсюда все  $(\xi - \xi_r)$  и  $R_r(\xi)$  суть делители нуля в кольце полиномов оператора  $\xi$ .

дающих полюсах). Следовательно,  $\sum_r P_r(z) \equiv 1$ , но поскольку эта функция — полином, то то же справедливо и для аргумента  $\xi$ .

Итак:

$$\sum_{r=1}^n P_r(\xi) = 1. \quad (*)$$

Поскольку 1 есть проектор, то в силу свойства (4) из **3.4.6** формула для проекционных операторов (\*) означает, что все  $P_r$  ортогональны,  $P_r P_{r'} = 0$  и, следовательно, осуществляют разбиение всего пространства в прямую сумму ортогональных подпространств, каждое из которых составлено только из собственных векторов оператора  $\xi$ , относящихся к одному EW-у. Итак:

Любой вектор  $|A\rangle$  можно записать как

$$|A\rangle = \sum_{r=1}^n P_r |A\rangle,$$

т.е. в виде суммы собственных векторов  $|\xi_r\rangle$ . Полнота доказана <sup>1)</sup>. ■

Приведем еще представление для самого оператора  $\xi$ . Поскольку для любого  $|A\rangle$

$$\xi |A\rangle = \xi \cdot 1 \cdot |A\rangle = \sum_r \xi P_r |A\rangle = \sum_r \xi_r P_r |A\rangle,$$

то

$$\xi = \sum_{r=1}^n \xi_r P_{\xi_r}, \text{ если } \sum_r P_{\xi_r} = 1, \quad (27)$$

где мы написали  $P_{\xi_r}$  вместо  $P_r$ , чтобы подчеркнуть смысл проектирования в подпространство, отвечающее собственному значению  $\xi_r$ .

<sup>1)</sup> Простота, с которой в нашем примере удалось достичь исчерпывающих результатов, объясняется тем, что он соответствовал по существу случаю конечномерного пространства. В самом деле, размерность собственных подпространств каждого EW-та нигде не входила в наше рассмотрение, и все доказательство проходило бы точно так же, если бы мы рассматривали вместо самого векторного пространства его представление, в котором каждому собственному подпространству соотносился бы единственный (с точностью до числового множителя) собственный вектор — а это и был бы, в силу конечности  $n$ , случай эрмитова оператора в конечномерном пространстве. Уравнение (26) было бы тогда уравнением Гамильтона–Кэли с только вещественными корнями, которому удовлетворяет каждый эрмитов оператор в конечномерном пространстве, а условие отсутствия уравнения низшей степени для рассматриваемого оператора означало бы исключение случая кратных корней, в котором эффективная размерность могла бы быть еще уменьшена.

**4.7.2.** Справедлива и обратная теорема:ЛЕММА 2а: *Если*(1) эрмитов оператор обладает лишь конечным числом собственных значений  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и

(2) является наблюдаемой (т.е. обладает полной системой),

*то* он удовлетворяет уравнению

$$(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_n) = 0. \quad (*)$$

Действительно, любой вектор можно разложить по полной системе собственных векторов оператора  $\xi$ , поэтому, после применения к этому разложению левой части (\*), в каждом члене разложения хотя бы один из множителей в (\*) обратится в нуль.

**4.7.3.** Лемма 2 дает еще одно свойство проекционных операторов. Поскольку всякий проектор удовлетворяет уравнению

$$P^2 - P \equiv (P - 0)(P - 1) = 0,$$

то

(5) Каждый проекционный оператор имеет полную систему собственных векторов, отвечающих EW-ам 0 и 1, т.е. он есть *наблюдаемая*.

**4.8. ЗАМЕЧАНИЕ:** Разобранные примеры указывают на естественную иерархию, существующую среди объектов — которые мы называем наблюдаемыми или линейными эрмитовыми операторами с полной системой собственных векторов — призванных описывать в квантовой механике физические величины. Низшую — простейшую — ступень в ней занимают вещественные числа, которые можно, как мы видели, рассматривать как эрмитовы операторы, все (образующие полную систему) собственные векторы которых относятся к *единственному* EW-у. Вторую ступень занимают проекторы — наблюдаемые, обладающие *двумя* собственными значениями; можно сказать, что это — простейший квантовый объект, выходящий за рамки классики, где *все* динамические переменные изображались числами. На третьей ступени мы находим объекты, изучавшиеся в лемме 2: эрмитовы операторы, удовлетворяющие целому алгебраическому уравнению конечной степени. Согласно лемме они всегда обладают полной системой собственных векторов, распределяющихся по точно  $n$  собственным значениям. Отметим, что объекты первых трех ступеней можно реализовать как эрмитовы операторы в пространстве конечного числа измерений, поэтому для обращения с ними было бы достаточно привлечь

средства обычной векторной и тензорной алгебры. Естественным — и необходимым для физики — обобщением объектов третьей ступени являются наблюдаемые, обладающие *счетной* последовательностью EW-ов, т.е. наблюдаемые с чисто дискретным спектром. Для реализации этих, занимающих четвертую ступень иерархии, объектов, приходится прибегать к построению гильбертова пространства. Однако и этого оказывается недостаточно — поскольку в природе существуют физические величины, при измерении которых может быть найдено *любое вещественное* число из некоторого интервала, то нашу иерархическую лестницу приходится дополнить пятой ступенью, наблюдаемыми с *непрерывным* спектром, обладающими континуумом собственных значений. ■

## 5. Функции наблюдаемых

**5.1.** В нашем примере мы уже имели дело с функцией  $Q_n(\xi)$  наблюдаемой  $\xi$  — полиномом, определявшимся чисто алгебраическими действиями сложения и умножения. Из определения этих действий следовало, что всякий собственный вектор наблюдаемой  $\xi$  есть в то же время и собственный вектор  $Q_n(\xi)$  и при том отвечающий собственному значению  $Q_n(\xi')$ , если он отвечал EW-у  $\xi'$  наблюдаемой  $\xi$ , т.е. что

$$\text{каждый } |\xi'\rangle \text{ есть } |(Q_n(\xi))'\rangle \text{ и } (Q_n(\xi))' = Q_n(\xi'). \quad (28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, рассмотрим, например,

$$Q_n(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) + \lambda, \text{ где } \xi|\xi_1\rangle = \xi_1|\xi_1\rangle; \quad \xi|\xi_2\rangle = \xi_2|\xi_2\rangle.$$

Тогда собственными векторами  $Q(\xi)$  будут не только  $|\xi_1\rangle$  и  $|\xi_2\rangle$ , но и  $|a\rangle = a_1|\xi_1\rangle + a_2|\xi_2\rangle$  с произвольными  $a_1$  и  $a_2$  — последние векторы не суть собственные векторы  $\xi$ . Все эти векторы будут относиться к одному EW-у  $Q(\xi)$ , равному  $\lambda$ . ■

Если  $Q(\xi)$  имеет одинаковые EW-ы для двух или нескольких собственных векторов оператора  $\xi$ , то линейные комбинации этих векторов также будут собственными векторами  $Q(\xi)$ !

Ясно, что прямое рассуждение непосредственно переносится на сходящиеся (как?!) ряды по  $\xi$ :

$$f(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + \dots \quad (29)$$

— для них тоже  $|\xi'\rangle \Rightarrow |f(\xi')\rangle$  и  $(f(\xi))' = f(\xi')$ .

**5.2.** Желательно, однако, не быть привязанным к сходимости ряда и вообще к разложению в ряд. Того ради можно дать другое определение функции от наблюдаемой.

Пусть  $f(x)$  — некоторая функция вещественного переменного  $x$ , определенная для  $x$ , равного любым собственным значениям  $\xi'$  некоторой наблюдаемой  $\xi$  и **однозначная**. Тогда мы *определим*  $f(\xi)$  как такой линейный оператор, для которого

$$f(\xi) |\xi'\rangle = f(\xi') |\xi'\rangle \text{ для всех } |\xi'\rangle \text{ наблюдаемой } \xi. \quad (30)$$

Действие же  $f(\xi)$  на произвольный вектор  $|P\rangle$  определится разложением (24)

$$f(\xi) |P\rangle = \int d\xi' f(\xi') |\xi'\rangle \langle \xi'|P\rangle + \sum_r f(\xi_r) |\xi_r\rangle \langle \xi_r|P\rangle. \quad (30a)$$

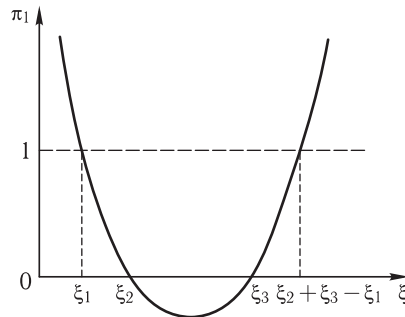
**ЗАМЕЧАНИЕ:** Функция  $f(x)$  не обязательно должна быть вещественно-значна, она может принимать и комплексные значения. В последнем случае сопряженный оператор  $(f(\xi))^+$  естественно определить уравнением, сопряженным к (30)

$$\langle \xi' | (f(\xi))^+ = \langle \xi' | f^*(\xi'),$$

где  $f^*(x)$  — функция, комплексно-сопряженная  $f(x)$ . С другой стороны, по общему правилу  $\langle \xi' | (f(\xi))^+$  есть бра-вектор, сопряженный кет-вектору  $f(\xi) |\xi'\rangle = f(\xi') |\xi'\rangle$ , и мы опять приходим к тому же выражению  $\langle \xi' | (f(\xi))^+ = \langle \xi' | f^*(\xi')$ . ■

Требование **однозначности**  $f(x)$  весьма существенно. При его нарушении возможны разнообразнейшие парадоксы.

**5.3.** Чтобы разобраться в трудностях, которые могут при этом возникнуть, рассмотрим один простейший пример, который естественно возникает из подробно рассмотренного случая, когда некоторая наблюдаемая  $\xi$  удовлетворяет целому алгебраическому уравнению. Пер-



вая существенная нетривиальность получается, если  $\xi$  удовлетворяет уравнению 3-й степени, скажем

$$Q(\xi) = 0; \quad Q(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) \quad (*)$$

Мы можем тогда ввести три проекционных оператора (ср. 4.7.1)  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$ :

$$\pi_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}; \dots \quad (**)$$

Каждый из этих операторов является функцией  $\xi$  в определенном выше смысле, причем никаких вопросов пока не возникает, поскольку  $\pi_i(x)$  — однозначные функции  $x$ . Кроме того,  $\pi_i(\xi)$  являются наблюдаемыми, поскольку  $\pi_i(x)$  — вещественны.

**5.3.1.** Вопросы начнутся, если мы захотим построить обратные функции, выражающие, скажем,  $\xi$  в виде функции от  $\pi_1$ , — эта функция, рассматриваемая как функция числового аргумента, неоднозначна. Действительно, из  $(**)$  мы имеем для  $\xi$

$$\xi = \frac{\xi_2 + \xi_3 \pm \sqrt{(\xi_2 - \xi_3)^2 + 4(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)\pi_1}}{2}. \quad (+)$$

Поэтому, если обозначить буквой  $\Xi$  совокупность всех «ветвей»  $\xi$ , то

$$\Xi = \begin{cases} \text{для } \pi_1 = 0 \\ \text{для } \pi'_1 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(\xi_2 + \xi_3) \pm (\xi_2 - \xi_3)}{2} = \begin{cases} \xi_2, \\ \xi_3, \end{cases} \\ \frac{(\xi_2 + \xi_3) \pm (2\xi_1 - (\xi_2 + \xi_3))}{2} = \begin{cases} \xi_1, \\ (\xi_2 + \xi_3) - \xi_1. \end{cases} \end{cases} \quad (++)$$

Собственному значению  $\pi'_1 = 1$  принадлежит единственный собственный вектор<sup>1)</sup> — тот самый, который первоначально был собственным вектором  $\xi$  с EW-м  $\xi_1$  — будем обозначать его  $|1\rangle$ . Поэтому ясно, что появившиеся в  $(++)$  два разных значения для EW-а  $\Xi$  в этом состоянии могут отвечать только образованию двух ветвей функции в том же смысле, что и для функции обычного непрерывного числового аргумента. Это еще сравнительно безобидно.

**5.3.2.** Гораздо сложнее ситуация с собственным значением  $\pi'_1 = 0$  — этому собственному значению отвечают *два* собственных вектора  $\xi$ , будем их называть  $|2\rangle$  и  $|3\rangle$ . Возникает вопрос, можем ли мы выбирать **различные** ветви числовой функции для разных собственных векторов, относящихся к **одному** EW-у?

**5.3.2.1.** Если ответить на него отрицательно, то все опять сведется к выбору ветви (конечно, для, например, двузначной в обычном

<sup>1)</sup> Мы принимаем минимальную реализацию, т. е. считаем, что все  $\xi'$  невырождены, т. е. все пространство растягивается *три* линейно-независимыми векторами.

смысле функции оператора, имеющего  $n$  различных EW-ов, при этом получится  $2^n$  ветвей!). Однако при таком определении мы вообще не сможем обратить функцию  $\pi_1(\xi)$  — ни одна из ветвей  $\Xi$  не даст старой наблюдаемой  $\xi$ : ведь состояния  $|2\rangle$  и  $|3\rangle$  относятся к *одному* собственному значению оператора  $\pi_1$ , а для  $\xi$  они имели *разные* EW-ы  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

**5.3.2.2.** Если же разрешить брать различные ветви числовой функции для разных собственных векторов, принадлежащих одному EW-у, то «число ветвей» функции от оператора поразительно возрастает, но зато среди них найдется и та ветвь  $\xi$ , которая обращает функцию  $\pi_1(\xi)$ .

В самом деле, эта ветвь получится, если выбрать для вектора  $|2\rangle$  собственное значение  $\xi_2$ , а для  $|3\rangle$  —  $\xi_3$ .

Казалось бы, теперь все слава богу. Посмотрим, однако, повнимательней, насколько возрастает число ветвей при таком определении.

Вспомним для этого, что собственными векторами  $\pi_1$ , принадлежащими EW-у 0, будут не только  $|2\rangle$  и  $|3\rangle$ , но и любые их линейные комбинации, например

$$\begin{aligned} |II\rangle &= \cos \theta |2\rangle + \sin \theta |3\rangle; \\ |III\rangle &= -\sin \theta |2\rangle + \cos \theta |3\rangle. \end{aligned}$$

(Исключительно ради простоты мы выбрали здесь матрицу поворота вещественной, тогда она зависит от одного параметра. На самом деле из требования ортогональности и нормируемости новых состояний она должна быть только унитарной, и значит, зависеть от *трех* вещественных параметров). Операторами проектирования в новые состояния будут по общему правилу (21)

$$\begin{aligned} \pi_{II} &= |II\rangle\langle II| = \cos^2 \theta \cdot \pi_2 + \sin^2 \theta \cdot \pi_3 + \frac{\sin 2\theta}{2} |2\rangle\langle 3| + \frac{\sin 2\theta}{2} |3\rangle\langle 2|; \\ \pi_{III} &= |III\rangle\langle III| = \sin^2 \theta \cdot \pi_2 + \cos^2 \theta \cdot \pi_3 - \frac{\sin 2\theta}{2} |2\rangle\langle 3| - \frac{\sin 2\theta}{2} |3\rangle\langle 2|. \end{aligned}$$

При сделанном соглашении мы можем теперь выбрать разные ветви функции  $\Xi(\pi_1)$  для состояний  $|II\rangle$  и  $|III\rangle$  и тем самым получить для частной ветви оператора  $\Xi$ , скажем  $\xi$ , выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \xi_1 \pi_1 + \xi_2 \pi_{II} + \xi_3 \pi_{III} = \xi_1 \pi_1 + (\xi_2 \cos^2 \theta + \xi_3 \sin^2 \theta) \pi_2 + \\ &+ (\xi_2 \sin^2 \theta + \xi_3 \cos^2 \theta) \pi_3 + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} \sin 2\theta \{ |3\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| \} \quad (***) \end{aligned}$$

— таким образом уже из *одного* выбора значений функции мы получаем семейство операторов, зависящих от одного непрерывного параметра  $\theta$  (а если бы мы совершили унитарный поворот — то от *трех* непрерывных параметров)! Итак, принятие правила, разрешающего выбирать различные значения функций для разных собственных векторов одного EW-та, приводит к тому, что функция от оператора получает континуум ветвей — только при таком их обилии в их число попадает и «правильное» обращение  $\xi$ !



Более того, разные «ветви» оператора могут и не коммутировать друг с другом. В самом деле, вычисляя коммутатор (\*\*\*) с «правильным»  $\xi = \xi_1\pi_1 + \xi_2\pi_2 + \xi_3\pi_3$ , найдем

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi\xi} - \xi\widetilde{\xi} = & \xi_2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} \sin 2\theta |3\rangle\langle 2| + \xi_3 \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} \sin 2\theta |2\rangle\langle 3| - \\ & - \xi_3 \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} \sin 2\theta |3\rangle\langle 2| - \xi_2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{2} \sin 2\theta |2\rangle\langle 3|,\end{aligned}$$

то есть

$$[\widetilde{\xi}, \xi] = \frac{(\xi_2 - \xi_3)^2}{2} \sin 2\theta \{|3\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 3|\} \neq 0, \quad \begin{matrix} \xi_2 \neq \xi_3, \\ 2\theta \neq 0. \end{matrix}$$

Мы видим теперь, насколько «излишне жестко» или, наоборот, «излишне мягко» определяют операторные уравнения «значения» операторов — ведь то, чем мы только что занимались, можно было рассматривать как решение уравнения

$$\frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \pi_1$$

(где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — заданные числа, а  $\pi_1$  — заданный оператор) относительно  $\xi$ . Поэтому, как правило, решение операторных уравнений требует каждый раз особого исследования <sup>1)</sup>.

**5.4.** Рассмотрим два важных примера операторных уравнений — обратный оператор и квадратный корень.

**5.4.1.** Итак, рассмотрим уравнение

$$\xi \cdot x = 1, \quad (*)$$

где  $\xi$  — заданная наблюдаемая, такая, что среди ее собственных значений нет нуля, а  $x$  — искомый оператор. Как наблюдаемая,  $\xi$  обладает полной системой собственных векторов

$$\xi |\xi'\rangle = \xi' |\xi'\rangle, \quad \xi' \neq 0.$$

Определим теперь оператор  $f(\xi)$  условием

$$f(\xi) |\xi'\rangle = \frac{1}{\xi'} |\xi'\rangle.$$

---

<sup>1)</sup> Читатель, не прошедший мимо примечания в **4.7.1**, заметит, конечно, что все трудности рассмотренного примера связаны по существу с тем, что мы обращали переход от оператора  $\xi$ , имеющего трехрядное «минимальное» представление, «к менее богатому» оператору  $\pi_1$ , минимальное представление которого двурядно. Однако в более реалистических примерах функций от операторов, обладающих бесконечным числом EW-ов, заранее заметить подобную «потерю информации» нелегко.

Тогда, при действии на произвольный вектор  $|P\rangle$ ,

$$\begin{aligned} f(\xi)\xi|P\rangle &= f(\xi)\xi\sum_r|\xi^r\rangle = f(\xi)\sum_r\xi^r|\xi^r\rangle = \sum_r\frac{1}{\xi^r}\xi^r|\xi^r\rangle = \\ &= \sum_r|\xi^r\rangle = |P\rangle, \end{aligned}$$

то есть

$$f(\xi) \cdot \xi = 1.$$

Умножая теперь (\*) слева на  $f(\xi)$ , получаем

$$x = f(\xi) = \frac{1}{\xi},$$

как естественно назвать введенную функцию. В этом примере и прямая и обратная функции от числовых аргументов однозначны, и никаких вопросов после исключения значения  $\xi' = 0$  не возникает.

Часто приходится находить оператор, обратный произведению двух или нескольких (не обязательно коммутирующих) операторов. При этом порядок множителей меняется на противоположный, например,

$$(\xi\eta)^{-1} = \eta^{-1}\xi^{-1}.$$

В самом деле, имеем

$$\xi\eta \cdot (\xi\eta)^{-1} = \xi\eta\eta^{-1}\xi^{-1} = \xi\xi^{-1} = 1,$$

если  $\xi\xi^{-1} = 1$  и  $\eta\eta^{-1} = 1$ .

**5.4.2.** Что же касается квадратного корня из наблюдаемой  $\alpha$ , т. е. решения уравнения

$$\xi^2 = \alpha, \quad \alpha — \text{задано}; \quad \xi = \sqrt{\alpha} = \alpha^{1/2},$$

то тут мы можем столкнуться со всеми трудностями, отмеченными в предыдущем примере, — можно произвольным образом выбирать ветвь корня для каждого собственного значения дискретного спектра и, даже, иногда бывает целесообразно выбирать разные ветви для разных векторов, принадлежащих одному ЕВ-у  $\alpha$ . (Например, в релятивистском случае, когда энергия выражается через импульс как  $E = \pm c\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}$ .) Практически, однако, из всего бесконечного числа ветвей корня используются лишь некоторые избранные, в первую очередь арифметическая ветвь  $+\sqrt{\alpha}$ .

**5.4.3.** Решение уравнения для обратного оператора позволяет нам ввести еще один класс операторов, играющих, наряду с эр-

митовыми, важную роль в теории. Мы имеем в виду **унитарные** операторы, определяемые уравнением

$$U^+U = UU^+ = 1 \quad \text{или} \quad U^{-1} = U^+. \quad (31)$$

Здесь опять возникают вопросы относительно областей определения и значений, которых мы не будем касаться. Отметим только две часто встречающиеся формы представления унитарного оператора в виде функции какого-то эрмитова оператора:

$$U = e^{i\xi}; \quad U = \frac{1+i\xi}{1-i\xi}. \quad (31a, b)$$

Обе формы гарантируют унитарность  $U$ , если  $\xi$  эрмитов.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Вторую из этих формул называют преобразованием Кэли; если среди EW-ов  $U$  отсутствует  $-1$ ,  $U' \neq -1$ , то она допускает недвусмысленное обращение

$$\xi = \frac{1}{i} \frac{U-1}{U+1}. \quad \blacksquare \quad (31c)$$

## 6. Спектральные представления и вероятности

В примере, который мы рассматривали выше в § 4, мы установили, что всякий эрмитов оператор, удовлетворяющий целому алгебраическому уравнению конечной степени, обладает ровно  $n$  собственными значениями, и построили операторы проектирования на отвечающие этим EW-ам собственные подпространства — операторы  $P_{\xi_r}$ , образующие полную и ортогональную систему,  $\sum_r P_{\xi_r} = 1$ ,  $P_{\xi_r} P_{\xi_{r'}} = 0$ . Далее, мы получили для самого оператора  $\xi$  **спектральное представление** (27):

$$\xi = \sum_r \xi_r P_{\xi_r},$$

выражающее этот оператор через его EW-ты и операторы проектирования в собственные подпространства. Мы хотим теперь обобщить эти результаты на произвольный эрмитов оператор  $\xi$ <sup>1)</sup>, нам придется только допустить, что  $\xi$  является *наблюдаемой*,

<sup>1)</sup> Здесь, вероятно, следует пояснить задачу несколько громоздких рассуждений, составляющих основное содержание этого и следующего параграфов. Дело в том, что пока в рассмотрение введена только единственная наблюдаемая  $\xi$ , то у нас, как уже отмечалось, нет никаких средств, чтобы различить разные (если их несколько) собственные векторы  $|\xi'\rangle$  этой наблюдаемой, относящиеся к одному EW-у  $\xi'$  — ведь, как мы говорили вначале, задать состояние, это означает физически сказать, какие динамические величины

чтобы его собственные векторы образовывали бы полную систему, так что согласно принципу суперпозиции любое состояние можно было бы разложить по его собственным векторам в виде (24):

$$|A\rangle = \sum_r |\xi^r, A\rangle + \int d\xi' |\xi', A\rangle, \quad (24)$$

причем это разложение единственно.

**6.1.** Фигурирующие в правой части (24) конкретные собственные векторы должны быть линейными вектор-функциями вектора  $|A\rangle$ , т.е. получаться из него действием некоторого линейного оператора.

Будем сперва для простоты считать, что спектр  $\xi$  чисто дискретен, и обозначим оператор, образующий из вектора  $|A\rangle$  его составляющую, отвечающую EW-у  $\xi_r$ , через  $P_{\xi_r}$ :

$$|\xi_r, A\rangle = P_{\xi_r} |A\rangle.$$

**6.1.1.** Убедимся, что оператор  $P_{\xi_r}$  — эрмитов.

В самом деле, для эрмитовости должно для любых векторов  $|A\rangle$  и  $\langle B|$  выполняться равенство

$$\langle B | P_{\xi_r} | A \rangle = \langle B | P_{\xi_r}^+ | A \rangle, \text{ т.е. } \langle B | \xi_r, A \rangle = \langle \xi_r, B | A \rangle.$$

Подставляя здесь для  $\langle B|$  в левой части и  $|A\rangle$  в правой разложения (24), приведем это условие к виду

$$\sum_{r'} \langle \xi_{r'}, B | \xi_r, A \rangle = \sum_{r'} \langle \xi_r, B | \xi_{r'}, A \rangle.$$

Но  $\langle \xi_{r'}, B | \xi_r, A \rangle = 0$  для  $r' \neq r$ , как скалярное произведение собственных векторов, относящихся к разным EW-ам. Следовательно, условие эрмитовости сводится к требованию

$$\langle \xi_r, B | \xi_r, A \rangle = \langle \xi_r, B | \xi_r, A \rangle,$$

выполняющемуся тождественно.

---

имеют определенные значения и какие именно значения, а в наше рассмотрение включена пока единственная динамическая величина  $\xi$ . Мы даже не можем узнать, отвечает ли некоторому EW-у  $\xi'$  одно состояние или целое собственное подпространство. Тем не менее мы можем теперь сказать что-либо о полном пространстве векторов состояния или ортонормированном базисе в нем — поэтому нам и приходится вместо разложения по базису — его еще только предстоит построить — прибегать к разложениям по операторам проектирования в собственные подпространства.

**6.1.2.** Если, в частности,  $|A\rangle$  является собственным вектором (или одним из собственных векторов) оператора  $\xi$ , принадлежащим  $\xi_r$ , то из единственности разложения (24) должно быть

$$P_{\xi_r} |\xi_r\rangle = |\xi_r\rangle \quad \text{для любого } |\xi_r\rangle,$$

т. е. в собственном подпространстве  $\{|\xi_r\rangle\}$  оператор  $P_{\xi_r}$  должен сводиться к единичному. Рассмотрим теперь  $(P_{\xi_r})^2$ . Для него

$$(P_{\xi_r})^2 |A\rangle = P_{\xi_r} \cdot P_{\xi_r} |A\rangle = P_{\xi_r} |\xi_r, A\rangle = |\xi_r, A\rangle = P_{\xi_r} |A\rangle,$$

$\forall |A\rangle$

откуда, в силу произвольности  $|A\rangle$ , следует  $(P_{\xi_r})^2 = P_{\xi_r}$ , т. е.  $P_{\xi_r}$  есть *проектор*.

**6.1.3.** С другой стороны, для любого  $|A\rangle$

$$\sum_r P_{\xi_r} |A\rangle = \sum_r |\xi_r, A\rangle = |A\rangle, \quad \text{т. е.} \quad \sum_r P_{\xi_r} = 1.$$

**6.1.4.** Итак, операторы  $P_{\xi_r}$  обладают свойствами:

$$(P_{\xi_r})^2 = P_{\xi_r}; \quad \sum_r P_{\xi_r} = 1; \quad P_{\xi_r} P_{\xi_{r'}} = P_{\xi_r} \delta_{rr'}. \quad (32)$$

**проектор**

**полнота**

**по свойству (4)**

Записывая еще

$$\xi |A\rangle = \xi \sum_r |\xi_r, A\rangle = \sum_r \xi_r |\xi_r, A\rangle = \sum_r \xi_r P_{\xi_r} |A\rangle,$$

получаем опять представление самого оператора  $\xi$  через, как говорят, принадлежащие ему проекционные операторы<sup>1)</sup>

$$\xi = \sum_r \xi_r P_{\xi_r}. \quad (33)$$

Это — обобщающее формулы (27) — **спектральное представление** относится теперь к произвольной эрмитовой наблюдаемой и отличается от (27) тем, что индекс  $r$  пробегает в нем бесконечное число значений.

<sup>1)</sup> Семейство проекционных операторов со свойствами (32), (33) называют часто **разложением единицы**, принадлежащим наблюдаемой  $\xi$ . Иногда, впрочем, (например, в книге фон Неймана) разложением единицы называют семейство проекционных операторов

$$E_r = \sum_{r' \leq r} P_{\xi_{r'}},$$

что хотя и менее удобно для вычислений, но разрешает более единообразную трактовку дискретного и непрерывного спектра.

**6.1.5.** Функция  $f(\xi)$  наблюдаемой  $\xi$  в смысле определения (30),

$$f(\xi) | A \rangle = \sum_r f(\xi_r) | \xi_r, A \rangle,$$

может быть записана через проекторы также в спектральной форме

$$f(\xi) = \sum_r f(\xi_r) P_{\xi_r}. \quad (33a)$$

**6.2.** Посмотрим, какие изменения надо будет внести в полученные формулы, если спектр оператора  $\xi$  непрерывен. Эти изменения будут, конечно, касаться способа нормировки, поскольку мы знаем, что в непрерывном спектре нормировать собственные векторы условием  $\langle \xi' | \xi' \rangle = 1$  нельзя. Поэтому придется изменить и нормировку проекционных операторов, прибегая к таким операторам, для которых вместо (32.1) имеет место

$$P_{\xi'}^2 = p_{\xi'} P_{\xi'}, \text{ где } p_{\xi'} - \text{некоторое число.}$$

**6.2.1.** Конкретно удобно искать правильную нормировку, рассматривая сперва тот специальный случай, когда все ЕW-ы оператора  $\xi$  невырождены и роль  $P_{\xi'}$  будет играть уже вводившийся нами (см. (21)) оператор проектирования в определенное состояние.

Итак, примем, что в таком случае

$$P_{\xi'} = |\xi'\rangle \langle \xi'|.$$

Векторы непрерывного спектра будем считать нормированными условием

$$\langle \xi' | \xi'' \rangle = \delta(\xi' - \xi'')^1. \quad (23a)$$

Вычислим произведение двух проекторов:

$$P_{\xi'} \cdot P_{\xi''} = |\xi'\rangle \langle \xi' | \xi'' \rangle \langle \xi''| = \delta(\xi' - \xi'') |\xi'\rangle \langle \xi'| = \delta(\xi' - \xi'') P_{\xi'}.$$

**6.2.2.** Таким образом вместо формул (32.1.3) мы получаем

$$P_{\xi'} P_{\xi''} = \delta(\xi' - \xi'') P_{\xi'}. \quad (34.1)$$

---

<sup>1)</sup> Можно было бы использовать (что иногда делают) и более общую «нормировку с весом»

$$\langle \xi' | \xi'' \rangle = \frac{1}{\rho(\xi')} \delta(\xi' - \xi''), \quad (23b)$$

где  $\rho(\xi')$  — некоторая дефинитная весовая функция. Проекционные операторы определяются тогда как

$$P_{\xi'} = |\xi'\rangle \rho(\xi') \langle \xi'|.$$

Это есть условие того, что зависящие от непрерывного параметра операторы  $P_{\xi'}$  образуют систему взаимно ортогональных проекторов. Выбор нормировки с весом (23b) не меняет формулы (34.1). Можно показать, что вид этой формулы не зависит и от сделанного предположения о невырожденности собственных значений оператора  $\xi$ .

В самом деле, чтобы модифицировать рассуждения, которые мы вели для дискретного спектра, надо было бы заметить просто, что для любого (фиксированного) собственного вектора  $|\tilde{\xi}'\rangle$  должно было бы быть

$$|\tilde{\xi}'\rangle = \int d\xi'' P_{\xi''} |\tilde{\xi}'\rangle,$$

т. е. вместо условия

$$P_{\xi_r} |\xi_r\rangle = |\xi_r\rangle \quad \text{появилось бы} \quad P_{\xi''} |\xi'\rangle = \delta(\xi'' - \xi') |\xi'\rangle$$

— все остальные рассуждения прошли бы без всяких изменений.

Наконец, совершенно так же как и для дискретного спектра, показывается, что

$$\text{условие полноты} \quad \int d\xi' P_{\xi'} = 1. \quad (34.2)$$

в непрерывном спектре

**6.2.3.** Спектральное представление оператора  $\xi$  будет отличаться от (33) только заменой суммы интегралом:

$$\xi = \int d\xi' P_{\xi'} \xi'. \quad (35)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если пользоваться в качестве принадлежащего  $\xi$  разложения единицы не семейством  $\{P_{\xi'}\}$ , а семейством  $\{E_{\xi'}\}$ , то при включении непрерывного спектра удастся обойтись без привлечения обобщенных функций (так же, как можно избежать функции  $\delta(x)$ ,

образуя каждый раз  $\vartheta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x - x') dx'$ ). Такая программа проводится фон Нейманом. ■

**6.2.4.** Если, наконец, у оператора  $\xi$  есть и дискретный и непрерывный спектр, то вводятся проекционные операторы обоих родов:

$$P_{\xi_r} P_{\xi_{r'}} = \delta_{rr'} P_{\xi_r}; \quad P_{\xi'} P_{\xi''} = \delta(\xi' - \xi'') P_{\xi'}; \quad P_{\xi_r} P_{\xi'} = 0; \quad (36.1)$$

условие полноты записывается теперь как

$$\begin{aligned} \sum P_{\xi_r} &= D; \quad \int d\xi' P_{\xi'} = C; \\ D^2 &= D, \quad C^2 = C, \quad D + C = 1; \quad DC = 0, \end{aligned} \quad (36.2)$$

а спектральное представление наблюдаемой  $\xi$  принимает вид:

$$\xi = \sum_r \xi_r P_{\xi_r} + \int d\xi' \cdot \xi' \cdot P_{\xi'}. \quad (36.3)$$

**6.3.** Теперь у нас заготовлено достаточно формального материала, чтобы сформулировать еще один, в некотором смысле решающий, постулат, устанавливающий физическую интерпретацию развитой математической теории.

**6.3.1.** Рассмотрим некоторую наблюдаемую  $\xi$  и принадлежащие ей проекционные операторы  $P_{\xi_r}$  (опять принимаем сперва, что есть только дискретный спектр). Пусть, далее, рассматриваемая система находится в некотором фиксированном состоянии  $|x\rangle$ , описывающий которое вектор мы будем считать нормированным:  $\langle x | x \rangle = 1$ .

Построим числа (являющиеся квадратичными формами состояния)

$$W_{\xi_r/x} = \langle x | P_{\xi_r} | x \rangle; \quad r = 1, 2, \dots$$

По свойствам проекционных операторов для этих чисел имеет место

$$(1): W_{\xi_r/x} \geq 0;$$

$$(2): W_{\xi_r/x} \leq 1,$$

а в силу полноты системы  $P_{\xi_r}$ , принадлежащих наблюдаемой  $\xi$ ,

$$(3): \sum_r W_{\xi_r/x} = \sum_r \langle x | P_{\xi_r} | x \rangle = \langle x | \sum_r P_{\xi_r} | x \rangle = \langle x | x \rangle = 1.$$

Но свойства (1)–(3) — это как раз те свойства, которыми должны обладать вероятности альтернативных суждений.

**6.3.2.** Поэтому представляется естественным интерпретировать эти числа таким образом, а именно, ввести *физический постулат*:

Вероятность найти для физической величины  $\xi$  при измерении этой величины у системы, находящейся в состоянии  $|x\rangle$ , точно значение  $\xi_r$  есть

$$W_{\xi_r/x} = \langle x | P_{\xi_r} | x \rangle. \quad (37)$$

**СЛЕДСТВИЕ:** Если до измерения система находилась в собственном состоянии  $|\xi_{r'}\rangle$  наблюдаемой  $\xi$ , то

$$W_{\xi_r/\xi_{r'}} = \langle \xi_{r'} | P_{\xi_r} | \xi_{r'} \rangle = \delta_{rr'},$$

т.е. эта вероятность равна единице или нулю, судя по тому, совпадает ли собственное значение, вероятностью найти которое мы



интересуемся, с тем, к которому относится состояние системы, или нет. ■

Новый постулат (37) есть обобщение физических постулатов (1)–(3) из 4.4. Действительно, только что сформулированное следствие совпадает с постулатом (2) из 4.4, утверждавшим, что «при измерении в собственном состоянии всегда получается соответствующее собственное значение».

**6.3.3.** Если, теперь, система находится в таком состоянии  $|r'\rangle$ ,  $\| |r'\rangle \| = 1$ , что при измерении  $\xi$  мы наверняка получим значение  $\xi_{r'}$ , то это значит, с нашей новой точки зрения, что

$$\langle r' | P_{\xi_r} | r' \rangle = \delta_{rr'} \quad \text{для всех } r.$$

Но тогда оператор  $P_{\xi_r}$ , действуя на  $|r'\rangle$ , должен переводить его в некоторый вектор

$$P_{\xi_r} | r' \rangle = \delta_{rr'} | r' \rangle + |\widetilde{r, r'}\rangle,$$

являющийся суммой  $|r'\rangle$  и вектора  $|\widetilde{r, r'}\rangle$ , ортогонального  $|r'\rangle$ . Записывая

$$\langle r' | P_{\xi_r} | r' \rangle = \langle r' | P_{\xi_r} \cdot P_{\xi_r} | r' \rangle = \| P_{\xi_r} | r' \rangle \|^2,$$

получим, что

$$\delta_{rr'} = \| \delta_{rr'} | r' \rangle + |\widetilde{r, r'}\rangle \|^2 = \delta_{rr'} \| | r' \rangle \|^2 + \| |\widetilde{r, r'}\rangle \|^2,$$

то есть

$$\| |\widetilde{r, r'}\rangle \|^2 = 0; \quad \text{значит,} \quad |\widetilde{r, r'}\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$P_{\xi_r} | r' \rangle = \delta_{rr'} | r' \rangle,$$

т. е.  $|r'\rangle$  является собственным вектором наблюдаемой  $\xi$  с EW-м  $\xi_{r'}$ , а это и есть содержание требования (1) из 4.4.

**6.3.4.** Что же касается постулата (3) из 4.4., то теперь мы уточнили его нашим новым утверждением, что при измерении величины  $\xi$  в произвольном состоянии  $|x\rangle$  ее различные собственные значения  $\xi_r$  встретятся с вероятностями (37).

**6.4. Среднее значение**, которое мы получим для величины  $\xi$ , производя многократные измерения этой величины (в различных, конечно, экземплярах системы), найдется теперь по стандартным правилам теории вероятностей как

$$\bar{\xi}_x = \sum_r \xi_r W_{\xi_r/x} = \sum_r \xi_r \langle x | P_{\xi_r} | x \rangle = \langle x | \sum_r \xi_r P_{\xi_r} | x \rangle.$$

Но стоящая здесь сумма — это не что иное, как спектральное представление (33) самой наблюдаемой  $\xi$ . Следовательно,

$$\text{среднее значение наблюдаемой } \xi \text{ в состоянии } |x\rangle \quad \bar{\xi}_x \equiv \langle \xi \rangle_x = \langle x | \xi | x \rangle. \quad (38)$$

Утверждение (38) можно использовать (что иногда и делают) вместо (37) в качестве основного постулата статистической интерпретации квантовой механики.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** В дальнейшем мы будем всегда называть образования типа  $\langle x | \alpha | x \rangle$ , т. е. диагональные матричные элементы оператора  $\alpha$ , **средними значениями** оператора  $\alpha$  в состоянии  $|x\rangle$ , независимо от того, является ли  $\alpha$  эрмитовым, наблюдаемой и т. д. Говорят также «ожидаемое значение», «Expectation value» с сокращенной записью EV или «Erwartungswert» с сокращенной записью Eg. ■

**6.5.** Включение *непрерывного спектра* не сталкивается здесь ни с какими трудностями. Надо только не забыть, что в случае непрерывного спектра не имеет смысла говорить о вероятности найти при измерении величины  $\xi$  *точное* значение  $\xi'$ , а лишь о вероятности найти значение из *интервала*  $d\xi'$  *вблизи*  $\xi'$ . Такая вероятность задается выражением

$$dW_{\xi'/x} = \langle x | P_{\xi'} | x \rangle d\xi' = \langle x | dP_{\xi'} | x \rangle; \quad dP_{\xi'} = P_{\xi'} \cdot d\xi', \quad (37.c)$$

причем опять будут выполняться свойства (1)–(3):

$$0 \leq dW_{\xi'/x} \leq 1; \quad \int dW_{\xi'/x} = \int \langle x | dP_{\xi'} | x \rangle = 1$$

и, как легко видеть, будет

$$dP_{\xi'} \cdot dP_{\xi''} = 0,$$

если интервалы  $d\xi'$  и  $d\xi''$  не пересекаются. Формула (38) для среднего значения величины  $\xi$  преобразуется тогда в

$$\text{среднее значение в непрерывном спектре} \quad \bar{\xi}_x = \int \xi' dW_{\xi'/x} = \int d\xi' \cdot \xi' \langle x | P_{\xi'} | x \rangle = \langle x | \xi | x \rangle. \quad (38.c)$$

Если, наконец, у наблюдаемой  $\xi$  есть *и дискретный и непрерывный спектр*, то мы получим, в соответствии с формулами (36),

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x &= \sum_r \xi_r W_{\xi_r/x} + \int \xi' dW_{\xi'/x} = \\ &= \sum_r \xi_r \langle x | P_{\xi_r} | x \rangle + \int d\xi' \cdot \xi' \langle x | P_{\xi'} | x \rangle = \langle x | \xi | x \rangle. \quad (38.d + c) \end{aligned}$$

Мы выписали все формулы для того случая, когда само состояние  $|x\rangle$  относится к дискретному спектру  $\langle x|x\rangle = 1$ . Если само  $|x\rangle$  принадлежит непрерывному спектру и нормировано условием  $\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x)$ , то и матричный элемент  $\langle x'|P_{\xi'}|x\rangle$  будет пропорционален  $\delta(x' - x)$ , а вероятность будет получаться из коэффициента при ней.

## 7. Коммутирующие наблюдаемые

**7.1.1.** Может случиться, что какое-нибудь состояние  $|A\rangle$  окажется одновременно собственным состоянием двух разных наблюдаемых  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\xi|A\rangle = \xi'|A\rangle; \quad \eta|A\rangle = \eta'|A\rangle.$$

Тогда в таком состоянии сумма и произведение этих наблюдаемых также будут иметь определенные значения  $\xi' + \eta'$  и  $\xi'\eta'$ . Для суммы это очевидно, а для произведения получаем последовательно:

$$\xi\eta|A\rangle = \xi\eta'|A\rangle = \xi'\eta'|A\rangle = \eta'\xi'|A\rangle = \eta\xi'|A\rangle = \eta\xi|A\rangle.$$

Следовательно, в таком состоянии будет также

$$(\xi\eta - \eta\xi)|A\rangle = 0; \quad \text{для фиксированного } |A\rangle!$$

**7.1.** Отсюда ясно, что

*если* два оператора  $\xi$  и  $\eta$  обладают столькими совместными собственными состояниями, что из них можно выбрать полную систему,  
*то*  $\xi$  и  $\eta$  коммутируют

$$\xi\eta - \eta\xi = 0. \quad (39)$$

Обратная теорема гласит:

*если* две наблюдаемые  $\xi$  и  $\eta$  коммутируют,  
*то* можно построить полную систему, *все* векторы которой будут общими собственными векторами  $\xi$  и  $\eta$ .

**7.2.1.** Для доказательства обратной теоремы, которое будет содержать не безразличный для нас способ построения такой полной системы, докажем сперва

**ЛЕММУ 3:** Если для  $\xi$  и  $\eta$  выполнено (39), то все принадлежащие  $\xi$  проекционные операторы  $P_{\xi'}$  коммутируют с  $\eta$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Имеем последовательно:

$$\xi\eta - \eta\xi = 0;$$

$$P_{\xi_{r'}} \cdot \left\{ \sum_r \xi_r (P_{\xi_r} \eta - \eta P_{\xi_r}) = 0 \right\} \cdot P_{\xi_{r''}};$$

$$\xi_{r'} P_{\xi_{r'}} \eta P_{\xi_{r''}} - \xi_{r''} P_{\xi_{r'}} \eta P_{\xi_{r''}} = 0;$$

$$(\xi_{r'} - \xi_{r''}) P_{\xi_{r'}} \eta P_{\xi_{r''}} = 0.$$

Следовательно, оператор  $P_{\xi_{r'}} \eta P_{\xi_{r''}}$  должен быть пропорционален  $\delta_{r' r''}$ :  $P_{\xi_{r'}} \eta P_{\xi_{r''}} = (\eta)_{r'} \delta_{r' r''}$ , где  $(\eta)_{r'}$  — некоторый новый оператор.

Поэтому, умножая вторую строчку проведенной выкладки только на  $P_{\xi_{r'}}$ , слева и используя обозначение  $(\eta)_{r'}$ , получим

$$\xi_{r'} - (P_{\xi_{r'}} \eta - (\eta)_{r'}) = 0; \quad P_{\xi_{r'}} \eta - (\eta)_{r'} = 0.$$

Умножая здесь на  $\delta_{r'' r'}$  и суммируя по  $r''$ :

$$\sum_{r''} (\delta_{r'' r'} P_{\xi_{r'}} \eta - \delta_{r'' r'} (\eta)_{r'}) = \sum_{r''} (P_{r''} P_{r'} \eta - P_{r''} \eta P_{r'}) = 0,$$

и, поскольку  $\sum_{r''} P_{r''} = 1$ ,

$$P_{\xi_{r'}} \eta - \eta P_{\xi_{r'}} = 0. \quad \blacksquare \quad (39a)$$

**7.2.2.** Применяя теперь эту лемму к коммутирующим операторам  $P_{\xi_r}$  и  $\eta$ , получим, что

$$P_{\xi_r} P_{\eta_s} - P_{\eta_s} P_{\xi_r} = 0, \quad (39b)$$

т.е. все проекторы, принадлежащие коммутирующим операторам, коммутируют друг с другом.

**7.2.3.** Поэтому можно ввести совместные проекторы

$$P_{\xi_r \eta_s} = P_{\xi_r} P_{\eta_s} = P_{\eta_s} P_{\xi_r} \quad (40.1)$$

со свойствами:

$$\begin{aligned} P_{\xi_r \eta_s} P_{\xi_{r'} \eta_{s'}} &= \delta_{rr'} \delta_{ss'} P_{\xi_r \eta_s}; \quad \sum_s P_{\xi_r \eta_s} = P_{\xi_r}; \\ \sum_r P_{\xi_r \eta_s} &= P_{\eta_s}; \quad \sum_{s,r} P_{\xi_r \eta_s} = 1. \end{aligned} \quad (40.2-5)$$

Действием этих проекторов все пространство векторов  $|A\rangle$  разбивается в двойную сумму ортогональных подпространств,

$$\{|A\rangle\} = \sum_{r,s} P_{\xi_r \eta_s} \{|A\rangle\},$$

и притом так, что всякий вектор из подпространства с номерами  $(r, s)$ :  $P_{\xi_r \eta_s} |A\rangle$  ( $|A\rangle$  — произвольный вектор) является собственным вектором обеих наблюдаемых  $\xi$  и  $\eta$  с собственными значениями  $\xi_r$  и  $\eta_s$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi(P_{\xi_r \eta_s} |A\rangle) &= \xi_r(P_{\xi_r \eta_s} |A\rangle); \\ \eta(P_{\xi_r \eta_s} |A\rangle) &= \eta_s(P_{\xi_r \eta_s} |A\rangle) \end{aligned} \right\} \text{ для любого } |A\rangle.$$

**7.2.4.** Для самих же операторов  $\xi$  и  $\eta$  можно теперь написать двойное спектральное представление

$$\xi = \sum_{r,s} \xi_r P_{\xi_r \eta_s}; \quad \eta = \sum_{r,s} \eta_s P_{\xi_r \eta_s}. \quad (41)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Мы провели все рассуждения для дискретного спектра. Для непрерывного спектра все проводится совершенно аналогично, единственным отличием будет замена сумм интегралами и кронекеровых  $\delta$ -символов дираковыми  $\delta$ -функциями. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Некоторые из входящих в двойную сумму подпространств могут оказаться *пустыми*, т.е. соответствующие проекторы  $P_{\xi_r \eta_s}$  — тождественно равными нулю: из того, что для  $\xi$  существует собственный вектор, принадлежащий  $\xi_r$ , а для  $\eta$  — принадлежащий  $\eta_s$ , *не следует*, что существует вектор, являющийся собственным для обоих операторов  $\xi$  и  $\eta$  с собственными значениями  $\xi_r$  и  $\eta_s$ . Можно утверждать лишь, что из всех подпространств с фиксированным  $\xi_r$  и произвольным  $\eta_s$  *хотя бы одно* будет не пусто; то же самое для фиксированного  $\eta_s$  и меняющегося  $\xi_r$  — иначе не могли бы выполняться формулы (40.3,4). ■

**7.3.1.** В соответствии с последним замечанием добавление к наблюдаемой  $\xi$  коммутирующей с ней наблюдаемой  $\eta$  может оказаться тривиального характера — когда осуществляется указанный предельный случай и при соответствующей нумерации не пусты лишь подпространства с совпадающими номерами  $r$  и  $s$ , т.е. когда  $P_{\xi_r \eta_s} = \delta_{rs} P_{\xi_r} = \delta_{rs} P_{\eta_s}$ . Ясно, что тогда наблюдаемая  $\eta$  оказывается функцией наблюдаемой  $\xi$  (и наблюдаемая  $\xi$  — функцией наблюдаемой  $\eta$ ) в смысле определения (30) (или (33a)) — такая возможность не будет нас сейчас интересовать<sup>1)</sup>. Во всех других случаях хотя бы некоторые совместные EW-ы  $\xi_r, \eta_s$  будут иметь меньшую кратность, чем  $\xi_r$  или  $\eta_s$ .

<sup>1)</sup> Противоположный предельный случай состоит в том, что *все* подпространства вида  $P_{\xi_r \eta_s} |A\rangle$  не пусты — т.е. любое собственное значение  $\xi_r$  можно комбинировать с любым собственным значением  $\eta_s$ .

Продолжая этот процесс, можно искать дальнейшие операторы, коммутирующие со всеми предыдущими, пока мы не дойдем до некоторого набора (мы будем теперь обозначать *нижним* индексом номер наблюдаемой, номера же собственных значений — *верхними* индексами) наблюдаемых:

$$\{\xi_1, \dots, \xi_n\}; \quad \xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (42.1)$$

такого, что каждому набору собственных значений  $\{\xi_1^{r_1}, \xi_2^{r_2}, \dots, \xi_n^{r_n}\}$  принадлежит (если вообще принадлежит) *единственный* (конечно — с точностью до множителя) *собственный вектор*  $|\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}\rangle$ .

Соответствующие проекционные операторы

$$\begin{aligned} P_{\xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \dots \xi_n^{r_n}} &= P_{\xi_1^{r_1}} P_{\xi_2^{r_2}} \dots P_{\xi_n^{r_n}}; \quad \sum P_{\xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n}} = 1; \\ P_{\xi_1^{\prime} \xi_2^{\prime} \dots \xi_n^{\prime}} \cdot P_{\xi_1^{\prime\prime} \xi_2^{\prime\prime} \dots \xi_n^{\prime\prime}} &= \delta_{\xi_1^{\prime} \xi_1^{\prime\prime}} \delta_{\xi_2^{\prime} \xi_2^{\prime\prime}} \dots \delta_{\xi_n^{\prime} \xi_n^{\prime\prime}} P_{\xi_1^{\prime} \dots \xi_n^{\prime}} \end{aligned} \quad (42.2)$$

будут тогда разбивать все пространство в сумму взаимно-ортogonalных одномерных подпространств.

**7.3.2.** Установим критерий одномерности подпространств, отвечающих проекционным операторам (42.2). Применяя такой (фиксированный) оператор к произвольному вектору  $|A\rangle$ , мы сможем найти (если соответствующее подпространство не пусто) такой  $|A\rangle$ , что  $\|P_{\xi_1^{\prime} \dots \xi_n^{\prime}} |A\rangle\| = 1$  (считаем сперва спектр дискретным). Тогда  $|\xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}\rangle = P_{\xi_1^{\prime} \dots \xi_n^{\prime}} |A\rangle$  будет нормированным собственным вектором всех операторов  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , отвечающим собственным значениям  $\xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}$ , определенным по допущенному с точностью до унимодулярного множителя, и оператор проектирования в соответствующее подпространство будет выражаться через него с помощью формулы (21), т. е. в виде

$$P_{\xi_1^{\prime} \dots \xi_n^{\prime}} = |\xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}\rangle \langle \xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}| \quad (\| |\xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}\rangle \| = 1).$$

Это и есть критерий одномерности. Для случая, когда некоторые из наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_n$  имеют непрерывный спектр, результат сохранится тем же, надо будет только нормировать  $|\xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}\rangle$  по соответствующим переменным не на единицу, а на  $\delta$ -функцию.

**7.3.3.** Совокупность векторов  $|\xi_1^{\prime}, \dots, \xi_n^{\prime}\rangle$  образует тогда ортонормированный базис во всем пространстве. Через проекционные

операторы его можно определить условиями:

$$\left. \begin{aligned} P_{\xi_1'' \dots \xi_n''} |\xi_1', \dots, \xi_n'\rangle &= \delta_{\xi_1'' \xi_1'} \dots \delta(\xi_n'' - \xi_n') |\xi_1', \dots, \xi_n'\rangle; \\ \langle \xi_1'', \dots, \xi_n'' | \xi_1', \dots, \xi_n'\rangle &= \delta_{\xi_1'' \xi_1'} \dots \delta(\xi_n'' - \xi_n'); \\ P_{\xi_1' \dots \xi_n'} &= |\xi_1', \dots, \xi_n'\rangle \langle \xi_1', \dots, \xi_n'|; \\ \sum_{\xi_1', \dots} \int \dots d\xi_n' P_{\xi_1' \dots \xi_n'} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (42.3)$$

предпоследнее из которых выражает требование одномерности всех совокупно-собственных подпространств.

**7.4.** О системе наблюдаемых, удовлетворяющих всем требованиям (42), говорят как о **полном наборе** или о **полной системе** коммутирующих наблюдаемых <sup>1)</sup>.

**7.4.1.** Каждая из наблюдаемых полного набора представима, конечно, в аналогичной (41) форме спектрального разложения по совокупным проекционным операторам

$$\xi_m = \sum_{\xi_1', \dots} \int \dots d\xi_n' \cdot \xi_m' \cdot P_{\xi_1' \dots \xi_n'}. \quad (41a)$$

Можно ввести, в полной аналогии с (30) или (33a), **функции от совокупности наблюдаемых полного набора**, определяя их равенством

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\xi_1', \dots} \int \dots d\xi_n' \cdot f(\xi_1', \dots, \xi_n') P_{\xi_1' \dots \xi_n'} \quad \text{только одно-значные } f! \quad (43)$$

**7.4.2.** Для систем с конечным числом степеней свободы должно быть возможным выбрать полный набор так, чтобы число наблюдаемых в нем было конечным. В самом деле, при классическом описании состояние такой системы фиксируется заданием всех ее координат и импульсов — т. е. конечного числа  $2n$  чисел. Задать квантовое состояние — значит сказать о системе все, что мы можем о ней знать; но в квантовом описании можно знать только *меньше*, чем в классическом. Стало быть, должно быть возможным фиксировать квантовое состояние заданием *меньшего* чем  $2n$  числа чисел — т. е. выбрать число переменных полного набора меньшим  $2n$ .

<sup>1)</sup> Слово «полный» употреблено здесь не в том смысле, что хватит векторов, чтобы растянуть все пространство, а в том, что хватит проекторов, чтобы расщепить каждое собственное пространство на одномерные!

Такой выбор должен быть возможен, но он не обязателен: даже для системы с одной степенью свободы можно вместо характеризующей ее некоторой наблюдаемой  $\xi$  — которая сама по себе образует полный набор — выбрать принадлежащие ей проекторы  $P_{\xi'}$ . Они также образуют полный набор, но число их — если  $\xi$  имеет бесконечно много EW-ов — будет бесконечным<sup>1)</sup>!

**7.4.3.** Мы использовали для определения понятия полного набора и операторы, и векторы. В действительности можно определить полный набор, не выходя за пределы алгебры операторов.

**7.4.3.1.** Для этой цели докажем сперва важную

**ТЕОРЕМУ:** Если линейный оператор  $\omega$  коммутирует со всеми наблюдаемыми полного набора,  
то  $\omega$  является функцией этих наблюдаемых.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Оператор  $\omega$  можно записать как

$$\omega = 1 \cdot \omega \cdot 1 = \int d\xi' d\xi'' P_{\xi'} \omega P_{\xi''} \quad (*)$$

(мы пишем для краткости одну букву  $\xi$  вместо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и, аналогично,  $\xi'$  вместо  $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ ), т. е. в виде двойного интеграла (суммы) по операторам  $P_{\xi'} \omega P_{\xi''}$ , каждый из которых переводит векторы из собственного подпространства  $\xi''$  в векторы из собственного подпространства  $\xi'$ .

Используем коммутативность  $\omega$  с наблюдаемыми полного набора,  $[\omega, \xi] = 0$ ; согласно доказательству леммы 3, из этого свойства следует, что

$$P_{\xi'} \omega P_{\xi''} = (\omega)_{\xi'} \delta(\xi' - \xi''),$$

где  $(\omega)_{\xi'}$  — некие новые операторы. Существенный момент состоит в том, что операторы  $P_{\xi'} \omega P_{\xi''}$  оказываются пропорциональными  $\delta$ -функции (или — для дискретного спектра — кронекерову  $\delta$ -символу), т. е. операторами, действующими *внутри* каждого из собственных подпространств  $\xi'$ . Поэтому двойной интеграл в (\*) превращается в однократный:

$$\omega = \int d\xi' (\omega)_{\xi'}.$$

Если теперь  $\xi$  образуют полный набор, то в силу (42.3.3)

$$P_{\xi'} \omega P_{\xi''} = |\xi'\rangle \langle \xi' | \omega | \xi'' \rangle \langle \xi'' | = \langle \xi' | \omega | \xi'' \rangle \cdot |\xi'\rangle \langle \xi''|,$$

где мы вынесли численный множитель перед операторной частью. Так как из-за коммутативности  $\omega$  и  $\xi$  все это выражение должно быть про-

<sup>1)</sup> В нашем примере из 5-го параграфа наблюдаемая  $\xi$  сама по себе могла образовывать полный набор, а наблюдаемая  $\pi_1$  — нет. Полный набор могла образовывать только совокупность  $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$  (точнее — совокупность  $\{\pi_1, \pi_2\}$ , поскольку  $\pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2$ ).



порциональным  $\delta$ -функции, а операторная часть не имеет отношения к  $\omega$ , то содержать  $\delta$ -функцию должен именно численный множитель:

$$\langle \xi' | \omega | \xi'' \rangle = \omega_{\xi' \xi'} \cdot \delta(\xi' - \xi''),$$

где  $\omega_{\xi' \xi''}$  — не оператор, а число! (Иными словами,  $(\omega)_{\xi'} = \omega_{\xi' \xi'} \cdot P_{\xi'}$ , и это есть характерное свойство полного набора: в подпространстве, выделяемом  $P_{\xi'}$ , — а  $P_{\xi'} \omega P_{\xi'}$  есть проекция оператора  $\omega$  в это подпространство — не может существовать операторов, отличных от числа, — оно одномерно!) Следовательно,

$$P_{\xi'} \omega P_{\xi''} = \omega_{\xi' \xi'} \cdot \delta(\xi' - \xi'') | \xi' \rangle \langle \xi'' | = \omega_{\xi' \xi'} \cdot P_{\xi'} \cdot \delta(\xi' - \xi''),$$

и, значит, (\*) превращается в

$$\omega = \int d\xi' \omega_{\xi' \xi'} P_{\xi'},$$

т. е. приобретает форму (43) функции наблюдаемых  $\xi$ . ■

#### 7.4.3.2. Справедливо и обратное утверждение:

*Если* система взаимно коммутирующих наблюдаемых  $\xi_1, \dots, \xi_n$  такова, что любой новый оператор, коммутирующий со всеми наблюдаемыми  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , есть их функция,  
*то* наблюдаемые  $\xi_1, \dots, \xi_n$  образуют полный набор.

В самом деле, условием полноты набора является требование (42.3.3). Предположим, что хотя бы для одной совокупности  $\xi'_1, \dots, \xi'_n$  оно не выполнено, скажем

$$P_{\xi'_1 \dots \xi'_n} = |\xi'_1, \dots, \xi'_n, 1\rangle \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n, 1| + |\xi'_1, \dots, \xi'_n, 2\rangle \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n, 2|.$$

Но тогда линейный оператор

$$P_{\xi'_1 \dots \xi'_n, 1} = |\xi'_1, \dots, \xi'_n, 1\rangle \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n, 1|,$$

очевидным образом коммутирующий со всеми  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , не сможет быть представлен в виде (43). ■

#### 7.4.3.3. Итак, мы можем дать новое определение:

Набор взаимно коммутирующих наблюдаемых называется *полным*, если любой новый оператор, коммутирующий со всеми наблюдаемыми набора, есть их функция.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** В этой формулировке становится особенно ясным, что полнота набора коммутирующих наблюдаемых есть вопрос в значительной степени физический: в определении фигурирует слово «любой», но, конечно, «любой из числа вообще рассматриваемых операторов», а объем совокупности рассматриваемых операторов определяется физической постановкой задачи. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Теперь мы можем, наконец, описать способ построения пространства, векторы которого призваны отображать состояния квантовой механики. Мы находим полный набор коммутирующих наблюдаемых и строим их совместные проекторы  $P_{\xi'_1 \dots \xi'_n}$ . Собственные векторы этих проекторов с EW-ми  $+1$ , т.е. ненулевые векторы, удовлетворяющие (42.3), суть тогда векторы базиса, а порожаемое этим базисом линейное пространство и есть нужное нам пространство кет-векторов (бра-векторов).

При этом физически задать входящее в базис состояние — это значит указать полный набор проекционных операторов, совместным собственным вектором которых с EW-м  $+1$  оно является, т.е. указать численные значения динамических переменных полного набора, которые наверняка будут получены при измерении в этом состоянии. ■

**7.5.** Можно получить ряд теорем, трактующих свойства функций коммутирующих наблюдаемых.

**7.5.1.** Приведем одну из них:

*Если  $\xi$  и  $\eta$  — две коммутирующие наблюдаемые,  
то всякая функция  $f(\xi)$  коммутирует со всякой функцией  $g(\eta)$ .*

Доказательство непосредственно следует из леммы 3 и представления функций от наблюдаемых в форме (33а).

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Обобщение этого утверждения приводит нас к тому, что множество функций  $n$  коммутирующих наблюдаемых образует коммутативную алгебру с единицей. ■

**СЛЕДСТВИЕ 1:** Всякая функция наблюдаемой коммутирует с самой наблюдаемой. ■

**СЛЕДСТВИЕ 2:** Всякие две функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  одной и той же наблюдаемой перестановочны. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы видели на примере, что с *неоднозначными* функциями дело обстояло совсем не так! ■

**7.5.2.** Формально справедливо и утверждение, обратное следствию 2, которое, записанное в несколько более общей форме, гласит:

*Если задан некоторый набор  $\xi_1, \dots, \xi_n$  коммутирующих наблюдаемых,*

*то существует такая наблюдаемая  $\zeta$ , что все  $\xi_1, \dots, \xi_n$  будут функциями  $f_1, \dots, f_n$  наблюдаемой  $\zeta$ .*

**Доказательство** для случая чисто дискретного спектра совсем просто. В самом деле, коммутирующие наблюдаемые  $\xi_1, \dots, \xi_n$  обладают совместными проекционными операторами

$$P_{\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}},$$

которые нумеруются набором номеров  $\{r_1, \dots, r_n\}$ , нумерующих собственные значения каждого оператора  $\xi_i$ . Мы можем сделать *произвольную перенумерацию* этих наборов, нумеруя каждый набор  $\{r_1, \dots, r_n\}$  одним натуральным числом  $R$ ,  $R = 1, 2, \dots$ , так, чтобы каж-

дому значению  $R$  отвечал только один набор,  $\{r_i\} = \{\phi_i(R)\}$ . Введем теперь наблюдаемую  $\zeta$ , скажем определив

$$\zeta = \sum_R \frac{1}{R} P_{\xi_1^{\phi_1(R)}, \dots, \xi_n^{\phi_n(R)}}.$$

Тогда наши совместные проекционные операторы наблюдаемых  $\xi_i$  будут операторами проектирования в собственные подпространства наблюдаемой  $\zeta$ , принадлежащие ее EW-ам  $\zeta^R = \frac{1}{R}$

$$P_{\xi_1^{\phi_1(R)}, \dots, \xi_n^{\phi_n(R)}} = P_{\zeta^R},$$

а сами наблюдаемые  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) представятся в форме

$$\xi_i = \sum_{r_1 \dots r_n} \xi_i^{r_1} P_{\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}} = \sum_R \xi_i^{\phi_i(1/\zeta^R)} P_{\zeta^R},$$

совпадающей с формой (33а). ■

**7.5.3. ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Почему мы предположили доказанному утверждению эпитет «формально»? Дело в том, что как наблюдаемая  $\zeta$ , так и функциональные зависимости, выражающие через нее наблюдаемые  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , не будут в большинстве случаев иметь никакого физического смысла. Ведь коммутирующие наблюдаемые могут описывать физические величины, не имеющие совсем *никакого отношения друг к другу* — например, координаты, отвечающие разным степеням свободы, или, даже, какие-либо динамические величины, относящиеся к разным системам, вовсе не взаимодействующим друг с другом. Ясно, что в таких случаях навязывание каких бы то ни было функциональных зависимостей не может отвечать никаким физическим связям — такие просто отсутствуют.

