

В. Н. МАЛОЗЕМОВ, С. М. МАШАРСКИЙ

О С Н О В Ы ДИСКРЕТНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2012**

ББК 22.176я73

М 19

Малоземов В. Н., Машарский С. М.

М 19 Основы дискретного гармонического анализа: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 304 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1414-7

Дискретный гармонический анализ — это математическая дисциплина, ориентированная на прикладные задачи цифровой обработки сигналов. Основными приемами цифровой обработки сигналов являются разложение сигнала по различным базисам и анализ свойств коэффициентов таких разложений.

Данная книга предназначена для первоначального знакомства с предметом. В ней изучаются быстрое преобразование Фурье, быстрое преобразование Уолша, быстрое преобразование Хаара, базисы Ахмеда-Рао, вейвлетные базисы. Отдельная глава посвящена дискретным периодическим сплайнам и их применению к оптимальной интерполяции и сглаживанию сигналов. Книга содержит большое количество дополнительных задач (с решениями), которые помогут активно освоить материал.

Для студентов математических специальностей и направлений и специалистов в области цифровой обработки сигналов.

ББК 22.176я73

Рецензенты:

Ю. К. ДЕМЬЯНОВИЧ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой параллельных алгоритмов математикомеханического факультета СПбГУ; **А. Б. ПЕВНЫЙ** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Сыктывкарского государственного университета.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

- © Издательство «Лань», 2012
- © В. Н. Малоземов, С. М. Машарский, 2012
- © Издательство «Лань», художественное оформление, 2012

Содержание

Предисловие	6
Предварительные сведения	10
Задачи	23
Комментарий	26
Глава 1. Преобразования сигналов	27
1. Пространство сигналов	27
2. Дискретное преобразование Фурье	32
3. Равенство Парсеваля	37
4. Теорема об отсчетах	40
5. Циклическая свертка	44
6. Циклическая корреляция	49
7. Оптимальная интерполяция	52
8. Оптимальные пары сигнал-фильтр	58
9. Ансамбли сигналов	63
10. Принцип неопределенности	70
Задачи	75
Комментарии	81
Глава 2. Быстрые алгоритмы	83
1. Алгоритм Гёрцеля	83
2. Первая последовательность ортогональных базисов	86
3. Быстрое преобразование Фурье	91
4. Вейвлетные базисы	93
5. Базис Хаара. Быстрое преобразование Хаара . .	98
6. Прореживание по частоте	102

7. Теорема об отсчетах в базисах Хаара	110
8. Теорема о свертке в базисах Хаара	117
9. Вторая последовательность ортогональных базисов	126
10. Быстрое преобразование Уолша	132
11. Упорядочение функций Уолша	134
12. Теорема об отсчетах в базисе Уолша	143
13. Базисы Ахмеда–Рао	150
Задачи	163
Комментарии	169
Глава 3. Сплайновые подпространства	171
1. Периодические функции Бернулли	171
2. Периодические В-сплайны	174
3. Дискретные периодические сплайны	180
4. Сплайн-интерполяция	185
5. Сглаживание дискретных периодических данных	188
6. Метод касательных гипербол	196
7. Вычисление значений дискретного сплайна . . .	199
8. Ортогональный базис в пространстве сплайнов .	204
9. Базисы сдвигов	208
10. Вейвлетные подпространства	214
11. Быстрое вейвлетное разложение дискретных периодических сплайнов	219
Задачи	225
Комментарии	230
Решения задач	233
К «Предварительным сведениям»	233
К главе 1	241
К главе 2	261
К главе 3	279

<i>СОДЕРЖАНИЕ</i>	5
Список литературы	293
Предметный указатель	299

Предисловие

Дискретный гармонический анализ — это математическая дисциплина, ориентированная на прикладные задачи цифровой обработки сигналов. Понятие *сигнал* требует уточнения. В дискретном гармоническом анализе сигнал определяется как комплекснозначная периодическая функция целочисленного аргумента.

Изучаются преобразования сигналов. Одним из основных является *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ). В 1965 г. в работе [43] Кули и Тьюки предложили *быстрое преобразование Фурье* (БПФ) — быстрый метод вычисления ДПФ. По существу, это открытие послужило началом развития дискретного гармонического анализа как самостоятельной дисциплины.

Формула обращения для ДПФ порождает разложение сигнала по экспоненциальному базису. Разложение сигнала по различным базисам является основным приемом цифровой обработки сигналов. Свойства коэффициентов таких разложений позволяют выявить структуру сигнала. Для определения частотно-временных характеристик сигнала используются *вейвлетные* базисы.

Интерес представляют подпространства пространства дискретных периодических сигналов, среди которых выделяются подпространства *дискретных периодических сплайнов*. Сплайны позволяют решать задачи интерполяции и сглаживания сигналов, активно используются в геометрическом моделировании.

Таковы вкратце контуры дискретного гармонического анализа.

Данная книга предназначена для первоначального знакомства с предметом. Она написана на основе курса лек-

ций, который первый автор с 1995 г. читает на математикомеханическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Книга состоит из трех глав. В первой главе рассматриваются преобразования сигналов. Центральное место занимают дискретное преобразование Фурье, циклическая свертка и циклическая корреляция. Изучаются свойства этих преобразований. В качестве приложения приводятся решения задач об оптимальной интерполяции и об оптимальной паре сигнал–фильтр. Отдельные параграфы посвящены ансамблям сигналов и принципу неопределенности в дискретном гармоническом анализе.

Во второй главе основное внимание уделяется быстрым алгоритмам — быстрому преобразованию Фурье, быстрому преобразованию Хаара и быстрому преобразованию Уолша. Для построения быстрых алгоритмов используется оригинальный подход, основанный на введении рекуррентной последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных периодических сигналов. На этом пути удастся сформировать вейвлетные базисы, совокупность которых образует *вейвлет-пакет*. К вейвлетным базисам относится, в частности, базис Хаара. Ему в книге уделяется большое внимание.

Исследуется важный вопрос об упорядочении функций Уолша. Подробно анализируются базисы Ахмеда–Рао, которые занимают промежуточное положение между базисом Уолша и экспоненциальным базисом.

В третьей главе вводятся дискретные периодические сплайны и изучаются их фундаментальные свойства. В терминах сплайнов дается изящное решение задачи о сглаживании дискретных периодических данных. Строится система ортогональных сплайнов. Получено вейвлетное разложение

произвольного сплайна.

Характерной особенностью книги является наличие большого количества задач. Они позволяют разгрузить основной текст. В виде задач оформлены специальные или дополнительные факты. Все задачи снабжены решениями. Отдельные задачи или группы задач независимы, поэтому читатель может выбрать те из них, которые покажутся ему интересными. Наиболее эффективный путь — решать задачи и сравнивать свое решение с приведенным в книге. Это позволит активно освоить материал.

В начале книги имеется раздел «Предварительные сведения». В нем кратко изложены факты, необходимые для чтения основного текста. Эти факты хорошо известны и касаются вычетов, перестановок, комплексных чисел и конечных разностей. Раздел «Предварительные сведения» также содержит задачи. В конце книги приводится список цитированной литературы. Выделим в нем книги [5, 17, 40], по которым авторы в свое время осваивали начала дискретного гармонического анализа.

Первоначальный вариант книги в виде препринта [19] был опубликован в 2003 г. С января 2004 г. начал работать семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (<http://dha.spb.ru>). На сайте семинара публиковались, в частности, избранные доклады, на базе которых в 2009–2010 годах были изданы книги [10, 38, 42]. Материалы избранных докладов и указанных книг можно рассматривать как дополнение к данной книге.

Благодарности. Прежде всего авторы благодарны студентам и аспирантам, в разные годы прослушавшим курс лекций и предложившим красивые решения некоторых задач.

Первый автор отдельно приносит благодарность своему

постоянному соавтору А. Б. Певному и бывшим аспирантам М. Г. Беру и А. А. Третьякову, совместно с которыми были выполнены наши первые работы в области дискретного гармонического анализа.

Июль 2011 г.

В. Н. Малоземов

С. М. Машарский

Предварительные сведения

В книге используются следующие обозначения:

\mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} — множества целых, вещественных и комплексных чисел соответственно;

$m : n$ — множество последовательных целых чисел $\{m, m+1, \dots, n\}$.

Запись $A := B$ или $B =: A$ означает, что A равно B по определению.

1. Вычеты. Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и N — натуральное число. Существует единственное целое число p , такое, что

$$p \leq j/N < p+1. \quad (1)$$

Оно называется *целой частью* дроби j/N и обозначается $p = \lfloor j/N \rfloor$. Разность $r = j - pN$ называется *остатком от деления j на N* или *вычетом j по модулю N* и обозначается $r = \langle j \rangle_N$. Для j получаем представление $j = pN + r$, в котором $p = \lfloor j/N \rfloor$ и $r = \langle j \rangle_N$.

Нетрудно показать, что

$$\langle j \rangle_N \in 0 : N-1. \quad (2)$$

Действительно, умножим неравенства (1) на N и вычтем pN . Получим $0 \leq j - pN < N$, что равносильно (2).

Из определений следует, что при любом целом k справедлив равенства

$$\lfloor (j + kN)/N \rfloor = \lfloor j/N \rfloor + k, \quad (3)$$

$$\langle j + kN \rangle_N = \langle j \rangle_N. \quad (4)$$

Формальное доказательство проводится так. Поскольку $\lfloor j/N \rfloor \leq j/N < \lfloor j/N \rfloor + 1$, то после прибавления k получим

$$\lfloor j/N \rfloor + k \leq (j + kN)/N < \lfloor j/N \rfloor + k + 1.$$

Это равносильно (3). Равенство (4) является прямым следствием (3). Действительно,

$$\langle j + kN \rangle_N = j + kN - \lfloor (j + kN)/N \rfloor N = j - \lfloor j/N \rfloor N = \langle j \rangle_N.$$

Приведем еще два простых, но важных свойства вычетов: при всех целых j и k

$$\langle j + k \rangle_N = \langle \langle j \rangle_N + k \rangle_N = \langle \langle j \rangle_N + \langle k \rangle_N \rangle_N,$$

$$\langle jk \rangle_N = \langle \langle j \rangle_N k \rangle_N = \langle \langle j \rangle_N \langle k \rangle_N \rangle_N.$$

Доказательство этих свойств опирается на формулу (4).

2. Наибольший общий делитель. Возьмем ненулевые целые числа j и k . Наибольшее натуральное число, на которое делится как j , так и k , называется *наибольшим общим делителем* этих чисел и обозначается $\text{НОД}(j, k)$.

Обозначим через M множество линейных комбинаций чисел j и k с целыми коэффициентами:

$$M = \{aj + bk \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Теорема 1. *Наименьшее натуральное число из M равно $\text{НОД}(j, k)$.*

Доказательство. Пусть $d = a_0j + b_0k$ — наименьшее натуральное число из M . Покажем, что j делится на d . Воспользуемся представлением $j = pd + r$, в котором $r \in 0 : d - 1$. Запишем

$$r = j - pd = j - p(a_0j + b_0k) = (1 - pa_0)j - pb_0k.$$

Видим, что $r \in M$ и $r < d$. Это возможно только при $r = 0$, т. е. когда j делится на d . Аналогично устанавливается, что и k делится на d .

Пусть теперь j и k делятся на натуральное число d' . Тогда и d делится на d' . Значит, $d = \text{НОД}(j, k)$. Теорема доказана. \square

Согласно теореме 1 существуют целые числа a_0 и b_0 , такие, что

$$\text{НОД}(j, k) = a_0 j + b_0 k. \quad (5)$$

Формула (5) называется *линейным представлением* наибольшего общего делителя.

Отметим, что

$$\text{НОД}(j, k) = \text{НОД}(|j|, |k|),$$

поскольку числа j и $-j$ имеют одинаковые делители.

3. Взаимно простые числа. Натуральные числа n и N называются *взаимно простыми*, если $\text{НОД}(n, N) = 1$. Для взаимно простых чисел n и N равенство (5) принимает вид

$$a_0 n + b_0 N = 1. \quad (6)$$

Таким образом, для взаимно простых чисел n и N существуют целые числа a_0 и b_0 , такие, что выполняется равенство (6).

Справедливо и обратное утверждение: равенство (6) гарантирует взаимную простоту n и N . Это следует из теоремы 1, поскольку единица является абсолютно наименьшим натуральным числом.

Теорема 2. Если произведение jn при некотором $j \in \mathbb{Z}$ делится на N , а n и N взаимно просты, то j делится на N .

Доказательство. Умножим обе части равенства (6) на j , после чего возьмем вычеты по модулю N . Получим $\langle a_0 j n \rangle_N = \langle j \rangle_N$ и

$$\langle a_0 \langle j n \rangle_N \rangle_N = \langle j \rangle_N.$$

Ясно, что $\langle j \rangle_N = 0$, если $\langle jn \rangle_N = 0$. Это и есть формульный эквивалент утверждения теоремы. \square

Теперь умножим обе части равенства (6) на число $k \in 0 : N - 1$. Использование вычетов по модулю N приводит к соотношению

$$\langle \langle a_0 k \rangle_N n \rangle_N = k.$$

Данный результат можно интерпретировать так: уравнение $\langle xn \rangle_N = k$ при любом $k \in 0 : N - 1$ имеет решение $x_0 = \langle a_0 k \rangle_N$ на множестве $0 : N - 1$. Покажем, что это решение единственно. Допустим, что $\langle x' n \rangle_N = k$ при некотором $x' \in 0 : N - 1$. Тогда

$$\langle (x_0 - x')n \rangle_N = \langle \langle x_0 n \rangle_N - \langle x' n \rangle_N \rangle_N = 0.$$

Так как n и N взаимно просты, то по теореме 2 $x_0 - x'$ делится на N . Учитывая, что $|x_0 - x'| \leq N - 1$, заключаем, что $x' = x_0$.

Подведем итог.

Теорема 3. Если $\text{НОД}(n, N) = 1$, то уравнение $\langle xn \rangle_N = k$ при любом $k \in 0 : N - 1$ имеет единственное решение на множестве $0 : N - 1$.

4. Перестановки. Обозначим $f(j) = \langle jn \rangle_N$. В силу теоремы 3 при выполнении условия $\text{НОД}(n, N) = 1$ функция $f(j)$ отображает взаимно-однозначно множество $J_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ на себя. По существу, f производит перестановку элементов J_N . Эта перестановка называется *эйлеровой*.

Опишем простой способ вычисления значений $f(j)$. Очевидно, что $f(0) = 0$ и

$$f(j + 1) = \langle (j + 1)n \rangle_N = \langle \langle jn \rangle_N + n \rangle_N = \langle f(j) + n \rangle_N.$$

Приходим к рекуррентному соотношению

$$f(0) = 0; \quad f(j + 1) = \langle f(j) + n \rangle_N, \quad j = 0, 1, \dots, N - 2, \quad (7)$$

которое позволяет последовательно находить значения эйлеровой перестановки. Результаты вычислений по формуле (7) при $n = 3$, $N = 8$ приведены в табл. 1.

Таблица 1. Эйлерова перестановка при $n = 3$, $N = 8$

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\langle j3 \rangle_8$	0	3	6	1	4	7	2	5

В дальнейшем нам понадобятся еще две перестановки rev_ν и gre_ν . Они определены на множестве $\{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$ при натуральном ν .

Напомним, что любое число $j \in 0 : 2^\nu - 1$ посредством последовательного деления на два можно единственным образом представить в виде

$$j = j_{\nu-1}2^{\nu-1} + j_{\nu-2}2^{\nu-2} + \dots + j_12 + j_0, \quad (8)$$

где все коэффициенты j_k равны нулю или единице. Вместо (8) используется более компактная запись $j = (j_{\nu-1}, j_{\nu-2}, \dots, j_0)_2$. Правая часть последнего равенства называется *двоичным кодом* числа j .

Введем обозначение

$$\text{rev}_\nu(j) = (j_0, j_1, \dots, j_{\nu-1})_2.$$

Число $\text{rev}_\nu(j)$ принадлежит множеству $0 : 2^\nu - 1$, и его двоичный код равен перевернутому двоичному коду числа j . Идентификатор rev связан с английским словом *reverse*. Индекс ν у rev определяет количество ревертируемых разрядов.

Ясно, что $\text{rev}_\nu(\text{rev}_\nu(j)) = j$ при $j \in 0 : 2^\nu - 1$. Отсюда, в частности, следует, что отображение $j \rightarrow \text{rev}_\nu(j)$ является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$.

По определению $\text{rev}_1(j) = j$ при $j \in 0 : 1$. Будем считать, что $\text{rev}_0(0) = 0$.

В табл. 2 показано, как формируется перестановка rev_ν при $\nu = 3$.

Таблица 2. Перестановка rev_ν при $\nu = 3$

j	$(j_2, j_1, j_0)_2$	$(j_0, j_1, j_2)_2$	$\text{rev}_3(j)$
0	$(0, 0, 0)_2$	$(0, 0, 0)_2$	0
1	$(0, 0, 1)_2$	$(1, 0, 0)_2$	4
2	$(0, 1, 0)_2$	$(0, 1, 0)_2$	2
3	$(0, 1, 1)_2$	$(1, 1, 0)_2$	6
4	$(1, 0, 0)_2$	$(0, 0, 1)_2$	1
5	$(1, 0, 1)_2$	$(1, 0, 1)_2$	5
6	$(1, 1, 0)_2$	$(0, 1, 1)_2$	3
7	$(1, 1, 1)_2$	$(1, 1, 1)_2$	7

Продолжим изучение перестановки rev_ν .

Теорема 4. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\begin{aligned}
 \text{rev}_0(0) &= 0; \\
 \text{rev}_\nu(2k) &= \text{rev}_{\nu-1}(k), \\
 \text{rev}_\nu(2k+1) &= 2^{\nu-1} + \text{rev}_{\nu-1}(k), \\
 k \in 0 : 2^{\nu-1} - 1, \quad \nu &= 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Заменим в (9) вторую и третью строки одной строкой:

$$\begin{aligned}
 \text{rev}_\nu(2k + \sigma) &= \sigma 2^{\nu-1} + \text{rev}_{\nu-1}(k), \\
 \sigma \in 0 : 1, \quad k \in 0 : 2^{\nu-1} - 1, \quad \nu &= 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

При $\nu = 1$ формула (10) принимает известный вид $\text{rev}_1(\sigma) = \sigma$, $\sigma \in 0 : 1$. Пусть $\nu \geq 2$. Возьмем $k \in 0 : 2^{\nu-1} - 1$ и $\sigma \in 0 : 1$. Имеем

$$k = k_{\nu-2}2^{\nu-2} + \dots + k_1 2 + k_0, \quad 2k + \sigma = k_{\nu-2}2^{\nu-1} + \dots + k_0 2 + \sigma,$$

$$\text{rev}_\nu(2k + \sigma) = \sigma 2^{\nu-1} + k_0 2^{\nu-2} + \dots + k_{\nu-2} = \sigma 2^{\nu-1} + \text{rev}_{\nu-1}(k).$$

Теорема доказана. \square

Теорема 4 позволяет последовательно вычислять значения $\text{rev}_\nu(j)$ при $\nu = 1, 2, \dots$ сразу для всех $j \in \{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$. В табл. 3 представлены результаты вычислений $\text{rev}_1(j)$, $\text{rev}_2(j)$ и $\text{rev}_3(j)$. Переход от $(\nu - 1)$ -й к ν -й строке осуществлялся по формулам (9). При этом учитывалось, что

$$\text{rev}_\nu(2k + 1) = \text{rev}_\nu(2k) + 2^{\nu-1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{\nu-1} - 1.$$

Таблица 3. Последовательное вычисление перестановок rev_ν

ν	$\text{rev}_\nu(j)$ при $j = 0, 1, \dots, 2^\nu - 1$							
1	0	1						
2	0	2	1	3				
3	0	4	2	6	1	5	3	7

Обратимся к перестановке grey_ν . Она определяется рекуррентно:

$$\begin{aligned} \text{grey}_0(0) &= 0; \\ \text{grey}_\nu(k) &= \text{grey}_{\nu-1}(k), \\ \text{grey}_\nu(2^\nu - 1 - k) &= 2^{\nu-1} + \text{grey}_{\nu-1}(k), \\ k &\in 0 : 2^{\nu-1} - 1, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Проверим, что отображение $j \rightarrow \text{grey}_\nu(j)$ действительно является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$.

При $\nu = 1$ это очевидно, поскольку по определению $\text{greu}_1(j) = j$ при $j \in 0 : 1$. Предположим, что утверждение верно для $\text{greu}_{\nu-1}$. Согласно второй строчке из (11) функция $\text{greu}_\nu(j)$ отображает взаимно-однозначно множество $\{0, 1, \dots, 2^{\nu-1} - 1\}$ на себя. Третья строчка из (11) после замены аргумента $k' = 2^{\nu-1} - 1 - k$ принимает вид

$$\text{greu}_\nu(2^{\nu-1} + k') = 2^{\nu-1} + \text{greu}_{\nu-1}(2^{\nu-1} - 1 - k'), \quad (12)$$

$$k' \in 0 : 2^{\nu-1} - 1.$$

Отсюда следует, что функция $\text{greu}_\nu(j)$ отображает взаимно-однозначно на себя также множество $\{2^{\nu-1}, \dots, 2^\nu - 1\}$. Объединяя эти два факта, приходим к выводу о том, что функция $\text{greu}_\nu(j)$ отображает взаимно-однозначно на себя множество $\{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$. Другими словами, отображение $j \rightarrow \text{greu}_\nu(j)$ является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$.

Формулы (11) позволяют последовательно вычислять значения $\text{greu}_\nu(j)$ при $\nu = 1, 2, \dots$ сразу для всех $j \in \{0, 1, \dots, 2^\nu - 1\}$. В табл. 4 представлены результаты вычислений $\text{greu}_1(j)$, $\text{greu}_2(j)$ и $\text{greu}_3(j)$.

Таблица 4. Последовательное вычисление перестановок greu_ν

ν	$\text{greu}_\nu(j)$ при $j = 0, 1, \dots, 2^\nu - 1$							
1	0	1						
2	0	1	3	2				
3	0	1	3	2	6	7	5	4

Приведем характерное свойство перестановки greu_ν .

Теорема 5. При $\nu \geq 1$ двоичные коды двух соседних элементов $\text{greu}_\nu(k)$ и $\text{greu}_\nu(k+1)$, $k \in 0 : 2^\nu - 2$, различаются лишь в одном разряде.

Доказательство. При $\nu = 1$ утверждение очевидно, поскольку $\text{grey}_1(0) = (0)_2$, $\text{grey}_1(1) = (1)_2$. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν , $\nu \geq 2$.

Пусть $k \in 0 : 2^{\nu-1} - 1$ и $\text{grey}_{\nu-1}(k) = (p_{\nu-2}, \dots, p_0)_2$. Согласно (11)

$$\begin{aligned} \text{grey}_{\nu}(k) &= (0, p_{\nu-2}, \dots, p_0)_2, \\ \text{grey}_{\nu}(2^{\nu} - 1 - k) &= (1, p_{\nu-2}, \dots, p_0)_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Если $k \in 0 : 2^{\nu-1} - 2$ и $\text{grey}_{\nu-1}(k+1) = (q_{\nu-2}, \dots, q_0)_2$, то по индукционному предположению двоичные коды $(p_{\nu-2}, \dots, p_0)_2$ и $(q_{\nu-2}, \dots, q_0)_2$ различаются лишь в одном разряде. Поскольку $\text{grey}_{\nu}(k+1) = (0, q_{\nu-2}, \dots, q_0)_2$, то это же верно и для двоичных кодов чисел $\text{grey}_{\nu}(k)$ и $\text{grey}_{\nu}(k+1)$.

При $k = 2^{\nu-1} - 1$ имеем $k+1 = 2^{\nu} - 1 - k$, так что в данном случае двоичные коды чисел $\text{grey}_{\nu}(k)$ и $\text{grey}_{\nu}(k+1)$, как видно из (13), различаются только в старшем разряде.

Осталось рассмотреть индексы k из множества $2^{\nu-1} : 2^{\nu} - 2$. Положим $k' = 2^{\nu} - 1 - k$. Ясно, что $k' \in 1 : 2^{\nu-1} - 1$. Пусть

$$\begin{aligned} \text{grey}_{\nu-1}(k') &= (p'_{\nu-2}, \dots, p'_0)_2, \\ \text{grey}_{\nu-1}(k' - 1) &= (q'_{\nu-2}, \dots, q'_0)_2. \end{aligned}$$

По индукционному предположению двоичные коды $(p'_{\nu-2}, \dots, p'_0)_2$ и $(q'_{\nu-2}, \dots, q'_0)_2$ различаются лишь в одном разряде. Согласно (11)

$$\begin{aligned} \text{grey}_{\nu}(k) &= \text{grey}_{\nu}(2^{\nu} - 1 - k') = (1, p'_{\nu-2}, \dots, p'_0)_2, \\ \text{grey}_{\nu}(k+1) &= \text{grey}_{\nu}(2^{\nu} - 1 - (k' - 1)) = (1, q'_{\nu-2}, \dots, q'_0)_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что двоичные коды чисел $\text{grey}_{\nu}(k)$ и $\text{grey}_{\nu}(k+1)$ также различаются только в одном разряде. Теорема доказана. \square

5. Поразрядное сложение. Возьмем два числа $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$ и $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \dots, k_0)_2$ из множества $0 : 2^s - 1$. Операция поразрядного сложения \oplus сопоставляет числам j, k число $p = (p_{s-1}, p_{s-2}, \dots, p_0)_2$, у которого $p_\nu = \langle j_\nu + k_\nu \rangle_2$ при $\nu = 0, 1, \dots, s-1$. Таким образом,

$$p = j \oplus k \quad \Leftrightarrow \quad p_\nu = \langle j_\nu + k_\nu \rangle_2, \quad \nu = 0, 1, \dots, s-1.$$

Из определения следует, что

$$j \oplus j = 0 \quad \text{при всех } j \in 0 : 2^s - 1. \quad (14)$$

Операция поразрядного сложения коммутативна и ассоциативна, т. е. $j \oplus k = k \oplus j$ и

$$(j \oplus k) \oplus l = j \oplus (k \oplus l). \quad (15)$$

Проверим ассоциативность. При $\nu \in 0 : s-1$ имеем

$$\begin{aligned} \langle (j \oplus k)_\nu + l_\nu \rangle_2 &= \langle \langle j_\nu + k_\nu \rangle_2 + l_\nu \rangle_2 = \langle (j_\nu + k_\nu) + l_\nu \rangle_2 = \\ &= \langle j_\nu + (k_\nu + l_\nu) \rangle_2 = \langle j_\nu + \langle k_\nu + l_\nu \rangle_2 \rangle_2 = \langle j_\nu + (k \oplus l)_\nu \rangle_2, \end{aligned}$$

что соответствует (15).