Особенно ярко это обстоятельство проявляется в случае непрерывного спектра (теорема, с соответствующими оговорками, остается справедливой и в этом случае), когда, например, для применения обсуждаемого утверждения к двум декартовым координатам материальной точки приходится, для проведения перенумерации, привлекать такие построения, как известная кривая Пэано — образование, совершенно чуждое математическим средствам, действительно потребным для описания природы. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Вернемся к вопросу о *числе* наблюдаемых в полном наборе для некоторой определенной системы. Проведенное обсуждение показывает, что формально математически такой вопрос бессмыслен — согласно доказанной теореме *всегда* можно редуцировать число наблюдаемых в наборе *до одной*. Если, однако, ограничиваться лишь наблюдаемыми, обладающими очевидным физическим смыслом, то тогда их число обычно равняется числу степеней свободы материальной системы. ■

**7.6.** Скажем еще несколько слов о *физической интерпретации* наборов коммутирующих наблюдаемых. Поскольку наблюдаемые набора обладают общими собственными векторами, то согласно посту-

лату (2) из 4.4 они *одновременно измеримы*, — т. е. система может находиться в таком состоянии, когда все наблюдаемые рассматриваемого набора имеют одновременно определенные значения.

ЗАМЕЧАНИЕ: «Одновременно измеримы» значит, по нашему соглашению, что мы можем одновременно предсказать точные значения всех этих наблюдаемых, *если каждая из них будет измеряться первой*, — т. е. вообще говоря нам нужно по меньшей мере  $n$  экземпляров системы. Однако относительно коммутирующих наблюдаемых можно утверждать и больше: что, хотя бы в принципе, всегда можно придумать такую постановку опыта, что все они будут измерены реально одновременно — в одном эксперименте. ■

Что же касается вероятности найти какой-то набор значений  $\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}$  таких наблюдаемых при измерении, совершаемом над системой, находящейся в *произвольном* состоянии  $|x\rangle$ , то обобщая постулат (37) из 6.3.2, мы примем, что

Вероятность найти для набора физических величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , которым отвечают коммутирующие наблюдаемые, при измерении (одновременном) этих величин у системы, находящейся в состоянии  $|x\rangle$ , точно значения  $\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}$ , соответственно, есть

$$W_{\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}} / x = \langle x | P_{\xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}} | x \rangle. \quad (44)$$

Обобщение на непрерывный спектр очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Последние абзацы показывают, что с физической точки зрения тоже может представиться естественным рассматривать набор коммутирующих наблюдаемых как одну «сложную» наблюдаемую, «значения» которой суть не одно число, а (упорядоченный) набор нескольких чисел. Таким образом в каком-то смысле можно сказать, что математический и физический подход к интерпретации набора коммутирующих наблюдаемых различает только отношение к *нумерации* собственных векторов — математик может предпочесть «более простую» одномерную нумерацию, в то время как физик не может отказаться от может быть более громоздкой, но зато связанной с природой изучаемой системы. ■

## 8. Представления

Итак, всякий полный набор коммутирующих наблюдаемых определяет полную ортонормированную систему состояний (42.3) в пространстве векторов состояния  $|A\rangle$ . В квантовой механике о выборе определенного базиса говорят обычно, как о выборе **представления**<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Не следует отождествлять это использование термина «представление» с идентичным словоупотреблением в математической теории представлений групп, хотя эти два словоупотребления и имеют точки соприкосновения.

**8.1.** Для произвольного вектора  $|A\rangle$  можно написать:

$$|A\rangle = \sum_{\xi'_1 \dots} \int \dots d\xi'_n P_{\xi'_1, \dots, \xi'_n} |A\rangle = \sum_{\xi'_1 \dots} \int \dots d\xi'_n |\xi'_1, \dots, \xi'_n\rangle \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n | A\rangle. \quad (*)$$

Возникшее здесь выражение  $\sum \int d\xi'_1 \dots d\xi'_n |\xi'_1, \dots, \xi'_n\rangle \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n|$  — т. е. фактически разложение единицы, принадлежащее полному набору  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , — в котором имеется в виду суммирование по всем дискретным и интегрирование по всем непрерывным индексам, называют обычно **суммой по полной системе**, а о переходе от левой части выкладки (\*) к правой говорят иногда: «вставим сумму по полной системе».

**8.1.1.** Совокупность фигурирующих в (\*) чисел

$$|A\rangle \sim \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n | A\rangle \quad (45.1)$$

полностью определяет (при фиксированном базисе) вектор  $|A\rangle$ . Она называется **представителем**<sup>1)</sup> вектора  $|A\rangle$  в рассматриваемом представлении.

**8.1.2.** Представителем *со-вектора*  $\langle A|$  будет совокупность его скалярных произведений с базисными *векторами*:

$$\langle A| \sim \langle A | \xi'_1, \dots, \xi'_n \rangle. \quad (45.2)$$

Поскольку, в силу (12.1),

$$\langle A | \xi'_1, \dots, \xi'_n \rangle = (\langle \xi'_1, \dots, \xi'_n | A \rangle)^*,$$

то представители вектора и сопряженного ему со-вектора в одном представлении комплексно сопряжены друг другу.

**8.1.3.** Рассмотрим теперь некоторый линейный оператор  $\alpha$ , который характеризуется уравнением

$$\alpha |A\rangle = |B\rangle.$$

Умножая это уравнение слева на произвольный базисный со-вектор и вставляя сумму по полной системе между  $\alpha$  и  $|A\rangle$ , получим

$$\sum \int d\xi'' \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n | \alpha | \xi''_1, \dots, \xi''_n \rangle \langle \xi''_1, \dots, \xi''_n | A \rangle = \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n | B \rangle.$$

Отсюда видно, что представителем *линейного оператора* является **матрица**<sup>2)</sup>

$$\alpha \sim \langle \xi'_1, \dots, \xi'_n | \alpha | \xi''_1, \dots, \xi''_n \rangle, \quad (45.3)$$

<sup>1)</sup> Математик сказал бы — координатами.

<sup>2)</sup> Этот термин используют в квантовой механике, невзирая на то, нумеруются ли здесь строки и столбцы дискретными или непрерывными индексами.

у которой левый индекс (или индексы) нумерует строки, а правый — столбцы, причем действие операторов на векторы или со-векторы происходит по правилу матричного умножения, в котором принимается, что представитель вектора (45.1) есть матрица с всего лишь одним ненулевым столбцом, а представитель со-вектора (45.2) — матрица с одной ненулевой строкой<sup>1)</sup>. Эта терминология поясняет, почему мы назвали в § 3 образования типа  $\langle A | \alpha | B \rangle$  **матричными элементами** (иногда добавляют — перехода) оператора  $\alpha$  между состояниями  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$ .

Такое же рассуждение с вставлением полной системы показывало, что представитель **произведения** двух **операторов** есть матрица, получаемая из матриц, представляющих сомножители, по правилу матричного перемножения.

**8.1.4.** Легко сообразить, что:

- (1) Представителем *эрмитова* оператора будет *эрмитова* матрица.
- (2) Представителем любого из операторов полного набора, определяющего базис, будет *диагональная* матрица:

$$\xi_i \sim \delta_{\xi_1' \xi_1}^{r_1'} \dots \delta_{\xi_n' \xi_n}^{r_n'} \cdot \xi_i^{r_i'} \quad 2).$$

Поэтому о выборе представления, базисные векторы которого суть собственные векторы некоторой наблюдаемой  $\xi$ , часто говорят, как о выборе представления, в котором наблюдаемая  $\xi$  **диагональна**.

- (3) Представителем единичного оператора является единичная матрица

$$1 \sim \delta_{\xi_1' \xi_1} \dots \delta(\xi_n' - \xi_n'').$$

- (4) Представителем проекционного оператора  $P_{\xi_1''' \dots \xi_n'''}$  будет матрица, имеющая единственный (диагональный) не равный нулю элемент:

$$\langle \xi_1' \dots \xi_n' | P_{\xi_1''' \dots \xi_n'''} | \xi_1'' \dots \xi_n'' \rangle = \delta_{\xi_1' \xi_1'''} \delta_{\xi_1''' \xi_1''} \dots \delta(\xi_n' - \xi_n''') \delta(\xi_n''' - \xi_n'').$$

- (5) Представителем линейного оператора, коммутирующего со всеми наблюдаемыми полного набора (и являющегося, следовательно, их функцией), будет диагональная матрица.

**8.2.** Выбор представления может быть, конечно, совершен бесконечно разнообразными способами. Как совершается переход от одного представления к другому?

Пусть, кроме полного набора  $\{\xi\}$ , у нас есть другой полный набор коммутирующих наблюдаемых  $\{\eta_1, \dots, \eta_\omega\}$ , которому будут соответ-

<sup>1)</sup> Легко заметить, что при таком, матричном, понимании представителей векторов и со-векторов, представителями сопряженных вектора и со-вектора будут матрицы, *эрмитово сопряженные* друг другу.

<sup>2)</sup> Если спектр непрерывен, то матрица называется диагональной, если она имеет вид

$$\langle \xi' | \alpha | \xi'' \rangle = f(\xi') \delta(\xi' - \xi'')$$

— т. е. пропорциональна  $\delta$ -функции (а не ее производным!)

ствовать базисные со-векторы  $\langle \eta'_1, \dots, \eta'_\omega |$ . Напишем тогда («вставляя полную систему»):

$$\langle \eta'_1 \dots \eta'_\omega | = \langle \eta'_1 \dots \eta'_\omega | \cdot 1 = \sum \int d\xi' \langle \eta'_1 \dots \eta'_\omega | \xi'_1 \dots \xi'_n \rangle \langle \xi'_1 \dots \xi'_n |.$$

Эта формула дает нам разложение новых базисных со-векторов по старым<sup>1)</sup>. Если писать в дальнейшем для краткости просто  $\xi$  и  $\eta$  вместо  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  и  $\{\eta_1, \dots, \eta_\omega\}$ , то правило преобразования базисных со-векторов запишется в виде

$$\langle \eta' | = \sum_{\xi'} \langle \eta' | \xi' \rangle \cdot \langle \xi' |. \quad (46.1)$$

Аналогично, для базисных векторов:

$$| \eta' \rangle = \sum_{\xi'} | \xi' \rangle \cdot \langle \xi' | \eta' \rangle, \quad (46.2)$$

причем, конечно,

$$\langle \xi' | \eta' \rangle = (\langle \eta' | \xi' \rangle)^*. \quad (46.3)$$

Тогда

$$\langle \eta' | P \rangle = \sum_{\xi'} \langle \eta' | \xi' \rangle \cdot \langle \xi' | P \rangle; \quad \langle P | \eta' \rangle = \sum_{\xi'} \langle P | \xi' \rangle \cdot \langle \xi' | \eta' \rangle \quad (47)$$

— т. е. представитель вектора преобразуется как базисные со-векторы, а представитель со-вектора — как базисные векторы. Наконец, для линейного оператора

$$\langle \eta' | \alpha | \eta'' \rangle = \sum_{\xi' \xi''} \langle \eta' | \xi' \rangle \cdot \langle \xi' | \alpha | \xi'' \rangle \cdot \langle \xi'' | \eta'' \rangle. \quad (48)$$

Если, в частности,  $\alpha = 1$ , то получаем из (48)

$$\sum_{\xi'} \langle \eta' | \xi' \rangle \langle \xi' | \eta'' \rangle = \sum_{\xi'} \langle \eta' | \xi' \rangle (\langle \eta'' | \xi' \rangle)^* = \delta_{\eta' \eta''} \quad (49)$$

— т. е. переход от представителей в одном ортонормированном базисе к представителям в другом совершается с помощью *унитарной* матрицы.

---

<sup>1)</sup> Подчеркнем, что числа наблюдаемых в двух наборах  $n$  и  $\omega$ , могут быть и *различными*. Можно было бы успокоить себя тем, что неизменным остается полное число базисных векторов  $\sum_{\xi'_1 \dots \xi'_n} = \sum_{\eta'_1 \dots \eta'_\omega}$ . В случае конечномерных про-

странств это действительно так. В бесконечномерном пространстве мы можем даже, однако, перейти от полного набора наблюдаемых с дискретным спектром к полному набору с непрерывным.

## 9. Квантование

Как мы видели, одной из основных особенностей квантовомеханического описания, отличающей его от классического, особенностью, обеспечивающей возможность осуществления принципа неопределенности Гайзенберга, является то, что динамическим переменным  $\xi, \eta, \dots$  физической системы сопоставляются величины («наблюдаемые»), которые, вообще говоря, не коммутируют:

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi \neq 0.$$

Однако это следующее из принципа неопределенности утверждение  $[\xi, \eta] \neq 0$  имеет чисто негативный характер. Чтобы развивать теорию дальше, потребно позитивное утверждение, нам надо установить, чему же именно *равен* коммутатор пары динамических переменных — надо установить **перестановочные соотношения** или, как говорят, — ибо именно здесь квантовая механика отталкивается от классической, — установить **правила квантования**.

Для этой цели мы обратимся к **принципу соответствия** с классической теорией, именно, будем стараться строить дальнейшее квантовомеханическое описание так, чтобы оно примыкало к классическому столь тесно, сколь это возможно. При этом удобно отталкиваться от классической механики, записанной в гамильтоновой форме.

Из первой части курса мы уже знаем, что механика в гамильтоновой форме наиболее удобно и красиво формулируется с помощью скобок Пуассона. Мы хотим поэтому перенести понятие **скобок Пуассона** (кратко — СП) в квантовую теорию — т.е. соотнести всякой паре квантовых динамических переменных<sup>1)</sup> (наблюдаемых), взятых в определенном порядке, новую наблюдаемую, которую мы будем называть квантовой СП этих наблюдаемых, и притом так, чтобы при этом сохранились все свойства классических СП:

- (1) антисимметрии;
- (2) равенства нулю скобки с константой;
- (3) линейности по каждой переменной;
- (4) выполнения тождества Якоби и
- (5) свойства, аналогичного правилу дифференцирования произведения:

$$(u_1 u_2, v) = (u_1, v) u_2 + u_1 (u_2, v); \quad (u, v_1 v_2) = (u, v_1) v_2 + v_1 (u, v_2).$$

(Подчеркнем, что в равенствах, выражающих свойства (5) уже нельзя будет, разумеется, изменять порядок множителей.)

Оказывается, что если мы хотим сохранить все свойства (1)–(5) для некоммутирующих величин, то мы получим очень жесткое ограничение на возможный способ нарушения коммутативности. Именно,

<sup>1)</sup> При квантовомеханическом описании мы ведь не можем пользоваться классическим определением СП через дифференцирования по координатам и импульсам.



вычислим квантовую СП двух произведений  $u_1 u_2$  и  $v_1 v_2$ . Это вычисление можно вести двумя способами — или применяя свойство (5) *сперва* к произведению  $u_1 u_2$ , а *затем* к произведению  $v_1 v_2$ , или же наоборот. На первом пути получим:

$$\begin{aligned}(u_1 u_2, v_1 v_2) &= (u_1, v_1 v_2) u_2 + u_1 (u_2, v_1 v_2) = \\ &= (u_1, v_1) v_2 u_2 + v_1 (u_1, v_2) u_2 + u_1 (u_2, v_1) v_2 + u_1 v_1 (u_2, v_2),\end{aligned}$$

а на втором:

$$\begin{aligned}(u_1 u_2, v_1 v_2) &= (u_1 u_2, v_1) v_2 + v_1 (u_1 u_2, v_2) = \\ &= (u_1, v_1) u_2 v_2 + u_1 (u_2, v_1) v_2 + v_1 (u_1, v_2) u_2 + v_1 u_1 (u_2, v_2).\end{aligned}$$

Надо, конечно, потребовать, чтобы результаты обеих выкладок совпали, т. е. чтобы было

$$(u_1, v_1)(u_2 v_2 - v_2 u_2) = (u_1 v_1 - v_1 u_1)(u_2, v_2),$$

или

$$\frac{(u_1 v_1 - v_1 u_1)}{(u_1, v_1)} = \frac{(u_2 v_2 - v_2 u_2)}{(u_2, v_2)} = \dots \quad (*)$$

где цепочку равенств можно продолжить, добавляя такие же выражения для новых пар наблюдаемых, скажем  $u_3, v_3; u_4, v_4; \dots$ , так что выражение (\*) *не зависит* от той пары наблюдаемых, из которых оно образовано.

Итак, с СП-формализмом может быть совместна не любая некоммутативность динамических переменных, а только такая, когда коммутатор пропорционален квантовой СП:

$$uv - vu = [u, v]_- = -i\hbar \cdot (u, v), \quad (50)$$

где коэффициент пропорциональности  $\hbar$  — универсальная постоянная — как выясняется, та самая **постоянная Планка** (2), которую мы уже вводили в историческом введении.

Вспомним теперь, что в классической теории особенно просты были СП канонически сопряженных координат и импульсов:

$$(p_i, q_j) = \delta_{ij}; \quad (p_i, p_j) = (q_i, q_j) = 0. \quad (51.1)$$

Примем в качестве постулата, что

Квантовые СП канонически сопряженных координат и импульсов сохраняют вид (51.1).

В силу (50) отсюда сейчас же получится, что канонически сопряженные координаты и импульсы должны удовлетворять перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned}p_i q_j - q_j p_i &= [p_i, q_j]_- = -i\hbar \delta_{ij}, \\ [p_i, p_j]_- &= 0; \quad [q_i, q_j]_- = 0.\end{aligned} \quad (51.2)$$

Перестановочные соотношения (51) отвечают на поставленный в начале параграфа вопрос, как именно не коммутируют квантовые динамические переменные. Их часто называют **условиями квантования**.

Для случая одной степени свободы, когда есть только одна обобщенная координата и один обобщенный импульс, условия квантования сводятся к одному равенству

$$pq - qp = -i\hbar. \quad (52)$$

Как быть с СП других динамических переменных, не являющихся координатами и импульсами? В классической теории принимается, что всякая динамическая переменная какой-либо системы есть функция ее обобщенных координат и импульсов. На пути переноса этого допущения в квантовую теорию лежит та трудность, что в ней приходится вводить в рассмотрение функции от *некоммутирующих* наблюдаемых. Особых вопросов не возникает, пока эти функции являются полиномами — имеющаяся алгебра операторов позволит нам выразить коммутаторы этих функций  $u, v, \dots$  через канонические коммутаторы (51), после чего мы найдем СП функций  $u, v, \dots$  из (50), считая теперь, что СП любых динамических переменных **определяются** этим равенством через их коммутатор.

Это рассуждение можно, с определенными оговорками, распространить и на функции обобщенных координат и импульсов, разложимые в степенные ряды. Как правило, мы приходим при таком вычислении к тому же самому выражению для квантовой скобки Пуассона, выраженной через квантовые динамические переменные, что и получаемое в классической теории, при выражении классической скобки Пуассона через классические переменные, с той единственной оговоркой, что порядок множителей в произведениях, который в классическом случае был безразличен, оказывается теперь фиксированным. (Эта оговорка в действительности весьма существенна: при проведении вычислений через ряды мы часто приходим к таким результатам, которые (в классике) удастся обратно просуммировать в известные функции только за счет произвольного распоряжения порядком множителей. В квантовом случае такое суммирование может оказаться невыполнимым.)

## 10. Система с одной степенью свободы

Займемся теперь исследованием тех следствий, которые можно извлечь для операторов координаты  $q$  и импульса  $p$  из правил квантования. Начнем с рассмотрения простейшего случая одной степени свободы, когда эти правила задаются перестановочным соотношением (52), и будем при этом считать, что на эти операторы не наложено никаких дополнительных условий, которые могли бы ограничивать допустимые значения ЕВ-ов операторов  $q$  и  $p$ <sup>1)</sup>. Наша цель будет состоять в том, чтобы найти конкретную реализацию операторов  $p$  и  $q$ , т. е., на математическом языке, построить представление алгебры Ли (52).

<sup>1)</sup> Тем исключаются такие случаи, когда  $q$  — скажем радиальная координата  $r$ , собственные значения которой по своему смыслу могут быть только положительными, или же угловая переменная типа углов  $\vartheta$  и  $\varphi$ , ЕВ-ы которых должны восприниматься по модулю  $\pi$  или  $2\pi$ .

Как мы вскоре увидим, оба эти оператора окажутся обладающими непрерывным спектром. Отчасти по этой причине будет удобнее исследовать (52) не непосредственно, а обходным путем, введя в виде промежуточного шага некоторые новые операторы, спектр которых будет дискретен. Впрочем, мы получим на этом пути ряд результатов, которые и сами по себе пригодятся в дальнейшем.

**10.1.** Итак, введем вместо  $q$  и  $p$  новые операторы

$$a^{\pm} = \frac{p \pm i\alpha q}{\sqrt{2\alpha\hbar}}; \quad q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} \frac{a^{+} - a}{i}; \quad p = \sqrt{\frac{\alpha\hbar}{2}} (a^{+} + a), \quad (53)$$

где  $\alpha$  — некоторая константа, и  $a$  означает то же самое, что и  $a^{-}$  (Подобные динамические переменные мы уже вводили в классическом случае при изучении осциллятора, см.

**1.14** <sup>1)</sup>). Операторы  $a$  и  $a^{+}$  не являются наблюдаемыми, они даже неэрмитовы (но эрмитово сопряжены друг другу) <sup>2)</sup>. Найдем их перестановки. Согласно (53) получаем

$$aa^{+} - a^{+}a = \frac{1}{2\alpha\hbar} (i\alpha [p, q] - i\alpha [q, p]) = \frac{-2i\alpha}{2\alpha\hbar} i\hbar = 1. \quad (54)$$

**10.1.1.** Построим теперь еще один оператор  $a^{+}a$ . Он эрмитов и положительно definitен: для любого  $|A\rangle$ :

$$\langle A | a^{+}a | A \rangle = \sum_{\xi'} \langle A | a^{+} | \xi' \rangle \langle \xi' | a | A \rangle = \sum_{\xi'} |\langle \xi' | a | A \rangle|^2 \geq 0,$$

следовательно, все EW-ы оператора  $a^{+}a$  — будем обозначать их  $n$  —  $n \geq 0$ . Поставим для него проблему собственных значений

$$a^{+}a | n \rangle = n | n \rangle \quad (54a)$$

и допустим, что она имеет хотя бы одно нетривиальное решение, которому отвечает собственный вектор  $|n\rangle$ . Тогда

$$a \cdot a^{+}a | n \rangle = a \cdot n | n \rangle \quad a^{+} \cdot a^{+}a | n \rangle = a^{+} \cdot n | n \rangle$$

или, по (54),

$$(a^{+}a + 1) a | n \rangle = n \cdot a | n \rangle \quad (a^{+}a - 1) a^{+} | n \rangle = n \cdot a^{+} | n \rangle,$$

то есть

$$a^{+}a \{a | n \rangle\} = (n - 1) \{a | n \rangle\} \quad a^{+}a \{a^{+} | n \rangle\} = (n + 1) \{a^{+} | n \rangle\}.$$

<sup>1)</sup> Мы изучаем пока систему в один фиксированный момент времени. Поэтому делать различие между переменными  $a$  (малыми) и  $A$  (большими) нет нужды.

<sup>2)</sup> Об области определения операторов  $a$  и  $a^{+}$  мы пока ничего не можем говорить, так как у нас есть только их алгебра, но нет пространства, в котором они действуют — его еще предстоит построить.

Таким образом, действуя на собственный вектор  $|n\rangle$  оператора  $a^+a$  операторами  $a$  или  $a^+$ , мы опять получаем собственные векторы оператора  $a^+a$ , отвечающие EW-ам  $(n-1)$  и  $(n+1)$  соответственно:

$$a|n\rangle = |n-1\rangle; \quad a^+|n\rangle = |n+1\rangle.$$

(Мы пока не считаем собственные векторы нормированными.)<sup>1)</sup> Повторяя эту операцию многократно, приходим к тому, что из каждого *одного* собственного вектора возникает *целая последовательность* собственных векторов, отвечающих EW-ам, растущим или убывающим от члена к члену на единицу. Но эта последовательность собственных значений обязательно должна оборваться снизу — ведь все они должны быть неотрицательны. Поэтому в этой последовательности обязательно должен существовать собственный вектор  $|0\rangle$ , такой что

$$a|0\rangle = 0|0\rangle = 0; \quad \| |0\rangle \| = 1. \quad (55)$$

Такой вектор называется вектором **вакуума**. Мы будем считать его нормированным на единицу.

Вакуум является собственным вектором оператора  $a^+a$  с собственным значением 0. Так как все остальные EW-ы отличаются от него на целые числа, то, следовательно,

| Все EW-ы оператора  $a^+a$  суть целые числа  $n \in \mathbb{N}$ .

Других EW-ов (образующих какую-либо другую последовательность с другим «исходным» собственным вектором) у  $a^+a$  быть не может, так как, не содержа вакуума, другая последовательность не оборвалась бы снизу, а содержа — совпала бы с первой.

**ДОПУЩЕНИЕ:** Вакуум невырожден. ■

Это — физическое допущение: ведь могли бы быть *другие*, коммутирующие с  $a^+, a$  операторы  $b^+, b; c^+, c; \dots$ , и вакуум по  $a^+, a$  мог бы быть любым состоянием по этим операторам.

**10.1.2.** Итак, все собственные векторы оператора  $a^+a$  будут получаться из вакуума последовательными действиями оператора  $a^+$

$$|n\rangle = c_n (a^+)^n |0\rangle,$$

<sup>1)</sup> Надо еще, конечно, показать, что найденные таким образом новые решения проблемы собственных значений нетривиальны — т. е. что собственные векторы  $a|n\rangle$  и  $a^+|n\rangle$  не суть нули. Однако из  $a|n\rangle = 0$  следовало бы

$$a^+ \{a|n\rangle\} = a^+a|n\rangle = n|n\rangle = 0,$$

и, поскольку мы допустили, что  $|n\rangle \neq 0$ ,  $n = 0$ . Аналогично, из  $a^+|n\rangle = 0$  следовало бы

$$aa^+|n\rangle = (a^+a + 1)|n\rangle = (n+1)|n\rangle = 0,$$

т. е.  $n = -1$ , что невозможно для EW-та положительно definite. Итак,  $a^+|n\rangle$  всегда  $\neq 0$ , а  $a|n\rangle = 0$  тогда и только тогда, когда  $n = 0$ .

где  $c_n$  — нормировочные множители. Мы выберем их так, чтобы все состояния  $|n\rangle$  были бы теперь нормированы на единицу. Вычисляя квадрат нормы  $|n\rangle$ :

$$\begin{aligned}\| |n\rangle \|^2 &= c_n^* c_n \langle 0 | a^n (a^+)^n | 0 \rangle = c_n^* c_n \langle 0 | a^{n-1} (a^+)^{n-1} n | 0 \rangle = \dots \\ &\dots = c_n^* c_n n! \langle 0 | 0 \rangle = c_n^* c_n \cdot n!,\end{aligned}$$

видим, что эта нормировка будет достигнута, если выбрать  $c_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$  и, следовательно, положить

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle; \quad \langle n| = \langle 0| a^n \frac{1}{\sqrt{n!}}; \quad \| |n\rangle \| = 1 \quad \begin{array}{l} \text{нормированные} \\ \text{собственные} \\ \text{векторы.} \end{array} \quad (56)$$

Кроме того, все векторы (56) с разными  $n$  — взаимно ортогональны:

$$\langle n' | n'' \rangle = \delta_{n'n''}. \quad (56.4)$$

Действие операторов  $a^+$  и  $a$  на эти векторы запишется тогда как

$$\left. \begin{aligned} a^+ |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle; \\ a |n\rangle &= \frac{n}{\sqrt{n!}} (a^+)^{n-1} |0\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (57a)$$

т. е. оператор  $a^+$  переводит каждое собственное состояние  $|n\rangle$  в следующее старшее состояние, а оператор  $a$  — в предыдущее младшее.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Мы впервые сталкиваемся здесь с операторами, для которых нам интересно их *действие* на векторы, а не поиск тех состояний, которые *не меняются* под их влиянием. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Оператор  $a^+a$ , который мы здесь ввели, называют обычно **оператором числа частиц**, его собственные значения  $n$  — **числами заполнения**, а операторы  $a^+$  и  $a$  — **операторами рождения** и, соответственно, **уничтожения** частиц. Смысл этих названий становится ясным в так называемом «методе вторичного квантования», в котором выясняется, что переход квантовой системы из одного состояния в другое можно трактовать как «рождение» в системе некоторых новых частиц и, возможно, «уничтожение» других. ■

**10.2.** Итак, совокупность векторов

$$|n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots,$$

образует базис в пространстве векторов состояния квантовомеханической системы с одной степенью свободы. Согласно (45.3) представителем всякого линейного оператора  $\alpha$  в этом  **$n$ -представлении** служит

матрица

$$\langle n' | \alpha | n'' \rangle,$$

через посредство которой  $\alpha$  можно записать в виде двойной бесконечной суммы по диадным произведениям (19):  $|n'\rangle\langle n''|$  базисных векторов и совекторов <sup>1)</sup>

$$\alpha = \sum_{n', n'' \geq 0} \langle n' | \alpha | n'' \rangle \cdot |n'\rangle\langle n''|. \quad (*)$$

В частности, представителями самих основных операторов  $a^+$  и  $a$  будут согласно (57a) матрицы

$$\begin{aligned} \langle n' | a^+ | n'' \rangle &= \sqrt{n''+1} \delta_{n', n''+1} \equiv \sqrt{n'} \delta_{n', n''+1}; \\ \langle n' | a | n'' \rangle &= \sqrt{n''} \delta_{n'+1, n''} = \sqrt{n'+1} \delta_{n'+1, n''} \end{aligned} \quad (57b)$$

и, следовательно,

$$a^+ = \sum_{n' \geq 0} \sqrt{n'+1} |n'+1\rangle\langle n'|; \quad a = \sum_{n'' \geq 0} \sqrt{n''+1} |n''\rangle\langle n''+1|. \quad ^3)$$

**10.2.1.1.** Возводя первое из этих соотношений в квадрат

$$\begin{aligned} a^+ a^+ &= \sum_{n'_2 \geq 0} \sum_{n'_1 \geq 0} \sqrt{n'_2+1} \sqrt{n'_1+1} |n'_2+1\rangle\langle n'_2| |n'_1+1\rangle\langle n'_1| = \\ &= \sum_{n'_2, n'_1 \geq 0} \sqrt{(n'_2+1)(n'_1+1)} \delta_{n'_2, n'_1+1} \cdot |n'_2+1\rangle\langle n'_1|, \end{aligned}$$

получим

$$(a^+)^2 = \sum_{n' \geq 0} \sqrt{(n'+2)(n'+1)} \cdot |n'+2\rangle\langle n'|,$$

<sup>1)</sup> Мы надеемся, что читатель достаточно освоился со словом «совектор», чтобы не нуждаться далее в подчеркивающем его новизну дефисе.

<sup>2)</sup> Таким образом, можно сказать, что совокупность диадных произведений  $|n'\rangle\langle n''|$  играет роль базиса в «пространстве линейных операторов».

<sup>3)</sup> Эти соотношения можно записать и как:

$$\begin{aligned} a^+ &= \sqrt{a^+ a} \sum_{n' \geq 0} |n'+1\rangle\langle n'| = \sum_{n' \geq 0} |n'+1\rangle\langle n'| \sqrt{a^+ a + 1}; \\ a &= \sqrt{a^+ a + 1} \sum_{n'' \geq 0} |n''\rangle\langle n''+1| = \sum_{n'' \geq 0} |n''\rangle\langle n''+1| \sqrt{a^+ a} = \end{aligned}$$

через операторы

$$\Phi = \sum_{n'' \geq 0} |n''\rangle\langle n''+1|, \quad \Phi^+ = \sum_{n' \geq 0} |n'+1\rangle\langle n'|, \quad [\Phi, \Phi^+]_- = |0\rangle\langle 0|.$$

и, повторением этой процедуры,

$$(a^+)^{v'} = \sum_{n' \geq 0} \sqrt{\frac{(n' + v')!}{n'!}} \cdot |n' + v'\rangle \langle n'|;$$

$$(a)^{v''} = \sum_{n'' \geq 0} \sqrt{\frac{(n'' + v'')!}{n''!}} \cdot |n''\rangle \langle n'' + v''|.$$

Поэтому произвольный моном по операторам рождения и уничтожения  $a^+$  и  $a$  запишется через базисные диадные произведения как:

$$(a^+)^{v'} (a)^{v''} = \sum_{n', n'' \geq 0} \sqrt{\frac{(n' + v')! (n'' + v'')!}{n'! n''!}} |n' + v'\rangle \langle n' | n''\rangle \langle n'' + v''|,$$

т. е. как

$$(a^+)^{v'} (a)^{v''} = \sum_{n' \geq 0} \frac{1}{n'!} \sqrt{(n' + v')! (n' + v'')!} |n' + v'\rangle \langle n' + v''|. \quad (+)$$

**10.2.1.2.** В классической механике всякая динамическая переменная для системы с одной степенью свободы должна была быть функцией ее координаты  $q$  и импульса  $p$  — в этом собственно и состоял смысл утверждения, что система обладает именно *одной* степенью свободы. Если мы хотим сохранить то же понимание числа степеней свободы системы и в квантовой теории, то мы должны ожидать, что для квантовой системы с одной степенью свободы всякий линейный оператор  $\alpha$  должен быть функцией ее операторов  $q$  и  $p$ , или — что конечно то же самое — функцией операторов  $a^+$  и  $a$ . Вспоминая сказанное в конце предыдущего параграфа относительно возможного понимания функции от некоммутирующих операторов, легко сообразить, что эти замечания сводятся к требованию, что

для системы с одной степенью свободы всякий оператор  $\alpha$  представим в виде двойной суммы элементарных мономов  $(a^+)^{v'} a^{v''}$ <sup>1)</sup>, т. е. в виде

$$\alpha = \sum_{v', v'' \geq 0} c_{v', v''} (a^+)^{v'} (a)^{v''}. \quad (**)$$

Таким образом в пространстве линейных операторов для системы с одной степенью свободы у нас возникли естественным образом две разные полные системы элементарных объектов — система диадных произведений и система мономов  $(a^+)^{v'} a^{v''}$  — по каждому из которых может быть разложен произвольный оператор  $\alpha$  — в форме (\*) или

<sup>1)</sup> Мономы, образуемые перемножением того же количества операторов  $a^+$  и  $a$  в *другом порядке* разлагаются по мономам выписанного вида с помощью перестановочных соотношений (54): например,  $aa^+ = a^+a + 1$ .

в форме (\*\*). Ясно, что при этом каждый из объектов одной системы должен разлагаться по объектам другой.

**10.2.1.3.** Одно из этих разложений — выражение монома  $(a^+)^{v'} a^{v''}$  через сумму диад — мы уже получили (+). Чтобы получить второе, рассмотрим представление в форме (\*\*) простейшего из диадных произведений — оператора проектирования в состояние вакуума

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| = \sum_{v', v'' \geq 0} c_{v'v''}^0 (a^+)^{v'} \cdot (a)^{v''}.$$

По определению этого проектора

$$\langle n' | P_0 | n'' \rangle = \delta_{n'0} \delta_{n''0},$$

и это дает нам условие

$$\delta_{n'0} \delta_{n''0} = \sum_{v', v'' \geq 0} c_{v'v''}^0 \langle n' | (a^+)^{v'} \cdot a^{v''} | n'' \rangle.$$

Вычислим типичный матричный элемент правой части:

$$\langle n' | (a^+)^{v'} \cdot a^{v''} | n'' \rangle = \frac{1}{\sqrt{n'! n''!}} \langle 0 | a^{n'} \cdot (a^+)^{v'} \cdot a^{v''} \cdot (a^+)^{n''} | 0 \rangle.$$

Переводя здесь  $v'$  операторов  $a^+$  последовательно налево с помощью перестановочных соотношений (54), пока они, действуя на совектор вакуума, не дадут нуль, а  $v''$  операторов  $a$  — таким же образом направо, увидим, что он равен

$$\begin{aligned} & \frac{n' (n' - 1) \dots (n' - v' + 1) \cdot n'' \dots (n'' - v'' + 1)}{\sqrt{n'! n''!}} \langle 0 | a^{n'-v'} (a^+)^{n''-v''} | 0 \rangle = \\ & = \sqrt{\frac{n'! n''!}{(n' - v')! (n'' - v'')!}} \langle n' - v' | n'' - v'' \rangle = \frac{\sqrt{n'! n''!}}{(n' - v')!} \delta_{n'-v', n''-v''}, \end{aligned}$$

если  $n' - v' \geq 0$  (и  $n'' - v'' \geq 0$ ); в противном же случае матричный элемент равен нулю.

Таким образом наши условия на коэффициенты  $c_{v'v''}^0$  принимают вид

$$\langle n' | P_0 | n'' \rangle = \delta_{n'n''} \delta_{n'0} = \sum_{v'=0}^{n'} \sum_{v''=0}^{n''} \delta_{n'-v', n''-v''} \frac{\sqrt{n'! n''!}}{(n' - v')!} c_{v'v''}^0.$$

Легко сообразить, что в силу этих условий отличны от нуля лишь диагональные коэффициенты:

$$c_{v'v''}^0 = \delta_{v'v''} c_{v'}^0$$



(любитель педантизма может доказать равенство нулю всех коэффициентов вида  $c_{v'+k,k}$ ,  $v' = 0, 1, \dots$ , по индукции от  $k$  к  $k+1$ ), для которых остаются условия

$$\delta_{n'0} = \sum_{v'=0}^{n'} \frac{n'!}{(n'-v')!} c_{v'}.$$

Полагая здесь  $n' = 0$ , получаем, что  $c_0 = 1$ ; для  $n' = 1$  получаем  $c_0 + 1! \cdot c_1 = 0$ , т. е.  $c_1 = -\frac{1}{1!}$ . Допустим теперь, что вплоть до  $k \leq n' - 1$  выполняется  $c_k = \frac{(-1)^k}{k!}$ . Тогда

$$\begin{aligned} n'! c_{n'} &= - \sum_{v'=0}^{n'-1} \frac{n'!}{(n'-v')! v'!} (-1)^{v'} = \\ &= - \sum_{v'=0}^{n'} \frac{n'!}{(n'-v')! v'!} (-1)^{v'} + \frac{(-1)^{n'} \cdot n'!}{n'!} = -(1-1)^{n'} + (-1)^{n'}, \end{aligned}$$

т. е. и для  $k = n'$  выполняется

$$c_{n'} = \frac{(-1)^{n'}}{n'!},$$

и наша гипотеза доказана по индукции.

Итак, оператор  $P_0$  проектирования в вакуум выражается через произведения операторов рождения и уничтожения рядом

$$P_0 = \sum_{v' \geq 0} \frac{(-1)^{v'}}{v'!} (a^+)^{v'} a^{v'}.$$

Если бы  $a^+$  и  $a$  не были некоммутативны, мы сразу узнали бы в этом ряду экспоненту от  $-a^+a$ . Иными словами, мы сталкиваемся здесь с простейшим примером тех очень нередких (и очень огорчительных) случаев, на которые указывалось в конце предыдущего параграфа, когда некоммутативность операторов мешает представить полученный в виде ряда результат в компактной форме элементарной функции.

**10.2.2.** В рассматриваемом конкретном случае последняя цель представляется настолько притягательной, что ради ее достижения идут на введение нового понятия. Когда мы выписывали выше мономы, которые можно построить из  $v'$  операторов рождения  $a^+$  и  $v''$  операторов уничтожения  $a$ , мы выбрали те, в которых все операторы рождения  $a^+$  стоят *слева* от всех операторов уничтожения  $a$  — про такие мономы говорят, что в них  $a^+$  и  $a$  стоят в **нормальном порядке**. В каждом члене полученного ряда для  $P_0$  операторы  $a^+$  и  $a$  стоят в нормальном порядке, но если мы свернем ряд в экспоненту, то этот

порядок потеряется. Чтобы воспрепятствовать этому, вводят понятие **нормального произведения** некоторого числа операторов  $a^+$  и  $a$ , которое обозначается двоеточиями вокруг перемножаемых операторов  $: \dots :$  и означает, что стоящие внутри этого знака операторы должны пониматься расположенными в нормальном порядке вне зависимости от того, в каком порядке они реально выписаны, например:

$$:a^+a: = a^+a; \quad :aa^+: = a^+a; \quad :aa^+a: = a^+aa \quad \text{и т. п.}$$

Рассматриваются и нормальные многочлены или ряды, под которыми понимаются (конечные или бесконечные) суммы нормальных одночленов.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Из определения нормального произведения следует, что *под его знаком* любые операторы *коммутивны*: например

$$:aa^+: = :a^+a:. \quad \blacksquare$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Поэтому из

$$:\alpha: = :\beta:$$

отнюдь не следует

$$\alpha = \beta.$$

Труднее примириться с тем, что из

$$\alpha = \beta$$

не следует

$$:\alpha: = :\beta:.$$

Например,

$$aa^+ = a^+a + 1.$$

Но

$$:aa^+: \neq :(a^+a + 1):,$$

поскольку

$$:aa^+: = :a^+a:. \quad \blacksquare$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3:** Мы уже обращали внимание на то, что моном из  $a^+$  и  $a$ , перемножаемых в произвольном порядке, можно с помощью перестановочных соотношений (54) представить в виде суммы мономов, в которых  $a^+$  и  $a$  стоят в нормальном порядке. Теперь это замечание будет звучать как утверждение, что любое обычное произведение операторов  $a^+$  и  $a$  можно представить в виде суммы нормальных произведений, например,

$$a^+aa = :a^+aa:; \quad aa^+a = :aa^+a: + :a:; \quad aaa^+ = :aaa^+: + 2:a:,$$

причем в силу замечания 1

$$:a^+aa: = :aa^+a: = :aaa^+:. \quad \blacksquare$$

**10.2.3.** С помощью понятия нормального произведения можно свернуть полученный для  $P_0$  ряд в **нормальную экспоненту**:

$$|0\rangle\langle 0| = P_0 = \sum_{v' \geq 0} \frac{(-1)^{v'} : (a^+a)^{v'} :}{v'!} = :e^{-a^+a}:. \quad (++)$$

Построение остальных проекционных операторов не составляет теперь труда. В самом деле, по определению

$$P_n = |n\rangle\langle n| = \frac{1}{n!} (a^+)^n |0\rangle\langle 0| a^n = \frac{1}{n!} (a^+)^n :e^{-a^+a}: a^n.$$

Но все не входящие в нормальную экспоненту операторы  $a^+$  стоят здесь на самом левом месте, а операторы  $a$  — на самом правом. Поэтому ничего не изменится, если включить и их в нормальное произведение. Под знаком же нормального произведения операторы можно писать в произвольном порядке, и нам будет удобно записать  $P_n$  в форме

$$P_n = : \frac{(a^+a)^n}{n!} e^{-a^+a} :, \quad (+++)$$

которая подсказывает, что можно ввести общую для всех  $P_n$  производящую функцию (точнее, конечно, производящий оператор), записывая их в элегантном виде

$$P_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n :e^{-\lambda a^+a}: \Big|_{\lambda=1}. \quad (++++)$$

В качестве примера использования последней формулы продемонстрируем с ее помощью, что  $\sum_{n \geq 0} P_n = 1$ . Имеем:

$$\sum_{n \geq 0} P_n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n :e^{-\lambda a^+a}: \Big|_{\lambda=1}.$$

Но в силу теоремы Тейлора, для любого  $f(\lambda)$ ,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n f(\lambda) = f(\lambda - 1)^1).$$

<sup>1)</sup> Заметим, что, выполняя формальное суммирование ряда слева, можно представить эту теорему в красивой форме

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\xi^n}{n!} \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^n f(\lambda) = e^{\xi \frac{d}{d\lambda}} f(\lambda) = f(\lambda + \xi)$$

— оператор  $e^{\xi \frac{d}{d\lambda}}$  сдвигает аргумент  $\lambda$  на  $\xi$ ; это замечание понадобится нам в дальнейшем.

Поэтому

$$\sum_{n \geq 0} P_n = :e^{-(\lambda-1)a^\dagger a}: \Big|_{\lambda=1} = 1.$$

Аналогично проекционным операторам выражаются через нормальные произведения  $a^\dagger$  и  $a$  и недиагональные диады:

$$|n'\rangle\langle n''| = \frac{1}{\sqrt{n'!n''!}} : (a^\dagger)^{n'} e^{-a^\dagger a} (a)^{n''} :. \quad (+++++)$$

**10.2.4.** Подставим теперь в форму (\*\*) произвольный оператор разложения (+) нормальных произведений по диадам:

$$\alpha = \sum_{v', v'' \geq 0} \sum_{n' \geq 0} c_{v', v''} \frac{\sqrt{(v' + n')! (v'' + n')!}}{n'!} |v' + n'\rangle\langle v'' + n'|.$$

Вводя здесь новые переменные  $m' = n' + v'$ ,  $m'' = n' + v''$  и меняя порядок суммирования, придем к выражению

$$\alpha = \sum_{m', m'' \geq 0} \sum_{s=0}^{\min(m', m'')} c_{m'-s, m''-s} \frac{\sqrt{m'! m''!}}{s!} |m'\rangle\langle m''|$$

произвольного оператора уже через диады. Сравнивая его со (\*) видим, что коэффициенты  $\langle n' | \alpha | n'' \rangle$  представления (\*) выражаются через коэффициенты  $C_{v'v''}$  представления (\*\*) в виде

$$\langle n' | \alpha | n'' \rangle = \sum_{s=0}^{\min(n', n'')} c_{n'-s, n''-s} \frac{\sqrt{n'! n''!}}{s!}. \quad (***)$$

Соответственно так же, подставляя в форму (\*) разложение (+++++) и выполняя аналогичные преобразования, получим формулы, выражающие  $c_{v'v''}$  через  $\langle n' | \alpha | n'' \rangle$ :

$$c_{v'v''} = \sum_{s=0}^{\min(v', v'')} \frac{(-1)^s}{s! \sqrt{(v'-s)! (v''-s)!}} \langle v'-s | \alpha | v''-s \rangle. \quad (****)$$

Этим завершается установление соответствия между формулами (\*) и (\*\*).

**10.3.1.** Вернемся к представляющим в  $n$ -представлении операторы рождения и уничтожения матрицам (57b). Эти представители очень

важны, поэтому мы не поленимся переписать их еще раз в развернутой матричной форме:

$$\begin{aligned} \langle n' | a | n'' \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \\ \langle n' | a^+ | n'' \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57c)$$

**10.3.2.** Теперь можно опять заняться собственно интересующими нас операторами координаты  $q$  и импульса  $p$  и с помощью формул (53) получить для их представителей в  $n$ -представлении:

$$\langle n' | q | n'' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} [i\sqrt{n'+1} \delta_{n'+1, n''} - i\sqrt{n'} \delta_{n', n''+1}], \quad (58.1)$$

$$\langle n' | p | n'' \rangle = \sqrt{\frac{\alpha\hbar}{2}} [\sqrt{n'+1} \delta_{n', n''-1} + \sqrt{n'} \delta_{n', n''+1}]. \quad (58.2)$$

Один из них, например представитель координаты, выпишем в виде явной матрицы:

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\hbar}} \langle n' | q | n'' \rangle = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & & & 0 \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & & \\ & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} & \\ 0 & & -i\sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & & & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (58a)$$

Представитель оператора  $\sqrt{\frac{2}{\alpha\hbar}} p$  получается отсюда заменой  $\pm i \rightarrow +1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Матричные элементы операторов координаты и импульса *растут* с ростом номера! Это обстоятельство весьма поучительно для вопроса о том, какие операторы следует допускать в теорию. Если бы мы решили ограничиться лишь теми, матричные элементы которых с ростом номера *убывают*, то, как видно, в нашей схеме не нашлось бы места даже для операторов  $p$  и  $q$  системы с одной степенью свободы. ■

**10.4.** Как мы видим, в  $n$ -представлении оператор  $q$  (и  $p$ ) не диагонален. Попробуем привести его к диагональному виду, т. е. решить для него проблему собственных значений. Удобнее всего делать это в явной матричной форме.

Проблема собственных значений для операторов координаты (или импульса)

$$q|q'\rangle = q'|q'\rangle; \quad p|p'\rangle = p'|p'\rangle \quad (59a)$$

запишется в представителях как

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n'' \geq 0} \langle n' | q | n'' \rangle \langle n'' | q' \rangle &= q' \langle n' | q' \rangle; \\ \sum_{n'' \geq 0} \langle n' | p | n'' \rangle \langle n'' | p' \rangle &= p' \langle n' | p' \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (59b)$$

или, если ввести временно обозначения

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{\hbar}} q' \quad \text{и} \quad y = \sqrt{\frac{2}{\alpha\hbar}} p',$$

как

$$\begin{aligned} \sum_{n'' \geq 0} \langle n' | \sqrt{\frac{2\alpha}{\hbar}} q | n'' \rangle \langle n'' | q' \rangle &= x \langle n' | q' \rangle; \\ \sum_{n'' \geq 0} \langle n' | \sqrt{\frac{2}{\alpha\hbar}} p | n'' \rangle \langle n'' | p' \rangle &= y \langle n' | p' \rangle, \end{aligned}$$

т. е. в развернутом виде как

$$\begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{1} & & & 0 \\ -i\sqrt{1} & 0 & i\sqrt{2} & & \\ & -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{3} & \\ & & -i\sqrt{3} & 0 & i\sqrt{4} \\ 0 & & & -i\sqrt{4} & 0 \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc_0 \\ xc_1 \\ xc_2 \\ xc_3 \\ xc_4 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} \\ 0 & & & \sqrt{4} & 0 \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yd_0 \\ yd_1 \\ yd_2 \\ yd_3 \\ yd_4 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Мы записали здесь представители собственных векторов  $\langle n' | q' \rangle$  и  $\langle n' | p' \rangle$  в виде матриц-столбцов с неопределенными элементами  $c_i =$

$= c_i(x)$  и  $d_i = d_i(y)$ , которые, конечно, могут зависеть от EW-ов  $x$  и  $y$ . Выполнив матричное перемножение в левых частях, получим

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{1} c_1 \\ -i\sqrt{1} c_0 + i\sqrt{2} c_2 \\ -i\sqrt{2} c_1 + i\sqrt{3} c_3 \\ -i\sqrt{3} c_2 + i\sqrt{4} c_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc_0 \\ xc_1 \\ xc_2 \\ xc_3 \\ \dots \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \sqrt{1} d_1 \\ \sqrt{1} d_0 + \sqrt{2} d_2 \\ \sqrt{2} d_1 + \sqrt{3} d_3 \\ \sqrt{3} d_2 + \sqrt{4} d_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yd_0 \\ yd_1 \\ yd_2 \\ yd_3 \\ \dots \end{pmatrix},$$

откуда будут следовать рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x}{i\sqrt{1}} c_0; & d_1 &= \frac{y}{\sqrt{1}} d_0; \\ c_2 &= \frac{x}{i\sqrt{2}} c_1 + \frac{i\sqrt{1}}{i\sqrt{2}} c_0; & d_2 &= \frac{y}{\sqrt{2}} d_1 - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} d_0; \\ \dots & & \dots & \\ c_n &= \frac{x}{i\sqrt{n}} c_{n-1} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} c_{n-2}; & d_n &= \frac{y}{\sqrt{n}} d_{n-1} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} d_{n-2}. \end{aligned} \quad (59c)$$

(Можно было бы, конечно, получить (59c) и прямо из (59b), не «расписывая» матриц въявь, однако практический опыт показывает, что в выкладках такого рода обычно бывает разумнее не пожалеть бумаги, чем тшиться не запутаться в пределах суммирований.).

Полагая в первой группе формул (59c)

$$c_n = (-i)^n c'_n,$$

приводим ее к виду

$$c'_n = \frac{x}{\sqrt{n}} c'_{n-1} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} c'_{n-2},$$

совпадающему со второй группой (59c), поэтому дальнейшие преобразования можно проводить для координаты и импульса совместно. Рекуррентные формулы, очевидно, допускают последовательное решение, которое выражает все  $c_n$  как некоторые полиномы от  $x$ , умноженные на  $c_0$ . Чтобы избавиться от корней, сделаем дальнейшую подстановку:

$$c'_n = \frac{e_n}{\sqrt{n!}} \quad \text{или} \quad d_n = \frac{e_n}{\sqrt{n!}},$$

которая приведет наши рекуррентные формулы (для определенности пишем  $x$ , имея в виду координату) к виду

$$e_n = x e_{n-1} - (n-1) e_{n-2}. \quad (59d)$$

Из математической физики известно, что **полиномы Эрмита** <sup>1)</sup>

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} \left( -\frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\xi^2}; \quad (60)$$

$$H_0(\xi) = 1;$$

$$H_1(\xi) = 2\xi;$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2;$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi;$$

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12;$$

$$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi;$$

$$H_6(\xi) = 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120;$$

$$H_7(\xi) = 128\xi^7 - 1344\xi^5 + 3360\xi^3 - 1680\xi$$

$$\dots\dots\dots$$

удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$H_n(\xi) = 2\xi H_{n-1}(\xi) - 2(n-1)H_{n-2}(\xi), \quad (60a)$$

которые отличаются от (59d) только лишними двойками. Легко сообразить, что для того, чтобы «подогнать» эти двойки, надо сделать в (59d) последнюю подстановку

$$e_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} h_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

после которой рекуррентные соотношения для  $h_n$ :

$$h_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) = 2 \frac{x}{\sqrt{2}} h_{n-1} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - 2(n-1) h_{n-2} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (59e)$$

уже не будет отличаться от (60a).

Таким образом, собирая все наши подстановки, видим, что рекуррентные соотношения (59a) будут удовлетворены, если положить

$$c_n(x) = (-i)^n \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) c_0(x) \quad (59f)$$

и

$$d_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n!}} H_n \left( \frac{y}{\sqrt{2}} \right) d_0(y),$$

где нулевые элементы  $c_0$  и  $d_0$  остаются пока произвольными.

<sup>1)</sup> См., например, известные справочники Рыжика или Янке — Эмде. Впрочем, нужные результаты нетрудно получить и кустарным способом; см. дополнение в конце параграфа.



Итак, мы получили, что представителями собственных векторов координаты и импульса в  $n$ -представлении будут

$$\begin{aligned}\langle n' | q' \rangle &= (-i)^{n'} \frac{1}{\sqrt{2^{n'} \cdot n'!}} H_{n'} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q' \right) c_0(q'); \\ \langle n' | p' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^{n'} \cdot n'!}} H_{n'} \left( \frac{1}{\sqrt{\hbar\alpha}} p' \right) d_0(p'),\end{aligned}\quad (61)$$

причем ЕВ-ами  $q'$  и  $p'$ , которым принадлежат эти собственные функции, могут служить *любые* вещественные числа. Подчеркнем, что нулевые элементы этих представителей  $c_0$  и  $d_0$  могут еще произвольным образом зависеть от собственных значений  $q'$  и  $p'$ .

**10.5.** Чтобы найти эту зависимость, потребуем выполнения условий нормировки. Поскольку собственными значениями, скажем  $q$ , могут быть любые числа, т. е. спектр непрерывен, то нормировать надо на  $\delta$ -функцию, т. е. потребовать, чтобы было

$$\langle q'' | q' \rangle = \sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle \langle n' | q' \rangle = \delta(q'' - q'), \quad (62.1)$$

и аналогично для импульса. Форма (61) приводит это условие к виду

$$c_0^*(q'') c_0(q') \sum_{n' \geq 0} \frac{1}{2^{n'} \cdot n'!} H_{n'} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q'' \right) H_{n'} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q' \right) = \delta(q'' - q'). \quad (62.2)$$

**10.5.1.** Чтобы вычислить стоящую здесь сумму, воспользуемся для полиномов Эрмита известным интегральным представлением:

$$H_n(\xi) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi + it)^n e^{-t^2} dt. \quad (60b)$$

С его помощью стоящая в (62.2) сумма сразу вычисляется:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n' \geq 0} \frac{1}{2^{n'} \cdot n'!} H_{n'}(\xi) H_{n'}(\eta) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt du \sum_{n' \geq 0} \frac{2^{n'} (\xi + it)^{n'} (\eta + iu)^{n'}}{n'!} e^{-(t^2 + u^2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt du e^{2(\xi + it)(\eta + iu) - t^2 - u^2}\end{aligned}$$

и остается взять гауссов интеграл

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt du e^{2\xi\eta + 2i\eta t + 2i\xi u - (t^2 + 2tu + u^2)}. \quad (63^*)$$

**10.5.1.1.** С помощью естественной подстановки

$$t = \frac{v+w}{\sqrt{2}}; \quad u = \frac{v-w}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\partial(t, u)}{\partial(v, w)} = 1 \quad (63a)$$

этот интеграл

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv dw e^{2\xi\eta + i\sqrt{2}(\xi+\eta)v - i\sqrt{2}(\xi-\eta)w - 2v^2} = \dots$$

распадается в произведении двух интегралов

$$\dots = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-i\sqrt{2}(\xi-\eta)w} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{2\xi\eta + \sqrt{2}i(\xi+\eta)v - 2v^2},$$

первый из которых, не содержащий вторых степеней, есть просто интегральное представление  $\delta$ -функции. Для вычисления второго

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{2\xi\eta + i\sqrt{2}(\xi+\eta)v - 2v^2}$$

делаем для уничтожения линейного члена подстановку

$$v = \tau + d,$$

благодаря которой

$$\text{показатель} = -2\tau^2 - 4d\tau - 2d^2 + i\sqrt{2}(\xi+\eta)\tau + i\sqrt{2}(\xi+\eta)d + 2\xi\eta,$$

откуда

$$d = \frac{i(\xi+\eta)}{2\sqrt{2}},$$

и:

$$\begin{aligned} \text{показатель} &= -2\tau^2 + 2\frac{(\xi+\eta)^2}{8} - \frac{\sqrt{2}(\xi+\eta)^2}{2\sqrt{2}} + 2\xi\eta = \\ &= -2\tau^2 + 2\xi\eta - \frac{(\xi+\eta)^2}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, весь интеграл  $I_2$  равен

$$I_2 = e^{2\xi\eta - \frac{(\xi+\eta)^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-2\tau^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{2\xi\eta - \frac{(\xi+\eta)^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi\eta - \frac{(\xi-\eta)^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi^2},$$

поскольку из-за получающейся из первого интеграла  $\delta$ -функции  $\xi = \eta$ .

**10.5.1.** Таким образом, мы получаем для вычислявшейся суммы  $S$  значение

$$S = \frac{1}{\pi} 2\pi \delta(\sqrt{2}(\xi - \eta)) \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi^2},$$

то есть

$$S = \sum_{n' \geq 0} \frac{1}{2^{n'} \cdot n'!} H_{n'}(\xi) H_{n'}(\eta) = \sqrt{\pi} e^{\xi^2} \delta(\xi - \eta). \quad (63)$$

**10.5.2.** Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle \langle n' | q' \rangle &= |c_0(q')|^2 \sqrt{\pi} e^{\frac{\alpha}{\hbar} q'^2} \delta\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}}(q'' - q')\right) = \\ &= |c_0(q')|^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar}{\alpha}} e^{\frac{\alpha}{\hbar} q'^2} \delta(q'' - q') \end{aligned} \quad (62a)$$

и, значит, для правильной нормировки надо выбрать

$$|c_0(q')| = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi \hbar}} e^{-\frac{\alpha q'^2}{2\hbar}}. \quad (62b)$$

Подставляя это значение в (61.1), получаем окончательное выражение для представителя нормированного собственного вектора оператора координаты в  $n$ -представлении

$$\langle n' | q' \rangle = \frac{(-i)^{n'}}{\sqrt{2^{n'} \cdot n'!}} H_{n'}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q'\right) \left(\frac{\alpha}{\pi \hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha q'^2}{2\hbar}} \cdot e^{i\varphi_{0q}}, \quad (61.1a)$$

где  $\varphi_{0q}$  — фаза нормировочного множителя, остающаяся произвольной согласно (12b).

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы построили (61.1a) как представитель вектора  $|q'\rangle$  в базисе  $\langle n'|$ . Но то же самое выражение будет и представителем совектора  $\langle n'|$  в базисе  $|q'\rangle$  — представителем (нормированного на единицу<sup>1)</sup>) собственного совектора оператора числа частиц в координатном представлении. Наконец, то же выражение есть и матрица

<sup>1)</sup> Действительно, из (62.1):

$$\sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle \langle n' | q' \rangle = \delta(q'' - q')$$

уже автоматически следует соотношение ортонормированности для представителей собственных векторов оператора числа частиц в  $q$ -представлении.

В самом деле, рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq' \langle n' | q' \rangle \langle q' | n'' \rangle = f(n', n''),$$

преобразования от  $n$ - к  $q$ -базису. В том, что мы сразу видим из (61.1а) эти обстоятельства, сказывается чрезвычайное удобство используемых нами обозначений Дирака. ■

**10.5.3.** Совершенно аналогично проводится нормировка собственных векторов оператора импульса, которая приводит нас к результату

$$\langle n' | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n'} \cdot n'!}} H_{n'} \left( \frac{1}{\sqrt{\hbar \alpha}} p' \right) \frac{1}{(\pi \hbar \alpha)^{1/4}} e^{-\frac{p'^2}{2\alpha \hbar}} \cdot e^{i\varphi_{0p}}, \quad (61.2a)$$

где  $\varphi_{0p}$  — опять неопределенная фаза. Подчеркнем, что мы *не обязаны* выбирать фазы в (61.1а) и (61.2а) равными, хотя и *можем* это сделать.

**10.6.  $q$ -представление.** Перейдем теперь в  $q$ -представление.

**10.6.1.** Согласно общим правилам (47), представитель вектора  $|q_0\rangle$  в  $q$ -представлении получится из представителя  $\langle n' | q_0 \rangle$  того же вектора в  $n$ -представлении по формуле

$$\langle q' | q_0 \rangle = \sum_{n'} \langle q' | n' \rangle \langle n' | q_0 \rangle = \delta(q' - q_0), \quad (64)$$

где последнее равенство написано на основании нормировки (62.1). Следовательно, представителем собственного вектора оператора  $q$  в  $q$ -представлении будет диракова  $\delta$ -функция. (Заметим, что то же обозначение  $\langle q' | q_0 \rangle$ , которое имело в (62.1) смысл скалярного произведения бра- и кет-векторов базиса, можно понять и как представитель совектора  $\langle q' |$  в базисе  $|q_0\rangle$  — это не может дать повода к недоразумениям, поскольку все эти величины совпадают.)

где  $f(n', n'')$  пока не более чем обозначение. Тогда

$$\sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle \int dq' \langle n' | q' \rangle \langle q' | n'' \rangle = \sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle f(n', n''),$$

откуда, в силу (62.1),

$$\begin{aligned} \int dq' \delta(q'' - q') \langle q' | n'' \rangle &= \sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle f(n', n''); \\ \langle q'' | n'' \rangle &= \sum_{n' \geq 0} \langle q'' | n' \rangle f(n', n''), \end{aligned}$$

и, поскольку  $n''$  произвольно,

$$f(n', n'') = \delta_{n' n''}.$$

Отсюда вытекает искомое утверждение

$$\int dq' \langle n' | q' \rangle \langle q' | n'' \rangle = \delta_{n' n''}.$$

**10.6.2.** Найдем в том же представлении *представитель оператора*  $q$ . Имеем по общему правилу (48) преобразования от одного базиса к другому,

$$\langle q' | q | q'' \rangle = \sum_{n', n'' \geq 0} \langle q' | n' \rangle \langle n' | q | n'' \rangle \langle n'' | q \rangle = \dots$$

если подставить сюда (58.1) для  $\langle n' | q | n'' \rangle$ ,

$$\begin{aligned} &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} \sum_{n', n''} \langle q' | n' \rangle \left[ \underbrace{\sqrt{n'+1} \delta_{n', n''-1}}_{\substack{\text{здесь фактически} \\ n' \geq 0, n'' \geq 1}} - \underbrace{\sqrt{n'} \delta_{n', n''+1}}_{\substack{\text{а здесь} \\ n' \geq 1, n'' \geq 0}} \right] \langle n'' | q'' \rangle = \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} \left\{ \sum_{n'' \geq 1} \langle q' | n''-1 \rangle \sqrt{n''} \langle n'' | q'' \rangle - \sum_{n'' \geq 0} \langle q' | n'' + \right. \\ &\quad \left. + 1 \rangle \sqrt{n''+1} \langle n'' | q'' \rangle \right\} = \dots \end{aligned}$$

Суммирование в первой сумме можно распространить и на  $n'' = 0$ , так как корень все равно даст нуль. Объединим суммы и подставим значения  $\langle n' | q' \rangle$  из (61.1):

$$\begin{aligned} \dots &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} c_0^*(q') c_0(q'') \sum_{n'' \geq 0} \left( (i)^{n''-1} \frac{H_{n''-1}(\dots') \sqrt{n''}}{\sqrt{2^{n''-1} \cdot (n''-1)!}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i^{n''+1} H_{n''+1}(\dots') \sqrt{n''+1}}{\sqrt{2^{n''+1} \cdot n''! (n''+1)}} \right) \frac{(-i)^{n''}}{\sqrt{2^{n''} n''!}} H_{n''}(\dots'') = \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} \frac{c_0^*(q') c_0(q'')}{\sqrt{2} 2^{n''} \cdot n''!} \sum_{n'' \geq 0} [2n'' H_{n''-1}(\dots') - i^2 H_{n''+1}(\dots')] \times \\ &\quad \times H_{n''}(\dots'') = \dots \quad (65^*) \end{aligned}$$

Но по рекуррентной формуле (60.а)

$$2n'' H_{n''-1}(\xi) + H_{n''+1}(\xi) = 2\xi H_{n''}(\xi), \quad n'' \geq 0,$$

и, следовательно, квадратная скобка в (65\*) равна  $2\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q' H_{n''}(\dots')$ .

Поэтому продолжаем цепочку равенств:

$$\dots = \sqrt{\frac{\hbar}{\alpha}} \frac{c_0^*(q') c_0(q'')}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q' \sum_{n'' \geq 0} \frac{H_{n''}(\dots') H_{n''}(\dots'')}{2^{n''} \cdot n''!} = q' \delta(q' - q''),$$

где последнее равенство установлено на основании условия нормировки (62.2).

Итак, представителем оператора  $q$  в  $q$ -представлении является

$$\langle q' | q | q'' \rangle = q' \delta(q' - q''). \quad (65)$$

Совершенно аналогичная выкладка приведет нас к выражению для представителя оператора импульса в  $p$ -представлении:

$$\langle p' | p | p'' \rangle = p' \delta(p' - p''). \quad (66)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Сами формулы (65) и (66) являются, конечно, тривиальными — их можно было бы сразу написать на основании общего свойства (2) представителей из § 8. Цель подробно проведенной выкладки состояла поэтому в том, чтобы продемонстрировать на этом простом примере, как конкретно производится переход от одного представления к другому (притом от дискретного — к непрерывному). ■

**10.6.3.** Займемся теперь менее тривиальной задачей, именно, получим *представитель собственного вектора  $|p'\rangle$  импульса в  $q$ -представлении*.

Начиная опять с (47) и используя (61), получаем последовательно:

$$\begin{aligned} \langle q' | p' \rangle &= \sum_{n'} \langle q' | n' \rangle \langle n' | p' \rangle = \\ &= c_0^*(q') d_0(p') \sum_{n' \geq 0} \frac{i^{n'}}{2^{n'} \cdot n'!} H_{n'} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q' \right) H_{n'} \left( \frac{p'}{\sqrt{\alpha \hbar}} \right) = c_0^*(q') d_0(p') S_1. \end{aligned}$$

**10.6.3.1.** Прибегая, как и при установлении нормировки, к интегральному представлению (60b), мы снова свернем сумму по  $n'$  в экспоненту:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n' \geq 0} \frac{i^{n'}}{2^{n'} \cdot n'!} H_{n'}(\xi) H_{n'}(\eta) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt du \sum_{n' \geq 0} \frac{(2i)^{n'} (\xi + it)^{n'} (\eta + iu)^{n'}}{n'!} e^{-(t^2 + u^2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt du e^{2i\xi\eta - 2\eta t - 2\xi u - (t^2 + u^2 + 2itu)} \end{aligned}$$

и придем к гауссову интегралу, отличающемуся от (63\*) только лишними множителями  $i$ . Подстановка (63а) приводит квадратичную часть показателя к

$$-(1+i)v^2 - (1-i)w^2,$$

а линейную — к

$$-\sqrt{2} (\xi + \eta) v - \sqrt{2} (\eta - \xi) w,$$

после чего двойной интеграл опять распадается в произведение двух интегралов

$$S_1 = \frac{1}{\pi} e^{2i\xi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\sqrt{2} (\xi+\eta) v - (1-i) v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-\sqrt{2} (\eta-\xi) w - (1-i) w^2},$$

однако, в отличие от вывода (63), теперь оба интеграла сохраняют квадратичную часть показателя.

Для вычисления первого из этих интегралов

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-\sqrt{2} (\xi+\eta) v - (1+i) v^2}$$

делаем подстановку

$$v = \tau + d; \quad d = -\frac{(\xi + \eta)}{\sqrt{2} (1 + i)},$$

которая приводит его к виду

$$I_1 = e^{\frac{(\xi+\eta)^2}{2(1+i)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-(1+i)\tau^2} = e^{\frac{(\xi+\eta)^2}{4} (1-i)} \sqrt{\frac{\pi}{1+i}}.$$

Второй интеграл вычислять нет нужды, так как он получается из первого одновременной заменой  $i \rightarrow -i$ ,  $\xi \rightarrow -\xi$ . Таким образом, получаем для суммы  $S_1$

$$S_1 = \frac{1}{\pi} e^{\left[2i\xi\eta + \frac{(\xi+\eta)^2}{4} (1-i) + \frac{(\xi-\eta)^2}{4} (1+i)\right]} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} e^{i\xi\eta},$$

то есть

$$S_1 = \sum_{n' \geq 0} \frac{(i)^{n'}}{2^{n'} \cdot n'!} H_{n'}(\xi) H_{n'}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} e^{i\xi\eta}.$$

**10.6.3.** Возвращаясь к нашей задаче вычисления координатного представителя собственного вектора импульса, получаем с использованием (61b), (61.2a), что

$$\langle q' | p' \rangle = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\alpha q'^2}{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar\alpha}} e^{-\frac{p'^2}{2\alpha\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\alpha q'^2}{2\hbar} + \frac{p'^2}{2\alpha\hbar}} \cdot e^{i\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q' \cdot \frac{p'}{\sqrt{\alpha\hbar}}} e^{i(\varphi_{0p} - \varphi_{0q})},$$

то есть

$$\langle q' | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i q' p'}{\hbar}} \cdot e^{i(\varphi_{0p} - \varphi_{0q})}, \quad (67)$$

где  $\phi_{0p}$  и  $\phi_{0q}$  — фазовые множители, которые все еще находятся в нашем распоряжении.

Итак, представителями собственных векторов импульса в координатном представлении являются функции (67), т. е. состояния с определенным значением импульса описываются в координатном представлении одномерными плоскими волнами.

**10.6.4.** Последняя выкладка, которую нам еще осталось провести с помощью развитой в этом параграфе техники, — это найти *представитель оператора  $p$  в  $q$ -представлении*. В  $n$ -представлении ((58)) представитель импульса отличается от представителя координаты только тем, что в обоих членах стоит одинаковый знак  $+$  и отсутствует множитель  $i$ .

**10.6.4.1.** Поэтому сперва выкладка пойдет точно так же, как и при выводе формулы (65) для представителя  $q$ , но вместо (65\*) возникнет выражение

$$\begin{aligned} \langle q' | p | q'' \rangle &= \sqrt{\frac{\alpha \hbar}{2}} c_0^*(q') c_0(q'') \times \\ &\times \sum_{n'' \geq 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{i} 2n'' H_{n''-1}(\xi) + i H_{n''+1}(\xi) \right] \frac{H_{n''}(\eta)}{2^{n''} \cdot n''!}. \end{aligned}$$

Воспользоваться рекуррентной формулой для полиномов Эрмита теперь уже не удастся, и придется непосредственно прибегнуть к интегральному представлению (60b). Мы получим тогда для суммы:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ - \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(\xi) H_{n+1}(\eta)}{2^n n!} + \sum_{n'' \geq 0} \frac{H_{n''+1}(\xi) H_{n''}(\eta)}{2^n n!} \right\} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2} \pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt du \sum_{n \geq 0} \frac{2^n (\xi + it)^n (\eta + iu)^n}{n!} 2[(\xi + it) - (\eta + iu)] e^{-t^2 - u^2}, \end{aligned}$$

т. е. получим в этом случае в каждой из сумм по одному «лишнему» множителю  $2(\eta + iu)$  или  $2(\xi + it)$ . Свертывая суммы, найдем

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{2i}{\sqrt{2} \pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dt du (\xi - \eta) e^{2\xi\eta + 2i\eta t + 2i\xi u - (t+u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} dt du (t - u) e^{2\xi\eta + 2i\eta t + 2i\xi u - (t+u)^2} \right]. \end{aligned}$$



Первый интеграл здесь мы уже считали ((63\*)), он пропорционален  $\delta(\xi - \eta)$  и в силу наличия множителя  $(\xi - \eta)$  даст теперь нуль. Второй интеграл сводится подстановкой (63а) к произведению

$$S_2 = \frac{2i^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d(\sqrt{2}w) \cdot (\sqrt{2}w) e^{-i\sqrt{2}w(\xi-\eta)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{2\xi\eta + \sqrt{2}i(\xi+\eta)v - 2v^2},$$

первый множитель которого есть интегральное представление для функции  $\delta'(\xi - \eta)$ , а второй — интеграл  $I_2$ , вычисленный в **10.5.1.1** (мы не вправе, конечно, полагать теперь в выражении для последнего интеграла  $\xi = \eta$ ). Итак,

$$S_2 = -2i\delta'(\xi - \eta) \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\xi\eta - \frac{(\xi-\eta)^2}{4}},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle q' | p | q'' \rangle &= -i\sqrt{\pi\alpha\hbar} c_0^*(q') c_0(q'') \delta'(\xi - \eta) e^{\xi\eta - \frac{(\xi-\eta)^2}{4}} = \\ &= -i\sqrt{\pi\alpha\hbar} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} e^{\xi\eta - \frac{(\xi-\eta)^2}{4}} \delta'(\xi - \eta) e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0q'})} = \\ &= -i\alpha e^{-\frac{3(\xi-\eta)^2}{4}} \delta'(\xi - \eta) e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0q'})} = \frac{\hbar}{i} \frac{\alpha}{\alpha} \delta'(q' - q'') e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0q'})}. \end{aligned}$$

**10.6.4.** Таким образом получаем окончательно

$$\begin{aligned} \langle q' | p | q'' \rangle &= \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'') e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0q'})} = \\ &= \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'') + \hbar \delta(q' - q'') \frac{\partial \varphi_{0q'}}{\partial q'}. \quad (68) \end{aligned}$$

**10.6.4.2. ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Последнюю формулу мы могли бы, уже имея выражение (67), получить другим, более простым способом: сперва выписать представитель (66) оператора импульса в его собственном представлении, а затем перевести его в координатное представление с помощью (67), которая играла бы теперь роль функции преобразования. В самом деле, по общему правилу (48)

$$\begin{aligned} \langle q' | p | q'' \rangle &= \int dp' dp'' \langle q' | p' \rangle \langle p' | p | p'' \rangle \langle p'' | q'' \rangle = \\ &= \int dp' dp'' \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p'q'}{\hbar}} e^{i(\varphi_{0p'} - \varphi_{0q'})} p' \delta(p' - p'') e^{-i\frac{q''p''}{\hbar}} e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0p''})} = \\ &= \frac{e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0q'})}}{2\pi\hbar} \int dp' p' e^{i\frac{p'}{\hbar}(q' - q'')} = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'') e^{i(\varphi_{0q''} - \varphi_{0q'})}. \end{aligned}$$

что, конечно, опять приводит к (68). ■

**10.7. ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Во всех полученных выше формулах сохранились произвольные фазы  $\varphi_{0q}$  и  $\varphi_{0p}$ . Они не должны быть существенными, поскольку векторы сопоставляются состояниям — которые фиксируются результатами измерений — лишь с точностью до этих фазовых множителей, т. е. с точностью до преобразований

$$|q'\rangle \Rightarrow |q'\rangle e^{i\varphi_{0q'}}; \quad |p'\rangle \Rightarrow |p'\rangle e^{i\varphi_{0p'}}. \quad (+)$$

Наши результаты говорят, однако, что такие преобразования (будем для определенности иметь в виду первое из них) изменяют (формула (68)) выражение для представителя оператора импульса в координатном представлении, добавляя к нему второй член  $\delta(q' - q'') \frac{\partial \hbar \varphi_{0q'}}{\partial q'}$ . Это наблюдение можно интерпретировать как изменение самого оператора импульса, претерпевающего преобразование

$$p \rightarrow P = p + \frac{\partial \hbar \varphi_{0q'}}{\partial q'}, \quad (*)$$

где  $\varphi_{0q}$  — произвольная (вещественная) функция оператора координаты  $q$ , и сделать, следовательно, из него тот вывод, что оператор  $p$  определяется при известном  $q$  перестановочными соотношениями (52) *не однозначно*, а лишь с точностью до преобразования (\*), — последний вывод совершенно очевиден, поскольку второй член в (\*) коммутирует с  $q$  и поэтому ничего не вносит в (52). ■

О связи преобразований (+) и (\*) стоит поговорить более подробно.

**10.7.1.** Собственные векторы всякого оператора, скажем оператора координаты  $q$ , определены у нас исключительно уравнением проблемы собственных значений

$$q |q'\rangle = q' |q'\rangle \quad (\alpha)$$

и условием нормировки  $\langle q' | q'' \rangle = \delta(q' - q'')$ . Поэтому, если умножить ( $\alpha$ ) слева на произвольный унитарный оператор  $V$ , коммутирующий с  $q$ ,

$$V: \quad VV^+ = 1; \quad [V, q]_- = 0,$$

то будет

$$q \cdot V |q'\rangle = q' \cdot V |q'\rangle,$$

т. е. векторы

$$|q'\rangle = V |q'\rangle \quad (\beta)$$

смогут на тех же основаниях, что и  $|q'\rangle$ , претендовать на имя собственных векторов  $q$ . В том частном случае, когда  $V = V(q) = e^{i\varphi_{0q}}$  (этот случай обязательно осуществляется для системы с одной степенью свободы, для которой  $q$  сам по себе образует полную систему коммутирующих наблюдаемых), преобразование ( $\beta$ ) и есть преобразование (+).

**10.7.2.** Сделаем теперь очень существенное для понимания структуры математического описания квантовой механики замечание. Под-

вергнем *все* операторы, векторы и совекторы *одновременному* преобразованию

$$|\alpha\rangle \Rightarrow |A\rangle = U^+|a\rangle; \quad \langle b| \Rightarrow \langle B| = \langle b|U; \quad \xi \Rightarrow \Xi = U^+\xi U \quad (\gamma)$$

с помощью произвольного унитарного оператора  $U$ ,  $UU^+ = 1$ . Замечание, которое мы хотели сделать, состоит в том, что преобразование  $(\gamma)$  *не меняет ни одного из чисел*, которые можно построить в нашей математической схеме. Действительно, единственные числа, которые мы умеем строить из векторов, совекторов и операторов — это скалярные произведения (12) или матричные элементы (15), а для них:

$$\langle B|A\rangle = \langle b|UU^+|a\rangle = \langle b|a\rangle;$$

$$\langle B|\Xi|A\rangle = \langle b|UU^+\xi UU^+|a\rangle = \langle b|\xi|a\rangle;$$

Таким образом унитарное преобразование  $(\gamma)$  не меняет никаких проверяемых предсказаний квантовой механики — ведь все такие предсказания могут быть сделаны только в терминах *чисел*. В частности,  $(\gamma)$  не меняет ни одного представителя. Поэтому можно сказать, что унитарный поворот  $(\gamma)$  затрагивает лишь принципиально ненаблюдаемые детали той математической схемы, которую мы привлекли для описания квантовых явлений, и его проведение никогда не влечет никаких наблюдаемых следствий.

**10.7.3.** Используя отмеченное обстоятельство, выполним вслед за преобразованием  $(\beta)$  преобразование  $(\gamma)$ , в котором выберем в качестве унитарного  $U$

$$U = V = e^{i\varphi_{0q}}.$$

Тогда новые векторы будут  $|A\rangle = e^{-i\varphi_{0q}}|a\rangle$  и, в частности, новые собственные векторы оператора координаты:

$$|Q'\rangle = U^+|q'\rangle = U^+V|q'\rangle = |q'\rangle,$$

т. е. выполняемое после преобразования  $(\beta)$  преобразование  $(\gamma)$  возвращает собственные векторы оператора  $q$  к их первоначальному виду, убирая «произвольную фазу»  $e^{i\varphi_{0q}}$ .

**10.7.3.1.** Однако  $(\gamma)$  преобразует не только векторы, но и операторы, переводя любой *не коммутирующий с координатой* оператор  $\xi$  в

$$\Xi = e^{-i\varphi_{0q}}\xi e^{i\varphi_{0q}} \quad 1).$$

---

<sup>1)</sup> Исключение составляет только сам оператор  $q$  (или коммутирующие с ним операторы), для которого

$$Q = e^{-i\varphi_{0q}}q e^{i\varphi_{0q}} = q,$$

т. е. последовательное выполнение преобразований  $(\beta)$  и  $(\gamma)$  не меняет ни оператора  $q$ , ни его собственных векторов.

В частности, оператор импульса

$$\begin{aligned}
 p \Rightarrow P &= e^{-i\Phi_{0q}} p e^{i\Phi_{0q}} = \\
 &= \int dq' dq'' dq''' dq^{IV} |q'\rangle \langle q' | e^{-i\Phi_{0q}} |q''\rangle \langle q'' | p | q'''\rangle \langle q''' | e^{i\Phi_{0q}} |q^{IV}\rangle \langle q^{IV} | = \\
 &= \int dq' dq'' dq''' dq^{IV} |q'\rangle \langle q' | e^{-i\Phi_{0q'}} \delta(q' - q'') \times \\
 &\times \frac{\hbar}{i} \delta'(q'' - q''') \cdot e^{i\Phi_{0q'''}} \delta(q''' - q^{IV}) \langle q^{IV} | = \\
 &= \int dq' dq^{IV} |q'\rangle \langle q' | e^{-i\Phi_{0q'}} \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q^{IV}) e^{i\Phi_{0q^{IV}}} \langle q^{IV} |.
 \end{aligned}$$

Но

$$e^{-i\Phi_{0q'}} \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q^{IV}) e^{i\Phi_{0q^{IV}}} = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q^{IV}) + \hbar \frac{\partial \Phi_{0q^{IV}}}{\partial q^{IV}} \delta(q' - q^{IV}),$$

где первый член есть представитель  $\langle q' | p | q^{IV} \rangle$  оператора  $p$ , а второй — представитель  $\langle q' | \hbar \frac{\partial \Phi_{0q}}{\partial q} | q^{IV} \rangle$  оператора  $\hbar \frac{\partial \Phi_{0q}}{\partial q}$ .

**10.7.3.2.** Итак, последовательное проведение преобразований (β) и (γ) оставляет собственные векторы  $|q'\rangle$  оператора координаты без произвольной фазы, но зато переводит импульс  $p$  в

$$P = p + \hbar \frac{\partial \Phi_{0q}}{\partial q},$$

т.е. осуществляет преобразование (\*).

В более общей форме результат проведенного рассуждения можно резюмировать как утверждение:

Умножение собственных векторов какого-либо оператора (или набора коммутирующих операторов)  $\xi$  на унимодулярный (зависящий от собственных значений!) множитель можно (с помощью физически ненаблюдаемого  $U$ -преобразования) реинтерпретировать как унитарный поворот *всех* операторов, кроме коммутирующих с  $\xi$ , и всех векторов (и совекторов), кроме собственных векторов (и совекторов)  $|\xi'\rangle$ .

**10.7.4.** Таким образом, мы видим, что в квантовой теории принятые нами соотношения между состояниями и векторами допускают преобразования типа (+) (или (\*)), приводящие к появлению в таких формулах, как (67) или (68), дополнительных членов. Такие преобразования суть некоторые преобразования симметрии; их смысл становится ясным, если заметить, что (\*) в точности аналогично преобразованию импульсов

$$p_i \rightarrow P_i + \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i} \quad (**)$$

в классической механике, индуцируемому добавлением к функции Лагранжа полной производной

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt} \Phi(q).$$

В первой части мы выяснили, что такое преобразование есть каноническое преобразование с производящей функцией

$$\varphi(q, P) = \sum qP - \Phi(q).$$

**10.7.4.1.** Во второй части (II.9) мы уже указывали, что преобразования (\*\*) тесно связаны с введением взаимодействия системы с электромагнитным полем и обеспечивают инвариантность уравнений при изменении калибровки последнего. Действительно, вспоминая выражение для импульса частицы во внешнем электромагнитном поле

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A},$$

видим, что при градиентном преобразовании электромагнитного поля

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \frac{d\lambda}{d\mathbf{r}}$$

импульс частицы в поле получает как раз добавку  $\frac{e}{c} \frac{d\lambda}{d\mathbf{r}}$  типа (\*\*). Поэтому, чтобы импульс частицы не менялся при градиентном преобразовании, надо одновременно с изменением калибровки электромагнитного поля делать и преобразование

$$|q'\rangle \rightarrow |q'\rangle e^{-i\lambda}$$

типа (+).

По этой причине преобразования (+) называют **калибровочными преобразованиями первого рода**.

**10.7.4.2.** Итак, с помощью подходящего калибровочного преобразования первого рода полученные нами выражения (68) и (67) для представителей в  $q$ -представлении оператора импульса и его собственных векторов могут быть приведены к простому виду

$$\langle q' | p' \rangle = \frac{e^{i \frac{q' p'}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}; \quad (67a)$$

$$\langle q' | p | q'' \rangle = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q''). \quad (68a)$$

**10.8.** Сделаем еще несколько замечаний относительно распространения полученных результатов на системы со *многими* степенями свободы. Если все эти степени свободы кинематически независимы,

т.е. кроме перестановочных соотношений (51.2) не существует никаких дополнительных условий, ограничивающих возможные наборы собственных значений координат и импульсов, то, используя коммутативность (51.2) переменных, относящихся к разным степеням свободы, мы можем прибегнуть к следующей процедуре:

**10.8.1.** Рассмотрим сперва по отдельности каждую пару канонически сопряженных переменных  $q_i$  и  $p_i$ , образуем из них с помощью (53) отвечающие данной степени свободы операторы рождения и уничтожения  $a_i^+$  и  $a_i$  и, повторяя рассуждения начала параграфа, построим ортонормированный базис:

$$|n_i\rangle = \frac{1}{n_i!} (a_i^+)^{n_i} |0\rangle_i; \quad \langle n_i| = \langle 0|_i (a_i)^{n_i} \frac{1}{n_i!}. \quad (69)$$

Этот базис будет растягивать векторное пространство  $\{|A\rangle_i\}$ , в котором действуют относящиеся к  $i$ -й степени свободы операторы  $a_i^+$ ,  $a_i$ ,  $q_i$ , ...

**10.8.1.1.** Введем теперь **прямое** (говорят также внешнее или тензорное) **произведение** векторов, взятых по одному из каждого такого пространства,

$$|A\rangle_1 |A\rangle_2 \dots |A\rangle_N$$

( $N$  — число степеней свободы), такое что

$$\begin{aligned} |A\rangle_1 \dots \{c_1 |A\rangle_i + c_2 |B\rangle_i\} \dots |A\rangle_N = \\ = c_1 |A\rangle_1 \dots |A\rangle_i \dots |A\rangle_N \dots + c_2 |A\rangle_1 \dots |B\rangle_i \dots |A\rangle_N \end{aligned} \quad (70)$$

для любого  $1 \leq i \leq N$ .

Тогда можно рассматривать такие произведения

$$|A\rangle_1 \dots |A\rangle_N = |A_1, \dots, A_N\rangle \quad (71)$$

как элементы некоторого нового векторного пространства, образуемого как линейная оболочка этих произведений, которое называется прямым произведением  $\{|A\rangle_1\} \otimes \dots \otimes \{|A\rangle_N\}$  пространств  $\{|A\rangle_1\}$ ,  $\{|A\rangle_2\}$ , ...  $\dots$ ,  $\{|A\rangle_N\}$ . Конечно, не всякий элемент  $\{|A\rangle_1\} \otimes \dots \otimes \{|A\rangle_N\}$  может быть представлен в форме  $|A\rangle_1 |A\rangle_2 \dots |A\rangle_N$ , но, вообще говоря, лишь в виде линейной комбинации некоторого (возможно — бесконечного) числа таких специальных форм (полиад)<sup>1)</sup>. Скалярное произведение

<sup>1)</sup> Мы фактически уже сталкивались с примером произведений такого типа, когда рассматривали специальный линейный оператор, образованный произведением кет- и бра-векторов, с кет-вектором слева ( $|A\rangle \langle B|$ ), и даже представляли любую наблюдаемую в форме линейных комбинаций таких произведений

$$\xi = \sum P_{\xi'\xi} = \sum |\xi'\rangle \xi' \langle \xi|.$$

Совокупность линейных операторов можно рассматривать как линейное пространство, образованное прямым произведением пространств кет- и бра-векторов.

в «большом» пространстве  $\{|A\rangle_1\} \otimes \dots \otimes \{|A\rangle_N\}$  определяется сперва для пары векторов и совекторов специального вида (71) как

$$\langle B_1, \dots, B_N | A_1, \dots, A_N \rangle = \langle B_1 |_1 | A_1 \rangle_1 \dots \langle B_N |_N | A_N \rangle_N, \quad (71a)$$

а затем распространяется на произвольные векторы по свойству линейности по каждому аргументу.

**10.8.1.2.** Полную ортонормированную систему в «большом пространстве» можно получить, рассматривая в нем совокупность векторов, являющихся прямыми произведениями всевозможных комбинаций базисных векторов каждого пространства, относящегося к  $i$ -й степени свободы:

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_N\rangle. \quad (72)$$

**10.8.1.3.** Чтобы построить операторы в «большом пространстве», переведем сперва в него операторы  $\xi_i$ , действующие в  $i$ -м «малом пространстве», полагая по определению, что таким операторам сопоставляются в «большом пространстве» операторы

$$\Xi_i : \quad \Xi_i |A_1, \dots, A_N\rangle = |A\rangle_1 \dots \xi_i |A\rangle_i \dots |A\rangle_N, \quad (73)$$

что можно записать символически как

$$\Xi_i = I \otimes I \otimes \dots \otimes \underset{\text{на } i\text{-м месте}}{\xi_i} \otimes \dots \otimes I. \quad (74)$$

Суммы и произведения таких операторов образуют произвольные операторы в  $\prod_{\otimes} \{|A\rangle\}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** *Физически* между операторами  $\xi_i$  и  $\Xi_i$ , между «большими» и «малыми» операторами, нет никакой разницы — и тот и другой служат представителем одной и той же физической величины. Поэтому в физических книгах обычно обозначают их одной и той же буквой и ничего не говорят о переходе от одного к другому.

*Математически* же это конечно совсем разные операторы — они действуют в разных пространствах.

Особенно ярко эта ситуация проявляется, если рассматривать для каждой степени свободы однородные физические величины и при том такие, которые из физических соображений должны быть аддитивны. Так, например, исходя из «чисел частиц»  $n_i$ , относящихся к отдельным степеням свободы, можно построить физическую величину, равную их сумме, «полное число частиц» (К сожалению, на изложенном до сих пор материале трудно построить более наглядный пример.). Полный способ рассуждения должен был бы гласить, что мы образуем сперва из операторов  $\hat{n}_i = a_i^+ a_i$ , действующих в частных пространствах, с помощью (74) соответствующие операторы  $\hat{N}_i$  в большом пространстве:

$$\hat{N}_1 = \hat{n}_1 \otimes I \otimes \dots \otimes I; \quad \hat{N}_2 = I \otimes \hat{n}_2 \otimes I \otimes \dots \otimes I; \quad \dots; \quad (75)$$

$$\hat{N}_N = I \otimes I \otimes \dots \otimes \hat{n}_N,$$

и после этого для образования оператора полного числа частиц складываем уже эти, действующие все в одном и том же пространстве, конструкции:

$$\hat{N} = \hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \dots + \hat{N}_N. \quad (76)$$

В физике же, однако, не различая «малых» и «больших» операторов, пишут обыкновенно вместо (76) просто

$$\hat{N} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \dots + \hat{n}_N. \quad \blacksquare \quad (76a)$$

**10.8.2.** Теперь уже ясно, как распространяются результаты этого параграфа на случай  $N$  степеней свободы. Прямое произведение собственных векторов операторов каждой координаты (или импульса) в своем «малом» пространстве будет общим собственным вектором «больших» операторов всех координат в «большом» пространстве. Его представителем в базисе (72) будет обыкновенное произведение одномерных представителей (61.1a):

$$\begin{aligned} \langle n_1, \dots, n_N | q'_1, \dots, q'_N \rangle &= \langle n_1 | q'_1 \rangle \dots \langle n_N | q'_N \rangle = \\ &= \frac{(-i)^{\sum n_i}}{\sqrt{2^{\sum n_i} n_1! \dots n_N!}} \left( \frac{\alpha}{\pi \hbar} \right)^{N/4} e^{-\frac{\alpha}{2\hbar} \sum_i q_i'^2} H_{n_1} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q'_1 \right) \dots H_{n_N} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} q'_N \right). \end{aligned} \quad (77)$$

EW-ы  $q'_i$  каждой координаты пробегают непрерывную область значений  $-\infty < q'_i < +\infty$ . Совокупность этих EW-ов можно рассматривать как координаты в некотором конечномерном ( $N$ -мерном) вещественном пространстве.

**10.8.2.1.** Это пространство называется **конфигурационным пространством** системы. Для *одной* материальной точки конфигурационное пространство совпадает с обычным трехмерным физическим пространством, с которым мы имели дело в классической теории. Однако во всех остальных случаях это не так; например, для системы  $n$  материальных точек конфигурационное пространство имеет размерность  $N = 3n$ . Аналогично напишется представитель общего собственного вектора операторов импульса.

**10.8.2.2.** Функции (77) могут служить для перехода к представлению, в котором все координаты диагональны. В этом представлении представителем того же вектора будет произведение  $\delta$ -функций (64), а представителем оператора  $j$ -й координаты — произведение  $\delta$ -функций, умноженное на EW этой координаты:

$$\langle q'_1, \dots, q'_N | q_j | q''_1 \dots q''_N \rangle = q'_j \delta(q'_1 - q''_1) \dots \delta(q'_N - q''_N) \equiv q'_j \delta(q'_i - q''_i)^{-1}. \quad (65a)$$



Совершенно таким же будет и выражение для представителя  $i$ -го импульса в импульсном представлении.

Весьма часто (особенно — когда наши  $N$  обобщенных координат суть 3 декартовы координаты одной материальной точки) используется представитель в координатном представлении общего собственного вектора импульсов. Мы выпишем его для этого специального случая <sup>1)</sup>:

$$\langle \mathbf{q}' | \mathbf{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}'}. \quad (78)$$

Наконец, представителем  $j$ -го импульса в координатном представлении будет производная произведения  $\delta$ -функций по  $j$ -й разности EW-ов координат:

$$\langle q'_1, \dots, q'_N | p_j | q''_1, \dots, q''_N \rangle = \frac{\hbar}{i} \delta'_j (q'_i - q''_i). \quad (68b)$$

(Мы выбрали во всех предыдущих формулах произвольные фазы равными нулю.)

**10.4.1. ДОПОЛНЕНИЕ:** Введем для фигурирующих в (59d) коэффициентов  $e_n(x)$  производящую функцию

$$\Phi(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} e_n(x),$$

так что

$$e_n(x) = \left( -\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^n \Phi(\lambda, x) |_{\lambda=0}.$$

Вычислим  $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$ , заменяя  $e_n(x)$  с помощью (59d):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\lambda, x)}{\partial \lambda} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} [x \cdot e_{n-1}(x) - (n-1) \cdot e_{n-2}(x)] = \\ &= -x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} e_{n-1}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\lambda)(-\lambda)^{n-2}}{(n-2)!} e_{n-2}(x) = \\ &= -(x + \lambda) \Phi(\lambda, x) \end{aligned}$$

Таким образом производящая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, x)}{\partial \lambda} = -(\lambda + x) \Phi(\lambda, x)$$

<sup>1)</sup> Мы привели здесь обычный способ сокращенной записи, в котором под первым множителем понимается один EW, а под вторым — произведение  $N$   $\delta$ -функций.

<sup>1)</sup> В общем случае таким представителем будет монохроматическая плоская волна в  $N$ -мерном конфигурационном пространстве.

с разделяющимися переменными, интегрирование которого дает:

$$\ln \Phi(\lambda, x) = -\left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda x\right) + \ln \varphi(x), \quad \text{т. е.} \quad \Phi(\lambda, x) = e^{-\left(\frac{\lambda^2}{2} + \lambda x\right)} \varphi(x),$$

где «постоянная интегрирования»  $\varphi(x)$  есть

$$\varphi(x) = \Phi(0, x) = e_0(x).$$

Поэтому можно написать

$$e_n(x) = \varepsilon_n(x) \cdot e_0(x),$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(\lambda^2 + 2\lambda x)} \Big|_{\lambda=0} = e^{\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{2}} \Big|_{\lambda=0} = \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

и, тем самым,

$$e_n(x) = e_0(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Полиномы  $\varepsilon_n(x)$  отличаются от полиномов Эрмита в общепринятой нормировке (60) только лишней половиной в производящей функции и приводятся к ним очевидной подстановкой  $x = \sqrt{2} \xi$ , после чего получается

$$e_n(x) = e_0(x) \frac{1}{(\sqrt{2})^n} e^{\xi^2} \cdot \left(-\frac{d}{d\xi}\right)^n \cdot e^{-\xi^2} = \frac{1}{(\sqrt{n})^n} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot e_0(x)$$

— как раз та формула, которая используется в тексте.

Выведем еще интегральное представление (60b), которое потребовалось нам в **10.5.1**. Перейдем в (60) от дифференцирования по  $\xi$  снова к дифференцированию по  $\lambda$ :

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} \cdot \left(-\frac{d}{d\xi}\right)^n \cdot e^{-\xi^2} = e^{\xi^2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^n \cdot e^{-(\xi+\lambda)^2} \Big|_{\lambda=0}.$$

Но

$$e^{-(\xi+\lambda)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2 - (\xi+\lambda)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty - i\lambda}^{\infty + i\lambda} dt e^{-t^2 - 2it\lambda + \lambda^2 - \xi^2 - 2\xi\lambda - \lambda^2} = \dots$$

где мы ввели новую переменную интегрирования, положив  $\tau = t + i\lambda$ . От интегрирования от  $-\infty - i\lambda$  до  $\infty - i\lambda$  можно, сдвинув контур, перейти к интегрированию от  $-\infty$  до  $\infty$ , т. е. продолжить цепочку

равенств:

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2 - \xi^2 - 2\lambda(\xi + it)} = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2 - 2\lambda(\xi + it)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H_n(\xi) &= \lim_{\lambda=0} \left( -\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2 - 2\lambda(\xi + it)} = \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \lim_{\lambda=0} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\xi + it)^n e^{-t^2 - 2\lambda(\xi + it)}, \end{aligned}$$

то есть

$$H_n(\xi) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot (\xi + it)^n \cdot e^{-t^2} \quad (60b)$$

— мы приходим к желательному интегральному представлению.

## 11. Соотношение неопределенностей Гайзенберга

**11.1.1.** Рассмотрим некоторую квантовую систему, находящуюся в произвольном состоянии, описываемом вектором  $|A\rangle$ , который мы будем считать нормированным,

$$\| |A\rangle \| = 1,$$

и зададимся целью узнать, какие ограничения накладывают условия квантования (52) на возможные результаты измерений координаты  $q$  и сопряженного ей импульса  $p$  (это может быть или единственная координата одномерной системы, или одна из координат системы со многими степенями свободы — все равно).

Мы уже знаем, что сопряженные координата и импульс не могут иметь одновременно *точных* значений, поэтому речь пойдет о *средних* значениях.

На средние значения самих величин  $q$  и  $p$  условия квантования не налагают никаких ограничений. Поэтому для удобства мы будем сперва считать, что в рассматриваемом состоянии средние значения координаты и импульса равны нулю:

$$\bar{q} = \langle A | q | A \rangle = 0; \quad \bar{p} = \langle A | p | A \rangle = 0.$$

Какова может быть наименьшая неопределенность этих значений, т.е. как велик будет разброс при многократных измерениях? Эту неопределенность удобно характеризовать средними квадратичными отклонениями

$$(\Delta q)^2 = \overline{(\Delta q)^2} = \overline{(q - \bar{q})^2} = \overline{q^2} - 2q\bar{q} + \bar{q}^2 = \overline{q^2}$$

в силу предположения  $\bar{q} = 0$ , и такой же величиной для  $p$ .

Построим вектор

$$|B\rangle = a^- |A\rangle = \frac{p - i\alpha q}{\sqrt{2\alpha\hbar}} |A\rangle$$

и рассмотрим его норму:

$$\begin{aligned} 0 \leq \| |B\rangle \|^2 &= \langle A | \frac{p + i\alpha q}{\sqrt{2\alpha\hbar}} \frac{p - i\alpha q}{\sqrt{2\alpha\hbar}} | A \rangle = \\ &= \frac{1}{2\alpha\hbar} \{ \langle A | p^2 | A \rangle - i\alpha \langle A | pq - qp | A \rangle + \alpha^2 \langle A | q^2 | A \rangle \}. \end{aligned}$$

Таким образом для неотрицательности нормы  $|B\rangle$  должно выполняться неравенство

$$\alpha^2 (\Delta q)^2 - \hbar\alpha + (\Delta p)^2 \geq 0$$

при любых значениях  $\alpha > 0$ . Условием этого будет неположительность дискриминанта:

$$\hbar^2 - 4(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 \leq 0,$$

или

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (79)$$

Это условие и есть знаменитое **соотношение неопределенностей Гейзенберга**. Оно утверждает, как мы видим, что произведение неопределенностей в значениях координаты и импульса (т.е. по существу в значениях любой пары канонически сопряженных переменных) может быть только больше — или, в крайнем случае, равно — половине постоянной Планка.

**11.1.2.** Знак равенства достигается в (79), как легко сообразить только если (для некоторого значения  $\alpha$ )

$$\| |B\rangle \| = 0, \quad \text{т.е.} \quad |B\rangle = 0.$$

Но это значит, что  $|A\rangle$  есть вектор  $|0\rangle$  (для того же значения параметра  $\alpha$ ), который мы назвали выше вакуумом (в  $n$ -представлении). В координатном представлении его представителем будет

$$\langle q' | 0 \rangle = c_0(q') = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\alpha q'^2}{2\hbar}} \quad (\text{формула (62b)}),$$

а в импульсном

$$\langle p' | 0 \rangle = d_0(p') = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\alpha\hbar}} e^{-\frac{p'^2}{2\alpha\hbar}} \quad (\text{согласно (61.2a)}).$$

Таким образом оказывается, что есть целое семейство «состояний наименьшей неопределенности», зависящее от одного пара-

метра  $\alpha$ , в зависимости от значений которого мы получаем, как легко видеть,

$$\Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}}; \quad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar\alpha}{2}}, \quad \text{причем для всех } \alpha: \Delta q \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Поскольку переход от координатного представления к импульсному есть в силу формул (67), (78) просто преобразование Фурье, то можно заметить, что «состояния наименьшей неопределенности» отличаются той особенностью, что форма их представителей не меняется при преобразовании Фурье. Иными словами, эти состояния симметричны относительно замены координат на импульсы. ■

**11.2.** Итак, мы выяснили, что состояния  $|\tilde{A}\rangle$ ,  $\langle \tilde{A} | \tilde{A} \rangle = 1$ , обладающие свойствами:

$$\bar{q}_{|\tilde{A}\rangle} \equiv \langle \tilde{A} | q | \tilde{A} \rangle = 0; \quad \Delta q \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}; \quad \bar{p}_{|\tilde{A}\rangle} \equiv \langle \tilde{A} | p | \tilde{A} \rangle = 0;$$

$$\Delta q = \sqrt{\overline{\Delta q^2}}; \quad \Delta p = \sqrt{\overline{\Delta p^2}};$$

$$\overline{\Delta q^2} = \langle \tilde{A} | (q - \bar{q})^2 | \tilde{A} \rangle; \quad \overline{\Delta p^2} = \langle \tilde{A} | (p - \bar{p})^2 | \tilde{A} \rangle,$$

суть состояния вакуума,

$$|\tilde{A}\rangle = |0\rangle, \quad \text{по отношению к} \quad a = \frac{p - i\alpha q}{\sqrt{2\alpha\hbar}}$$

для какого-либо одного любого  $\alpha > 0$ .

Зададимся теперь вопросом, как построить аналогичные состояния минимальной неопределенности, несущие не нулевые, а некоторые заданные конечные средние значения координаты и импульса, т.е. состояния  $|A\rangle$  со свойствами:

$$\bar{q}_{|A\rangle} = \bar{q}; \quad \Delta p \cdot \Delta q = \frac{\hbar}{2}; \quad \bar{p}_{|A\rangle} = \bar{p},$$

где  $\bar{p}$  и  $\bar{q}$  — заданные числа.

**11.2.1.** Того ради заметим, что из перестановочных соотношений (52) следует, что

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{ap}{\hbar}} q e^{i\frac{ap}{\hbar}} &= e^{-i\frac{ap}{\hbar}} e^{i\frac{ap}{\hbar}} (-a + q) = (q - a); \\ e^{-i\frac{ap}{\hbar}} p e^{i\frac{ap}{\hbar}} &= p; \\ e^{i\frac{bq}{\hbar}} q e^{-i\frac{bq}{\hbar}} &= q; \\ e^{i\frac{bq}{\hbar}} p e^{-i\frac{bq}{\hbar}} &= (p - b). \end{aligned}$$

Поэтому

$$e^{-i\frac{ap}{\hbar}} e^{i\frac{bq}{\hbar}} q e^{-i\frac{bq}{\hbar}} e^{i\frac{ap}{\hbar}} = U_1 q U_1^{-1} = (q - a); \quad U_1 p U_1^{-1} = (p - b), \quad (1)$$

а равно также и

$$e^{i\frac{bq}{\hbar}} e^{-i\frac{ap}{\hbar}} q e^{i\frac{ap}{\hbar}} e^{-i\frac{bq}{\hbar}} = U_2 q U_2^{-1} = (q - a); \quad U_2 p U_2^{-1} = (p - b). \quad (2)$$

**11.3.** Чтобы понять, что две выписанные группы формул взаимно согласованы, займемся подробнее экспонентой от некоммутирующих операторов, скажем  $\xi$  и  $\eta$ . Если бы  $\xi$  и  $\eta$  коммутировали, то для них, как и для чисел, было бы

$$e^{\xi+\eta} = e^{\xi} e^{\eta} = e^{\eta} e^{\xi}, \quad \text{если} \quad [\xi, \eta]_- = 0.$$

В общем случае при  $[\xi, \eta] \neq 0$  простых соотношений между  $e^{\xi+\eta}$ ,  $e^{\xi}$  и  $e^{\eta}$  не получается; если, однако, коммутатор  $[\xi, \eta]$  хоть и отличен от нуля, но есть  $c$ -число (точнее, если он коммутирует как с  $\xi$ , так и с  $\eta$ ), то можно получить достаточно обобщимые формулы.

Итак, рассмотрим экспоненту

$$e^{\xi+\eta} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (\xi + \eta)^n; \quad [\xi, \eta]_- = c; \quad [\xi, c]_- = [\eta, c]_- = 0,$$

определением которой служит приведенное разложение в ряд. Для однозначности записи такого разложения нам, как и в **10.2.2** надо избрать какой-либо порядок операторов  $\xi$  и  $\eta$  в качестве нормального. Будем считать нормальным (и обозначать тремя точками) такой порядок, когда все  $\eta$  стоят слева от всех  $\xi$ , т.е. порядок  $\eta^{v_1} \xi^{v_2}$ . При таком соглашении обычные произведения операторов  $\xi$  и  $\eta$  можно будет, как и в **10.2.2**, разложить по нормальным, в частности произведения пар операторов будут суммами нормального произведения и  $c$ -числа:

$$\begin{aligned} \xi\eta &= \eta\xi + c = \dot{\xi}\eta + c; & \xi\xi &= \dot{\xi}\xi + 0; \\ \eta\xi &= \dot{\eta}\xi + 0; & \eta\eta &= \dot{\eta}\eta + 0. \end{aligned}$$

Эти числа называют *свертками* соответствующей пары операторов и записывают:

$$\underline{\xi\eta} = c; \quad \underline{\eta\xi} = 0; \quad \underline{\xi\xi} = 0; \quad \underline{\eta\eta} = 0.$$

С помощью понятия свертки произведение любой пары линейных в  $\xi$  и  $\eta$  операторов  $A$  и  $B$  записывается единообразно как

$$AB = \dot{AB} + \underline{AB},$$

где только свертки  $\underline{AB}$  — свои для каждой пары  $A, B$ . В частности,

$$(\xi + \eta)(\xi + \eta) = c.$$

Для разложения по нормальным произведениям обычного произведения более чем двух линейных в  $\xi$  и  $\eta$  операторов  $A_1, \dots, A_n$  имеет место

ТЕОРЕМА ВИКА:

$$\begin{aligned} A_1, \dots, A_n = & :A_1 \dots A_n: + \sum \underline{A_{i_1} A_{j_1}} :A_1 \dots A_n: + \\ & + \sum \underline{A_{i_1} A_{j_1}} \underline{A_{i_2} A_{j_2}} :A_1 \dots A_n: + \dots, \end{aligned}$$

без  $i_1, j_1$       без  $i_1, j_1, i_2, j_2$

где суммирование в правой части выполняется по всем возможным комбинациям всех возможных чисел свертки, причем каждая комбинация свертки берется ровно один раз.

Легко видеть, что в силу теоремы Вика

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)^n = & :(\xi + \eta)^n: + \frac{c}{1!} \frac{n(n-1)}{2} :(\xi + \eta)^{n-2}: + \\ & + \frac{c^2}{2!} \frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)(n-3)}{2} :(\xi + \eta)^{n-4}: + \\ & + \frac{c^3}{3!} \frac{n!}{(n-6)!} \frac{1}{2^3} :(\xi + \eta)^{n-6}: + \dots = \\ & = \sum_{0 \leq s \leq \frac{n}{2}} \frac{c^s}{s! 2^s} \frac{n!}{(n-2s)!} :(\xi + \eta)^{n-2s}:. \end{aligned}$$

Действительно,  $\frac{n(n-1)}{2}$  есть число возможных выборов одной пары (с безразличным порядком) из  $n$  элементов,  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  — число возможных выборов второй пары из  $(n-2)$  оставшихся и т. д.; множитель же  $\frac{1}{s!}$  возникает из-за того, что каждая группа из  $s$  свертки появляется в нашем подсчете в  $s!$  различных несущественных порядках свертки внутри группы.

Применяя последнюю формулу к разложению экспоненты  $e^{\xi+\eta}$ , получаем

$$\begin{aligned} e^{\xi+\eta} = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{0 \leq s \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{s!} \left(\frac{c}{2}\right)^s \frac{n!}{(n-2s)!} :(\xi + \eta)^{n-2s}: = \\ & = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^s}{s!} \sum_{n-2s=0}^{\infty} \frac{:(\xi + \eta)^{n-2s}:}{(n-2s)!} = e^{\frac{c}{2}} :e^{\xi+\eta}:. \end{aligned}$$

Итак,

$$e^{\xi+\eta} = e^{\frac{c}{2}} : e^{\xi+\eta} : = e^{\frac{c}{2}} : e^{\xi} e^{\eta} : = e^{\eta} e^{\xi} e^{\frac{c}{2}},$$

или

$$e^{\eta} e^{\xi} = e^{\xi+\eta} e^{-\frac{[\xi, \eta]}{2}}$$

и, заменой  $\xi \rightleftharpoons \eta$ ,

$$e^{\xi} e^{\eta} = e^{\xi+\eta} e^{+\frac{[\xi, \eta]}{2}}$$

**11.2.2.** Возвращаясь к нашим формулам (1) и (2), видим, что в первой из них преобразование  $q$  и  $p$  проводится с помощью оператора

$$U_1 = e^{-i \frac{ap}{\hbar}} e^{i \frac{bq}{\hbar}} = e^{\frac{i}{\hbar} (-ap+bq)} e^{\frac{ab}{2\hbar^2} (-i\hbar)} = U e^{-i \frac{ab}{2\hbar}},$$

а во второй — с помощью оператора

$$U_2 = e^{i \frac{bq}{\hbar}} e^{-i \frac{ap}{\hbar}} = e^{\frac{i}{\hbar} (-ap+bq)} e^{\frac{ab}{2\hbar^2} (i\hbar)} = U e^{+i \frac{ab}{2\hbar}},$$

отличающегося от первого лишь численным (и унимодулярным) множителем  $e^{\pm i \frac{ab}{2\hbar}}$ , исчезающим из всех комбинаций  $ULU^{-1}$  с любым  $L$ .

**11.4.1.** Итак, в рассматриваемом состоянии  $|A\rangle$ ,  $\langle A | A \rangle = 1$ :

$$\langle A | UqU^{-1} | A \rangle = \langle A | q - a | A \rangle = \bar{q}_{|A\rangle} - a;$$

$$\langle A | UpU^{-1} | A \rangle = \langle A | p - b | A \rangle = \bar{p}_{|A\rangle} - b,$$

причем под  $U$  можно понимать любой из унитарных операторов  $U$ ,  $U_1$  или  $U_2$ . Поэтому, если выбрать теперь постоянные

$$a = \bar{q}_{|A\rangle}, \quad b = \bar{p}_{|A\rangle},$$

то будет

$$\langle A | UqU^{-1} | A \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle A | UpU^{-1} | A \rangle = 0.$$

Те же равенства можно прочесть и иначе, в форме утверждения, что в состоянии

$$|\tilde{A}\rangle = U^{-1} |A\rangle$$

средние значения координаты и импульса  $\bar{q}_{|\tilde{A}\rangle}$  и  $\bar{p}_{|\tilde{A}\rangle}$ , равны нулю.

Но для такого состояния из **11.1.2** мы уже знаем, что требуется, чтобы неравенство соотношения неопределенностей превратилось бы в нем в равенство — для этого необходимо и достаточно, чтобы  $|\tilde{A}\rangle$  было вакуумом для некоторого  $\alpha$ ,

$$|\tilde{A}\rangle = |0\rangle_{\alpha}.$$



Соответствующее состояние  $|A\rangle$  есть тогда

$$|A\rangle = U|0\rangle_\alpha.$$

**11.4.2.** Найдем  $\overline{\Delta q^2}$  в состоянии  $|A\rangle$ .

Поскольку  $\overline{\Delta q^2} = q^2 - (\bar{q})^2$ , то мы видим, что

$$\overline{\Delta q^2}_{|A\rangle} = \langle A|q^2|A\rangle - (\bar{q}_{|A\rangle})^2 = \langle 0|U^{-1}q^2U|0\rangle - (\bar{q}_{|A\rangle})^2.$$

Но  $U^{-1}qU = q + a = q + \bar{q}_{|A\rangle}$ , а

$$U^{-1}q^2U = U^{-1}qU \cdot U^{-1}qU = (q + \bar{q}_{|A\rangle})^2 = q^2 + 2q\bar{q}_{|A\rangle} + (\bar{q}_{|A\rangle})^2.$$

Поэтому средний квадрат неопределенности значения координаты в состоянии  $|A\rangle$  есть

$$\begin{aligned}\overline{\Delta q^2}_{|A\rangle} &= \langle 0|q^2 + 2q\bar{q}_{|A\rangle} + (\bar{q}_{|A\rangle})^2|0\rangle - (\bar{q}_{|A\rangle})^2 = \\ &= \overline{q^2}_{|0\rangle} + (\bar{q}_{|A\rangle})^2 - (\bar{q}_{|A\rangle})^2.\end{aligned}$$

Таким образом

$$\overline{\Delta q^2}_{|A\rangle} = \overline{\Delta q^2}_{|0\rangle} \quad \text{и} \quad \Delta q_{|A\rangle} = \Delta q_{|0\rangle}$$

— неопределенность значения координаты в состоянии  $|A\rangle$  та же, что и в состоянии  $|0\rangle$ .

**11.4.3.** Вычисление неопределенности значения импульса пристает совершенно так же, и, значит, — поскольку состояние  $|0\rangle$  было состоянием вакуума, в котором произведение  $\Delta q \cdot \Delta p$  принимало наименьшее значение  $\frac{\hbar}{2}$ , — то же самое выполняется и для построенного с помощью унитарного преобразования  $U$  состояния  $|A\rangle$ , которое теперь естественно обозначить относящимися к нему *средними значениями*  $\bar{q}$  и  $\bar{p}$  (и, может быть, еще и значением  $\alpha$ ):

$$|A\rangle \equiv |\bar{q}, \bar{p}\rangle \equiv |\bar{q}, \bar{p}; \alpha\rangle.$$

Итак, в состояниях  $|\bar{q}, \bar{p}\rangle$  выполнены все сформулированные в **11.2** пожелания:

$$\begin{aligned}\bar{q}_{|\bar{q}, \bar{p}\rangle} &= \langle \bar{q}, \bar{p}|q|\bar{q}, \bar{p}\rangle = \bar{q}; & \Delta q_{|\bar{q}, \bar{p}\rangle} \cdot \Delta p_{|\bar{q}, \bar{p}\rangle} &= \frac{\hbar}{2}. \\ \bar{p}_{|\bar{q}, \bar{p}\rangle} &= \langle \bar{q}, \bar{p}|p|\bar{q}, \bar{p}\rangle = \bar{p};\end{aligned}$$

Поэтому эти состояния суть такие квантовые состояния, которые осуществляют наибольшее возможное приближение к классическому состоянию, в котором сразу  $q = \bar{q}$  и  $p = \bar{p}$ . Их принято называть **когерентными состояниями**.

**11.5.1.** Выразим унитарный оператор  $U$ , образующий когерентное состояние из вакуума, через операторы рождения и уничтожения (53). Простая выкладка показывает, что

$$\frac{i}{\hbar}(-\bar{q}p + \bar{p}q) = \bar{a}a^+ - \bar{a}^*a,$$

где  $\bar{a}$  и  $\bar{a}^*$  — средние значения операторов  $a$  и  $a^+$ , т. е.

$$\bar{a} = \frac{\bar{p} - i\alpha\bar{q}}{\sqrt{2\alpha\hbar}}; \quad \bar{a}^* = \frac{\bar{p} + i\alpha\bar{q}}{\sqrt{2\alpha\hbar}}.$$

Таким образом  $U = e^{\bar{a}a^+ - \bar{a}^*a}$ ; его удобно переписать в нормальной форме (теперь в обычном смысле **10.2.2**), опять прибегнув к результату **11.3** о преобразовании экспоненты от суммы в произведение экспонент. Имеем

$$\begin{aligned} U = e^{\bar{a}a^+ - \bar{a}^*a} &= e^{\frac{1}{2}[-\bar{a}^*a, \bar{a}a^+]} e^{\bar{a}a^+} e^{-\bar{a}^*a} = \\ &= e^{-\frac{\bar{a}^*\bar{a}}{2}} e^{\bar{a}a^+} e^{-\bar{a}^*a} = e^{-\frac{\bar{a}^*\bar{a}}{2}} :e^{\bar{a}a^+ - \bar{a}^*a}:. \end{aligned}$$

При действии на вакуум все — стоящие теперь справа — степени  $a$  кроме нулевой, уничтожатся, и мы получим, что

$$|\bar{q}, \bar{p}\rangle = e^{-\frac{\bar{a}^*\bar{a}}{2}} e^{\bar{a}a^+} |0\rangle,$$

или, если учесть, что  $\frac{1}{2}\bar{a}^*\bar{a} = \frac{1}{2\hbar}\left(\frac{\bar{p}^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}\bar{q}^2\right)$ ,

$$|\bar{q}, \bar{p}\rangle = e^{-\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{\bar{p}^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}\bar{q}^2\right)} e^{\left(\frac{\bar{p}}{\sqrt{2\alpha\hbar}} - i\sqrt{\frac{\alpha}{2\hbar}}\bar{q}\right)a^+} |0\rangle.$$

**11.5.2.** Мы определили когерентные состояния как состояния наименьшей неопределенности в значениях координаты и импульса при заданных средних значениях. Но из выписанных явных формул видно, что они обладают также и свойством

$$a|\bar{q}, \bar{p}\rangle = \bar{a}|\bar{q}, \bar{p}\rangle,$$

т. е. когерентные состояния суть **собственные состояния оператора уничтожения**  $a$ ; это свойство в равной степени может служить их определением.

Мы выяснили таким образом, что неэрмитов оператор  $a$  имеет своими собственными значениями любые комплексные числа. Его собственные векторы — найденные нами когерентные

состояния — образуют нормированную, но не ортогональную систему — простая выкладка показывает, что

$$\begin{aligned}\langle \bar{q}', \bar{p}' | \bar{q}, \bar{p} \rangle &= e^{-\frac{\bar{a}^* \bar{a} + \bar{a}'^* \bar{a}'}{2}} \langle 0 | e^{\bar{a}'^* \bar{a}} e^{\bar{a} \bar{a}^+} | 0 \rangle = \\ &= e^{-\frac{1}{2\hbar} \left[ \frac{(\bar{p} - \bar{p}')^2}{2\alpha} + \frac{\alpha(\bar{q} - \bar{q}')^2}{2} \right]} e^{i \frac{\bar{p}\bar{q}' - \bar{q}\bar{p}'}{2\hbar}};\end{aligned}$$

разлагая их по собственным векторам оператора  $a^+$ , мы найдем

$$\langle n | \bar{q}, \bar{p} \rangle = e^{-\frac{\bar{a}^* \bar{a}}{2}} \langle n | e^{\bar{a} \bar{a}^+} | 0 \rangle = \frac{\bar{a}^n e^{-\frac{\bar{a}^* \bar{a}}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

В координатном же или в импульсном представлении мы найдем, что

$$\langle q' | \bar{q}, \bar{p} \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}(q' - fr\bar{q}^2)} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\alpha}{2\hbar}(q' - \bar{q})^2} = e^{\frac{i}{\hbar} \bar{p}(q' - fr\bar{q}^2)} \langle q' - \bar{q} | 0 \rangle$$

и

$$\langle p' | \bar{q}, \bar{p} \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{q}(p' - fr\bar{p}^2)} \frac{1}{\sqrt{4\pi\hbar\alpha}} e^{-\frac{(\bar{p} - p')^2}{2\hbar\alpha}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{q}(p' - fr\bar{p}^2)} \langle p' - \bar{p} | 0 \rangle.$$

Система собственных векторов неэрмитова оператора  $a$  является также и полной. Проще всего убедиться в этом, продемонстрировав, что из операторов проектирования в когерентные состояния  $|\bar{q}, \bar{p}\rangle \langle \bar{q}, \bar{p}|$  можно построить единичный оператор. Действительно, образуя

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p} d\bar{q} |\bar{q}, \bar{p}\rangle \langle \bar{q}, \bar{p}| = \sum_{m,n \geq 0} \int d\bar{p} d\bar{q} e^{-\left(\frac{\bar{p}^2}{2\hbar\alpha} + \frac{\alpha\bar{q}^2}{2\hbar}\right)} \bar{a}^m (\bar{a}^*)^n \frac{|m\rangle \langle n|}{\sqrt{m!n!}},$$

убеждаемся, что интеграл легко вычисляется. После перехода к полярным координатам на плоскости  $x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\hbar}} \bar{q}$ ,  $y = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\alpha}} \bar{p}$  он оказывается диагональным по  $m, n$ , что и ведет к результату

$$\int d\bar{p} d\bar{q} |\bar{q}, \bar{p}\rangle \langle \bar{q}, \bar{p}| = 2\pi\hbar \sum_{n \geq 0} |n\rangle \langle n| = 2\pi\hbar.$$

В действительности система когерентных состояний с фиксированным  $\alpha$  и произвольными  $\bar{q}$  и  $\bar{p}$  является даже **сверхполной**, и для построения полной системы достаточно использовать лишь некоторые из них. Можно даже найти всего лишь счетную последовательность когерентных состояний, являющуюся полной.

**11.5.3.** Весьма поучительно, что, в то время как мы нашли громадное (гораздо большее, чем потребно для образования полной системы) многообразие собственных состояний оператора уничтожения  $a$ , оператор рождения  $a^+$  **вообще не имеет собственных состояний**. Последнее обстоятельство очевидно из следующего рассуждения: Предположим, что такое собственное состояние существует, и будем представлять его себе записанным в виде суммы по состояниям  $|n\rangle$ . Поскольку  $n \geq 0$ , должно существовать наименьшее  $n$ , скажем  $n_0$ , входящее в эту сумму. Под действием  $a^+$  состояние  $|n_0\rangle$  перейдет в  $|n_0 + 1\rangle$ , т.е. после действия оператора рождения его гипотетическое собственное состояние будет иметь наименьшим  $n$  не  $n_0$ , а  $n_0 + 1$  и, значит, не сможет оказаться коллинеарным исходному.

## 12. Волновая функция

Как мы убедились в конце раздела 10, можно выбрать такое представление, в котором все координаты диагональны. Такое представление, называемое **координатным представлением**, часто используют в квантовой механике преимущественным образом.

Но если мы преимущественно работаем в одном фиксированном представлении, то обозначения для представителей векторов и операторов можно упростить способом, который особенно удобен, если диагональные в избранном представлении наблюдаемые имеют непрерывный спектр.

**12.1.1.** Будем, для краткости, обозначать полный набор коммутирующих наблюдаемых, определяющий избранное представление, одной буквой  $\xi$ . Представитель  $\langle \xi' | P \rangle$  какого-то вектора  $|P\rangle$  в этом представлении есть функция от  $\xi'$  — скажем,  $\psi(\xi')$  — и она однозначно определяет вектор  $|P\rangle$ . Поэтому ее разумно использовать вместо  $P$  в качестве значка, отличающего вектор  $|P\rangle$  от всех прочих, т.е. принять, что

$$\text{если } \langle \xi' | P \rangle = \psi(\xi'), \quad \text{то } |P\rangle = |\psi(\xi)\rangle. \quad (80.1)$$

(Вектор определяется *всей функцией*  $\psi(\xi)$ !)

Далее, если рассмотреть оператор специального вида  $\alpha = f(\xi)$ , то

$$\langle \xi' | f(\xi) | P \rangle = f(\xi') \langle \xi' | P \rangle = f(\xi') \psi(\xi'),$$

значит,

$$f(\xi) |\psi(\xi)\rangle = |f(\xi) \psi(\xi)\rangle,$$

т. е. мы видим, что черту слева можно не писать, и остановиться на том, что

$$\text{если } \langle \xi' | P \rangle = \psi(\xi'), \quad \text{то } |P\rangle = \psi(\xi), \quad \text{или, кратко, } = \psi. \quad (80.1')$$

Эту запись можно рассматривать при желании как произведение коммутирующего со всеми операторами полного набора оператора  $\psi(\xi)$  (ср. § 7) на некоторый стандартный (для данного представления) вектор  $\rangle$ , который имеет одинаковые составляющие по всем базисным векторам  $|\xi'\rangle$ :  $\langle \xi' | \rangle = 1$ .

Можно, наконец, вообще держать  $\rangle$  постоянно в уме (или не держать его там) и выписывать только  $\psi(\xi)$ , памятуя, что эту **волновую функцию** можно умножать на операторы только слева. Именно так и поступают в большинстве изложений квантовой механики.

**12.1.2.** Совершенно таким же образом можно условиться, что для *совекторов*

$$\text{если } \langle Q | \xi' \rangle = \phi(\xi'), \quad \text{то } \langle Q | = \langle \phi(\xi) | \quad \text{или} \quad \langle Q | = \langle \phi(\xi) = \langle \phi(\xi). \quad (80.2)$$

Заметим теперь, что в силу (12.1),

$$\text{если } |P\rangle = \psi(\xi), \quad \text{то } \langle P | = \langle \psi^*(\xi),$$

— т. е. совектор представляется волновой функцией, *комплексно-сопряженной* функции, представляющей сопряженный ему вектор<sup>1)</sup>.

**12.1.3.** Согласно формуле (37.с) из **6.5** вероятность найти для наблюдаемой  $\xi$  значения, лежащие в интервале  $(\xi', \xi' + d\xi')$  при измерении, производимом над системой, находящейся в состоянии  $|A\rangle$ , есть

$$dM_{\xi'/A} = \langle A | P_{\xi'} | A \rangle d\xi'.$$

Поскольку наблюдаемые  $\xi$  образуют полный набор, то проекционные операторы  $P_{\xi'}$  будут выражаться формулой (21):

$$P_{\xi'} = |\xi'\rangle \langle \xi'|,$$

и, следовательно, мы получим для вероятности

$$dW_{\xi'/A} = \langle A | \xi' \rangle \langle \xi' | A \rangle d\xi'.$$

<sup>1)</sup> Это казалось бы нарушает наше общее правило, что вектор и сопряженный ему совектор всегда обозначаются *одинаковыми* значками. Однако до сих пор значки, отмечавшие векторы, всегда были у нас вещественными. Поэтому мы не придем в конфликт со старым правилом, если будем читать в нем вместо *одинаковыми* — *комплексно-сопряженными*.