Уравнение $x \oplus k = p$ при фиксированных k и p из $0 : 2^s - 1$ имеет единственное решение $x = p \oplus k$ на $0 : 2^s - 1$. Действительно, согласно (15) и (14)

$$(p \oplus k) \oplus k = p \oplus (k \oplus k) = p.$$

В силу отмеченных свойств поразрядного сложения можно утверждать, что отображение $j \rightarrow j \oplus k$ при фиксированном k является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, 2^s - 1\}$. В табл. 5 приведен пример такой перестановки при $s = 3$ и $k = 5 = (1, 0, 1)_2$.

Таблица 5. Перестановка $j \rightarrow j \oplus k$ при $s = 3$ и $k = 5 = (1, 0, 1)_2$

j	$(j_2, j_1, j_0)_2$	$j \oplus k$
0	$(0, 0, 0)_2$	5
1	$(0, 0, 1)_2$	4
2	$(0, 1, 0)_2$	7
3	$(0, 1, 1)_2$	6
4	$(1, 0, 0)_2$	1
5	$(1, 0, 1)_2$	0
6	$(1, 1, 0)_2$	3
7	$(1, 1, 1)_2$	2

6. Комплексные числа. Предполагается, что читатель знаком с арифметическими операциями над комплексными числами. Напомним некоторые обозначения:

$z = u + iv$ — комплексное число,

$u = \operatorname{Re} z$ — вещественная часть комплексного числа,

$v = \operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа,

$\bar{z} = u - iv$ — сопряженное комплексное число,

$|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$ — модуль комплексного числа.

Очевидно, что $|z|^2 = z\bar{z}$. Справедливы также формулы

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

$$|z_1 + iz_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2).$$

Проверим, например, вторую из них. Имеем

$$\begin{aligned} |z_1 + iz_2|^2 &= (z_1 + iz_2)(\bar{z}_1 - i\bar{z}_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2) = \end{aligned}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2).$$

Следующие две формулы хорошо известны: при натуральном n

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z_1^{n-k} z_2^k, \quad (16)$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k ; при $z \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Подставив в (16) $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ и $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, получим, в частности,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

Нам потребуется еще одна формула: при $z \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2} [1 - n z^{n-1} + (n-1) z^n]. \quad (17)$$

Докажем ее. Имеем

$$\begin{aligned} (1-z) \sum_{k=1}^{n-1} k z^k &= \sum_{k=1}^{n-1} k z^k - \sum_{k=2}^n (k-1) z^k = \\ &= z - (n-1) z^n + \sum_{k=2}^{n-1} z^k = \\ &= z - (n-1) z^n + z^2 \frac{1 - z^{n-2}}{1 - z} = \\ &= \frac{z}{1-z} [1 - n z^{n-1} + (n-1) z^n], \end{aligned}$$

что при $z \neq 1$ равносильно (17).

7. Корни из единицы. Пусть N — натуральное число, $N \geq 2$. Введем комплексное число

$$\omega_N = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N}.$$

По формуле Муавра при натуральном k

$$\omega_N^k = \cos \frac{2\pi k}{N} + i \sin \frac{2\pi k}{N}. \quad (18)$$

В частности, $\omega_N^N = 1$. Число ω_N называется *корнем N -й степени из единицы*.

Формула (18) верна при $k = 0$. Она верна и при целых отрицательных степенях ω_N . Действительно,

$$\begin{aligned} \omega_N^{-k} &= \frac{1}{\cos(2\pi k/N) + i \sin(2\pi k/N)} = \cos \frac{2\pi k}{N} - i \sin \frac{2\pi k}{N} = \\ &= \cos \frac{2\pi(-k)}{N} + i \sin \frac{2\pi(-k)}{N}. \end{aligned}$$

Значит, формула (18) справедлива при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что $\omega_N^{-1} = \overline{\omega_N}$ и $\omega_{nN}^n = \omega_N$ при натуральном n . Из (18) и свойств тригонометрических функций следует также, что при всех целых j и k

$$(\omega_N^k)^j = \omega_N^{kj}, \quad \omega_N^k \omega_N^j = \omega_N^{k+j}.$$

По формуле Эйлера $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Именно в таком компактном виде число ω_N появится в основном тексте.

8. Конечные разности. Возьмем комплекснозначную функцию целочисленного аргумента $f(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Конечные разности функции f определяются рекуррентно:

$$\begin{aligned} [\Delta(f)](j) &= [\Delta^1(f)](j) = f(j+1) - f(j), \\ [\Delta^r(f)](j) &= [\Delta(\Delta^{r-1}(f))](j) = \\ &= [\Delta^{r-1}(f)](j+1) - [\Delta^{r-1}(f)](j), \quad r = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Обычно вместо $[\Delta^r(f)](j)$ пишут $\Delta^r f(j)$.

Конечную разность r -го порядка $\Delta^r f(j)$ можно выразить непосредственно через значения функции $f(j)$. Справедлива формула

$$\Delta^r f(j) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_r^k f(j+k).$$

Она легко доказывается индукцией по r .

Очевидно, что для функции $f(j) \equiv \text{const}$ конечная разность любого порядка равна тождественно нулю.

Задачи

1. Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и N — натуральное число. Докажите, что

$$\left\lfloor -\frac{j}{N} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{j-1}{N} \right\rfloor - 1.$$

2. Докажите, что при $j \in \mathbb{Z}$ и натуральных n, N справедливо равенство

$$\langle nj \rangle_{nN} = n \langle j \rangle_N.$$

3. Пусть $f(j) = \langle jn \rangle_N$. Докажите, что при выполнении условия $\langle n^2 \rangle_N = 1$ справедливо равенство $f(f(j)) = j$ при $j \in 0 : N-1$.

4. Положим $f(j) = \langle jn+l \rangle_N$, где n и N — взаимно простые натуральные числа и $l \in \mathbb{Z}$. Докажите, что последовательность $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ является перестановкой чисел $0, 1, \dots, N-1$.

5. Найдите значения функции $f(j) = \langle jn \rangle_N$ при $j = 0, 1, \dots, N-1$ в случае, когда $\text{НОД}(n, N) = d$.

6. Докажите, что $\text{НОД}(j, k) = \text{НОД}(j-k, k)$.

7. Пусть n_1, n_2 — взаимно простые числа, $N = n_1 n_2$ и $j \in 0 : N - 1$. Докажите, что существуют единственные $j_1 \in 0 : n_1 - 1$, $j_2 \in 0 : n_2 - 1$, такие, что $j = \langle j_1 n_2 + j_2 n_1 \rangle_N$.
8. Предположим, что числа n_1, n_2, \dots, n_s взаимно просты с m . Докажите, что и произведение $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ взаимно просто с m .
9. Возьмем попарно взаимно простые числа n_1, n_2, \dots, n_s . Докажите, что если число $j \in \mathbb{Z}$ делится на каждое n_α , $\alpha \in 1 : s$, то j делится и на их произведение $N = n_1 n_2 \cdots n_s$.
10. Пусть n_1, n_2, \dots, n_s — попарно взаимно простые числа, отличные от единицы, и $N = n_1 n_2 \cdots n_s$. Обозначим $\hat{N}_\alpha = N/n_\alpha$. Докажите, что существуют целые числа b_1, b_2, \dots, b_s , такие, что

$$b_1 \hat{N}_1 + b_2 \hat{N}_2 + \cdots + b_s \hat{N}_s = 1.$$

11. Докажите, что в условиях предыдущей задачи любое число $j \in 0 : N - 1$ можно единственным образом представить в виде

$$j = \left\langle \sum_{\alpha=1}^s j_\alpha \hat{N}_\alpha \right\rangle_N,$$

где $j_\alpha \in 0 : n_\alpha - 1$. Найдите явное выражение для коэффициентов j_α .

12. Пусть выполнены условия задачи 10. При каждом $\alpha \in 1 : s$ существует единственное на множестве $0 : n_\alpha - 1$ решение уравнения $\langle x \hat{N}_\alpha \rangle_{n_\alpha} = 1$. Обозначим его p_α . Докажите, что любое число $k \in 0 : N - 1$

можно единственным образом представить в виде

$$k = \left\langle \sum_{\alpha=1}^s k_{\alpha} p_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} \right\rangle_N,$$

где $k_{\alpha} \in 0 : n_{\alpha} - 1$. Найдите явное выражение для коэффициентов k_{α} .

13. Пусть $j = (j_{\nu-1}, j_{\nu-2}, \dots, j_0)_2$. Докажите, что

$$\text{grey}_{\nu}(j) = j_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \sum_{k=2}^{\nu} \langle j_{\nu-k+1} + j_{\nu-k} \rangle_2 2^{\nu-k}.$$

14. Возьмем $p = (p_{\nu-1}, p_{\nu-2}, \dots, p_0)_2$. Докажите, что единственным решением уравнения $\text{grey}_{\nu}(j) = p$ является число $j = (j_{\nu-1}, j_{\nu-2}, \dots, j_0)_2$, у которого

$$j_{\nu-1} = p_{\nu-1},$$

$$j_{\nu-k} = \langle p_{\nu-1} + p_{\nu-2} + \dots + p_{\nu-k} \rangle_2, \quad k = 2, \dots, \nu.$$

15. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

16. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}.$$

17. Пусть n и N — взаимно простые натуральные числа. Положим $\varepsilon_n = \omega_N^n$, где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Докажите, что множества $\{\varepsilon_n^k\}_{k=0}^{N-1}$ и $\{\omega_N^j\}_{j=0}^{N-1}$ равны, т. е. состоят из одних и тех же элементов.

18. Докажите, что для взаимно простых m, n найдутся единственные числа $p \in 0 : m - 1$, $q \in 0 : n - 1$ со свойствами: $\text{НОД}(p, m) = 1$, $\text{НОД}(q, n) = 1$ и $\omega_{mn} = \omega_m^p \omega_n^q$.
19. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \prod_{j=1}^{N-1} (z - \omega_N^j).$$

20. Докажите, что конечная разность $(r + 1)$ -го порядка от алгебраического полинома r -й степени равна тождественно нулю.

Комментарий

Более полная информация по вопросам, затронутым в разделе «Предварительные сведения», имеется, например, в книге [41, гл. 1 и 2].

Глава 1

Преобразования сигналов

1. Пространство сигналов

1.1. Зафиксируем натуральное число N . *Сигналом* будем называть N -периодическую комплекснозначную функцию целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Множество сигналов обозначим через \mathbb{C}_N . В \mathbb{C}_N естественным образом вводятся две операции — операция сложения двух сигналов и операция умножения сигнала на комплексное число:

$$y = x_1 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad y(j) = x_1(j) + x_2(j), \quad j \in \mathbb{Z};$$

$$y = cx \quad \Leftrightarrow \quad y(j) = cx(j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В результате \mathbb{C}_N становится линейным комплексным пространством. Нулевым элементом в \mathbb{C}_N является сигнал \mathbb{O} , такой, что $\mathbb{O}(j) = 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

1.2. *Единичным N -периодическим импульсом* называется сигнал δ_N , у которого $\delta_N(j) = 1$, когда j делится на N , и $\delta_N(j) = 0$ при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\delta_N(-j) = \delta_N(j)$.

Лемма 1.1. Для $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо равенство

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta_N(j - k), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Доказательство. В обеих частях (1.1) стоят N -периодические функции, поэтому равенство достаточно проверить

при $j \in 0 : N-1$. Поскольку при $k, j \in 0 : N-1$ выполняются неравенства $-(N-1) \leq j-k \leq N-1$, то $\delta_N(j-k) = 0$ при $k \neq j$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta_N(j-k) = x(j) \delta_N(0) = x(j).$$

Лемма доказана. \square

Формула (1.1) дает аналитическое представление сигнала x по его значениям на основном периоде $J_N = 0 : N-1$.

Рассмотрим систему сдвигов единичного импульса

$$\delta_N(j), \delta_N(j-1), \dots, \delta_N(j-N+1). \quad (1.2)$$

Эта система линейно независима на \mathbb{Z} . Действительно, пусть

$$\sum_{k=0}^{N-1} c(k) \delta_N(j-k) = 0 \quad \text{при} \quad j \in 0 : N-1.$$

Как отмечалось, левая часть этого равенства равна $c(j)$, так что $c(j) = 0$ при всех $j \in 0 : N-1$.

Согласно лемме 1.1 любой сигнал x разлагается по линейно независимой системе (1.2). Значит, система (1.2) является базисом пространства \mathbb{C}_N . При этом размерность \mathbb{C}_N равна N .

1.3. Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 1.2. Для любого сигнала x при всех $l \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \quad (1.3)$$

Доказательство. Пусть $l = pN + r$, где $p = \lfloor l/N \rfloor$, $r = \langle l \rangle_N$. Воспользуемся N -периодичностью сигнала x и тем, что $r \in 0 : N - 1$. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j+r) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-r-1} x(j+r) + \sum_{j=N-r}^{N-1} x(j+r-N) = \\ &= \sum_{j'=r}^{N-1} x(j') + \sum_{j'=0}^{r-1} x(j') = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Следствие. В условиях леммы 1.2 справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(l-j) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \quad (1.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} x(l-j) &= x(l) + \sum_{j=1}^{N-1} x(l + (N-j)) = x(l) + \sum_{j'=1}^{N-1} x(l+j') = \\ &= \sum_{j'=0}^{N-1} x(j'+l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j). \end{aligned}$$

1.4. Введем в \mathbb{C}_N скалярное произведение и норму

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Два сигнала x, y называются *ортгоналичными*, если $\langle x, y \rangle = 0$. Сигнал x называется *нормированным*, если $\|x\| = 1$.

Сдвиг $x(j - k)$ сигнала $x(j)$ как элемент пространства \mathbb{C}_N будем обозначать $x(\cdot - k)$.

Лемма 1.3. *При всех $k, l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство*

$$\langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - l) \rangle = \delta_N(k - l).$$

Доказательство. Зафиксируем k и введем сигнал $x_k(j) = \delta_N(j - k)$. Напомним, что $\delta_N(j) = \delta_N(-j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Учитывая формулу (1.1), запишем

$$\begin{aligned} \langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - l) \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j - k) \delta_N(j - l) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x_k(j) \delta_N(l - j) = x_k(l) = \delta_N(l - k) = \delta_N(k - l). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Следствие. Система сигналов (1.2) является ортонормированной, т. е. образует ортонормированный базис в пространстве \mathbb{C}_N .

Лемма 1.4. *Для произвольных сигналов x, y выполняется неравенство Коши–Буняковского*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (1.5)$$

При $x \neq \mathbb{O}$ неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $y = cx$ при некотором $c \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если $x = \mathbb{O}$, то неравенство (1.5) выполняется как равенство. Предположим, что $x \neq \mathbb{O}$. Возьмем сигнал y и обозначим $c = \langle y, x \rangle / \langle x, x \rangle$. Для сигнала $z = y - cx$ имеем $\langle z, x \rangle = 0$. Учитывая, что $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, запишем

$$\|z\|^2 = \langle z, y - cx \rangle = \langle z, y \rangle = \langle y - cx, y \rangle =$$

$$= \|y\|^2 - c\langle x, y \rangle = \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 / \|x\|^2.$$

Приходим к равенству

$$\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 = \|x\|^2 \cdot \|z\|^2.$$

Из него следует как неравенство (1.5), так и условие обращения этого неравенства в равенство. Лемма доказана. \square

1.5. В линейном комплексном пространстве \mathbb{C}_N можно ввести операцию умножения сигналов:

$$y = x_1 x_2 \quad \Leftrightarrow \quad y(j) = x_1(j) x_2(j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае \mathbb{C}_N становится коммутативной алгеброй с единицей. Единицей является сигнал \mathbb{I} , у которого $\mathbb{I}(j) = 1$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

Обратный сигнал x^{-1} к сигналу x определяется из условия $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbb{I}$. Он существует тогда и только тогда, когда все значения $x(j)$ отличны от нуля. При этом $x^{-1}(j) = [x(j)]^{-1}$, $j \in \mathbb{Z}$.

1.6. Наряду с сигналом x будем рассматривать сигналы \bar{x} , $\operatorname{Re} x$, $\operatorname{Im} x$, $|x|$ со значениями $\bar{x}(j) = \overline{x(j)}$, $[\operatorname{Re} x](j) = \operatorname{Re} x(j)$, $[\operatorname{Im} x](j) = \operatorname{Im} x(j)$, $|x|(j) = |x(j)|$. Отметим, что $x\bar{x} = |x|^2$.

Сигнал x называется четным, если $x(-j) = \bar{x}(j)$, и нечетным, если $x(-j) = -\bar{x}(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Сигнал x называется вещественным, если $\operatorname{Im} x = \mathbb{O}$, и чисто мнимым, если $\operatorname{Re} x = \mathbb{O}$.

1.7. В дальнейшем нас будет интересовать пространство \mathbb{C}_N при $N \geq 2$. Однако и при $N = 1$ это пространство имеет смысл: \mathbb{C}_1 состоит из сигналов x , у которых $x(j) \equiv c$, где c — комплексное число. При этом $\delta_1 = \mathbb{I}$.

2. Дискретное преобразование Фурье

2.1. Возьмем корень N -й степени из единицы $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$.

Лемма 2.1. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} = \delta_N(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Доказательство. В левой части (2.1) стоит N -периодическая функция, что следует из соотношения

$$\omega_N^{k(j+lN)} = \omega_N^{kj} (\omega_N^N)^{kl} = \omega_N^{kj} \quad \text{при } l \in \mathbb{Z}.$$

N -периодическим является и единичный импульс $\delta_N(j)$. Поэтому равенство (2.1) достаточно проверить при $j \in 0 : N-1$.

При $j = 0$ оно тривиально. Пусть $j \in 1 : N-1$. Воспользуемся формулой для суммы членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1 - z^N}{1 - z} \quad \text{при } z \neq 1.$$

Положив $z = \omega_N^j$, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} = \frac{1 - \omega_N^{Nj}}{N(1 - \omega_N^j)} = 0 = \delta_N(j) \quad \text{при } j \in 1 : N-1.$$

Лемма доказана. \square

2.2. *Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)* — это отображение $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ со значениями

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Сигнал X называется *спектром Фурье* сигнала x или просто *спектром*, а величины $X(k)$ — *компонентами спектра*.

Теорема 2.1. *Справедлива формула обращения*

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Согласно (2.2) и (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_N^{-kl} \right) \omega_N^{kj} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{k(j-l)} \right\} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \delta_N(j-l) = x(j). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Формулу (2.3) коротко можно записать так: $x = \mathcal{F}_N^{-1}(X)$. Если теперь в правую часть вместо X подставить $\mathcal{F}_N(x)$, то получим $x = \mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(x))$, так что $\mathcal{F}_N^{-1}\mathcal{F}_N$ — тождественный оператор. Поскольку $X = \mathcal{F}_N(x) = \mathcal{F}_N(\mathcal{F}_N^{-1}(X))$, то и $\mathcal{F}_N\mathcal{F}_N^{-1}$ — тождественный оператор.

Отображение $\mathcal{F}_N^{-1}: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ называется обратным ДПФ.

2.3. Введем обозначение $u_k(j) = \omega_N^{kj}$. Тогда формула обращения для ДПФ примет вид

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) u_k(j). \quad (2.4)$$

Это значит, что сигнал $x(j)$ разлагается по системе сигналов

$$u_0(j), u_1(j), \dots, u_{N-1}(j). \quad (2.5)$$

Коэффициентами в этом разложении являются компоненты спектра.

Лемма 2.2. Система сигналов (2.5) ортогональна. При этом $\|u_k\|^2 = N$ при всех $k \in 0 : N - 1$.

Доказательство. Имеем при $k, l \in 0 : N - 1$

$$\langle u_k, u_l \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} u_k(j) \bar{u}_l(j) = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(k-l)j} = N \delta_N(k - l).$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. \square

Установлено, что система (2.5) образует ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N . Этот базис называется *экспоненциальным*.

Умножим обе части равенства (2.4) скалярно на u_l . Согласно лемме 2.2 получим $\langle x, u_l \rangle = X(l)$. Значит, коэффициенты в разложении (2.4) определяются однозначно.

Перепишем формулу (2.1) в виде

$$\delta_N(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k(j).$$

Имеем разложение единичного импульса по экспоненциальному базису, в котором все коэффициенты равны единице. В силу единственности разложения $\mathcal{F}_N(\delta_N) = \mathbb{1}$.

2.4. Приведем часто используемые свойства дискретного преобразования Фурье.

Теорема 2.2. Необходимым и достаточным условием вещественности сигнала x является четность его спектра X .

Доказательство. Необходимость. Пусть x — вещественный сигнал. Запишем

$$\bar{X}(-k) = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}(j) \omega_N^{-kj} = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} = X(k).$$

Отсюда следует, что $X(-k) = \bar{X}(k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Четность спектра X установлена.

Достаточность. На основании четности спектра X , теоремы 2.1 и следствия из леммы 1.2 (при $l = 0$) имеем

$$\begin{aligned}\bar{x}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(-(-k)) \omega_N^{(-k)j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(-k) \omega_N^{kj} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} = x(j).\end{aligned}$$

Значит, x — вещественный сигнал.

Теорема доказана. \square

Теорема 2.3. *Необходимым и достаточным условием четности сигнала x является вещественность его спектра X .*

Доказательство. **Необходимость.** В силу четности сигнала x и следствия из леммы 1.2 (при $l = 0$)

$$\begin{aligned}\bar{X}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}(-(-j)) \omega_N^{-k(-j)} = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}(-j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} = X(k).\end{aligned}$$

Достаточность. Имеем

$$\bar{x}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) \omega_N^{kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} = x(j).$$

Теорема доказана. \square

Как следствие из теорем 2.2 и 2.3 получаем такой результат: *критерием вещественности и четности сигнала x является вещественность и четность его спектра X .*

2.5. Рассмотрим два примера на вычисление ДПФ. Отметим, что сигналы из \mathbb{C}_N достаточно задавать на основном периоде $0 : N - 1$.

Пример 1. Пусть m — натуральное число, $2m \leq N$, и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : m-1 \text{ и } j \in N-m+1 : N-1; \\ 0 & \text{при } j \in m : N-m. \end{cases}$$

(При $m = 1$ сигнал $x(j)$ совпадает с $\delta_N(j)$.)

Покажем, что

$$X(k) = \begin{cases} 2m-1 & \text{при } k=0; \\ \frac{\sin((2m-1)k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Действительно, по определению ДПФ

$$X(k) = \sum_{j=0}^{m-1} \omega_N^{-kj} + \sum_{j=N-m+1}^{N-1} \omega_N^{k(N-j)} = \sum_{j=-(m-1)}^{m-1} \omega_N^{kj}.$$

В частности, $X(0) = 2m-1$. Далее, при $k \in 1 : N-1$ по формуле для суммы членов геометрической прогрессии имеем

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{\omega_N^{-k(m-1)} - \omega_N^{km}}{1 - \omega_N^k} \cdot \frac{1 - \omega_N^{-k}}{1 - \omega_N^{-k}} = \\ &= \frac{\omega_N^{-k(m-1)} - \omega_N^{km} - \omega_N^{-km} + \omega_N^{k(m-1)}}{2 - \omega_N^k - \omega_N^{-k}} = \\ &= \frac{\cos(2(m-1)k\pi/N) - \cos(2mk\pi/N)}{1 - \cos(2k\pi/N)} = \\ &= \frac{\sin((2m-1)k\pi/N) \sin(k\pi/N)}{\sin^2(k\pi/N)} = \frac{\sin((2m-1)k\pi/N)}{\sin(k\pi/N)}. \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть $N = 2n$ и

$$x(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ -1 & \text{при } j \in n : N-1. \end{cases}$$

Покажем, что

$$X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ 2(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}) & \text{при нечетных } k. \end{cases}$$

По определению ДПФ

$$X(k) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-kj} - \sum_{j=n}^{2n-1} \omega_N^{-k(j-n)-kn} = (1 - \omega_N^{-kn}) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-kj}.$$

Поскольку $\omega_2 = -1$, то $\omega_N^{-kn} = \omega_{2n}^{-kn} = \omega_2^{-k} = (-1)^k$, так что

$$X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ \frac{2(1 - \omega_N^{-kn})}{1 - \omega_N^{-k}} = \frac{4}{1 - \omega_N^{-k}} & \text{при нечетных } k. \end{cases}$$

Остается учесть, что в случае, когда k не делится на N (в частности, при нечетных k), справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \omega_N^{-k}} &= \frac{1}{(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}) + i \sin \frac{2\pi k}{N}} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi k}{N} (\sin \frac{\pi k}{N} + i \cos \frac{\pi k}{N})} = \frac{\sin \frac{\pi k}{N} - i \cos \frac{\pi k}{N}}{2 \sin \frac{\pi k}{N}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Равенство Парсеваля

3.1. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$. Тогда

$$\langle x, y \rangle = N^{-1} \langle X, Y \rangle. \quad (3.1)$$

Доказательство. Согласно (2.2) и (2.3) получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \bar{Y}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} \right) \bar{Y}(k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{Y}(k) \omega_N^{-kj} \right\} = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \bar{y}(j).$$

Теорема доказана. \square

Следствие. Справедливо равенство

$$\|x\|^2 = N^{-1} \|X\|^2. \quad (3.2)$$

Формула (3.2) называется *равенством Парсеваля*, а формула (3.1) — *обобщенным равенством Парсеваля*.

3.2. Равенство Парсеваля можно использовать для вычисления тригонометрических сумм в случае, когда удастся вывести явные формулы для компонент спектра сигнала. Вернемся к примеру 2 из предыдущего параграфа. Для рассмотренного в нем сигнала имеем

$$\|x\|^2 = N = 2n,$$

$$\|X\|^2 = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left| 1 - i \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right|^2 = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}}.$$

На основании (3.2) получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2n}} = n^2.$$

Разберем еще один пример. Пусть

$$x(j) = j, \quad j \in 0 : N-1.$$

Покажем, что

$$X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}N(N-1) & \text{при } k=0; \\ -\frac{1}{2}N(1-i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}) & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases} \quad (3.3)$$

По определению ДПФ имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} j \omega_N^{-kj}.$$

В частности, $X(0) = \frac{1}{2}N(N-1)$. Пусть $k \in 1 : N-1$. Запишем

$$\sum_{j=0}^{N-1} (j+1) \omega_N^{-kj} = X(k) + N\delta_N(k) = X(k).$$

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) \omega_N^{-kj} &= \omega_N^k \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) \omega_N^{-k(j+1)} = \\ &= \omega_N^k \sum_{j'=1}^N j' \omega_N^{-kj'} = \omega_N^k (X(k) + N). \end{aligned}$$

Приходим к уравнению $X(k) = \omega_N^k (X(k) + N)$, из которого в силу (2.6) следует, что

$$X(k) = \frac{N\omega_N^k}{1 - \omega_N^k} = -\frac{N}{1 - \omega_N^{-k}} = -\frac{1}{2}N \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N} \right),$$

$$k \in 1 : N-1.$$

Формула (3.3) установлена.

Вычислим квадраты норм сигнала x и его спектра X .
Имеем

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} j^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}$$

(см. задачу 15 из раздела «Предварительные сведения»),

$$\|X\|^2 = \frac{1}{4}N^2(N-1)^2 + \frac{1}{4}N^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}}.$$

На основании (3.2) получаем

$$\frac{(N-1)(2N-1)}{6} = \frac{1}{4}(N-1)^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}}.$$

После несложных преобразований приходим к замечательной формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}} = \frac{N^2 - 1}{3}.$$

4. Теорема об отсчетах

4.1. *Отсчетом* называется значение $x(j)$ сигнала x при конкретном значении переменной j . В приводимой ниже теореме показывается, что при некотором предположении сигнал x полностью восстанавливается по своим отсчетам на более крупной, чем \mathbb{Z} , сетке.

Пусть $N = mn$, где $n \geq 2$ и $m = 2\mu - 1$. Обозначим

$$h_m(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj}.$$

Теорема 4.1 (об отсчетах). *Если спектр X сигнала x равен нулю на множестве индексов $\mu : N - \mu$, то*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{m-1} x(ln) h_m(j - ln), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

Доказательство. По формуле обращения для ДПФ и условию теоремы имеем

$$x(j) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{\mu-1} X(k) \omega_N^{kj} + \sum_{k=N-\mu+1}^{N-1} X(-(N-k)) \omega_N^{-(N-k)j} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} X(k) \omega_N^{kj}. \quad (4.2)$$

Зафиксируем j и положим $y(k) = \omega_N^{kj}$, $k \in -\mu+1 : \mu-1$. Продолжив y периодически с периодом m на \mathbb{Z} , получим сигнал y , принадлежащий \mathbb{C}_m . Вычислим его ДПФ. Согласно лемме 1.2

$$\begin{aligned} Y(l) &= \sum_{k=0}^{m-1} y(k-\mu+1) \omega_m^{-(k-\mu+1)l} = \sum_{k'=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{k'j} \omega_m^{-k'l} = \\ &= \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{k(j-ln)} = m h_m(j-ln). \end{aligned}$$

По формуле обращения

$$y(k) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} Y(l) \omega_m^{lk} = \sum_{l=0}^{m-1} h_m(j-ln) \omega_m^{lk}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вспоминая определение сигнала y , получаем

$$\omega_N^{kj} = \sum_{l=0}^{m-1} h_m(j-ln) \omega_m^{lk}, \quad k \in -\mu+1 : \mu-1.$$

Остается подставить это выражение в (4.2). Придем к формуле

$$\begin{aligned} x(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} X(k) \sum_{l=0}^{m-1} h_m(j-ln) \omega_m^{lk} = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} h_m(j-ln) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} X(k) \omega_N^{k(ln)} \right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} h_m(j-ln) x(ln). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

При нечетном $m = 2\mu - 1$ ядро $h_m(j)$ допускает представление

$$h_m(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0; \\ \frac{\sin(\pi j/n)}{m \sin(\pi j/N)} & \text{при } j \in 1 : N - 1. \end{cases}$$

Равенство $h_m(0) = 1$ очевидно. Пусть $j \in 1 : N - 1$. Тогда, как показано в п. 2.5 при анализе примера 1,

$$\sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} = \frac{\sin(\pi j(2\mu - 1)/N)}{\sin(\pi j/N)}. \quad (4.3)$$

Остается учесть, что $2\mu - 1 = m$ и $N = mn$.

4.2. Теорема об отсчетах связана со следующей интерполяционной задачей: *построить сигнал $x \in \mathbb{C}_N$, удовлетворяющий условиям*

$$\begin{aligned} x(ln) &= z(l), \quad l \in 0 : m - 1, \\ X(k) &= 0, \quad k \in \mu : N - \mu, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $z(l)$ — заданные числа (вообще говоря, комплексные).

Теорема 4.2. *Единственным решением задачи (4.4) является сигнал*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{m-1} z(l) h_m(j - ln). \quad (4.5)$$

Доказательство. Условия (4.4) представляют собой систему из N линейных уравнений относительно N неизвестных $x(0), x(1), \dots, x(N - 1)$. Рассмотрим однородную систему

$$\begin{aligned} x(ln) &= 0, \quad l \in 0 : m - 1, \\ X(k) &= 0, \quad k \in \mu : N - \mu. \end{aligned}$$

Согласно теореме об отсчетах она имеет только нулевое решение. Значит, система (4.4) однозначно разрешима при любых $z(l)$.

Формула (4.5) следует из (4.1). \square

4.3. Интерполяционную формулу (4.5) можно обобщить на случай четного m . При $m = 2\mu$ положим

$$h_m(j) = \frac{1}{m} \left[\cos(\pi j/n) + \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} \right].$$

Теорема 4.3. *Сигнал*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{m-1} z(l) h_m(j - ln)$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$x(ln) = z(l), \quad l \in 0 : m-1.$$

Доказательство. Покажем, что $h_m(ln) = \delta_m(l)$.
Имеем

$$h_m(ln) = \frac{1}{m} \left[(-1)^l + \sum_{k=0}^{\mu-1} \omega_m^{kl} + \sum_{k=-\mu+1}^{-1} \omega_m^{(k+m)l} \right].$$

Во второй сумме заменим индекс, положив $k' = k + m$. При изменении k от $-\mu + 1$ до -1 индекс k' меняется от $-\mu + 1 + m = \mu + 1$ до $m - 1$, поэтому

$$\sum_{k=-\mu+1}^{-1} \omega_m^{(k+m)l} = \sum_{k'=\mu+1}^{m-1} \omega_m^{k'l}.$$

Слагаемое $(-1)^l$ приводится к виду $(-1)^l = \omega_m^{\mu l}$. В результате приходим к требуемой формуле

$$h_m(ln) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega_m^{kl} = \delta_m(l).$$

На основании леммы 1.1 при $l \in 0 : m - 1$ получаем

$$\begin{aligned} x(ln) &= \sum_{l'=0}^{m-1} z(l') h_m((l - l')n) = \\ &= \sum_{l'=0}^{m-1} z(l') \delta_m(l - l') = z(l). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

При четном $m = 2\mu$ ядро $h_m(j)$ допускает представление

$$h_m(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0; \\ m^{-1} \sin(\pi j/n) \operatorname{ctg}(\pi j/N) & \text{при } j \in 1 : N - 1. \end{cases}$$

Равенство $h_m(0) = 1$ очевидно. Пусть $j \in 1 : N - 1$. Тогда согласно (4.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\mu+1}^{\mu-1} \omega_N^{kj} &= \frac{\sin(\pi j(m-1)/N)}{\sin(\pi j/N)} = \\ &= \frac{\sin(\pi j/n) \cos(\pi j/N) - \cos(\pi j/n) \sin(\pi j/N)}{\sin(\pi j/N)} = \\ &= \sin(\pi j/n) \operatorname{ctg}(\pi j/N) - \cos(\pi j/n). \end{aligned}$$

Остальное следует из определения $h_m(j)$.

5. Циклическая свертка

5.1. *Циклической сверткой* сигналов x и y называется сигнал $u = x * y$ с отсчетами

$$u(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(j - k), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 5.1 (о свертке). Пусть $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$. Тогда

$$\mathcal{F}_N(x * y) = XY, \quad (5.1)$$

где справа стоит покомпонентное произведение спектров.

Доказательство. Согласно лемме 1.2 имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_N(x * y)](k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) y(j-l) \right) \omega_N^{-k(j-l)-kl} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_N^{-kl} \sum_{j=0}^{N-1} y(j-l) \omega_N^{-k(j-l)} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_N^{-kl} \sum_{j=0}^{N-1} y(j) \omega_N^{-kj} = X(k) Y(k), \end{aligned}$$

что соответствует (5.1). Теорема доказана. \square

Следствие. Справедлива формула

$$x * y = \mathcal{F}_N^{-1}(XY). \quad (5.2)$$

Теорема 5.2. Циклическая свертка коммутативна и ассоциативна.

Доказательство. То, что $x * y = y * x$, непосредственно следует из (5.2). Проверим ассоциативность. Возьмем три сигнала x_1, x_2, x_3 и обозначим через X_1, X_2, X_3 их спектры. Опираясь на (5.1) и (5.2), получаем

$$\begin{aligned} (x_1 * x_2) * x_3 &= \mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(x_1 * x_2) X_3) = \mathcal{F}_N^{-1}((X_1 X_2) X_3) = \\ &= \mathcal{F}_N^{-1}(X_1 (X_2 X_3)) = \mathcal{F}_N^{-1}(X_1 \mathcal{F}_N(x_2 * x_3)) = x_1 * (x_2 * x_3). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

5.2. Линейное комплексное пространство \mathbb{C}_N , в котором вместо покомпонентного умножения сигналов в качестве операции умножения используется циклическая свертка, образует еще одну коммутативную алгебру с единицей. Единицей является δ_N , поскольку по лемме 1.1

$$[x * \delta_N](j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta_N(j - k) = x(j).$$

Обратный элемент y к сигналу x определяется условием

$$x * y = \delta_N. \quad (5.3)$$

Он существует тогда и только тогда, когда все компоненты спектра X отличны от нуля. При этом $y = \mathcal{F}_N^{-1}(X^{-1})$, где $X^{-1}(k) = [X(k)]^{-1}$. Проверим это.

Применив к обеим частям (5.3) операцию \mathcal{F}_N , получим уравнение $XY = \mathbb{I}$ относительно Y , эквивалентное (5.3). Этот прием называется *переходом в спектральную область*. Последнее уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда все компоненты спектра X отличны от нуля. Решение записывается в явном виде $Y = X^{-1}$. По формуле обращения $y = \mathcal{F}_N^{-1}(X^{-1})$. Это и есть сигнал, обратный к x .

5.3. Преобразование $\mathcal{L}: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ называется *линейным*, если

$$\mathcal{L}(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \mathcal{L}(x_1) + c_2 \mathcal{L}(x_2)$$

для любых x_1, x_2 из \mathbb{C}_N и любых c_1, c_2 из \mathbb{C} . Простейшим примером линейного преобразования является оператор сдвига \mathcal{P} , сопоставляющий сигналу x сигнал $x' = \mathcal{P}(x)$ с отсчетами $x'(j) = x(j - 1)$.

Преобразование $\mathcal{L}: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ называется *стационарным*, если $\mathcal{L}(\mathcal{P}(x)) = \mathcal{P}(\mathcal{L}(x))$ для всех $x \in \mathbb{C}_N$. Из определения следует, что

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}^k(x)) = \mathcal{P}^k(\mathcal{L}(x)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь \mathcal{P}^0 — тождественный оператор.

Теорема 5.3. *Для того чтобы преобразование $\mathcal{L}: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ было линейным и стационарным, необходимо и достаточно, чтобы нашелся сигнал h , такой, что*

$$\mathcal{L}(x) = x * h \quad \text{при всех } x \in \mathbb{C}_N. \quad (5.4)$$

Доказательство. Необходимость. Учитывая, что $\mathcal{P}^k(x) = x(\cdot - k)$, перепишем формулу (1.1) в виде

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \mathcal{P}^k(\delta_N).$$

По условию оператор \mathcal{L} линейный и стационарный. Значит,

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \mathcal{L}(\mathcal{P}^k(\delta_N)) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \mathcal{P}^k(\mathcal{L}(\delta_N)).$$

Положив $h = \mathcal{L}(\delta_N)$, получим

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \mathcal{P}^k(h) = x * h.$$

Достаточность. Линейность сверточного оператора очевидна. Проверим стационарность. В силу коммутативности циклической свертки

$$\mathcal{L}(x) = h * x = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \mathcal{P}^k(x).$$

Теперь запишем

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \mathcal{P}^{k+1}(x) = \mathcal{L}(\mathcal{P}(x)).$$

Теорема доказана. \square

Установлено, что линейный стационарный оператор \mathcal{L} допускает представление (5.4), в котором $h = \mathcal{L}(\delta_N)$. Такой оператор называется также *фильтром*, а сигнал h — его *импульсной характеристикой*.

5.4. В качестве примера рассмотрим операцию взятия конечной разности r -го порядка:

$$[\Delta^r(x)](j) = \Delta^r x(j) = \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l x(j+l).$$

Покажем, что $\Delta^r(x) = x * h_r$, где

$$h_r(j) = \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l \delta_N(j+l). \quad (5.5)$$

Согласно (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \Delta^r x(j) &= \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta_N(j+l-k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l \delta_N((j-k)+l) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) h_r(j-k) = [x * h_r](j), \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Таким образом, оператор $\Delta^r: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ является фильтром с импульсной характеристикой h_r вида (5.5). Очевидно, что $h_r = \Delta^r(\delta_N)$.

5.5. Возьмем фильтр $\mathcal{L}(x) = x * h$ и обозначим $H = \mathcal{F}_N(h)$. Напомним, что $u_k(j) = \omega_N^{kj}$.

Теорема 5.4. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{L}(u_k) = H(k) u_k, \quad k \in 0 : N-1.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(u_k)](j) &= [h * u_k](j) = \sum_{l=0}^{N-1} h(l) u_k(j-l) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} h(l) \omega_N^{k(j-l)} = \omega_N^{kj} \sum_{l=0}^{N-1} h(l) \omega_N^{-kl} = H(k) u_k(j). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Теорема 5.4 утверждает, что экспоненциальные функции u_k образуют полный набор собственных функций любого фильтра $\mathcal{L}(x) = x * h$, при этом собственная функция u_k соответствует собственному значению $H(k) = [\mathcal{F}_N(h)](k)$, $k \in 0 : N-1$.

Сигнал H называется *частотной характеристикой* фильтра \mathcal{L} .

6. Циклическая корреляция

6.1. *Взаимной корреляцией* сигналов x и y называется сигнал R_{xy} с отсчетами

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \bar{y}(k-j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Положим $y_1(j) = \bar{y}(-j)$. Тогда

$$R_{xy} = x * y_1. \quad (6.1)$$

Теорема 6.1 (о корреляции). *Справедлива формула*

$$\mathcal{F}_N(R_{xy}) = X \bar{Y}, \quad (6.2)$$

где $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$.

Доказательство. В силу (6.1) и (5.1) $\mathcal{F}_N(R_{xy}) = XY_1$, где $Y_1 = \mathcal{F}_N(y_1)$. Остается проверить, что $Y_1 = \overline{Y}$. Согласно (1.4) имеем

$$\begin{aligned} Y_1(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} y_1(j) \omega_N^{-kj} = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y}(-j) \omega_N^{k(-j)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y}(j) \omega_N^{kj} = \overline{Y}(k). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Сигнал R_{xx} называется *автокорреляционной функцией* сигнала x . Согласно (6.2)

$$\mathcal{F}_N(R_{xx}) = X\overline{X} = |X|^2. \quad (6.3)$$

Отметим, что $|R_{xx}(j)| \leq R_{xx}(0)$ при $j \in 1 : N-1$. Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского (1.5) и леммы 1.2

$$\begin{aligned} |R_{xx}(j)| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \overline{x}(k-j) \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} |x(k-j)|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = R_{xx}(0). \end{aligned}$$

6.2. Ортонормированный базис $\{\delta_N(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ пространства \mathbb{C}_N состоит из сдвигов единичного импульса. Имеются ли еще сигналы, сдвиги которых образуют ортонормированный базис? На этот вопрос можно дать положительный ответ.

Лемма 6.1. *Сдвиги $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x образуют ортонормированный базис пространства \mathbb{C}_N тогда и только тогда, когда $R_{xx} = \delta_N$.*

Доказательство. Так как

$$R_{xx}(l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{x}(j-l) = \langle x, x(\cdot - l) \rangle,$$

то условие $R_{xx} = \delta_N$ равносильно следующему

$$\langle x, x(\cdot - l) \rangle = \delta_N(l), \quad l \in 0 : N-1. \quad (6.4)$$

Вместе с тем, при $k, k' \in 0 : N-1$

$$\begin{aligned} \langle x(\cdot - k), x(\cdot - k') \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j-k) \overline{x}((j-k) - (k' - k)) = \\ &= \sum_{j'=0}^{N-1} x(j') \overline{x}(j' - \langle k' - k \rangle_N) = \langle x, x(\cdot - \langle k' - k \rangle_N) \rangle. \end{aligned}$$

Условие ортонормированности $\langle x(\cdot - k), x(\cdot - k') \rangle = \delta_N(k' - k)$ принимает вид

$$\langle x, x(\cdot - \langle k' - k \rangle_N) \rangle = \delta_N(\langle k' - k \rangle_N), \quad k, k' \in 0 : N-1. \quad (6.5)$$

Эквивалентность соотношений (6.4) и (6.5) гарантирует справедливость заключения леммы. \square

Теорема 6.2. *Для того чтобы сдвиги $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала x образовывали ортонормированный базис пространства \mathbb{C}_N , необходимо и достаточно, чтобы $|X(k)| = 1$ при $k \in 0 : N-1$.*

Доказательство. Необходимость. Если $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ — ортонормированный базис, то по лемме 6.1 $R_{xx} = \delta_N$. Отсюда следует, что $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = \mathbb{I}$. В силу (6.3) $|X|^2 = \mathbb{I}$, так что $|X(k)| = 1$ при $k \in 0 : N-1$.

Достаточность. Пусть $|X| = \mathbb{I}$. Тогда согласно (6.3) $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = \mathbb{I}$. Это возможно только при $R_{xx} = \delta_N$. Остается сослаться на лемму 6.1. Теорема доказана. \square

6.3. Возьмем N комплексных чисел $Y(k)$, $k \in 0 : N - 1$, по модулю равных единице, и с помощью обратного преобразования Фурье построим сигнал $y = \mathcal{F}_N^{-1}(Y)$. По теореме 6.2 его сдвиги $\{y(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ образуют ортонормированный базис в пространстве \mathbb{C}_N . Разложим сигнал x по этому базису

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) y(\cdot - k) \quad (6.6)$$

и вычислим коэффициенты $c(k)$. Для этого умножим обе части (6.6) скалярно на $y(\cdot - l)$. Получим $\langle x, y(\cdot - l) \rangle = c(l)$ или

$$c(l) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j - l)} = R_{xy}(l).$$

Приходим к формуле

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} R_{xy}(k) y(\cdot - k).$$

7. Оптимальная интерполяция

7.1. Пусть $N = mn$, где $n \geq 2$, и r — натуральное число. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \|\Delta^r(x)\|^2 \rightarrow \min, \\ x(l) &= z(l), \quad l \in 0 : m - 1; \quad x \in \mathbb{C}_N. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В ней требуется построить возможно более гладкий сигнал, принимающий в узлах ln заданные значения $z(l)$. Гладкость характеризуется квадратом нормы конечной разности r -го порядка. Чаще всего $r = 2$.

Сделаем замену переменных

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj}, \quad k \in 0 : N - 1,$$

и перепишем задачу (7.1) в новых переменных $X(k)$. Начнем с целевой функции. Как отмечалось в п. 5.4, $\Delta^r(x) = x * h_r$, где h_r определяется формулой (5.5), $h_r = \Delta^r(\delta_N)$. Пользуясь равенством Парсеваля (3.2) и теоремой 5.1 о свертке, получаем

$$\begin{aligned}\|\Delta^r(x)\|^2 &= \|x * h_r\|^2 = N^{-1} \|\mathcal{F}_N(x * h_r)\|^2 = \\ &= N^{-1} \|X H_r\|^2 = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k) H_r(k)|^2.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}H_r(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} h_r(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j+l) \omega_N^{-k(j+l)+kl} = \\ &= \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l \omega_N^{kl} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{l=0}^r (-1)^{r-l} C_r^l \omega_N^{kl} = (\omega_N^k - 1)^r.\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\alpha_k &:= |\omega_N^k - 1|^2 = \left(\cos \frac{2\pi k}{N} - 1 \right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi k}{N} = \\ &= 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right) = 4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}.\end{aligned}$$

Тогда $|H_r(k)|^2 = \alpha_k^r$ и

$$\|\Delta^r(x)\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^r |X(k)|^2. \quad (7.2)$$

Обратимся к ограничениям. Имеем

$$\begin{aligned} x(ln) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kln} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} X(qm+p) \omega_m^{(qm+p)l} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X(p+qm) \right] \omega_m^{pl}. \end{aligned}$$

Ограничения задачи (7.1) принимают вид

$$\frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X(p+qm) \right] \omega_m^{pl} = z(l), \quad l \in 0 : m-1.$$

Последняя формула представляет собой разложение сигнала $z \in \mathbb{C}_m$ по экспоненциальному базису. Она равносильна тому, что

$$\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X(p+qm) = Z(p), \quad p \in 0 : m-1, \quad (7.3)$$

где $Z = \mathcal{F}_m(z)$. На основании (7.2) и (7.3) приходим к эквивалентной постановке задачи (7.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^r |X(k)|^2 &\rightarrow \min, \\ \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X(p+qm) &= Z(p), \quad p \in 0 : m-1. \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.2. Задача (7.4) распадается на m независимых подзадач, соответствующих разным $p \in 0 : m-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^r |X(p+qm)|^2 &\rightarrow \min, \\ \sum_{q=0}^{n-1} X(p+qm) &= nZ(p). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Поскольку $\alpha_0 = 0$, то при $p = 0$ получаем такую задачу

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{n-1} \alpha_{qm}^r |X(qm)|^2 &\rightarrow \min, \\ \sum_{q=0}^{n-1} X(qm) &= nZ(0). \end{aligned}$$

Ее решение очевидно

$$X_*(0) = nZ(0), \quad X_*(m) = X_*(2m) = \dots = X_*((n-1)m) = 0. \quad (7.6)$$

При этом минимальное значение целевой функции равно нулю.

Пусть $p \in 1 : m-1$. В этом случае все коэффициенты α_{p+qm} , $q \in 0 : n-1$, положительны. Согласно неравенству Коши–Буняковского (1.5) имеем

$$\begin{aligned} |nZ(p)|^2 &= \left| \sum_{q=0}^{n-1} (\alpha_{p+qm}^{r/2} X(p+qm)) \alpha_{p+qm}^{-r/2} \right|^2 \leq \\ &\leq \left(\sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^r |X(p+qm)|^2 \right) \left(\sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^{-r} \right). \quad (7.7) \end{aligned}$$

Обозначив $\lambda_p = n \left(\sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^{-r} \right)^{-1}$, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^r |X(p+qm)|^2 \geq \frac{1}{m} \lambda_p |Z(p)|^2.$$

Неравенство (7.7) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\alpha_{p+qm}^{r/2} X(p+qm) = c_p \alpha_{p+qm}^{-r/2},$$

или $X(p+qm) = c_p \alpha_{p+qm}^{-r}$ при некотором $c_p \in \mathbb{C}$ для всех $q \in 0 : n-1$. Поскольку переменные $X(p+qm)$ должны

удовлетворять ограничениям задачи (7.5), то необходимо

$$c_p \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^{-r} = nZ(p).$$

Значит, $c_p = \lambda_p Z(p)$.

Установлено, что при каждом $p \in 1 : m - 1$ единственным решением задачи (7.5) является последовательность

$$X_*(p + qm) = \lambda_p Z(p) \alpha_{p+qm}^{-r}, \quad q \in 0 : n - 1. \quad (7.8)$$

При этом минимальное значение целевой функции равно $m^{-1} \lambda_p |Z(p)|^2$. Отметим, что λ_p есть среднее гармоническое чисел

$$\alpha_p^r, \alpha_{p+m}^r, \dots, \alpha_{p+(n-1)m}^r.$$

Формулы (7.6) и (7.8) определяют X_* на всем основном периоде $0 : N - 1$. По формуле обращения находим единственное решение задачи (7.1):

$$x_*(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_*(k) \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (7.9)$$

Минимальное значение целевой функции задачи (7.1) складывается из минимальных значений целевых функций задач (7.5) при $p = 0, 1, \dots, m - 1$, так что

$$f(x_*) = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \lambda_p |Z(p)|^2.$$

7.3. Преобразуем формулу (7.9) к более удобному для вычислений виду. Индексы $k, j \in 0 : N - 1$ представим в виде $k = p + qm$, $j = s + ln$, где $p, l \in 0 : m - 1$ и $q, s \in 0 : n - 1$. Согласно (7.6) и (7.8) запишем

$$x_*(s + ln) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} X_*(p + qm) \omega_N^{(p+qm)(s+ln)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X_*(p+qm) \omega_n^{qs} \right) \omega_N^{ps} \right] \omega_m^{pl} = \\
&= \frac{1}{m} Z(0) + \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m-1} \left[\lambda_p Z(p) \left(\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^{-r} \omega_n^{qs} \right) \omega_N^{ps} \right] \omega_m^{pl}.
\end{aligned}$$

Приходим к следующей схеме решения задачи (7.1):

- 1) формируем два массива констант, зависящих только от m , n и r : одномерный

$$\lambda_p = n \left(\sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^{-r} \right)^{-1}, \quad p \in 1 : m-1,$$

и (по столбцам) двумерный

$$D[s, p] = \left(\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{p+qm}^{-r} \omega_n^{qs} \right) \omega_N^{ps},$$

$$s \in 1 : n-1, \quad p \in 1 : m-1;$$

- 2) вычисляем $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и $\tilde{Z}(p) = \lambda_p Z(p)$ при $p \in 1 : m-1$;
- 3) вводим двумерный массив B со столбцами

$$B[s, 0] = Z(0), \quad s \in 1 : n-1,$$

$$B[s, p] = \tilde{Z}(p) D[s, p], \quad s \in 1 : n-1, \quad p \in 1 : m-1;$$

- 4) применяя обратное ДПФ порядка m ко всем $n-1$ строкам матрицы B , получаем решение задачи (7.1):

$$x_*(ln) = z(l), \quad l \in 0 : m-1,$$

$$x_*(s+ln) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} B[s, p] \omega_m^{pl}, \quad l \in 0 : m-1, \quad s \in 1 : n-1.$$

8. Оптимальные пары сигнал–фильтр

8.1. Займемся более детальным анализом линейных стационарных операторов (фильтров).

Фильтр \mathcal{L} с импульсной характеристикой h называется *согласованным* с сигналом x , если

$$\mathcal{L}(x) := x * h = R_{xx}. \quad (8.1)$$

Согласованный фильтр существует. Например, можно положить $h(j) = \overline{x}(-j)$, $j \in \mathbb{Z}$. В этом случае

$$[x * h](j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \overline{x}(k-j) = R_{xx}(j).$$

Выясним вопрос о единственности согласованного фильтра.