Если теперь состояние  $A$  записывается в упрощенных обозначениях как

$$|A\rangle = \psi(\xi),$$

то по (80.1')

$$\langle \xi' | A \rangle = \langle \xi' | \psi(\xi) \rangle = \psi(\xi')$$

и

$$\langle A | \xi' \rangle = \psi^*(\xi').$$

Итак, вероятность найти для наблюдаемой  $\xi$  значения, лежащие в интервале  $(\xi', \xi' + d\xi')$  для системы, находящейся в состоянии с волновой функцией  $\psi(\xi)$ , есть

$$dW_{\xi'/\psi} = \psi^*(\xi') \psi(\xi') d\xi'. \quad (81.1)$$

Если, в частности,  $\xi$  есть координата  $x$ , то

$$dW = \psi^*(x) \psi(x) dx, \quad (81.2)$$

а если  $\xi$  есть радиус-вектор материальной точки  $\mathbf{r}$  (совокупность трех ее координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ ), то

$$dW_r = \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) dV = |\psi(\mathbf{r})|^2 dV, \quad (81.3)$$

— т. е. вероятность того, что частица будет обнаружена при измерении в некоторой точке пространства, пропорциональна квадрату модуля волновой функции в этой точке.

**12.1.4** Перейдем теперь к скалярным произведениям. Так как в полной записи скалярное произведение совектора  $\langle Q |$  и вектора  $|P\rangle$ , выраженное через их представители в  $\xi$ -представлении, записывается как

$$\langle Q | P \rangle = \sum_{\xi'} \int d\xi' \langle Q | \xi' \rangle \langle \xi' | P \rangle = \sum_{\xi'} \int d\xi' \varphi(\xi') \psi(\xi'),$$

если представители совектора и вектора есть, соответственно,  $\varphi(\xi')$  и  $\psi(\xi')$  (мы выписали эту формулу в самом общем виде, когда среди наблюдаемых  $\xi$  есть обладающие и непрерывным, и дискретным спектром), то и в краткой записи под произведением  $\langle \varphi(\xi) \psi(\xi) \rangle$  следует всегда разуметь

$$\langle \varphi(\xi) \psi(\xi) \rangle = \sum_{\xi'} \int d\xi' \varphi(\xi') \psi(\xi'). \quad (82.1)$$

Поэтому вообще примем то определение, что для любой  $f(\xi)$  выражение  $\langle f(\xi) \rangle$  всегда будет обозначать сумму по всем дискретным и интеграл по всем непрерывным EW-ам:

$$\langle f(\xi) \rangle = \sum_{\xi'} \int d\xi' f(\xi') \quad (82.2)$$

— комбинации (82) являются пожалуй единственными, для которых выписывание или невыписывание сохраняемого в уме стандартного вектора  $\rangle$  имеет значение для смысла формулы.

**12.2.** Остановимся еще на так подробно разобранным нами случае одной степени свободы.

**12.2.1.** Согласно формулам (65) и (68) из предыдущего параграфа представителями операторов координаты и импульса в координатном представлении являются

$$\langle q' | q | q'' \rangle = q' \delta(q' - q'') \quad \text{и} \quad \langle q' | p | q'' \rangle = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'').$$

Переведем их в сокращенную запись, выбирая в качестве стандартного  $\xi$ -представления координатное представление.

Если представитель вектора  $|P\rangle$  в этом представлении есть  $\langle q' | P \rangle = \psi(q')$ , т. е. если  $|P\rangle = \psi(q)\rangle$ , то представителем вектора  $\alpha | P \rangle$ , где  $\alpha$  — некоторый линейный оператор, будет

$$\langle q' | \alpha | P \rangle = \int dq'' \langle q' | \alpha | q'' \rangle \langle q'' | P \rangle = \int dq'' \langle q' | \alpha | q'' \rangle \psi(q'').$$

Следовательно,

$$\text{если } |P\rangle = \psi(q)\rangle \quad \text{и} \quad \langle q' | \alpha | q'' \rangle = K_\alpha(q', q''),$$

$$\text{то } \alpha | P \rangle = \int d\tilde{q} K_\alpha(q, \tilde{q}) \psi(\tilde{q})\rangle, \quad (83.0)$$

— т. е. произвольный линейный оператор приобретает в сокращенной записи вид *линейного интегрального оператора*; выгода от этого невелика.

**12.2.2.** Преимущество сокращенной записи оказывается, однако, весьма существенным, если ядро интегрального оператора — т. е. его представитель в  $q$ -представлении — выражается через  $\delta$ -функцию или конечное число ее производных. В самом деле, если оператор  $\alpha$  есть оператор координаты  $q$ , то  $K_q(q', q'') = \delta(q' - q'')$ , интегрирование по  $\tilde{q}$  в (83.0) выполняется, и, следовательно,

$$\text{если } |P\rangle = \psi(q)\rangle, \quad \text{то } q | P \rangle = q \psi(q)\rangle. \quad (83.1)$$

Иными словами, в сокращенной записи оператору  $q$  отвечает просто оператор умножения на число  $q$ :

$$q = q \quad (83.1a)$$

— обстоятельство, с установления которого даже для произвольной функции  $f(q)$  мы как раз и начали вводить сокращенные обозначения.

**12.2.3.** Аналогичное упрощение происходит и для оператора импульса, для которого  $K_p(q', q'') = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'')$ . Освобождаясь в (83.0) от производной интегрированием по частям и снимая затем  $\delta$ -функцию, получаем, что

$$\text{если } |P\rangle = \psi(q), \quad \text{то } p|P\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi(q)}{dq} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} \cdot \psi(q). \quad (83.2)$$

Иными словами, оператором импульса в сокращенной записи оказывается (с точностью до множителя) оператор дифференцирования по  $q$ :

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq}. \quad (83.2a)$$

**12.2.4.** Итак, мы видим, что такие важные наблюдаемые, как импульс и координата, изображаются в сокращенной записи *дифференциальным* оператором или даже просто оператором умножения на число. Именно это обстоятельство и составляет ее главное преимущество; оно сохраняется, конечно, и для наблюдаемых, являющихся целыми алгебраическими функциями импульса (и произвольными функциями координаты). Ниже мы убедимся, что в очень многих задачах только с такими наблюдаемыми и приходится иметь дело — тогда в формализме сокращенной записи удастся вообще избежать введения математически более сложных объектов типа (83.0).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Калибровочное преобразование первого рода (ср. замечание 2 к (68)) может, конечно, добавить к (83.2a) член  $\hbar \frac{d\phi_0 q}{dq}$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Реализации (83.1,2.a) конечно снова приводят нас к перестановке (52):

$$pq - qp = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} \right) = -i\hbar^1. \quad \blacksquare$$

<sup>1)</sup> Итак, мы пришли еще к одной — очень важной и полезной — реализации алгебры Ли (52).



ЗАМЕЧАНИЕ 3: Следует специально остановиться на действии (83.2a) на *совектор*. Если  $\langle Q | = \langle \varphi(q)$ , то

$$\begin{aligned} \langle Q | p | q'' \rangle &= \int dq' \langle Q | q' \rangle \langle q' | p | q'' \rangle = \\ &= \int dq' \cdot \varphi(q') \cdot \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'') = -\frac{\hbar}{i} \frac{d\varphi(q')}{dq'}, \end{aligned}$$

т. е. мы должны принять, что

$$\langle \varphi(q) \cdot p = \langle \varphi(q) \cdot \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} = -\frac{\hbar}{i} \left\langle \frac{d\varphi(q)}{dq}, \quad (83.2b)$$

т. е. что в записи  $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq}$  имеется в виду *дифференцирование вправо*. Если действовать этим оператором на — стоящий от него *слева!* — совектор, то надо перейти к *дифференцированию влево*; при этом переменится знак. Поэтому именно оператор  $\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq}\right)$  эрмитов, в то время как

$$\left(\frac{d}{dq}\right)_{\rightarrow}^{+} = \frac{d}{dq}_{\leftarrow} = -\frac{d}{dq}_{\rightarrow}. \quad \blacksquare$$

**12.3.** Отметим еще, как записываются в сокращенной записи *собственные* векторы координаты и импульса. Согласно (64) собственный вектор оператора  $q$  с собственным значением  $q_0$  имеет своим представителем

$$\langle q' | q^0 \rangle = \delta(q' - q^0).$$

Следовательно,

$$|q_0\rangle = \delta(q - q_0) = \Psi_{q_0}(q). \quad (84.1)$$

Собственный вектор импульса, отвечающий EW-у  $p_0$ , имеет по (67) своим представителем

$$\langle q' | p_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{iq'p_0}{\hbar}}.$$

Поэтому

$$|p_0\rangle = \frac{e^{\frac{iqp_0}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \rangle = \Psi_{p_0}(q). \quad (84.2)$$

Мы видим отсюда, что сокращенные обозначения связаны и с определенными неудобствами — в них не заготовлено места

для  $EW$ -ов оператора, собственным вектором которого является рассматриваемый вектор — поэтому приходится такие уточнения вводить в виде дополнительных подстрочных (или надстрочных) индексов.

### 13. Сдвиги и повороты системы отсчета

**13.1.** В первой части курса мы вывели формулы (формулы (63а), (64) первой части), выражающие изменение любой динамической переменной классической механики при (бесконечно малом) изменении системы отсчета — сдвиге или повороте, когда декартовы координаты каждой частицы ( $b$  — ее номер) претерпевают одновременно преобразование

$$\mathbf{r}_b \rightarrow \tilde{\mathbf{r}}_b = \mathbf{r}_b + \delta \mathbf{r}_b; \quad \delta \mathbf{r}_b = \delta \mathbf{a} + [\delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{r}_b]; \quad (85)$$

изменение любой динамической переменной  $\alpha$  при таком преобразовании записывалось с помощью СП в виде ((1.64) и (1.63а)).

$$\delta \alpha = (\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{M}, \alpha),$$

где  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  — полный импульс и момент системы.

Поскольку мы хотим сохранить при переходе от классической механики к квантовой весь формализм СП по возможности в неизменном виде, то нам надо будет потребовать, чтобы сохранилась и эта формула, которую будет теперь удобнее переписать — с помощью соотношения (50) — через коммутаторы:

$$\delta \alpha = \frac{i}{\hbar} [\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} + \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{M}, \alpha]_- \quad (86)$$

Символы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  в этой формуле должны теперь означать *операторы* полного импульса и полного момента и нам надо еще их определить. Примем, что, как и в классике, они суть суммы импульсов и моментов отдельных частиц:

$$\mathbf{P} = \sum_b \mathbf{p}_b; \quad \mathbf{M} = \sum_b \mathbf{m}_b, \quad (86a)$$

причем сложение операторов надо понимать в смысле конструкции, поясненной в конце § 10 (формулы (75)–(76а)), — тогда вопрос сведется к определению импульса и момента для системы, состоящей из одной материальной точки.

**13.2.** Рассмотрим для такой системы сперва сдвиг, для определенности сдвиг по одной оси, скажем по оси  $x$ . Тогда соглас-

но (85) должно быть  $\delta x = \delta a_x$ , а согласно (86), если избрать в качестве наблюдаемой  $\alpha$  координату  $x$ ,

$$\delta x = \frac{i}{\hbar} [p_x, x]_- \delta a_x.$$

Значит, фигурирующая в (86)  $x$ -компонента импульса должна удовлетворять перестановочному соотношению

$$[p_x, x]_- = \frac{\hbar}{i}$$

с координатой  $x$ . С другой стороны, сдвиг вдоль оси  $x$  вовсе не должен менять координат  $y$  и  $z$ ; выбирая эти наблюдаемые в качестве  $\alpha$  в (86), приходим к тому, что

$$[p_x, y]_- = 0; \quad [p_x, z]_- = 0.$$

Проведя такое же рассуждение со сдвигами вдоль осей  $y$  и  $z$ , придем к системе перестановочных соотношений

$$[p_\alpha, x_\beta] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\alpha\beta}.$$

Но это как раз те перестановочные соотношения (51.2), которым должны удовлетворять координаты и *канонически сопряженные* им импульсы. Итак, в качестве компонент оператора импульса (в смысле оператора, выполняющего бесконечно малый сдвиг согласно (86)) одной материальной точки можно принять обобщенные импульсы, *канонически* сопряженные ее декартовым координатам, после чего оператор импульса системы определится из (86а).

**13.3.1.** В результате преобразования (86) из первоначальной наблюдаемой  $\alpha$  возникает новая, «сдвинутая» наблюдаемая  $\tilde{\alpha}$ ; поскольку мы считаем параметр сдвига  $\delta a_x$  малым и пренебрегаем его старшими степенями, то новую наблюдаемую  $\tilde{\alpha}$  можно записать как

$$\tilde{\alpha} = \left(1 + i \delta a_x \cdot \frac{P_x}{\hbar}\right) \alpha \left(1 - i \delta a_x \cdot \frac{P_x}{\hbar}\right).$$

Применим теперь это преобразование  $n$  раз, обозначая  $n \cdot \delta a_x = a_x$ ,

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha})_n &= \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta a_x \cdot P_x\right)^n \alpha \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta a_x \cdot P_x\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{i \frac{a_x P_x}{\hbar}}{n}\right)^n \cdot \alpha \left(1 - \frac{i \frac{a_x P_x}{\hbar}}{n}\right)^n, \end{aligned}$$

и перейдем к пределу  $n \rightarrow \infty$ , притом так, чтобы  $a_x$  было бы фиксировано, а  $\delta a_x$  стремилось бы к нулю. Мы получим тогда, что

$$\tilde{\alpha} = U_{a_x} \cdot \alpha \cdot U_{a_x}^{-1}, \quad \text{где} \quad U_{a_x} = e^{i \frac{a_x P_x}{\hbar}}; \quad U_{a_x}^+ = U_{a_x}^{-1}, \quad (87)$$

т. е.  $U_{a_x}$  — унитарный оператор.

**13.3.2.** Совершенно аналогично при произвольном сдвиге, описываемом вектором  $\mathbf{a}$ , имеющим составляющие по всем трем осям:

$$\tilde{\alpha} = U_{\mathbf{a}} \cdot \alpha \cdot U_{\mathbf{a}}^{-1}; \quad U_{\mathbf{a}} = e^{i \frac{\mathbf{a} \mathbf{P}}{\hbar}}; \quad U_{\mathbf{a}}^+ = U_{\mathbf{a}}^{-1} \quad (87a)$$

(разные составляющие импульса коммутируют друг с другом, и поэтому вопроса о смысле экспоненты, содержащей в показателе различные операторы, не возникает).

**13.3.3.** Таким образом, мы построили выражения для преобразования любой наблюдаемой при сдвиге на конечный вектор  $\mathbf{a}$ , т. е. проинтегрировали дифференциальные уравнения Ли (86). Проверим, что найденное преобразование (87) есть действительно сдвиг, т. е. что в применении к радиус-вектору любой частицы, скажем с номером  $b$ , оно дает

$$\tilde{\mathbf{r}}_b = e^{i \frac{\mathbf{a} \mathbf{P}}{\hbar}} \mathbf{r}_b e^{-i \frac{\mathbf{a} \mathbf{P}}{\hbar}} = \mathbf{r}_b + \mathbf{a}. \quad (87b)$$

Проверка совершается проще всего, если заметить, что в сокращенных обозначениях (§ 12) в фиксированном *импульсном* представлении  $\mathbf{r}_b = i\hbar \frac{d}{d\mathbf{p}_b}$ , после чего остается лишь выполнить дифференцирование.

**13.4.1.** Пока полученные результаты совершенно аналогичны классическим — вследствие сдвига или поворота системы координат все динамические величины переходят в новые динамические величины по закону, имеющему весьма тесный классический аналог. Однако в квантовой механике возможна и иная точка зрения. Действительно, ведь система в квантовой механике описывается не только относящимися к ней динамическими переменными, но и описывающими ее векторами состояния. С физической точки зрения систему характеризуют не сами ее динамические переменные  $\alpha$  ( $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ), но их средние значения в том состоянии  $|P\rangle$ , в котором находится система:

$$\bar{\alpha} = \langle P | \alpha | P \rangle \quad (\langle P | \alpha_i | P \rangle, \quad i = 1, 2, \dots),$$

или же матричные элементы перехода между двумя состояниями

$$\langle Q | \alpha | P \rangle.$$

В результате сдвига все эти средние значения перейдут в

$$\tilde{\alpha} = \langle P | \tilde{\alpha} | P \rangle = \langle P | U_{\mathbf{a}} \alpha U_{\mathbf{a}}^{-1} | P \rangle, \quad (*)$$

причем весьма существенно, что унитарный оператор  $U_{\mathbf{a}}$  зависит здесь *только от* рода преобразования (и рассматриваемой системы, конечно), но *не от оператора*  $\alpha$  или от состояний  $|P\rangle, |Q\rangle$ .

**13.4.2.** Вспомним теперь, что развитая нами алгебраическая схема описания состояний и динамических переменных допускает определенный класс преобразований, которые вообще ничего не меняют в физической интерпретации. Мы имеем в виду обсуждавшиеся в **10.7.2** *одновременные* преобразования всех векторов, совекторов и операторов

$$\langle \tilde{B} | = \langle B | U; \quad | \tilde{A} \rangle = U^{-1} | A \rangle; \quad \tilde{\xi} = U^{-1} \xi U; \quad U^{-1} = U^+, \quad (88)$$

которые никак не влияют на физическую интерпретацию теории просто потому, что они — как мы убедились в **10.7.2** — не затрагивают ни одного из чисел, которые можно построить в нашей математической схеме. Чтобы преобразование (88) преобразовывало бы эрмитовы операторы в эрмитовы и не меняло бы соотношений сопряжения, надо только, как мы то и сделали, потребовать *унитарности* оператора  $U$ , который в остальном может быть произвольным. Итак,

унитарное преобразование (88) ничего не меняет в существовании физического содержания теории.

Пользуясь этим обстоятельством, мы можем совершить после преобразования (87а) еще и унитарное преобразование типа (88), записывая

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \langle P | U_{\mathbf{a}} \alpha U_{\mathbf{a}}^{-1} | P \rangle = \langle P | U \cdot U^{-1} U_{\mathbf{a}} \alpha U_{\mathbf{a}}^{-1} U \cdot U^{-1} | P \rangle = \\ &= \langle \tilde{P} | \tilde{(\alpha)} | \tilde{P} \rangle. \end{aligned}$$

Выберем теперь оператор унитарного преобразования  $U$  так, чтобы было

$$\tilde{(\alpha)} = \alpha \quad \text{для всякого } \alpha. \quad (89.1)$$

В силу независимости  $U_{\mathbf{a}}$  от  $\alpha$  это как раз и можно сделать, полагая просто

$$U = U_{\mathbf{a}}. \quad (89.2)$$

В результате мы получаем новую форму для выражения преобразования сдвига в квантовой механике:

$$\bar{\alpha} \rightarrow \tilde{\bar{\alpha}}; \quad \tilde{\bar{\alpha}} = \langle \tilde{P} | \alpha | \tilde{P} \rangle; \quad \langle \tilde{P} | = \langle P | U_a; \quad | \tilde{P} \rangle = U_a^{-1} | P \rangle. \quad (89.3)$$

**13.4.3. ЗАМЕЧАНИЕ:** Необходимо четко различать три вида преобразований, особенно когда все они производятся с помощью одного и того же унитарного оператора:

(87) — когда *преобразуются* динамические переменные, но *не меняются* векторы состояния;

(89) — когда *не меняются* динамические переменные, но *преобразуются* векторы состояния;

— оба эти преобразования меняют физику — осуществляют сдвиг — и

(88) — когда *преобразуются* и динамические переменные, и векторы состояния, но *не меняется* физическое содержание теории.

**13.5.** Аналогично обстоит дело и с преобразованиями *поворота* системы отсчета. Как и для сдвигов, мы можем написать для динамических переменных после совершения бесконечно малого поворота  $\delta\phi$  вокруг некоторой оси, направление которой задается (фиксированным!) единичным вектором  $\mathbf{n}$ , так что  $\delta\phi = \delta\phi \cdot \mathbf{n}$ :

$$\tilde{\alpha} = \left( 1 + i \frac{\delta\phi}{\hbar} \cdot \mathbf{nM} \right) \alpha \left( 1 - i \frac{\delta\phi}{\hbar} \cdot \mathbf{nM} \right),$$

а для динамических переменных после поворота на конечный угол  $\phi$  вокруг того же фиксированного направления  $\mathbf{n}$  — в полной аналогии с (87) —

$$\tilde{\alpha} = U_{\phi, \mathbf{n}} \alpha U_{\phi, \mathbf{n}}^{-1}; \quad U_{\phi, \mathbf{n}} = e^{i \frac{\phi}{\hbar} \mathbf{nM}}; \quad U_{\phi, \mathbf{n}}^{-1} = U_{\phi, \mathbf{n}}^+. \quad (90)$$

Дальше, однако, возникает существенное осложнение. Дело в том, что — в отличие от группы трансляций — группа вращений трехмерного пространства — это группа неабелева. Поэтому нельзя ожидать, что унитарные операторы (90), соответствующие поворотам вокруг *различных* осей, будут коммутировать.

**13.5.1.** Первый пункт, на который в связи с этим надо обратить внимание, это вопрос, как следует записать последовательное действие двух поворотов: *сперва* поворота на угол  $\phi_1$  вокруг оси  $\mathbf{n}_1$  а *потом* поворота на угол  $\phi_2$  вокруг оси  $\mathbf{n}_2$ . Тут надо не упустить из виду (ср. I, **18.8.4**) то обстоятельство, что первый поворот на  $\phi_1 \mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\phi}_1$ , преобразуя *все* динамические переменные

по (90), делает то же и с оператором  $U_{\varphi_2}$  второго поворота, преобразуя его в

$$\tilde{U}_{\varphi_2} = U_{\varphi_1} U_{\varphi_2} U_{\varphi_1}^{-1}.$$

Поэтому результат последовательного совершения двух поворотов в указанном выше порядке будет равен

$$\tilde{\alpha} = \tilde{U}_{\varphi_2} \tilde{\alpha} \tilde{U}_{\varphi_2}^{-1} = U_{\varphi_1} U_{\varphi_2} U_{\varphi_1}^{-1} \cdot U_{\varphi_1} \alpha U_{\varphi_1} \cdot U_{\varphi_1} U_{\varphi_2}^{-1} U_{\varphi_1}^{-1},$$

то есть

$$\tilde{\alpha} = U_{\varphi_1} U_{\varphi_2} \cdot \alpha \cdot U_{\varphi_2}^{-1} U_{\varphi_1}^{-1}. \quad (90a)$$

Так как проведенное рассуждение никак не было связано с тем, что операторы  $U_{\varphi_1}$  и  $U_{\varphi_2}$  выполняют унитарное преобразование, отвечающее именно *повороту*, то мы получаем из (90a) общее правило:

При последовательном выполнении двух унитарных преобразований соответствующие унитарные операторы действуют на динамические переменные системы в порядке, обратном порядку выполнения преобразований.

То же правило справедливо и для последовательного выполнения более длинной серии унитарных преобразований.

Легко сообразить, что при использовании другой эквивалентной картины действия унитарных преобразований — картины (89), когда преобразуются не операторы, а векторы состояния, — только что отмеченное обстоятельство не имеет места.

**13.5.2.** После этого предварительного замечания займемся опять бесконечно малыми поворотами.

Если мы совершим *сперва* поворот на угол  $\delta\varphi_1$  *потом* поворот на угол  $\delta\varphi_2$ , затем «обратный поворот» на  $-\delta\varphi_1$  и, наконец, обратный поворот на  $-\delta\varphi_2$ , то в силу только что установленного правила такая последовательность поворотов преобразует любую динамическую переменную  $\alpha$  в

$$\alpha = U_{\delta\varphi_1} U_{\delta\varphi_2} U_{-\delta\varphi_1} U_{-\delta\varphi_2} \cdot \alpha \cdot U_{-\delta\varphi_2}^{-1} U_{-\delta\varphi_1}^{-1} U_{\delta\varphi_2}^{-1} U_{\delta\varphi_1}^{-1},$$

причем в силу (90)

$$U_{-\delta\varphi_i} = U_{\delta\varphi_i}^{-1}.$$

Поэтому, полагая еще ради краткости  $U_{\delta\varphi_i} = U_i$ , имеем

$$\alpha = U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1} \cdot \alpha \cdot U_2 U_1 U_2^{-1} U_1^{-1}.$$

Рассмотрим суммарный унитарный оператор преобразования  $U = U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1}$ . Для абелевой группы он был бы тождественной еди-

ницей, но для неабелевой группы, в которой  $U_1$  и  $U_2$  не коммутируют, это не так. Обозначая коммутатор

$$U_1 U_2 - U_2 U_1 = i\beta,$$

получим

$$U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1} = U_2 U_1 U_1^{-1} U_2^{-1} + i\beta U_1^{-1} U_2^{-1} = 1 + i\beta U_1^{-1} U_2^{-1}.$$

Записывая теперь

$$U_i = e^{i\mu_i} \quad (i = 1, 2),$$

где  $\mu_i^+ = \mu_i$  и суть бесконечно малые первого порядка по  $\delta\varphi_i$ , найдем, что с точностью до второго порядка

$$i\beta = [U_1, U_2] = \left[ \left( 1 + i\mu_1 - \frac{\mu_1^2}{2} \right), \left( 1 + i\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2} \right) \right] = ii[\mu_1, \mu_2] + O(\delta\varphi^3).$$

Поэтому с точностью до членов второго порядка по  $\delta\varphi$

$$U = (1 + i \cdot i[\mu_1, \mu_2] e^{-i\mu_1} e^{-i\mu_2}) = 1 + i \cdot i[\mu_1, \mu_2]$$

или, с той же степенью точности,

$$U = e^{i \cdot i[\mu_1, \mu_2]} = e^{i \frac{(\delta\varphi_1)_\nu (\delta\varphi_2)_\sigma}{\hbar} \frac{i}{\hbar} [M_\nu, M_\sigma]}_-.$$

**13.5.3.** Но суммарное преобразование  $U$ , получившееся в результате нашей серии вращений, должно быть опять некоторым поворотом в 3-пространстве, т. е. иметь форму (90) с некоторыми новыми параметрами, определяемыми параметрами первоначальных поворотов и структурой группы вращений в  $R_3$ . Но это значит, что возникшие в показателе в выражении для  $U$  коммутаторы

$$\frac{i}{\hbar} [M_\nu, M_\sigma]_-$$

должны линейно выражаться через компоненты оператора момента.

**13.6.** Сравнение с преобразованием (85) радиус-вектора позволяет установить, что коэффициенты должны иметь вид  $i\hbar e_{\nu\sigma\gamma}$ , т. е. что компоненты оператора момента должны удовлетворять перестановочным соотношениям:

$$[M_\alpha, M_\beta]_- = i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma. \quad (91)$$



**13.6.1.** Совершенно аналогично, выполняя последовательно в разных порядках преобразования поворота и сдвига, мы приходим к **перестановочным соотношениям между моментом и импульсом**:

$$[M_\alpha, P_\beta]_- = i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma. \quad (92)$$

**13.6.2.** Перестановочные соотношения (91), (92) имеют физически тот же смысл, что и соотношения в скобках Пуассона между компонентами импульса и момента, которые мы выписывали в классической механике.

Перестановочные соотношения (92) можно трактовать и иначе — как выражение для изменения импульса при бесконечно малом повороте системы отсчета. Действительно, полагая в (86)  $\delta\mathbf{a} = 0$ ,  $\alpha = P_\beta$  и подставляя значение коммутатора (92), находим для изменения импульса при бесконечно малом повороте

$$\delta P_\beta = \frac{i(\delta\varphi)_\alpha}{\hbar} [M_\alpha, P_\beta] = i \frac{(\delta\varphi)_\alpha}{\hbar} i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma,$$

то есть

$$\delta\mathbf{P} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{P}]. \quad (92a)$$

**13.6.3.** Поскольку, однако, последняя формула должна иметь место не только для импульса, но и для *любого* векторного оператора (ср., например, выражение (85) для изменения радиус-вектора), то столь же универсальной должна обернуться и первоначальная формула (92): Для *любого векторного оператора*  $\mathbf{A}$  его коммутатор с оператором момента должен равняться

$$[M_\alpha, A_\beta]_- = i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma. \quad (92')$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы провели обсуждение поворотов в той картине, в которой меняются операторы, а векторы состояния остаются постоянными. Можно было бы, конечно, перенести преобразование, как то было проделано в случае сдвигов, с операторов на векторы и совекторы. ■

## 14. Квантование момента

Большая сложность группы вращений сравнительно с группой параллельных переносов имеет, однако, и свою положительную сторону. Оказывается, что дополнительные связи, налагаемые на три оператора  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  перестановочными соотношениями (91), являются столь сильными, что позволяют — подобно тому, как то мы делали в § 10 для операторов  $a$  и  $a^+$ , — найти

спектр собственных значений оператора момента и построить систему его собственных векторов — т. е. решить соответствующую проблему собственных значений.

**14.1.** Того ради введем, прежде всего, **оператор квадрата момента**:

$$\mathbf{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2. \quad (93.1)$$

Вычисляя коммутатор какой-либо компоненты момента, скажем  $M_x$ , с этим оператором

$$\begin{aligned} [M_x, \mathbf{M}^2]_- &= [M_x, M_y]_- M_y + M_y [M_x, M_y]_- + [M_x, M_z]_- M_z + \\ &+ M_z [M_x, M_z]_- = i\hbar M_z M_y + i\hbar M_y M_z - i\hbar M_y M_z - i\hbar M_z M_y = 0, \end{aligned}$$

видим, что

$$[M_\alpha, \mathbf{M}^2]_- = 0, \quad (93.2)$$

— т. е. каждая из компонент момента коммутирует с его квадратом и, следовательно, обладает общей с ним полной системой собственных векторов. (Эта система общих собственных векторов, конечно, своя для каждой компоненты — две разные компоненты момента в силу (91) не коммутируют, и, следовательно, полной системы общих собственных векторов иметь не могут.) Заметим, что равенство нулю коммутатора (93.2) можно было бы предсказать и до вычисления: ведь квадрат момента — это скаляр в обычном 3-пространстве, поэтому при поворотах он должен оставаться неизменным, следовательно, — коммутировать с моментом.

Итак, мы имеем дело с четырьмя операторами

$$M_x, \quad M_y, \quad M_z \quad \text{и} \quad \mathbf{M}^2 \quad ^1),$$

связанными перестановками (91), (93.2):

$$\begin{aligned} [M_x, M_y]_- &= i\hbar M_z; \quad [M_y, M_z]_- = i\hbar M_x; \quad [M_z, M_x]_- = i\hbar M_y; \\ [M_\alpha, \mathbf{M}^2]_- &= 0, \end{aligned}$$

и желаем найти ЕВ-ы и общие собственные векторы двух из этих операторов, скажем  $M_z$  и  $\mathbf{M}^2$  <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Иногда вводят вместо  $M_x$  и  $M_y$  операторы

$$M^+ = M_x + iM_y \quad \text{и} \quad M^- = M_x - iM_y.$$

<sup>2)</sup> С математической точки зрения рассматриваемая задача состоит в отыскании неприводимых представлений алгебры Ли (91).

**14.2.1.** Для решения этой задачи мы воспользуемся следующим искусственным приемом. Введем две пары операторов  $\alpha, \alpha^+$  и  $\beta, \beta^+$ , подчиняющихся (каждая) перестановочным соотношениям (34) и коммутирующих между собой:

$$\alpha\alpha^+ - \alpha^+\alpha = 1; \quad \beta\beta^+ - \beta^+\beta = 1; \quad [\alpha^\pm, \beta^\pm] = 0. \quad (94.1)$$

Тогда, повторяя рассуждения § 10, мы можем построить для каждой пары операторов базисы (56) пространств, в которых они действуют (будем обозначать числа заполнения, отвечающие паре  $\alpha, \alpha^+$  через  $p$ , а паре  $\beta, \beta^+$  — через  $r$ ). Построим, далее, прямое произведение этих двух пространств и переведем в него операторы  $\alpha, \alpha^+$  и  $\beta, \beta^+$  в соответствии с процедурой, описанной в **10.8.1.3**, причем будем следовать «физической» манере записи, не различающей операторы в «большом» и «малом» пространствах.

Мы придем таким образом к полной системе векторов состояния  $|p, r\rangle$ ,  $p, r = 0, 1, \dots$ , таких, что:

$$\begin{aligned} \alpha^+ \alpha |p, r\rangle &= p |p, r\rangle; & (p', r' | p, r) &= \delta_{pp'} \delta_{rr'}; \\ \beta^+ \beta |p, r\rangle &= r |p, r\rangle; & |p, r\rangle &= \frac{(\alpha^+)^p (\beta^+)^r}{\sqrt{p! r!}} |0, 0\rangle; & |0, 0\rangle &= |0\rangle, \end{aligned} \quad (94.2)$$

причем

$$\begin{aligned} \alpha^+ |p, r\rangle &= \sqrt{p+1} |p+1, r\rangle; & \beta^+ |p, r\rangle &= \sqrt{r+1} |p, r+1\rangle; \\ \alpha |p, r\rangle &= \sqrt{p} |p-1, r\rangle; & \beta |p, r\rangle &= \sqrt{r} |p, r-1\rangle; \end{aligned} \quad (94.3)$$

— векторов, которые мы обозначили — в исключение из общего правила — круглыми скобками для отличия от другой системы, которую придется ввести.

**14.2.2.** Цель этого вспомогательного построения состоит в том, чтобы выразить интересующие нас компоненты момента в виде функций введенных операторов рождения и уничтожения. Чтобы сообразить, каким путем надобно к ней стремиться, заметим, что *билинейные* функции операторов рождения и уничтожения обладают тем замечательным свойством, что их коммутаторы тоже являются *билинейными* функциями этих операторов <sup>1)</sup> — при коммутировании «съедается» один оператор

<sup>1)</sup> Можно утверждать и больше — что коммутирование любого монома в операторах рождения и уничтожения,  $(\alpha^+)^m (\alpha)^n$ , с билинейной функцией  $\alpha^+, \alpha$  опять даст моном *тех же степеней*. Это свойство характеризуют обычно тем утверждением, что «коммутирование любого выражения с билинейной функцией  $\alpha^+, \alpha$  не меняет его операторной структуры».

рождения и один уничтожения, следовательно, остается опять билинейное выражение. Поэтому, поскольку коммутаторы компонент момента должны в силу (91) выражаться опять через них самих, естественно пытаться выразить  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  в виде именно билинейных форм,  $\alpha$ ,  $\alpha^+$ ,  $\beta$ ,  $\beta^+$ . Далее мы хотим, чтобы  $M_z$  был бы диагонален, поэтому его следует искать в виде комбинации диагональных в базисе (94) билинейных выражений  $\alpha^+\alpha$  и  $\beta^+\beta$ . На долю же операторов  $M_y$  и  $M_x$ , которые не могут быть диагональными, остаются недиагональные комбинации  $\alpha^+\beta$  и  $\beta^+\alpha$ .

После этих кратких пояснений произнесем какое-нибудь магическое слово и вытащим из-под черного покрывала готовый результат:

$$M_x = \hbar \frac{\alpha^+\beta + \beta^+\alpha}{2}; \quad M_y = \hbar \frac{\alpha^+\beta - \beta^+\alpha}{2i}; \quad M_z = \hbar \frac{\alpha^+\alpha - \beta^+\beta}{2}; \quad (95.1-3)$$

$$M^+ = M_x + iM_y = \hbar\alpha^+\beta; \quad M^- = M_x - iM_y = \hbar\beta^+\alpha. \quad (95.1', 2')$$

В самом деле, при таком выборе все перестановки (91) удовлетворяются:

$$[M_x, M_y]_- = \frac{\hbar^2}{4i} \{ [\beta^+\alpha, \alpha^+\beta]_- - [\alpha^+\beta, \beta^+\alpha]_- \} = i\hbar \frac{\hbar}{2} (\alpha^+\alpha - \beta^+\beta) = i\hbar M_z;$$

$$\begin{aligned} [M_y, M_z]_- &= \\ &= \frac{\hbar^2}{4i} \{ [\alpha^+\beta, \alpha^+\alpha]_- - [\alpha^+\beta, \beta^+\beta]_- - [\beta^+\alpha, \alpha^+\alpha]_- + [\beta^+\alpha, \beta^+\beta]_- \} = \\ &= \frac{\hbar^2}{4i} \{ -\alpha^+\beta - \alpha^+\beta - \beta^+\alpha - \beta^+\alpha \} = i\hbar \cdot \hbar \frac{\alpha^+\beta + \beta^+\alpha}{2} = i\hbar M_x; \end{aligned}$$

$$[M_z, M_x]_- = \frac{\hbar^2}{4} \{ \alpha^+\beta - \beta^+\alpha + \alpha^+\beta - \beta^+\alpha \} = i\hbar \cdot \hbar \frac{\alpha^+\beta - \beta^+\alpha}{2i} = i\hbar M_y.$$

**14.2.3.** Но это еще только половина фокуса — главное впереди. В (95.1-3) мы использовали только *три* линейные комбинации четырех независимых билинейных выражений. Включим в рассмотрение и четвертую — введем (эрмитов) оператор

$$\lambda = \hbar \frac{\alpha^+\alpha + \beta^+\beta}{2}; \quad [M_\alpha, \lambda]_- = 0. \quad (95.4)$$

Этот оператор коммутирует со *всеми* компонентами момента. В самом деле, в базисе (94) он диагонален и поэтому коммути-

рует с диагональным  $M_z$ . Кроме того, он равен в этом базисе полусумме чисел  $p$  и  $r$ , а каждый из операторов  $M^\pm$  меняет, как легко видеть, одно из этих чисел на  $+1$ , а другое на  $-1$ , оставляя полусумму неизменной.

Обозначим теперь временно четыре основные билинейные комбинации  $\alpha^+\alpha = a$ ,  $\beta^+\beta = b$ ,  $\alpha^+\beta = c$  и  $\beta^+\alpha = d$  и вычислим

$$\begin{aligned} M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 - \lambda^2 &= \\ &= \hbar^2 \left\{ \left( \frac{c+d}{2} \right)^2 - \left( \frac{c-d}{2} \right)^2 + \left( \frac{a-b}{2} \right)^2 - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right\} = \frac{\hbar^2}{2} (cd + dc - ab - \\ &\quad - ba) = \frac{\hbar^2}{2} (\alpha^+\beta\beta^+\alpha + \beta^+\alpha\alpha^+\beta - \alpha^+\alpha\beta^+\beta - \beta^+\beta\alpha^+\alpha) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (\alpha^+\alpha + \beta^+\beta) = \hbar\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\mathbf{M}^2 = \lambda^2 + \hbar\lambda, \quad (95.5)$$

т. е. нам удалось выразить квадрат момента, *квадратичный* в его компонентах и, следовательно, *биквадратичный* во вспомогательных операторах рождения и уничтожения, в виде функции одного оператора  $\lambda$ , *билинейного* в операторах рождения и уничтожения, — мы в некотором смысле линеаризовали стоящую перед нами задачу о спектре момента.

**14.3.** Задача эта, собственно, теперь уже решена. Оба желаемых оператора,  $M_z$  и заменяющий теперь  $\mathbf{M}^2$  оператор  $\lambda$ , диагональны в базисе (94), их собственные значения — эти собственные значения принято обозначать буквами  $m$  и  $l$ , соответственно, — равны

$$M'_z = \hbar m = \hbar \frac{p-r}{2}; \quad \lambda' = \hbar l = \hbar \frac{p+r}{2}; \quad p = l + m; \quad r = l - m, \quad (96.1)$$

и нам осталось только перенумеровать векторы уже имеющегося базиса новыми квантовыми числами. Положим для этого:

$$|l, m\rangle = |(p = l + m), (r = l - m)\rangle; \quad |p, r\rangle = \left| \frac{p+r}{2}; \frac{p-r}{2} \right\rangle \quad (97.1)$$

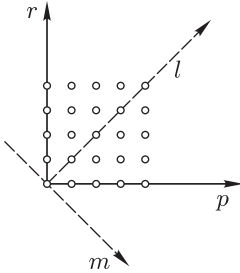
— как раз для векторов в новой нумерации мы и сохраняли наши обычные обозначения через угловые скобки. Для «новых» векторов, как сразу устанавливается из (94):

$$\alpha^+\alpha |l, m\rangle = (l + m) |l, m\rangle; \quad \beta^+\beta |l, m\rangle = (l - m) |l, m\rangle \quad (97.2)$$

и

$$\begin{aligned}
 \alpha^+ |l, m\rangle &= \sqrt{l+m+1} \left| l + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right\rangle; \\
 \beta^+ |l, m\rangle &= \sqrt{l-m+1} \left| l + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2} \right\rangle, \\
 \alpha |l, m\rangle &= \sqrt{l+m} \left| l - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2} \right\rangle; \\
 \beta |l, m\rangle &= \sqrt{l-m} \left| l - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{97.3}$$

**14.3.1.** Какие значения могут принимать новые квантовые числа  $l$  и  $m$ ? Старые квантовые числа  $p$  и  $r$  менялись независимо друг от друга, принимая все возможные целочисленные неотрицательные значения, т. е. на плоскости  $(p, r)$  допустимые значения заполняли все целочисленные точки первого квадранта. Преобразование (96.1) к новым квантовым числам состоит в повороте координатных осей на  $45^\circ$ ; как видно из рисунка, квантовые числа  $l$  и  $m$  не будут теперь меняться независимым образом.



Возможные значения квантового числа  $l$  распадаются на два существенно различных класса: все неотрицательные целые числа и неотрицательные, как говорят, «полуцелые»: равные неотрицательному целому числу плюс половина. Квантовое число  $m$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, лежащие в интервале  $-l \leq m \leq +l$  и меняющиеся при переходе от одного разрешенного значения к соседнему на единицу.

Таким образом, для целого  $l$  все совместные с ним значения  $m$  тоже целы, а для полуцелого — полуцелы. Каждому значению  $l$  отвечает  $(2l+1)$  совместных с ним значений числа  $m$ :

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{целые } l && \text{полуцелые } l \\
 &l = 0, 1, 2, \dots; && l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots; \\
 &m = -l, -(l-1), \dots, (l-1), l; \\
 &\text{число различных } m \\
 &\text{нечетно} && \text{четно} \\
 &\text{есть } m = 0 && \text{нет } m = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{96.2a} \tag{96.2b}$$

**14.3.2.** Итак, мы установили, что из перестановочных соотношений (91) следует, что можно построить общую систему собственных векторов, определяемых формулами (97.1), (94.2), квадрата и одной из компонент, скажем  $M_z$ , момента со спектром собственных значений

$$\lambda |l, m\rangle = \hbar l |l, m\rangle, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{M}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle;$$

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (96.3)$$

$$M_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

Как действуют на эти собственные векторы два оставшихся недиагональных оператора (удобнее воспользоваться операторами  $M^\pm$ , а не  $M_x, M_y$ ), сразу устанавливается из их выражения (95.1', 2') через  $\alpha$  и  $\beta$  и формул (97.3):

$$\begin{aligned} M^+ |l, m\rangle &= \hbar \alpha^+ \beta |l, m\rangle = \alpha^+ \hbar \sqrt{l-m} \left| l - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle; \\ M^- |l, m\rangle &= \hbar \beta^+ \alpha |l, m\rangle = \beta^+ \hbar \sqrt{l+m} \left| l - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle; \end{aligned} \quad (98)$$

— эти операторы изменяют число  $m$  на  $\pm 1$  (т. е. значение  $M_z$  на  $\pm \hbar$ ), оставляя число  $l$  неизменным.

**14.3.3.** Итак, мы видим, что совокупность собственных векторов (97) с фиксированным  $l$  и меняющимся  $m$  образует подпространство, инвариантное относительно действия любого из операторов момента. Таким образом, в каждом из этих подпространств реализуется представление алгебры Ли (91). Все эти представления **неприводимы**. (Последовательным действием оператора  $M^+$  можно, согласно (98), получить из вектора  $|l, -l\rangle$  все остальные векторы подпространства вплоть до  $|l, l\rangle$ ):

$$|l, m\rangle = \left( \frac{M^+}{\hbar} \right)^{m+l} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}} |l, -l\rangle.$$

Точно так же

$$|l, m\rangle = \left( \frac{M^-}{\hbar} \right)^{l-m} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} |l, +l\rangle. \quad (99)$$

мы не будем доказывать, что они исчерпывают **все** неприводимые представления (91).

**14.3.4.** Найденные формулы позволяют без всяких хитростей выписать выражения для матричных элементов компонент момента между состояниями  $|l, m\rangle$  — «представители» этих операторов в представлении, в котором диагональны  $\mathbf{M}^2$  и  $M_z$

$$\begin{aligned}\langle l, m' | M^- | l, m'' \rangle &= \hbar \sqrt{(l - m'' + 1)(l + m'')} \delta_{m', m''-1} = \\ &= \hbar \sqrt{(l - m')(l + m' + 1)} \delta_{m', m''-1}, \\ \langle l, m' | M^+ | l, m'' \rangle &= \hbar \sqrt{(l - m' + 1)(l + m')} \delta_{m', m''+1} = \\ &= \hbar \sqrt{(l - m'')(l + m'' + 1)} \delta_{m', m''+1}\end{aligned}\quad (100)$$

и

$$\begin{aligned}\langle l, m' | M_x | l, m'' \rangle &= \\ &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{(l - m')(l + m'')} \delta_{m', m''-1} + \frac{\hbar}{2} \sqrt{(l + m')(l - m'')} \delta_{m', m''+1}; \\ \langle l, m' | M_y | l, m'' \rangle &= \\ &= \frac{\hbar}{2i} [-\sqrt{(l - m')(l + m'')} \delta_{m', m''-1} + \sqrt{(l + m')(l - m'')} \delta_{m', m''+1}]; \\ \langle l, m' | M_z | l, m'' \rangle &= \hbar m' \delta_{m', m''}.\end{aligned}\quad (101)$$

**14.4.** Важнейший результат проведенного рассмотрения — это то, что из перестановочных соотношений (91) следует спектр (96.3).

В частности, отсюда получается важное

**СЛЕДСТВИЕ:** Вектор момента нельзя направить точно по какому-то направлению. ■

Действительно,

$$M_x^2 + M_y^2 = \mathbf{M}^2 - M_z^2 = \hbar^2(l(l+1) - m^2) \geq \hbar^2 l,$$

т.е. если стремиться направить момент по одной оси, то в наилучшем случае, когда  $m = \pm l$ , все равно остается перпендикулярная составляющая  $M_{\perp} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \hbar \sqrt{l}$ . Только при больших числах  $l$ , что соответствует предельному переходу к классической теории, отношение этой перпендикулярной составляющей к составляющей вдоль избранного направления стремится к нулю

$$\frac{|M_{\perp}|}{|M_{\parallel}|} \geq \frac{\hbar \sqrt{l}}{\hbar l} = \frac{1}{\sqrt{l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0,$$

и момент снова начинает вести себя как «порядочный» классический вектор.

Напротив, в некоторой плоскости момент можно точно установить, если он целый. Для целого  $l$  есть EW  $m = 0$  и со-



стояние  $|l, 0\rangle$  отвечает тому, что весь вектор момента лежит в плоскости  $x, y$ .

**14.5.** Посмотрим теперь, как будут действовать на собственные векторы момента повороты системы отсчета вокруг оси  $z$  (Другие вращения будут действовать сложнее, и мы не будем в это углубляться.). Будем пользоваться той картиной, в которой операторы неподвижны, а преобразуются векторы состояния. Тогда, согласно (89.3), (90), при повороте вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$

$$|l, m\rangle \Rightarrow |\widetilde{l}, m\rangle = U_\varphi^{-1} |l, m\rangle; \quad U_\varphi = e^{\frac{i\varphi}{\hbar} M_z},$$

то есть

$$|\widetilde{l}, m\rangle = e^{-\frac{i\varphi M_z}{\hbar}} |l, m\rangle = e^{-im\varphi} |l, m\rangle. \quad (102)$$

**СЛЕДСТВИЕ 1:** Если собственные векторы  $|l, m\rangle$  можно записать в *координатном представлении*, то они зависят от угла  $\varphi$  как  $e^{im\varphi}$ . ■

**СЛЕДСТВИЕ 2:** Если сделать поворот на угол  $2\pi$ , то

$$|\widetilde{l}, m\rangle = e^{-2\pi im} |l, m\rangle = \pm |l, m\rangle,$$

судя по тому, цело  $m$  или полуцело. Но целость/полуцелость  $m$  определяется по (96.2) целостью/полуцелостью  $l$ . Следовательно, отмеченным нами в (96.2) двум сортам квантовых чисел  $l$  отвечают два класса представлений группы вращений — **однозначные** и **двузначные**.

Описываемым целыми  $l$  однозначным представлениям отвечают объекты, рассматриваемые в обычном тензорном исчислении: одномерному представлению с  $l = 0$  отвечают скаляры, трехмерным представлениям с  $l = 1$  — векторы, 5-мерным с  $l = 2$  — симметричные тензоры 2-го ранга со следом, равным нулю, и т. д.

Двузначным представлениям с полуцелым  $l$  отвечают новые объекты — **спиноры и симметричные спинтензоры** — которые изучаются в спинорном исчислении. ■

## 15. Реализации момента

**15.1.** Мы ввели оператор момента чисто абстрактным образом, как совокупность (деленных на  $-i\hbar$ ) генераторов группы вращений обычного трехмерного пространства. Не менее абстрактной была и найденная в предыдущем параграфе реализация этих операторов — операторы рождения и уничтожения  $\alpha^+, \beta^+$  и  $\alpha, \beta$  не имели никакой связи с динамическими пере-

менными физической системы, к которой относится рассматриваемый момент. Возникает естественный вопрос о существовании *физических* реализаций этого оператора, т. е. вопрос о том, можно ли построить операторы со свойствами (91) из основных динамических переменных физической системы, скажем из ее координат и импульсов со свойствами (51).

Простейшая реализация момента находится на основе много раз уже приходившей нам на помощь аналогии с классической механикой. Именно, если написать для момента одной материальной точки аналог классического выражения

$$\mathbf{m}_a = [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a] \quad (103.1)$$

(Прямые скобки с *точкой* между множителями означают здесь *векторное произведение*, а не коммутатор, в котором элементы всегда разделяются у нас *запятой*, а скобка снабжается индексом « — ». Вопрос о *порядке* расположения некоммутирующих операторов здесь вообще не возникает, поскольку в каждом члене векторного произведения участвуют только *разные* составляющие координаты и импульса), а для момента системы материальных точек — в соответствии с (86а) сумму таких выражений:

$$\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{m}_a = \sum_a [\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{p}_a], \quad (103.2)$$

то легко проверить, что для так определенных моментов будут выполняться перестановочные соотношения (91). Оказывается, однако, что на этом пути получаются (мы вскоре это увидим) *лишь целые* значения  $l$ , т. е. только тензорные представления группы вращений.

Поэтому можно было бы заподозрить, что двузначные представления с полуцелыми  $l$  не имеют отношения к физике. Опыт, однако, показал, что это не так, что объекты, описываемые полуцелыми представлениями, реально существуют в природе. Поскольку из классической аналогии для системы материальных точек такие представления получить нельзя<sup>1)</sup>, то это значит, что квантовомеханическая частица есть более богатое образование, чем материальная точка, что кроме координат частицы у нее есть некоторые внутренние степени свободы.

---

<sup>1)</sup> Невозможность существования прямых классических аналогов для объектов, описываемых представлениями с полуцелыми  $l$ , видна уже из того, что «величины» таких объектов принципиально определены лишь с точностью до знака. В квантовом описании, напротив, мы все время имеем дело с такими объектами, как векторы состояния, определенные с точностью даже до умножения на унитарный множитель.

Тут казалось бы очень соблазнительным рассматривать квантовые частицы если не как классические материальные точки, то как аналог классических твердых тел — как волчки. Оказывается, однако, что такая модель тоже не проходит для элементарных частиц. Не вдаваясь в подробности, скажем только, что момент волчка можно было бы менять, а собственные моменты элементарных частиц постоянны. Кроме того, попытки разрабатывать модели такого рода приводили к скоростям, большим скорости света.

Поэтому приходится принять, что элементарные частицы могут обладать внутренними степенями свободы — **собственным моментом** или **спином**, — не допускающими классического аналога. Такие степени свободы не допускают и наглядного описания, и нам не остается ничего иного, как принять, что сами чисто абстрактные построения предыдущего параграфа имеют физический смысл, хотя мы и не можем построить сколько-нибудь точно передающей свойства новых степеней свободы наглядной модели. Именно на этом пути появляются полуцелые моменты.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Тем самым мы — на этот раз особенно наглядным образом — знакомимся с весьма знаменательной чертой современной теоретической физики: перейдя к изучению явлений природы при условиях, существенно отличных от привычно воспринимаемых нашими органами чувств, ей приходится отказать от использования наглядных — т.е. в конечном счете механических — моделей и прибегать вместо этого к моделям математическим — логическим построениям чисто абстрактного свойства. ■

**15.2. Спин  $\frac{1}{2}$ .** Простейшим (и важнейшим) случаем полуцелого момента является случай  $l = \frac{1}{2}$ , — как раз половине равен собственный момент самых «обычных» элементарных частиц — электрона, протона и нейтрона. Построим для него не только алгебру Ли (93.3), но и всю обычную алгебру наблюдаемых.

Того ради удобно положить

$$\mathbf{M} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad \left( l = \frac{1}{2} \right), \quad (104.1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — новый оператор, удовлетворяющий в силу (91) перестановочным соотношениям

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta - \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2ie_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma. \quad (104.2)$$

Так как в рассматриваемом случае оператор  $M_z$  имеет только два EW-а  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , то оператор  $\sigma_z$  имеет только два собственных значения  $\pm 1$ , а, значит,  $\sigma_z^2$  — единственный EW  $+1$ . Следовательно,  $\sigma_z^2$  есть число; то же самое, конечно, должно быть и для  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$  (ср. лемму 2а, § 4):

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1. \quad (104.3)$$

Вычислим теперь выражение

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x &= \frac{1}{2i} \{ \sigma_x (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x) + (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x) \sigma_x \} = \\ &= \frac{1}{2i} (\sigma_x^2 \cdot \sigma_y - \sigma_y \cdot \sigma_x^2) = 0, \end{aligned}$$

учитывая (104.3). Следовательно, *разные операторы  $\sigma_\alpha$  антикоммутируют*:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (104.4)$$

Свойство антикоммутации позволяет объединить в (104.2) вторые члены слева с первыми, после чего оказывается, что (104.2) и (104.4) объединяются в компактную и красивую запись:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma, \quad (104.5)$$

выражающую декларируемое выше обстоятельство, что операторы  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  образуют алгебру не только относительно коммутирований (алгебру Ли), но и (вместе с единицей) относительно *обычного умножения*.

Все три оператора  $\sigma_\alpha$  являются, разумеется, **эрмитовыми** (таковы компоненты момента); кроме того, они являются, в силу свойства (104.3), одновременно и **унитарными**:

$$\sigma_\alpha^\dagger = \sigma_\alpha; \quad \sigma_\alpha \sigma_\alpha^\dagger = 1 \quad (\text{не суммируя по } \alpha!). \quad (104.6)$$

Поскольку каждый оператор  $\sigma_\alpha$  имеет лишь два EW-та, то естественно попробовать представить  $\sigma_\alpha$  двурядными матрицами.

Построим такое представление для случая, когда  $\sigma_z$  диагональна, т. е. имеет представителем  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Тогда, если написать для  $\sigma_x$  матрицу общего вида  $\sigma_x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , то  $\sigma_x \sigma_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$  и  $\sigma_z \sigma_x = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ , следовательно, в силу (104.4)  $a = d = 0$ . В силу эрмитовости должно быть  $c = b^*$ . Далее, вычисляя  $\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

видим, что должно быть  $b = e^{i\alpha}$ , т. е.  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ . То же рассуждение буквально справедливо и для матрицы, представляющей  $\sigma_y$ , т. е.  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\beta} \\ e^{-i\beta} & 0 \end{pmatrix}$  — с другой, разумеется, фазой  $\beta$ . Наконец  $\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$  дает  $\sigma_x \sigma_y = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\beta)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\alpha-\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$ , т. е.  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ . Одна фаза  $\alpha$  остается произвольной<sup>1)</sup>. Обычный выбор состоит в том, что полагаем  $\alpha = 0$ , после чего три матрицы приобретают вид:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (104.7)$$

Векторный оператор  $\sigma$  называют обычно **оператором спина**, а представляющие его матрицы — их принято, когда нет опасности недоразумения, обозначать теми же буквами  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  — **матрицами Паули**, по имени знаменитого швейцарского теоретика Вольфганга Паули, который впервые ввел их в физику. Как мы увидим ниже, совокупность этих трех матриц представляет собой объект, в некотором смысле основной для всей теории полуцелого спина.

**15.3. Спиноры.** Займемся изучением того, как ведут себя состояния «системы со спином  $\frac{1}{2}$ » при пространственных поворотах.

**15.3.1.** Если система описывается вектором состояния  $|\Psi\rangle$  то, согласно общим формулам (89.3), (90), при повороте (в картине, в которой преобразуются векторы состояния) этот вектор перейдет в

$$|\tilde{\Psi}\rangle = U_{\varphi, \mathbf{n}}^{-1} |\Psi\rangle = e^{-i \frac{\varphi}{\hbar} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})} |\Psi\rangle.$$

Для спина  $\frac{1}{2}$  имеем  $\mathbf{M} = \frac{\hbar}{2} \sigma$ , поэтому

$$|\tilde{\Psi}\rangle = e^{-i \frac{\varphi}{2} (\mathbf{n} \sigma)} |\Psi\rangle = \left\{ \cos \left\{ \frac{\varphi}{2} (\mathbf{n} \sigma) \right\} - i \sin \left\{ \frac{\varphi}{2} (\mathbf{n} \sigma) \right\} \right\} |\Psi\rangle.$$

<sup>1)</sup> Этот произвол отвечает тому, что репер  $(\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y)$  на плоскости  $(x, y)$  неотличим с точки зрения алгебры (104.5) от такого же репера, повернутого на произвольный угол вокруг оси  $Oz$ .

<sup>2)</sup> Естественно, что эти матрицы можно было бы получить и из общих формул (101).

Теперь мы можем использовать то отмеченное выше (алгебра (104.5)) замечательное свойство операторов  $\sigma$ , что все их степени выражаются через первые и единицу. Именно,

$$(\mathbf{n}\sigma)^2 = n_\alpha n_\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta = n_\alpha n_\beta (\delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma) = \mathbf{n}^2 = 1.$$

Но в разложении косинуса участвуют только *четные* степени; поэтому в его аргументе можно заменить  $(\mathbf{n}\sigma)$  единицей. В разложение же синуса входят только *нечетные*; поэтому из него выделяется общий множитель  $(\mathbf{n}\sigma)$ , все же остальные степени опять дадут единицу. Итак:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \left\{ \cos \frac{\Phi}{2} - i (\mathbf{n}\sigma) \sin \frac{\Phi}{2} \right\} |\Psi\rangle^{-1}. \quad (105.1)$$

Для дальнейших рассуждений удобно перейти от векторов состояния к их представителям в, скажем,  $M_z$ -представлении, используя в качестве полной системы «в спиновом пространстве» векторы  $|m = +1/2\rangle$  и  $|m = -1/2\rangle$  (или совекторы  $\langle m = +1/2|$  и  $\langle m = -1/2|$ ) и обозначая

$$\begin{pmatrix} \langle +1/2 | \Psi \rangle \\ \langle -1/2 | \Psi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \psi^\lambda, \quad \lambda = 1, 2. \quad (105.2a)$$

ЗАМЕТИМ то своеобразие этого перехода, что величины  $\psi^\lambda$ , будучи *представителем* вектора в пространстве спиновых состояний, вполне могут оставаться *вектором* (или — *волновой функцией*) в пространстве, в котором действуют наблюдаемые, отвечающие остальным динамическим переменным системы — координатам и импульсам — имеющим классический аналог. Поскольку спиновые динамические переменные  $\sigma_\alpha$  описывают новые внутренние степени свободы, то они коммутируют с «классическими» координатами и импульсами, и полное пространство векторов состояния системы можно считать прямым произведением «обычного квантовомеханического» пространства, в котором действуют операторы координат и импульсов, и «спинового» пространства, в котором действуют  $\sigma_\alpha$ . ■

В представителях (105.1) запишется как

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}^1 \\ \tilde{\psi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}^1 &= \alpha \psi^1 + \beta \psi^2, \\ \tilde{\psi}^2 &= \gamma \psi^1 + \delta \psi^2, \end{aligned} \quad (105.1a)$$

<sup>1)</sup> Бросается в глаза аналогия этого выделения множителя  $(\mathbf{n}\sigma)$  выделению мнимой единицы в формуле Эйлера  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ . Эта аналогия не случайна — алгебра  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  изоморфна алгебре кватернионов с тремя мнимыми единицами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

где матрица  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  есть представитель оператора  $\left\{ \cos \frac{\varphi}{2} - i(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2} \right\}$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - in_z \sin \frac{\varphi}{2} & (-n_y - in_x) \sin \frac{\varphi}{2} \\ (n_y - in_x) \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} + in_z \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \quad (105.3)$$

В силу унитарности  $U_{\varphi, \mathbf{n}}$  эта матрица унитарна:

$$\frac{\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}. \quad (105.3a)$$

Кроме того из (105.3) видно, что она обладает еще и тем свойством, что ее детерминант равен единице:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + n_z^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (n_y^2 + n_x^2) \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 \quad (105.3b)$$

— такие матрицы называют **специальными унитарными матрицами**. Благодаря (105.3b) соотношение (105.3a) дает нам условие

$$\delta = \alpha^* \quad \text{и} \quad -\beta = \gamma^*, \quad (105.3c)$$

т. е. эрмитово-сопряженной матрицей будет

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (105.3d)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Двурядная матрица  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  фиксировалась заданием четырех комплексных — т. е. восьми вещественных чисел; условия (105.3c) уменьшают число свободных параметров до четырех, а условие (105.3b) — до трех — как раз столькими параметрами и определяется поворот в вещественном 3-пространстве. ■

Итак, мы установили отображение вращений вещественного 3-пространства на специальные унитарные преобразования (105.1a) (с условиями (105.3b,c)) некоторого комплексного векторного 2-пространства. Векторы этого пространства  $\psi^\lambda$  называют (контравариантными) **спинорами**.

В этой терминологии представитель квантовомеханического вектора, описывающего спиновое состояние системы со спином  $1/2$ , есть контравариантный спинор.

**15.3.2.** Как будет преобразовываться при поворотах трехмерного пространства представитель совектора? Вводя для представителя совектора обозначения

$$(\langle \Phi | \frac{1}{2} \rangle, \langle \Phi | -\frac{1}{2} \rangle) = (\varphi_1, \varphi_2) = (\psi^1, \psi^2) \quad (105.2b)$$

и подвергая (105.1a) эрмитову сопряжению, придем к

$$(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix},$$

или, в силу (105.3d), к

$$(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= \delta\varphi_1 - \gamma\varphi_2; \\ \tilde{\varphi}_2 &= -\beta\varphi_1 + \alpha\varphi_2, \end{aligned} \quad (105.1b)$$

что можно переписать, записывая  $\varphi_\lambda$  также в виде столбца, как

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (105.1b')$$

Мы видим тем самым, что представитель совектора преобразуется при поворотах по представлению (105.1b), отличному от представления (105.1a), по которому преобразуются представители векторов, хотя и имеющему аналогичную структуру — в нашем спинорном пространстве имеются векторы двух родов. Двумерные комплексные векторы, преобразующиеся по (105.1b'), называются **ковариантными спинорами**.

Как и в нашей общей схеме пространств состояний, мы не будем вводить для двух контравариантных или двух ковариантных спиноров скалярного произведения в обычном смысле, но введем *скалярное произведение* одного ко- и одного контравариантного спинора

$$\varphi_\lambda \psi^\lambda = \varphi_1 \psi^1 + \varphi_2 \psi^2 = (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}^1$$

«по образу и подобию» скалярного произведения совектора на вектор. Существенно, что такое скалярное произведение ведет себя при вращениях как инвариант:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\lambda \tilde{\psi}^\lambda &= (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^1 \\ \tilde{\psi}^2 \end{pmatrix} = (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \\ &= (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & \delta\beta - \delta\beta \\ -\alpha\gamma + \alpha\gamma & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = (\varphi_1, \varphi_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = \varphi_\lambda \psi^\lambda, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Мы будем использовать для спинорных индексов, пробегающих два значения 1, 2, средние буквы греческого алфавита  $\lambda, \mu, \dots$  и подразумевать суммирование по повторяющимся (верхнему и нижнему) индексам от 1 до 2. Первые же греческие буквы  $\alpha, \beta, \dots$  мы сохраним для пробегающих три значения тензорных индексов обычного 3-пространства.



чем оправдывается как его название, так и сделанное выше утверждение, что представители вектора и совектора образуют величины, контраградиентные друг другу.

**15.3.3.** Для дальнейшего развития спинорной алгебры решающим оказывается следующее замечание. Перепишем формулы (105.1b) для преобразования ковариантного спинора (мы нарочно выписали их и в развернутом виде) в форме

$$(-\tilde{\varphi}_2) = \alpha(-\varphi_2) + \beta\varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_1 = \gamma(-\varphi_2) + \delta\varphi_1 \quad (105.1b'')$$

— тогда из них становится ясным, что из ковариантного спинора можно «перетасовкой компонент» образовать величину, преобразующуюся по матрице  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , т. е. контравариантный спинор:

$$\varphi^1 = -\varphi_2; \quad \varphi^2 = \varphi_1 \quad \text{и наоборот} \quad \varphi_1 = \varphi^2; \quad \varphi_2 = -\varphi^1. \quad (105.4a)$$

Эти соотношения можно записать в тензорной форме

$$\varphi_\lambda = \varepsilon_{\lambda\mu}\varphi^\mu; \quad \varphi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu}\varphi_\mu, \quad (105.4b)$$

если ввести два — ко- и контравариантный — единичных **спин-тензора** (т. е. два тензора в спинорном 2-пространстве)

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = -\varepsilon_{\mu\lambda}; \quad \varepsilon_{12} = 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon^{\lambda\mu} = -\varepsilon^{\mu\lambda}; \quad \varepsilon^{12} = -1. \quad (105.4c)$$

Компоненты этих тензоров не меняются при вращениях, как компоненты антисимметричных тензоров ранга, равного размерности пространства. Кроме того, как легко видеть,

$$\varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\nu \quad \text{и} \quad \varepsilon^{\lambda\mu}\varepsilon_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda. \quad (105.4d)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Иногда о введении этих тензоров говорят как о введении «антисимметричной» метрики и даже обозначают их как  $g_{\lambda\mu}$  и  $g^{\lambda\mu}$ . Действительная их природа совершенно другая; они суть *дискриминантные* тензоры в нашем двумерном пространстве. Необычность ситуации состоит лишь в том, что, в то время как в трехмерном пространстве с помощью дискриминантного тензора можно было сопоставить новый вектор (векторное произведение) *паре* векторов, в 4-пространстве — *тройке*<sup>1)</sup>, теперь же в пространстве *двух* измерений дискриминантный тензор сопоставляет новый вектор — *одному* вектору. Эта последняя особенность позволяет поднимать и опускать индексы с помощью дискриминантного тензора «как бы с помощью метрического». В «порядочном» метрическом 2-пространстве из каж-

<sup>1)</sup> Напомним, что как раз на примере псевдоевклидова 4-пространства мы видели, что дискриминантный тензор сопоставляет тройке векторов — вектор *другой вариантности*.

дого контравариантного вектора можно было бы образовать (инвариантным способом) целых *два* ковариантных: опуская индекс один раз с помощью метрического тензора, а другой раз — с помощью дискриминантного, и это были бы существенно *разные* векторы — в евклидовом случае, когда ко- и контравариантные векторы совпадают, это были бы два вектора, повернутых один относительно другого на  $90^\circ$ . ■

В интересующем нас спинорном случае указанное обстоятельство присутствует в слегка завуалированной форме: хотя из-за отсутствия явно введенной метрики мы можем казалось бы поднимать и опускать индексы, лишь прибегая к дискриминантному тензору (105.4с), фактически в нашем распоряжении всегда есть и другой способ, опирающийся на квантовомеханическое сопряжение.

В самом деле, исходя из некоторого совектора  $\langle \Phi |$  мы образовали ковариантный спинор  $\varphi_\lambda$  компоненты которого суть

$$\varphi_1 = \langle \Phi | \frac{1}{2} \rangle; \quad \varphi_2 = \langle \Phi | -\frac{1}{2} \rangle.$$

Поднимая в нем индексы с помощью  $\epsilon^{\lambda\mu}$ , получим контравариантный спинор  $\varphi^\lambda = \epsilon^{\lambda\mu} \varphi_\mu$  с компонентами

$$\varphi^1 = -\varphi_2 = -\langle \Phi | -\frac{1}{2} \rangle; \quad \varphi^2 = \varphi_1 = \langle \Phi | \frac{1}{2} \rangle. \quad (*)$$

С другой стороны, мы можем образовать из совектора  $\langle \Phi |$  квантовомеханическим сопряжением вектор, который по общему правилу должен называться  $|\Phi\rangle$ , а из него — контравариантный спинор с компонентами

$$\langle \frac{1}{2} | \Phi \rangle \text{ и } \langle -\frac{1}{2} | \Phi \rangle, \text{ равными } \varphi_1^* \text{ и } \varphi_2^*.$$

По логике вещей этот спинор следовало бы обозначить через  $\varphi^\lambda$  (или  $(\varphi^*)^\lambda$ ) — но он, как видим, совсем не равен уже введенному спинору (\*) (и не сопряжен ему).

Поэтому мы условимся — в соответствии с традицией — обозначать всегда одной и той же буквой пару спиноров, связанных тензором  $\epsilon_{\lambda\mu}$ , а для обозначения представителей отвечающих одному состоянию вектора и совектора нам придется использовать *разные* буквы.

**15.3.3.1.** Тензоры в спинорном пространстве (их называют **спинтензорами** или спинорами высшего ранга) вводятся в полной аналогии с обычной тензорной алгеброй —  $k$  раз ковариантным и  $s$  раз контравариантным спинтензором (спинором)

$$\Psi_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^{\mu_1 \dots \mu_s}$$

называют величину, преобразующуюся как произведение  $k$  ковариантных и  $s$  контравариантных спиноров. Индексы спинтензо-

ров можно поднимать или опускать с помощью дискриминантных тензоров  $\epsilon^{\lambda\mu}$  или  $\epsilon_{\lambda\mu}$ .

По двум индексам спинтензора — одному верхнему и одному нижнему — можно провести суммирование; ранг спинтензора понижается тогда на два. Если все индексы спинтензора переведены в одно — скажем, верхнее — положение, то его ранг можно понизить на два свертыванием по двум индексам с дискриминантным тензором  $\epsilon_{\lambda\mu}$ . Существенно, что при этом симметричный в  $\lambda$  и  $\mu$  спинтензор даст нуль. Поэтому спинтензор, симметричный во всех индексах (кратко говорят просто *симметричный* спинтензор или *симметричный спинор*), нельзя упростить никаким способом — симметричные спиноры неприводимы. Все компоненты симметричного спинора, индексы которых имеют равное количество единиц и двоек, равны между собой; поэтому симметричный спинор ранга  $p$  имеет  $(p+1)$  различную компоненту. Что же касается антисимметричных спинтензоров, то в двумерном пространстве может существовать такой тензор только второго ранга, и притом равный дискриминантному тензору, умноженному на скаляр.

**15.3.4.** Рассмотрим матричный элемент оператора  $\sigma$ , взятый между двумя какими-либо состояниями  $\langle\Phi|$  и  $|\Psi\rangle$ :

$$\bar{\sigma} = \langle\Phi|\sigma|\Psi\rangle = (\langle\Phi|^{1/2}, \langle\Phi|^{-1/2}) (\sigma) \begin{pmatrix} \langle^{1/2}|\Psi\rangle \\ \langle^{-1/2}|\Psi\rangle \end{pmatrix} = \varphi_{\lambda} \sigma^{\lambda}_{\mu} \psi^{\mu}, \quad (105.5a)$$

где мы перешли к представителям в спинорной записи, в которой матрицы  $(\sigma)$  будут объектами с двумя — верхним и нижним — спинорными индексами. Совершим в этом матричном элементе над  $\psi^{\mu}$  и  $\varphi_{\lambda}$  преобразования (105.1a) и (105.1b), не меняя  $\sigma^{\lambda}_{\mu}$ <sup>1)</sup>.

Тогда мы получим, что

$$\tilde{\bar{\sigma}} = \tilde{\varphi}_{\lambda} \sigma^{\lambda}_{\mu} \tilde{\psi}^{\mu} = (\varphi) \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} (\sigma) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (\psi),$$

или, в силу (105.3), (105.1),

$$\tilde{\bar{\sigma}} = (\varphi) \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i(\mathbf{n}\sigma) \sin \frac{\varphi}{2} \right) (\sigma) \left( \cos \frac{\varphi}{2} - i(\mathbf{n}\sigma) \sin \frac{\varphi}{2} \right) (\psi).$$

Для дальнейших упрощений заметим, что из алгебры сигм (104.5) следует, что

$$\sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{n} + i[\mathbf{n} \cdot \sigma] \quad \text{и} \quad (\sigma\mathbf{n}) = \mathbf{n} - i[\mathbf{n} \cdot \sigma].$$

<sup>1)</sup> Мы принимаем таким образом, что числа  $\sigma^{\lambda}_{\mu}$  одни и те же во всякой системе отсчета.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) \right) (\boldsymbol{\sigma}) \left( \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) \right) = \\
 & = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} + i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} ((\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})) + \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) = \\
 & = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \boldsymbol{\sigma} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}] + \sin^2 \frac{\varphi}{2} ((\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} + i[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}]) = \\
 & = \frac{1 + \cos \varphi}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sin \varphi [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}] + \frac{1 - \cos \varphi}{2} ((\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} + [\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}]] ) = \\
 & = \cos \varphi \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sin \varphi [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}] + (1 - \cos \varphi) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}).
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \cos \varphi \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \sin \varphi [\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}] + (1 - \cos \varphi) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (105.5)$$

Легко сообразить, что полученная формула есть не что иное, как закон преобразования вектора при конечных поворотах в обычном 3-пространстве. Проще всего усмотреть это обстоятельство, если перейти к бесконечно малому повороту  $\varphi \mathbf{n} \rightarrow \delta \varphi$ . Косинус превращается тогда в единицу, синус в свой аргумент, и (105.5) вырождается в формулу

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + [\delta \varphi \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}], \quad (105.5b)$$

которой мы многократно пользовались, начиная с классической механики.

ЗАМЕЧАНИЕ: В качестве «полезного побочного продукта» мы получили удобную формулу для записи преобразования любого вектора 3-пространства при конечном повороте <sup>1)</sup>:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \cos \varphi \mathbf{A} + \sin \varphi [\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}] + (1 - \cos \varphi) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}). \quad (105.5c)$$

Она поддается простой геометрической интерпретации. Если разложить  $\mathbf{A}$  на продольную и поперечную (относительно  $\mathbf{n}$ ) составляющие:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}; \quad \mathbf{A}_{\parallel} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}); \quad \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) = -[\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}]],$$

то (105.5c) переписывается как

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\perp} = \cos \varphi \mathbf{A}_{\perp} + \sin \varphi [\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_{\perp}]; \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\parallel} = \mathbf{A}_{\parallel}. \quad \blacksquare \quad (105.5c')$$

<sup>1)</sup> Если записать (105.5c) в тензорной форме  $\tilde{A} = L_{ij} A_j$ , то  $L_{ij}$  имеет форму  $A_{ij} = \delta_{ij} \cos \varphi - e_{ijk} n_k \sin \varphi + n_i n_j (1 - \cos \varphi)$ .

Таким образом, назначив числам  $\sigma_\alpha^\lambda{}_\mu$  быть одними и теми же во всех системах отсчета, мы получили, что  $\bar{\sigma}_\alpha = \varphi_\lambda \sigma_\alpha^\lambda{}_\mu \psi^\mu$  есть вектор; отсюда следует, что сами числа  $\sigma_\alpha^\lambda{}_\mu$  образуют **смешанный спинтензор второго ранга с векторными компонентами** (или **вектор со спинтензорными компонентами**) и при том такой, что его компоненты *не меняются* при поворотах<sup>1)</sup>. Понятно, что этот спинтензор играет фундаментальную роль в физической интерпретации любых фактов спинорной геометрии — ведь сами спиноры, как мы уже отмечали, ненаблюдаемы хотя бы из-за своей двужначности, а спинтензор ( $\sigma$ ) устанавливает связи между объектами спинорного и нашего обычного 3-мерного пространства, позволяя переходить от спиноров — к векторам, и от векторов — к спинорам.

**15.3.5.** Перепишем еще раз формулы (105.5a), образующие компоненты вектора из двух — ко- и контравариантного — спиноров, в развернутом виде, присоединив к ним и выражение для образованного из тех же спиноров скаляра — их скалярного произведения:

$$(105.5a') \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\sigma}_x = \varphi_1 \psi^2 + \varphi_2 \psi^1 & \bar{\sigma}_x = \varphi^2 \psi^2 - \varphi^1 \psi^1 \\ \bar{\sigma}_y = -i\varphi_1 \psi^2 + i\varphi_2 \psi^1 & \bar{\sigma}_y = -i(\varphi^2 \psi^2 + \varphi^1 \psi^1) \\ \bar{\sigma}_z = \varphi_1 \psi^1 - \varphi_2 \psi^2 & \bar{\sigma}_z = \varphi^2 \psi^1 + \varphi^1 \psi^2 \\ \bar{I} = \varphi_1 \psi^1 + \varphi_2 \psi^2 & \bar{I} = \varphi^2 \psi^1 - \varphi^1 \psi^2. \end{array} \right\} (105.5a'')$$

В правом столбце мы выписали те же формулы, заменив в них ковариантные компоненты спинора  $\varphi$  контравариантными согласно (105.4a). Поучительность последней формы записи состоит в том, что из нее сразу видно, что компоненты *вектора*  $\bar{\sigma}$  образуются только из *симметричного* спинтензора 2-го ранга

$$\psi_S^{\lambda\mu} = \frac{\varphi^\lambda \psi^\mu + \varphi^\mu \psi^\lambda}{2}, \quad (105.6.1)$$

<sup>1)</sup> Это рассуждение можно было бы, конечно, провести и в обратном направлении: Допустив, что (104.7) определяют  $\sigma_\alpha^\lambda{}_\mu$  лишь в одной фиксированной системе отсчета, мы могли бы назначить их значения в остальных системах по «спинтензор-векторному» закону преобразования (т.е. по (105.1a) по  $\lambda$ , (105.1b) по  $\mu$  и (105.5c) по  $\alpha$ ) — из чего уже следовала бы векторность  $\bar{\sigma}_\alpha$  — и обнаружили бы тогда, что они остаются неизменными в любой системе отсчета.

а единственная компонента скаляра совпадает с (единственной!) компонентой *антисимметричного* спинтензора

$$\psi_A^{\lambda\mu} = \frac{\phi^\lambda \psi^\mu - \phi^\mu \psi^\lambda}{2} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu} (\varepsilon_{\nu\rho} \phi^\nu \psi^\rho). \quad (105.6.2)$$

ОТСТУПЛЕНИЕ (15.3.5.1.): Остановимся еще специально на том случае, когда  $\langle \Phi |$  не описывает нового состояния, а есть совектор, квантовомеханически сопряженный вектору  $|\Psi\rangle$  (т. е. в обозначениях § 12  $\langle \Phi = \langle \Psi^* |$ ). Тогда (ср. (105.2b))  $\phi_1 = \psi^1$ ,  $\phi_2 = \psi^2$ , и, следовательно,  $\phi^1 = -\psi^2$ ,  $\phi^2 = \psi^1$ . Таким образом в этом случае (черта сверху означает теперь *среднее* по состоянию  $\Psi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \psi^1 \psi^2 + \psi^2 \psi^1 \\ \bar{\sigma}_y &= -i(\psi^1 \psi^2 - \psi^2 \psi^1) \\ \bar{\sigma}_z &= \psi^1 \psi^1 - \psi^2 \psi^2 \\ \bar{I} &= \psi^1 \psi^1 + \psi^2 \psi^2, \end{aligned} \right\} \quad (105.5a''')$$

обычное условие нормировки состояло бы в требовании  $\bar{I} = 1$ .

Итак, образовав средние по состоянию  $\Psi$  значения скаляра  $I$  и вектора  $\sigma$ , мы образовали из характеризующих состояние двух пар комплексно-сопряженных — т. е. четырех вещественных — чисел (или функций)

$$\psi^1, \quad \psi^1, \quad \psi^2, \quad \psi^2$$

четыре (тоже вещественных, как средние эрмитовых операторов) числа (функции)  $\bar{I}$ ,  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\sigma}_z$ . Поэтому можно было бы ожидать, что эти две четверки связаны взаимно-однозначным образом. Легко, однако, видеть, что все числа (105.5a''') не меняются, если подвергнуть  $\psi^1$  и  $\psi^2$  одновременному умножению на общий фазовый множитель:  $\psi^\lambda \rightarrow e^{i\alpha} \psi^\lambda$ ;  $\psi^\lambda \rightarrow e^{-i\alpha} \psi^\lambda$ . Поэтому четыре числа (105.5a''') не могут быть независимыми, но между ними должно быть минимум одно соотношение.

Чтобы найти его, запишем

$$\psi^1 = \rho_1 e^{i\alpha}; \quad \psi^2 = \rho_2 e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Тогда

$$\bar{I} = \rho_1^2 + \rho_2^2; \quad \bar{\sigma}_z = \rho_1^2 - \rho_2^2; \quad \bar{\sigma}_x = 2\rho_1\rho_2 \cos \beta; \quad \bar{\sigma}_y = 2\rho_1\rho_2 \sin \beta.$$

Отсюда уже ясно, что если образовать

$$(\bar{\sigma}_x)^2 + (\bar{\sigma}_y)^2 + (\bar{\sigma}_z)^2 = 4\rho_1^2\rho_2^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + (\rho_1^2 - \rho_2^2)^2 = (\rho_1^2 + \rho_2^2)^2,$$

то мы получим как раз  $(\bar{I})^2$ . Итак, искомое соотношение есть

$$(\bar{\sigma}_x)^2 + (\bar{\sigma}_y)^2 + (\bar{\sigma}_z)^2 = (\bar{I})^2,$$

или, если перейти к физическим средним, которые для ненормированного состояния с  $\bar{I} \neq 1$  суть, конечно,

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{I}}, \dots,$$

то

$$\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 = 1.$$

Итак, нельзя найти такое состояние, в котором все три  $\sigma_\alpha$  сразу будут иметь нулевые средние. ■

**СЛЕДСТВИЕ:** Если в некотором состоянии  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$ , то  $\langle \sigma_z \rangle = \pm 1$ , т. е. это состояние есть собственное для  $\sigma_z$ . ■

**ЗАМЕЧАНИЕ:** С точки зрения привычной тензорной алгебры удивительно, как из *одного* вектора  $\psi^\lambda$  можно образовать невырожденный (с  $|\psi^{\lambda\mu}| \neq 0$ ) тензор 2-го ранга  $\psi^{\lambda\mu}$ . Разъяснение связано с подчеркивавшимся выше фактом, что в *двумерном* пространстве всякому вектору однозначно сопоставляется другой, ему «ортогональный» — а из *пары* ортогональных векторов конечно можно построить невырожденный тензор 2-го ранга. ■

Вернемся к тому, что вектор  $\sigma$  образуется только из симметричного спинтензора (105.6.1), а скаляр — из антисимметричного (105.6.2). С точки зрения представлений группы вращений (реализаций алгебры Ли для момента) это обстоятельство должно означать, что «симметрированное» произведение представлений с  $l = \frac{1}{2}$  дает нам представление с  $l = 1$ , а «антисимметрированное» — с  $l = 0$ . В силу важности этого утверждения (в нем содержится, фактически, и уже прокламировавшееся более широкое утверждение, что из представлений с  $l = \frac{1}{2}$  можно построить представления со всеми  $l$ ) стоит остановиться на нем поподробнее.

**15.3.6.** Рассмотрим две разные (и независимые) «подсистемы», обладающие спином  $\frac{1}{2}$  каждая, и объединим их в общую систему с помощью процедуры, описанной в конце § 10. Пусть первая система описывается вектором состояния  $|\Psi_1\rangle$ , представителем которого в базисе  $\left( \begin{smallmatrix} 1\langle 1/2 | \\ 1\langle -1/2 | \end{smallmatrix} \right) = 1\langle \lambda |$  будет спинор  $\psi^\lambda$ , а вто-

рая — вектором состояния  $|\Psi_2\rangle$  с представителем  $\psi_2^\lambda$  в базисе  ${}_2\langle^\lambda|$ , т. е. пусть

$${}_1\langle^\lambda|\Psi_1\rangle = \psi_1^\lambda; \quad {}_2\langle^\lambda|\Psi_2\rangle = \psi_2^\lambda.$$

Тогда состояния всей системы будут описываться прямым произведением

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$$

в пространстве, базис которого можно образовать из прямых произведений базисных векторов пространств 1 и 2:  ${}_1\langle^\lambda| \otimes {}_2\langle^\mu|$ . Представителем  $|\Psi\rangle$  в этом базисе будет

$${}_1\langle^\lambda| \otimes {}_2\langle^\mu| \cdot |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle = {}_1\langle^\lambda|\Psi_1\rangle \cdot {}_2\langle^\mu|\Psi_2\rangle = \psi_1^\lambda \psi_2^\mu,$$

где  $\psi_1^\lambda$  и  $\psi_2^\mu$  пока — спиноры в двух разных спинорных пространствах 1 и 2. При повороте эти спиноры преобразуются согласно (105.1a):

$$\psi_1^\lambda \Rightarrow \tilde{\psi}_1^\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \psi_1^\lambda; \quad \psi_2^\lambda \Rightarrow \tilde{\psi}_2^\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \psi_2^\lambda$$

с *совпадающей* матрицей  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  (ее параметры определяются, как мы знаем, параметрами  $\phi$ ,  $\mathbf{n}$  поворота в обычном 3-пространстве); поэтому мы вправе *отождествить* оба спинорных пространства и считать, что представители  $\psi_1^\lambda$  и  $\psi_2^\mu$  векторов состояния обеих подсистем суть два спинора в одном и том же спинорном пространстве, а представитель  $\psi_1^\lambda \psi_2^\mu$  состояния всей системы есть спинтензор 2-го ранга в том же пространстве.

**15.3.6.1.** Как записать представитель оператора момента? Согласно нашим допущениям момент всей системы есть сумма моментов подсистем

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{m}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathbf{m}_2 = \frac{\hbar}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_2);$$

поэтому его представитель есть

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\nu\rho}_{\lambda\mu} &= {}_1\langle^\nu| \otimes {}_2\langle^\rho| \mathbf{M} |\lambda\rangle_1 \otimes |\mu\rangle_2 = \\ &= \frac{\hbar}{2} ({}_1\langle^\nu| \boldsymbol{\sigma}_1 |\lambda\rangle_1 \cdot {}_2\langle^\rho| I |\mu\rangle_2 + {}_1\langle^\nu| I |\lambda\rangle_1 \cdot {}_2\langle^\rho| \boldsymbol{\sigma}_2 |\mu\rangle_2), \end{aligned}$$



где мы обозначили через  $|\lambda\rangle_1$  векторы базиса, квантовомеханически сопряженного базису  $|\lambda\rangle_1$  (при этом, конечно,  $|\lambda\rangle_1 \neq \epsilon_{\lambda\mu} |\mu\rangle_1$ ) и аналогично для  $|\mu\rangle_2$ . Итак,

$$\mathbf{M}^{vp}_{\lambda\mu} = \frac{\hbar}{2} (\boldsymbol{\sigma}_1^v \cdot \delta_\mu^p + \delta_\lambda^v \cdot \boldsymbol{\sigma}_2^p).$$

Но *матрицы*  $(\boldsymbol{\sigma}_1)$  и  $(\boldsymbol{\sigma}_2)$  в первом и втором пространствах *одинаковы*. Поэтому у них можно опустить индекс, указывающий на номер подсистемы (у операторов  $\boldsymbol{\sigma}_1$  и  $\boldsymbol{\sigma}_2$  сделать это было, конечно, нельзя!) и записать

$$\mathbf{M}^{vp}_{\lambda\mu} = \frac{\hbar}{2} (\boldsymbol{\sigma}_\lambda^v \cdot \delta_\mu^p + \delta_\lambda^v \cdot \boldsymbol{\sigma}_\mu^p). \quad (105.7.1)$$

Итак, для оператора момента — так же как и для векторов состояния — при переходе от самого оператора к представителям прямые произведения объектов из *разных* пространств превращаются в произведения тензоров *одного* пространства<sup>1)</sup>.

Действие оператора момента на состояние системы запишется поэтому как

$$(\mathbf{M} |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle)^{vp} = \mathbf{M}^{vp}_{\lambda\mu} \psi_1^\lambda \psi_2^\mu = \frac{\hbar}{2} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_\lambda^v \psi_1^\lambda \psi_2^p + \psi_1^v \boldsymbol{\sigma}_\mu^p \psi_2^\mu \right\}. \quad (105.7.2)$$

В частности,

$$\begin{aligned} (M_z |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle)^{vp} &= \frac{\hbar}{2} \left\{ (-1)^{v-1} \psi_1^v \psi_2^p + (-1)^{p-1} \psi_1^v \psi_2^p \right\} = \\ &= \hbar \frac{(-1)^{v-1} + (-1)^{p-1}}{2} \psi_1^v \psi_2^p \quad (105.7.2a) \end{aligned}$$

— т.е. все  $\psi_1^v \psi_2^p$  суть собственные состояния  $M_z$ , причем относящиеся к EW-ам:

$$\begin{cases} \psi_1^1 \psi_2^1 & \text{к } m = +1, \\ \psi_1^1 \psi_2^2 \text{ и } \psi_1^2 \psi_2^1 & \text{к } m = 0, \\ \psi_1^2 \psi_2^2 & \text{к } m = -1, \end{cases} \quad (105.7.3)$$

<sup>1)</sup> Именно поэтому прямое произведение называют теперь часто тензорным.

**15.3.6.2.** Найдем представитель оператора  $M^2$ :

$$\begin{aligned}
 (M^2)^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} &= M^{\lambda''\mu''}_{\lambda'\mu'} \cdot M^{\lambda'\mu'}_{\lambda\mu} = \\
 &= \frac{\hbar^2}{4} \left( \sigma^{\lambda''}_{\lambda'} \delta^{\mu''}_{\mu'} + \delta^{\lambda''}_{\lambda'} \sigma^{\mu''}_{\mu'} \right) \left( \sigma^{\lambda'}_{\lambda} \delta^{\mu'}_{\mu} + \delta^{\mu'}_{\mu} \sigma^{\lambda'}_{\lambda} \right) = \\
 &= \frac{\hbar^2}{4} \left( (\sigma^2)^{\lambda''}_{\lambda} \delta^{\mu''}_{\mu} + \delta^{\lambda''}_{\lambda} (\sigma^2)^{\mu''}_{\mu} + 2\sigma^{\lambda''}_{\lambda} \sigma^{\mu''}_{\mu} \right) = \frac{\hbar^2}{2} \left( 3\delta^{\lambda''}_{\lambda} \delta^{\mu''}_{\mu} + \sigma^{\lambda''}_{\lambda} \cdot \sigma^{\mu''}_{\mu} \right).
 \end{aligned}$$

Но свернутое по векторному индексу выражение  $\sigma^{\lambda''}_{\lambda} \cdot \sigma^{\mu''}_{\mu} = \Sigma^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu}$  есть спинтензор с постоянными компонентами, а такой тензор в спинорном пространстве должен — как и во всяком другом — выражаться только через единичный спинтензор  $\delta^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu}$  или дискриминантные тензоры  $\epsilon_{\lambda\mu}$  или  $\epsilon^{\lambda''\mu''}$ . Интересующий нас спинтензор обладает симметрией

$$\Sigma^{\mu''\lambda''}_{\mu\lambda} = \Sigma^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu};$$

легко видеть, что единственные комбинации  $\delta$  и  $\epsilon$ , обладающие той же симметрией, суть  $\delta^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu}$  и  $\delta^{\lambda''\mu''}_{\mu\lambda}$  (третья комбинация той же симметрии  $\epsilon_{\lambda\mu} \epsilon^{\lambda''\mu''}$  выражается через первые две). Поэтому должно быть

$$\Sigma^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} = a\delta^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} + b\delta^{\lambda''\mu''}_{\mu\lambda}.$$

Для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  воспользуемся тем, что для любого  $\alpha$ :  $\delta^{\lambda''}_{\lambda'} \sigma^{\lambda''}_{\alpha} = 0$  ( $\text{Spur } \sigma_{\alpha} = 0$ ). Имеем:

$$\delta^{\lambda''}_{\lambda'} \Sigma^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} = \text{Spur } \sigma \cdot \sigma^{\mu''}_{\mu} = 0 = 2a\delta^{\mu''}_{\mu} + b\delta^{\mu''}_{\mu} = (2a + b)\delta^{\mu''}_{\mu}, \text{ т. е. } 2a + b = 0.$$

С другой стороны,

$$\delta^{\lambda''}_{\mu'} \Sigma^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} = (\sigma^2)^{\lambda''}_{\mu} = 3\delta^{\lambda''}_{\mu} = (a + 2b)\delta^{\lambda''}_{\mu}, \text{ т. е. } a + 2b = 3.$$

Отсюда

$$a = -1; \quad b = 2,$$

то есть

$$\sigma^{\lambda''}_{\lambda} \cdot \sigma^{\mu''}_{\mu} = -\delta^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} + 2\delta^{\lambda''\mu''}_{\mu\lambda},$$

и

$$(M^2)^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} = 2\hbar^2 \frac{\delta^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu} + \delta^{\lambda''\mu''}_{\mu\lambda}}{2} = 2\hbar^2 \delta^{\lambda''\mu''}_{(\lambda\mu)}. \quad (105.8.1)$$

Таким образом представитель  $M^2$  содержит оператор симметризации по  $\lambda$  и  $\mu$  и, следовательно, ведет себя различно по отношению к состояниям, симметричным и антисимметричным в подсистемах,

$$\psi^{\lambda\mu}_S = \frac{\psi^{\lambda}_1 \psi^{\mu}_2 + \psi^{\lambda}_2 \psi^{\mu}_1}{2} \quad (105.6'.1)$$

И

$$\psi_A^{\lambda\mu} = \frac{\psi_1^{\lambda}\psi_2^{\mu} - \psi_2^{\lambda}\psi_1^{\mu}}{2} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu} \left( \epsilon_{\nu\rho} \psi_1^{\nu} \psi_2^{\rho} \right). \quad (105.6'.2)$$

Именно:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{M}^2)_{\lambda'\mu'}^{\lambda\mu} \cdot \psi_S^{\lambda'\mu'} &= 2\hbar^2 \psi_S^{\lambda\mu}, \quad l=1, \\ (\mathbf{M}^2)_{\lambda'\mu'}^{\lambda\mu} \cdot \psi_A^{\lambda'\mu'} &= 0, \quad l=0. \end{aligned} \right\} \quad (105.8.2)$$

А это значит, что как раз эти комбинации суть собственные состояния  $\mathbf{M}^2$  для всей системы, причем симметричное есть состояние с  $l=1$ , а антисимметричное — с  $l=0$  в полном соответствии с полученными выше формулами (105.6), согласно которым из симметричных комбинаций  $\phi$  и  $\psi$  для одной частицы можно было построить вектор, а из антисимметричной — скаляр. Все они — согласно (105.7.3) — при фиксированных индексах  $\lambda$  и  $\mu$  суть также и собственные векторы  $M_z$ .

Что же касается несимметрированных произведений  $\psi_1^{\lambda}\psi_2^{\mu}$ , описывающих систему, подсистемы которой находятся в состояниях с определенными  $m_{1z}$  и  $m_{2z}$ , то они вообще говоря не суть представители собственных векторов  $\mathbf{M}^2$ , т.е. не отвечают определенным значениям (квадрата) полного момента системы.

Итак, мы подтвердили утверждение, что симметричный спинтензор 2-го ранга описывает состояние с  $l=1$ ; а симметричный спинтензор ранга 0 — т.е. скаляр — состояние с  $l=0$ . Аналогично устанавливается, что симметричный спинтензор ранга  $p$  описывает состояние с  $l = \frac{p}{2}$  <sup>1)</sup>.

**15.3.7.** Действительно, ситуация, в таких подробностях исследованная нами сейчас для случая объединения в одну систему двух

<sup>1)</sup> Для этого надо сперва установить — путем совершенно аналогичных рассуждений, — что действие оператора  $\mathbf{M}^2$  на спинор ранга  $p$  описывается формулой

$$\mathbf{M}^2 \psi^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \hbar^2 \left\{ \left( p - \frac{p^2}{4} \right) \psi^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + \sum_{1 \leq i < j \leq p} P(i, j) \psi^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \right\}, \quad (105.8.p)$$

где  $P(i, j)$  — оператор перестановки индексов  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$ . В применении к совершенно симметричному спинору все  $P(i, j) = 1$ , и правая часть (105.8.p) принимает вид

$$\hbar^2 \left\{ p - \frac{p^2}{4} + \frac{p(p-1)}{2} \right\} \psi^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \hbar^2 \frac{p^2 + 2p}{4} \psi^{(\dots)} = \hbar^2 l(l+1) \psi^{(\dots)},$$

если  $p = 2l$ .

независимых подсистем с  $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}$ , остается в основных чертах той же самой и для объединения подсистем с произвольными  $l_1$  и  $l_2$ . Состояние каждой из таких подсистем представляется в «ее» спинорном пространстве симметрическим спинтензором ранга  $p_i = 2l_i$ . Представителями прямых произведений состояний подсистем будут произведения

$$\psi_1^{\lambda_1 \dots \lambda_{p_1}} \psi_2^{\mu_1 \dots \mu_{p_2}} \quad (105.9.1)$$

симметричных спинтензоров  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые можно считать вложенными в одно спинорное пространство; они не будут относиться к определенным значениям  $l$  (хотя будут отвечать определенным  $m$ ). Определенным значениям  $l$  будут принадлежать только полностью симметричные спинтензоры, которые можно образовать из (105.9.1).

Простейший такой спинтензор получается при симметризации (105.9.1) во всех индексах  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}, \mu_1, \dots, \mu_{p_2}$ ; он будет отвечать моменту системы с  $l = l_1 + l_2$ :

$$\psi_{l_1+l_2}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}, \mu_1, \dots, \mu_{p_2})} = P(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}; \mu_1, \dots, \mu_{p_2}) \psi_1^{\lambda_1 \dots \lambda_{p_1}} \psi_2^{\mu_1 \dots \mu_{p_2}} \quad (105.9.2)$$

(здесь через  $P(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}; \mu_1, \dots, \mu_{p_2})$  обозначен оператор симметризации).

Дальнейшие состояния с определенными  $l$  получается, если до симметризации свернуть (105.9.1) по какой-либо паре индексов с дискриминантным тензором  $\epsilon_{\lambda\mu}$ . В силу симметрии обоих спиноров  $\psi_1$  и  $\psi_2$  можно свертывать только по паре индексов, взятых один у  $\psi_1$ , а второй у  $\psi_2$ ; благодаря той же симметрии несущественно, какой именно индекс выбирается у каждого спинора, и результат зависит лишь от числа свертываемых пар. Мы приходим таким образом к последовательности совершенно симметричных спинтензоров с убывающим от одного к другому на 2 рангом

$$\left. \begin{aligned} \psi_{l_1+l_2-1}^{\dots} &= P(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1-1}; \mu_1, \dots, \mu_{p_2-1}) \epsilon_{\lambda_{p_1} \mu_{p_2}} \psi_1^{\lambda_1 \dots \lambda_{p_1}} \psi_2^{\mu_1 \dots \mu_{p_2}}; \\ \psi_{l_1+l_2-2}^{\dots} &= P(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1-2}; \mu_1, \dots, \mu_{p_2-2}) \epsilon_{\lambda_{p_1} \mu_{p_2}} \cdot \epsilon_{\lambda_{p_1-1} \mu_{p_2-1}} \cdot \psi_1^{\dots} \psi_2^{\dots}; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (105.9.3)$$

отвечающих определенным квантовым числам полного момента системы

$$l = l_1 + l_2, \quad l_1 + l_2 - 1; \quad l_1 + l_2 - 2; \dots$$

Такой способ построения совершенно симметричных спинтензоров можно будет продолжать до тех пор, пока не исчерпаются на свертки все индексы того  $\psi$ , у которого их меньше, т. е. можно будет сделать

всего  $\min(p_1, p_2)$  шагов, а ранг последнего симметричного спинтензора будет равен

$$p_1 + p_2 - 2 \min(p_1, p_2) = |p_1 - p_2|,$$

т. е. он будет описывать состояние системы с  $l = |l_1 - l_2|$ .

Итак, объединяя в одну систему две независимые подсистемы с моментами  $l_1$  и  $l_2$ , мы можем выделить у полной системы состояния со значениями  $l$ , меняющимися от  $l_1 + l_2$  до  $|l_1 - l_2|$ :

$$l = |l_1 - l_2|; \quad |l_1 - l_2| + 1; \quad \dots; \quad (l_1 + l_2 - 1); \quad (l_1 + l_2). \quad (106.3)$$

Подсистемы в этих состояниях не будут обладать определенными  $m_1$  и  $m_2$  (но будут обладать определенным  $m = m_1 + m_2$ ).

**15.4.** В чем состоит физический смысл преобразований и рассуждений, которыми мы занимались в разделах **15.3.6,7**? Состояние двух квантовых систем с точки зрения их поведения при пространственных поворотах характеризовалось, пока мы рассматриваем их независимо друг от друга, заданием (квадрата) момента каждой системы и его проекции на выделенную ось — т. е. набором квантовых чисел

$$l_1, l_2, m_1 \quad \text{и} \quad m_2. \quad (106.1)$$

Проведенные в предыдущих разделах рассуждения показывают, что, рассматривая эти две системы как подсистемы одной общей системы, мы можем перейти для ее описания к другому набору коммутирующих наблюдаемых и характеризовать ее состояние заданием (квадратов) моментов каждой из подсистем и суммарными наблюдаемыми всей системы — квадратом полного момента  $\mathbf{M}^2$  и его проекцией на выделенное направление  $M_z$ , т. е. перейти от набора квантовых чисел (106.1) к другому набору

$$l_1, l_2, m = m_1 + m_2 \quad \text{и} \quad l. \quad (106.2)$$

Наблюдаемые нового набора действительно коммутируют друг с другом. В самом деле,  $M_z$  коммутирует с  $\mathbf{M}^2$  как проекция момента со своим квадратом (93.2), а с  $\mathbf{M}_1^2$  и  $\mathbf{M}_2^2$  — поскольку в коммутировании каждый раз будет участвовать только «своя» слагающая  $M_{1z}$  или  $M_{2z}$ . То же справедливо и для  $M_x$  или  $M_y$ , откуда следует и коммутативность  $\mathbf{M}^2$  с  $\mathbf{M}_1^2$  и  $\mathbf{M}_2^2$ .

Такой переход от индивидуальных наблюдаемых подсистем к суммарным наблюдаемым полной системы называют обычно **сложением моментов**<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> С математической точки зрения задача состоит, как легко видеть, в разложении прямого произведения неприводимых представлений алгебры Ли (91) (которое образует, вообще говоря, *приводимое* представление этой алгебры) в *прямую сумму* неприводимых.

**15.4.1.** Если не ставить себе целью полностью разрешить задачу сложения моментов, т. е. найти собственные векторы, отвечающие набору квантовых чисел (106.2) в виде явных линейных комбинаций собственных векторов, отвечающих набору (106.1), а желать лишь получить формулы (106.3), указывающие, какие значения (106.2) получатся при комбинировании (106.1) с фиксированными  $l_1$  и  $l_2$ , то результата можно достичь совсем просто, если исходить из подсчета числа состояний. (Ее решение потребовало бы довольно громоздких выкладок. Коэффициенты таких разложений одних собственных векторов по другим называются коэффициентами Клебша–Гордана; их значения для небольших квантовых чисел приводятся в книгах по квантовой механике или по теории групп.)

Нарисуем прямоугольную таблицу, столбцы которой будем нумеровать значениями  $m_2$ , а строки —  $m_1$ . В клетках таблицы расположатся состояния — прямые произведения состояний подсистем с определенными  $m_2$  и  $m_1$ , имеющие, следовательно, и определенное значение  $m = m_1 + m_2$ , которое мы и будем единственно отмечать. Тогда на каждой линии, параллельной побочной диагонали, расположатся состояния с одним и тем же  $m$ , из линейных комбинаций которых надо строить состояния с определенными  $l$ .

		$2l_2 + 1$					
		$m_2$	$l_2$	$l_2 - 1$	$l_2 - 2$	$\dots$	$-l_2$
$2l_1 + 1$	$m_1$						
	$l_1$	$l_1 + l_2$	$l_1 + l_2 - 1$	$l_1 + l_2 - 2$			$l_1 - l_2$
	$l_1 - 1$	$l_1 + l_2 - 1$	$l_1 + l_2 - 2$	$l_1 + l_2 - 3$		$l_1 - l_2$	$l_1 - l_2 - 1$
	$l_1 - 2$	$l_1 + l_2 - 2$	$l_1 + l_2 - 3$				
	$\vdots$						
	$\vdots$						
	$\vdots$						
	$l_1 - 2l_2$	$l_1 - l_2$					
	$\vdots$						
	$\vdots$						
	$-l_1$	$-(l_1 - l_2)$					

Первая такая линия, содержащая единственный элемент  $|\dots, l_1 + l_2\rangle = |l_1\rangle |l_2\rangle$ , будет отвечать значению  $m = l_1 + l_2$ . Это значение может относиться только к квантовому числу  $l = l_1 + l_2$ . Но тогда должны присутствовать все  $(2l + 1)$  со-

стояний, соответствующие всем значениям  $-l \leq m \leq +l$ , отвечающим полному моменту  $l_1 + l_2$ , т. е. значениям  $m = l_1 + l_2, (l_1 + l_2 - 1), (l_1 + l_2 - 2), \dots, (-l_1 - l_2)$ . Первое из них мы уже нашли, следующие должны получаться линейными комбинациями состояний, лежащих на одной побочной диагонали.

На второй побочной диагонали лежат два состояния  $|l_1 - 1\rangle |l_2\rangle$  и  $|l_1\rangle |l_2 - 1\rangle$ . Одна их линейная комбинация войдет, согласно сказанному, в число состояний, относящихся к полному моменту  $l = l_1 + l_2$ , вторая независимая комбинация может относиться только к полному моменту  $(l_1 + l_2 - 1)$  и его проекции на ось  $z$ , характеризуемой числом  $m = (l_1 + l_2 - 1)$ . Повторя приведенное рассуждение, заключаем, что должны присутствовать и остальные состояния, отвечающие полному моменту  $l = l_1 + l_2 - 1$  и всем допустимым значениям  $m$ .

Продолжение этих рассуждений приводит нас к тому, что состояния на каждой новой побочной диагонали должны допускать линейные комбинации, отвечающие всем уже найденным значениям  $l$ , и еще одну линейную комбинацию, относящуюся к значению  $l$ , на единицу меньшему последнего найденного. Так будет продолжаться до тех пор, пока мы не выйдем за «квадратную» часть таблицы, т. е. не достигнем ближайшего из углов — левого нижнего или правого верхнего. После прохода угла число состояний с данным  $m$  перестанет нарастать, и поэтому новых значений  $l$  более вводить не понадобится.

Ближайший угол введет для  $l$  последнее значение  $l = |l_1 - l_2|$ . Таким образом, образуя подходящие линейные комбинации состояний с квантовыми числами (106.1), мы построим состояния с параметризацией (106.2) со значениями

$$l = l_1 + l_2, \quad l_1 + l_2 - 1, \quad \dots, \quad |l_1 - l_2| \quad (106.3)$$

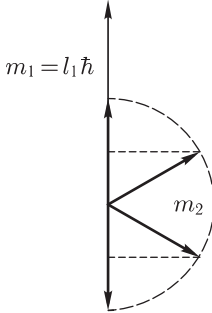
и всеми соответствующими значениями  $m$ .

Проверим, что мы приходим при этом к правильному полному числу независимых состояний. Каждому  $l$  соответствует  $(2l + 1)$  различных состояний; поэтому всему набору (106.3) будет соответствовать число состояний, равное сумме  $2 \min(l_1, l_2) + 1$  членов:

$$\begin{aligned} & [2(l_1 + l_2) + 1] + [2(l_1 + l_2 - 1) + 1] + \dots + [2|l_1 - l_2| + 1] = \\ &= \frac{1}{2} [2(l_1 + l_2 + |l_1 - l_2| + 1)] [2 \min(l_1, l_2) + 1] = \\ &= [2 \max(l_1, l_2) + 1] [2 \min(l_1, l_2) + 1] = (2l_1 + 1)(2l_2 + 1), \end{aligned}$$

— что как раз соответствует числу различных состояний в параметризации (106.1).

Итак, при сложении моментов  $l_1$  и  $l_2$  двух независимых систем мы получаем для полного момента все значения (106.3) от суммы до модуля разности складываемых моментов.



векторная модель

**15.4.2.** Заметим, что найденное **правило сложения моментов** допускает очень простое (хотя и нестрогое) наглядное истолкование. Будем рассматривать направление, по которому «направлен» один из моментов, скажем  $\mathbf{m}_1$ , как выделенное направление, проекция второго момента  $\mathbf{m}_2$  на которое определяется числом  $m_2$ . Тогда «векторная сумма» обоих моментов будет равна  $l = l_1 + m_2$ , т.е. будет принимать как раз требуемые формулой (106.3) значения от  $l = l_1 + l_2$  до  $l = l_1 - l_2$  (считаем, что  $l_1 \geq l_2$ ). Дефект этого рассуждения лежит, конечно, в том, что момент нельзя, как мы знаем, направить целиком по одному направлению (ср. 14.4). Последовательное использование такой картины привело бы для квадрата момента к значению  $\mathbf{M}^2 = \hbar^2 l^2$  вместо правильного выражения  $\mathbf{M}^2 = \hbar^2 l(l+1)$ ; тем не менее эта **векторная модель** сослужила немалую пользу на начальных этапах развития теории квант.

## 16. Уравнения движения

До сих пор все наше описание относилось к одному моменту времени — к описанию состояний и динамических переменных в этот фиксированный момент. Теперь нам надлежит установить связь между описанием системы в различные моменты времени — т.е. ввести динамику.

**16.1.1.** Чтобы описать поведение системы при временном сдвиге, мы опять, как и для пространственных сдвигов и поворотов, будем исходить из принципа соответствия, требуя, чтобы в квантовую теорию можно было бы перенести из классической соответствующие соотношения в скобках Пуассона.

В классической механике зависимость любой (не зависящей явно от времени) динамической переменной от времени описывалась скобкой Пуассона с фундаментальной для данной динамической системы динамической величиной — функцией Гамильтона

$$\dot{\alpha} = (H(p, q), \alpha). \quad (\text{I.60a})$$



Поэтому теперь мы, совершенно так же как для сдвигов и вращений, потребуем, чтобы временная зависимость любой (не зависящей от времени явно) динамической переменной  $\alpha$  задавалась бы уравнением

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{i}{\hbar} [H(t), \alpha(t)], \quad (107)$$

где  $H$  — некоторый, основной для характеристики рассматриваемой системы, оператор, который называется **оператор Гамильтона** или, кратко, **гамильтониан**.

Переходя к изменению операторов за конечный промежуток времени, мы можем, как и для пространственных сдвигов, проинтегрировать это уравнение <sup>1)</sup>, и получим тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t) &= U(t, t_0) \alpha(t_0) U^{-1}(t, t_0); \\ U(t, t_0) &= e^{i \frac{(t-t_0) H}{\hbar}}; \quad U^+(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0); \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

**состояния не зависят от времени.**

Уравнения (107) и (108) показывают, что и как меняется в рассматриваемой системе с течением времени, т. е. являются динамическими уравнениями или **уравнениями движения** системы.

Использованная в этих уравнениях форма описания движения системы называется **Гайзенберговой картиной**, говорят также и о **Гайзенберговом представлении**.

Эта картина наиболее близка к классическому способу описания движения — в ней зависят от времени динамические переменные, а описывающие состояние системы векторы — постоянны. Так построенные динамические переменные также называют гайзенберговскими динамическими переменными.

**16.1.2.** Мы уже знаем, однако, из § 13, что в квантовой механике такой способ описания — это не единственный способ описания изменения системы при каком-либо преобразовании симметрии. Точно так же, как и для пространственных движений, мы можем подвергнуть теперь все операторы, векторы и со-векторы общему унитарному преобразованию типа (88), выбирая

---

<sup>1)</sup> Мы принимаем здесь, что сам гамильтониан  $H$  не зависит от времени явно. В противном случае в выписанных формулах возникают осложнения, в природу которых мы пока не будем вдаваться.

в качестве унитарного оператора

зависящий от времени оператор  $U(t, t_0)$ ,

так что

$$|A\rangle \Rightarrow |A, t\rangle = U^{-1}(t, t_0) |A\rangle; \quad \langle B| \Rightarrow \langle B, t| = \langle B| U(t, t_0);$$

$$\alpha(t) \Rightarrow \tilde{\alpha}(t) = U^{-1}(t, t_0) \alpha(t) U(t, t_0) = U^{-1} U \alpha U^{-1} U = \alpha.$$

Итак, мы пришли к *другой картине*, в которой динамические переменные *не зависят* от времени (если только не зависят от времени явно),

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha, \quad (109.1)$$

а векторы и совекторы состояния зависят от времени <sup>1)</sup>:

$$|A, t\rangle = e^{-i \frac{(t-t_0) H}{\hbar}} |A, t_0\rangle; \quad (109.2)$$

$$\langle B, t| = \langle B, t_0| e^{i \frac{(t-t_0) H}{\hbar}}. \quad (109.3)$$

Дифференцируя второе из уравнений (109) по времени, получим уравнение движения в дифференциальной форме

$$i\hbar \frac{d|A, t\rangle}{dt} = H |A, t\rangle. \quad (110)$$

Это уравнение часто рассматривается как основное уравнение квантовой механики и называется **уравнение Шредингера** или, точнее, **временное уравнение Шредингера**.

Та картина, к которой мы пришли для описания движения с помощью (109), называется **Шредингеровой картиной** или **представлением Шредингера**. Соответственно, динамические переменные этой картины, не зависящие от времени, называют шредингеровыми динамическими переменными, а зависящие от времени векторы состояния — шредингеровыми векторами состояния.

**16.1.2.1.** Если перейти теперь (в рамках шредингеровой картины) к конкретному фиксированному представлению, в котором диагональны некоторые наблюдаемые  $\xi$ , образующие полный набор, то можно перейти к сокращенным обозначениям формул (80)–(82), т.е. вместо  $|A, t\rangle$  писать —  $\psi(\xi, t)$  или просто

<sup>1)</sup> Мы опять считаем, что  $H$  не зависит от времени явно.

$\psi(\xi, t)$ , если  $\langle \xi' | A, t \rangle = \psi^*(\xi', t)$ <sup>1)</sup>. В этих обозначениях временное уравнение Шредингера запишется в форме

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} = H \cdot \psi(\xi, t), \quad (110a)$$

в которой его и пишут в большинстве книг по квантовой механике. Это уравнение называют еще иногда *волновым уравнением*, а его решение — (зависящей от времени) *волновой функцией* системы. Основанием такой терминологии является то обстоятельство, что для системы, состоящей из одной свободной материальной точки, решением этого уравнения будут, как мы вскоре убедимся, плоские волны, распространяющиеся в обычном трехмерном пространстве (ср. замечание о конфигурационном пространстве в **10.8.3**)<sup>2)</sup>.

**16.2.** Изложенная схема возможных способов описания зависимости поведения квантовомеханической системы от времени является в двух отношениях — простейшей, и в ней возможны осложнения двоякого рода.

**16.2.1.** Первое осложнение возникает при желании включить в рассмотрение системы, гамильтониан которых может явно зависеть от времени. Уравнения движения (107) сохраняют при этом свою форму; можно будет и искать их решение в форме (108.1) преобразования посредством некоторого унитарного оператора  $U(t, t_0)$ ; однако выражение (108.2) этого унитарного оператора через не зависевший от времени гамильтониан не останется, конечно, более справедливым, и из формы (108.1) можно будет получить только дифференциальную связь между  $U$  и  $H(t)$ .

---

<sup>1)</sup> Полная система состояний  $\langle \xi' |$ , определяющая представление, не обязана иметь никакого отношения не только к зависимости от времени, но и вообще к рассматриваемой динамической системе — это просто некоторый базис в пространстве состояний.

<sup>2)</sup> Уравнение (110a) формально относится к параболическому типу, однако из-за стоящей слева мнимой единицы оно на самом деле ближе к гиперболическим. В самом деле, как раз такое уравнение получится, если для аналогичного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = H \psi$$

искать решение в виде  $\psi = e^{i\hbar t}$  и заменить при подстановке в уравнение множителем  $i\hbar$  *только одну* производную по времени.

В самом деле, дифференцируя (108.1) по времени, получаем <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^+(t, t_0) U \alpha U^+ + U \alpha \frac{\partial U^+}{\partial t} = \\ &= \left[ \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^+(t, t_0), \alpha(t) \right] \end{aligned}$$

и, поскольку это уравнение должно совпадать с (107), заключаем отсюда, что зависящий от времени гамильтониан  $H(t)$  должен выражаться через  $U(t, t_0)$  как

$$H(t) = -i\hbar \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} U^+(t, t_0). \quad (108.5)$$

Соотношение (108.5) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для нахождения  $U(t, t_0)$  по известному  $H(t)$ ; если бы оно было не операторным, а численным, то мы сразу выписали бы его унимодулярный интеграл как

$$U(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau}. \quad (*)$$

В нашем операторном случае дело, однако, существенно осложняется тем обстоятельством, что операторы  $H(t)$  для разных  $t$  не только не равны друг другу, но и не обязаны друг с другом коммутировать. Поэтому наивное использование решения (\*) привело бы нас к экспоненте от некоммутирующих операторов, смысл которой надо было бы еще уточнять. Оказывается, что такое уточнение можно совершить очень изящным способом, с помощью понятия, введенного американским физиком Фрименом ДАЙСОНОМ в 1949 году.

Пусть имеется несколько операторов, относящихся каждый к какому-то определенному моменту времени:  $L_1(t_1)$ ,  $L_2(t_2)$ ,  $L_3(t_3)$ , ... . Тогда их упорядоченным по времени или **хронологическим произведением** называют такое их произведение, в котором подразумевается, что сомножители должны быть расположены слева направо в порядке убывания времен, к которым они относятся. Для обозначения хронологических произведений

<sup>1)</sup> Мы пользуемся здесь тем, что из  $UU^+ = 1$  следует

$$\frac{dU}{dt} U^+ + U \frac{dU^+}{dt} = 0, \text{ т. е. } \frac{dU^+}{dt} = -U^+ \frac{dU}{dt} U^+.$$

пользуются помещаемым перед произведением символом  $T$  (поэтому кратко говорят и « **$T$ -произведение**»), таким образом

$$T\{L_1(t_1) \dots L_n(t_n)\} = L_{i_1}(t_{i_1}) \dots L_{i_n}(t_{i_n}),$$

если  $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$ .

Рассмотрим теперь интеграл (\*) уравнения (108.5), в котором порядок действия стоящих в показателе операторов  $H(t)$  определен условием хронологического упорядочения, как говорят, —  **$T$ -экспоненту** от интеграла гамильтониана

$$T\left\{e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau}\right\}. \quad (**)$$

Если заменить в ней стоящий в показателе интеграл римановой суммой

$$\int_{t_0}^t d\tau H(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \Delta t \cdot H(t_k); \quad t_n = t; \quad t_0 = t_0,$$

то в силу определения  $T$ -произведения экспонента превратится в (бесконечное в пределе) произведение экспонент

$$T\left\{e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H(\tau)}\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \cdot H(t_n)} \dots e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \cdot H(t_0)} \quad (***)$$

(иногда говорят о **фейнмановом мультипликативном интеграле**) от гамильтонианов в моменты времени, убывающие слева направо. Если выполнить теперь эрмитово сопряжение (\*\*\*), то порядок перемножения экспонент изменится на противоположный, т. е. при умножении (\*\*\*) на эрмитово-сопряженное выражение рядом окажутся (сопряженные) экспоненты, относящиеся к одному  $t$ , которое при перемножении дадут единицу, после чего рядом опять окажутся множители, относящиеся к одному — следующему — моменту времени, и этот процесс продлится, пока каждая из участвующих в (\*\*\*) экспонент не «погасится» сопряженной. Таким образом определяемый (\*\*\*) — т. е. (\*\*) — оператор *унитарен*.

Чтобы его можно было принять за решение

$$U(t, t_0) = T\left\{e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau}\right\} \quad (108.6)$$

уравнения (108.5), осталось еще убедиться, удовлетворяет ли он уравнению. Но последнее почти самоочевидно: при дифферен-

цировании (108.6) под знаком  $T$ -произведения появляется новый множитель  $\frac{i}{\hbar} H(t)$ , который по смыслу  $T$ -произведения должен стоять *слева* от всех остальных, т. е.

$$\frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} H(t) U(t, t_0),$$

откуда, благодаря унитарности  $U(t, t_0)$ , немедленно следует (108.5). Итак,

если гамильтониан системы может зависеть от времени, то решением гайзенбергова уравнения движения (107) является  $T$ -экспонента (108.6).

**16.2.2.** Второе осложнение связано с различными возможностями, которые открываются в выборе служащего для перехода от одной картины к другой унитарного преобразования типа (88). В **16.1.2** мы выбрали зависящий от времени унитарный оператор, осуществляющий такое преобразование, равным оператору эволюции (108.2). Что получится, если выполнить это преобразование с помощью какого-то произвольного унитарного оператора  $V(t, t_0)$ , т. е. положить

$$\begin{aligned} |\widetilde{A}, t\rangle &= V^+(t, t_0) |A\rangle; & \langle \widetilde{B}, t| &= \langle B | V(t, t_0); \\ \widetilde{\alpha}(t) &= V^+(t, t_0) \alpha(t) V(t, t_0) \quad ? \end{aligned} \quad (*)$$

Дифференцируя эти определения по времени, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{d|\widetilde{A}, t\rangle}{dt} &= -V^+ \frac{\partial V}{\partial t} V^+ |A\rangle = V^+ \left\{ -\frac{\partial V}{\partial t} V^+ \right\} V \cdot |\widetilde{A}, t\rangle; \\ \frac{d\langle \widetilde{B}, t|}{dt} &= \langle B | \frac{\partial V}{\partial t} = \langle \widetilde{B}, t| V^+ \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} V^+ \right\} V; \\ \frac{d\widetilde{\alpha}(t)}{dt} &= V^+ \frac{i}{\hbar} [H, \alpha(t)] V - V^+ \cdot \frac{\partial V}{\partial t} V^+ \alpha(t) V + V^+ \alpha(t) \frac{\partial V}{\partial t} V^+ V = \\ &= V^+ \left[ \frac{i}{\hbar} H(t) - \frac{\partial V}{\partial t} V^+, \alpha(t) \right]_- V = \\ &= \left[ V^+ \left( \frac{i}{\hbar} H(t) - \frac{\partial V}{\partial t} V^+ \right) V, V^+ \alpha(t) V \right]_- \end{aligned}$$

(мы рассматриваем случай, когда гамильтониан в гайзенберговой картине может зависеть от времени явно,  $H = H(t)$ ). Введем теперь оператор

$$h(t) = -i\hbar \frac{\partial V(t, t_0)}{\partial t} V^+(t, t_0), \quad (108.5')$$

связанный с  $V(t, t_0)$  так же, как гамильтониан  $H(t)$  был связан с оператором эволюции  $U(t, t_0)$ ; по смыслу своего определения оператор

$h(t)$  есть динамическая переменная в гайзенберговой картине. В нашей новой картине, определяемой преобразованием (\*), та же переменная будет изображаться по общему правилу оператором

$$\widetilde{h}(t) = V^+(t, t_0) h(t) V(t, t_0). \quad (108.5'')$$

С его помощью уравнения, выражающие временную зависимость векторов, совекторов и операторов в новой — тильдованной — картине, запишутся как

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\widetilde{A}, t\rangle}{dt} &= \widetilde{h}(t) |\widetilde{A}, t\rangle; & -i\hbar \frac{d\langle\widetilde{B}, t|}{dt} &= \langle\widetilde{B}, t| \cdot \widetilde{h}(t); \\ \frac{d\widetilde{\alpha}(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\widetilde{H}(t) - \widetilde{h}(t), \widetilde{\alpha}(t)] \end{aligned} \quad (**)$$

— т. е. в тильдованной картине вообще говоря зависят от времени и векторы, и операторы.

Третье из этих уравнений, выражающее зависимость операторов от времени, совершенно аналогично по своей форме уравнению движения (107) в гайзенберговой картине, отличаясь от него лишь заменой гамильтониана  $H(t)$  на «эффективный гайзенбергов гамильтониан»

$$\widetilde{H}_\Gamma(t) = \widetilde{H}(t) - \widetilde{h}(t). \quad (\widetilde{107a})$$

Первое же (второе не является независимым), выражающее зависимость от времени векторов состояния, совершенно аналогично уравнению Шредингера (110) с «эффективным шредингеровым гамильтонианом»

$$\widetilde{H}_\Pi(t) = \quad + \widetilde{h}(t). \quad (\widetilde{110a})$$

Итак, в тильдованной картине полная система уравнений движения содержит как уравнение Гайзенберга для операторов

$$\frac{d\widetilde{\alpha}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\widetilde{H}_\Gamma(t), \widetilde{\alpha}(t)], \quad (\widetilde{107})$$

так и уравнения Шредингера для векторов и совекторов

$$i\hbar \frac{d|\widetilde{A}, t\rangle}{dt} = \widetilde{H}_\Pi(t) \cdot |\widetilde{A}, t\rangle, \quad (\widetilde{110})$$

и временная эволюция (т. е. — динамика) определяется не одним гамильтонианом, а двумя  $\widetilde{H}_\Gamma(t)$  и  $\widetilde{H}_\Pi(t)$ .

При переходе от одной тильдованной картины к другой с помощью преобразования (\*) эти гамильтонианы преобразуются двояким образом: во-первых, они получают аддитивные добавки (противоположных знаков) (108.5'), а затем преобразуются как

все прочие операторы с помощью унитарного  $V(t, t')$  согласно третьей формуле (\*). Что же касается их суммы  $\tilde{H}_\Gamma + \tilde{H}_\Pi$ , то она испытывает лишь унитарное преобразование подобно всем остальным операторам. Ее средние значения не зависят поэтому от выбора картины; как раз они имеют физический смысл энергии.

Рассмотренные в **16.1.1** и **16.1.2** гайзенбергова и шредингера картины оказываются теперь предельными частными случаями общей тильдованной картины, выделенными той особенностью, что в каждой из них один из гамильтонианов — шредингеров в гайзенберговой и гайзенбергов в шредингеровой — обращается в нуль. Таким образом в них — и только в них — временная эволюция описывается *одним* гамильтонианом. В гайзенберговой картине это первоначальный гамильтониан  $H(t)$ , который логично обозначить как  $H(t) = H_\Gamma^H(t)$ , где верхний латинский индекс указывает на гайзенбергову картину, а нижний русский — на то, что это гайзенбергов гамильтониан, стоящий в уравнении (107).

В шредингеровой картине — если первоначальный гамильтониан  $H(t)$  зависит от времени, векторы состояния суть

$$|A, t\rangle^{\text{Sch}} = U^+(t, t_0) |A\rangle^H,$$

с оператором  $U(t, t_0)$ , задаваемым (108.6). Поэтому (при операции эрмитова сопряжения порядок операторов меняется на обратный; следовательно, хронологическое произведение  $T$  переходит в **антихронологическое**  $\bar{T}$ , в котором операторы идут слева направо в порядке *возрастания* времен!)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |A, t\rangle^{\text{Sch}}}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{T} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau} \right\} |A\rangle^H = \\ &= \bar{T} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau} H(t) \right\} |A\rangle^H = U^+(t, t_0) H(t) |A\rangle^H = \\ &= U^+(t, t_0) H(t) U(t, t_0) |A, t\rangle^{\text{Sch}}. \end{aligned}$$

Таким образом в случае, когда первоначальный гамильтониан зависит от времени, уравнение Шредингера в шредингеровой картине имеет форму

$$i\hbar \frac{\partial |A, t\rangle^{\text{Sch}}}{\partial t} = H_\Pi^{\text{Sch}}(t) |A, t\rangle^{\text{Sch}} \quad (110t)$$



с шредингеровым гамильтонианом в шредингеровой картине

$$H_{\text{Ш}}^{\text{Sch}}(t) = U^+(t, t_0) H(t) U(t, t_0) = U^+(t, t_0) H_{\Gamma}^H(t) U(t, t_0). \quad (110t.a)$$

Если же зависимость  $H(t)$  отсутствует,  $H(t) = H$ , то  $U(t, t_0)$  в (110t.a) будет задаваться простым выражением (108.2), коммутирующим с не зависящим от времени  $H$ , благодаря чему окажется просто

$$H_{\text{Ш}}^{\text{Sch}} = H.$$

Таким образом, если мы — как то делалось в **16.1** — ограничиваем себя рассмотрением только гайзенберговой и шредингеровой картин и при том для систем, гамильтониан которых не зависит от  $t$ , то нам оказывается достаточным всего лишь два гамильтониана, и при том равных друг другу. Для понимания общей структуры квантовой динамики, однако, необходимо только что проведенное рассмотрение общего случая.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Заканчивая первую часть этого курса — классическую механику, — мы отметили парадоксальную ситуацию, которая возникает там при использовании метода Гамильтона–Якоби, в котором ищут такое каноническое преобразование, которое обращало бы функцию Гамильтона системы в нуль — такая функция Гамильтона не зависит от времени явно, сохраняется, но не имеет никакого отношения к энергии системы. Теперь мы видим, в чем тут дело — в классической механике из двух гамильтонианов  $H_{\Gamma}$  и  $H_{\text{Ш}}$  остается аналог только гайзенбергова гамильтониана  $H_{\Gamma}$  — он-то и обращается в нуль в процедуре Гамильтона–Якоби, которая аналогична переходу к шредингеровой картине. В квантовой теории в этой картине возникает другой гамильтониан  $H_{\text{Ш}}$ , который управляет временной зависимостью векторов состояния, — но векторы состояния не имеют классического аналога, и поэтому в классическом рассмотрении этот новый объект исчезает из виду. Впрочем, это исчезновение не совсем бесследно: в классическом описании сохраняется величина, связанная с квантомеханическим оператором эволюции  $U(t, t_0)$  (мы не будем сейчас устанавливать характер этой связи) — это производящая функция  $\phi$  канонического преобразования Гамильтона–Якоби, которая удовлетворяла там **уравнению Гамильтона–Якоби** (I.77). Поэтому именно это уравнение оказывается «классическим следом» уравнения Шредингера и может быть получено из него соответствующим предельным переходом. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 2:** Поскольку в шредингеровой или гайзенберговой картине уравнения квантовой динамики выглядят проще, чем

уравнения (107), (110) «тильдованной» картины, то возникает естественный вопрос, а зачем вообще вовлекать в рассмотрение ведущий казалось бы лишь к дополнительным осложнениям общий случай произвольной картины? Ответ состоит в том, что очень часто приходится сталкиваться со случаями, когда временная эволюция квантовой системы состоит — если можно так выразиться — из двух составляющих, одна из которых тривиальна в том смысле, что мы хорошо умеем с ней обращаться, а другая составляет истинную проблему. Так вот, чтобы «тривиальная» составляющая временной эволюции не усложняла дополнительно «нетривиальную» часть, их удобно разделить, выбрав такую картину, в которой  $H_I$  содержит только «тривиальные» члены, а все нетривиальные сосредоточены в  $H_{III}$ . Тогда при отсутствии нетривиального взаимодействия эта картина оказалась бы гайзенберговой картиной, в которой векторы состояния не зависят от времени, и, следовательно, все изменение векторов состояния со временем связано только с нетривиальной частью взаимодействия. Такую картину называют **картиной Дирака** или — пожалуй чаще — **представлением взаимодействия**. Техника использования представления взаимодействия была разработана в конце 40-х годов в связи с релятивистской квантовой теорией, но оказалась очень удобной и для нерелятивистских квантовомеханических задач. ■

**16.3.1.** Вернемся к рассмотрению систем, гамильтониан которых не зависит от времени явно. Для них формулы (109) в шредингеровой или (108) в гайзенберговой картинах дают *решение* основной задачи динамики — нахождения движения. Однако практической пользы от этих «решений» пока еще очень мало вследствие трудности каких-либо реальных вычислений с экспонентой от оператора — в нашем случае — от гамильтониана. Действительно, даже если выбрать конкретное фиксированное представление, то представителем гамильтониана будет, вообще говоря — бесконечномерная матрица, и речь будет идти о практическом вычислении (и суммировании!) всех ее степеней.