Теорема 8.1. Пусть $x \in \mathbb{C}_N$ — сигнал, у которого все компоненты спектра отличны от нуля. Тогда импульсная характеристика h согласованного с сигналом x фильтра определяется единственным образом.

Доказательство. Возьмем сигнал h , удовлетворяющий условию (8.1). Обозначим через X и H спектры сигналов x и h соответственно. По теореме о свертке и формуле (6.3) $XH = \mathcal{F}_N(R_{xx}) = X\overline{X}$. Поскольку $X(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $H = \overline{X}$, так что по формуле обращения для ДПФ

$$h(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(k) \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Теперь имеем

$$\overline{h}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} = x(j),$$

откуда следует, что $h(j) = \overline{x}(-j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана. \square

Если у спектра X сигнала x есть нулевые компоненты, то согласованный фильтр неединствен. Положим

$$H(k) = \begin{cases} \overline{X}(k), & \text{если } X(k) \neq 0, \\ c_k, & \text{если } X(k) = 0, \end{cases} \quad (8.2)$$

где c_k — произвольные комплексные числа. Формула обращения

$$h(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

дает аналитическое представление импульсных характеристик всех согласованных с сигналом x фильтров. Действительно, сигналы H вида (8.2), и только они, удовлетворяют условию $X(H - \overline{X}) = 0$, которое равносильно тому, что $XH = \mathcal{F}_N(R_{xx})$. Применив к обеим частям последнего равенства оператор \mathcal{F}_N^{-1} , получим $x * h = R_{xx}$.

8.2. Обозначим через $\tilde{R}_{xx} = (R_{xx}(0))^{-1} R_{xx}$ нормированную автокорреляционную функцию ненулевого сигнала x . Если

$$\tilde{R}_{xx} = \delta_N, \quad (8.3)$$

то сигнал x называется *дельта-коррелированным*. Поскольку $\tilde{R}_{xx}(0) = 1$, то равенство $\tilde{R}_{xx}(0) = \delta_N(0)$ выполняется автоматически. Таким образом, условие (8.3) равносильно тому, что $R_{xx}(j) = 0$ при $j = 1, \dots, N-1$.

Нетрудно описать все множество дельта-коррелированных сигналов. Для этого переведем равенство (8.3) в спектральную область. Учитывая, что $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = |X|^2$ и $\mathcal{F}_N(\delta_N) = \mathbb{I}$, получаем $(R_{xx}(0))^{-1} |X|^2 = \mathbb{I}$. Значит, $|X(k)| = \sqrt{R_{xx}(0)}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Приходим к следующему заключению.

Теорема 8.2. *Для того чтобы ненулевой сигнал x был дельта-коррелированным, необходимо и достаточно, чтобы*

он допускал представление

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где c_k — ненулевые комплексные коэффициенты, по модулю равные между собой.

В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $|c(k)| \equiv \sqrt{A} > 0$. Поскольку $c(k) = X(k)$, то $|X(k)| \equiv \sqrt{A}$. В силу равенства Парсеваля (3.2)

$$R_{xx}(0) = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2 = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = A, \quad (8.4)$$

так что $|X(k)| \equiv \sqrt{R_{xx}(0)}$. Последнее тождество эквивалентно (8.3).

8.3. Величина

$$E(x) = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2$$

называется *энергией* сигнала x . Согласно (8.4), $E(x) = R_{xx}(0)$ и

$$E(x) = N^{-1} E(X), \quad (8.5)$$

где $X = \mathcal{F}_N(x)$.

Ненулевому сигналу x сопоставим *фильтр подавления боковых лепестков* (ФПБЛ). Его импульсная характеристика h определяется из условия

$$x * h = E(x) \delta_N. \quad (8.6)$$

Сигнал вместе со своим ФПБЛ образуют *пару сигнал-фильтр*.

Переведем равенство (8.6) в спектральную область: $XH = E(x)\mathbb{I}$. Видим, что ФПБЛ существует тогда и только тогда, когда все компоненты спектра X сигнала x отличны от нуля. При этом $H = E(x)X^{-1}$ и

$$h(j) = N^{-1}E(x) \sum_{k=0}^{N-1} [X(k)]^{-1} \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

8.4. Рассмотрим экстремальную задачу: среди сигналов с заданной энергией найти такие, у которых импульсная характеристика ФПБЛ имеет наименьшую энергию. Эту задачу можно формализовать следующим образом:

(Р) Минимизировать $[E(x)]^{-1}E(h)$ при ограничениях

$$x * h = E(x)\delta_N; \quad E(x) = A; \quad x, h \in \mathbb{C}_N.$$

Здесь A — фиксированное положительное число. Перепишем задачу (Р) в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \gamma &:= A^{-1}E(h) \rightarrow \min, \\ x * h &= A\delta_N; \quad E(x) = A; \quad x, h \in \mathbb{C}_N. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Решение этой задачи (x_*, h_*) называется *оптимальной парой сигнал-фильтр*.

Теорема 8.3. Минимальное значение γ в задаче (8.7) равно единице. Оно достигается на любом дельта-коррелированном сигнале x_* с $E(x_*) = A$. При этом оптимальным ФПБЛ является согласованный фильтр.

Доказательство. Переведем задачу (8.7) в спектральную область. Согласно (8.5) получим

$$\begin{aligned} \gamma &:= (AN)^{-1}E(H) \rightarrow \min, \\ XH &= A\mathbb{I}, \quad (AN)^{-1}E(X) = 1. \end{aligned}$$

Спектр H можно исключить. Учитывая, что $H = AX^{-1}$, запишем

$$\gamma := \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^{-2} \rightarrow \min,$$

$$\frac{1}{AN} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = 1.$$

Обозначим $a_k = |X(k)|^2$. В силу классического неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим имеем

$$\frac{1}{A} \frac{N}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k^{-1}} \leq \frac{1}{A} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k}{N} = 1. \quad (8.8)$$

В левой части неравенства (8.8) стоит величина γ^{-1} , и она не превосходит единицы. Значит, γ не меньше единицы. Равенство единице достигается только тогда, когда все a_k равны между собой. Поскольку $\sum_{k=0}^{N-1} a_k = AN$, то $a_k \equiv A$, так что $|X(k)| \equiv \sqrt{A}$. Принимая во внимание теорему 8.2, приходим к следующему выводу: выполняется неравенство $\gamma \geq 1$; равенство $\gamma = 1$ достигается на всех дельта-коррелированных сигналах x_* с $E(x_*) = A$ и только на них.

Что касается оптимальных ФПБЛ для указанных сигналов x_* , то таковыми необходимо являются согласованные фильтры. Действительно, в силу дельта-коррелированности

$$R_{x_*x_*} = R_{x_*x_*}(0) \delta_N = E(x_*) \delta_N.$$

С другой стороны, по условию задачи (Р) $x_* * h_* = E(x_*) \delta_N$. Следовательно, $x_* * h_* = R_{x_*x_*}$, что в соответствии с (8.1) и означает, что h_* есть импульсная характеристика согласованного с x_* фильтра. Теорема доказана. \square

9. Ансамбли сигналов

9.1. Конечное множество сигналов x из \mathbb{C}_N с одинаковой энергией будем называть *ансамблем сигналов* и обозначать \mathcal{Q} . Для определенности будем считать, что

$$E(x) = A \text{ для всех } x \in \mathcal{Q}. \quad (9.1)$$

Введем две характеристики ансамбля сигналов:

$$R_a = \max_{x \in \mathcal{Q}} \max_{j \in 1:N-1} |R_{xx}(j)|,$$

$$R_c = \max_{\substack{x, y \in \mathcal{Q} \\ x \neq y}} \max_{j \in 0:N-1} |R_{xy}(j)|.$$

Отметим, что если $R_a = 0$, то все сигналы из \mathcal{Q} являются дельта-коррелированными (см. п. 8.2).

Теорема 9.1. Пусть \mathcal{Q} — ансамбль, состоящий из m сигналов, и выполнено условие (9.1). Тогда

$$N \left(\frac{R_c}{A} \right)^2 + \frac{N-1}{m-1} \left(\frac{R_a}{A} \right)^2 \geq 1. \quad (9.2)$$

Существенную роль при доказательстве этой теоремы будет играть следующее утверждение.

Лемма 9.1. Для произвольных сигналов x, y из \mathbb{C}_N справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} |R_{xy}(j)|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j) \overline{R_{yy}(j)}. \quad (9.3)$$

Доказательство. На основании (3.2) и (6.2) запишем

$$\sum_{j=0}^{N-1} |R_{xy}(j)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |[\mathcal{F}_N(R_{xy})](k)|^2 =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k) \bar{Y}(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 |Y(k)|^2.$$

Вместе с тем, согласно (2.6) и (6.3)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j) \overline{R_{yy}(j)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathcal{F}_N(R_{xx})](k) [\overline{\mathcal{F}_N(R_{yy})}](k) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 |Y(k)|^2. \end{aligned}$$

Правые части в данных соотношениях равны, значит, равны и левые. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы. В силу (9.3)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{x \in \mathcal{Q}} R_{xx}(j) \right|^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{x \in \mathcal{Q}} R_{xx}(j) \right) \left(\sum_{y \in \mathcal{Q}} \overline{R_{yy}(j)} \right) = \\ &= \sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{y \in \mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j) \overline{R_{yy}(j)} = \sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{y \in \mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} |R_{xy}(j)|^2 = \\ &= \sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{y \in \mathcal{Q} \\ y \neq x}} \sum_{j=0}^{N-1} |R_{xy}(j)|^2 + \sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} |R_{xx}(j)|^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Оценим левую и правую части этого равенства. Поскольку $R_{xx}(0) = E(x) = A$ для всех $x \in \mathcal{Q}$, то

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{x \in \mathcal{Q}} R_{xx}(j) \right|^2 \geq \left| \sum_{x \in \mathcal{Q}} R_{xx}(0) \right|^2 = m^2 A^2.$$

Далее, по определению R_c и R_a

$$\sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{\substack{y \in \mathcal{Q} \\ y \neq x}} \sum_{j=0}^{N-1} |R_{xy}(j)|^2 \leq R_c^2 N (m-1) m,$$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{N-1} |R_{xx}(j)|^2 &= \sum_{x \in \mathcal{Q}} \sum_{j=1}^{N-1} |R_{xx}(j)|^2 + \sum_{x \in \mathcal{Q}} |R_{xx}(0)|^2 \leq \\ &\leq R_a^2 (N-1) m + m A^2. \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, приходим к неравенству

$$m(m-1)A^2 \leq m(m-1)NR_c^2 + m(N-1)R_a^2.$$

Отсюда очевидным образом следует (9.2). Теорема доказана. \square

Неравенство (9.2) называется *неравенством Сидельникова–Сарватте*. Оно, в частности, показывает, что величины R_a и R_c не могут быть одновременно сколь угодно малыми. Мы рассмотрим два крайних случая, когда одна из этих величин равна нулю, а другая принимает наименьшее возможное значение.

9.2. Два сигнала x, y из \mathbb{C}_N называются *некоррелированными*, если $R_{xy}(k) \equiv 0$. Поскольку

$$\overline{R_{yx}}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y(j)} x(j-k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j+k)} = R_{xy}(-k),$$

то одновременно с тождеством $R_{xy}(k) \equiv 0$ выполняется тождество $R_{yx}(k) \equiv 0$.

Перепишем условия $R_{xy} = \mathbb{O}$, $R_{yx} = \mathbb{O}$ в эквивалентном виде

$$\langle x, y(\cdot - k) \rangle = 0, \quad \langle y, x(\cdot - k) \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приходим к следующему выводу: некоррелированность сигналов x, y определяется тем, что сигнал x ортогонален всем сдвигам сигнала y и сигнал y ортогонален всем сдвигам сигнала x .

Пусть \mathcal{Q}_c — ансамбль, состоящий из попарно некоррелированных сигналов. В этом случае $R_c = 0$. Более того, для таких ансамблей равенство (9.4) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{x \in \mathcal{Q}_c} R_{xx}(j) \right|^2 = \sum_{x \in \mathcal{Q}_c} \sum_{j=0}^{N-1} |R_{xx}(j)|^2. \quad (9.5)$$

Так как некоррелированные сигналы, по крайней мере, ортогональны, то количество сигналов в \mathcal{Q}_c не превосходит N . Покажем, что в пространстве \mathbb{C}_N существуют ансамбли, содержащие ровно N попарно некоррелированных сигналов.

Положим $\mathcal{Q}_c = \{u_p\}_{p=0}^{N-1}$, где $u_p(j) = \omega_N^{pj}$. Это ансамбль сигналов с $A = N$, поскольку $E(u_p) = N$ при всех $p \in 0 : N-1$. Далее,

$$\begin{aligned} R_{u_p u_{p'}}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} u_p(j) \overline{u_{p'}(j-k)} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j(p-p') + p'k} = \\ &= N \omega_N^{p'k} \delta_N(p-p'). \end{aligned}$$

Очевидно, что $R_{u_p u_{p'}}(k) \equiv 0$ при $p \neq p'$, $p, p' \in 0 : N-1$, т. е. ансамбль \mathcal{Q}_c состоит из N попарно некоррелированных сигналов. Отметим также, что $R_{u_p u_p}(k) = N u_p(k)$. В частности, $|R_{u_p u_p}(k)| \equiv N$ при всех $p \in 0 : N-1$. Последнее тождество имеет общий характер. А именно, справедлива

Теорема 9.2. *Если ансамбль \mathcal{Q}_c состоит из N попарно некоррелированных сигналов и $E(x) = A$ при всех $x \in \mathcal{Q}_c$, то необходимо*

$$|R_{xx}(k)| \equiv A \text{ при всех } x \in \mathcal{Q}_c. \quad (9.6)$$

Доказательство. Согласно (9.5)

$$\sum_{x \in \mathcal{Q}_c} \sum_{k=0}^{N-1} |R_{xx}(k)|^2 \geq \left| \sum_{x \in \mathcal{Q}_c} R_{xx}(0) \right|^2 = N^2 A^2. \quad (9.7)$$

Как отмечалось в п. 6.1, $|R_{xx}(k)| \leq R_{xx}(0) = A$. Допустим, что при некоторых $x \in \mathcal{Q}_c$ и $k \in 1 : N-1$ будет $|R_{xx}(k)| < A$. Тогда

$$\sum_{x \in \mathcal{Q}_c} \sum_{k=0}^{N-1} |R_{xx}(k)|^2 < N^2 A^2.$$

Но это противоречит (9.7). Теорема доказана. \square

Следствие. Для любого ансамбля, состоящего из N парно некоррелированных сигналов, неравенство (9.2) выполняется как равенство.

Действительно, нужно учесть, что в данном случае $m = N$, $R_c = 0$ и, по теореме 9.2, $R_a = A$.

9.3. Обратимся теперь к ансамблям \mathcal{Q}_a , состоящим из дельта-коррелированных сигналов. Для таких ансамблей $R_a = 0$, так что неравенство (9.2) принимает вид $R_c \geq A/\sqrt{N}$. Эта оценка не зависит от количества сигналов в ансамбле. Она, в частности, обращается в равенство, если

$$|R_{xy}(j)| \equiv A/\sqrt{N} \text{ при всех } x, y \in \mathcal{Q}_a, x \neq y. \quad (9.8)$$

Приведем пример ансамбля, в котором выполняется условие (9.8).

Рассмотрим двухпараметрическое семейство сигналов вида

$$a_{kp}(j) = \omega_N^{k(j^2+pj)}, \quad k, p \in 0 : N-1, \text{ НОД}(k, N) = 1. \quad (9.9)$$

Лемма 9.2. При нечетном N сигналы a_{kp} являются дельта-коррелированными.

Доказательство. Обозначим для простоты $x = a_{kp}$. Имеем

$$R_{xx}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \bar{x}(l-j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l+j) \bar{x}(l) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{k(l^2+2lj+j^2+pl+pj)-k(l^2+pl)} = \omega_N^{k(j^2+pj)} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{2klj} = \\
&= Nx(j) \delta_N(2kj). \tag{9.10}
\end{aligned}$$

Покажем, что в данном случае

$$\delta_N(2kj) = \delta_N(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{9.11}$$

Перепишем (9.11) в равносильном виде

$$\delta_N(\langle 2kj \rangle_N) = \delta_N(j), \quad j \in 0 : N-1. \tag{9.12}$$

Число N взаимно просто с k (по условию) и взаимно просто с 2 (в силу нечетности), поэтому N взаимно просто с произведением $2k$. Поскольку $\text{НОД}(2k, N) = 1$, то отображение $j \rightarrow \langle 2kj \rangle_N$ является перестановкой множества $0 : N-1$, переводящей ноль в ноль. Это, вместе с определением единичного импульса δ_N , гарантирует справедливость равенства (9.12), а следовательно, и (9.11).

На основании (9.10) и (9.11) получаем

$$R_{xx}(j) = Nx(j)\delta_N(j) = Nx(0)\delta_N(j) = N\delta_N(j).$$

Лемма доказана. \square

Пусть N — нечетное число. Возьмем два сигнала вида (9.9)

$$x(j) = \omega_N^{k(j^2+pj)}, \quad y(j) = \omega_N^{s(j^2+pj)}.$$

Будем считать для определенности, что $k > s$.

Теорема 9.3. *При выполнении условия $\text{НОД}(k-s, N) = 1$ справедливо тождество*

$$|R_{xy}(j)| \equiv \sqrt{N}. \tag{9.13}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 |R_{xy}(j)|^2 &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l+j) \overline{y}(l) \sum_{q=0}^{N-1} \overline{x}(q+j) y(q) = \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \omega_N^{k(l^2+2lj+j^2+pl+pj)-s(l^2+pl)} \times \\
 &\quad \times \omega_N^{-k(q^2+2qj+j^2+pq+pj)+s(q^2+pq)}.
 \end{aligned}$$

Степень приводится к виду

$$\begin{aligned}
 k(l-q)(l+q+2j+p) - s(l-q)(l+q+p) &= \\
 = (k-s)(l-q)(l+q+p) + 2k(l-q)j.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание лемму 1.2, получаем

$$\begin{aligned}
 |R_{xy}(j)|^2 &= \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)(l-q)(l+q+p)+2k(l-q)j} = \\
 &= \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)l(l+2q+p)+2klj} = \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)l(l+p)+2klj} \sum_{q=0}^{N-1} \omega_N^{2(k-s)lq} = \\
 &= N \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{(k-s)l(l+p)+2klj} \delta_N(\langle 2(k-s)l \rangle_N). \tag{9.14}
 \end{aligned}$$

Число N взаимно просто с $k-s$ (по условию) и взаимно просто с 2 (в силу нечетности), поэтому $\text{НОД}(2(k-s), N) = 1$. В таком случае отображение $l \rightarrow \langle 2(k-s)l \rangle_N$ является перестановкой множества $0 : N-1$, переводящей ноль в ноль. Учитывая этот факт и определение единичного импульса δ_N , заключаем, что в сумме из правой части (9.14) отлично от нуля лишь одно слагаемое, соответствующее $l = 0$. Приходим

к тождеству $|R_{xy}(j)|^2 \equiv N$, равносильному (9.13). Теорема доказана. \square

Сигналы a_{kp} вида (9.9) имеют одинаковую энергию $E(a_{kp}) = N$. Согласно лемме 9.2 при нечетном N любой их набор образует ансамбль \mathcal{Q}_a с $A = N$ и $R_a = 0$. Предположим, что сигналы a_{kp} из \mathcal{Q}_a удовлетворяют двум дополнительным условиям:

- у них одинаковы p ;
- для всех пар сигналов a_{kp}, a_{sp} из \mathcal{Q}_a с $k > s$ разность $k - s$ взаимно проста с N .

Тогда по теореме 9.3 справедливо тождество

$$|R_{xy}(j)| \equiv \sqrt{N} \text{ при всех } x, y \in \mathcal{Q}_a, x \neq y.$$

Оно совпадает с (9.8), поскольку в данном случае $A/\sqrt{N} = \sqrt{N}$.

Отметим, что при простом N всем сформулированным условиям удовлетворяют сигналы $a_{1,p}, a_{2,p}, \dots, a_{N-1,p}$ в количестве $N - 1$.

10. Принцип неопределенности

10.1. *Носителем* сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ называется множество

$$\text{supp } x = \{j \in 0 : N - 1 \mid x(j) \neq 0\}.$$

Обозначим $|\text{supp } x|$ количество индексов, входящих в носитель. Наряду с носителем сигнала x будем рассматривать носитель его спектра X .

Теорема 10.1 (принцип неопределенности). *Для любого ненулевого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ выполняется неравенство*

$$|\text{supp } x| \cdot |\text{supp } X| \geq N. \quad (10.1)$$

Смысл неравенства (10.1) в том, что носители ненулевого сигнала и его спектра не могут быть одновременно малы.

10.2. Доказательству теоремы 10.1 предположим одно вспомогательное утверждение.

Лемма 10.1. Пусть $m := |\operatorname{supp} x| > 0$. Тогда при любом $q \in 0 : N - 1$ в последовательности

$$X(q+1), X(q+2), \dots, X(q+m)$$

найдется хотя бы один ненулевой элемент.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} x = \{j_1, \dots, j_m\}$. Зафиксируем $q \in 0 : N - 1$. Запишем

$$X(q+l) = \sum_{k=1}^m x(j_k) \omega_N^{-(q+l)j_k} = \sum_{k=1}^m z_k^{q+l} x(j_k), \quad l \in 1 : m, \quad (10.2)$$

где $z_k = \omega_N^{-j_k}$. Ясно, что z_k — попарно различные точки на единичной окружности комплексной плоскости. Обозначим $a = (x(j_1), \dots, x(j_m))^T$, $b = (X(q+1), \dots, X(q+m))^T$, $Z = \{z_k^{q+l}\}_{l,k=1}^m$ и перепишем равенство (10.2) в виде $b = Za$. Достаточно показать, что матрица Z обратима. В этом случае из условия $a \neq \mathbb{O}$ будет следовать, что $b \neq \mathbb{O}$.

Имеем

$$Z = \begin{bmatrix} z_1^{q+1} & \dots & z_m^{q+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{q+m} & \dots & z_m^{q+m} \end{bmatrix}.$$

Определитель Δ этой матрицы преобразуется к виду

$$\Delta = \prod_{k=1}^m z_k^{q+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_m \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{m-1} & \dots & z_m^{m-1} \end{vmatrix},$$

где в правой части стоит отличный от нуля определитель Вандермонда. Значит, $\Delta \neq 0$. Это гарантирует обратимость матрицы Z .

Лемма доказана. \square

10.3. Обратимся к доказательству теоремы 10.1. Пусть $\text{supp } X = \{k_1, \dots, k_n\}$, где $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < N$. Зафиксируем $s \in 1 : n - 1$. По лемме в последовательности $X(k_s + 1), \dots, X(k_s + m)$ есть ненулевой элемент. Но первым после $X(k_s)$ ненулевым элементом является $X(k_{s+1})$. Значит,

$$k_{s+1} \leq k_s + m, \quad s \in 1 : n - 1. \quad (10.3)$$

Далее, в последовательности $X(k_n + 1), \dots, X(k_n + m)$ также есть ненулевой элемент, а в силу N -периодичности спектра первым после $X(k_n)$ ненулевым элементом является $X(k_1 + N)$. Значит,

$$k_1 + N \leq k_n + m. \quad (10.4)$$

На основании (10.3) и (10.4) получаем

$$k_1 + N \leq k_n + m \leq k_{n-1} + 2m \leq \dots \leq k_1 + nm. \quad (10.5)$$

Отсюда следует, что $mn \geq N$.

Теорема доказана. \square

10.4. На сигнале $x = \delta_N$ неравенство (10.1) выполняется как равенство. На самом деле, можно описать всё множество сигналов, на которых неравенство (10.1) выполняется как равенство.

Теорема 10.2. Пусть для сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ с характеристиками

$$m = |\text{supp } x|, \quad n = |\text{supp } X|$$

выполняется равенство $mn = N$. Тогда необходимо

$$x(j) = c \omega_N^{qj} \delta_n(j - p), \quad (10.6)$$

где $q \in 0 : m - 1$, $p \in 0 : n - 1$ и $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$.

Доказательство. Как и в предыдущем пункте, обозначим

$$\text{supp } \mathcal{F}_N(x) = \{k_1, \dots, k_n\}.$$

Согласно (10.5) и равенству $mn = N$ имеем

$$k_n + m \leq k_{n-1} + 2m \leq \dots \leq k_1 + nm = k_1 + N \leq k_n + m.$$

Отсюда следует, что

$$k_s = k_1 + (s - 1)m, \quad s \in 1 : n. \quad (10.7)$$

По определению $k_n = k_1 + (n - 1)m \leq N - 1$, так что $k_1 \leq m - 1$. Обозначив $q = k_1$, перепишем (10.7) в виде $k_s = q + (s - 1)m$.

Выразим сигнал x через его спектр:

$$\begin{aligned} x(j) &= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^n X(k_s) \omega_N^{k_s j} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{n-1} X(q + sm) \omega_N^{(q+sm)j} = \\ &= \omega_N^{qj} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m} X(q + sm) \right) \omega_n^{sj}. \end{aligned}$$

Обозначим $H(s) = \frac{1}{m} X(q + sm)$, $s \in 0 : n - 1$, и $h = \mathcal{F}_n^{-1}(H)$. Тогда

$$x(j) = \omega_N^{qj} h(j). \quad (10.8)$$

Так как x — ненулевой сигнал, то согласно (10.8) найдет-ся индекс p , на котором $h(p) \neq 0$. В силу n -периодичности сигнала h можно считать, что $p \in 0 : n - 1$. Покажем, что

$$h(j) = c \delta_n(j - p), \quad (10.9)$$

где $c = h(p)$. Отсюда и из (10.8) будет следовать заключение теоремы.

Снова в силу n -периодичности сигнала h и (10.8) имеем

$$x(p + sn) = \omega_N^{q(p+sn)} h(p) \neq 0, \quad s \in 0 : m - 1.$$

То есть мы указали m индексов из основного периода, на которых сигнал x отличен от нуля. По условию теоремы $|\text{supp } x| = m$, так что на остальных индексах из $0 : N - 1$ сигнал x равен нулю. В частности, при $j \in 0 : n - 1$, $j \neq p$, будет $0 = x(j) = \omega_N^{qj} h(j)$. Получили, что $h(j) = 0$ при всех $j \in 0 : n - 1$, $j \neq p$. Это значит, что сигнал h допускает представление (10.9).