Делу, однако, можно в сильной степени помочь, если выбрать представление, в котором рассматриваются векторы и операторы, специальным рациональным образом. Мы уже знаем, что выбрать представление — это значит выбрать некоторый полный набор коммутирующих наблюдаемых, которые будут в этом представлении диагональны. Выберем такой набор коммутирующих наблюдаемых, чтобы одной из них был бы гамильтониан.

Что за наблюдаемые коммутируют с гамильтонианом?

Если какая-либо динамическая переменная  $\alpha$  коммутирует с гамильтонианом, то в силу уравнения (107) в гайзенберговой картине

$$\text{из } [H, \alpha] = 0 \text{ следует } \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \alpha(t)] = 0, \quad (111)$$

то есть такая переменная  $\alpha$  является *интегралом движения*.

Итак, выберем в качестве определяющих представление операторов полный набор из гамильтониана и взаимно коммутирующих интегралов движения, и обозначим совокупность операторов этого полного набора одной буквой  $\alpha$ <sup>1)</sup>. Соответствующие базисные векторы и со-векторы можно будет тогда записать как  $|\alpha''\rangle$  и  $\langle\alpha'|$ ; все они будут собственными состояниями гамильтониана  $H$ , т. е. будет

$$H|\alpha''\rangle = E(\alpha'')|\alpha''\rangle; \quad \langle\alpha'|H = \langle\alpha'|E(\alpha'),$$

где через  $E' = E(\alpha')$  обозначено собственное значение гамильтониана в состоянии  $|\alpha'\rangle$ . (Собственные значения гамильтониана принято обозначать буквой  $E$ , в аналогии с тем, как в классической механике численные значения сохраняющейся функции Гамильтона принято называть энергией системы.) Выписывая теперь представитель (в  $\alpha$ -представлении) какой-либо динамической переменной  $\beta(t)$ , получаем в силу (108):

$$\begin{aligned} \langle\alpha'|\beta(t)|\alpha''\rangle &= \langle\alpha'|e^{i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}}\beta_0e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}}|\alpha''\rangle = \\ &= e^{i\frac{(E'-E'')(t-t_0)}{\hbar}}\langle\alpha'|\beta_0|\alpha''\rangle, \quad \text{если } H|\alpha''\rangle = E''|\alpha''\rangle, \end{aligned} \quad (112)$$

— т. е. в выбранном нами представлении представители всех зависящих от времени наблюдаемых зависят от времени гармонически, с амплитудой, равной представителю той же наблюдаемой в начальный момент времени<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Не обязательно, конечно, требовать, чтобы сам гамильтониан  $H$  был одной из наблюдаемых полного набора  $\alpha$ . Достаточно, чтобы он был *их функцией*, как то наверняка и будет, если все наблюдаемые набора суть интегралы движения, согласно теореме (из 7.4) об операторе, коммутирующем со всеми наблюдаемыми полного набора.

<sup>2)</sup> Существо перехода от общей формы временной зависимости (108) к специальной форме (112) состоит, конечно, в том, что, столкнувшись с необходимостью вычислять экспоненты от матрицы, мы заметили, что задача сведется к вычислению численных экспонент, если предварительно привести матрицу к диагональному виду.

Выбранное нами представление называют **специальным представлением Гайзенберга**. Именно в этом представлении была сформулирована первоначальная форма квантовой (или **матричной**) механики, открытая ГАЙЗЕНБЕРГОМ в 1925 году.

**16.3.2.** В *шредингеровой* картине аналогичное упрощение возникает, если рассмотреть зависимость от времени не произвольных состояний, а таких, которые являются собственными состояниями гамильтониана (и, может быть, еще каких-то наблюдаемых  $\gamma$ , образующих вместе с ним полный набор<sup>1)</sup>). Для таких состояний мы опять (теперь из (109)) получим:

$$|E, \gamma', t\rangle = e^{-i \frac{H(t-t_0)}{\hbar}} |E, \gamma', t_0\rangle = e^{-i \frac{E(t-t_0)}{\hbar}} |E, \gamma', t_0\rangle, \quad (113)$$

если

$$H |E, \gamma', t_0\rangle = E |E, \gamma', t_0\rangle.$$

Таким образом собственный вектор гамильтониана в начальный момент времени  $t_0$  остается собственным вектором  $H$  и в другие моменты времени и лишь умножается на гармонический фазовый множитель. Само же состояние, следовательно, *вовсе не меняется*. Такие состояния называются **стационарными**.

Переходя теперь к представителям в каком-то *фиксированном*  $\xi$ -представлении, получим, что волновая функция  $\psi_E(\xi, t)$  стационарного состояния зависит от времени как

$$\psi_E(\xi, t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \psi_{E,0}(\xi), \quad (113a)$$

а уравнение Шредингера упростится до

$$H \cdot \psi_{E,0}(\xi) = E \cdot \psi_{E,0}(\xi) \quad (110b)$$

— уравнения Шредингера, не зависящего от времени, или просто **уравнения Шредингера** (говорят также **стационарное** уравнение Шредингера).

Уравнения (110a) и (110b) были найдены Шредингером в 1926 году и составили основу его **волновой** механики.

**16.3.3.** Как же можно теперь сформулировать основную задачу квантовой механики?

В классической механике основная задача состояла в том, чтобы найти движение системы, функция Гамильтона которой задана. В квантовой механике, как мы теперь видим, аналогичная проблема существенно упрощается — и в гайзенберговой

<sup>1)</sup> И в этом случае, конечно, достаточно, чтобы гамильтониан был функцией полного набора, определяющего состояния.

и в шредингеровой картине, — если найти предварительно собственные значения и собственные векторы гамильтониана, т. е. решить EWP-у для  $H$ :

$$(A.1) \quad H |E\rangle = E |E\rangle.$$

Но собственные значения гамильтониана обычно вырождены; чтобы снять это вырождение, надо достроить к гамильтониану полный набор взаимно коммутирующих интегралов движения  $\alpha$ :

$$(A.2) \quad [H, \alpha] = 0; \quad [\alpha_i, \alpha_j] = 0,$$

и решить совокупную EWP-у:

$$(A.3) \quad \begin{cases} \alpha | \alpha' \rangle = \alpha' | \alpha' \rangle, \\ H | \alpha' \rangle = E(\alpha') | \alpha' \rangle. \end{cases}$$

Коль скоро (A.1–3) выполнено, то будет найден спектр энергии системы  $E(\alpha')$  и построен такой базис  $|\alpha'\rangle$  в пространстве состояний, что либо его векторы зависят от времени гармонически с частотами  $\omega = \frac{E(\alpha')}{\hbar}$  (в шредингеровой картине), либо представители любых наблюдаемых в нем зависят от времени гармонически согласно (112) (в гайзенберговой картине).

Тем самым формально задача определения временной зависимости наблюдаемых и состояний решена, но физически это еще далеко не все: наблюдаемые  $\alpha$  могут быть не теми наблюдаемыми, которые нас интересуют, не теми наблюдаемыми, которым можно придать ясный физический смысл на основе принципа соответствия. Будем называть эти последние — с ясным физическим смыслом — наблюдаемые  $\xi$ ; очень часто это — координаты системы, иногда — ее импульсы. Будем считать, что мы знаем решение EWP-ы для них:

$$(B.1) \quad \xi | \xi' \rangle = \xi' | \xi' \rangle,$$

т. е. их спектр и собственные векторы. Тогда физически под решением квантовомеханической задачи имеют в виду не только ее формальное решение, т. е. выполнение программы (A.1–3), но и возможность интерпретировать это решение в терминах  $|\xi'\rangle$  и  $\xi'$  (т. е. в терминах  $\psi(\xi)$ ). А для этого надо еще найти матрицу преобразования от  $\alpha$ -представления к  $\xi$ -представлению:

$$(B.2) \quad \langle \xi' | \alpha' \rangle.$$

Эта матрица есть совокупность

- (I) представителей  $\langle \xi' |$  в  $\alpha$ -представлении,
- и в то же время совокупность
- (II) представителей  $|\alpha'\rangle$  в  $\xi$ -представлении.

Если мы исходим при ее определении из понимания (I), то такой подход отвечает работе в специальном представлении Гайзенберга. Если из понимания (II), — то работе в специальном представлении Шредингера.

Итак, решение основной задачи квантовой динамики, задачи о «движении» системы сводится к тому, чтобы  
*в гайзенберговой картине:*

Найти полный набор интегралов движения, решить для них EWP-у, а затем найти представители интересующих нас динамических переменных — скажем, координат или импульсов — в том представлении, в котором этот набор диагонален.

*в шредингеровой картине:*

Найти собственные состояния (собственные волновые функции) некоторого полного набора интегралов движения в том представлении, в котором диагональны интересующие нас переменные — скажем, координаты или импульсы.

Мы видим, что решение и той и другой задачи сводится к проблемам собственных значений, причем к проблемам собственных значений, формулируемых в терминах операторов и векторов, относящихся к *одному фиксированному моменту времени*. Коль скоро же эта EWP разрешена, то сама временная зависимость выписывается в виде тривиальных формул (112) или (113).

Именно это обстоятельство мы имели в виду в самом начале, в **2.1**, когда говорили, что все существо квантовой механики связано с описанием состояний (и динамических переменных) в фиксированный момент времени, в то время как собственно динамические проблемы, проблемы зависимости от времени, являются в поясненном выше смысле тривиальными.

**16.4.** Откуда следует брать выражение для гамильтониана — вид его зависимости от координат и импульсов? Строго говоря, — как то мы уже несколько раз отмечали, — ниоткуда: задать гамильтониан — это и значит специфицировать систему, которую мы желаем изучать. В этом обстоятельстве, впрочем, нет ничего особенного для квантовой механики — в классической теории, когда опыт приводит нас к потребности описывать какую-либо совсем новую систему, у нас тоже может не оказаться другого выбора, как подбирать для нее вид функции Гамильтона методом проб и ошибок, добиваясь согласования динамических предсказаний с наблюдениями.

Новый момент возникает, однако, если мы хотим, как то часто бывает, строить квантовое описание не какой-то системы,

а такой, классическое описание которой нам известно. В этом случае руководящим соображением должен, как всегда, послужить принцип соответствия: в качестве первой попытки построить квантовое описание следует взять классическую функцию Гамильтона и попробовать заменить в ней классические координаты и импульсы на соответствующие операторы квантовой теории.

Действие это неоднозначно, поскольку квантовые операторы координат и импульсов не коммутируют друг с другом, и из одной классической функции Гамильтона можно построить несколько квантовых гамильтонианов, различающихся порядком следования операторов в произведениях. В действительности такая неоднозначность появляется даже и в тех случаях, когда классическая функция Гамильтона не содержит произведений некоммутирующих величин — ведь к ней всегда можно прибавить члены, пропорциональные  $i[p_j, q_j]$ , равные в классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  нулю.

Детали возникающей ситуации проще всего пояснить на конкретных примерах, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

## 17. Первый пример. Осциллятор

В качестве первого примера, на котором очень удобно проследить в деталях процесс перехода от классического описания к квантовому, поскольку в нем все что нужно без труда вычисляется в явном виде, рассмотрим линейный гармонический осциллятор.

**17.1.** В классической механике осциллятор описывался функцией Гамильтона

$$H_c = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2). \quad (*)$$

Первое замечание в связи с переходом к квантовому описанию связано с вопросом об однозначности. Не нарушая принципа соответствия, можно добавить к (\*) выражение вида <sup>1)</sup>

$$i c \omega [p, q] - ,$$

где — если мы не хотим нарушать квадратичной зависимости гамильтониана (\*) от координат и импульсов, с которой связана

---

<sup>1)</sup> Можно, конечно, «портить» гамильтониан и другими способами. Но тогда о выполнении принципа соответствия надо будет специально заботиться.

линейность уравнений, —  $c$  есть произвольная вещественная константа<sup>1)</sup>. Правда, на первый взгляд такая добавка выглядит совершенно искусственной. Покажем, что при более внимательном подходе это не так.

**17.1.1.** Итак, запишем гамильтониан, призванный описывать квантовый гармонический осциллятор, в виде

$$H_q = \frac{1}{2m} (p^2 + (m\omega)^2 q^2) + i\omega c [p, q]_-, \quad (114)$$

где  $c$  — постоянная.

Введем теперь вместо  $p$  и  $q$  динамические переменные  $a^+$ ,  $a$ , которыми мы пользовались в § 10, по формулам (53):

$$p = \sqrt{\frac{\alpha\hbar}{2}} (a^+ + a); \quad q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\alpha}} \frac{1}{i} (a^+ - a); \quad [a, a^+]_- = 1. \quad (53)$$

Тогда в новых переменных

$$\begin{aligned} p^2 + (m\omega)^2 q^2 &= \\ &= \frac{\alpha\hbar}{2} (a^+ a^+ + aa + a^+ a + aa^+) + \frac{(m\omega)^2 \hbar}{2\alpha} (-a^+ a^+ - aa + a^+ a + aa^+) =, \end{aligned}$$

если положить  $\alpha = m\omega$ ,

$$= m\omega\hbar (a^+ a + aa^+)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} H_q &= \frac{m\omega\hbar}{2m} (a^+ a + aa^+) + \omega\hbar c = \\ &= \omega\hbar \left( \frac{a^+ a + aa^+}{2} + c \right) = \begin{cases} \omega\hbar \left( a^+ a + \left( c + \frac{1}{2} \right) \right) \\ \omega\hbar \left( aa^+ + \left( c - \frac{1}{2} \right) \right) \end{cases} \quad (114a) \end{aligned}$$

— т.е. мы видим, что добавление постоянной  $c$  эквивалентно изменению порядка некоммутирующих операторов  $a^+$  и  $a$ , т.е. как раз тому произволу, который автоматически возникает при переходе от классического описания к квантовому.

<sup>1)</sup> В этом сказывается особая простота рассматриваемого примера. В общем случае  $c$  в этом рассуждении могло бы быть *произвольной функцией* координат и импульсов, и произвол, связанный с построением «квантового аналога классической системы», невероятно вырос бы.



**17.1.2.** Как же все-таки следует поступить с постоянной  $c$ ? Оказывается, что для соответствия с опытом в разных случаях приходится выбирать  $c$  по-разному. Если осциллятор образован системой материальных точек, то надо полагать  $c = 0$ , т. е. записывать гамильтониан в виде

$$H = \omega \hbar \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (114b)$$

Если же осциллятор — это, например, один из осцилляторов, на которые мы разлагали свободное электромагнитное поле (формула (64) из второй части курса), то надо положить  $c = -\frac{1}{2}$  и писать для гамильтониана

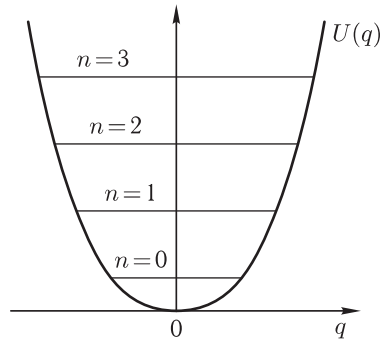
$$H_k^{ph} = \omega(\mathbf{k}) \hbar a_k^+ a_k; \quad (\omega(\mathbf{k}) = c |\mathbf{k}|). \quad (114c)$$

**17.2.1.** Посмотрим теперь, как описывается квантовая динамика осциллятора. Прибегнем сперва к гайзенберговой картине. Для одномерного осциллятора полный набор коммутирующих наблюдаемых насчитывает только одну величину; выберем в качестве такой величины рассмотренный нами в § 10 оператор числа частиц  $a^+ a$ , собственными значениями которого  $n$  были целые числа  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а собственные векторы обозначались нами как  $|n\rangle$ . Гамильтониан  $H$  является в силу (114b) функцией этой наблюдаемой, поэтому те же векторы  $|n\rangle$  будут и собственными векторами  $H$ :

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \quad \text{с EW-ми}$$

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (115)$$

Полученное таким образом выражение для энергетического спектра осциллятора — это и есть первоначальная формула Планка (1), положившая начало созданию квантовой теории. Единственное отличие нашего нового выражения (115) состоит в том, что планковские целые числа  $n$  заменились *полуцелыми*  $\left( n + \frac{1}{2} \right)$ .



потенциальная энергия и спектр осциллятора

**17.3.** Замена эта весьма существенна — она означает, что в состоянии наинижней возможной энергии — в **основном состоянии** — движение в системе *не прекращается*; вместо того

чтобы прийти (как то можно было бы ожидать на основании классических представлений), когда у нее отнята вся возможная энергия, в статическое состояние устойчивого равновесия, система продолжает находиться в движении — в ней происходят так называемые **нулевые колебания**. В реальности существования этих нулевых колебаний можно убедиться на опыте — они проявляются, например, в рассеянии света в кристаллах при достаточно низких температурах. Эффект существования нулевых колебаний не является специальным свойством гармонического осциллятора — кривую потенциальной энергии вблизи регулярного минимума всегда можно приблизить параболой; поэтому всякая система вблизи минимума потенциальной энергии ведет себя подобно гармоническому осциллятору — т.е. будет испытывать нулевые колебания. Отличия от гармонического осциллятора будут сказываться только на высших уровнях энергии — спектр не будет более, как в гармоническом случае — эквидистантен<sup>1)</sup>. Более того, как мы увидим в § 18, та же качественно картина сохраняется и тогда, когда потенциальная энергия имеет в минимуме (не слишком сильную) особенность!

Специфическую квантовомеханическую природу нулевых колебаний можно качественно усмотреть из того соображения, что их появление можно рассматривать как следствие принципа неопределенности — для системы, находящейся в покое в точке устойчивого равновесия и координата, и импульс имели бы определенные значения, что принципом неопределенности запрещено. Более того, описывающий состояние нулевых колебаний вектор  $|0\rangle$  есть как раз один из векторов (см. § 11), для которых неравенство в соотношении неопределенностей (79) превращается в равенство. С этой точки зрения нулевые колебания являются состоянием «наименьшего движения, совместного с принципом неопределенностей».

Для большинства систем эффект нулевых колебаний есть тонкое микроскопическое явление, которое можно наблюдать лишь в специально подобранных условиях. Есть, однако, редкие случаи, когда по существу то же самое явление складывается для системы из очень большого, макроскопического, числа  $N$  частиц таким образом, что само «нулевое движение» приобретает в некотором смысле макроскопические масштабы. Примером может служить система, состоящая из макроскопического

---

<sup>1)</sup> Качественное отличие может произойти только тогда, когда образуемая потенциальной энергией вблизи минимума «потенциальная яма» настолько мелка, что в ней не помещается даже основной уровень.

количества атомов Не — такое «вещество» в макроскопическом смысле обладает той особенностью, что (при не очень больших давлениях) остается жидким вплоть до абсолютного нуля температуры: нулевые колебания оказываются в этом случае столь сильны сравнительно с силами взаимодействия между атомами, что не дают им выстроить атомы в кристаллическую решетку.

**17.2.2.** Вернемся к обсуждению осциллятора. Коль скоро энергетический спектр (115) найден, то для любой динамической переменной  $\beta$  будет, согласно (112),

$$\langle n' | \beta(t) | n'' \rangle = e^{i \frac{E_{n'} - E_{n''}}{\hbar} t} \langle n' | \beta_0 | n'' \rangle = e^{i(n' - n'')\omega t} \langle n' | \beta_0 | n'' \rangle \quad (116.1)$$

— т.е. представители всех динамических переменных будут зависеть от времени гармонически с помощью целочисленных гармоник классической собственной частоты осциллятора  $\omega$ .

В частности, матричные элементы оператора координаты — это есть специфическая особенность *гармонического* осциллятора —

$$\langle n' | q(t) | n'' \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} \{ \sqrt{n' + 1} \delta_{n', n'' - 1} e^{-i\omega t} - \sqrt{n'} \delta_{n', n'' + 1} e^{i\omega t} \} \quad (116.2)$$

содержат *только основную частоту*  $\omega$  — в полном соответствии с тем фактом, что координаты классического линейного осциллятора зависели от времени гармонически с его собственной частотой.

То же самое будет, конечно, и для матричных элементов оператора импульса  $p(t)$ . (Легко сообразить, что в силу той специальной особенности  $q$  и  $p$ , что их матричные представители содержат лишь элементы на диагоналях, соседних с главной, временная зависимость любой динамической переменной, выражающейся через  $q$  и  $p$  полиномом степени не выше  $N_0$ , будет содержать гармоники основной частоты с номерами, не большими  $N_0$  — опять в точном соответствии с результатом классической механики.)

**17.2.3.** Напомним теперь, что в электродинамике мы выяснили, что взаимодействие заряженного нерелятивистского осциллятора с электромагнитным полем определяется в главном приближении его дипольным моментом, который, в свою очередь, пропорционален координате осциллятора  $q(t)$ . Отсюда следует, что заряженный осциллятор может поглощать и испускать свет только одной частоты — его собственной частоты  $\omega$ . При этом поглощению света соответствует переход осциллятора из состо-

яния  $|n\rangle$  в состояние  $|n+1\rangle$ , энергия осциллятора возрастает на  $\hbar\omega$ , а испусканию — переход из состояния  $|n\rangle$  в состояние  $|n-1\rangle$ , энергия осциллятора уменьшается на  $\hbar\omega$ . Это — как раз те соотношения, которые приходилось постулировать на первоначальных этапах теории квант, о чем шла речь в § 1.

Подчеркнем еще раз, что для того, чтобы прийти к результатам (115), (116), нам сперва понадобилось найти спектр полного набора коммутирующих интегралов движения (в данном случае — единственного оператора  $a^+a$ ), а затем решить ЕВР-у для оператора  $q$  в  $n$ -представлении — вся эта «черная работа» была проделана нами заранее в § 10.

**17.4.1.** Как решается та же задача об осцилляторе в шредингеровой картине? В этом случае нам надо было бы перейти с самого начала к координатному представлению и искать в нем собственные функции и собственные значения гамильтониана, т. е. решать проблему собственных значений

$$\frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dq^2} + (m\omega)^2 q^2 \right) \psi_n(q) = E_n \psi_n(q) \quad (117)$$

(мы пользуемся сокращенными обозначениями § 12, в которых действию оператора координаты соответствует умножение на ее значение, а импульсу — оператор дифференцирования (83.1,2а)), которая свелась бы в этом случае к ЕВР-е для уравнения Шредингера — дифференциального уравнения в переменном  $q$ . При решении этой проблемы собственных значений средствами математической физики мы опять нашли бы в качестве собственных функций (117) те же самые функции

$$\psi_n(q) = \langle q' | n \rangle$$

(формула (61.1а)), которые уже были найдены нами в § 10 «с другой стороны», и, конечно, те же самые ЕВ-ы (115) для оператора  $H$ .

**17.4.2.** «Волновые функции, зависящие от времени»  $\psi_n(q, t)$ , получились бы затем по (113а) равными

$$\psi_n(q, t) = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \psi_n(q) = e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} \psi_n(q), \quad (118)$$

а для матричных элементов произвольного оператора между такими состояниями мы получили бы, в точной аналогии с (116.1),

$$\langle \psi_{n'}^*(q, t) | \beta \psi_{n''}(q, t) \rangle = e^{i(n'-n'')\omega t} \langle \psi_{n'}^*(q) | \beta \psi_{n''}(q) \rangle. \quad (119.1)$$

**17.4.3.** Для вычисления оставшегося «не зависящего от времени матричного элемента»  $\langle \psi_{n'}^*(q) | \beta \psi_{n''}(q) \rangle$  надо явным образом

выразить оператор  $\beta$  через координату  $q$  и импульс  $p$ , т. е. через координату и оператор дифференцирования по ней. В частности, если оператор  $\beta$  есть сама координата  $q$ , то, в соответствии с (82),

$$\langle \psi_{n'}^*(q) q \psi_{n''}(q) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \cdot q \cdot \psi_{n'}^*(q) \psi_{n''}(q). \quad (119.2)$$

Вычисление этого интеграла с полиномами Эрмита (61.1a) опять привело бы нас, конечно, к выражениям (58) и (116.2).

**17.5.** Таким образом мы видим, что и в гайзенберговой и в шредингеровой картине приходится решать одну и ту же по существу EWP-у — только в разных представлениях и, в каком-то смысле, проводить одни и те же вычисления в разном порядке.

## 18. Дальнейшие примеры динамических задач

**18.1.** В качестве следующего простого примера рассмотрим *свободное движение*, когда в классическом описании потенциальная энергия отсутствует и функция Гамильтона

$$H(p, q) = \sum_a \frac{p_a^2}{2m}$$

вовсе не зависит от координат. Примем, что то же справедливо и в квантовом случае для гамильтониана, который, следовательно, есть функция только импульсов, для одной степени свободы — единственного импульса:

$$H = H(p) = \frac{p^2}{2m}. \quad (120)$$

**18.1.1.** Таким образом всякий собственный вектор импульса  $|p'\rangle$  будет в то же время и собственным вектором гамильтониана и притом с собственным значением  $\frac{p'^2}{2m}$  <sup>1)</sup>:

$$H |p'\rangle = E(p') |p'\rangle; \quad E(p') = \frac{p'^2}{2m}. \quad (120.1)$$

---

<sup>1)</sup> Мы сталкиваемся здесь с тем любопытным положением, что, в то время как оператор импульса сам по себе образует полный набор коммутирующих наблюдаемых, его функция — гамильтониан — сам по себе полного набора не образует и для этой цели к нему надо добавить еще какой-либо коммутирующий с ним оператор. Этот пример показывает, насколько неопределенными могут быть в квантовой механике предсказания о числе операторов полного набора.

Обратное утверждение неверно — из (120.1) следует, что собственные значения импульса выражаются через  $E$ -ы гамильтониана в иррациональной форме

$$p' = \pm \sqrt{2mE}, \quad (120.2)$$

и, следовательно, мы не можем использовать зависимость (120.2) для определения импульса как операторной функции гамильтониана в смысле определения (30) или (33а). Поэтому собственный вектор гамильтониана, вообще говоря, не будет собственным для импульса, а будет линейной комбинацией *двух* собственных векторов импульса с двумя значениями (120.2)

$$|E\rangle = c_1|+\sqrt{2mE}\rangle + c_2|-\sqrt{2mE}\rangle$$

— все собственные значения гамильтониана *двукратно вырождены*<sup>1)</sup>.

Вычисляя квадрат нормы этой линейной комбинации, мы получим

$$\begin{aligned} \langle E' | E'' \rangle = & c_1^* c_1 \delta(\sqrt{2mE'} - \sqrt{2mE''}) + \\ & + c_2^* c_2 \delta(-\sqrt{2mE'} + \sqrt{2mE''}) + c_1^* c_2 \delta(\sqrt{2mE'} + \sqrt{2mE''}) + \\ & + c_2^* c_1 \delta(-\sqrt{2mE'} - \sqrt{2mE''}). \end{aligned}$$

Последние два члена обращаются в нуль, поскольку под знаком  $\delta$ -функции в них стоят дефинитные выражения, в двух же первых членах можно перейти к  $\delta$ -функциям от разности энергий. Таким образом

$$\langle E' | E'' \rangle = (|c_1|^2 + |c_2|^2) \sqrt{\frac{2E}{m}} \delta(E' - E'').$$

Итак, если принять, что коэффициенты линейной комбинации подчинены условию  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ , то «нормированное на энергию» (т.е. на  $\delta$ -функцию от разности энергий) собственное состояние гамильтониана запишется через «нормированные на им-

<sup>1)</sup> В силу непрерывности спектра импульса отсюда следует, что гамильтониан будет обладать непрерывным спектром, занимающим всю *положительную* полуюсь  $0 \leq E \leq \infty$ .

пульс» собственные векторы импульса с EW-ами (120.2) как

$$\begin{aligned} |E\rangle &= \frac{1}{\sqrt{v}} \{c_1 | + \sqrt{2mE} \rangle + c_2 | - \sqrt{2mE} \rangle\}; \\ v &= \sqrt{\frac{2E}{m}}; \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \end{aligned} \quad (120.3)$$

Если, в частности, вектор  $|E\rangle$  является собственным и для импульса (т. е. если из двух коэффициентов  $c$  только один отличен от нуля (и равен единице)), то он отличается от соответствующего  $|p'\rangle$  только множителем  $\frac{1}{\sqrt{v}}$ , выражающим отличие нормировки, — этим часто приходится пользоваться.

**18.1.1.2.** Чем отличаются физически два состояния, входящие в комбинацию (120.3)? Чтобы получить тут наиболее наглядное истолкование, «включим зависимость от времени», причем воспользуемся гайзенберговской картиной, и посмотрим, как зависят от времени матричные элементы оператора координаты  $q(t)$ , выбирая в качестве полной системы собственные векторы  $|p'\rangle$  импульса.

В силу (112) имеем

$$\langle p' | q(t) | p'' \rangle = e^{i \frac{E(p') - E(p'')}{\hbar} t} \langle p' | q_0 | p'' \rangle = e^{i \frac{E' - E''}{\hbar} t} i \hbar \delta'(p' - p''),$$

где мы воспользовались тем, что в силу симметрии (точнее — антисимметрии) перестановочных соотношений (52) в  $p$  и  $q$  представитель координаты в импульсном представлении должен отличаться лишь знаком от представителя (68) импульса в координатном. Освобождаясь теперь от экспоненты за счет использования свойств  $\delta$ -функции, мы получим, что

$$\langle p' | q(t) | p'' \rangle = i \hbar \delta'(p' - p'') + i \hbar \left( -\frac{i}{\hbar} t \frac{p'}{m} \right) \delta(p' - p''),$$

т. е. — если заметить, что справа стоят как раз выражения для матричных элементов  $q$  и  $p$  в начальный момент времени — что

$$\langle p' | q(t) | p'' \rangle = \langle p' | q_0 | p'' \rangle + \frac{\langle p' | p | p'' \rangle}{m} t. \quad (120.4)$$

Соотношение (120.4) получено нами для произвольных  $\langle p' |$  и  $| p'' \rangle$ : поэтому, в силу линейности формул (47) для перехода от одного представления к другому, оно будет справедливо для матричных элементов, взятых между произвольными состояниями. Выбирая, в частности, эти произвольные состояния одинаковыми

и вспоминая основную форму (38) для среднего значения наблюдаемой в произвольном состоянии, приходим к тому, что зависимость от времени среднего значения координаты в произвольном состоянии  $|A\rangle$  описывается выражением

$$\overline{q(t)}_{|A\rangle} = \bar{q}_0|_{|A\rangle} + \frac{\bar{p}_{|A\rangle}}{m} \cdot t. \quad (*)$$

При классическом описании свободного движения мы получили бы вместо (\*)

$$q(t) = q_0 + vt. \quad (**)$$

Поэтому, если мы хотим чтобы (\*\*) сохранилось в квантовой теории для средних значений, надо определить оператор скорости как оператор импульса, деленный на массу. Тогда мы получим для среднего значения координаты

$$\overline{q(t)} = \bar{q}_0 + \bar{v}t; \quad v \equiv \frac{p}{m}. \quad (120.5)$$

Мы видим теперь, что два состояния (120.3), различающиеся знаком импульса при одинаковой его абсолютной величине, будут различаться и знаками средней скорости в этих состояниях — т. е. первое из них будет соответствовать движению вправо, а второе — влево.

**18.1.2.1.** В шредингеровой картине в координатном представлении задача о свободном движении сведется к уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dq^2} \psi(q) = E\psi(q). \quad (121)$$

Для каждого  $E > 0$  это уравнение имеет два линейно независимых решения, которые можно записать в форме

$$\psi_{+,E}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{iq\sqrt{2mE}}{\hbar}} \quad \text{и} \quad \psi_{-,E}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{iq\sqrt{2mE}}{\hbar}}. \quad (121.1)$$

Нормированное «на  $\delta$ -функцию от энергии» общее решение будет тогда, в полной аналогии с (120.3), иметь вид

$$\psi_E(q) = \frac{1}{\sqrt{v}} \{c_1\psi_{+,E}(q) + c_2\psi_{-,E}(q)\}; \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \quad (121.2)$$

Для отрицательных  $E$  решения (121) содержали бы экспоненту с *вещественным* показателем, которая неограниченно нарастала бы или при  $q \rightarrow +\infty$  или при  $q \rightarrow -\infty$ . Такие решения нельзя было бы нормировать не только в собственном смысле (12), но и в несобственном смысле (23a,b). Тем самым для них оказалась



бы невозможной вероятностная интерпретация; поэтому следует считать, что такие решения не имеют никакого физического смысла и должны быть исключены из числа допустимых решений EWP-ы.

Таким образом мы снова приходим к тому результату, что спектр рассматриваемого гамильтониана непрерывен и занимает положительную полуось, все EW-ы дважды вырождены и связаны с собственными значениями импульса соотношением (120.1) — ведь два решения (121.1) — это как раз собственные функции импульса (84.2) для двух собственных значений (120.2).

**18.1.2.2.** С помощью (113а) можем выписать «зависящие от времени» волновые функции; двум решениям (121.1) будут отвечать

$$\Psi_{+,E}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v}} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \sqrt{2mE}q)}$$

(121.3)

и

$$\Psi_{-,E}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v}} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + \sqrt{2mE}q)}.$$

Эти функции действительно имеют вид плоских волн (отсюда и происходит название «волновая функция»), причем верхнему знаку в (120.2) отвечает волна, распространяющаяся вправо, а нижнему — влево, с фазовыми скоростями

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\pm \sqrt{2mE}} = \frac{\frac{p^2}{2m}}{\pm p} = \pm \frac{p}{2m}.$$

Такие фазовые скорости не имеют никакой прямой физической интерпретации; если, однако, вычислить *групповую* скорость решений (121.3)

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{d(\pm \sqrt{2mE})} = \frac{dE(p)}{d(\pm p)} = \pm \frac{p}{m} = \pm v,$$

то она как раз будет равна скорости частицы, оператор которой (120.5) диагонален в состоянии с определенным импульсом (121.3.1 или 2). Полученный результат — это как раз предположение де Бройля, о котором мы говорили в § 1 (формула (6) и далее).

**18.2.** Разобранные примеры показывают, что при использовании шредингеровой картины в координатном представлении (говорят иногда о **шредингеровом представлении** в узком смысле этого слова) уравнение проблемы собственных значений прини-

мает вид линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

В самом деле, в классической механике мы принимали в большинстве случаев, что функция Гамильтона есть сумма кинетической и потенциальной энергий, в декартовых координатах

$$H_c(p, q) = \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + U(\mathbf{r}_a).$$

Поэтому при переходе по принципу соответствия к квантово-механическому описанию «той же системы» в координатном представлении остается только заменить в каждом члене кинетической энергии

$$\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} \Rightarrow \frac{1}{2m_a} \left( \hbar \frac{\partial}{i \partial \mathbf{r}_a} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_a, \quad (122a)$$

и мы приходим к гамильтониану <sup>1)</sup>

$$H_q = \sum_a \left( -\frac{\hbar^2}{2m_a} \right) \Delta_a + U(\mathbf{r}_a), \quad (122.1)$$

а уравнение Шредингера «без времени» принимает вид

$$\left( -\sum_a \frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_a + U(\mathbf{r}_a) \right) \psi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = E_n \psi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n). \quad (122.2)$$

Поскольку линейные дифференциальные уравнения второго порядка уже давно очень подробно изучены в математике, то такая форма основной задачи на собственные значения оказывается весьма удобной. Именно по этой причине специальное представление Шредингера используется в квантовой механике настолько часто, что может даже создаться ложное впечатление о наличии каких-то причин, *принципиально* выделяющих его из всех прочих, — таких не существует.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1:** Если искать какие-либо особенности, действительно выделяющие это представление из всех прочих, то можно отметить только то, что для решения ЕУР-ы в форме (122.2) существуют некоторые *регулярные* приемы, в то время как при работе в других представлениях приходится каждый раз изобретать какие-либо искусственные способы, как то можно было видеть на примере рассмотрения осциллятора и момента <sup>2)</sup>. ■

<sup>1)</sup> Дополнительные члены — такого типа, как мы обсуждали для осциллятора, — в *декартовых* координатах приходится прибавлять редко.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: Подчеркнем, что для системы из  $n$  частиц уравнение (122.2) записывается в *конфигурационном* пространстве, а не в обычном физическом трехмерном. Поэтому степень наглядности решений (122.2) невелика. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3: Переход к *обобщенным* (например — криволинейным) координатам вызывает в квантовой механике большие осложнения. В самом деле, при этом уже классическая кинетическая энергия становится квадратичной формой общего вида от импульсов, с коэффициентами, зависящими от координат. Поэтому при замене типа (122а) встает во весь рост проблема порядка расположения операторов. По этой причине наиболее рациональный путь состоит в том, чтобы сперва «проквантовать» систему (т.е. сделать замену (122.2)) в *декартовых* координатах, а уже затем переходить к обобщенным по обычным правилам замены переменных в дифференциальных выражениях второго порядка. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4: Можно объяснить, почему именно *координатное* представление получает несколько выделенную роль. Причина лежит конечно в том, что классическая функция Гамильтона, будучи *произвольной* функцией координат, есть *квадратичная* функция сопряженных им импульсов — поэтому при переходе к координатному представлению порядок дифференцирований будет всегда равен двум. Если бы мы перешли к противоположному — импульсному — представлению, то потенциальная энергия оказалась бы дифференциальным оператором произвольно высокого порядка — вообще говоря — интегральным оператором. Поэтому использование импульсного представления оказывается рациональным лишь в специальных случаях «простой» потенциальной энергии. ■

**18.3.** В (чрезвычайно важном) случае одной единственной частицы, движущейся во внешнем поле, уравнение Шредингера (122) упрощается до

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\mathbf{r})\right)\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r}), \quad (123)$$

и, главное, оказывается записанным уже в обычном трехмерном пространстве. Это обстоятельство позволяет связать с рассматриваемой задачей определенные наглядные представления.

---

<sup>2)</sup> Можно сказать, что при работе в абстрактном гайзенберговом представлении задача иногда решается гораздо красивее, зато представление Шредингера наверняка приведет к цели.

Выпишем того ради соответствующее (123) временное уравнение Шредингера, равно как и уравнение для сопряженной волновой функции

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r})\right) \psi(\mathbf{r}, t) &= i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r})\right) \psi^*(\mathbf{r}, t) &= -i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (123a, b)$$

умножим первое из них на  $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ , второе на  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , и вычтем первое из этих произведений из второго.

Получим:

$$-i\hbar \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \cdot \psi + \psi^* \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \psi^* \cdot \psi - \psi^* \cdot \Delta \psi),$$

то есть

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) &= \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{d}{d\mathbf{r}} \left( \frac{d\psi^*}{d\mathbf{r}} \psi \right) - \frac{d\psi^*}{d\mathbf{r}} \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} - \frac{d}{d\mathbf{r}} \left( \psi^* \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} \right) + \frac{d\psi^*}{d\mathbf{r}} \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} \right\}, \end{aligned}$$

что можно записать как

$$\frac{d}{dt} (\psi^* \psi) + \frac{i\hbar}{2m} \frac{d}{d\mathbf{r}} \left( \frac{d\psi^*}{d\mathbf{r}} \cdot \psi - \psi^* \cdot \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} \right) = 0.$$

Смысл величины, стоящей в первом члене под знаком производной по времени, мы уже знаем — это (ср. (81)) есть плотность вероятности (обнаружить частицу в точке  $\mathbf{r}$ )  $\rho(\mathbf{r}, t)$ . С другой стороны, само полученное нами соотношение имеет типичную форму уравнения непрерывности (ср., например, электродинамическое уравнение непрерывности (II. 50.1.1)). Поэтому, если ввести вектор

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{d\psi^*}{d\mathbf{r}} \cdot \psi - \psi^* \cdot \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} \right) \quad \text{и} \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \psi^* \psi, \quad (124.1.2)$$

то  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  будет иметь смысл **плотности потока вероятности** (говорят иногда и короче: **вектор плотности тока** или просто **ток**), и этот вектор вместе с плотностью вероятности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  будут удовлетворять **уравнению непрерывности**:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (124.3)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** С чисто формальной стороны уравнение непрерывности выражает, конечно, просто то обстоятельство, что

нормировка волновой функции сохраняется в ходе временной эволюции системы.

Физически формулы (124) открывают перед нами возможность чрезвычайно наглядно (для случая одной частицы!) представить себе решение квантовомеханической задачи в виде распределения «облака вероятности»  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , которая может «перетекать» в ходе временной эволюции из одних точек в другие в соответствии со значениями  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Надо, однако, подчеркнуть, что такие наглядные представления ни в коем случае нельзя воспринимать слишком серьезно — попытки представить себе квантовомеханическую частицу «составленной» из некоторой непрерывной субстанции, «текущей» в соответствии с (124), ведут к противоречиям. ■

## 19. Движение в центральном поле

В качестве последнего примера рассмотрим весьма важную задачу двух тел, взаимодействующих с помощью сил, зависящих только от их относительного расстояния. Согласно принципу соответствия эта задача описывается гамильтонианом

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (125)$$

**19.1.** В классической механике мы сводили соответствующую задачу к задаче одного тела (движущегося во внешнем поле), вводя вместо  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  относительный радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и радиус-вектор центра инерции  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \quad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку это преобразование линейно, никаких осложнений не произойдет и при переносе его на квантовый случай. В результате гамильтониан (125) приведет к сумме гамильтонианов, отвечающих переносному и относительному движениям:

$$H = H_{\text{tr}} + H_{\text{rel}}; \quad H_{\text{tr}} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R; \quad H_{\text{rel}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + U(r), \quad (126)$$

каждый из которых зависит только от «своих» координат и импульсов. Следовательно, можно будет искать собственные векторы гамильтониана (126) в виде прямого произведения собственных векторов гамильтонианов  $H_{\text{tr}}$  и  $H_{\text{rel}}$  и, значит, собственные

волновые функции  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  в виде произведений  $\Psi(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r})$  собственных функций каждого из гамильтонианов.

Задачу о собственных функциях свободного движения мы уже рассмотрели в предыдущем разделе. Таким образом, все дело сводится к нахождению собственных функций  $\psi(\mathbf{r})$ , т.е. к решению задачи о движении *одной частицы в центральном внешнем поле*. Этой задаче соответствует уравнение Шредингера без времени

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + U(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (126a)$$

которым нам и надлежит теперь заняться.

**19.2.1.** Для решения этой задачи удобно прежде всего перейти к полярным координатам  $r, \vartheta, \varphi$ , воспользовавшись известным выражением для оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right],$$

которое нам будет удобнее переписать в форме

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (*)$$

**19.2.2.** Далее, в классической механике для решения той же задачи о движении в центральном поле мы пользовались тем, что кроме энергии в этом случае сохраняется и момент. Чтобы сделать то же самое и теперь, заметим сперва, что

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_{\vartheta, \varphi} = \left( \frac{\partial r_\alpha}{\partial r} \right)_{\vartheta, \varphi} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{d\mathbf{r}}, \quad \text{т.е. что } \frac{1}{r} \mathbf{r} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\mathbf{r}} = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \mathbf{p}) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}$$

или

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (127a)$$

Вычислим теперь квадрат оператора орбитального момента:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= M_\alpha M_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\mu\nu} r_\beta p_\gamma r_\mu p_\nu = \\ &= r_\beta p_\gamma r_\beta p_\gamma - r_\beta p_\gamma r_\gamma p_\beta = r^2 \mathbf{p}^2 + \frac{\hbar}{i} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - p_\gamma r_\gamma (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \frac{\hbar}{i} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = \\ &= r^2 \mathbf{p}^2 - \frac{\hbar^2}{i^2} r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hbar^2}{i^2} r \frac{\partial}{\partial r} = r^2 \mathbf{p}^2 - \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r. \end{aligned}$$

То есть:

$$\mathbf{M}^2 = r^2 \mathbf{p}^2 - \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r. \quad (127b)$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}^2 = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \Delta = \frac{1}{r^2} \mathbf{M}^2 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r, \quad (127c)$$

и сравнение (126a) со (127c) и (\*) показывает, что уравнение Шредингера для нашей задачи можно записать в форме

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} \mathbf{M}^2 + U(r) - E \right] \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (128a)$$

где оператор квадрата орбитального момента есть

$$\mathbf{M}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (128b)$$

т. е. зависит только от угловых переменных  $\theta$  и  $\varphi$ .

**19.2.3.** Поэтому, как и в классическом рассмотрении, оператор  $\mathbf{M}^2$  коммутирует с гамильтонианом, если потенциальная энергия  $U$  есть функция только от  $r$ :  $U = U(r)$ . Но это значит, что можно искать *общие* собственные функции EWP-ы (128a) и задач на собственные значения <sup>1)</sup>

$$\mathbf{M}^2 \psi(\mathbf{r}) = \hbar^2 l(l+1) \psi(\mathbf{r}); \quad M_z \psi(\mathbf{r}) = \hbar m \psi(\mathbf{r}). \quad (128c)$$

В такой постановке задачи можно переписать (128a) в виде

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + U(r) - E \right\} \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (128d)$$

**19.2.4.** Тем самым мы достигли того результата, что операторы в (128c) зависят только от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , а в (128d) — только от радиальной координаты  $r$ . Поэтому естественно действовать методом разделения переменных, т. е. искать решение нашей задачи  $\psi(\mathbf{r})$  в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = Y_{l,m}(\theta, \varphi) \cdot R_{l,\dots}(r), \quad (128e)$$

где  $Y_{l,m}$  — решение системы (128c), зависящее только от углов, а  $R_{l,\dots}$  — решение (128d), зависящее только от  $r$  <sup>2)</sup>. Угловая часть нашей задачи — уравнения (128c) — это хорошо известные

<sup>1)</sup> Ср., например, изложение у Зоммерфельда в книге «Дифференциальные уравнения в частных производных физики», ИЛ, 1950.

<sup>2)</sup> Заметим, что, в отличие от разделения переменных в (126), теперь было бы, конечно, неверным сказать, что пространство, растягиваемое решениями (128a), есть прямое произведение пространств, растягиваемых решениями (128d) и (128c) — ведь в (128d) в качестве параметра входят собственные значения  $l$  первого из уравнений (128c); поэтому произведение *любой* пары

уравнения для сферических функций; их решения записываются известным образом как

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{l,m}(\theta), \quad (129)$$

где  $\Theta_{l,m}$  выражаются через присоединенные полиномы Лежандра. В науке о сферических функциях показывается, что разумные квадратично интегрируемые решения получаются при этом только для *целых* значений  $l$  и  $m$ ; именно для

$$\left. \begin{aligned} l &= 0, 1, 2, \dots, \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \end{aligned} \right\} \quad (129a)$$

— как мы уже упоминали ранее, орбитальное движение может привести только к целым, а не к полуцелым значениям момента. Подробности рассмотрения угловой части задачи можно посмотреть в любой книге по квантовой механике, напр. в книге Ландау и Лифшица (см. § 28 и дополнение «с» по изданию 2001 года).

**19.3.** Перейдем теперь к радиальной части задачи — т.е. к уравнению (128d) для функции  $R_{l,\dots}(r)$ . Для этой функции делают обычно подстановку

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{r}, \quad (130a)$$

приводящую радиальное уравнение к виду

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + U(r) - E \right] \chi(r) = 0. \quad (130b)$$

Мы видим, что это уравнение имеет вид уравнения Шредингера для одномерного движения с *эффективной потенциальной энергией* (ср. (I.28.4))

$$V(r) = U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}. \quad (130c)$$

решений (128c) и (128d) (при, может, быть, разных значениях  $l$ ) не будет, вообще говоря, решением (128a). Именно поэтому решения (128d) приходится нумеровать *двумя* группами индексов — индексом (или индексами), нумерующим собственные значения (128d) — мы обозначаем его пока многоточием — и индексом  $l$ , который входит в само уравнение (128d) как параметр. Заметим в связи с этим и то, что квантовое число  $m$  *не входит* (параметром) в (128d). Это значит, что любое решение  $R_{l,\dots}$  (128d) может комбинировать с любым (совместным с его  $l$ ) значением  $m$ . Так как таких значений имеется  $2l+1$ , то мы заключаем, что все группы собственных значений  $(l, \dots)$   $(2l+1)$ -кратно вырождены.



**ЗАМЕЧАНИЕ:** Эта эффективная потенциальная энергия зависит только от квантового числа  $l$  угловой части задачи, т. е., как мы уже отмечали, *не зависит от  $m$* . Поэтому каждому EW-у энергии соответствует  $(2l + 1)$  собственный вектор, отличающийся лишь ориентацией в (физическом трехмерном) пространстве.

Более существенное отличие (130b) от уравнения для одномерного движения связано с тем, что по самому своему смыслу координата  $r$  в нем меняется только в полупространстве  $0 \leq r < \infty$ . Поэтому, если бы мы желали трактовать (130b) как одномерное уравнение Шредингера, то нам пришлось бы считать, что «потенциальная энергия» равна выражению (130с) только в *правом* полупространстве  $r \geq 0$ , в *левом* же полупространстве надо было бы положить  $V(r) = +\infty$ ,  $r < 0$ . ■

**19.4.** Теперь уместно поговорить о граничных условиях, которые следует наложить на функцию  $R(r)$ . Основное условие, выполнения которого надо требовать от решений всякого уравнения Шредингера, — это то, чтобы соответствующие векторы состояния были бы *нормируемы*, или в собственном смысле (12) для дискретных EW-ов, или хотя бы в несобственном смысле (23а,b) для состояний непрерывного спектра. Для уравнения (130b), если потенциал  $U(r)$  регулярен (допустимы конечные разрывы) для всех  $r \neq 0$ , следует специально позаботиться лишь об интегрируемости при  $r \rightarrow 0$  (особой точке (130b)) и при  $r \rightarrow \infty$ .

**19.4.1.** При  $r \rightarrow 0$  условие нормируемости означает требование существования интеграла  $\int dV \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$  по любой области, включающей начало координат, т. е. существования интеграла

$$\int_0 r^2 R^2 \dots(r) dr.$$

Если принять, что при  $r \rightarrow 0$  функция  $R(r)$  ведет себя как  $r^s$ , то для существования этого интеграла надо, чтобы было  $2(s + 1) > -1$ , т. е.  $s > -3/2$ . Практически во всех нерелятивистских задачах оказывается возможным удовлетворить даже требованию  $s \geq -1/2$ . Для функции  $\chi(r)$  этому соответствует показатель  $\geq +1/2$ , т. е. для функции  $\chi(r)$  имеет место граничное условие

$$\chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (130d)$$

**19.4.2.** При  $r \rightarrow \infty$  условие квадратичной интегрируемости  $\int_0^\infty \chi^2(r) dr$  необходимо только для функций дискретного спектра.

Для функций непрерывного спектра достаточно, чтобы такой интеграл можно было бы определить как обобщенную функцию. Такие, ненормируемые в собственном смысле (12), состояния аналогичны инфинитным движениям классической теории, когда частица может уходить на бесконечность или приходить оттуда.

**19.4.3.** Рассмотрим подробнее поведение решения (130b) при  $r \rightarrow 0$ . Допустим, что потенциальная энергия  $U(r)$  такова, что

$$r^2 U(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0; \quad (131a)$$

тогда при  $r \rightarrow 0$  в (130b) можно пренебречь членами  $U$  и  $E$ , и у нас остается

$$r^2 \frac{d^2 \chi}{dr^2} = l(l+1) \chi. \quad (*)$$

Это уравнение имеет решения степенного вида

$$\chi(r) = Cr^{s+1},$$

причем для показателя  $(s+1)$  уравнение  $(*)$  приводит к условию

$$s(s+1) = l(l+1),$$

которое допускает два решения

$$s = l \quad \text{или} \quad s = -(l+1),$$

соответственно тому, что уравнение второго порядка должно иметь два независимых решения. Второе из этих решений, с показателем  $s = -(l+1)$ , не удовлетворяет условию (130d), поэтому его следует отбросить, и у нас остается единственное допустимое решение

$$\text{при } r \rightarrow 0 \quad \chi(r) \sim Cr^{l+1}, \quad \text{т.е.} \quad R_{l,\dots}(r) \sim Cr^l. \quad (131)$$

**19.4.4.** Перейдем теперь к определению вида допустимых решений при больших  $r$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Предположим, что потенциальная энергия нормирована обычным условием

$$U(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда то же справедливо и для  $V(r)$  и при больших  $r$  в (130b) достаточно будет оставить только члены с производной и с  $E$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \chi, \quad (*)$$

откуда сразу следует

$$\chi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}, \quad (132)$$

где

$$k = \frac{\sqrt{-2\mu E}}{\hbar}. \quad (132a)$$

**19.4.4.1.** При  $E > 0$  оба значения корня в (132a) чисто мнимы, и мы получаем решения осциллирующего типа. Оба решения ненормируемы в собственном смысле, но нормируемы в обобщенном, т. е. оба — допустимы. Единственное допустимое решение (131) при  $r \rightarrow 0$  продолжится при  $r \rightarrow \infty$  в некоторую линейную комбинацию двух решений (132), и, поскольку оба эти решения допустимы, то будет допустимой и эта специальная их комбинация. Следовательно, при всяком значении  $E > 0$  будет существовать одно решение, удовлетворяющее сразу обоим граничным условиям при  $r \rightarrow 0$  и при  $r \rightarrow \infty$ : мы будем иметь дело с *непрерывным спектром*.

**19.4.4.2.** При  $E < 0$  оба значения корня в (132a) *вещественны*, при этом одно из них положительно, а другое отрицательно. Положительный вещественный корень ведет к решению, экспоненциально растущему на бесконечности — такое решение нельзя нормировать даже в обобщенном смысле и, следовательно, оно должно быть отброшено. Таким образом из двух решений, входящих в (132), допустимым будет только одно; постоянную  $C_2$  следует положить равной нулю. Поэтому, когда мы будем продолжать в область больших  $r$  единственное допустимое в области  $r \rightarrow 0$  решение, то мы, вообще говоря, придем к недопустимой линейной комбинации, включающей запрещенную константу  $C_2$ , — т. е. вообще говоря, при произвольных  $E$ , решений, удовлетворяющих обоим граничным условиям сразу, не будет. Лишь для некоторых избранных значений  $E$  может случиться, что при продолжении допустимого в области малых  $r$  решения на большие  $r$  мы придем как раз к единственно допустимому там решению с  $C_2 = 0$ . Эти избранные значения  $E_n$ , будут собственными значениями *дискретного спектра*. Поскольку соответствующие волновые функции на бесконечности будут экспоненциально убывать, то для них будет

$$\int_0^{\infty} |\chi_{l,n_r}(r)|^2 dr < \infty,$$

т. е. они будут нормируемыми в собственном смысле (12).

## 20. Кулоново поле

Важнейший случай квантовомеханического движения частицы в центральном поле составляет, конечно, движение электрона в кулоновом поле атомного ядра.

**20.1.1.** Тогда, если заряд ядра равен  $Ze$ , то

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

и радиальное уравнение (130b) принимает вид

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2 r} \right) \chi(r) = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \chi(r) \equiv k^2 \chi(r). \quad (133a)$$

Мы будем рассматривать наиболее интересный случай  $E < 0$ , и поэтому положили здесь в соответствии с (132a)

$$k = \frac{+\sqrt{-2\mu E}}{\hbar}; \quad E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} < 0. \quad (134a)$$

Асимптотическая форма (132) побуждает нас сделать подстановку

$$\chi(r) = e^{-kr} f(r), \quad (134b)$$

которая приводит уравнение (133a) к виду

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - 2k \frac{df}{dr} - \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2 r} \right] f = 0. \quad (133b)$$

При малых  $r$  функция  $f(r)$  должна, как и  $\chi(r)$ , иметь асимптотику (131), поэтому разумно сделать вторую подстановку:

$$f(r) = r^{l+1} \omega(r), \quad (134c)$$

приводящую к

$$r \frac{d^2 \omega}{dr^2} + [2(l+1) - 2kr] \frac{d\omega}{dr} - \left[ 2k(l+1) - \frac{2\mu Ze^2}{\hbar^2} \right] \omega = 0. \quad (133c)$$

Последнее уравнение сразу напоминает известное уравнение

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0 \quad (135.1)$$

для конфлюэнтной гипергеометрической функции <sup>1)</sup>

$$y(x) = {}_1F_1(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (135.2)$$

Ясно, что для того, чтобы привести (133с) к виду (135.1), следует сделать замену независимого переменного, положив

$$2kr = x. \quad (134d)$$

Тогда (133с) примет вид

$$x \frac{d^2 \omega}{dx^2} + [2(l+1) - x] \frac{d\omega}{dx} - \left[ l+1 - \frac{\mu Z e^2}{k\hbar^2} \right] \omega = 0, \quad (133d)$$

который совпадет с (135.1), коль скоро выбрать

$$\alpha = l+1 - \frac{\mu Z e^2}{k\hbar^2} \quad \text{и} \quad \gamma = 2(l+1). \quad (134e)$$

**20.1.2.** При больших  $r$  гипергеометрический ряд (135.2) рас-  
тет, как известно, как  $e^x = e^{2kr}$ . Следовательно, в общем случае  
получаемая подстановками (134) из (135.2) функция  $\chi(r)$  будет  
при больших  $r$  экспоненциально *расти* (в соответствии со сде-  
ланными выше общими замечаниями) и не даст нам удовлетво-  
ряющего граничным условиям решения уравнения Шредингера.

Особый случай произойдет, только если ряд (135.2) оборвет-  
ся на конечном члене. Из его структуры видно, что для этого  
нужно, чтобы  $\alpha$  оказалось бы целым неположительным числом.  
Итак, *условие обрыва ряда* записывается как

$$\alpha = -n_r; \quad n_r = 0, 1, \dots, \quad (136a)$$

или, если ввести другое целое число

$$n = l+1 - \alpha = l+1 + n_r, \quad (136b)$$

в виде

$$n = l+1, l+2, \dots \quad (\text{всегда } n \geq 1). \quad (136c)$$

Если условие (136) выполнено, то  $\omega$  растет при больших  $r$  лишь  
*степенным* образом, а, следовательно,  $\chi(r)$  в силу (134b) экспо-  
ненциально убывает. Таким образом условие (136) выделяет нам  
те значения параметра  $\alpha$ , при которых наша ЕВР для уравнения  
Шредингера имеет нормируемые решения, а числа  $n_r$  (или  $n$ )  
нумеруют эти собственные функции. Число  $n_r$  принято называть

<sup>1)</sup> См., например, Рыжик, 1948, стр. 138; Янке-Эмде, 1948, стр. 373.

**радиальным квантовым числом**, а число  $n$  — **главным квантовым числом**.

**20.1.3.** Подставляя эти квантовые числа в (134e), находим, что собственными значениями определяющего, согласно (134b), скорость убывания волновой функции мнимого «волнового вектора»  $k$  будут

$$k_n = \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2 n}.$$

**20.1.4.** При движении электрона в поле атомного ядра масса электрона даже в самом легком атоме — в водороде — примерно в 2000 раз меньше массы ядра, поэтому в хорошем приближении можно считать, что приведенная масса  $\mu$  равна просто массе электрона  $m$ . Тогда полученная формула примет вид

$$k_n = \frac{\mu Z e^2}{\hbar^2 n} = \frac{1}{a_B} \frac{Z}{n}, \quad (137.1)$$

где  $a_B$  — характерная для определения атомных масштабов длина, которую в честь Нильса Бора называют **боровским радиусом**. Мы уже встречались с этой, определяющей порядок размеров атомов, — а, следовательно, и привычные нам плотности (точнее — числа атомов в кубическом сантиметре) жидких и твердых макроскопических тел, — длиной в историческом введении и отмечали тогда ее связь с другой фундаментальной для физики элементарных частиц постоянной размерности длины —

**классическим радиусом электрона**  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  (см. II, § 14).

Именно

$$a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{r_0}{\alpha^2} = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}. \quad (137.1a)$$

Безразмерная постоянная  $\alpha = \frac{1}{137}$  — так называемая **постоянная тонкой структуры** — характеризует, независимо от применяемой системы единиц, силу электромагнитного взаимодействия. Поэтому формула (137.1a) показывает, что сравнительно (с классическим радиусом электрона) очень большие «размеры» атомов объясняются слабостью электромагнитного взаимодействия — другое известное нам в природе взаимодействие — сильное или ядерное взаимодействие, для которого соответствующая константа велика (порядка 15-ти), — приводит к связанным системам (атомным ядрам), размеры которых по порядку величины не отличаются от классического радиуса электрона. Таким образом

можно сказать, что привычные нам плотности макроскопических тел определяются слабостью электромагнитного взаимодействия — будь это взаимодействие сильным, все окружающие нас тела были бы в  $\alpha^{-6}$ , т.е. примерно в миллион миллионов раз «тяжелее»<sup>1)</sup>.

**20.1.5.** Обратимся теперь к энергии собственных состояний. Ее значения через волновой вектор  $k$  задаются формулой (134a). Подставляя в нее  $k$  из (137.1), получаем

$$-E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = \frac{RZ^2}{n^2}, \quad (137.2)$$

где мы опять заменили приведенную массу  $\mu$  на массу электрона  $m$ . Введенная здесь **постоянная Ридберга**  $R$  опять-таки уже фигурировала в историческом введении и выражалась — способом, очень похожим на (137.1a), — через «естественную» единицу энергии — собственную энергию или энергию покоя электрона  $mc^2$  — и постоянную тонкой структуры  $\alpha$

$$R = \frac{me^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2} mc^2 \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,511 \text{ МэВ} \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot 27,21 \text{ эВ} \quad (137.2a)$$

(Ее значение известно сейчас с *семью* значащими цифрами!). Это — та самая постоянная, которая фигурировала в эмпирически найденных «термах» водородного атома. Таким образом теоретическое получение формул (137.2) сразу указывает, что теория правильно описывает результаты опыта. Именно эти формулы были получены в работе Шредингера 1926 года и поддерживали надежду, что поиски правильной «микромеханики» направились по нужному пути.

**20.2.1.** Однако главный смысл полученного результата состоит, конечно, не в количественных совпадениях чисел. Ос-

---

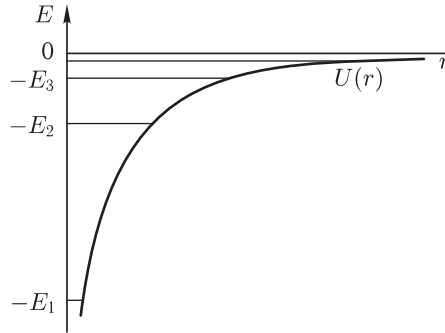
<sup>1)</sup> Внимательный читатель мог бы возразить здесь, что проводимое сравнение с ядерными системами не совсем правомерно — при его проведении мы почему-то отвлеклись от того обстоятельства, что массы  $M$  ядерных частиц — протонов и нейтронов — как только что указывалось, примерно в 2000 раз больше массы  $m$  электрона. Оказывается, однако, что хотя протоны или нейтроны и гораздо тяжелее электронов, но их «классический радиус», получаемый при замене в  $\hbar_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  массы электрона  $m$  на  $M$  и электромагнитного

заряда  $e$  на «постоянную сильных взаимодействий»  $g$ , т.е. величина  $R_0 = \frac{g^2}{Mc^2}$ , практически совпадает с электронным  $\hbar_0$ .

Этот поразительный факт до сих пор не нашел себе никакого теоретического объяснения.

новное принципиальное значение имеет качественный характер полученного спектра энергии (см. рисунок).

Согласно (137.2) энергия зависит только от главного квантового числа  $n$ , которое (136с) принимает значения  $1, 2, \dots$ . Таким образом для  $E < 0$  спектр возможных значений энергии дискре-



уровни энергии в кулоновом поле

тен, причем имеется *наинизший* уровень энергии, отвечающий значению  $n = 1$ . Более подробный анализ показывает, что эта последняя особенность является общей для всех потенциалов, удовлетворяющих (131а). Далее, по мере роста  $n$ , следующие уровни располагаются все выше, и при  $n \rightarrow \infty$  дискретный спектр обладает точкой сгущения при  $E \rightarrow 0$ . При  $E > 0$  начинается непрерывный спектр. Бесконечность числа уровней дискретного спектра является специальной особенностью кулонова потенциала, связанной с его сравнительно медленным убыванием при больших  $r$ . Для потенциалов, которые быстро стремятся к нулю с ростом  $r$ , число уровней может быть конечным.

Главный, наиболее важный вывод из этих результатов квантовой механики состоит, конечно, в том, что энергетический спектр *ограничен снизу*, что существует *наинизший* уровень энергии, которому соответствует **основное состояние** системы.

**20.2.2.** Почему этот вывод представляется таким существенным? Почему при изучении всякой системы нас прежде всего интересуют ее состояния с самой малой энергией? То представление, что всякая система всегда «стремится» к наинизшему возможному энергетическому состоянию, основано на молчаливо принимаемом допущении, что всегда есть некоторый механизм «потери» энергии. Это есть по существу неявный перенос в «точную» микромеханику обыденных макроскопических представле-



ний, что всегда есть диссипирующие энергию силы типа сил трения.

Более ученым образом такую систему взглядов можно характеризовать тем утверждением, что «в природе нет действительно изолированных систем с конечным числом степеней свободы» (взаимодействие с другой системой с *конечным* числом степеней свободы не могло бы предоставить возможности для неограниченной передачи энергии).

Если присоединиться к такой точке зрения, — а для атомных систем она обосновывается тем, что можно, как то мы делали во введении, указать *явный* механизм диссипации за счет потери энергии на электромагнитное излучение, — то возникает *проблема наиминиших состояний*: за счет чего можно обеспечить такое положение вещей, что у всякой системы (между частицами которой могут действовать силы притяжения) *всегда есть* состояние самой низшей и при том *конечной* энергии?

**20.2.3.** В наивно-механическом понимании этого можно было добиться засчет «непроницаемости» частиц, наглядно представляемых как что-то вроде твердых бильярдных шариков. Более утонченной формулировкой того же представления могут быть слова об изменении сил взаимодействия на малых расстояниях, о введении потенциалов, приводящих на малых расстояниях к силам отталкивания. Однако в связи с проблемой устойчивости атомов, где этот вопрос впервые встал перед физиками во весь рост, такие *модельные* попытки не привели, как мы уже говорили, ни к каким успехам.

**20.2.4.** Квантовая механика предлагает решение этой проблемы на совершенно другом пути. Силы, вид потенциальной энергии, оставляются такими же, как в классической теории. Однако другая «кинематика», точнее, другой подход к описанию состояний системы, не позволяют частице проваливаться в потенциальную яму *сколь угодно глубоко*.

В самом деле, легко показать качественным рассуждением, что достигнутый нами вывод об ограниченности возможных значений энергии снизу есть прямое следствие принципа неопределенности, точнее, соотношения неопределенностей (79).

**20.2.4.1.** Рассмотрим частицу, находящуюся в образованной кулоновым полем потенциальной яме, и предположим, что она все время находится в области с размерами порядка некоторого  $a$ ; тогда ее средняя потенциальная энергия будет порядка  $-\frac{e^2}{a}$ . Того же порядка  $a$  будет и неопределенность значения координаты.

ты частицы; значит, по соотношению неопределенностей, неопределенность ее импульса будет порядка  $\frac{\hbar}{a}$ . Такого же порядка (во всяком случае — не меньше) будет и сам импульс, он привнесет с собой кинетическую энергию порядка  $\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ . Поэтому *полная* энергия частицы (имеющая в стационарном состоянии *определенное* значение) будет равна

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}.$$

Полученная зависимость полной энергии от параметра  $a$  имеет (абсолютный) минимум при

$$a = a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{1}{k_1},$$

равный

$$E_{\min} = E(a_0) = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = E_1$$

— т.е. в точности равный низшему уровню найденного нами спектра (137.2) (при  $Z = 1$ ).

**20.2.4.** Таким образом получаемый из решения квантовомеханической задачи самый низший «основной» уровень энергии — это просто минимальная энергия, которую может иметь система в силу соотношения неопределенностей (напомним аналогичный результат для осциллятора в **17.3.**). Образно выражаясь, можно сказать, что по мере приближения частицы к сингулярной точке потенциала она начинает испытывать столь сильные нулевые колебания, что (для потенциалов, удовлетворяющих (131a)) прирост кинетической энергии оказывается больше убыли потенциальной, и суммарная энергия оказывается ограниченной снизу. Корень нашего макроскопического представления о «непроницаемых» телах оказывается лежащим в том, что при слишком сильном сближении микрочастицы начинают двигаться «слишком быстро»!

## ДОПОЛНЕНИЯ

---

### 1. Элементы аналитической механики <sup>1)</sup>

**1.1. Лагранжев формализм.** Лагранжев формализм — основанная на вариационном принципе формулировка механики и теории поля, в которой состояние системы задается обобщенными координатами  $q_i$  и их производными по времени — обобщенными скоростями  $\dot{q}_i$ . Исходным для лагранжева формализма являются фундаментальные понятия действия  $S$  и его полной производной по времени, взятой вдоль траектории системы, — функции Лагранжа  $L(t)$ ; при этом  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt$ . Для механической системы с конечным числом степеней свободы (например, для системы материальных точек) обычно принимают, что функция Лагранжа зависит от  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ :

$$L(t) = L[q(t), \dot{q}(t), t] \quad (1.1)$$

(где  $q, \dot{q}$  — совокупность  $q_i, \dot{q}_i$ ).

Существуют и обобщения лагранжева формализма на случаи, когда  $L$  зависит от высших производных  $q$ . Для систем с бесконечным числом степеней свободы — физических полей — роль обобщенных координат играют значения компонент поля  $\varphi^a(\mathbf{x})$  во всех пространственных точках  $\mathbf{x}$ . Зависимость  $L$  от всех  $\varphi^a(\mathbf{x})$  означает, что  $L$  является функционалом. Для физики наиболее интересны локальные функционалы, для которых вторая вариационная производная  $\delta^2 L / \delta \varphi^a(\mathbf{x}) \delta \varphi^b(\mathbf{x}')$  отлична от нуля лишь при  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Тогда функция Лагранжа может быть представлена в виде  $L(t) = \int \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ , а действие — в виде  $S = \int \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt$ , где плотность функции Лагранжа  $\mathcal{L}$ , называемая лагранжианом, зависит от полей (и, как правило, от их первых производных),

---

<sup>1)</sup> Это дополнение к части I основного текста.

взятых в одной и той же точке пространства-времени  $\mathbf{x}$ ,  $t$ . [Иногда термин «лагранжиан» используют и для самой функции Лагранжа  $L(t)$ , а  $\mathcal{L}$  называют плотностью лагранжиана.]

В релятивистской теории и действие  $S$ , и лагранжиан  $\mathcal{L}$  являются скалярами относительно преобразований группы Пуанкаре. В четырехмерных обозначениях переменные  $(t, \mathbf{x}) = \{x_\mu\} = x$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) входят равноправно, и действие записывается как локальный функционал полей и их первых производных, заданных на некоторой 4-области  $\Omega$ :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x) dx, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^a(x), \partial_\mu \varphi^a(x)), \quad (1.2)$$

(принято сокращение  $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ ).

В механике и теории поля постулируется фундаментальный принцип наименьшего действия, утверждающий, что для реальных движений системы функционал  $S$  принимает экстремальное значение, т. е. его вариации  $\delta S = 0$ . Уравнения движения получаются из него по правилам вариационного исчисления как условия экстремума; они называются уравнениями Эйлера–Лагранжа и имеют вид

$$\partial \mathcal{L} / \partial \varphi^a - d_\mu [\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi^a)] = 0, \quad (1.3)$$

где  $d_\mu \equiv d/dx_\mu$  — «полная частная производная», учитывающая зависимость  $\mathcal{L}$  от  $x$  как явную, так и через поля  $\varphi^a(x)$ , по повторяющемуся индексу  $\mu$  предполагается суммирование. Таким образом, задание формы лагранжиана полностью определяет уравнения движения.

Для систем со связями  $\chi_j(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^a, x) = 0$ , вариационный принцип применяется к модифицированному лагранжиану  $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \sum_j \chi_j \lambda_j(x)$ , причем множители Лагранжа  $\lambda_j(x)$

находятся интегрированием соответственно модифицированных уравнений Эйлера–Лагранжа.

При наличии в теории симметрии лагранжев формализм позволяет, помимо уравнений движения, найти соответствующие законы сохранения с помощью теоремы Нётер.

В силу этой теоремы из инвариантности действия относительно каждой однопараметрической группы преобразований симметрии следует сохранение одной явно строящейся функции координат и скоростей  $F(q, \dot{q}, t)$ . В релятивистской теории аналогом момента времени  $t$  служит пространственноподобная поверхность  $\sigma$ , а аналогом сохранения во времени,  $dF/dt = 0$ ,

является независимость от  $\sigma$  соответствующего функционала, полей и их производных:

$$F[\sigma; \varphi^a, \partial_\mu \varphi^a] = \int_\sigma d\sigma_\nu F_\nu(\varphi^a(x), \partial_\nu \varphi^a(x), x): \quad (1.4)$$

$$\delta F[\sigma; \varphi^a, \partial_\mu \varphi^a] / \delta \sigma = 0.$$

Иными словами, каждой сохраняющейся величине  $F$  отвечает локальный четырехмерный «ток»  $F_\nu(x)$ , удовлетворяющий дифференциальному закону сохранения  $\partial_\nu F_\nu(x) = 0$ . В частности, всякое релятивистское описание должно быть инвариантно относительно трансляций и вращений в 4-пространстве (образующих 10-параметрическую группу Пуанкаре). Инвариантность  $S$  относительно преобразований группы Пуанкаре приводит к сохранению четырех компонент энергии–импульса  $P_\mu$  и шести компонент момента  $M_{\mu\kappa} = -M_{\kappa\mu}$ . Если взять поверхность  $\sigma$  в виде  $x_0 = t$ , то они выражаются формулами

$$P_\mu = \int dx T_{\mu 0}(x), \quad M_{\mu\kappa} = \int dx M_{\mu\kappa, 0} \quad (1.5)$$

через свои «токи» — тензоры энергии–импульса  $T_{\mu\nu}$  и момента  $M_{\mu\kappa, \nu}$ , удовлетворяющие дифференциальным законам сохранения  $\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$  и  $\partial_\nu M_{\mu\kappa, \nu} = 0$ . Эти тензоры находятся по заданному  $\mathcal{L}$  по формулам

$$T_{\mu\nu} = (\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi^a)) \partial_\nu \varphi^a - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.6)$$

$$M_{\mu\kappa, \nu} = x_\mu T_{\nu\kappa} - x_\kappa T_{\nu\mu} + (\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\nu \varphi^a)) s_{\mu\kappa}^{ab} \varphi^b,$$

где матрица  $s^{ab}$  описывает изменение многокомпонентного поля  $\varphi^a$  при бесконечно малом преобразовании Лоренца с параметром  $\omega_{\mu\kappa}$ ,  $\delta \varphi^a = 1/2 s_{\mu\kappa}^{ab} \varphi^b \omega_{\mu\kappa}$ . Если в теории имеются и другие группы симметрии, т. е. действие инвариантно относительно преобразований из этих групп, теорема Нётер дает дополнительно сохраняющиеся величины (например, заряды). В *гамильтоновом формализме* выясняется, что сохраняющиеся величины являются генераторами соответствующих преобразований симметрии. (Отметим, что в теориях, содержащих *динамические симметрии*, возникают дополнительные законы сохранения, которые не могут быть получены из теоремы Нётер.)

Таким образом, лагранжиан полностью определяет теорию: лагранжев формализм дает уравнения движения и сохраняющиеся динамические величины. Напротив, по заданной теории лагранжиан восстанавливается неоднозначно, например к нему всегда можно добавить 4-дивергенцию любой функции, что не

сказывается ни на уравнениях движения, ни на сохраняющихся величинах.

Лагранжев формализм играет важную эвристическую роль при построении математического описания новой области явлений. Действительно, в соответствии с требованиями инвариантности относительно преобразований из группы Пуанкаре и других групп симметрии  $\mathcal{L}$  может зависеть только от инвариантных комбинаций полей, которые нетрудно перечислить. Если по соображениям простоты оставить в  $\mathcal{L}$  инварианты минимальной степени по полям, получающиеся из лагранжева формализма уравнения движения часто оказываются линейными. В этом случае они называются уравнениями свободного поля. Так, для векторного поля с абелевой калибровочной группой (электромагнитного поля) все возможные лагранжианы эквивалентны выражению  $-1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , где тензор поля  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $A_\mu$  — 4-потенциал, а уравнения свободного поля имеют вид  $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$ . В случае более сложной симметрии, например с неабелевой калибровочной группой, тензор поля

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - t^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.7)$$

(где  $t^{abc}$  — структурные константы группы), а простейший лагранжиан  $\mathcal{L} = -1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ . Уже простейшие нетривиальные уравнения оказываются нелинейными по полю:  $\nabla_\mu^{ab} F_{\mu\nu}^b = 0$ , где  $\nabla_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - t^{abc} A_\mu^c$  — ковариантная производная для данной калибровочной группы.

Квантовая теория поля заимствует у классической весь лагранжев формализм с той лишь разницей, что полевые функции являются теперь не  $c$ -числами, а, вообще говоря, некоммутирующими операторами. Поэтому операция варьирования, применяемая для вывода уравнений движения и получения динамических величин, требует доопределения; в ряде случаев (например, в квантовой электродинамике) оно сводится к той или иной симметризации операторов.

Фундаментальная роль лагранжева формализма была вскрыта в лагранжевой форме квантовой динамики, предложенной П. А. М. Дираком (1933 г.) и развитой Р. Фейнманом (1948 г.) — третьем, наряду с традиционными шредингеровым и гейзенберговым, способе ее построения. На этом пути отщепление квантовой теории от классической связано с разными законами композиции вероятностей перехода между последовательными состояниями  $a, b, c, \dots$  динамической системы. В то время как в классической теории для вероятностей  $P$  имеет место интуитивно очевидный

мультипликативный закон композиции  $P_{ac} = \sum_b P_{ab}P_{bc}$  (здесь «суммирование» производится по всем промежуточным конфигурациям  $b$ ), в квантовой теории ему подчиняются не сами вероятности, а амплитуды  $A$  (такие, что  $P_{ab} = |A_{ab}|^2$ ):  $A_{ac} = \sum_b A_{ab}A_{bc}$ .

Математическое оформление этого утверждения эквивалентно введению функционального интеграла по значениям обобщенных координат в момент времени  $t$  на всех возможных траекториях системы. Все результаты обычной квантовой динамики получаются тогда из постулата, что фаза амплитуды есть классическое действие, измеренное в единицах  $\hbar$ :  $A_{ab} = \exp(iS_{ab}/\hbar)$ . Фейнмановский функциональный (континуальный) интеграл широко используется также в квантовой теории поля.

В квазиклассическом приближении, когда фазы  $S/\hbar$  велики, основной вклад в континуальный интеграл дает область, где фаза стационарна, т. е.  $\delta S = 0$  при вариации траекторий. Таким образом, принцип наименьшего действия для классических траекторий оказывается следствием квантовой динамики.

**1.2. Гамильтонов формализм.** Гамильтонов формализм — основанная на вариационном принципе формулировка механики и теории поля, в которой состояние системы задается обобщенными координатами  $q^i$  и обобщенными импульсами  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  — число степеней свободы). Описываемая гамильтоновым формализмом динамическая система называется гамильтоновой системой, а пространство ее состояний — фазовым пространством. В гамильтоновом формализме действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - H(p, q, t)] dt \quad (2.1)$$

выражается через функцию Гамильтона  $H$  (точкой обозначено дифференцирование по времени;  $p, q$  — совокупность всех  $p_i, q^i$ ).  $H$  является преобразованием Лежандра функции Лагранжа  $L$ :  $H = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t)$ , где  $\dot{q}^i$  в правой части следует выразить через  $p_i$ , разрешив относительно  $\dot{q}^i$  определение импульсов:

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i. \quad (2.2)$$

Условием разрешимости является невырожденность гессиа на  $\Gamma$  — матрицы вторых производных функции Лагранжа по скоростям

$$\det \Gamma_{ij} = \det (\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) \neq 0. \quad (2.3)$$

В принципе наименьшего действия  $\delta S = 0$  независимыми вариациями в (2.1) считаются  $\delta p_i$  и  $\delta q^i$ , причем  $\delta \dot{q}^i = d\delta q^i/dt$ . Тогда стандартные уравнения Эйлера–Лагранжа дают в качестве уравнений движения уравнения Гамильтона

$$\dot{q}^i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = \partial H / \partial q^i. \quad (2.4)$$

В гамильтоновом формализме любая динамическая переменная  $f$  является функцией канонических переменных  $p, q$  (и, возможно времени). Ее полная производная по времени

$$\dot{f} \equiv df/dt = \partial f / \partial t + [\dot{q}^i (\partial f / \partial q^i) + \dot{p}_i (\partial f / \partial p_i)]$$

вследствие уравнений Гамильтона имеет вид

$$\dot{f} = \partial f / \partial t + \{H, f\},$$

где  $\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$  — скобка Пуассона двух динамических переменных  $f$  и  $g$ . Не зависящая явно от времени переменная  $f$  сохраняется, если ее скобка Пуассона с  $H$  обращается в нуль.

Гамильтонов формализм допускает широкий класс замен переменных в фазовом пространстве — канонические преобразования, при которых уравнения Гамильтона и скобка Пуассона не меняются.

Переход от лагранжева к гамильтонову формализму осложняется, когда определения импульсов (2) не разрешимы относительно всех  $\dot{q}^i$ , т.е. когда  $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = 0$ . (Эта ситуация всегда возникает в калибровочных теориях, в которых  $L$  вообще не зависит от некоторых  $\dot{q}^i$ .) В этом случае процедуру перехода удобно разбить на два этапа. На первом этапе модифицируется лагранжево действие — в число независимых функциональных аргументов включаются скорости.

Пусть  $Q$  конфигурационное пространство,  $TQ$  его касательное расслоение,  $q = (q^1, \dots, q^n)$ ,  $v = (v^1, \dots, v^n)$  локальные координаты. Зададим на  $TQ$  функцию Лагранжа  $L(q; v)$ . Она вырождена, если ранг гессиана  $\Gamma_{ij} = \partial^2 L / \partial v^i \partial v^j$  не максимален. Набор индексов  $N = (1, \dots, n)$  разобьем на два,  $A^0$  и  $M^0$ , так что  $\Gamma_{ab}$  — какой-нибудь минор максимального ранга; обозначим  $a, b, \dots \in A$ ;  $\mu, \nu, \dots \in M^0$ . При этом  $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu a} \Gamma^{ab} \Gamma_{b\nu}$ , где  $\Gamma^{ab}$  обратная к  $\Gamma_{ab}$  матрица.



Нетрудно убедиться, что эквивалентные первоначальным уравнения Эйлера–Лагранжа дают действие

$$\tilde{S}[q^i, v^i, p_\mu] = \int dt (L - v^a \partial L / \partial v^a + \dot{q}^a \partial L / \partial v^a + p_\mu (\dot{q}^\mu - v^\mu)). \quad (2.5)$$

Действительно, невырожденность  $\Gamma_{ab}$  обеспечивает равенство  $\dot{q}^a = v^a$  как следствие уравнений движения, а также соотношение  $p_\mu = \partial L / \partial v^\mu$ , а для получения уравнений  $\dot{q}^\mu = v^\mu$  введены множители Лагранжа  $p_\mu$ . Таким образом, в вырожденном случае функциональными аргументами действия, т. е. независимыми координатами фазового пространства, являются локальные координаты касательного расслоения и множители Лагранжа, имеющие физический смысл импульсов с индексами из набора  $M^0$ .

Невырожденность  $\Gamma_{ab}$  позволяет локально разрешить относительно  $v^a$  определение импульсов  $p_a = \partial L / \partial v^a$ , получив  $v^a = U^a(q^i, p_a, v^\mu)$ . Обозначим символом  $N$  подстановку  $v^a = U^a$  для любой функции на (лагранжевом) фазовом пространстве. Благодаря тождеству  $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu a} \Gamma^{ab} \Gamma_{b\nu}$  функция Рауса  $R(q^i, p_a, v^\mu) = (L - v^a \partial L / \partial v^a)^N$  линейна по  $v^\mu$ :

$$R = -H(q^i, p_a) + v^\mu \psi_\mu(q^i, p_a); \quad (2.6)$$

причем  $\psi_\mu = (\partial L / \partial v^\mu)^N$ . Введем обозначение

$$\varphi_\mu = p_\mu - \psi_\mu. \quad (2.7)$$

В итоге замена функциональных аргументов  $v^a \rightarrow p_a$  приводит действие (2.5) к гамильтоновой форме

$$\tilde{S}[q^i, p_i, v^\mu] = \int dt (-H - v^\mu \varphi_\mu + p_i \dot{q}^i). \quad (2.8)$$

Как обычно, наличие в действии (2.8) формы Лиувилля  $\theta = p_i dq^i$  позволяет ввести невырожденную замкнутую 2-форму  $\omega = d\theta$  и тем самым симплектическую структуру в кокасательное расслоение  $T^*Q$  (с локальными координатами  $q^i, p_i$ ; тот факт, что  $T^*Q$  является подмногообразием (гамильтонова) фазового пространства, требует особого доказательства) и стандартную скобку Пуассона. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (2.8) принимают предложенный Дираком вид

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{H, q^i\} + v^\nu \{\varphi_\nu, q^i\}, \\ \dot{p}_i &= \{H, p_i\} + v^\nu \{\varphi_\nu, p_i\}, \\ \varphi_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Не содержащие производных уравнения последней группы называются уравнениями связей, а для любой функции канонических

переменных  $f(p, q)$  производная по времени в силу уравнений движения имеет вид

$$\dot{f} = \{H, f\} + v^v \{\varphi_v, f\}. \quad (2.10)$$

Согласно Дираку условие совместности системы уравнений (2.9) означает, что эволюция во времени не должна выводить за поверхность связей (на этом исходном этапе мы имеем поверхность первичных связей  $M_0 = \{\varphi_\mu = 0, \mu \in M^0\}$ ). Иными словами, производная связей по времени в силу уравнений движения должна сводиться к линейной комбинации связей с произвольными функциями в качестве коэффициентов. В соответствии с (2.10)

$$\dot{\varphi}_\mu = \{H, \varphi_\mu\} + v^v \{\varphi_v, \varphi_\mu\}. \quad (2.11)$$

Напомним, что  $\varphi_\mu$  линейны по  $p_\mu$  с единичным коэффициентом; поэтому оба члена правой части (2.11) не зависят от  $p_\mu$ , и упомянутая линейная комбинация связей для  $\dot{\varphi}_\mu$  не может содержать  $\varphi_\mu$ , т. е. оказывается тривиальной: мы должны потребовать  $\dot{\varphi}_\mu = 0$ .

Рассмотрим матрицу  $\gamma_{\mu\nu} = \{\varphi_\mu, \varphi_\nu\}$ . Если ее ранг на  $M_0$  не максимален, выделим какой-нибудь минор  $\gamma_{\alpha\beta}$  наибольшего ранга, разбив набор индексов  $M^0$  на два,  $A^1$  и  $M^1$ , так что  $\alpha, \beta \in A^1$ ;  $\mu', \nu' \in M^1$ . При этом на  $M_0$  имеем  $\gamma_{\mu'\nu'} = \gamma_{\mu'\alpha} \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\nu'}$ , где  $\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ , а из-за линейности  $\varphi_\mu$  по  $p_\mu$  это справедливо и вне  $M_0$ . Поэтому в качестве нулевых векторов матрицы  $\gamma_{\mu\nu}$  можно взять

$$\beta_{\mu'}^\mu = \delta_{\mu'}^\mu - \delta_\alpha^\mu \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\mu'}. \quad (2.12)$$

Условие совместности  $\dot{\varphi}_\mu = 0$  позволяет выразить множители Лагранжа  $v^\alpha = -(\{H, \varphi_\beta\} + v^{\mu'} \gamma_{\mu'\beta}) \gamma^{\beta\alpha}$ , так что производная по времени в силу уравнений движения приобретает вид

$$\dot{f} = \{H, f\}_1^* + v^{\nu'} \{\varphi_{\nu'}, f\}_1^*, \quad (2.13)$$

где  $\{, \}_1^*$  — скобка Дирака  $\{, \}^D$ , построенная по связям второго рода  $\varphi_\alpha$ :

$$\{f, g\}_1^* = \{f, g\} - \{f, \varphi_\alpha\} \gamma^{\alpha\beta} \{\varphi_\beta, g\}. \quad (2.14)$$

Если матрица  $\gamma_{\mu\nu}$  не вырождена (набор  $M^1$  пуст), все  $v^\mu$  окажутся фиксированными, а условие совместности выполненным. В противном случае умножение условия  $\dot{\varphi}_\mu = 0$  на нулевые векторы матрицы дает новые соотношения между каноническими переменными

$$0 = \{H, \varphi_\mu\} \beta_{\mu'}^\mu = \{H, \varphi_{\mu'}\}_1^* \equiv \varphi_{\mu'}^1, \quad (2.15)$$

т.е. вторичные связи  $\phi_\mu^1$ . Требование совместности сужает поверхность связей до  $M_1 = \{\phi_\mu = 0, \phi_{\mu'}^1 = 0, \mu \in M^0, \mu' \in M^1\}$ . На следующем этапе рекуррентной процедуры условие совместности требует, чтобы на  $M_1$  обращались в нуль производные по времени в силу уравнений движения для вторичных связей. В силу (2.13)

$$\dot{\phi}_{\mu'}^1 = \{H, \phi_{\mu'}^1\}_1^* = v^{v'} \gamma_{v'\mu'}^1,$$

где матрица  $\gamma_{v'\mu'}^1 = \{\phi_{v'}, \phi_{\mu'}^1\}_1^*$  симметрична по индексам  $\mu', v'$  вследствие тождества  $\{\phi_\mu, \phi_v\}_1^* = 0$ , свойства  $\beta_{\mu'}^\mu \beta_{v'}^\nu \{\gamma_{\mu\nu}, f\} = 0$  для любой функции  $f(p; q)$  и тождества Якоби и не зависит от  $p_\mu$ . Если ее ранг на  $M_1$  не максимален, разобьем набор  $M^1$  на два,  $A^2$  и  $M^2$ , так что минор  $\gamma_{\alpha'\beta'}^1, \alpha'\beta' \in A^2$ , имеет наибольший ранг. Аналогом тождества для  $\gamma_{\mu\nu}$  будет соотношение

$$\gamma_{\mu''v''}^1 = \gamma_{\mu''\alpha'}^1 \gamma^{\alpha'\beta'} \gamma_{\beta'v''}^1 + c_{\mu''v''}^{1\lambda'} \phi_{\lambda'}^1,$$

где  $c^1$  — вычисляемые функции канонических переменных. Поскольку элементы матрицы  $\gamma^1$  не зависят от  $p_\mu$ , в правую часть не входят линейные по  $p_\mu$  первичные связи  $\phi_\mu$ . Построенные по аналогии с (2.12) линейные комбинации

$$\beta_{\mu''}^{1\mu'} = \delta_{\mu''}^{\mu'} - \delta_{\alpha''}^{\mu'} \gamma^{\alpha'\beta'} \gamma_{\beta'\mu''}^1, \quad \mu'' \in M,$$

будут (в отличие от  $\beta_{\mu'}^\mu$ ) нулевыми векторами матрицы  $\gamma^1$  лишь на поверхности  $M_1$ , а вне ее

$$\beta_{\mu''}^{1\mu'} \gamma_{\mu'v'}^1 = \delta_{v'}^{\mu''} c_{\mu''v''}^{1\lambda'} \phi_{\lambda'}^1.$$

В принципе совместность на этом этапе гарантирована, если

$$\{H, \phi_{\mu'}^1\}_1^* + v^{v'} \gamma_{v'\mu'}^1 = d_{\mu'}^{\lambda'} \phi_{\lambda'}^1$$

где  $d_{\mu'}^{\lambda'}$  — произвольные функции канонических переменных. Часть этих условий с  $\mu' = \alpha' \in A^2$  можно считать системой уравнений для  $v^{\alpha'}$ ; произвол в решении этой системы, связанный с  $d$ , удобно фиксировать, потребовав, чтобы  $d_{\alpha'}^{\lambda'} = 0$

$$v^{\alpha'} = -(\{H, \phi_{\beta'}^1\}_1^* + v^{v''} \gamma_{v''\beta'}^1) \gamma^{1\beta'\alpha'}.$$

Подстановка этих  $v^{\alpha'}$  в (2.13) приводит к следующей в иерархической последовательности комбинаций типа скобок Дирака:

$$\dot{f} = \{H, f\}_2^* + v^{v''} \{\phi_{v''}, f\}_2^*, \quad (2.16)$$

где

$$\{f, g\}_2^* = \{f, g\}_1^* - \{f, \phi_{\alpha'}^1\}_1^* \gamma^{1\alpha'\beta'} \{\phi_{\beta'}, g\}_1^*. \quad (2.17)$$

Отличие ее от скобки Дирака обсудим ниже. Далее, умножение условия  $\phi_{\mu'}^1 = 0$  на нулевые векторы  $\beta^1$  матрицы  $\gamma^1$  дает уравнения

$$\{H, \phi_{\mu'}^1\}_1^* \beta_{\mu''}^{\mu'} + v^{\nu''} c_{\nu''\mu''}^{1\lambda'} \phi_{\lambda'}^1 = d_{\mu''}^{\lambda'} \phi_{\lambda'}^1,$$

которые должны выполняться на поверхности  $M_1$ . Для этого достаточно потребовать выполнения уравнений связей следующего поколения — «третичных»:

$$0 = \{H, \phi_{\mu'}^1\}_1^* \beta_{\mu''}^{\mu'} = \{H, \phi_{\mu''}^1\}_2^* \equiv \phi_{\mu''}^2 \quad (2.18)$$

Таким образом, после этого шага мы приходим к поверхности  $M_2 = \{\phi_{\mu} = 0, \phi_{\mu'}^1 = 0, \phi_{\mu''}^2 = 0\}$ , матрице  $\gamma_{\mu''\nu''}^2 = \{\phi_{\mu''}^{\nu''}, \phi_{\nu''}^2\}_2^*$  с нулевыми (на  $M_2$ !) векторами  $\beta^2$  и далее к скобке  $\{f, g\}_3^*$  и «четвертичным» связям

$$\phi_{\mu'''}^3 = \{H, \phi_{\mu''}^2\}_2^* \beta_{\mu'''}^{2\mu''} = \{H, \phi_{\mu'''}^2\}_3^*. \quad (2.19)$$

Описанная рекуррентная процедура фиксирует представителей в классах эквивалентности для связей каждого этапа; ее неоднозначность связана лишь с выбором миноров наибольшего ранга у матриц  $\gamma^k$ .

Заметим, что не все связи  $\phi^k$   $k$ -го этапа могут оказаться независимыми на  $M_k$ . Однако это обстоятельство автоматически учитывается в рекуррентной процедуре: нетрудно убедиться, что ранг матрицы  $\gamma^k = \{\phi, \phi^k\}_k^*$ , построенной по всем связям  $\phi^k$ , совпадает на поверхности  $M_k$  с рангом аналогичной матрицы, построенной по независимым, произвольным образом выбранным из набора  $\phi^k$ .

Рекуррентная процедура заканчивается, когда либо ранг  $\gamma^k$  на  $k$ -м этапе оказывается максимальным, либо среди  $\phi^{k+1}$  не оказывается независимых, т. е. не выражающихся линейно через связи предыдущих этапов. Весьма существенно, что получающаяся в итоге скобка  $\{, \}_k^*$  отличается от скобки, введенной самим Дираком и конструируемой по всем связям II рода.

Различие между ними возникает уже на втором этапе рекуррентности, для  $k = 2$  (на первом этапе  $\{, \}_1^* = \{, \}_1^D$ ). Связями II рода являются в этом случае  $\phi_{\alpha}, \phi_{\alpha'}, \phi_{\alpha'1}$ . Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned} \{f, g\}_2^D &= \{f, g\}_1^D - \{f, \phi_{\alpha'}^1\}_1^D \gamma^{1\alpha'\beta'} \{\phi_{\beta'}, g\}_1^D - \\ &\quad - \{f, \phi_{\alpha'}^1\}_1^D (\gamma^{1T})^{\alpha'\beta'} \{\phi_{\beta'}^1, g\}_1^D + \\ &\quad + \{f, \phi_{\alpha'}^1\}_1^D (\gamma^{1T})^{\alpha'\beta'} \{\phi_{\beta'}^1, \phi_{\gamma'}^1\}_1^D \gamma^{1\gamma'\delta'} \{\phi_{\delta'}, g\}_1^D. \end{aligned}$$

Очевидная группировка членов приводит к соотношению

$$\{f, g\}_2^D = \{f, g\}_2^* - \{f, \varphi_{\alpha'}\}_1^*(\gamma^{1T})^{\alpha'\beta'} \{\varphi_{\beta'}^1, g\}_2^*.$$

В отличие от  $\{, \}_2^*$  скобка Дирака  $\{, \}_2^D$  антисимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Важно, что хотя для произвольных функций канонических переменных скобки  $\{, \}_2^D$  и  $\{, \}_2^*$  различаются даже на поверхности связей, для  $\varphi_{\mu}$  и  $H$  имеем

$$\begin{aligned} \{\varphi_{\mu'}, f\}_2^D &= \{\varphi_{\mu'}, f\}_2^*, \\ \{H, f\}_2^D &= \{H, f\}_2^* - \varphi_{\alpha'}^1(\gamma^{1T})^{\alpha'\beta'} \{\varphi_{\beta'}^1, f\}_2^* \end{aligned}$$

так что на поверхности связей скобки  $*$  и  $D$  с ними эквивалентны и уравнения движения можно формулировать в терминах  $\{, \}_2^D$ . Это утверждение справедливо для любых  $k > 2$ : скобки  $*$  и  $D$  с участием  $\varphi_{\mu}$  в них совпадают всегда, а с участием  $H$  отличаются линейной комбинацией связей II рода.

Однако этого недостаточно для всеобъемлющей геометрической интерпретации гамильтоновой динамики в присутствии связей II рода. Действительно, скобка Дирака отвечает замкнутой невырожденной 2-форме в  $T^*Q$ . Именно в ее терминах корректно формулируется инволютивность связей I рода. Однако эволюции системы отвечает не гамильтонов фазовый поток, изоморфный благодаря скобке Дирака дифференциалу  $dH$ , а его сужение на поверхность связей II рода. Между тем на этой поверхности скобка Дирака эффективно сводится к канонической скобке Пуассона. Неособым линейным преобразованием связей II рода всегда можно добиться того, чтобы матрица их скобок Пуассона имела нормальную жорданову форму. После этого канонической заменой переменных в  $T^*Q$  можно сделать преобразование связи II рода частью новых координат и импульсов. Тогда, очевидно, скобка Дирака сведется к скобке Пуассона в остальных новых канонических переменных. Таким образом, попытка придать динамике со скобкой Дирака последовательную геометрическую интерпретацию приводит нас к канонической симплектической структуре.

В новых переменных эволюцией управляет функция Гамильтона  $H' = H + \sum_{k=1}^K \lambda_k \chi_k$ , включающая лишь связи I рода, находящиеся в инволюции (т. е. скобки Пуассона связей выражаются через линейную комбинацию самих связей):

$$\{\chi_k, \chi_{k'}\} = \sum_{k'} c_{kk'k''} \chi_{k''}. \quad (2.20)$$

Гамильтоново описание ведется теперь в  $(2N - S)$ -мерном пространстве  $\Gamma'$  канонических переменных  $p', q'$ . В нем участвуют  $K$  произвольных функций  $\lambda_k(t)$ ; изменение  $\lambda_k$  не приводит к изменению состояния или закона эволюции, а сводится к каноническому калибровочному преобразованию, генератором которого является связь  $\chi_k$ . Наблюдаемыми величинами естественно считать не все функции  $f(p', q')$  на поверхности  $\mathcal{M}'$ , определенной условиями  $\chi_k = 0$ , а лишь те, на эволюции которых не сказывается произвол в  $\lambda_k$ . Для этого достаточно, чтобы  $\{f, \chi_k\} = 0$  на  $\mathcal{M}'$ , т. е.

$$\{f, \chi_k\} = \sum_{k'} d_{kk'} \chi_{k'}, \quad (2.21)$$

при этом  $\dot{f} = \{H', f\} = \{H, f\}$  на  $\mathcal{M}$ . Такие функции зависят не от всех  $2N - S - K$  координат на  $\mathcal{M}'$ . Если считать (2.21) системой дифференциальных уравнений для  $\chi_k$ , то (2.20) будут условиями ее разрешимости и  $f$  определится своими значениями на подмногообразии  $\Gamma^*$  начальных условий, размерности  $2N - S - 2K = 2N - J - K$ .  $\Gamma^*$  обычно задают на  $\mathcal{M}'$  уравнениями  $\eta_k(p', q') = 0$ , называемыми дополнительными условиями.

Как и в случае связей II рода, переходом к эквивалентным связям  $\tilde{\chi}_k$  и выбором дополнительных условий всегда можно добиться того, чтобы

$$\{\tilde{\chi}_k, \tilde{\chi}_{k'}\} = 0, \quad \{\tilde{\chi}_k, \eta_{k'}\} = \delta_{kk'}, \quad \{\eta_k, \eta_{k'}\} = 0,$$

т. е. чтобы новые связи и дополнительные условиягодились на роль канонических переменных. Каноническое преобразование в  $\Gamma'$  от  $(p'; q')$  к  $(\chi_k, p^*; \eta_k, q^*)$  достраивает остальные переменные  $p^*, q^*$ , служащие независимыми координатами на физическом фазовом пространстве  $\Gamma^*$ . Для функций, удовлетворяющих системе уравнений (2.21), скобка Пуассона выражается только через  $p^*, q^*$ :  $\{f, g\}_{p'q'} = \{f, g\}_{p^*q^*}$ .

Таким образом, существуют два эквивалентных описания гамильтоновой системы со связями: в полном фазовом пространстве  $\Gamma$  со скобкой Дирака  $\{f, g\}_{p,q}^*$  и функцией Гамильтона  $H^*$  и в физическом фазовом пространстве  $\Gamma^*$  со скобкой Пуассона  $\{f, g\}_{p^*,q^*}$  и функцией Гамильтона  $\tilde{H} = H|_{\chi_j=0, \eta_k=0}$ . Первый способ технически проще, поскольку на практике не всегда удается явно построить необходимые для второго способа канонические преобразования. Однако принципиальная возможность второго способа служит обоснованием метода функционального интеграла для систем со связями.

Для теорий с высшими производными, когда  $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)})$ , переход от лагранжева к гамильтонову формализму осуществляется введением новых координат  $q^k = q^{(k-1)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и связей  $\dot{q}^{k-1} - q^k = 0$ :

$$L \rightarrow L_T = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^n) + \sum_{k=2}^n \xi_k (\dot{q}^{k-1} - q^k). \quad (2.22)$$

При этом возникают  $2(n-1)$  гамильтоновых связей II рода:

$$P_k - \xi_k = 0, \quad \pi_k \equiv \partial L_T / \partial \dot{\xi}_k = 0.$$

Для функций переменных  $P, Q$  скобка Дирака совпадает со скобкой Пуассона, а  $H^*$  имеет вид

$$H^* = P_1 q^2 + P_2 q^3 + \dots + P_{n-1} q^n + P_n \dot{q}^n - L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^n). \quad (2.23)$$

При  $k < n$  уравнения Гамильтона для  $q^k$  эквивалентны лагранжевым связям, а для  $P_k$  — иному определению импульсов:

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial q^{k+1}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q^{k+2}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial q^{k+3}} - \dots \quad (2.24)$$

В релятивистской теории основной проблемой гамильтонова формализма является удовлетворение требованиям релятивистской инвариантности. Как и в лагранжевом формализме, здесь требование инвариантности действия относительно преобразований симметрии позволяет с помощью теоремы Нётер построить соответствующие сохраняющиеся величины как явные функции канонических переменных  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$ . В частности, инвариантность действия относительно преобразований из группы Пуанкаре приводит к сохранению четырех компонент энергии—импульса  $P_\mu$  и шести компонент момента  $M_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ), где, например,  $P_0 = H$ ,  $P_i = \int dx \pi(x) \partial \varphi(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Эти величины являются генераторами трансляций и вращений в четырехмерном пространстве-времени, реализованными как генераторы соответствующих канонических преобразований в фазовом пространстве системы. Например, для любой функции  $\psi = \psi[\varphi(x), \pi(x)]$ , имеем

$$\{H, \psi\} = \partial_0 \psi, \quad \{P_i, \psi\} = \partial_i \psi \quad (2.25)$$

(где  $\partial_\mu \equiv \partial / \partial x_\mu$ ).

Непосредственная проверка инвариантности действия в гамильтоновом формализме затруднительна ввиду явной нековариантности определений  $\pi$  и  $H$ . Однако, поскольку преобразования

Пуанкаре образуют группу Ли, генераторы должны удовлетворять соотношениям ее алгебры:

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0, \quad \{P_\mu, M_{\nu\kappa}\} = g_{\mu\nu}P_\kappa - g_{\mu\kappa}P_\nu, \quad (2.26)$$

$$\{M_{\mu\nu}, M_{\kappa\chi}\} = g_{\mu\kappa}M_{\nu\chi} + g_{\nu\chi}M_{\mu\kappa} - g_{\mu\chi}M_{\nu\kappa} - g_{\nu\kappa}M_{\mu\chi} \quad (2.27)$$

( $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор), представляющим собой условие релятивистской ковариантности гамильтонова формализма. Часть этих соотношений удовлетворяется автоматически, а остальные налагают существенные ограничения на вид  $H$  и других генераторов группы Пуанкаре.

Гамильтонов формализм играет принципиальную роль в процедуре квантования, стандартным рецептом которой является замена скобок Пуассона  $\{f, g\}$  коммутатором  $(\hbar/i)[\hat{f}, \hat{g}]$  операторов, отвечающих наблюдаемым  $f$  и  $g$ . При этом приходится решать две проблемы. Первая состоит в выборе порядка операторов  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$ , отвечающих каноническим переменным, в выражениях  $\hat{f} = \hat{f}(\hat{p}, \hat{q})$ . Квантовый аналог классической системы поэтому уже неоднозначен. Вторая связана с выбором канонических переменных, для которых постулируются канонические перестановочные соотношения  $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ . В классической теории равноправны любые наборы  $(p, q)$ , связанные каноническими преобразованиями. В квантовой теории разные выборы канонически квантуемых переменных приводят, вообще говоря, к разным результатам. Иногда критерий выбора существует. Например, для системы, прообразом которой служит система материальных точек, преимущественными являются декартовы координаты и соответствующие импульсы. Для полевых систем «неправильный» выбор может привести к противоречиям.

Совершенно разный смысл приобретают при квантовании связи I и II рода. Связи II рода налагаются как соотношения для отвечающих им операторов, а связи I рода могут налагаться только как дополнительные условия на векторы состояния, выделяющие физическое подпространство таких векторов.

**1.3. Теоремы Нётер.** *Первая теорема Нётер* утверждает, что для всякой физической системы, уравнения движения которой могут быть получены из вариационного принципа, каждому однопараметрическому непрерывному преобразованию, оставляющему вариационный функционал инвариантным, один дифференциальный **закон сохранения**, и позволяет явно выписать сохраняющую величину. Установлена в работах ученых геттингенской школы Д. Гильберта, Ф. Клейна и Э. Нётер. Теорема Нётер самое универсальное средство, позволяющее находить законы



сохранения в классической механике, теории поля, квантовой теории и т. д.

В классической механике для системы с действием

$$S = \int_T L(q_a(t), \dot{q}_a(t), t) dt \quad (3.1)$$

( $L$  — **функция Лагранжа**, зависящая от обобщенных координат  $q_a$  и скоростей  $\dot{q}_a$ , инвариантность  $S$  относительно преобразований с параметром  $\epsilon$ :

$$t \rightarrow t' = t + \Lambda(q, t)\epsilon; \quad q_a(t) \rightarrow q'_a(t') = q_a(t) + \Lambda_a(q, t)\epsilon \quad (3.2)$$

влечет за собой по теореме Нётер сохранение во времени величин

$$Q = \left[ L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a \right] \Lambda + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \Lambda_a. \quad (3.3)$$

В частности, из инвариантности действия относительно (3.2) с  $\Lambda_a = 0$ ,  $\Lambda = 1$ , т. е. из однородности времени, следует закон сохранения энергии

$$-E = L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a = \text{const} \quad (3.4)$$

В этом случае  $L$  не зависит от времени явно. Подобным же образом из инвариантности действия по отношению к пространственным сдвигам следует закон сохранения импульса, а из изотропности пространства — закон сохранения трехмерного момента.

В гамильтоновом описании, т. е. когда величины  $Q$  выражены через **канонические переменные** — обобщенные координаты и импульсы — (считаем для простоты, что явные зависимости от времени отсутствуют):

1) **скобка Пуассона**  $Q$  с **гамильтонианом**  $H$  будет равна нулю и

2) изменение любой динамической переменной  $F$  при преобразовании (3.2) будет определяться ее скобкой Пуассона с  $Q$ .

В этом контексте утверждение теоремы Нётер становится как бы банальным, следующим из одной лишь антисимметрии скобок Пуассона:

$$0 = \frac{dH}{d\epsilon} = (Q, H) \Rightarrow 0 = (H, Q) = \frac{dQ}{dt}$$

Если преобразования симметрии образуют не однопараметрическую группу, то между  $Q_\alpha$  должны выполняться соотношения

в скобках Пуассона, воспроизводящие алгебру Ли генераторов соответствующей группы. Так, например, три компоненты момента должны удовлетворять соотношению в скобках Пуассона

$$(M_\alpha, M_\beta) = -e_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma; \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Воспроизводящему алгебру Ли группы трехмерных вращений  $O(3)$ .

Особо важное значение теоремы Нётер приобретает в **квантовой теории поля**, где часто вытекающие из наличия группы симметрии законы сохранения оказываются единственным источником информации о свойствах системы. Для формального вывода теоремы Нётер (классической или квантовой) теории поля рассматривают интеграл действия:

$$S = \int_R L(\varphi^a(x), \varphi^a_{,l}(x); x^k) d^4x \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

где  $L(\varphi^a(x), \varphi^a_{,l}(x); x^k)$  — **лагранжиан**, зависящий от функций поля  $\varphi^a(x)$ , их первых производных по всем четырем координатам  $\varphi^a_{,l} = \frac{\partial \varphi^a}{\partial x^l}$  и, возможно, от координат  $x^k$ . Тогда теорема Нётер утверждает, что из инвариантности действия (3.6) относительно преобразований

$$x^k \rightarrow x'^k = x^k + \Lambda_\alpha^k(x) \cdot \varepsilon^\alpha, \quad (3.7)$$

$$\varphi^a(x) \rightarrow \varphi'^a(x') = \varphi^a(x) + \mathcal{L}^{ab}_\alpha(x) \varphi_b(x) \varepsilon^\alpha \quad (3.8)$$

для произвольной области интегрирования  $R$ , вытекает дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{d\mathcal{J}^k_\alpha}{dx^k} = 0, \quad (3.9)$$

где нетеров ток  $\mathcal{J}^k_\alpha$  вычисляется из лагранжиана по правилу:

$$\mathcal{J}^k_\alpha = T_j{}^k \Lambda^j_\alpha + \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi_b \mathcal{L}^{ab}_\alpha, \quad (3.10)$$

где

$$T_j{}^k = \delta_j{}^k L(x) - \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi^a_{,j}. \quad (3.11)$$

Интегрируя (3.5) по произвольному 4-объему и используя теорему Гаусса, получаем, что полный 4-поток вектора  $\mathcal{J}^k_\alpha$  через ограничивающую этот объем гиперповерхность равен нулю. Выбирая гиперповерхность в виде цилиндра с пространственноподобными основаниями, такого, что потоком через боковые стенки можно

пренебречь, приходим к тому утверждению, что направленные в будущее потоки вектора  $\mathcal{J}^k_\alpha$  через нижнее и верхнее основания равны. Отсюда следует, что нетеровы заряды

$$Q_\alpha(t) = \int_{x^0=t} \mathcal{J}^0_\alpha(x) d^3x \quad (3.12)$$

1) *сохраняются во времени* (интегральная форма теоремы Нётер)

и

2) *преобразуются* при преобразованиях Лоренца *контравариантно соответствующим параметрам*  $\epsilon^\alpha$ .

Из физических представлений об однородности и изотропности пространства-времени следует, что для всякой замкнутой системы действие должно быть инвариантно относительно преобразований **группы Пуанкаре**, что в силу теоремы Нётер приводит к существованию десяти фундаментальных сохраняющихся величин: энергии, трех компонент импульса и шести компонент 4-момента. Сохранение энергии и импульса следует из инвариантности относительно трансляций  $\delta x^i = a^i$ . При этом  $\mathcal{L}^{ab}_\alpha = 0$ , нетеровы токи исчерпываются выражением (3.11) и образуют *тензор энергии-импульса*. Сохраняющиеся «заряды» суть компоненты *4-вектора энергии и импульса*:

$$P_i = \int_{x^0=t} T_i^0 d^3x. \quad (3.13)$$

Из инвариантности относительно трех пространственных поворотов и трех преобразований Лоренца

$$\alpha = (k, l); \quad \epsilon^\alpha = \omega^{lk} = -\omega^{kl}; \quad \Lambda^i_\alpha = \delta^i_l g_{km} x^m \quad (3.14)$$

вытекает дифференциальный закон сохранения для *тензора плотности момента*:

$$M_{ij}{}^k = -\frac{1}{2} T_i^k x_j + \frac{1}{2} T_j^k x_i + \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^{\alpha, k}} \mathcal{L}^{ab}_{ij} \varphi_b, \quad (3.15)$$

где  $\mathcal{L}^{ab}_{ij}$  определяется спином полей. Соответствующий нетеров заряд есть 4-момент.

В гамильтоновом описании десять фундаментальных величин являются генераторами соответствующих преобразований группы Пуанкаре, и образуют относительно скобок Пуассона

замкнутую алгебру Ли

$$\begin{aligned}(P_i, P_k) &= 0; \\ (M_{ij}, P_k) &= -(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})P^l; \\ (M_{ij}, M_{kl}) &= -g_{ik}M_{jl} + g_{jk}M_{il} + g_{il}M_{jk} - g_{jl}M_{ik},\end{aligned}\quad (3.16)$$

изоморфную алгебре Ли группы Пуанкаре. Требование выполнения соотношений (3.16) эквивалентно в гамильтоновом формализме требованию инвариантности лагранжиана относительно группы Пуанкаре в лагранжевом формализме.

При наличии в системе симметрий, не связанных с пространством-временем (внутренних симметрий) теорема Нётер позволяет построить и другие сохраняющиеся величины. При этом в выражении (3.16) для нетерова тока остается только второй член. Например, если в системе с комплексным полем  $\varphi^a$  действие инвариантно относительно **калибровочного преобразования** 1-го рода

$$\varphi^a \rightarrow \varphi^a e^{i\alpha}, \quad \varphi^{*a} \rightarrow \varphi^{*a} e^{-i\alpha}, \quad (3.17)$$

то будет сохраняться ток:

$$j^k(x) = i \left( \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^a_{,k}} \varphi^a - \varphi^{*a} \frac{\partial L(x)}{\partial \varphi^{*a}_{,k}} \right) \quad (3.18)$$

и соответствующий заряд. В построении современных реалистических квантово-полевых моделей токи и заряды, сохраняющиеся в силу инвариантности относительно довольно сложных калибровочных групп, играют ведущую роль.

Выписанное выражение (3.10) для пространственно-временной локализации нетерова тока (это выражение называют каноническим) не однозначно, если исходить только из требования выполнения дифференциального закона сохранения (3.9) и получения правильной интегральной величины (3.12). Выполнение этих требований не нарушается заменой

$$\mathcal{J}_\alpha^k \rightarrow \mathcal{J}_\alpha^k + \frac{\partial f_\alpha^{kl}(\varphi^a; \varphi^a_{,m})}{\partial x^l}; \quad f_\alpha^{kl} + f_\alpha^{lk} = 0. \quad (3.19)$$

Этим произволом пользуются, чтобы заменить канонический тензор (3.11) (не симметричный для отличного от нуля спина) на *симметричный тензор* (тензор Белинфанте), выбирая

$$f^{i;jk} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,k}} \mathcal{G}^{ij;ab} \varphi_b - \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,j}} \mathcal{G}^{ki;ab} \varphi_b + \frac{\partial L}{\partial \varphi^a_{,i}} \mathcal{G}^{jk;ab} \varphi_b \right\} \quad (3.20)$$

Для нулевого спина то же преобразование позволяет получить для безмассового поля тензор  $T_i^k$  с нулевым следом. Однознач-

ные выражения для нетеровых токов получаются варьированием по полям, для которых эти токи служат источниками.

Для теорий, обладающих **суперсимметрией**, независимыми переменными при выводе теоремы Нётер будут, наряду с  $x^i$ , и антикоммутирующие координаты  $\theta_\alpha$ . Это приводит к обобщению фундаментальных сохраняющихся величин, а также к появлению новых сохраняющихся величин: спин-векторных токов и соответствующих им суперзарядов, образующих представление супералгебры Пуанкаре.

Для классических теорий поля выписанных формальных выражений вполне достаточно. В квантовой теории поля выражения (3.10), (3.11) как правило, нуждаются в регуляризации и перенормировке. При этом может оказаться, что формально имеющаяся симметрия не может быть сохранена для регуляризованных выражений, и соответствующий закон сохранения перестает выполняться — говорят, что присутствует аномалия. Так, при рассмотрении взаимодействия безмассовых фермионов с электромагнитным полем, в классической теории наряду с векторным сохраняется также и аксиальный ток  $\vec{j}_s^k = \bar{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi$ . В квантовой теории во втором порядке по заряду возникает аномалия и вместо сохранения тока получаем

$$\frac{dj_s^k}{dx^k} \sim e^2 e^{ijkl} F_{ij} F_{kl}.$$

*Вторая теорема Нётер* касается тождеств, вытекающих из инвариантности действия относительно преобразований, зависящих от непрерывного параметра, т.е. от произвольной функции. Наибольшее значение она получает в применении к случаю «полей материи», взаимодействующих с **калибровочным полем**  $A(x)$  — таким полем, физическое содержание которого не меняется при определенных, зависящих от произвольной функции  $\lambda(x)$ , преобразованиях, называемых преобразованиями калибровки. Вычисляя вариацию действия для поля материи во внешнем калибровочном поле, вызванную бесконечно малым калибровочным преобразованием  $\delta\lambda(x)$  ( $\delta\lambda(x) = 0$  на границах области интегрирования), мы должны учитывать только вызываемые изменением калибровки вариации калибровочного поля  $\delta_\lambda = \nabla\delta\lambda$  (здесь  $\nabla$  — *ковариантная производная*), поскольку при вариациях полей материи коэффициентами будут левые части уравнений движения

Поэтому

$$\delta_\lambda S = \int d^4x \frac{\partial L}{\partial A} \nabla \delta \lambda = - \int d^4x \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial A} \right) \delta \lambda,$$

откуда в силу произвольности следует *ковариантный закон сохранения*

$$\nabla j = 0; \quad j = \frac{\partial L}{\partial A}. \quad (3.21)$$

При обращении в равенстве (3.21) внешнего калибровочного поля в нуль, ковариантный закон сохранения превращается в обычный, получаемый по первой теореме Нётер. Надо подчеркнуть, что вторая теорема Нётер приводит к ограничениям на поля материи, исходя из особенностей калибровочного поля. Таким образом она устанавливает соответствие между свойствами материальных систем и полей, с которыми они могут взаимодействовать. Поскольку в правых частях уравнений движения самих калибровочных полей стоят как раз токи вида (3.21), то вторая теорема Нётер налагает тождественные соотношения на левые части этих уравнений. В современной квантовой теории поля вторая теорема Нётер используется в электродинамике, теории полей Янга–Миллса, гравитации, супергравитации и т. д.

**1.4. Канонические преобразования.** Канонические преобразования — преобразования  $q, p \rightarrow Q(q, p), P(q, p)$  (обобщенных) координат и (обобщенных) импульсов, сохраняющие скобки Пуассона:

$$\{P_i, Q_i\} \equiv \sum_k \left( \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \right), \quad (4.1)$$

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0 \quad (4.2)$$

( $k = 1, \dots, n$ ,  $n$  — число степеней свободы системы,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера). Канонические преобразования сохраняют канонический вид уравнений Гамильтона и нормировку функции Гамильтона  $H(p, q, t)$ . При канонических преобразованиях фигурирующее в вариационном принципе наименьшего действия выражение  $\sum_k p_k dq_k - H dt$  может меняться лишь на полный дифференциал:

$$\sum_k p_k dq_k - H dt = \sum_k P_k dQ_k - H' dt + dF. \quad (4.3)$$

Здесь  $F$  — производящая функция канонических преобразований. Если она зависит от старых и новых координат,  $F(Q, q)$ , то

явный вид канонических преобразований находится из соотношений  $p_i = \partial F / \partial q_i$ ,  $P_i = \partial F / \partial Q_i$ , а новая функция Гамильтона

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \partial F / \partial t. \quad (4.4)$$

Остальные возможности (всего их  $2^{2n}$ ), когда  $F$  зависит от  $i$  старых координат,  $n - i$  старых импульсов,  $j$  новых координат и  $n - j$  новых импульсов, получаются из данной преобразованием Лежандра.

Канонические преобразования сохраняют интеграл  $\oint \sum_k p_k dq_k$  по замкнутой кривой в фазовом пространстве и элемент фазового объема  $\prod_k dp_k dq_k$ . Последнее обстоятельство используется при заменах переменных в функциональном интеграле. Для  $F$ , не зависящих явно от времени, сохраняется и функция Гамильтона. Для тождественного канонического преобразования  $F = \sum_k P_k q_k$ . Бесконечно малые канонические преобразования с  $F = \sum_k P_k q_k - \epsilon f(P_k, q_k; \epsilon)$  удовлетворяют уравнениям Гамильтона  $\partial P_i / \partial \epsilon = -\partial h / \partial q_i$ ,  $\partial Q_i / \partial \epsilon = -\partial h / \partial p_i$  с функцией Гамильтона  $h = f(P, q; 0)$ . Поэтому движение системы (параметр  $\epsilon$  интерпретируется как время  $t$ ) само есть каноническое преобразование. Преобразования симметрии, сохраняющие действие  $S = \int_{t_2}^{t_1} \left( \sum_k p_k dq_k - H dt \right)$ , очевидным образом являются каноническими преобразованиями.

Благодаря свойствам канонических преобразований равноправны все выборы канонических переменных классической системы: в ее фазовом пространстве можно выбрать любую систему координат, связанную каноническими преобразованиями с декартовой, в которой  $q, p$  — обычные координаты и импульсы.

В квантовой механике такого равноправия нет. Постулат канонического квантования, заменяющий скобки Пуассона  $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$  каноническими перестановочными соотношениями  $\{\hat{p}_i, \hat{q}_j\} = -i\hbar \delta_{ij}$ , формулируется для декартовой системы координат. Конкретный выбор гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  векторов состояний системы и реализация  $\hat{p}, \hat{q}$  как самосопряженных (эрмитовых) операторов в этом пространстве (их общая область определения должна быть плотной в  $\mathcal{H}$ ) называется представлением. Каноническими преобразованиями в квантовой

механике называются преобразования представлений, сохраняющие канонические перестановочные соотношения.

Для систем с конечным числом степеней свободы все представления канонических перестановочных соотношений унитарно эквивалентны (теорема фон Неймана): для любых двух представлений операторов  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\alpha}'$  и векторов состояний  $\psi$ ,  $\psi'$  существует унитарный оператор  $U$ , такой, что  $\hat{\alpha}' = U\hat{\alpha}U^+$ ,  $\psi' = U\psi$  (знак  $+$  означает эрмитово сопряжение). Таким образом, канонические преобразования конечномерных квантовых систем всегда могут быть реализованы как унитарные преобразования, и поэтому они сохраняют спектры операторов, средние значения и другие динамические характеристики. Например, переход от шредингера к гейзенбергову описанию эволюции системы является унитарным преобразованием, зависящим от времени, с  $U(t, t_0) = \exp\{-i\hat{H}(t - t_0)\}$ , где  $\hat{H}$  — оператор Гамильтона (гамильтониан).

Для бесконечномерных квантовых систем теорема фон Неймана неверна: существуют канонические преобразования, не сводящиеся к унитарным, и соответственно неэквивалентные представления канонических перестановочных соотношений. Такие канонические преобразования могут менять спектры операторов и в этом случае дают математическое описание важных физических эффектов — появление голдстоуновских бозонов при спонтанном нарушении симметрии, механизм Хиггса, изменение спектра состояний системы при фазовых переходах и др. Каноническое преобразование является стандартным приемом нахождения спектра элементарных возбуждений (квазичастиц) в статистической физике. Примером такого канонического преобразования служат преобразования Боголюбова, с помощью которых находятся эти спектры для слабонеидеальных бозе- и ферми-систем.

## 2. Стохастичность и квантование <sup>1)</sup>

**2.1. Введение.** Последние годы большое внимание привлекает к себе явление так называемой «динамической стохастичности», состоящее в том, что для полностью детерминированной динамической системы, часто с совсем небольшим числом степеней свободы, подавляющее число движений оказываются крайне нерегулярными, хаотически запутанными и непредсказу-

<sup>1)</sup> Это дополнение к части III основного текста.



емыми, причем источник этих нерегулярностей никак не связан с какими-либо внешними случайными возмущениями, но лежит в чрезвычайно сильном (экспоненциальном) расхождении траекторий, начинающихся в сколь угодно близких фазовых точках. Имеется уже богатая литература, обнаружены многочисленные применения к вопросам физики, астрофизики и небесной механики. В частности, Матинян обнаружил, что динамическую стохастичность проявляют неабелевы калибровочные поля в приближении длинных волн, когда зависимостью от пространственных координат можно пренебречь и считать, что поля и потенциалы суть функции только времени.

Явление динамической стохастичности было открыто и исследовано в рамках классической механики. Чрезвычайный интерес вызывает вопрос о том, как скажется классическая динамическая стохастичность на свойствах и поведении соответствующей квантовой системы. В литературе высказывались различные утверждения по этому поводу. Уже давно указывалось, что в квантовой динамике стохастичность вообще невозможна, поскольку для ограниченной в фазовом пространстве замкнутой системы энергетический спектр всегда дискретен. Исследовались специфические проявления стохастичности, которые могут наблюдаться в квантовой системе в процессе установления стационарного состояния. Обсуждались также особенности энергетического спектра, которые могут быть присущи квантовой системе, классический аналог которой динамически стохастичен. Наконец, были высказана надежда, что при квантовании динамически стохастической системы сохранятся столь сильные следы этого явления, что они смогут для случая полей Янга–Миллса — привести к объяснению конфайнмента.

Прояснению этой проблемы посвящена настоящая работа. Мы рассматривали ее на предложенном Матиняном простейшем примере зависящего только от времени поля Янга–Миллса с внутренней симметрией  $SU(2)$ , который уместно назвать моделью Матиняна (раздел 2). Аргументация строится следующим образом. В разделе 3 находится асимптотическое решение для того случая, когда одна из компонент потенциала много больше другой и за счет этого появляется малый параметр. В разделе 4 находятся специальные движения с замкнутыми траекториями; классически совокупность таких движений обладает нулевой мерой, и все они совершенно неустойчивы. В разделе 5 проводится полуклассическое квантование по Бору–Зоммерфельду; при этом оказывается, что квантовые условия могут быть удовлетворены как раз для замкнутых классических траекторий и при том таким

образом, что чем сложнее траектория, тем выше располагается соответствующий ей уровень энергии. В разделе 6 рассматривается область малых полей, в которой применение асимптотического приближения было незаконно, показывается, что ее аккуратное трактование ведет лишь к малым поправкам к ранее найденным уровням.

Обращение к квазиклассике потребовалось, чтобы можно было навести мост между квантовыми состояниями и классическими траекториями. В разделе 7 — с помощью приближения, аналогичного классическому асимптотическому, — рассматривается модель Матиняна в волновой механике. Получающийся спектр оказывается полностью совпадающим с квазиклассическим с тем единственным изменением, что квантовые числа — как и в известных задачах с разделяющимися переменными — приобретают дополнительные половинки. В разделе 8 тот же спектр ищется вариационным способом с помощью осцилляторных пробных функций; результаты оказываются в очень хорошем согласии.