Теорема доказана. \square

10.5. Для полноты картины найдем спектр сигнала x вида (10.6). Запишем

$$\begin{aligned} X(k) &= c \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{qj} \delta_n(j-p) \omega_N^{-kj} = c \sum_{s=0}^{m-1} \omega_N^{(q-k)(p+sn)} = \\ &= c \omega_N^{(q-k)p} \sum_{s=0}^{m-1} \omega_m^{(q-k)s} = m c \omega_N^{(q-k)p} \delta_m(k-q). \end{aligned}$$

Таким образом, сигнал x вида (10.6) отличен от нуля на индексах $j = p + sn$, $s \in 0 : m - 1$, в то время как его спектр X отличен от нуля на индексах $k = q + tm$, $t \in 0 : n - 1$.

Задачи

- 1.1. Докажите, что сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ является четным тогда и только тогда, когда значение $x(0)$ вещественно и $x(N-j) = \overline{x}(j)$ при $j \in 1 : N-1$.
- 1.2. Докажите, что сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ является нечетным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} x(0) = 0$ и $x(N-j) = -\overline{x}(j)$ при $j \in 1 : N-1$.
- 1.3. Докажите, что любой сигнал можно единственным образом представить в виде суммы четного и нечетного сигналов.
- 1.4. Докажите, что $\delta_{mn}(mj) = \delta_n(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.
- 1.5. Докажите, что

$$\sum_{l=0}^{m-1} \delta_{mn}(j+ln) = \delta_n(j) \quad \text{при всех } j \in \mathbb{Z}.$$

- 1.6. Докажите, что при $r \in 1 : N-1$

$$\|\Delta^r(\delta_N)\|^2 = \sum_{s=0}^r (C_r^s)^2.$$

- 1.7. Пусть $N = mn$. Докажите, что для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$

$$\sum_{l=0}^{m-1} x(s+ln) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \delta_n(s-j) \quad \text{при всех } s \in \mathbb{Z}.$$

В задачах 1.8, 1.9 числа k и N — натуральные и взаимно простые.

- 1.8. Докажите, что $\delta_{kN}(j) = \delta_k(j) \delta_N(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

1.9. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(kj + l) = 1 \quad \text{при всех } l \in \mathbb{Z}.$$

1.10. Докажите, что сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ будет нечетным тогда и только тогда, когда его спектр X — чисто мнимый.

1.11. Пусть a и b — два вещественных сигнала из \mathbb{C}_N . Образуем комплексный сигнал $x = a + ib$. Докажите, что для спектров A, B, X этих сигналов справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{2} [X(k) + \overline{X}(N - k)], \\ B(k) &= -\frac{1}{2} i [X(k) - \overline{X}(N - k)] \end{aligned}$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$.

1.12. Пусть N — четное число. Вещественному сигналу x сопоставим комплексный сигнал x_a со спектром

$$X_a(k) = \begin{cases} X(k) & \text{при } k = 0 \text{ и } k = N/2, \\ 2X(k) & \text{при } k \in 1 : N/2 - 1, \\ 0 & \text{при } k \in N/2 + 1 : N - 1. \end{cases}$$

Докажите, что $\operatorname{Re} x_a = x$.

1.13. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную предыдущей, при нечетном N .

1.14. Докажите, что при четном N и $k \in 0 : N/2 - 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{j=0}^{N/2-1} [x(2j) + \omega_N^{-k} x(2j+1)] \omega_{N/2}^{-kj}, \\ X(N/2 + k) &= \sum_{j=0}^{N/2-1} [x(2j) - \omega_N^{-k} x(2j+1)] \omega_{N/2}^{-kj}. \end{aligned}$$

1.15. Докажите, что при четном N и $k \in 0 : N/2 - 1$ справедливы равенства

$$X(2k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} [x(j) + x(N/2 + j)] \omega_{N/2}^{-kj},$$

$$X(2k+1) = \sum_{j=0}^{N/2-1} [x(j) - x(N/2 + j)] \omega_N^{-j} \omega_{N/2}^{-kj}.$$

В задачах 1.16–1.19 требуется вычислить спектры Фурье указанных сигналов.

1.16. $x(j) = \sin \frac{\pi j}{N}$, $j \in 0 : N - 1$.

1.17. $x(j) = (-1)^j$, $j \in 0 : N - 1$. Рассмотрите отдельно случаи $N = 2n$ и $N = 2n + 1$.

1.18. $x(j) = \begin{cases} j & \text{при } j \in 0 : n, \\ j - N & \text{при } j \in n + 1 : N - 1 \end{cases} \quad (N = 2n + 1).$

1.19. $x(j) = \begin{cases} j & \text{при } j \in 0 : n, \\ N - j & \text{при } j \in n + 1 : N - 1 \end{cases} \quad (N = 2n).$

1.20. Пусть $x(j) = \omega_N^{j^2}$. Найдите амплитудный спектр $|X|$ сигнала x .

В задачах 1.21–1.31 приведены некоторые преобразования сигнала $x \in \mathbb{C}_N$. Требуется установить связь между спектрами исходного сигнала и преобразованного.

1.21. $x_l(j) = x(j + l)$, где $l \in \mathbb{Z}$.

1.22. $x_l(j) = \cos \frac{2\pi l j}{N} x(j)$, где $l \in \mathbb{Z}$.

1.23. $y_p(j) = x(\langle pj \rangle_N)$ при условии, что p и N — натуральные и взаимно простые числа.

$$1.24. \quad x_n(j) = \begin{cases} x(j) & \text{при } j \in 0 : N-1, \\ 0 & \text{при } j \in N : nN-1 \end{cases} \quad (x_n \in \mathbb{C}_{nN}).$$

$$1.25. \quad x_n(j) = x(\langle j \rangle_N) \text{ при } j \in 0 : nN-1 \quad (x_n \in \mathbb{C}_{nN}).$$

Преобразования, указанные в задачах 1.24 и 1.25, называются *удлинениями* сигнала.

$$1.26. \quad x_n(j) = \begin{cases} x(j/n) & \text{если } \langle j \rangle_n = 0, \\ 0 & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (x_n \in \mathbb{C}_{nN}).$$

$$1.27. \quad x_n(j) = x(\lfloor j/n \rfloor) \quad (x_n \in \mathbb{C}_{nN}).$$

Преобразования, указанные в задачах 1.26 и 1.27, называются *растяжениями* сигнала.

$$1.28. \quad y_n(j) = x(jm) \text{ при } N = mn \quad (y_n \in \mathbb{C}_n).$$

Это преобразование называется *прореживанием*.

$$1.29. \quad y_n(j) = \sum_{p=0}^{m-1} x(j + pn) \text{ при } N = mn \quad (y_n \in \mathbb{C}_n).$$

$$1.30. \quad y_n(j) = \sum_{p=0}^{m-1} x(p + jm) \text{ при } N = mn \quad (y_n \in \mathbb{C}_n).$$

$$1.31. \quad y(j) = \sum_{p=0}^{m-1} x(p + \lfloor j/m \rfloor m) \text{ при } N = mn \quad (y \in \mathbb{C}_N).$$

1.32. Заданы комплексные числа $c_0, c_1, \dots, c_{N-1}, c_N$, из которых формируются два сигнала $x_0(j) = c_j, j \in 0 : N-1$, и $x_1(j) = c_{j+1}, j \in 0 : N-1$. Как связаны спектры этих сигналов?

1.33. Спектру X сигнала x сопоставим сигнал y с отсчетами

$$y(k) = \begin{cases} X(0) & \text{при } k = 0, \\ X(N - k) & \text{при } k \in 1 : N - 1. \end{cases}$$

Докажите, что $x = N^{-1} \mathcal{F}_N(y)$.

1.34. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}_N^4(x) = N^2 x.$$

1.35. Докажите формулу $\mathcal{F}_N(xy) = N^{-1}(X * Y)$.

1.36. Предположим, что все отсчеты сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ отличны от нуля. Введем сигнал $y = x^{-1}$. Докажите, что ДПФ X, Y сигналов x, y связаны соотношением $X * Y = N^2 \delta_N$.

1.37. Докажите, что свертка двух четных сигналов четна.

1.38. Докажите, что автокорреляционная функция R_{xx} является четной функцией при любом $x \in \mathbb{C}_N$.

1.39. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j) = |X(0)|^2.$$

1.40. Пусть $u = x * y$. Докажите, что $R_{uu} = R_{xx} * R_{yy}$.

1.41. Возьмем два дельта-коррелированных сигнала x, y и их свертку $u = x * y$. Докажите, что $E(u) = E(x) E(y)$.

1.42. Докажите, что свертка двух дельта-коррелированных сигналов дельта-коррелирована.

1.43. Сигнал Франка v принадлежит пространству \mathbb{C}_{N^2} и определяется формулой $v(j_1N + j_0) = \omega_N^{j_1j_0}$, $j_1, j_0 \in 0 : N - 1$. Докажите, что сигнал Франка дельта-коррелирован.

1.44. Рассмотрим сигнал Задова–Чу

$$a(j) = \begin{cases} \omega_{2N}^{j^2+2qj} & \text{при четном } N, \\ \omega_{2N}^{j(j+1)+2qj} & \text{при нечетном } N, \end{cases}$$

где $q \in \mathbb{Z}$ — параметр. Докажите, что сигнал a принадлежит пространству \mathbb{C}_N и является дельта-коррелированным.

1.45. Сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ называется *бинарным*, если он принимает значения $+1$ и -1 . Докажите, что при $N \neq 4p^2$, p — натуральное число, среди бинарных сигналов нет дельта-коррелированных.

1.46. В задаче 1.26 введен сигнал $x_n \in \mathbb{C}_{nN}$, являющийся растяжением сигнала $x \in \mathbb{C}_N$. Как связаны автокорреляционные функции этих сигналов?

1.47. Возьмем четыре сигнала x, y, w, z и сформируем четыре новых сигнала $u_1 = R_{xy}$, $v_1 = R_{wz}$, $u_2 = R_{xw}$, $v_2 = R_{yz}$. Докажите, что $R_{u_1v_1} = R_{u_2v_2}$.

1.48. Пусть x, y — некоррелированные сигналы. Докажите, что сигналы R_{xw} и R_{yz} при любых w, z также некоррелированы.

1.49. Напомним, что сигналы, входящие в базис из сдвигов единичного импульса, попарно ортогональны. Докажите, что они попарно коррелированы.

- 1.50. Докажите, что система сдвигов $\{x(j-k)\}_{k=0}^{N-1}$ линейно независима на \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда все компоненты спектра X отличны от нуля.
- 1.51. Системы сдвигов $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ и $\{y(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ называются *биортогональными*, если $\langle x(\cdot - k), y(\cdot - k') \rangle = \delta_N(k - k')$. Докажите, что критерием биортогональности является выполнение условия $R_{xy} = \delta_N$.
- 1.52. Пусть система сдвигов $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ линейно независима на \mathbb{Z} . Докажите, что существует единственный сигнал $y \in \mathbb{C}_N$, такой, что системы сдвигов $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ и $\{y(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ биортогональны.
- 1.53. *Пик-фактором* ненулевого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ называется величина

$$p(x) = \frac{\max_{j \in 0:N-1} |x(j)|^2}{N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2}.$$

Докажите, что $1 \leq p(x) \leq N$. Выясните, когда эти неравенства выполняются как равенства.

- 1.54. Пусть $g \in \mathbb{C}_N$. Найдите сигнал $x \in \mathbb{C}_N$, удовлетворяющий уравнению

$$-\Delta^2 x(j-1) + cx(j) = g(j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $c > 0$ — параметр.

Комментарии

В первой главе представлены основные понятия дискретного гармонического анализа — дискретное преобразование

Фурье, циклическая свертка и циклическая корреляция. Особенностью изложения является то, что сигнал рассматривается как элемент функционального пространства \mathbb{C}_N .

Систематически используется единичный N -периодический импульс δ_N . Разложение (1.1) произвольного сигнала по сдвигам единичного импульса соответствует разложению вектора по ортам. Лемма 1.1 элементарна, однако она позволяет легко доказать теорему 5.3 об общей форме линейного стационарного оператора. Обобщением леммы 1.1 является теорема 6.2. В ней выяснено, когда сдвиги некоторого сигнала образуют ортонормированный базис в пространстве \mathbb{C}_N .

Решение задачи об оптимальной интерполяции получено в [3]. Там же исследован более тонкий вопрос о поведении решения при $r \rightarrow \infty$. С аналогичных позиций в [2] решена задача о сглаживании дискретных периодических данных.

Задача об оптимальной паре сигнал–фильтр изучалась в [11]. В книге уточняются все необходимые для постановки задачи понятия и дается простое ее решение. Обобщению этих результатов посвящена работа [33].

Параграфы об ансамблях сигналов и принципе неопределенности написаны на основе обзорной статьи [39] и статьи [44] соответственно.

Дополнительные задачи, предложенные для самостоятельного решения, помогут освоить технику дискретного гармонического анализа. В этих задачах появляются, в частности, такие популярные преобразования сигналов, как удлинение, растяжение, прореживание. Некоторые задачи подготавливают читателя к дальнейшему развитию событий. Это прежде всего задачи 1.14 и 1.15. Рассматриваются специальные сигналы. Обращаем внимание на сигнал Франка (задача 1.43). Детальное изучение и обобщение этого сигнала принято в работе [24].

Глава 2

Быстрые алгоритмы

1. Алгоритм Гёрцеля

Рассмотрим вопрос о вычислении *одной компоненты* спектра $X = \mathcal{F}_N(x)$. Зафиксируем $k \in 0 : N - 1$ и запишем

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= x(0) + \sum_{j=1}^{N-1} x(j) \cos\left(\frac{2\pi k}{N} j\right) - i \sum_{j=1}^{N-1} x(j) \sin\left(\frac{2\pi k}{N} j\right). \end{aligned}$$

Обозначим $\alpha = 2\pi k/N$, $c_j = \cos(\alpha j)$, $s_j = \sin(\alpha j)$,

$$A(k) = \sum_{j=1}^{N-1} x(j) c_j, \quad B(k) = \sum_{j=1}^{N-1} x(j) s_j.$$

Тогда

$$X(k) = x(0) + A(k) - iB(k). \quad (1.1)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} c_j + c_{j-2} &= \cos(\alpha j) + \cos(\alpha(j-2)) = 2 \cos(\alpha(j-1)) \cos(\alpha) = \\ &= 2 \cos(\alpha) c_{j-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j + s_{j-2} &= \sin(\alpha j) + \sin(\alpha(j-2)) = 2 \sin(\alpha(j-1)) \cos(\alpha) = \\ &= 2 \cos(\alpha) s_{j-1}. \end{aligned}$$

Это порождает рекуррентные соотношения, на которых основаны дальнейшие преобразования:

$$\begin{aligned} c_j &= 2 \cos(\alpha) c_{j-1} - c_{j-2}, \quad j = 2, 3, \dots, \\ c_0 &= 1, \quad c_1 = \cos(\alpha); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} s_j &= 2 \cos(\alpha) s_{j-1} - s_{j-2}, \quad j = 2, 3, \dots, \\ s_0 &= 0, \quad s_1 = \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для вычисления $A(k)$ и $B(k)$ построим рекуррентную последовательность $\{g_j\}$, исходя из условий

$$\begin{aligned} x(j) &= g_j - 2 \cos(\alpha) g_{j+1} + g_{j+2}, \quad j = N-1, N-2, \dots, 1, \\ g_{N+1} &= g_N = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Такое построение возможно. Действительно, при $j = N-1$ получаем $g_{N-1} = x(N-1)$. Величины g_{N-2}, \dots, g_1 определяются последовательно по формуле

$$\begin{aligned} g_j &= x(j) + 2 \cos(\alpha) g_{j+1} - g_{j+2}, \quad j = N-2, \dots, 1, \\ g_N &= 0, \quad g_{N-1} = x(N-1). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Согласно (1.4) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{j=1}^{N-1} x(j) c_j = \sum_{j=1}^{N-1} (g_j - 2 \cos(\alpha) g_{j+1} + g_{j+2}) c_j = \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} g_j c_j - 2 \cos(\alpha) \sum_{j=2}^N g_j c_{j-1} + \sum_{j=3}^{N+1} g_j c_{j-2} = \\ &= g_1 c_1 + g_2 c_2 - 2 \cos(\alpha) g_2 c_1 + \sum_{j=3}^{N-1} g_j (c_j - 2 \cos(\alpha) c_{j-1} + c_{j-2}) = \\ &= g_1 c_1 + g_2 (c_2 - 2 \cos(\alpha) c_1) = g_1 c_1 - g_2 c_0 = g_1 \cos(\alpha) - g_2. \end{aligned}$$

Аналогично, со ссылкой на (1.4) и (1.3), преобразуется выражение для $B(k)$:

$$\begin{aligned} B(k) &= \sum_{j=1}^{N-1} x(j) s_j = \sum_{j=1}^{N-1} (g_j - 2 \cos(\alpha) g_{j+1} + g_{j+2}) s_j = \\ &= g_1 s_1 + g_2 s_2 - 2 \cos(\alpha) g_2 s_1 = g_1 s_1 + g_2 (s_2 - 2 \cos(\alpha) s_1) = \\ &= g_1 s_1 = g_1 \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Теперь формула (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} X(k) &= x(0) + g_1 \cos(\alpha) - g_2 - i g_1 \sin(\alpha) = \\ &= x(0) - g_2 + g_1 \omega_N^{-k}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вычисление $X(k)$ при фиксированном k по формуле (1.6) называется *алгоритмом Гёрцеля*.

Основным элементом алгоритма Гёрцеля является схема (1.5) построения последовательности $\{g_j\}$. На самом деле нам нужна не вся последовательность $\{g_j\}$, а только два ее члена g_2 и g_1 . Достижение этой цели обеспечивается приводимой ниже группой операторов:

```

g := x(N - 1); g1 := 0; a := 2 * cos(2 * pi * k / N);
for j := N - 2 downto 1 do
  begin g2 := g1; g1 := g;
    g := x(j) + a * g1 - g2 end

```

На выходе получаем $g = g_1$, $g1 = g_2$. В цикле используется $N - 2$ умножений на вещественное число a и $2(N - 2)$ сложений.

2. Первая последовательность ортогональных базисов

2.1. С помощью алгоритма Гёрцеля можно вычислить весь спектр сигнала, однако это не лучший метод. Существуют более эффективные методы, которые называются *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ). Алгоритмов БПФ много, и они зависят от арифметических свойств длины периода N . Мы сосредоточимся на случае, когда $N = 2^s$.

Наш подход к БПФ связан с построением в пространстве сигналов рекуррентной последовательности ортогональных базисов. Этот вопрос рассматривается в данном разделе. Описанию БПФ посвящен следующий раздел.

2.2. В пространстве \mathbb{C}_N при $N = 2^s$ построим рекуррентную последовательность ортогональных базисов f_0, f_1, \dots, f_s . Здесь $f_\nu = \{f_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$. Сигнал $f_\nu(k; j)$ как элемент пространства \mathbb{C}_N будем обозначать $f_\nu(k)$. Положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$. Последовательность $f_\nu = \{f_\nu(k)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \dots, s$, определим так:

$$\begin{aligned}
 f_0(k) &= \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N - 1; \\
 f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \\
 &= f_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^l f_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu), \\
 f_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\
 &= f_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \omega_{\Delta_{\nu+1}}^l f_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu), \\
 p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Индекс k у $f_\nu(k)$ представлен в виде $k = p\Delta_{\nu+1} + r$, где $p \in 0 : N_\nu - 1$, $r \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. В свою очередь $r = \sigma\Delta_\nu + l$, где $\sigma \in 0 : 1$, $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$. Таким образом, $k = p\Delta_{\nu+1} + \sigma\Delta_\nu + l$.

Отметим, что $\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\Delta_{\nu}} = \omega_2 = -1$. Это позволяет записать рекуррентные соотношения (2.1) одной строкой

$$\begin{aligned} f_{\nu}(l + \sigma\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}) = \\ = f_{\nu-1}(l + 2p\Delta_{\nu}) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l+\sigma\Delta_{\nu}} f_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_{\nu}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu} - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

В частности, при $\nu = 1$ получаем

$$f_1(\sigma + 2p) = f_0(2p) + \omega_2^{\sigma} f_0(2p + 1), \quad (2.3)$$

$$p \in 0 : N_1 - 1, \quad \sigma \in 0 : 1.$$

Что представляет собой базис f_s ? Для ответа на этот вопрос потребуется некоторая подготовка.

2.3. В разделе «Предварительные сведения», п. 4, была введена перестановка rev_{ν} . Она определена на множестве $\{0, 1, \dots, 2^{\nu}-1\}$ и сопоставляет числу $j = (j_{\nu-1}, j_{\nu-2}, \dots, j_0)_2$ число $\text{rev}_{\nu}(j) = (j_0, j_1, \dots, j_{\nu-1})_2$, двоичный код которого равен перевернутому двоичному коду числа j . По определению полагается $\text{rev}_0(0) = 0$.

Следующая лемма поможет разобраться с явным видом сигналов $f_{\nu}(k)$.

Лемма 2.1. *При $q \in 0 : \Delta_{\nu} - 1$ справедливы равенства*

$$2 \text{rev}_{\nu-1}(q) = \text{rev}_{\nu}(q),$$

$$2 \text{rev}_{\nu-1}(q) + 1 = \text{rev}_{\nu}(\Delta_{\nu} + q).$$

Доказательство. При $\nu = 1$ утверждение тривиально. Пусть $\nu \geq 2$. Тогда при $q \in 0 : \Delta_{\nu} - 1$ имеем

$$q = q_{\nu-2}2^{\nu-2} + \dots + q_0, \quad \text{rev}_{\nu-1}(q) = q_02^{\nu-2} + \dots + q_{\nu-2},$$

$$2 \text{rev}_{\nu-1}(q) = q_02^{\nu-1} + \dots + q_{\nu-2}2 + 0 = \text{rev}_{\nu}(q),$$

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{rev}_{\nu-1}(q) + 1 &= q_0 2^{\nu-1} + \dots + q_{\nu-2} 2 + 1 = \\
&= \operatorname{rev}_{\nu}(2^{\nu-1} + q) = \operatorname{rev}_{\nu}(\Delta_{\nu} + q).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

2.4. Вернемся к рекуррентным соотношениям (2.1), (2.2).

Теорема 2.1. *Справедлива формула*

$$f_{\nu}(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_{\nu}(q)} f_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \quad (2.4)$$

$$p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (2.4) совпадает с (2.3), если в последней заменить σ на l . Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν .

Возьмем $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ и представим l в виде $l = \sigma\Delta_{\nu} + l'$, где $l' \in 0 : \Delta_{\nu} - 1$, $\sigma \in 0 : 1$. При $p \in 0 : N_{\nu} - 1$ согласно (2.2) и индукционному предположению имеем

$$\begin{aligned}
f_{\nu}(l + p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu}(l' + \sigma\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}) = \\
&= f_{\nu-1}(l' + 2p\Delta_{\nu}) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l' + \sigma\Delta_{\nu}} f_{\nu-1}(l' + (2p+1)\Delta_{\nu}) = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu}-1} \omega_{\Delta_{\nu}}^{l' \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)} f_0(q + 2p\Delta_{\nu}) + \\
&+ \omega_{\Delta_{\nu+1}}^l \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu}-1} \omega_{\Delta_{\nu}}^{l' \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)} f_0(q + (2p+1)\Delta_{\nu}).
\end{aligned}$$

Разберемся с коэффициентами. В силу леммы 2.1

$$\begin{aligned}
\omega_{\Delta_{\nu}}^{l' \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)} &= \omega_{\Delta_{\nu}}^{(l' + \sigma\Delta_{\nu}) \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l(2 \operatorname{rev}_{\nu-1}(q))} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_{\nu}(q)}, \\
\omega_{\Delta_{\nu+1}}^l \omega_{\Delta_{\nu}}^{l' \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)} &= \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l(2 \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)+1)} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_{\nu}(q+\Delta_{\nu})}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \text{rev}_\nu(q)} f_0(q + p\Delta_{\nu+1}) + \\
 &+ \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \text{rev}_\nu(q+\Delta_\nu)} f_0((q + \Delta_\nu) + p\Delta_{\nu+1}) = \\
 &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \text{rev}_\nu(q)} f_0(q + p\Delta_{\nu+1}).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

При $\nu = s$ формула (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 f_s(l; j) &= \sum_{q=0}^{N-1} \omega_N^{l \text{rev}_s(q)} \delta_N(j - q) = \omega_N^{l \text{rev}_s(j)} = \\
 &= u_l(\text{rev}_s(j)), \quad l, j \in 0 : N - 1.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Получили, что f_s — это экспоненциальный базис с ревертированным аргументом.

2.5. Теорема 2.2. *При каждом $\nu \in 0 : s$ система сигналов*

$$f_\nu(0), f_\nu(1), \dots, f_\nu(N-1) \tag{2.6}$$

ортogonalна и $\|f_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$ при всех $k \in 0 : N - 1$.

Доказательство. При $\nu = 0$ утверждение известно (следствие из леммы 1.1.3), поэтому считаем, что $\nu \in 1 : s$. Возьмем $k, k' \in 0 : N - 1$ и представим их в виде $k = l + p\Delta_{\nu+1}$, $k' = l' + p'\Delta_{\nu+1}$, где $l, l' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$, $p, p' \in 0 : N_\nu - 1$. Учитывая (2.4), определение сигналов $f_0(k)$ и лемму 1.1.3, запишем

$$\langle f_\nu(k), f_\nu(k') \rangle = \langle f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}), f_\nu(l' + p'\Delta_{\nu+1}) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_{\nu}(q)} f_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \right. \\
&\quad \left. \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l' \operatorname{rev}_{\nu}(q')} f_0(q' + p'\Delta_{\nu+1}) \right\rangle = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_{\nu}(q) - l' \operatorname{rev}_{\nu}(q')} \delta_N(q - q' + (p - p')\Delta_{\nu+1}).
\end{aligned}$$

Аргумент единичного импульса δ_N по модулю не превосходит $N - 1$. При $p \neq p'$ он отличен от нуля при всех $q, q' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$, поскольку $|q - q'| \leq \Delta_{\nu+1} - 1$. Значит, $\langle f_{\nu}(k), f_{\nu}(k') \rangle = 0$ при $p \neq p'$.