**2.2. Модель.** Следуя Матиняну, рассмотрим поле Янга–Миллса с группой  $SU(2)$ , в котором все величины зависят только от времени. Удобно выбрать калибровку  $A_b^a = 0$ , тогда (индексы  $i, k, \dots$  пространственные,  $a, b, \dots$  внутренние)  $E_i^a = A_i^a$  и  $B_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A_k^b A_l^a$ . Матрицу  $A_i^a$  можно разделить на симметричную и антисимметричную части (они не будут смешиваться). Антисимметричная часть нам не интересна, ей отвечает нестохастическая динамика. Симметричную часть можно привести к главным осям (они остаются неподвижными) и написать

$$A_i^a = \delta_i^a A_{(i)}; \quad E_i^a = \delta_i^a A_{(i)}; \quad B_i^a = \delta_i^a A_{(k)} A_{(l)}; \quad (i \neq k \neq l),$$

после чего гамильтониан (в безразмерных переменных) примет вид функции Гамильтона для системы с тремя степенями свободы:

$$H = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + (A_1 A_2)^2 + (A_2 A_3)^2 + (A_3 A_1)^2), \quad (\text{I})$$

где  $E_k$  суть соответствующие «координатам»  $A_k$  обобщенные импульсы.

Модель можно, не теряя ее интересных особенностей, подвергнуть еще одному упрощению, ограничиваясь частным случаем лишь таких движений, для которых  $A_3 = 0$ , т. е. остаются лишь две степени свободы, координаты которых мы для простоты письма будем обозначать через  $A_1 = z$  и  $A_2 = y$ .

Итак, будет изучаться динамическая система с двумя степенями свободы  $x$  и  $y$  и с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + x^2 y^2). \quad (1)$$

Ее уравнения движения суть

$$\frac{dp_x}{dt} = -xy^2, \quad \frac{dx}{dt} = p_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = -x^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = p_y \quad (2)$$

или, в лагранжевой форме,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + xy^2 = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + x^2 y = 0. \quad (3)$$

У системы есть только один первый интеграл

$$H = E. \quad (4)$$

В силу (4) классически разрешенная область движения ограничена гиперболами (рис. 1)

$$y = \pm \frac{\sqrt{2E}}{x}. \quad (5)$$

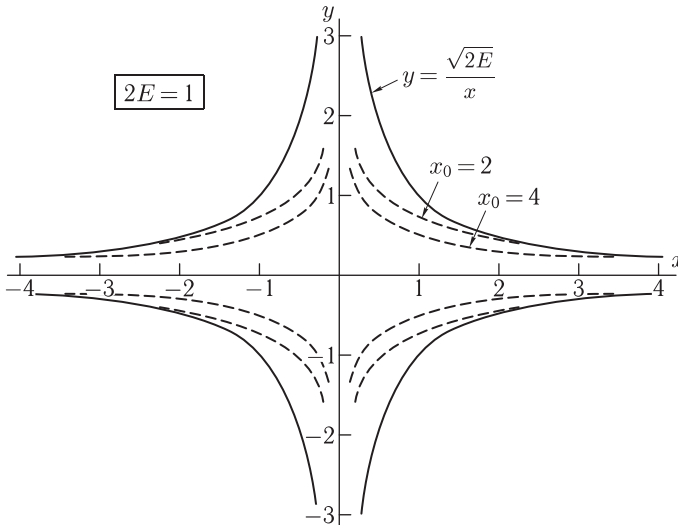


рис. 1

ЗАМЕЧАНИЕ: Если положить

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{2E} \, x', & y &= \sqrt[4]{2E} \, y', \\ p_x &= \sqrt[4]{2E} \, p'_x, & p_y &= \sqrt[4]{2E} \, p'_y, & t &= t' / \sqrt[4]{2E}, \end{aligned}$$

то переменные, отмеченные штрихами, будут удовлетворять тем же уравнениям, но будет выполняться  $2H' = 1$ . Таким образом, всегда можно считать, что  $2E = 1$ . Ниже мы иногда будем использовать эту возможность. ■

Несмотря на простоту и симметрию, эта модель не только не является интегрируемой, но проявляет все черты динамической стохастичности. Вообще говоря, движение происходит так, что изображающая точка входит в один из «рогов» между гиперболами, совершает там какое-то число колебаний, постепенно удаляясь от начала координат, затем, продолжая колебаться, возвращается в область, близкую к началу, и попадает там опять в один из четырех рогов, после чего процесс повторяется, с новым рогом и новым максимальным удалением. Наряду с таким типичным поведением в системе возможны и движения по замкнутым траекториям неограниченно возрастающей сложности, все они неустойчивы по отношению к малым изменениям начальных условий.

**2.3. Асимптотическое решение.** В задаче появится малый параметр, если мы будем рассматривать поведение системы в той области конфигурационного пространства, в которой одна из координат много больше другой, скажем,

$$x \gg y \quad (6)$$

— в роге гиперболы. Тогда, как видно из уравнений движения,  $y$  будет меняться быстро, а  $x$  — медленно. Поэтому естественно рассмотреть как приближение сперва только движение переменной  $y$ , считая при этом  $x$  заданной медленно меняющейся функцией времени, а затем, усреднив по этому «быстрому» движению  $y$ , изучить остающееся «медленное» движение  $x$ . Такой прием отвечает первому приближению асимптотического метода Н. Н. Боголюбова в теории нелинейных колебаний.

Уравнение движения для  $y$  есть уравнение для осциллятора с зависящей от времени частотой. Для его интегрирования удобно воспользоваться формализмом первого порядка, вводя новые переменные  $A$  и  $A^*$ :

$$y(t) = \frac{A^* + A}{\sqrt{2x(t)}}, \quad p_y = t \sqrt{\frac{x(t)}{2}} (A^* - A),$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\dot{A} + ix A = \frac{\dot{x}}{2x} A^*, \quad \dot{A}^* + ix A^* = \frac{\dot{x}}{2x} A. \quad (7)$$

Вынесенные в правую часть члены имеют, сравнительно со вторыми членами левых частей, две лишние степени  $x$  в знаменателе, т. е. по нашему предположению (6) малы. Поэтому ими можно пренебречь, после чего (7) мгновенно интегрируется:

$$A(t) = |a| \exp \left\{ -i \left[ \int x(t) dt + \varphi_0 \right] \right\},$$

$$A^*(t) = |a| \exp \left\{ i \left[ \int x(t) dt + \varphi_0 \right] \right\}.$$

Таким образом, в качестве быстрого движения получаем

$$y(t) = \frac{2\sqrt{I} \cos \varphi}{\sqrt{x}}, \quad p_y(t) = -\sqrt{2I} x \sin \varphi,$$

где  $I = |a|^2$  и  $\varphi = \int x(t) dt + \varphi_0$  — «канонические» переменные действие–угол. В частности, отсюда следует, что  $xy^2(t) = 2I \cos^3 \varphi = I(1 + \cos 2\varphi)$ , и

$$E_y = \frac{1}{2} (p_y^2 + x^2 y^2) = Ix.$$

«Медленное» движение  $x(t)$  будет теперь управляться уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -I(1 + \cos 2\varphi). \quad (8)$$

В соответствии с «принципом осреднения» периодический по «быстрой» переменной  $\varphi$  член здесь надо выбросить, и мы получим в первом приближении

$$x(t) = x_0 - \frac{It^2}{2}, \quad p_x = -It,$$

где мы выбрали за начало отсчета времени момент, когда  $x$  достигает максимума, и обозначили этот максимум через  $x_0$ .

Подчеркнем, что в нашем приближенном решении полная энергия

$$E = \frac{p_x^2}{2} + E_y = \frac{I^2}{2} t^2 + Ix_0 - \frac{I^2}{2} t^2 = Ix_0$$

сохраняется точно. Поэтому ее естественно выбрать в качестве одной из констант, фиксирующих конкретное решение. Далее решение фиксируется заданием наибольшего удаления в роге  $x_0$  фазой  $\varphi_0$  в момент прохождения  $x$  максимума и тем, что этот момент выбирается за начало отсчета времени. Применимость использованного асимптотического приближения характеризуется малостью параметра  $\epsilon = \sqrt{2E}/x_0 \ll 1$ .

Соберем полученные результаты:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 \cos \varphi = \sqrt{\frac{2E}{xx_0}} \cos \varphi = \sqrt{\frac{2E}{x_0 \sqrt{1 - \tau^2/2}}} \cos \varphi, \quad (9) \\
 p_y &= -xy_0 \sin \varphi = -\sqrt{\frac{2Ex}{x_0}} \sin \varphi = -\sqrt{2E} \sqrt{1 - \tau^2/2} \sin \varphi, \\
 x &= x_0 \left(1 - \frac{Et^2}{2x_0^2}\right) = x_0(1 - \tau^2/2), \\
 p_x &= -\frac{E}{x_0} t = -\sqrt{E} \tau, \\
 \varphi &= x_0 t - \frac{Et^2}{6x_0} + \varphi_0 = \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}} \sqrt{2} \tau (1 - \tau^2/6) + \varphi_0,
 \end{aligned}$$

здесь введены обозначения

$$y_0 = \sqrt{\frac{2E}{xx_0}} = \sqrt{\frac{2E}{x_0 \sqrt{1 - \tau^2/2}}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\sqrt{E}}{x_0} t.$$

На рис. 2 изображено поведение асимптотического решения для  $2E = 1$  и  $x_0 = 4$ . Обсудим его свойства.

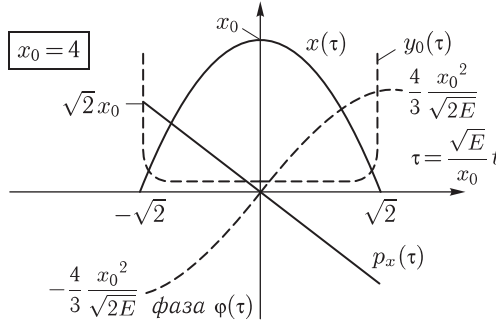


рис. 2

Как уже отмечалось, в силу закона сохранения энергии движение возможно лишь в области между гиперболами (5). Однако для найденных асимптотических решений выполняется и более сильное ограничение  $y \leq y_0 = \sqrt{2E/x_0 x}$ , т. е. ширина разрешенного для движения «рога» тем меньше, чем он длиннее. На рис. 1 приведены примеры двух «рогов» для  $x_0 = 2$  и  $x_0 = 4$ . Более того

площадь доступной для движения на плоскости  $x, y$  области есть, очевидно,

$$V = 4 \int_0^{x_0} y_0(x) dx = 4 \sqrt{\frac{2E}{x_0}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{2E}, \quad (10)$$

т. е. конечна и не зависят от  $x_0$ .

Если, набравшись отваги, распространить справедливое для  $x \gg 1$  асимптотическое решение вплоть до  $x = 0$ , то это будет отвечать изменению времени в интервале  $-\sqrt{2} \leq \tau \leq \sqrt{2}$  или  $-2x_0/\sqrt{2E} \leq t \leq 2x_0/\sqrt{2E}$ . При этом фаза  $\varphi - \varphi_0$  изменится в пределах

$$-\frac{4}{3} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}} \leq \varphi - \varphi_0 \leq \frac{4}{3} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}},$$

т. е. на отрезке  $(0, x_0)$  уложатся для изменения «быстрых» переменных  $y$  и  $p_y$  всего  $\frac{4}{3 \cdot 2\pi} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}}$  целых волн, а при изменении  $x$  «на период» (от 0 до  $x_0$ , от  $x_0$  до 0, от 0 до  $-x_0$  и от  $-x_0$  до 0) уложится

$$\frac{8}{3\pi} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E_0}} \quad \text{целых волн.} \quad (11)$$

**2.4. Периодические решения.** При выходе из рога в область  $x \sim y \sim 1$  никакие приближения не будут более работать, надо точно интегрировать уравнения движения (2), и, главное, то, куда — в какой из рогов — попадет дальше траектория и какими константами интегрирования — новым  $x_0$  (или  $y_0$ ) и новой фазой  $\varphi_0$  она будет характеризоваться, будет зависеть (и при том неустойчивым образом) не только от регулярных постоянных интегрирования  $E$  и  $x_0$ , но и от «нерегулярной»  $\varphi_0$ , — в этом и проявляется стохастичность движения в целом. Никаких общих высказываний тут сделать нельзя.

Однако среди возможных (точных) решений системы (2) есть периодические, отвечающие движению по замкнутым траекториям. Конечно, мера множества таких движений есть нуль, и все они неустойчивы, но все же такие движения существуют. Попробуем найти их с помощью нашего приближения.

В чем разумность оценки такого тонкого свойства движения, как периодичность, с помощью приближенного метода, если рассматриваемая система стохастична и все ее движения неустойчивы? Наши надежды основаны на том, что мы знаем, что и в числе точных решений и в числе приближенных есть периодические

движения, совершающиеся по замкнутым траекториям, в мы надеемся, что элементы такой пары

точное решение  $\longleftrightarrow$  приближенное решение

не будут сильно отличаться друг от друга. Иными словами, мы уповаем на то, что даже для стохастической системы задача, в которой начальные условия замещаются граничным условием периодичности, окажется устойчивой относительно замены точных решений приближенными, т. е. относительно малых изменений динамики.

Условие замкнутости траектории (в асимптотическом приближении) получается из отмеченного выше свойства (11) и состоит в том, чтобы фигурирующее там отношение было рациональным числом

$$\frac{8}{3\pi} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E_0}} = \frac{m}{n}, \quad (12)$$

где  $m$  — число периодов по  $y$  и  $n$  — число периодов по  $x$  — целые. Будем говорить про характеризующую числами  $m$  и  $n$  замкнутую траекторию, как про моду  $(m, n)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Подчеркнем, что в этом рассуждении мы не только отваживаемся дотягивать асимптотическое решение вплоть до  $x = 0$ , но и принимаем, что его можно провести через нуль в область отрицательных  $x$ , сохраняя то же значение параметра  $x_0$ . Оправданию допустимости такого произвола будет посвящен раздел 6<sup>1)</sup>. ■

На серии рис. 3 изображен ряд примеров зависимости  $y/y_0 = \cos \varphi$  от  $x/x_0$  — ряд замкнутых траекторий. Получающиеся картинки напоминают фигуры Лиссажу и по существу им аналогичны. Мы сознательно включили в число примеров (рис. 3, д) случай  $m/n = 1/2$ , когда условие применимости асимптотического приближения грубо не выполняется ( $\varepsilon = 2$ ). Поучительно сравнить его с рис. 3, в для  $m/n = 2/1$ ; при этом видно, какие искажения дает асимптотическое приближение (точные решения в этих двух случаях должны, конечно, переходить друг в друга при замене координатных осей).

Заметим, что в рассматриваемом приближении условие замыкания траектории не зависит от начальной фазы  $\varphi_0$ ; при ее изменении картинки лишь плавно деформируются, переходя,

<sup>1)</sup> При переходе от положительных  $x$  к отрицательным надо учитывать, что все формулы (9) выписаны для  $x > 0$ , и в соответствующих случаях заменять в них  $x \rightarrow |x|$ .



например, для  $m = n = 1$  от фигуры, напоминающей круг, через «эллипсы» к (изогнутым в нашем приближении) отрезкам прямых. В разделе 6 мы увидим, что это обстоятельство есть свойство не модели, но приближения.

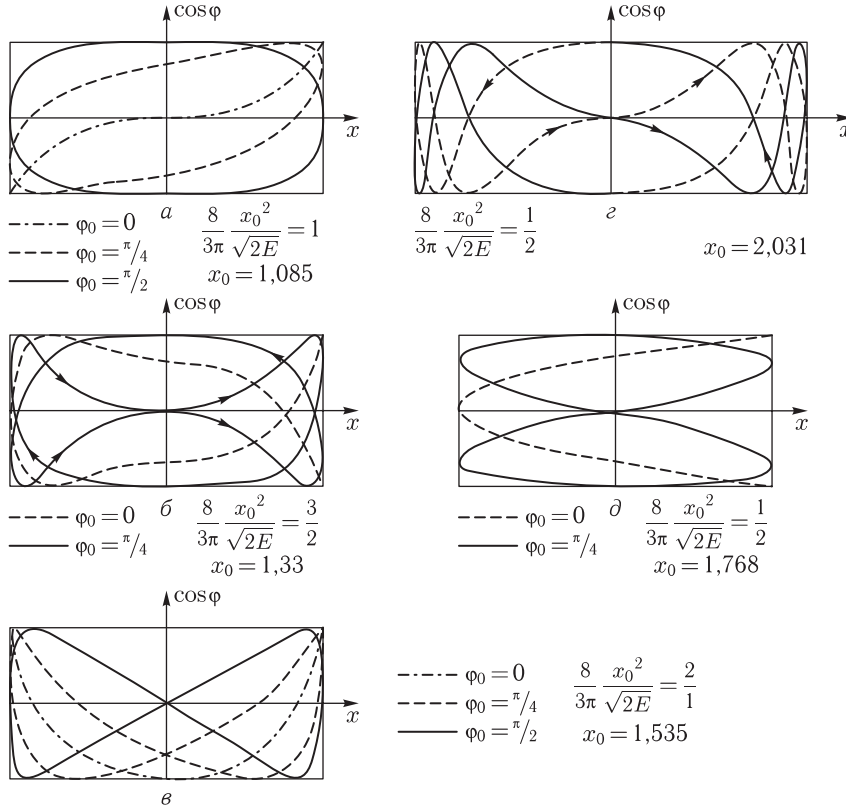


рис. 3

Мы, конечно, не случайно строили на всех графиках рис. 3 только  $\cos \varphi$ , а не  $y = y_0 \cos \varphi$ ; асимптотическое выражение для  $y_0(x)$  имеет при  $x = 0$  особенность типа  $1/\sqrt{x}$ , и продолжать его до нуля совершенно бессмысленно. Его можно самое большее продолжить до  $x = \tilde{x}$ , при котором  $|\tilde{x}| = y_0(\tilde{x})$ , или же до  $x = 1$  и пробовать сшить здесь с решением, в котором приближение состоит в том, что и  $x$  и  $y$  считаются малыми. Это будет сделано в разделе 6.

Посмотрим, какие «размеры» имеет система в состоянии, определяемом заданием  $E$  и  $x_0$ . Их естественно характеризовать

средними — конечно, по времени — квадратами соответствующих переменных.

Для координаты  $x$  это сделать совсем просто. В силу третьего равенства из (9)

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{\sqrt{2}} x^2(\tau) d\tau \bigg/ \int_0^{\sqrt{2}} d\tau = x_0^2 8/15,$$

т. е.

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{8/15} x_0 = 0,7303 x_0. \quad (13)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если усреднять первую степень, то  $\langle x \rangle = 2/3 x_0$ . ■

С координатой  $y$  дело обстоит сложнее. При усреднении  $y^2$  надо сперва усреднить его по «быстрым» осцилляциям

$$\langle y^2 \rangle_{\text{быстр}} = y_0^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{2E}{x_0} \frac{1}{x},$$

но при последующем усреднении  $y_0^2$  по «медленному» движению  $x$  мы заработаем логарифмическую расходимость при малых  $x$  — как раз там, где наше приближение неприменимо. Поэтому проходятся прибегнуть к обрезанию и ограничить усреднение лишь той областью, где, скажем, хотя бы  $x \geq y_0$ , т. е.  $x \geq \tilde{x} = \sqrt[3]{2E/x_0}$  и  $\tau \leq \tilde{\tau} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \epsilon^2}$ . Тогда

$$1 - [1/2 \tau^2]^{-1} \rangle = \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{d\tau}{1 - 1/3 \tau^3} \left[ \int_0^{\tilde{\tau}} d\tau \right]^{-1} = 1/3 \ln(8/\epsilon),$$

и

$$\langle y^2 \rangle = \frac{2E}{x_0^2} \frac{1}{6} \ln \frac{8}{\epsilon}, \quad \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2E}}{x_0} \sqrt{\frac{1}{6} \ln \frac{8}{\epsilon}}. \quad (14)$$

Если, например,  $2E = 1$ ,  $x_0 = 4$ , значит  $\epsilon = 1/16$ , то  $\ln 128 \approx 5$  и  $\sqrt{\langle y^2 \rangle} \approx (\sqrt{2E}/x_0) \sqrt{5/6}$ .

Расходимость  $\langle y^2 \rangle$  несколько удивительна, особенно если принять во внимание то, что с учетом (10) полный объем доступного для движения конфигурационного пространства конечен. Поэтому можно попробовать усреднять по медленному движению не вторую, а первую степень  $y$ , определив среднее значение  $y$  по быстрому движению как  $\sqrt{\langle y^2 \rangle_{\text{быстр}}} = y_0/\sqrt{2}$ . Тогда

расходимости при интегрировании по  $\tau$  не будет, и мы получим

$$\langle \sqrt{\langle y^2 \rangle_{\text{быстр}}} \rangle_{\text{медл}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} \frac{\sqrt{2E}}{x_0}} \approx \sqrt{\frac{5}{4} \frac{\sqrt{2E}}{x_0}}. \quad (15)$$

Численно этот результат примерно на 20% (1,10 вместо 0,90) выше полученного с квадратичным усреднением; по-видимому, в нашем приближении наиболее надежное значение есть  $\langle y \rangle = \sqrt{2E}/x_0$  с неопределенностью примерно в 10%.

Что касается средних значений импульсов, то здесь никаких трудностей с неприменимостью асимптотического приближения не возникает, и совершенно прямолинейной выкладкой мы получаем из (9)

$$\sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \sqrt{\langle p_y^2 \rangle} = \sqrt{2E/3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Этим значениям отвечает  $1/2 p_x^2 = 1/2 p_y^2 = 1/3 E$ , как то и должно быть по теореме вириала. ■

**2.5. Квантование по Бору–Зоммерфельду.** Рецепт полуклассического квантования по Бору–Зоммерфельду состоит в наложении условия

$$\oint p_i dq_i = 2\pi\hbar n_i,$$

где интеграл берется по полному циклу  $i$ -й координаты  $q_i$ .

В нашем случае для  $y$

$$\begin{aligned} \oint p_y dy &= \oint p_y^2 dt = \oint p_y^2 \frac{1}{\partial\Phi/\partial t} d\Phi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\Phi \frac{2E}{x_0} x \frac{1 - \cos 2\Phi}{2} \frac{1}{x} d\Phi = \frac{2E}{x_0} \frac{2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Итак, первое квантовое условие имеет вид

$$2E/x_0 = 2\hbar n_y. \quad (16)$$

Для координаты  $x$

$$\oint p_x dx = \oint p_x^2 dt = 4 \int_0^{x_0\sqrt{2/E}} t^2 \frac{E^2}{x_0^2} dt = \frac{8}{3} \sqrt{2E} x_0.$$

Таким образом, второе квантовое условие гласит

$$\frac{8}{3\pi} x_0 \sqrt{2E} = 2\hbar n_x. \quad (17)$$

При его выводе нам потребовалось допустить, что можно проводить асимптотическое решение через 0 с неизменной постоянной  $x_0$ . Поэтому проведенная процедура осмысленна только в применении к периодическому движению. Но для такого движения моды  $(m, n)$  выполняется (12) со взаимно простой парой  $m$  и  $n$ .

Если поделить теперь квантовые условия (17) в (16) друг на друга, то мы придем к требованию

$$\frac{8}{3\pi} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}} = \frac{n_x}{n_y},$$

т.е. при квантовании моды  $(m, n)$  квантовые числа  $n_x$  и  $n_y$  нельзя выбирать произвольно, но так, чтобы выполнялось

$$n_x/n_y = m/n.$$

Единственная возможность удовлетворить этому требованию состоят в том, чтобы положить

$$n_x = m \cdot k; \quad n_y = n \cdot k; \quad k = 1, 2, \dots$$

Можно сказать, что выбор моды задает степень асимметрии решения (нечто вроде эксцентриситета боровского эллипса в кулоновой задаче). Когда же мода выбрана, то возможные «амплитуды» движения определяются одним квантовым числом  $k$ . Его наименьшее значение есть единица, поэтому чем сложнее мода, чем большее число периодов по  $x$  и по  $y$  должно протечь, прежде чем траектория замкнется, тем выше наименьшие возможные для данной моды квантовые числа  $n_x$  и  $n_y$ :

$$\begin{aligned} n_x &\geq m - \text{числа периодов по } y, \\ n_y &\geq n - \text{числа периодов по } x. \end{aligned}$$

Выразим через квантовые числа физические характеристики системы. Перемножая (16) и (17), находим энергетический спектр

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} \right)^{2/3} \hbar^{4/3} (2n_x \cdot 2n_y)^{2/3} = \left( \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} \right)^{2/3} (2m \cdot 2n)^{2/3} (\hbar k)^{4/3}, \\ &\qquad\qquad\qquad (18) \\ &\left( \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} \right)^{2/3} \approx 0,5577. \end{aligned}$$

Далее, если поделить квадрат (17) на (16), то найдется выражение для второй константы  $x_0$ :

$$x_0 = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{2/3} \hbar^{4/3} \frac{(2n_x)^{2/3}}{(2n_y)^{1/3}}.$$

Физически интересно, конечно, не случайным образом нормированная постоянная  $x_0$ , а среднее значение  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ . С помощью (13) для него получается

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt[6]{\frac{3\pi^4}{10^3}} \sqrt[3]{\hbar \frac{(2n_x)^2}{2n_y}} \approx 0,8146 \sqrt[3]{\hbar \frac{(2n_x)^2}{2n_y}}. \quad (19)$$

Аналогично для  $y$  при смешанном усреднении

$$\sqrt{\langle y^2 \rangle}_{\text{быстр}} = \sqrt[6]{\frac{\pi^4}{72}} \sqrt[3]{\hbar \frac{(2n_y)^2}{2n_x}} \approx 1,052 \sqrt[3]{\hbar \frac{(2n_y)^2}{2n_x}}. \quad (20)$$

Если выполнять здесь оба усреднения над квадратичными выражениями, то численный коэффициент в последнем равенстве уменьшается до  $1,052 \rightarrow 0,859$  ( $x_0 = 4$ ).

Конечно, здесь интересны не полученные в очень грубом приближении численные коэффициенты, а то обстоятельство, что примененное приближение, основанное как раз на использовании несимметрии  $x$  и  $y$ , приводит для средних значений  $x$  и  $y$  к практически идентичным формулам! Мы опять склонны рассматривать это как указание на более широкую область применимости полученных формул.

Если отвлечься от этих, очень близких к 1, численных коэффициентов, то мы получаем, что

$$\frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}{\sqrt{\langle y^2 \rangle}} \approx \frac{n_x}{n_y} = \frac{m}{n} = \frac{\text{число периодов по } y}{\text{число периодов по } x}. \quad (21)$$

Итак, периодические траектории оказалось легко подвергнуть квазиклассическому квантованию. Может возникнуть вопрос: как удалось наложить два квантовых условия на движения системы, которая обладает только одним первым интегралом (4). Ответ состоит в том, что для периодических движений появляется дополнительная сохраняющаяся величина — хотя бы максимальное удаление  $x$ . Вопрос о наличии у нашей системы других, не описываемых (18), стационарных состояний пока совершенно открыт. Однако волномеханическое рассмотрение в разделе 7 покажет, что (18) исчерпывает спектр системы и никаких других стационарных состояний у нее нет.

**2.6. Малые  $x$  и  $y$ .** Для рассмотрения малых — «антиасимптотических» — значений  $x$  и  $y$  воспользуемся прямолинейным приемом разложения в ряды. Выбирая начало отсчета времени в момент прохождения  $x$  через 0, мы сэкономим один коэффициент и напомним

$$\begin{aligned}x &= a_1 t + \frac{a_2}{2} t^2 + \dots + \frac{a_n}{n!} t^n + \dots; & y &= \sum_{0 \leq m} b_m \frac{t^m}{m!}, \\ \dot{x} &= a_1 + a_2 t + \dots + \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots; & \dot{y} &= \sum_{1 \leq m} b_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}, \\ \ddot{x} &= a_2 + a_3 t + \dots + \frac{a_n}{(n-2)!} t^{n-2} + \dots; & \ddot{y} &= \sum_{2 \leq m} b_m \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}.\end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_1$ ,  $b_0$  и  $b_1$  должны быть заданы, все следующие рекуррентно определяются через них из уравнений движения (3). Нам не удалось найти общего решения рекуррентных формул и пришлось выписывать конкретные коэффициенты: поскольку аппроксимация для  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  содержит на одну, а для  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  — на две степени меньше, то в рядах для  $x$  и  $y$  пришлось писать члены вплоть до пятой степени  $t$ :

$$\begin{aligned}x &= a_1 t - \frac{a_1 b_0}{6} t^3 - \frac{a_1 b_0 b_1}{6} t^4 + \frac{a_1 b_0^4 - 6a_1 b_1^2}{120} t^5 + \dots, \\ y &= b_0 + b_1 t - \frac{a_1^2 b_0}{12} t^4 - \frac{a_1^2 b_1}{20} t^5 + \dots\end{aligned}$$

Сохраняющаяся энергия выражается через характеризующие решение константы как  $2E = a_1^2 + b_1^2$ , мы примем в продолжении этого раздела, что  $2E \sim 1$ .

Для сравнения с асимптотическим решением удобно исключить здесь время и выбрать в качестве независимой переменной  $x$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_1 \left[ 1 - \frac{b_0^2}{2} \left( \frac{x}{a_1} \right)^2 - \frac{2b_0 b_1}{3} \left( \frac{x}{a_1} \right)^3 + \frac{2b_1^2 + b_0^4}{8} \left( \frac{x}{a_1} \right)^4 + \dots \right], \\ \dot{x}^2 &= a_1^2 \left[ 1 - b_0^2 \left( \frac{x}{a_1} \right)^2 - \frac{4b_0 b_1}{3} \left( \frac{x}{a_1} \right)^3 - \frac{b_1^2}{2} \left( \frac{x}{a_1} \right)^4 + \dots \right], \\ y &= b_0 + b_1 \left( \frac{x}{a_1} \right) + \frac{b_1 b_0^2}{6} \left( \frac{x}{a_1} \right)^3 + \frac{b_0(2b_1^2 - a_1^2)}{12} \left( \frac{x}{a_1} \right)^4 + \\ &\quad + \frac{2b_1(b_1^2 - a_1^2) + 3b_1 b_0^4}{40} \left( \frac{x}{a_1} \right)^5 + \dots,\end{aligned}$$

$$\dot{y} = b_1 - \frac{a_1^2 b_0}{3} \left(\frac{x}{a_1}\right)^3 - \frac{a_1^2 b_1}{4} \left(\frac{x}{a_1}\right)^4 + \dots,$$

$$\dot{y}^2 = b_1^2 - \frac{2b_0 b_1 a_1^2}{3} \left(\frac{x}{a_1}\right)^3 - \frac{a_1^2 b_1^2}{2} \left(\frac{x}{a_1}\right)^4 + \dots$$

Это решение надо где-то сшить с полученным выше асимптотическим; мы выбрали за точки сшивки  $x = \pm 1$ . Тут есть, конечно, некоторая доля риска, поскольку для  $x = 1$  и асимптотическое решение находится на пределе своей применимости, и в наших рядах (22) автоматическая малость исчезает и остается уповать только на малость отношений  $b/a$ , да еще на убывание численных коэффициентов.

При  $x = \pm 1$  наши формулы (22) дают

$$\dot{x} = a_1 - \frac{b_0^2}{2a_1} \mp \frac{2b_0 b_1}{3a_1^2} - \frac{2b_1^2 + b_0^4}{8a_1^3}, \quad (23)$$

$$\dot{x}^2 = a_1^2 - b_0^2 \mp \frac{4b_0 b_1}{3a_1} - \frac{b_1^2}{2a_1^2},$$

$$\pm xy|_{x=\pm 1} = y = b_0 \pm \frac{b_1}{a_1}, \quad y^2 = b_0^2 \pm 2 \frac{b_0 b_1}{a_1} + \frac{b_1^2}{a_1^2},$$

$$\dot{y} = b_1 \mp \frac{b_0}{3a_1} - \frac{b_1}{4a_1^2},$$

$$\dot{y}^2 = b_1^2 \mp \frac{2b_0 b_1}{3a_1} - \frac{b_1^2}{2a_1^2}, \quad 2E = a_1^2 + b_1^2 = 1.$$

С другой стороны, формулы асимптотического приближения при  $x = 1$ ,  $2E = 1$  дают

$$y = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{x_0}}, \quad p_y = \frac{-\sin \varphi_1}{\sqrt{x_0}}, \quad \dot{x} = 1 - \frac{1}{x_0},$$

$$\varphi_1 = \varphi|_{x=1} = -\frac{4x_0^2}{3} \left(1 + \frac{1}{2x_0}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{x_0}} + \varphi_0,$$

и их сопоставление с (23) приводит к выводу, что в первом приближении константа  $a_1$  равна единице, в то время как  $b_0$  и  $b_1$  порядка  $1/\sqrt{x_0}$ . Для определения последних получается система уравнений (в которой мы положили  $a_1 = 1$ )

$$x = 1: \quad b_0 + b_1 = \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{x_0}}, \quad \frac{3}{4} b_1 = \frac{b_0}{3} - \frac{-\sin \varphi_1}{\sqrt{x_0}}. \quad (24)$$

Ее решение есть

$$b_0 = \frac{9 \cos \varphi_1 + 12 \sin \varphi_1}{13\sqrt{x_0}} \quad \text{и} \quad b_1 = \frac{4 \cos \varphi_1 - 12 \sin \varphi_1}{13\sqrt{x_0}}. \quad (25)$$

Сшивку при  $x = -1$  дает условия

$$x = -1: \quad b_0 - b_1 = \frac{\cos \varphi_{-1}}{\sqrt{x_0'}}, \quad \frac{3}{4} b_1 + \frac{b_0}{3} = \frac{-\sin \varphi_{-1}}{\sqrt{x_0'}}. \quad (26)$$

где  $x_0'$ , вообще говоря, не совпадает с  $x_0$ . Именно, из (24) и (26) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_0'} &= \left(1 + \frac{1}{9}\right) b_0^2 - 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) b_0 b_1 + \left(1 + \frac{9}{16}\right) b_1^2, \\ \left(1 + \frac{1}{9}\right) b_0^2 + 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) b_0 b_1 + \left(1 + \frac{9}{16}\right) b_1^2 &= \frac{1}{x_0}, \end{aligned}$$

т. е.  $x_0' = x_0$  тогда и только тогда, когда  $b_0 b_1 = 0$ , т. е. или  $b_0 = 0$ , или  $b_1 = 0$ . Первый случай отвечает нечетному прохождению траектории через  $x = 0$ , второй — четному.

При рассмотрении асимптотического решения мы произвольно допустили, что решение проходит через нуль без изменения значения  $x_0$ . Теперь мы видим, что *траектория действительно проходит через нуль без изменения  $x_0$  тогда и только тогда, когда она либо четна, либо нечетна*. Это — основная мораль, которую мы извлекаем из рассмотрения малых  $x$  и  $y$ . Из нее следует, в частности, тот вывод, что теперь условие замыкания не будет более независимым от фазы: если в разделе 4 для подходящего  $x_0$  получалось сколько угодно различавшихся фазой фигур Лиссажу, то теперь их останется только одна или две.

Второй вывод носит не принципиальный, а численный характер и относится к уточнению условия замыкания траектории. Для него надо отдельно рассмотреть четный и нечетный случаи. В четном случае

$$b_1 = 0; \quad y(-1) = y(1); \quad \dot{y}(-1) = -\dot{y}(1) \quad \text{и из (25)} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = 1/3.$$

Последнее условие допускает два решения:

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \varphi_1 = 18^\circ, 43'; \quad b_0 = \frac{3}{\sqrt{10x_0}} \quad (27)$$

и

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{-1}{\sqrt{10}}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{-3}{\sqrt{10}}; \\ \varphi_1 &= 180^\circ + 18^\circ, 43'; \quad b_0 = \frac{-3}{\sqrt{10x_0}}; \end{aligned}$$



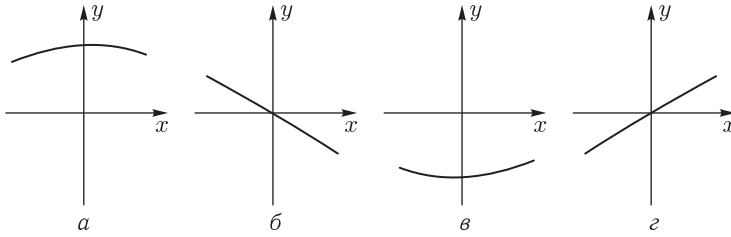


рис. 4

Схематический ход первого из них изображен на рис. 4, а, второго — на рис. 4, в.

В нечетном случае

$$b_0 = 0; \quad y(-1) = -y(1); \quad \dot{y}(-1) = \dot{y}(1) \quad \text{и из (25)} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -3/4.$$

Опять получаем два решения:

$$\sin \varphi_1 = \frac{3}{5}; \quad \cos \varphi_1 = -\frac{4}{5}; \quad \varphi_1 = 90^\circ + 53^\circ,13; \quad b_1 = -\frac{4}{5\sqrt{x_0}} \quad (28)$$

и

$$\sin \varphi_1 = -\frac{3}{5}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{4}{5}; \quad \varphi_1 = -90^\circ + 53^\circ,13; \quad b_1 = \frac{4}{5\sqrt{x_0}},$$

ход которых изображен на рис. 4, б и 4, г.

В асимптотическом решении при изменении  $x$  от 0 до 1 в  $\varphi$  набегают фазы

$$\Delta\varphi = -\frac{4}{3} \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}} \left(1 + \frac{1}{2x_0}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{x_0}} - \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{x_0^2}{\sqrt{2E}} \approx \frac{1}{2\sqrt{2E}}.$$

При  $2E = 1$  это составит

$$(\Delta\varphi)_{As} = 1/2 = 28^\circ,65$$

вне зависимости от четности или нечетности траектории. В то же время для  $x = 0$  четырем картинкам рис. 4, а, б, в, г в асимптотическом решении отвечают фазы  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $-90^\circ$ , как раз выделенные в формулах (27) и (28).

Таким образом, мы видим, что в четных решениях при прохождении от 0 до 1 набегают фазы на  $10^\circ,22$  меньше, а в нечетных — на  $24^\circ,48$  больше, чем то следовало бы по асимптотическому расчету. Эту поправку и надо учитывать при вычислении числа периодов по  $y$ , приходящихся на один период по  $x$ , при каждом прохождении изображающей точки через 0

по  $x$ . Итак, условия резонансности несколько смещаются, вместо (12) получаются условия типа

$$\frac{8x_0^2}{3\pi\sqrt{2E}} + \Delta = \frac{m}{n}$$

где  $\Delta$  зависит от особенностей траектории ( $\Delta = +0,27$  или  $-0,11$  или  $+0,08$  и т. п.).

Поскольку цель проводимого квазиклассического анализа состоит в выявлении общего характера движения, а не количественных деталей, то вдаваться в обсуждение этих поправок нет нужды.

Еще один вопрос, который можно прояснить, имея решение для малых  $x$  и  $y$ , это вычисление  $\langle y^2 \rangle$ , для которого асимптотическое решение приводило к расходимости, которую в разделе 4 пришлось обрезать с разными оговорками, чтобы прийти к двум конкурирующим, хотя и близким, оценкам (14) в (15). Теперь с помощью (22) можно получить недвусмысленный результат, который опять будет зависеть от характера четности траектории, во всех случаях попадает в «вилку», образованную двумя оценками (14) и (15). Именно

$$\langle y^2 \rangle = \frac{2E}{x_0^2} \left\{ \frac{1}{8} \ln \frac{16}{\varepsilon} + \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,11 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{— четные,} \\ \text{— нечетные,} \end{array}$$

так что для качественных выводов эти уточнения несущественны.

**2.7. Волномеханическое рассмотрение.** Функции Гамильтона (1) нашей модели отвечает уравнение Шредингера

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{x^2 y^2}{2} \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y). \quad (29)$$

Попробуем воспользоваться при его рассмотрении тем же приближением, которое использовалось в классическом анализе, т. е. рассмотрим его сперва в глубине «рога», где  $x \gg y$ , а производные по  $x$  малы сравнительно с производными по  $y$ . Тогда можно считать сначала  $x$  фиксированным и усреднить гамильтониан по «квантовым флуктуациям»  $y$ . Такие флуктуации описываются гамильтонианом

$$H_y = \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2}$$

и осцилляторными функциями

$$\psi_m(y) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \sqrt{\frac{x}{\pi \hbar}} e^{-\pi y^2/2\hbar} H_m\left(\sqrt{\frac{x}{\hbar}} y\right);$$

для них известным образом

$$\left\langle m \left| \frac{p_y^2}{2} \right| m \right\rangle = \frac{\hbar x}{4} (2m+1), \quad \left\langle \frac{y^2}{2} \right| m \right\rangle_m = \frac{\hbar}{4x} (2m+1),$$

и

$$\langle H_y \rangle_m = \frac{2m+1}{2} \hbar x.$$

Теперь для нахождения движения по  $x$  подставим в уравнение это усредненное значение, т. е. напомним

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{2} \hbar x \right) \phi_m = E \phi_m. \quad (30)$$

Мы получили для движения по  $x$  уравнение для движения в однородном поле (в совершенной аналогии с классическим уравнением (8)), в котором от  $y$  осталось только собственное значение.

ЗАМЕЧАНИЕ: Ясно, что в этом рассуждении приближение состоит в (молчаливом) допущении, что  $\langle p_x^2/2 \rangle_m = p_x^2/2$ . К тому же результату можно было бы прийти, записывая

$$\Psi_m(x, y) = \phi_m(x) e^{-\pi y^2/2\hbar} H_m\left(\sqrt{\frac{x}{\hbar}} y\right)$$

и учитывая при дифференцировании по  $x$  производные только от  $\phi$ , но не от экспоненты или  $H_m$ . ■

Итак, мы получили уравнение

$$\phi_m''(x) - \frac{(2m+1)x}{\hbar} \phi_m + \frac{2E}{\hbar^2} \phi_m = 0$$

или, если сделать замену  $x = \xi + 2E/(2m+1)\hbar$ , уравнение

$$\phi_m''(\xi) - \frac{(2m+1)\xi}{\hbar} \phi_m = 0. \quad (31)$$

При  $\xi \rightarrow +\infty$  решение (31) ведет себя как  $\exp\left(\pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m+1}{\hbar}} \xi^{3/2}\right)$ . Решение со знаком  $+$  в экспоненте неограниченно нарастает и должно быть отброшено; допустимы только решения со знаком  $-$ .

Мы получаем важный вывод: При больших  $x$  допустимы только экспоненциально затухающие решения, т. е. частица

не может ускользнуть из ямы вдоль оси  $x$  (а, значит, и вдоль оси  $y$ ), где потенциальная энергия равна нулю.

Иными словами, с квантовой точки зрения наша яма — замкнутая; следовательно, в ней должен осуществляться дискретный спектр.

В рамках нашего приближения последнее утверждение можно проверить и непосредственно. Наш гамильтониан (1) симметричен относительно отражений в оси  $x$ , в оси  $y$  и в линиях  $x + y = 0$  и  $x - y = 0$ , и относительно поворотов на угол  $2\pi/4$ . Совокупность таких преобразований образует группу, называемую  $C_{4v}$ . Она имеет пять неприводимых представлений: четыре однорядных в одно двурядное. Все однорядные представления обладают, а двурядное может быть выбрано обладающим, определенной симметрией относительно отражений  $x \rightarrow -x$  (и  $y \rightarrow -y$ ). Поэтому можно утверждать, что все собственные функции (30) должны быть либо четными, либо нечетными функциями  $x$ . Иными словами, при решении задачи на собственные значения (30) класс допустимых функций будет ограничен двумя условиями: 1) невозрастания при  $x \rightarrow \infty$  и 2) четности (или нечетности) в нуле. Два условия приведут как всегда к дискретному спектру. Найдем его.

Решением уравнения (31), затухающим экспоненциально для  $\xi \rightarrow +\infty$ , является, как известно, функция Эйри  $\Phi\left(\left(\frac{2m+1}{\hbar}\right)^{1/3}\xi\right)$ . Поэтому напомним

$$\Phi_m(\xi) = \sqrt{3\pi} \left(\frac{\hbar}{2m+1}\right)^{1/6} \Phi\left(\left(\frac{2m+1}{\hbar}\right)^{1/3}\xi\right).$$

Функцию Эйри можно выразить через бесселевы функции порядка  $1/3$ . Поэтому окончательно

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2E}{(2m+1)\hbar}} - \\ - x \left\{ J_{1/3} \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m+1}{\hbar}} \left( \frac{2E}{(2m+1)\hbar} - x \right)^{3/2} \right] + J_{-1/3}(\dots) \right\}, & x < \frac{2E}{(2m+1)\hbar}, \\ K_{1/3} \left[ \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m+1}{\hbar}} \left( x - \frac{2E}{(2m+1)\hbar} \right)^{3/2} \right] 2 \sqrt{x - \frac{2E}{(2m+1)\hbar}}, & x > \frac{2E}{(2m+1)\hbar}. \end{cases}$$

На это решение надо еще наложить граничное условие четности или нечетности в нуле.

Нечетное граничное условие пишется как  $\varphi_m(x)|_{x=0} = 0$ , т. е. как

$$J_{1/3}(\zeta_n) + J_{-1/3}(\zeta_n) = 0, \quad \zeta_n = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m+1}{\hbar}} \left( \frac{2E_n}{(2m+1)\hbar} \right)^{3/2}.$$

Для четного граничного условия надо приравнять нулю значение производной  $\left. \frac{d\varphi_m(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0$ . Дифференцирование дает

$$\frac{d\varphi_m}{dx} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{-\xi}} \{J_{-2/3}(\dots) - J_{2/3}(\dots)\},$$

т. е. условие обращения  $\varphi'$  в нуль состоит в требовании

$$J_{2/3}(\zeta_n) - J_{-2/3}(\zeta_n) = 0.$$

Запишем  $\varphi(x)$  и  $d\varphi/dx$  через  $J$  и  $N$  с положительными индексами:

$$J_{1/3} + J_{-1/3} = \sqrt{3} (\cos \alpha J_{1/3} - \sin \alpha N_{1/3}), \quad \alpha = +\pi/6,$$

$$J_{2/3} - J_{-2/3} = \sqrt{3} (\cos \alpha J_{2/3} - \sin \alpha N_{2/3}), \quad \alpha = -\pi/6.$$

Наука о бесселевых функциях учит нас тогда, что расположение корней таких комбинаций описывается асимптотической формулой  $\zeta_v = (p - 1/3 + 2v)\pi/2 - \alpha$ . Поэтому для четных решений получаем

$$\zeta_v = v\pi + \pi/4, \quad v = 0, 1, \dots, \quad \text{или} \quad v = n/2; \quad n = 0, 2, \dots, \quad (32)$$

а для нечетных —

$$\zeta_v = v\pi - \pi/4, \quad v = 1, 2, \dots, \quad \text{или} \quad v = (n+1)/2; \quad n = 1, 3, \dots \quad (33)$$

Видим, что если сделать в (32), (33) выписанные в них замены  $v$  через  $n$ , то обе формулы объединяются в одну:

$$\zeta_v = 1/4 \pi(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (34)$$

причем четные решения отвечают четным  $n$ , а нечетные — нечетным.

Спрашивается, можно ли пользоваться асимптотической формулой для корней? Сравнение с точными значениями показывает, что нулевой айгенверт смещается:

$$0,785 \Rightarrow 0,686, \quad (35)$$

изменения же остальных не превышают 1 %.

Найденные значения (34) корней  $\zeta_n$  позволяют выписать условия квантования. Имеем

$$\frac{\pi}{4}(2n+1) = \zeta_n = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2m+1}{\hbar}} \frac{2\sqrt{2} E^{3/2}}{(2m+1)^{3/2} \hbar^{3/2}},$$

откуда

$$E_{m,n} = \left( \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} \right)^{2/3} \hbar^{4/3} [(2m+1)(2n+1)]^{2/3}, \quad \left( \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} \right)^{2/3} = 0,5577. \quad (36)$$

Полученная формула для спектра обладает несколькими замечательными особенностями. Во-первых, поразительно, что хотя мы, как и в полуклассическом расчете, исходили из крайне несимметричного в  $x$  и  $y$  приближения, окончательный результат оказался совершенно симметричен в квантовых числах  $n$  и  $m$ . Более того формула (36) целиком совпадает с полученной в квазиклассике для *простейших замкнутых орбит* формулой (18) с тем единственным (и обычным) отличием, что вместо  $(2n+1)$  и  $(2m+1)$  там фигурировали просто  $2n_x$  и  $2n_y$ .

Далее, новая формула (36) имеет гораздо более универсальный смысл, чем полуклассическая. В то время, как получив (18), мы могли говорить лишь, что удалось проквантовать некоторые избранные движения системы, и оставались в полном неведении о том, как ведут себя другие (даже из числа замкнутых траекторий наш прием позволил, как легко сообразить, найти далеко не все), примененный теперь способ рассмотрения волнового уравнения претендует на то, что с его помощью — пусть в очень грубом приближении — находятся все стационарные состояния системы. Именно последнее обстоятельство служит основанием сделанного выше утверждения о полном взаимном соответствии между избранными замкнутыми классическими траекториями и стационарными состояниями квантовой системы.

**2.8. Вариационная оценка айгенвертов.** Другой способ приближенной оценка собственных значений состоит в том, чтобы попробовать подставить в индуцирующее уравнение (29) функционал

$$\int \Psi(\hat{H} - E)\Psi dx dy$$

некоторые пробные функции с параметром и минимизировать  $E$  выбором этого параметра.

Мы попробуем провести такую процедуру с осцилляторными пробными функциями

$$\Psi_{n,m}(x, y) = \psi_n(x)\psi_m(y), \quad (37)$$

где

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi \hbar}} e^{-\alpha x^2/2\hbar} H_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar}} x\right)$$

и аналогично для  $\psi_m(y)$ , а параметры  $\alpha$  и  $\beta$  (для  $y$ ) будем считать зависящими от  $m$  и  $n$  и варьировать.

ЗАМЕЧАНИЕ: Такая система пробных функций нехороша тем, что при зависящих от  $m$  и  $n$  параметрах  $\alpha$  и  $\beta$  функции не ортогональны. Проведенные для небольших квантовых чисел сравнения показали, что это обстоятельство искажает собственные значения на немногие проценты. ■

С такими функциями известным образом

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_{n,m} &= \frac{\hbar}{2\alpha} (2n+1), & \langle p_x^2 \rangle_{n,m} &= \frac{\hbar\alpha}{2} (2n+1), \\ \langle y^2 \rangle_{n,m} &= \frac{\hbar}{2\beta} (2m+1), & \langle p_y^2 \rangle_{n,m} &= \frac{\hbar\beta}{2} (2m+1), \end{aligned} \quad (38)$$

и поэтому среднее значение гамильтониана есть

$$\langle H \rangle_{n,m} = \frac{\hbar}{4} [(2n+1)\alpha + (2m+1)\beta] + \frac{\hbar^2(2n+1)(2m+1)}{8\alpha\beta}.$$

Выполняя варьирование

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \alpha} &= \frac{(2n+1)\hbar}{4} - \frac{\hbar^2(2n+1)(2m+1)}{8\alpha^2\beta}, \\ \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} &= \frac{(2m+1)\hbar}{4} - \frac{\hbar^2(2n+1)(2m+1)}{8\alpha\beta^2} \end{aligned}$$

и приравнявая производные нулю, получаем систему уравнений

$$\alpha^2\beta = \frac{\hbar(2m+1)}{2}, \quad \alpha\beta^2 = \frac{\hbar(2n+1)}{2},$$

для определения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , откуда

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\hbar}{2} \frac{(2m+1)^2}{(2n+1)}} \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{\hbar}{2} \frac{(2n+1)^2}{(2m+1)}}. \quad (39)$$

Такой выбор параметров дает для «наилучших средних значений» энергии

$$\langle H \rangle_{n,m} = \frac{3}{4\sqrt[3]{2}} \hbar^{4/3} [(2n+1)(2m+1)]^{2/3}, \quad \frac{3}{4\sqrt[3]{2}} = 0,5953, \quad (40)$$

— т. е. мы опять приходим к той же самой зависимости энергии от квантовых чисел. Численный коэффициент оказывается чуть больше, чем в уравнении (36) — чисто осцилляторные функции хуже, чем произведения осцилляторных на функцию Эйри.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для основного уровня была испробована также функция вида

$$\Psi(x, y) = N \exp \left\{ - \left( \frac{\alpha x^2}{2\hbar} + \frac{\beta y^2}{2\hbar} + \gamma \frac{\alpha\beta x^2 y^2}{2\hbar^2} \right) \right\}.$$

Она привела для собственного значения к наилучшему приближению

$$E_{00} = 0,5541,$$

которое на 6 % ниже соответствующего из (40). ■

Чтобы можно было установить более тесные аналогии между пробными функциями (37) и замкнутыми орбитами квазиклассического рассмотрения, вычислим средние квадраты координат и импульсов. Из (38), (39) получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x^2 \rangle_{n,m}} &= \frac{1}{2^{1/3}} \sqrt{\hbar \frac{(2n+1)^2}{(2m+1)}}, \\ \sqrt{\langle y^2 \rangle_{n,m}} &= \frac{1}{2^{1/3}} \sqrt{\hbar \frac{(2m+1)^2}{(2n+1)}}, \quad \frac{1}{2^{1/3}} = 0,794, \end{aligned}$$

а для импульсов

$$\sqrt{\langle p_x^2 \rangle_{n,m}} = \sqrt{\langle p_y^2 \rangle_{n,m}} = \frac{2}{3} E_{n,m} = \frac{\hbar^{4/3}}{2^{4/3}} [(2n+1)(2m+1)]^{2/3},$$

так что, конечно, выполняется

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \frac{1}{2} \hbar (2n+1), \quad \sqrt{\langle y^2 \rangle} \sqrt{\langle p_y^2 \rangle} = \frac{1}{2} \hbar (2m+1).$$

Наконец, можно вычислить «показатель асимметрии»

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} / \sqrt{\langle y^2 \rangle} = (2n+1)/(2m+1).$$

Эти формулы можно сравнивать с квазиклассическими (19), (20) и (21).



**2.9. Заключение.** Итак, на примере конкретной модели Матиняна мы выяснили, что при квантовании динамически стохастической системы основную роль играют те классические движения, которым соответствуют замкнутые траектории. Только для таких движений существуют квантовые аналоги в виде стационарных состояний. При этом, чем сложнее классическая замкнутая траектория, чем большее число колебаний по  $x$  и по  $y$  должно произойти, прежде чем траектория замкнется, тем выше лежит низший квантовый уровень, соответствующий такой моде движения. Поскольку настоящую стохастическую траекторию, которая вообще не замыкается, можно в некотором смысле рассматривать как предельный случай  $(n, m)$ -моды для  $n$  и  $m$ , стремящихся к бесконечности, то несколько фигурально можно сказать, что все квантовые состояния, которые могли бы отвечать стохастическим движениям, оказываются бесконечно поднятыми вверх по шкале энергий.

Надо сделать еще одно замечание относительно конкретно найденных приближенных спектров (36) или (40). Они, конечно, очень грубы. В частности, в них имеются вырожденные уровни, их появление обусловлено только грубостью приближения. Используемые при выводе, например, (40) пробные функции  $\psi_n(x)\psi_m(y)$  не образуют неприводимых представлений группы симметрии задачи, следовало бы строить комбинация типа  $\psi_n(x)\psi_m(y) \pm \psi_m(x)\psi_n(y)$ . Легко установить, что тогда вырождение полностью снимется.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

4-вектор 182  
4-момент 207  
4-потенциал электромагнитного поля 232  
4-скорость 194  
4-тензор  $s$ -го ранга 182  
4-ускорение 194

*D*-функция Паули 110

Аддитивные интегралы движения 32

Амплитуда 97

Аналитическая механика 14

Анапольный момент 324

Антилинейное соответствие 372

Антисимметричный тензор 185

Асимптотический метод Н. Н. Боголюбова 572

Афелий 78

Боровский радиус 361

Вектор вакуума 420

— Пойнтинга 253

Векторный потенциал 232

Внутренняя энергия 43

Волна линейно поляризованная 261

— эллиптически поляризованная 261

Волновая зона 304

— механика 516

— функция 461

Волновое уравнение 257

Время запаздывающее 271

— собственное 171

Встречные пучки 64

Вторая пара уравнений Максвелла 240

Гайзенбергова картина 505

Гамильтонов формализм 129

Гамильтонова производная 21

Гармонический осциллятор 95

Гауссова симметричная система CGS 234

Гипербола 79

Главное квантовое число 542

Градиентная инвариантность 232

Групповая скорость 222

Движение инфинитное 70

— лимитационное 72

— финитное 69

Действие 20

Дипольный момент системы 283

Дискриминантный тензор 186

Евклидово пространство 17

Единичный тензор 186

Задача о рассеянии частиц 61

— — столкновении частиц 61

Закон Кулона 276

Законы сохранения 32

Замедление времени 172

Запаздывание поля 217

Запаздывающая мультискобка

Пуассона 137

— функция Грина 108

Запаздывающее время 271

Запаздывающий потенциал 271

Захват 61

- Излучение** электромагнитного поля 264  
**Изображающие точки** 118  
**Импульс материальной точки** 38  
— системы материальных точек 38  
**Инвариант** 161  
**Инерциальная система отсчета** 24  
**Интеграл движения** 31  
**Интервал** 161  
— времениподобный 163  
— пространственноподобный 163  
— светоподобный 163  
**Инфинитное движение** 70
- Калибровочное поле** 565  
**Калибровочные преобразования** первого рода 445  
**Канонические переменные** 118, 561  
— уравнения 118  
**Канонический тензор** 228  
**Каноническое преобразование** 143  
**Картина Гайзенбергова** 505  
— Дирака 514  
— Шредингерова 506  
**Квадрупольный момент системы** 284  
**Квазистационарность** 305  
**Квант действия** 352  
**Квантовое условие** 358  
— число главное 542  
— — радиальное 542  
**Кванты света (фотоны)** 199  
**Кинетическая энергия** 30  
**Классический радиус электрона** 279  
**Когерентное состояние** 457  
**Комплексная амплитуда** 97  
**Комптонова длина волны** 353  
**Конфигурационное пространство** 448  
**Координатное представление** 460  
**Координаты события** 160  
**Корпускулярно-волновой дуализм** 353  
**Круговая поляризация** 262
- Лагранжева форма квантовой динамики** 550  
**Лагранжиан взаимодействия** 233  
**Лимитационное движение** 72  
**Линейная скалярная функция** 371  
**Линейно поляризованная волна** 261  
**Линейный оператор** 375  
**Лоренцев момент** 208  
**Лоренцево сокращение длины** 179
- Магнитное дипольное излучение** 314  
**Магнитный момент  $l$ -го порядка** 296  
**Максимальная скорость распространения взаимодействий** 170  
**Масштаб** 15  
**Материальная точка** 17  
**Матрицы Паули** 485  
**Матричная механика** 516  
**Матричный элемент оператора** 375  
**Мгновенная форма** 206  
**Мгновенность распространения взаимодействий** 30  
**Метрика** 163  
**Механика аналитическая** 14  
— волновая 516  
— матричная 516  
**Мировая линия** 163  
— точка 163  
**Момент анапольный** 324  
— лоренцев 208  
— магнитный  $l$ -го порядка 296  
— материальной точки 39  
— системы дипольный 283  
— — квадрупольный 284

- Наблюдаемые** 383  
— динамические переменные 383  
**Напряженность магнитного поля** 246  
— электрического поля 246  
**Некоммутативность** 379  
**Неупругое рассеяние** 61  
**Норма векторов** 374  
**Нулевые колебания** 522
- Обобщенные координаты** 18  
**Одновременность** 166  
**Однозначное представление** группы вращений 481  
**Оператор д'Аламбера** 221  
— квадрата момента 474  
— Клейна–Гордона 221  
— проектирования 378  
— самосопряженный 376  
— спина 485  
— числа частиц 421  
— эрмитов 376  
**Операторы рождения** 421  
— уничтожения 421  
**Осциллятор** 95  
**Отражение** 174
- Парабола** 80  
**Параметр кривой** 77  
**Первая пара уравнений Максвелла** 240  
**Перигелий** 78  
**Период финитного движения** 70  
**Плотность массы** 243  
— потока вероятности 532  
— тока 237  
**Поверхностная энергия** 202  
**Поворот** 174  
**Поглощение электромагнитного поля** 264  
**Поле калибровочное** 565  
— стационарное 288  
— электромагнитное 232  
**Полиномы Эрмита** 432
- Полная система коммутирующих наблюдаемых** 407  
**Полное сечение рассеяния** 87  
**Полный заряд** 238  
— симметричный тензор энергии–импульса 245  
— угол отклонения 76  
**Поляризация** 260  
— круговая 262  
— циркулярная 262  
**Постоянная Ридберга** 543  
— тонкой структуры 360  
**Потенциал векторный** 232  
— запаздывающий 271  
— скалярный 232  
— — магнитный 295  
**Потенциальная энергия** 30  
**Поток энергии** 254  
**Представление группы вращений** двузначное 481  
— — — однозначное 481  
**Преобразование Лежандра** 116  
**Преобразования Галилея** 24  
— Лоренца 176  
**Приведенная масса** 59  
**Принцип наименьшего действия** 19  
— неопределенности 366  
— относительности 159  
— — Галилея 24  
— постоянства скорости света 159  
— суперпозиции 369  
**Прицельное расстояние** 83  
**Причинная функция Грина** 114  
**Производящая функция** 116  
**Промежутки времени между событиями** 15  
**Пространство евклидово** 17  
— конфигурационное 448  
— Минковского 163  
— псевдоевклидово 163  
— фазовое 118  
**Прямое произведение векторов** 446

Псевдоевклидово пространство  
163

Псевдоскаляр 187

Псевдотензор 186

**Радиальное квантовое число** 542

Разложение поля по мультипо-  
лям 285

Расстояние между телами 15

Реликтовое излучение 26

Релятивистская динамика 205

**Самосопряженный оператор** 376

Световой конус 164

Сдвиг 174

Седло 120

Сепаратриса 120

Сечение захвата 88

Сигнатура 183

Сила 38

— Лоренца 249

Симметричная функция Грина  
113

Симметричный спинтензор 481

— тензор 185

— — энергии-импульса 228

Скалярный магнитный потен-  
циал 295

— потенциал 232

Скобка Пуассона 129

Скорость групповая 222

— фазовая 222

Сложение моментов 501

Собственная энергия заряда 277

Собственное время 171

— значение 380

Собственный вектор 380

Событие 160

Соотношение неопределенностей  
Гейзенберга 452

Сопряженное линейное вектор-  
ное пространство 371

Сопряженный оператор 376

Состояние системы 19

Спектральное представление 395

Спин 483

Спинор 481

Среднее значение оператора 402

Стационарное уравнение Шре-  
дингера 516

Стационарное поле 288

**Тело отсчета** 17

Тензор антисимметричный 185

— дискриминантный 186

— единичный 186

— канонический 228

— плотности момента 226

— полный симметричный  
энергии-импульса 245

— симметричный 185

— — энергии-импульса 228

— электромагнитного поля 233

— энергии-импульса 225

Теорема Нётер 32

— Пуассона 137

Тождество Якоби 130

Точечная форма 206

**Угол рассеяния** 64

Упругое рассеяние 61

Уравнение волновое 257

— Гамильтона-Якоби 156

— непрерывности 251

— Шредингера 506

— — стационарное 516

Уравнения Гамильтона 118

— движения 19

— Лагранжа-Эйлера 20, 548

— связей 553

Ускорение материальной точки  
18

Условие асимптотической адди-  
тивности 23

— квантовое 358

— Лоренца 255

— причинности 273

— частот 358

**Фазовая скорость** 222

— траектория 118

Фазовое пространство 118

Фейнманов мультипликативный  
интеграл 509

Финитное движение 69

Форма мгновенная 206

— точечная 206

— фронтальная 206

Формула Томсона 350

Фотоны 199

Фронтальная форма 206

Фундаментальные динамические  
величины 211

Функция Гамильтона 117

— Грина 105

— Лагранжа 20

Хронологическое произведение  
508

Центр 119

— инерции системы материаль-  
ных точек 42

Циркулярная поляризация 262

Часы 15

Числа заполнения 421

Число степеней свободы 18

**Шредингера картина 506**

Эксцентриситет кривой 77

Электрическое квадрупольное  
излучение 315

Электромагнитное поле 232

Элементарный заряд 360

Эллипс 78

Эллиптически поляризованная  
волна 261

Энергия поверхностная 202

— покоя 198

— системы 37

Эрмитов оператор 376

Эфир 158

Эффективное (дифференциаль-  
ное) сечение 85

Учебное издание

*МЕДВЕДЕВ Борис Валентинович*

**НАЧАЛА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Редактор *А.Д. Суханов*  
Оригинал-макет: *Д.В. Горбачев*  
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 13.12.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 37,5. Уч.-изд. л. 37,5. Тираж 2000 экз.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП «Типография «Наука»  
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-0770-9



9 7859 2 107709