Пусть $p = p'$. Тогда

$$\begin{aligned}
\langle f_{\nu}(k), f_{\nu}(k') \rangle &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(l-l') \operatorname{rev}_{\nu}(q)} = \\
&= \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(l-l')q'} = \Delta_{\nu+1} \delta_{\Delta_{\nu+1}}(l - l'). \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой (1.2.1) и тем, что отображение $q \rightarrow \operatorname{rev}_{\nu}(q)$ является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. На основании (2.7) заключаем, что скалярное произведение $\langle f_{\nu}(k), f_{\nu}(k') \rangle$ отлично от нуля только при $p = p'$, $l = l'$, т.е. только при $k = k'$. В последнем случае $\|f_{\nu}(k)\|^2 = \Delta_{\nu+1} = 2^{\nu}$ при всех $k \in 0 : N - 1$. Теорема доказана. \square

По существу установлено, что при каждом $\nu \in 0 : s$ система сигналов (2.6) образует ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N .

2.6. Теорема 2.3. *При $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ справедливо тождество*

$$f_{\nu}(l + p\Delta_{\nu+1}; j) \equiv f_{\nu}(l; j - p\Delta_{\nu+1}), \quad p \in 0 : N_{\nu} - 1. \quad (2.8)$$

Доказательство. Запишем формулу (2.4) при $p = 0$:

$$f_\nu(l; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_\nu(q)} \delta_N(j - q).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f_\nu(l; j - p\Delta_{\nu+1}) &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_\nu(q)} \delta_N(j - p\Delta_{\nu+1} - q) = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_\nu(q)} f_0(q + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}; j). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

3. Быстрое преобразование Фурье

3.1. В предыдущем разделе в пространстве \mathbb{C}_N при $N = 2^s$ были построены $s + 1$ ортогональных базисов f_0, f_1, \dots, f_s . Возьмем сигнал $x \in \mathbb{C}_N$. Его можно разложить по любому из этих базисов. Имея в виду конечную цель, разложим сигнал $x_0(j) = x(\operatorname{rev}_s(j))$, $j \in 0 : N - 1$:

$$x_0 = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k) f_\nu(k). \quad (3.1)$$

Для определения коэффициентов $x_\nu(k)$ умножим обе части (3.1) скалярно на $f_\nu(l)$. Согласно теореме 2.2 получим $\langle x_0, f_\nu(l) \rangle = x_\nu(l)$, так что

$$x_\nu(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x_0(j) \overline{f_\nu(k; j)} = \sum_{j=0}^{N-1} x(\operatorname{rev}_s(j)) \overline{f_\nu(k; j)}. \quad (3.2)$$

В частности,

$$x_0(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(\text{rev}_s(j)) \delta_N(j - k) = x(\text{rev}_s(k)).$$

В силу рекуррентного соотношения (2.1)

$$\begin{aligned} x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \langle x_0, f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) \rangle = \\ &= \langle x_0, f_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^l f_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu) \rangle = \\ &= x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu). \end{aligned}$$

Приходим к рекуррентной схеме

$$\begin{aligned} x_0(k) &= x(\text{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N-1; \\ x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \\ x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l} x_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{3.3}$$

По этой схеме вычисляются коэффициенты разложения сигнала x_0 по всем базисам f_ν вплоть до f_s . Отметим, что согласно (3.2) и (2.5)

$$x_s(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(\text{rev}_s(j)) \omega_N^{-k \text{rev}_s(j)} = \sum_{j'=0}^{N-1} x(j') \omega_N^{-kj'} = X(k).$$

Таким образом, коэффициенты $x_s(k)$ есть не что иное, как компоненты спектра сигнала x на основном периоде.

Вычисления по формулам (3.3) требуют умножений $\sum_{\nu=1}^s N_\nu \Delta_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^s N_\nu \Delta_{\nu+1} = \frac{1}{2} sN = \frac{1}{2} N \log_2 N$, сложений $2 \sum_{\nu=1}^s N_\nu \Delta_\nu = N \log_2 N$.

Схема (3.3) является одним из вариантов быстрого преобразования Фурье при $N = 2^s$ и называется *алгоритмом Кули–Тьюки с прореживанием по времени*.

3.2. Формулы (3.3) допускают обращение:

$$\begin{aligned} x_s(k) &= X(k), \quad k \in 0 : N - 1; \\ x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) &= \\ &= \frac{1}{2} [x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) + x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})], \\ x_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu) &= \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^l [x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) - x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})], \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu &= s, s - 1, \dots, 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

По формулам (3.4) спустимся до $x_0(k) = x(\text{rev}_s(k))$. Заменив k на $\text{rev}_s(k)$, получим

$$x(k) = x_0(\text{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Тем самым указан быстрый алгоритм восстановления сигнала x по его спектру $X = \mathcal{F}_N(x)$ при $N = 2^s$.

4. Вейвлетные базисы

4.1. Перепишем формулу (2.2) перехода от базиса $f_{\nu-1}$ к базису f_ν :

$$\begin{aligned} f_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ f_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l+\sigma\Delta_\nu} f_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu), \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Проанализируем структуру этой формулы. Удобно считать, что базис $f_{\nu-1}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l . Каждый блок содержит $N_{\nu-1}$ сигналов с внутренними индексами $2p, 2p+1$ при $p \in 0 : N_\nu - 1$. Согласно (4.1) блок с индексом l порождает два блока базиса f_ν с индексами l и $l + \Delta_\nu$, причем в каждом таком блоке содержится по N_ν сигналов с внутренним индексом p . Полная схема ветвления при $N = 2^3$ представлена на рис. 1.

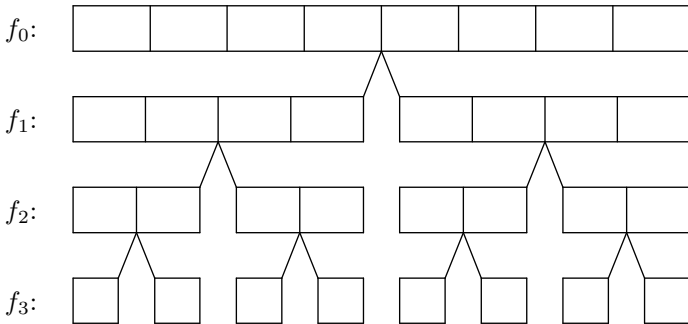


Рис. 1. Схема ветвления при $N = 2^3$

По теореме 2.2 все базисы f_0, f_1, \dots, f_s ортогональны. По теореме 2.3 сигналы из каждого блока базиса f_ν различаются только сдвигами аргумента на число, кратное $\Delta_{\nu+1}$.

Количество ортогональных базисов в \mathbb{C}_N при $N = 2^s$ можно значительно увеличить, если использовать вертикальную составляющую. Это демонстрируется на рис. 2. Квадратиками обозначены блоки. Число внутри квадратика показывает, сколько сигналов находится в данном блоке. Двойными квадратиками выделены висячие блоки.

Объединения сигналов, содержащихся в висячих блоках, во всех четырех вариантах ветвления образуют ортогональные базисы.

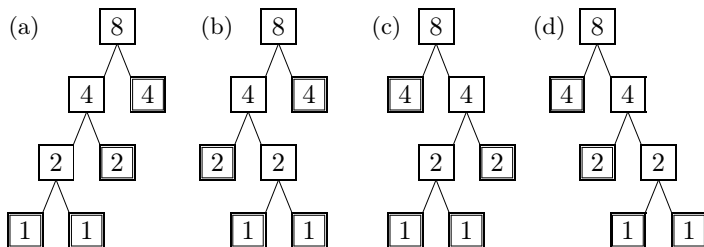


Рис. 2. Вейвлетные базисы

Действительно, ортогональность сигналов ν -го уровня известна. Сигналы всякого блока $(\nu + 1)$ -го уровня являются линейными комбинациями сигналов некоторого блока ν -го уровня, и поэтому они ортогональны сигналам из другого блока ν -го уровня.

Ортогональные базисы, образованные из всяких блоков всех уровней $\nu = 1, \dots, s$, назовем *вейвлетными базисами*, а совокупность всех таких базисов — *вейвлет-пакетом*.

Далее мы детально исследуем вейвлетный базис, порожденный схемой ветвления (a) на рис. 2.

4.2. При $l = 0$ формула (2.1) принимает вид

$$f_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N - 1;$$

$$\begin{aligned} f_\nu(p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu-1}(2p\Delta_\nu) + f_{\nu-1}((2p+1)\Delta_\nu), \\ f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu-1}(2p\Delta_\nu) - f_{\nu-1}((2p+1)\Delta_\nu), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Сигналы $\{f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\}$ войдут в вейвлетный базис, в то время как сигналы $\{f_\nu(p\Delta_{\nu+1})\}$ будут участвовать в дальнейшем ветвлении. Рекуррентные соотношения (4.2) можно

записать одной строкой

$$\begin{aligned} f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= f_{\nu-1}(2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma f_{\nu-1}((2p+1)\Delta_\nu), \quad (4.3) \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Введем линейные оболочки

$$V_\nu = \text{lin} \left(\{f_\nu(p\Delta_{\nu+1})\}_{p=0}^{N_\nu-1} \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, s;$$

$$W_\nu = \text{lin} \left(\{f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\}_{p=0}^{N_\nu-1} \right), \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Очевидно, что $V_0 = \text{lin}(\{\delta_N(\cdot - p)\}_{p=0}^{N-1}) = \mathbb{C}_N$. В силу (4.2) $V_\nu \subset V_{\nu-1}$, $W_\nu \subset V_{\nu-1}$. Поскольку сигналы

$$\{f_\nu(p\Delta_{\nu+1})\}_{p=0}^{N_\nu-1}, \quad \{f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})\}_{p=0}^{N_\nu-1}$$

принадлежат $V_{\nu-1}$, попарно ортогональны и их общее количество совпадает с размерностью $V_{\nu-1}$, то они образуют ортогональный базис $V_{\nu-1}$. Более того, $V_{\nu-1}$ есть ортогональная сумма V_ν и W_ν , т. е.

$$V_{\nu-1} = V_\nu \oplus W_\nu, \quad \nu = 1, \dots, s. \quad (4.4)$$

Эта формула соответствует шагу ветвления. Последовательно применяя (4.4), приходим к ортогональному разложению пространства \mathbb{C}_N :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_N &= V_0 = V_1 \oplus W_1 = (V_2 \oplus W_2) \oplus W_1 = \dots = \\ &= V_s \oplus W_s \oplus W_{s-1} \oplus \dots \oplus W_2 \oplus W_1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь $V_s = \text{lin}(f_s(0))$. Согласно (2.5), $f_s(0; j) \equiv 1$, так что V_s есть подпространство сигналов, тождественно равных комплексной константе.

Подпространства W_ν называются *вейвлетными подпространствами*. В силу (2.8)

$$f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(\Delta_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}),$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Это значит, что базис W_ν состоит из сдвигов сигнала $f_\nu(\Delta_\nu; j)$ на числа, кратные $\Delta_{\nu+1}$.

Теорема 4.1. *При $\nu \in 1 : s$ справедлива формула*

$$f_\nu(\Delta_\nu; j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : \Delta_\nu - 1, \\ -1 & \text{при } j \in \Delta_\nu : \Delta_{\nu+1} - 1, \\ 0 & \text{при } j \in \Delta_{\nu+1} : N - 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Доказательство. На основании (2.4) запишем

$$\begin{aligned} f_\nu(\Delta_\nu; j) &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\Delta_\nu \text{rev}_\nu(q)} \delta_N(j - q) = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \omega_2^{\text{rev}_\nu(q)} \delta_N(j - q) + \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_2^{\text{rev}_\nu(q)} \delta_N(j - q). \end{aligned} \quad (4.7)$$

При $\nu = 1$ имеем $f_1(\Delta_1; j) = \delta_N(j) - \delta_N(j - 1)$, что соответствует (4.6).

Пусть $\nu \geq 2$. По лемме 2.1 $\text{rev}_\nu(q) = 2 \text{rev}_{\nu-1}(q)$ при $q \in 0 : \Delta_\nu - 1$, поэтому $\omega_2^{\text{rev}_\nu(q)} = (-1)^{2 \text{rev}_{\nu-1}(q)} = 1$. Индекс $q \in \Delta_\nu : \Delta_{\nu+1} - 1$ можно представить в виде $q = \Delta_\nu + q'$, где $q' \in 0 : \Delta_\nu - 1$. По лемме 2.1 $\text{rev}_\nu(q) = \text{rev}_\nu(\Delta_\nu + q') = 2 \text{rev}_{\nu-1}(q') + 1$, так что $\omega_2^{\text{rev}_\nu(q)} = (-1)^{2 \text{rev}_{\nu-1}(q') + 1} = -1$. Подставляя найденные выражения для коэффициентов в равенство (4.7), получаем

$$f_\nu(\Delta_\nu; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j - q) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - q). \quad (4.8)$$

Это соответствует (4.6). Теорема доказана. \square

5. Базис Хаара.

Быстрое преобразование Хаара

5.1. Согласно (4.5) сигналы

$$f_s(0); f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), p \in 0 : N_\nu - 1, \nu = s, s-1, \dots, 1, \quad (5.1)$$

образуют ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N при $N = 2^s$. Он называется *дискретным базисом Хаара, связанным с прореживанием по времени*. На рис. 3 представлен базис Хаара при $N = 2^3$.

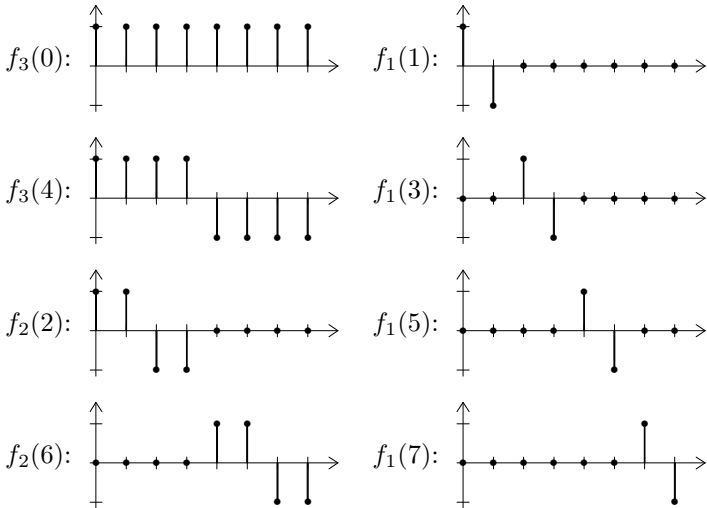


Рис. 3. Базис Хаара, связанный с прореживанием по времени, при $N = 2^3$

Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по базису (5.1):

$$x = 2^{-s} x_s(0) f_s(0) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} x_{\nu}(\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}) f_{\nu}(\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}). \quad (5.2)$$

Чтобы упростить индексацию, введем обозначения

$$\varphi_0(p) = f_0(p) = \delta_N(\cdot - p), \quad p \in 0 : N - 1;$$

$$\varphi_{\nu}(p + \sigma N_{\nu}) = f_{\nu}(\sigma \Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}),$$

$$p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

В частности, $\varphi_s(\sigma) = f_s(\sigma \Delta_s)$ при $\sigma \in 0 : 1$. При $s = 3$ сигналы (5.1)

$$f_3(0), f_3(4), f_2(2), f_2(6), f_1(1), f_1(3), f_1(5), f_1(7),$$

изображенные на рис. 3, совпадают с сигналами

$$\varphi_3(0), \varphi_3(1), \varphi_2(2), \varphi_2(3), \varphi_1(4), \varphi_1(5), \varphi_1(6), \varphi_1(7).$$

Согласно (4.3)

$$\varphi_{\nu}(p + \sigma N_{\nu}) = \varphi_{\nu-1}(2p) + (-1)^{\sigma} \varphi_{\nu-1}(2p + 1).$$

Приходим к рекуррентным соотношениям

$$\varphi_0(p) = \delta_N(\cdot - p), \quad p \in 0 : N - 1;$$

$$\varphi_{\nu}(p) = \varphi_{\nu-1}(2p) + \varphi_{\nu-1}(2p + 1),$$

$$\varphi_{\nu}(p + N_{\nu}) = \varphi_{\nu-1}(2p) - \varphi_{\nu-1}(2p + 1),$$

$$p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \quad (5.3)$$

В новых обозначениях базис Хаара (5.1) составят сигналы

$$\varphi_s(0); \varphi_{\nu}(p + N_{\nu}), \quad p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad \nu = s, s - 1, \dots, 1.$$

Положим $\xi_{\nu}(k) = \langle x, \varphi_{\nu}(k) \rangle$. В частности,

$$\xi_0(p) = \langle x, \varphi_0(p) \rangle = \langle x, f_0(p) \rangle = x(p),$$

$$\begin{aligned}
\xi_s(0) &= \langle x, \varphi_s(0) \rangle = \langle x, f_s(0) \rangle = x_s(0), \\
\xi_\nu(p + N_\nu) &= \langle x, \varphi_\nu(p + N_\nu) \rangle = \langle x, f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) \rangle = \\
&= x_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).
\end{aligned}$$

На основании (5.3) получаем

$$\begin{aligned}
\xi_0(p) &= x(p), \quad p \in 0 : N - 1; \\
\xi_\nu(p) &= \xi_{\nu-1}(2p) + \xi_{\nu-1}(2p + 1), \\
\xi_\nu(p + N_\nu) &= \xi_{\nu-1}(2p) - \xi_{\nu-1}(2p + 1), \\
p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Формула (5.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
x &= 2^{-s} \xi_s(0) \varphi_s(0) + \\
&+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \xi_\nu(p + N_\nu) \varphi_\nu(p + N_\nu).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

По схеме (5.4) при очередном ν вычисляются N_ν коэффициентов $\xi_\nu(p + N_\nu)$ вейвлетного разложения (5.5) и N_ν коэффициентов $\xi_\nu(p)$, которые используются при следующем ν .

5.2. Приведем пример на разложение сигнала по базису Хаара. Пусть $N = 2^3$ и сигнал x задан своими отсчетами на основном периоде $x = (1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1)$. Вычисления, выполненные по формулам (5.4), приведены в табл. 6.

Таблица 6. Вычисление коэффициентов Хаара

ξ_0	$\underbrace{1 \quad -1}$	$\underbrace{-1 \quad 1}$	$\underbrace{1 \quad 1}$	$\underbrace{-1 \quad -1}$
ξ_1	$\underbrace{0 \quad 0}$	$\underbrace{2 \quad -2}$	$\boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{matrix}}$	
ξ_2	$\underbrace{0 \quad 0}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$		
ξ_3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$		

Согласно (5.5) получаем разложение

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} 4 \varphi_2(3) + \frac{1}{2} 2 \varphi_1(4) - \frac{1}{2} 2 \varphi_1(5) = \\ &= f_2(6) + f_1(1) - f_1(3). \end{aligned}$$

Этот результат можно проверить непосредственно, учитывая вид базисных функций Хаара, изображенных на рис. 3.

5.3. Схема (5.4) вычисления коэффициентов разложения (5.5) называется *быстрым преобразованием Хаара, связанным с прореживанием по времени*. В этом преобразовании используются только сложения в количестве

$$2 \sum_{\nu=1}^s N_{\nu} = 2 (2^{s-1} + 2^{s-2} + \dots + 2 + 1) = 2(N - 1).$$

5.4. Формулы (5.4) допускают обращение:

$$\begin{aligned} \xi_{\nu-1}(2p) &= \frac{1}{2} [\xi_{\nu}(p) + \xi_{\nu}(p + N_{\nu})], \\ \xi_{\nu-1}(2p + 1) &= \frac{1}{2} [\xi_{\nu}(p) - \xi_{\nu}(p + N_{\nu})], \\ p &\in 0 : N_{\nu} - 1, \quad \nu = s, s - 1, \dots, 1. \end{aligned}$$

При этом $x(p) = \xi_0(p)$, $p \in 0 : N - 1$. Получаем быстрый алгоритм восстановления отсчетов сигнала x , представленного в виде (5.5), на основном периоде.

6. Прореживание по частоте

6.1. Если у всех сигналов ортогональной системы сделать одинаковую перестановку аргумента, то преобразованные сигналы останутся попарно ортогональными. Это простое соображение позволяет строить новые ортогональные базисы в пространстве \mathbb{C}_N .

Пусть $N = 2^s$ и f_0, f_1, \dots, f_s — ортогональные базисы в \mathbb{C}_N , определенные в п. 2.2. Положим

$$g_\nu(k; j) = f_\nu(\text{rev}_s(k); \text{rev}_s(j)), \quad \nu \in 0 : s.$$

В частности,

$$g_0(k; j) = \delta_N(\text{rev}_s(j) - \text{rev}_s(k)) = \delta_N(j - k).$$

Согласно (2.5)

$$g_s(k; j) = \omega_N^{\text{rev}_s(k)j}. \quad (6.1)$$

Очевидно, что при каждом $\nu \in 0 : s$ сигналы $g_\nu(0), g_\nu(1), \dots, g_\nu(N-1)$ попарно ортогональны и $\|g_\nu(k)\|^2 = 2^\nu, k \in 0 : N-1$.

Теорема 6.1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned} g_0(k) &= \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ g_\nu(2lN_\nu + p) &= \\ &= g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + \omega_N^{\text{rev}_s(2l)} g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ g_\nu((2l+1)N_\nu + p) &= \\ &= g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) - \omega_N^{\text{rev}_s(2l)} g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Доказательство. Предварительно установим, что

$$\text{rev}_s((2l + \sigma)N_\nu + p) =$$

$$= \text{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma \Delta_\nu + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p) \quad (6.3)$$

при $p \in 0 : N_\nu - 1$, $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$, $\sigma \in 0 : 1$, $\nu = 1, \dots, s$. Напомним, что по определению $\text{rev}_0(0) = 0$, поэтому формула (6.3) при $\nu = 1$ принимает вид

$$\text{rev}_s(\sigma N_1 + p) = \sigma + 2 \text{rev}_{s-1}(p), \quad p \in 0 : N_1 - 1, \quad \sigma \in 0 : 1.$$

Последнее равенство проверяется легко:

$$\begin{aligned} \text{rev}_s(\sigma N_1 + p) &= \text{rev}_s(\sigma 2^{s-1} + p_{s-2} 2^{s-2} + \dots + p_0) = \\ &= p_0 2^{s-1} + \dots + p_{s-2} 2 + \sigma = 2 \text{rev}_{s-1}(p) + \sigma. \end{aligned}$$

Пусть $\nu \geq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{rev}_s((2l + \sigma)N_\nu + p) &= \\ &= \text{rev}_s(l_{\nu-2} 2^{s-1} + \dots + l_0 2^{s-\nu+1} + \sigma 2^{s-\nu} + \\ &\quad + p_{s-\nu-1} 2^{s-\nu-1} + \dots + p_0) = \\ &= p_0 2^{s-1} + \dots + p_{s-\nu-1} 2^\nu + \sigma 2^{\nu-1} + l_0 2^{\nu-2} + \dots + l_{\nu-2} = \\ &= \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p) + \sigma \Delta_\nu + \text{rev}_{\nu-1}(l), \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Запишем рекуррентные соотношения (6.2) одной строкой

$$\begin{aligned} g_\nu((2l + \sigma)N_\nu + p) &= \\ &= g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + (-1)^{\sigma} \omega_N^{\text{rev}_s(2l)} g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\sigma \in 0 : 1$. Для доказательства (6.4) воспользуемся формулами (6.3) и (2.2). Получим

$$\begin{aligned} g_\nu((2l + \sigma)N_\nu + p; j) &= f_\nu(\text{rev}_s((2l + \sigma)N_\nu + p); \text{rev}_s(j)) = \\ &= f_\nu(\text{rev}_{\nu-1}(l) + \sigma \Delta_\nu + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p); \text{rev}_s(j)) = \\ &= f_{\nu-1}(\text{rev}_{\nu-1}(l) + 2 \text{rev}_{s-\nu}(p) \Delta_\nu; \text{rev}_s(j)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^\sigma \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu-1}(l)} f_{\nu-1}(\text{rev}_{\nu-1}(l) + (2\text{rev}_{s-\nu}(p) + 1)\Delta_\nu; \text{rev}_s(j)) = \\
& = f_{\nu-1}(\text{rev}_s(lN_{\nu-1} + p); \text{rev}_s(j)) + \\
& + (-1)^\sigma \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu-1}(l)} f_{\nu-1}(\text{rev}_s(lN_{\nu-1} + N_\nu + p); \text{rev}_s(j)) = \\
& = g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p; j) + (-1)^\sigma \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu-1}(l)} g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p; j).
\end{aligned}$$

Остается проверить, что $\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu-1}(l)} = \omega_N^{\text{rev}_s(2l)}$ при $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$.

При $\nu = 1$ это очевидно, а при $\nu \geq 2$ следует из того, что

$$2^{s-\nu} \text{rev}_{\nu-1}(l) = l_0 2^{s-2} + \dots + l_{\nu-2} 2^{s-\nu} = \text{rev}_s(2l).$$

Теорема доказана. \square

Теорема 6.2. *Справедливо равенство*

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_N^{q \text{rev}_s(l)} g_0(qN_\nu + p), \quad (6.5)$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Доказательство. Вначале отметим, что

$$\begin{aligned}
& \text{rev}_s(\text{rev}_\nu(q)N_\nu + p) = \\
& = p_0 2^{s-1} + \dots + p_{s-\nu-1} 2^\nu + q_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \dots + q_0 = \\
& = q + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p).
\end{aligned} \quad (6.6)$$

Согласно (2.4) и (6.6) имеем

$$\begin{aligned}
& g_\nu(lN_\nu + p; j) = \\
& = f_\nu(\text{rev}_s(l_{\nu-1} 2^{s-1} + \dots + l_0 2^{s-\nu} + \\
& + p_{s-\nu-1} 2^{s-\nu-1} + \dots + p_0); \text{rev}_s(j)) = \\
& = f_\nu(\text{rev}_\nu(l) + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p); \text{rev}_s(j)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu}(l) \text{rev}_{\nu}(q)} f_0(q + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p); \text{rev}_s(j)) = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu}(l) \text{rev}_{\nu}(q)} f_0(\text{rev}_s(\text{rev}_{\nu}(q)N_{\nu} + p); \text{rev}_s(j)) = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu}(l) q} g_0(qN_{\nu} + p; j).
\end{aligned}$$

Остается учесть, что $\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\text{rev}_{\nu}(l)} = \omega_N^{\text{rev}_s(l)}$ при $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. Теорема доказана. \square

Теорема 6.3. *Справедливо тождество*

$$g_{\nu}(lN_{\nu} + p; j) \equiv g_{\nu}(lN_{\nu}; j - p), \quad (6.7)$$

$$p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Доказательство. Согласно (6.5)

$$g_{\nu}(lN_{\nu}; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_N^{q \text{rev}_s(l)} \delta_N(j - qN_{\nu}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
g_{\nu}(lN_{\nu}; j - p) &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_N^{q \text{rev}_s(l)} \delta_N(j - (qN_{\nu} + p)) = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_N^{q \text{rev}_s(l)} g_0(qN_{\nu} + p; j) = g_{\nu}(lN_{\nu} + p; j).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

6.2. Сигнал $y \in \mathbb{C}_N$ при $N = 2^s$ может быть разложен по любому базису g_{ν} :

$$y = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{N-1} y_{\nu}(k) g_{\nu}(k). \quad (6.8)$$

Здесь $y_\nu(k) = \langle y, g_\nu(k) \rangle$. Опираясь на (6.2), обычным путем приходим к рекуррентным соотношениям для коэффициентов $y_\nu(k)$ разложений (6.8):

$$\begin{aligned}
 y_0(k) &= y(k), \quad k \in 0 : N-1; \\
 y_\nu(2lN_\nu + p) &= \\
 &= y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + \omega_N^{-\text{rev}_s(2l)} y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\
 y_\nu((2l+1)N_\nu + p) &= \\
 &= y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) - \omega_N^{-\text{rev}_s(2l)} y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\
 p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu &= 1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

При $\nu = s$ согласно (6.1) получаем

$$y_s(k) = \sum_{j=0}^{N-1} y(j) \overline{g_s(k; j)} = \sum_{j=0}^{N-1} y(j) \omega_N^{-\text{rev}_s(k)j} = Y(\text{rev}_s(k)).$$

Отсюда следует, что для компонент спектра Фурье Y сигнала y справедлива формула

$$Y(k) = y_s(\text{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N-1.$$

Схема (6.9) называется *алгоритмом Кули–Тьюки с прореживанием по частоте* для вычисления дискретного преобразования Фурье.

Формулы (6.9) допускают обращение

$$\begin{aligned}
 y_s(k) &= Y(\text{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N-1; \\
 y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) &= \\
 &= \frac{1}{2} [y_\nu(2lN_\nu + p) + y_\nu((2l+1)N_\nu + p)], \\
 y_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p) &= \\
 &= \frac{1}{2} \omega_N^{\text{rev}_s(2l)} [y_\nu(2lN_\nu + p) - y_\nu((2l+1)N_\nu + p)],
 \end{aligned}$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \dots, 1.$$

При этом $y(k) = y_0(k)$, $k \in 0 : N - 1$.

6.3. Структура формулы (6.4) аналогична структуре формулы (4.1). Удобно считать, что базис $g_{\nu-1}$ разбит на Δ_ν блоков, помеченных индексом l . Каждый блок содержит $N_{\nu-1}$ сигналов с внутренними индексами p , $p + N_\nu$ при $p \in 0 : N_\nu - 1$. Согласно (6.4) блок с индексом l порождает два блока базиса g_ν с внутренними индексами $2l$ и $2l + 1$, причем в каждом таком блоке содержится N_ν сигналов с индексом p . Сигналы внутри блока в силу (6.7) различаются лишь сдвигом аргумента. Полная схема ветвления такая же, как на рис. 1 из п. 4.1.

Из блоков разных уровней формируются вейвлетные базисы. Это делается так же, как в п. 4.1.

6.4. Исследуем схему ветвления (а) на рис. 2. Она соответствует тому, что в (6.2) берется $l = 0$. Получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} g_0(k) &= \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N - 1; \\ g_\nu(p) &= g_{\nu-1}(p) + g_{\nu-1}(p + N_\nu), \\ g_\nu(p + N_\nu) &= g_{\nu-1}(p) - g_{\nu-1}(p + N_\nu), \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Сигналы $\{g_\nu(p + N_\nu)\}$ войдут в вейвлетный базис, а сигналы $\{g_\nu(p)\}$ будут участвовать в дальнейшем ветвлении.

Сигналы

$$g_s(0); g_\nu(p + N_\nu), \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \dots, 1, \tag{6.11}$$

образуют ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N при $N = 2^s$. Он называется *дискретным базисом Хаара, связанным с прореживанием по частоте*.

Согласно (6.1), $g_s(0; j) \equiv 1$. В силу (6.7)

$$g_\nu(p + N_\nu; j) \equiv g_\nu(N_\nu; j - p), \quad p \in 0 : N_\nu - 1.$$

Теорема 6.4. При $\nu \in 1 : s$ справедливо равенство

$$g_\nu(N_\nu; j) = \delta_{N_{\nu-1}}(j) - \delta_{N_{\nu-1}}(j - N_\nu), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (6.5) при $l = 1$ и $p = 0$. Получим

$$\begin{aligned} g_\nu(N_\nu; j) &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_N^{q \text{rev}_s(1)} \delta_N(j - qN_\nu) = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^q \delta_N(j - qN_\nu) = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j - qN_{\nu-1}) - \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j - N_\nu - qN_{\nu-1}) = \\ &= \delta_{N_{\nu-1}}(j) - \delta_{N_{\nu-1}}(j - N_\nu). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

На рис. 4 изображен базис (6.11) при $N = 2^3$.

6.5. Любой сигнал $y \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по базису (6.11):

$$\begin{aligned} y &= 2^{-s} y_s(0) g_s(0) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(p + N_\nu) g_\nu(p + N_\nu). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь $y_\nu(k) = \langle y, g_\nu(k) \rangle$. С учетом (6.10) получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения (6.12):

$$\begin{aligned} y_0(k) &= y(k), \quad k \in 0 : N - 1; \\ y_\nu(p) &= y_{\nu-1}(p) + y_{\nu-1}(p + N_\nu), \\ y_\nu(p + N_\nu) &= y_{\nu-1}(p) - y_{\nu-1}(p + N_\nu), \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (6.13)$$

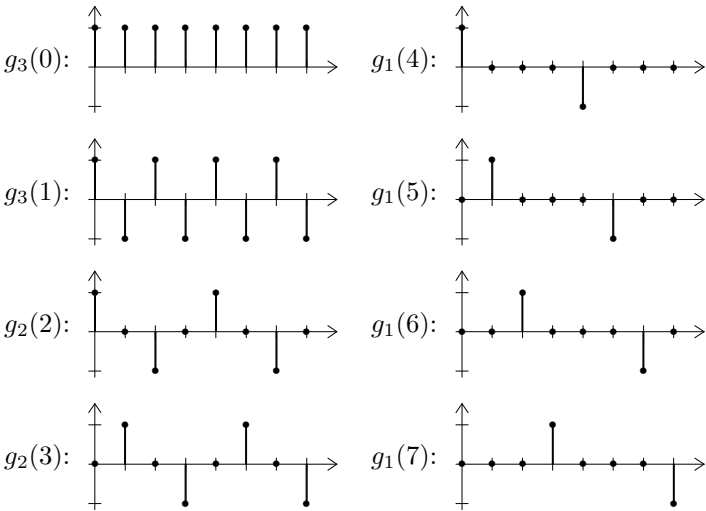


Рис. 4. Базис Хаара, связанный с прореживанием по частоте, при $N = 2^3$

По этой схеме при очередном ν вычисляются N_ν коэффициентов $y_\nu(p + N_\nu)$ вейвлетного разложения (6.12) и N_ν коэффициентов $y_\nu(p)$, которые используются при следующем ν .

В качестве примера разложим сигнал из п. 5.2 по базису (6.11). Удобно переобозначить этот сигнал через y вместо x . Вычисления, выполненные по формулам (6.13), приведены в табл. 7.

Таблица 7. Вычисление коэффициентов Хаара

y_0	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
y_1	2	0	-2	0	0	-2	0	2
y_2	0	0	4	0				
y_3	0	0						

Согласно (6.12) получаем разложение

$$y = g_2(2) - g_1(5) + g_1(7).$$

Этот результат можно проверить непосредственно, учитывая вид базисных функций Хаара, изображенных на рис. 4.

Схема (6.13) вычисления коэффициентов разложения (6.12) называется *быстрым преобразованием Хаара, связанным с прореживанием по частоте*. В этом преобразовании используются только сложения в количестве $2(N - 1)$ операций.

Отметим, что коэффициенты разложения (6.12) содержатся в таблице $\{y_\nu(k)\}$, построенной по формулам (6.9). Таким образом, в процессе вычисления коэффициентов Фурье мы попутно вычисляем и коэффициенты Хаара.

6.6. Формулы (6.13) допускают обращение:

$$\begin{aligned} y_{\nu-1}(p) &= \frac{1}{2}[y_\nu(p) + y_\nu(p + N_\nu)], \\ y_{\nu-1}(p + N_\nu) &= \frac{1}{2}[y_\nu(p) - y_\nu(p + N_\nu)], \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = s, s - 1, \dots, 1. \end{aligned}$$

При этом $y(p) = y_0(p)$, $p \in 0 : N - 1$. Получаем быстрый алгоритм восстановления отсчетов сигнала y , представленного в виде (6.12), на основном периоде.

7. Теорема об отсчетах в базисах Хаара

7.1. Начнем с базиса Хаара, связанного с прореживанием по времени.

Лемма 7.1. Для любого сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ при каждом $k \in 1 : s$ справедливо равенство

$$x = 2^{-k} \sum_{p=0}^{N_k-1} \xi_k(p) \varphi_k(p) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^k 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \xi_\nu(p + N_\nu) \varphi_\nu(p + N_\nu). \quad (7.1)$$

При $k = s$ получаем вейвлетное разложение (5.5).

Доказательство. Пусть $k = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} x &= \sum_{p=0}^{N-1} x(p) \delta_N(\cdot - p) = \sum_{p=0}^{N-1} \xi_0(p) \varphi_0(p) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_1-1} [\xi_0(2p) \varphi_0(2p) + \xi_0(2p+1) \varphi_0(2p+1)]. \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{x} = \sum_{p=0}^{N_1-1} [\xi_0(2p+1) \varphi_0(2p) + \xi_0(2p) \varphi_0(2p+1)].$$

Тогда

$$x = \frac{1}{2}(x + \tilde{x}) + \frac{1}{2}(x - \tilde{x}) =: \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} w_1. \quad (7.2)$$

На основании (5.3) и (5.4) получим

$$v_1 = \sum_{p=0}^{N_1-1} [\xi_0(2p) + \xi_0(2p+1)] [\varphi_0(2p) + \varphi_0(2p+1)] =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \xi_1(p) \varphi_1(p),$$

$$w_1 = \sum_{p=0}^{N_1-1} [\xi_0(2p) - \xi_0(2p+1)] [\varphi_0(2p) - \varphi_0(2p+1)] =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} \xi_1(p + N_1) \varphi_1(p + N_1).$$

Теперь формула (7.2) соответствует (7.1) при $k = 1$.

Сделаем индукционный переход от k к $k + 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{p=0}^{N_k-1} \xi_k(p) \varphi_k(p) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} [\xi_k(2p) \varphi_k(2p) + \xi_k(2p+1) \varphi_k(2p+1)]. \end{aligned}$$

Введем сигнал

$$\tilde{v}_k = \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} [\xi_k(2p+1) \varphi_k(2p) + \xi_k(2p) \varphi_k(2p+1)].$$

Тогда

$$v_k = \frac{1}{2}(v_k + \tilde{v}_k) + \frac{1}{2}(v_k - \tilde{v}_k) =: \frac{1}{2} v_{k+1} + \frac{1}{2} w_{k+1}. \quad (7.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} \xi_{k+1}(p) \varphi_{k+1}(p), \\ w_{k+1} &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} \xi_{k+1}(p + N_{k+1}) \varphi_{k+1}(p + N_{k+1}). \end{aligned}$$

Объединяя (7.1) и (7.3), получаем

$$\begin{aligned} x &= 2^{-k-1} \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} \xi_{k+1}(p) \varphi_{k+1}(p) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{k+1} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \xi_\nu(p + N_\nu) \varphi_\nu(p + N_\nu). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Теорема 7.1 (об отсчетах). Если для сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ при некотором $k \in 1 : s$ выполняются равенства $\xi_\nu(p + N_\nu) =$

$= 0$ для всех $p \in 0 : N_\nu - 1$ и $\nu = 1, \dots, k$, то

$$x = \sum_{p=0}^{N_k-1} x(2^k p) \varphi_k(p). \quad (7.4)$$

Доказательство. В силу (7.1) достаточно проверить, что $\xi_k(p) = 2^k x(2^k p)$ при $p \in 0 : N_k - 1$. На основании (5.4) имеем

$$\xi_{\nu-1}(2p) = \frac{1}{2} [\xi_\nu(p) + \xi_\nu(p + N_\nu)].$$

Учитывая условие теоремы, получаем $\xi_\nu(p) = 2 \xi_{\nu-1}(2p)$ при всех $p \in 0 : N_\nu - 1$ и $\nu = 1, \dots, k$. Значит, при $p \in 0 : N_k - 1$

$$\begin{aligned} \xi_k(p) &= 2 \xi_{k-1}(2p) = 2^2 \xi_{k-2}(2^2 p) = \dots = \\ &= 2^k \xi_0(2^k p) = 2^k x(2^k p). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Отметим, что согласно (2.4)

$$\varphi_k(0; j) = f_k(0; j) = \sum_{q=0}^{2^k-1} \delta_N(j - q),$$

т. е. $\varphi_k(0; j)$ является периодической ступенькой, равной единице при $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ и равной нулю при $j = 2^k, \dots, N - 1$. В силу (2.8), при $p \in 0 : N_k - 1$

$$\varphi_k(p; j) = f_k(p \Delta_{k+1}; j) = f_k(0; j - p \Delta_{k+1}) = \varphi_k(0; j - 2^k p).$$

Это позволяет переписать (7.4) в виде

$$x(j) = \sum_{p=0}^{N_k-1} x(2^k p) \varphi_k(0; j - 2^k p).$$

Последняя формула показывает, что в условиях теоремы 7.1 сигнал x представляет собой ступенчатую функцию, у которой $x(j) = x(2^k p)$ при $j \in \{2^k p, 2^k p + 1, \dots, 2^k(p + 1) - 1\}$, $p = 0, 1, \dots, N_k - 1$.

7.2. Обратимся к базису Хаара, связанному с прореживанием по частоте.

Лемма 7.2. Для любого сигнала $y \in \mathbb{C}_N$ при каждом $k \in 1 : s$ справедливо равенство

$$y = 2^{-k} \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p) g_k(p) + \sum_{\nu=1}^k 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} y_\nu(p + N_\nu) g_\nu(p + N_\nu). \quad (7.5)$$

При $k = s$ получаем вейвлетное разложение (6.12).

Доказательство. Пусть $k = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} y(j) &= \frac{1}{2} [y(j) + y(j - N_1)] + \frac{1}{2} [y(j) - y(j - N_1)] =: \\ &=: \frac{1}{2} v_1(j) + \frac{1}{2} w_1(j). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Согласно (6.10) и (6.13)

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{p=0}^{N-1} y(p) [\delta_N(\cdot - p) + \delta_N(\cdot - \langle p + N_1 \rangle_N)] = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} y_0(p) [g_0(p) + g_0(\langle p + N_1 \rangle_N)] = \\ &= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_0(p) g_1(p) + \sum_{p=0}^{N_1-1} y_0(p + N_1) g_1(p) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_1(p) g_1(p), \\ w_1 &= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_0(p) g_1(p + N_1) - \sum_{p=0}^{N_1-1} y_0(p + N_1) g_1(p + N_1) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=0}^{N_1-1} y_1(p + N_1) g_1(p + N_1).$$

Теперь формула (7.6) соответствует (7.5) при $k = 1$.

Сделаем индукционный переход от k к $k + 1$. Обозначим

$$v_k = \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p) g_k(p)$$

и запишем

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p) [g_k(p) + g_k(\langle p + N_{k+1} \rangle_{N_k})] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N_k-1} y_k(p) [g_k(p) - g_k(\langle p + N_{k+1} \rangle_{N_k})] =: \\ &=: \frac{1}{2} v_{k+1} + \frac{1}{2} w_{k+1}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_k(p) g_{k+1}(p) + \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_k(p + N_{k+1}) g_{k+1}(p) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_{k+1}(p) g_{k+1}(p), \\ w_{k+1} &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_k(p) g_{k+1}(p + N_{k+1}) - \\ &- \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_k(p + N_{k+1}) g_{k+1}(p + N_{k+1}) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_{k+1}(p + N_{k+1}) g_{k+1}(p + N_{k+1}). \end{aligned}$$

Объединив (7.5) и (7.7), получим

$$y = 2^{-k-1} \sum_{p=0}^{N_{k+1}-1} y_{k+1}(p) g_{k+1}(p) + \sum_{\nu=1}^{k+1} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} y_{\nu}(p + N_{\nu}) g_{\nu}(p + N_{\nu}).$$

Лемма доказана. \square

Теорема 7.2 (об отсчетах). Если для сигнала $y \in \mathbb{C}_N$ при некотором $k \in 1 : s$ выполняются равенства $y_{\nu}(p + N_{\nu}) = 0$ при всех $p \in 0 : N_{\nu} - 1$ и $\nu = 1, \dots, k$, то

$$y = \sum_{p=0}^{N_k-1} y(p) g_k(p). \quad (7.8)$$

Доказательство. В силу (7.5) достаточно проверить, что $y_k(p) = 2^k y(p)$ при $p \in 0 : N_k - 1$. На основании (6.13) имеем

$$y_{\nu-1}(p) = \frac{1}{2} [y_{\nu}(p) + y_{\nu}(p + N_{\nu})].$$

Учитывая условие теоремы, получаем $y_{\nu}(p) = 2 y_{\nu-1}(p)$ при всех $p \in 0 : N_{\nu} - 1$ и $\nu = 1, \dots, k$. Значит, при $p \in 0 : N_k - 1$

$$y_k(p) = 2 y_{k-1}(p) = 4 y_{k-2}(p) = \dots = 2^k y_0(p) = 2^k y(p).$$

Теорема доказана. \square

Отметим, что согласно (6.5)

$$g_k(0; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_N(j - qN_k) = \delta_{N_k}(j).$$

В силу (6.7), при $p \in 0 : N_k - 1$

$$g_k(p; j) = g_k(0; j - p) = \delta_{N_k}(j - p). \quad (7.9)$$

Это позволяет переписать (7.8) в виде

$$y(j) = \sum_{p=0}^{N_k-1} y(p) \delta_{N_k}(j-p).$$

Последняя формула показывает, что в условиях теоремы 7.2 сигнал y является N_k -периодическим.

По существу установлено, что с помощью разложения сигнала по базису Хаара, связанному с прореживанием по частоте, можно выявить скрытую периодичность.

8. Теорема о свертке в базисах Хаара

8.1. Формула (6.12) дает разложение сигнала $y \in \mathbb{C}_N$ по дискретному базису Хаара, связанному с прореживанием по частоте. Как отмечалось в п. 6.4, для базисных сигналов справедливо тождество

$$g_\nu(p + N_\nu; j) \equiv g_\nu(N_\nu; j - p),$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s-1.$$

Другими словами, все базисные сигналы ν -го уровня являются сдвигами одного сигнала $g_\nu(N_\nu)$. Введем обозначение $\psi_\nu(j) = g_\nu(N_\nu; j)$. Согласно теореме 6.4

$$\psi_\nu(j) = \delta_{N_{\nu-1}}(j) - \delta_{N_{\nu-1}}(j - N_\nu), \quad \nu = 1, \dots, s. \quad (8.1)$$

В частности, $\psi_\nu(-j) = \psi_\nu(j)$, $\psi_\nu(j - N_\nu) = -\psi_\nu(j)$. Чтобы упростить запись формулы (6.12), положим

$$\beta = y_s(0); \quad \hat{y}_\nu(p) = y_\nu(p + N_\nu), \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

В новых обозначениях формула (6.12) примет вид

$$y(j) = 2^{-s}\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{y}_\nu(p) \psi_\nu(j-p), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.2)$$

Мы воспользовались тем, что $g_s(0; j) \equiv 1$.

Изучим детальнее свойства сигнала ψ_ν .

Лемма 8.1. *Справедлива формула*

$$\psi_\nu(j) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.3)$$

Доказательство. В силу (8.1) сигнал ψ_ν является $N_{\nu-1}$ -периодическим. Поскольку $N_{\nu-1} = 2N_\nu$, то тем же свойством обладает и сигнал, стоящий в правой части (8.3). Значит, равенство (8.3) достаточно проверить на основном периоде $0 : N_{\nu-1} - 1$. При $j = 0$ и $j = N_\nu$ оно следует из (8.1). При $j \in 1 : N_\nu - 1$ и $j \in N_\nu + 1 : N_{\nu-1} - 1$ обе части в (8.3) равны нулю. Лемма доказана. \square

Лемма 8.2. *При $p \in 0 : N_\nu - 1$ справедливо равенство*

$$\psi_\nu(j - p) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(j - p), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.4)$$

Доказательство. Покажем, что

$$(-1)^{\lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(j - p) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(j - p). \quad (8.5)$$

Поскольку в обеих частях этого равенства стоят $N_{\nu-1}$ -периодические по j сигналы, то достаточно проверить его на периоде $p : p + N_{\nu-1} - 1$. При $j = p$ и $j = p + N_\nu$ равенство (8.5) верно. Оно верно и при остальных j из указанного периода, поскольку в этом случае обе части (8.5) равны нулю.

Теперь (8.4) следует из (8.3) и (8.5). \square

Лемма 8.3. *При всех целых j и p*

$$\psi_\nu(j - p) = (-1)^{\lfloor p/N_\nu \rfloor} \psi_\nu(j - \langle p \rangle_{N_\nu}). \quad (8.6)$$

Доказательство. Согласно (8.3) при всех целых j и l имеем

$$\psi_\nu(j - lN_\nu) = (-1)^l \psi_\nu(j).$$

Учитывая, что $j - p = (j - \langle p \rangle_{N_\nu}) - \lfloor p/N_\nu \rfloor N_\nu$, приходим к (8.6). \square

8.2. Выясним, как действует дискретное преобразование Хаара, связанное с прореживанием по частоте, на циклическую свертку. Напомним, что циклической сверткой сигналов x и y из \mathbb{C}_N называется сигнал $u = x * y$ с отсчетами

$$u(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(j - k).$$

Теорема 8.1 (о свертке). Пусть u — циклическая свертка сигналов x и y . Если наряду с (8.2) имеются разложения

$$x(j) = 2^{-s} \alpha + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{x}_\nu(p) \psi_\nu(j - p), \quad (8.7)$$

$$u(j) = 2^{-s} \gamma + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{u}_\nu(p) \psi_\nu(j - p), \quad (8.8)$$

то необходимо $\gamma = \alpha\beta$, $\hat{u}_s(0) = \hat{x}_s(0) \hat{y}_s(0)$ и

$$\hat{u}_\nu(p) = \sum_{q=0}^p \hat{x}_\nu(q) \hat{y}_\nu(p - q) - \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} \hat{x}_\nu(q) \hat{y}_\nu(p - q + N_\nu), \quad (8.9)$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = s - 1, s - 2, \dots, 1.$$

Доказательство. Преобразуем формулу

$$y(j - k) = 2^{-s} \beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{y}_\nu(p) \psi_\nu(j - k - p).$$

Как отмечалось в п. 8.1, $\psi_\nu(-j) = \psi_\nu(j)$. Вместе с (8.6) это дает

$$\psi_\nu(j - k - p) = \psi_\nu(k - (j - p)) =$$

$$= (-1)^{\lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor} \psi_\nu(k - \langle j-p \rangle_{N_\nu}).$$

Имеем

$$y(j-k) = 2^{-s}\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (j-p)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(p) \psi_\nu(k - \langle j-p \rangle_{N_\nu}).$$

Сделаем замену $q = \langle j-p \rangle_{N_\nu}$. Тогда $p = \langle j-q \rangle_{N_\nu}$ и

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{j-p}{N_\nu} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{j - \langle j-q \rangle_{N_\nu}}{N_\nu} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{j-q - \langle j-q \rangle_{N_\nu} + q}{N_\nu} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j-q}{N_\nu} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Приходим к формуле

$$y(j-k) = 2^{-s}\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(\langle j-q \rangle_{N_\nu}) \psi_\nu(k-q). \quad (8.10)$$

Подставим (8.7) и (8.10) в формулу для свертки. Учитывая вещественность, ортогональность и нормировку базисных функций, получаем

$$u(j) = 2^{-s}\alpha\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor} \widehat{x}_\nu(q) \widehat{y}_\nu(\langle j-q \rangle_{N_\nu}).$$

Запишем

$$\begin{aligned} &(-1)^{\lfloor (j-q)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(\langle j-q \rangle_{N_\nu}) = \\ &= (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor + \lfloor (\langle j \rangle_{N_\nu} - q)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(\langle \langle j \rangle_{N_\nu} - q \rangle_{N_\nu}) = \\ &= (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(\langle p-q \rangle_{N_\nu}) \delta_{N_\nu}(\langle j \rangle_{N_\nu} - p). \end{aligned}$$

Согласно (8.4)

$$\delta_{N_\nu}(\langle j \rangle_{N_\nu} - p) = \delta_{N_\nu}(j - p) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor} \psi_\nu(j - p),$$

поэтому

$$u(j) = 2^{-s} \alpha \beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \left\{ \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor} \hat{x}_\nu(q) \hat{y}_\nu(\langle p-q \rangle_{N_\nu}) \right\} \psi_\nu(j - p).$$

Но для сигнала u имеется представление (8.8). В силу единственности разложения сигнала по ортогональному базису заключаем, что $\gamma = \alpha\beta$, а сумма в фигурных скобках есть не что иное как $\hat{u}_\nu(p)$. Остается заметить, что

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor} \hat{x}_\nu(q) \hat{y}_\nu(\langle p-q \rangle_{N_\nu}) = \\ & = \sum_{q=0}^p \hat{x}_\nu(q) \hat{y}_\nu(p - q) - \sum_{q=p+1}^{N_\nu-1} \hat{x}_\nu(q) \hat{y}_\nu(p - q + N_\nu). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Выражение, стоящее в правой части формулы (8.9), называется *косоциклической сверткой* сигналов \hat{x}_ν и \hat{y}_ν . Таким образом, коэффициенты ν -го уровня в разложении циклической свертки u по базису Хаара, связанному с прореживанием по частоте, получаются как результат косоциклической свертки коэффициентов разложения ν -го уровня сигналов x и y .

8.3. Обратимся к дискретному базису Хаара, связанному с прореживанием по времени (п. 4.2 и 5.1). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(p + N_\nu; j) &= f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu(\Delta_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}) = \\ &= \varphi_\nu(N_\nu; j - p\Delta_{\nu+1}). \end{aligned}$$

Для простоты вместо $\varphi_\nu(N_\nu; j)$ будем писать $\varphi_\nu(j)$. Согласно (4.8)

$$\varphi_\nu(j) = \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \delta_N(j-q) - \sum_{q=\Delta_\nu}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j-q). \quad (8.11)$$

В разложении (5.5) переобозначим $\alpha := \xi_s(0)$, $\widehat{\xi}_\nu(p) := \xi_\nu(p + N_\nu)$. Тогда формула (5.5) примет вид

$$x(j) = 2^{-s}\alpha + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \widehat{\xi}_\nu(p) \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}). \quad (8.12)$$

Мы воспользовались тем, что $\varphi_s(0; j) \equiv f_s(0; j) \equiv 1$.

Изучим детальнее свойства сигнала φ_ν .

Лемма 8.4. *Справедливо равенство*

$$\varphi_\nu(j) = (-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.13)$$

Доказательство. Правая часть (8.13) является N -периодической, поскольку $N = 2N_\nu\Delta_\nu = N_\nu\Delta_{\nu+1}$; N -периодична и левая часть. Значит, равенство (8.13) достаточно проверить при $j \in 0 : N - 1$.

Правая часть (8.13) равна 1 при $j \in 0 : \Delta_\nu - 1$, равна -1 при $j \in \Delta_\nu : \Delta_{\nu+1} - 1$ и равна нулю при $j \in \Delta_{\nu+1} : N - 1$ (учесть, что $N = N_\nu\Delta_{\nu+1}$). Те же значения при указанных j имеет, согласно (8.11), и $\varphi_\nu(j)$. Лемма доказана. \square

Подставив в (8.13) $j - p\Delta_{\nu+1}$ вместо j , получим

$$\varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}) = (-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p). \quad (8.14)$$

При $j \in 0 : N - 1$ коэффициент $(-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor}$ можно представить иначе. Пусть $j = (j_{s-1}, \dots, j_0)_2$. Тогда

$$\left\lfloor \frac{j}{\Delta_\nu} \right\rfloor = \frac{j_{s-1}2^{s-1} + \dots + j_\nu 2^\nu + j_{\nu-1}2^{\nu-1}}{2^{\nu-1}} =$$

$$= j_{s-1}2^{s-\nu} + \cdots + j_\nu 2 + j_{\nu-1},$$

так что

$$(-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} = (-1)^{j_{\nu-1}}. \quad (8.15)$$

В следующей лемме будет использоваться операция \oplus поразрядного сложения по модулю 2 (см. «Предварительные сведения», п. 5).

Лемма 8.5. *При фиксированном $k \in 0 : N-1$, $k = (k_{s-1}, \dots, k_0)_2$, справедливо равенство*

$$\varphi_\nu(j \oplus k) = (-1)^{k_{\nu-1}} \varphi_\nu(j - \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}), \quad (8.16)$$

$$j \in 0 : N-1.$$

Доказательство. Запишем

$$j = \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + j_{\nu-1} \Delta_\nu + \langle j \rangle_{\Delta_\nu},$$

$$k = \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1} + k_{\nu-1} \Delta_\nu + \langle k \rangle_{\Delta_\nu}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} j \oplus k &= (\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor) \Delta_{\nu+1} + \langle j_{\nu-1} + k_{\nu-1} \rangle_2 \Delta_\nu + \\ &\quad + (\langle j \rangle_{\Delta_\nu} \oplus \langle k \rangle_{\Delta_\nu}). \end{aligned}$$

Согласно (8.13) и (8.15)

$$\varphi_\nu(j \oplus k) = (-1)^{j_{\nu-1} + k_{\nu-1}} \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor).$$

Воспользуемся равенством $\delta_{N_\nu}(a \oplus b) = \delta_{N_\nu}(a - b)$, $a, b \in 0 : N_\nu - 1$ (оно верно как при $a = b$, так и при $a \neq b$). Получим

$$\varphi_\nu(j \oplus k) = (-1)^{j_{\nu-1} + k_{\nu-1}} \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor). \quad (8.17)$$

В силу (8.14) и (8.15)

$$(-1)^{j_{\nu-1}} \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor) =$$

$$= \varphi_\nu(j - \lfloor k/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}). \quad (8.18)$$

Объединив (8.17) и (8.18), придем к (8.16). Лемма доказана. \square

Следствие. При $p \in 0 : N_\nu - 1$ имеем

$$\varphi_\nu(j \oplus p\Delta_{\nu+1}) = \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}), \quad j \in 0 : N - 1. \quad (8.19)$$

8.4. Применение дискретного преобразования Хаара, связанного с прореживанием по времени, к циклической свертке не дает удовлетворительного результата. Более эффективным является применение этого преобразования к диадной свертке.

Диадной сверткой сигналов x и y из \mathbb{C}_N называется сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ с отсчетами

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(j \oplus k), \quad j \in 0 : N - 1. \quad (8.20)$$

Теорема 8.2 (о диадной свертке). Пусть z — диадная свертка сигналов x и y . Если наряду с (8.12) имеются разложения

$$y(j) = 2^{-s}\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{\eta}_\nu(p) \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}),$$

$$z(j) = 2^{-s}\gamma + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{\zeta}_\nu(p) \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}),$$

то необходимо $\gamma = \alpha\beta$ и

$$\hat{\zeta}_\nu(p) = \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \hat{\xi}_\nu(q) \hat{\eta}_\nu(p \oplus q), \quad (8.21)$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Доказательство. Зафиксируем $j \in 0 : N - 1$. Согласно (8.19)

$$y(j \oplus k) = 2^{-s}\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{\eta}_\nu(p) \varphi_\nu((j \oplus k) \oplus p\Delta_{\nu+1}).$$

Так как

$$\begin{aligned} (j \oplus k) \oplus p\Delta_{\nu+1} &= k \oplus (j \oplus p\Delta_{\nu+1}) = \\ &= k \oplus ((\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p) \Delta_{\nu+1} + j_{\nu-1} \Delta_\nu + \langle j \rangle_{\Delta_\nu}), \end{aligned}$$

то, в силу (8.16),

$$\begin{aligned} y(j \oplus k) &= 2^{-s}\beta + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} (-1)^{j_{\nu-1}} \hat{\eta}_\nu(p) \varphi_\nu(k - (\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p)\Delta_{\nu+1}). \end{aligned}$$

Произведя замену $q = p \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor$, придем к формуле

$$\begin{aligned} y(j \oplus k) &= 2^{-s}\beta + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{j_{\nu-1}} \hat{\eta}_\nu(q \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) \varphi_\nu(k - q\Delta_{\nu+1}). \quad (8.22) \end{aligned}$$

Подставим (8.12) и (8.22) в (8.20). Учитывая вещественность, ортогональность и нормировку базисных сигналов, получаем

$$\begin{aligned} z(j) &= 2^{-s}\alpha\beta + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} (-1)^{j_{\nu-1}} \hat{\xi}_\nu(q) \hat{\eta}_\nu(q \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor). \quad (8.23) \end{aligned}$$

Следующее преобразование основано на формулах (8.14) и (8.15):

$$\begin{aligned} &(-1)^{j_{\nu-1}} \hat{\eta}_\nu(q \oplus \lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{\eta}_\nu(q \oplus p) [(-1)^{\lfloor j/\Delta_\nu \rfloor} \delta_{N_\nu}(\lfloor j/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p)] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \hat{\eta}_\nu(p \oplus q) \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}). \quad (8.24)$$

Подставим (8.24) в (8.23). Придем к разложению

$$z(j) = 2^{-s}\alpha\beta + \\ + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \left\{ \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \hat{\xi}_\nu(q) \hat{\eta}_\nu(p \oplus q) \right\} \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Единственность разложения по ортогональному базису гарантирует, что $\gamma = \alpha\beta$ и что сумма в фигурных скобках равна $\hat{\zeta}_\nu(p)$. Теорема доказана. \square

Формула (8.21) показывает, что коэффициенты ν -го уровня в разложении диадной свертки z по базису Хаара, связанному с прореживанием по времени, получаются как результат диадной же свертки коэффициентов разложения ν -го уровня сигналов x и y .

9. Вторая последовательность ортогональных базисов

9.1. Сохраним обозначения $N = 2^s$, $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$. Построим еще одну последовательность ортогональных базисов $w_\nu = \{w_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \dots, s$, с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} w_0(k) &= \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ w_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + w_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \\ & \\ w_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - w_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Эти формулы отличаются от (2.1) только тем, что коэффициент $\omega_{\Delta_{\nu+1}}^l$ заменен на единицу. Переход от базиса $w_{\nu-1}$ к базису w_ν можно записать одной строкой

$$\begin{aligned} w_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= w_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}(l + (2p+1)\Delta_\nu), \quad (9.2) \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma \in 0 : 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

В частности, при $\nu = 1$

$$w_1(\sigma + 2p) = w_0(2p) + (-1)^\sigma w_0(2p + 1), \quad (9.3)$$

$$p \in 0 : N_1 - 1, \quad \sigma \in 0 : 1.$$

Что представляют собой сигналы $w_s(k; j)$? Для ответа на этот вопрос потребуется некоторая подготовка.

9.2. Введем последовательность матриц

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_\nu = \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix}, \quad \nu = 2, \dots, s. \quad (9.4)$$

Матрица A_ν называется *матрицей Адамара*. Это квадратная матрица порядка $\Delta_{\nu+1}$. Будем считать, что индексы ее строк и столбцов изменяются от 0 до $\Delta_{\nu+1} - 1$.

Пусть $k, j \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$, $k = (k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \dots, k_0)_2$, $j = (j_{\nu-1}, j_{\nu-2}, \dots, j_0)_2$. Положим

$$\{k, j\}_\nu = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} k_\alpha j_\alpha.$$

Теорема 9.1. Для элементов матрицы Адамара справедлива формула

$$A_\nu[k, j] = (-1)^{\{k, j\}_\nu}, \quad k, j \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1. \quad (9.5)$$

Доказательство. При $\nu = 1$ утверждение очевидно, поскольку $A_1[k, j] = (-1)^{kj}$ при $k, j \in 0 : 1$. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν .

Возьмем $k, j \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ и представим их так: $k = k_{\nu-1}2^{\nu-1} + l$, $j = j_{\nu-1}2^{\nu-1} + q$. Здесь $k_{\nu-1}, j_{\nu-1} \in 0 : 1$, $l, q \in 0 : \Delta_{\nu} - 1$. Согласно (9.4)

$$A_{\nu}[k, j] = (-1)^{k_{\nu-1}j_{\nu-1}} A_{\nu-1}[l, q]. \quad (9.6)$$

Принимая во внимание индукционное предположение, получаем

$$A_{\nu}[k, j] = (-1)^{k_{\nu-1}j_{\nu-1} + \{l, q\}_{\nu-1}} = (-1)^{\{k, j\}_{\nu}}.$$

Теорема доказана. \square

Формула (9.6) нам потребуется еще раз в виде

$$A_{\nu}[l + \sigma\Delta_{\nu}, q + \tau\Delta_{\nu}] = (-1)^{\sigma\tau} A_{\nu-1}[l, q], \quad (9.7)$$

$$l, q \in 0 : \Delta_{\nu} - 1, \quad \sigma, \tau \in 0 : 1.$$

9.3. Теорема 9.2. *Имеет место представление*

$$w_{\nu}(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_{\nu}[l, q] w_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \quad (9.8)$$

$$p \in 0 : N_{\nu} - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (9.8) совпадает с (9.3), если в последней заменить σ на l . Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν .

Индекс $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ представим в виде $l = \sigma\Delta_{\nu} + l'$, где $l' \in 0 : \Delta_{\nu} - 1$, $\sigma \in 0 : 1$. На основании (9.2) и индукционного предположения запишем

$$w_{\nu}(l + p\Delta_{\nu+1}) = w_{\nu}(l' + \sigma\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= w_{\nu-1}(l' + 2p\Delta_\nu) + (-1)^\sigma w_{\nu-1}(l' + (2p+1)\Delta_\nu) = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_{\nu-1}[l', q] w_0(q + 2p\Delta_\nu) + \\
&+ (-1)^\sigma \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_{\nu-1}[l', q] w_0(q + (2p+1)\Delta_\nu).
\end{aligned}$$

Согласно (9.7)

$$\begin{aligned}
A_{\nu-1}[l', q] &= A_\nu[l' + \sigma\Delta_\nu, q] = A_\nu[l, q], \\
(-1)^\sigma A_{\nu-1}[l', q] &= A_\nu[l' + \sigma\Delta_\nu, q + \Delta_\nu] = A_\nu[l, q + \Delta_\nu].
\end{aligned}$$

Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned}
w_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_\nu[l, q] w_0(q + p\Delta_{\nu+1}) + \\
&+ \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} A_\nu[l, q + \Delta_\nu] w_0(q + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \\
&= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_\nu[l, q] w_0(q + p\Delta_{\nu+1}).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

При $\nu = s$ формула (9.8) принимает вид

$$w_s(l; j) = \sum_{q=0}^{N-1} A_s[l, q] \delta_N(j - q) = A_s[l, j] = (-1)^{\{l, j\}_s},$$

$$l, j \in 0 : N - 1.$$

Функции

$$v_k(j) = (-1)^{\{k, j\}_s}, \quad k, j \in 0 : N - 1, \quad (9.9)$$

называются *дискретными функциями Уолша*. Таким образом,

$$w_s(k; j) = A_s[k, j] = v_k(j), \quad k, j \in 0 : N - 1. \quad (9.10)$$

На рис. 5 представлены функции Уолша при $N = 8$.

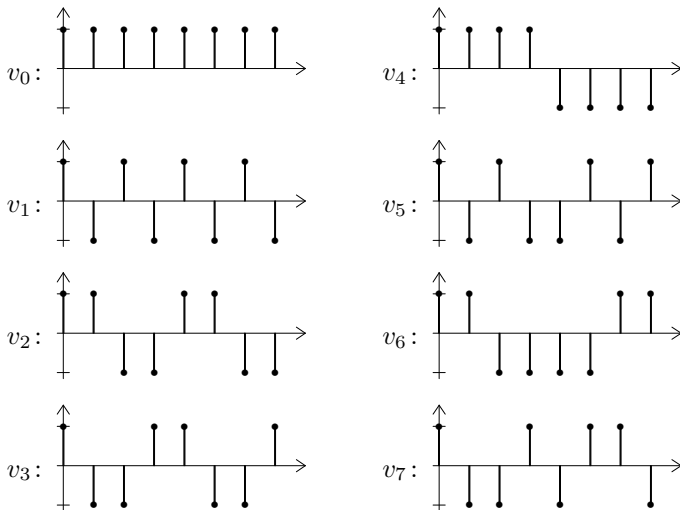


Рис. 5. Функции Уолша при $N = 8$

9.4. Теорема 9.3. При каждом $\nu \in 0 : s$ сигналы

$$w_\nu(0), w_\nu(1), \dots, w_\nu(N-1) \quad (9.11)$$

попарно ортогональны и $\|w_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$ при всех $k \in 0 : N-1$.

Доказательство. При $\nu = 0$ утверждение известно. Пусть $\nu \in 1 : s$. Возьмем $k, k' \in 0 : N-1$ и представим их в виде $k = l + p\Delta_{\nu+1}$, $k' = l' + p'\Delta_{\nu+1}$, где $l, l' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$, $p, p' \in 0 : N_\nu - 1$. Согласно (9.8) и лемме 1.1.3 имеем

$$\langle w_\nu(k), w_\nu(k') \rangle =$$

$$= \sum_{q, q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_{\nu}[l, q] A_{\nu}[l', q'] \delta_N(q - q' + (p - p')\Delta_{\nu+1}).$$

Если $p \neq p'$, то $\langle w_{\nu}(k), w_{\nu}(k') \rangle = 0$. Пусть $p = p'$. Тогда

$$\langle w_{\nu}(k), w_{\nu}(k') \rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_{\nu}[l, q] A_{\nu}[l', q].$$

Отметим, что в силу (9.5) матрица A_{ν} симметрична. Кроме того,

$$A_{\nu} A_{\nu} = 2^{\nu} I_{2^{\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (9.12)$$

где $I_{2^{\nu}}$ — единичная матрица порядка 2^{ν} . При $\nu = 1$ это очевидно. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν . Согласно (9.4)

$$\begin{aligned} A_{\nu} A_{\nu} &= \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\nu-1} & A_{\nu-1} \\ A_{\nu-1} & -A_{\nu-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2A_{\nu-1}A_{\nu-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 2A_{\nu-1}A_{\nu-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2^{\nu}I_{2^{\nu-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & 2^{\nu}I_{2^{\nu-1}} \end{bmatrix} = 2^{\nu}I_{2^{\nu}}. \end{aligned}$$

Справедливость равенства (9.12) установлена. На основании указанных свойств матрицы Адамара A_{ν} получаем

$$\begin{aligned} \langle w_{\nu}(k), w_{\nu}(k') \rangle &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} A_{\nu}[l, q] A_{\nu}[q, l'] = (A_{\nu}A_{\nu})[l, l'] = \\ &= 2^{\nu}I_{2^{\nu}}[l, l']. \end{aligned}$$

Теперь можно сделать вывод о том, что скалярное произведение $\langle w_{\nu}(k), w_{\nu}(k') \rangle$ отлично от нуля только при $p = p'$ и $l = l'$, т.е. только при $k = k'$. В последнем случае $\|w_{\nu}(k)\|^2 = 2^{\nu}$ при всех $k \in 0 : N - 1$.

Теорема доказана. \square

По существу выяснено, что при каждом $\nu \in 0 : s$ сигналы (9.11) образуют ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N . В частности, ортогональный базис образуют функции Уолша v_0, v_1, \dots, v_{N-1} вида (9.9). Этот базис называется *базисом Уолша–Адамара* или чаще *базисом Уолша*. Отметим, что $\|v_k\|^2 = N$ при всех $k \in 0 : N - 1$.

10. Быстрое преобразование Уолша

10.1. Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по базису Уолша

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k) v_k. \quad (10.1)$$

Здесь $x_s(k) = \langle x, v_k \rangle$ или в развернутой форме

$$x_s(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) v_k(j), \quad k \in 0 : N - 1. \quad (10.2)$$

Преобразование \mathcal{W}_N , сопоставляющее сигналу $x \in \mathbb{C}_N$ сигнал $x_s = \mathcal{W}_N(x)$ с компонентами (10.2), называется *дискретным преобразованием Уолша* (ДПУ). По аналогии с ДПФ сигнал x_s называется *спектром Уолша* сигнала x . Формулу (10.1) можно воспринимать как формулу обращения для ДПУ.

Рассмотрим вопрос о быстром вычислении спектра Уолша.

10.2. При каждом $\nu \in 0 : s$ сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ можно разложить по базису (9.11):

$$x = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k) w_\nu(k). \quad (10.3)$$

Здесь $x_\nu(k) = \langle x, w_\nu(k) \rangle$. При $\nu = s$ формула (10.3) совпадает с (10.1). Это следует из (9.10)

Рекуррентные соотношения (9.1) для базисных функций порождают рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений (10.3):

$$\begin{aligned} x_0(k) &= x(k), \quad k \in 0 : N - 1; \\ x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) + x_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu), \\ x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= \\ &= x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) - x_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu), \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{10.4}$$

При $\nu = s$ получаем спектр Уолша x_s сигнала x .

Схема (10.4) называется *быстрым преобразованием Уолша, связанным с прореживанием по времени*. Эта схема использует только сложения в количестве $N \log_2 N$ операций.

Соотношения (10.4) допускают обращение

$$\begin{aligned} x_{\nu-1}(l + 2p\Delta_\nu) &= \\ &= \frac{1}{2} [x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) + x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})], \\ x_{\nu-1}(l + (2p + 1)\Delta_\nu) &= \\ &= \frac{1}{2} [x_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) - x_\nu(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1})], \\ p &\in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = s, s - 1, \dots, 1. \end{aligned} \tag{10.5}$$

При этом $x(k) = x_0(k)$, $k \in 0 : N - 1$. Схема (10.5) позволяет быстро восстановить отсчеты сигнала x , представленного в виде (10.1), на основном периоде.

10.3. Последовательность ортогональных базисов $\{w_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \dots, s$, порождает вейвлетные базисы и вейвлет-пакет. Это делается точно так же, как в случае

последовательности $\{f_\nu(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \dots, s$ (см. п. 4.1). Используется блочная структура базисов w_ν , которая следует из формулы, аналогичной (2.8):

$$w_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}; j) \equiv w_\nu(l; j - p\Delta_{\nu+1}),$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 0, 1, \dots, s.$$

Мы не будем останавливаться на деталях. Отметим лишь, что схема ветвления (а) на рис. 2 и в данном случае порождает базис Хаара, связанный с прореживанием по времени.

11. Упорядочение функций Уолша

11.1. Сигналы, входящие в экспоненциальный базис, упорядочены по частоте. Индекс k в записи

$$u_k(j) = \omega_N^{kj} = \exp(i\frac{2\pi k}{N}j), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

есть *частота* сигнала $u_k(j)$ в том смысле, что при изменении j от 0 до N (до начала следующего периода) аргумент комплексного числа $u_k(j)$, равный $\frac{2\pi k}{N}j$, изменяется, монотонно возрастая, от 0 до $2\pi k$, т. е. точка $u_k(j)$ пробегает единичную окружность комплексной плоскости k раз.

Рассмотрим с этой точки зрения функции Уолша

$$v_k(j) = (-1)^{\{k, j\}_s} = \exp(i\pi\{k, j\}_s), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

К сожалению, величина $\{k, j\}_s$ не возрастает монотонно вместе с j . Пример поведения этой величины при $N = 2^3$ и $k = 2 = (0, 1, 0)_2$ приведен в табл. 8.

Таблица 8. Поведение величины $\{k, j\}_3$

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\{k, j\}_3$	0	0	1	1	0	0	1	1

Чтобы добиться монотонности, приведем $v_k(j)$ при $j = (j_{s-1}, \dots, j_0)_2$ к виду

$$v_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{\alpha}(j_{\alpha} + j_{\alpha+1}2 + \dots + j_{s-1}2^{s-1-\alpha})}.$$

Отметим, что

$$j/2^{\alpha} = j_{s-1}2^{s-1-\alpha} + \dots + j_{\alpha+1}2 + j_{\alpha} + j_{\alpha-1}2^{-1} + \dots + j_02^{-\alpha},$$

так что

$$\lfloor j/2^{\alpha} \rfloor = j_{s-1}2^{s-1-\alpha} + \dots + j_{\alpha+1}2 + j_{\alpha}.$$

Получаем

$$v_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{\alpha} \lfloor j/2^{\alpha} \rfloor}, \quad j \in 0 : N-1.$$

Обозначив

$$\theta_k(j) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{\alpha} \lfloor j/2^{\alpha} \rfloor,$$

придем к представлению

$$v_k(j) = (-1)^{\theta_k(j)}, \quad j \in 0 : N-1. \quad (11.1)$$

Формула (11.1) верна и при $j = N = 2^s$. В этом случае

$$\theta_k(N) = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{\alpha} 2^{s-\alpha} = 2 \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{\alpha} 2^{s-1-\alpha} = 2 \operatorname{rev}_s(k).$$

Следовательно, правая часть (11.1) при $j = N$ равна единице. В силу N -периодичности и левая часть (11.1) равна единице. Действительно, $v_k(N) = v_k(0) = 1$. Таким образом, формула (11.1) справедлива при $j \in 0 : N$.

Перепишем (11.1) в виде

$$v_k(j) = \exp(i\pi\theta_k(j)), \quad j \in 0 : N.$$

Очевидно, что функция $\theta_k(j)$ при увеличении аргумента от 0 до N изменяется, *монотонно не убывая*, от 0 до $2\text{rev}_s(k)$. Как следствие, аргумент комплексного числа $v_k(j)$, равный $\pi\theta_k(j)$, при увеличении j от 0 до N изменяется, монотонно не убывая, от 0 до $2\pi\text{rev}_s(k)$. Это значит, что точка $v_k(j)$ пробегает $\text{rev}_s(k)$ раз единичную окружность комплексной плоскости. Число $\text{rev}_s(k)$ и принимается за частоту функции Уолша v_k .

Обозначим $\hat{v}_k = v_{\text{rev}_s(k)}$. Функция \hat{v}_k имеет частоту k , поскольку $\text{rev}_s(\text{rev}_s(k)) = k$. Ее можно представить в виде

$$\hat{v}_k(j) = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{s-1} k_{s-1-\alpha} j_{\alpha}}, \quad k, j \in 0 : N-1.$$

Функции Уолша $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}$ упорядочены по частоте. Они образуют *базис Уолша—Пэли* пространства \mathbb{C}_N .

На рис. 6 изображены функции $\hat{v}_k(j)$ при $N = 8$.

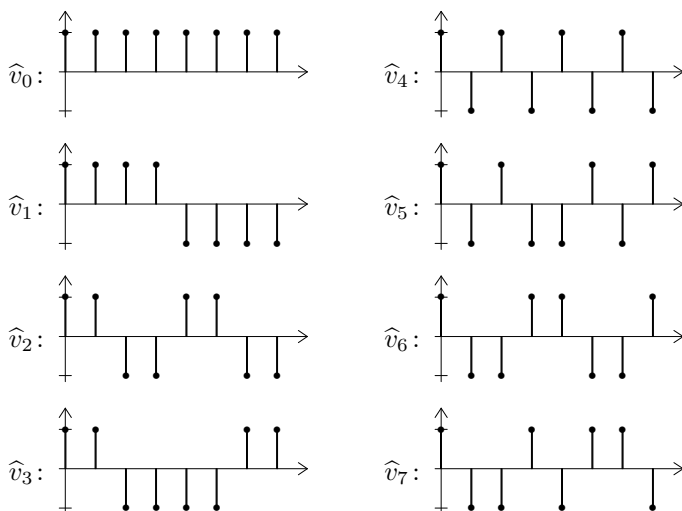


Рис. 6. Функции Уолша, упорядоченные по частоте, при $N = 8$

11.2. Разложим сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ по базису $\{\widehat{v}_k\}$. Для этого в алгоритме (10.4) изменим начальные присваивания — вместо $x_0(k) = x(k)$ положим

$$x_0(k) = x(\text{rev}_s(k)), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Остальное оставим без изменения. В результате получим

$$x_0(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k) v_k(j). \quad (11.2)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} v_k(j) &= (-1)^{\{\text{rev}_s(k), \text{rev}_s(j)\}_s} = v_{\text{rev}_s(k)}(\text{rev}_s(j)) = \\ &= \widehat{v}_k(\text{rev}_s(j)). \end{aligned}$$

Следовательно, формулу (11.2) можно переписать так:

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k) \widehat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N - 1.$$

Это и есть требуемое разложение.

11.3. Существует еще одно упорядочение функций Уолша — по количеству перемен знака на основном периоде. Чтобы разобраться в этом, придется вернуться к матрицам Адамара (п. 9.2).

Обозначим через $\text{wal}_\nu(k)$ количество перемен знака в строке матрицы Адамара A_ν с индексом $k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. Согласно (9.4), $\text{wal}_1(0) = 0$, $\text{wal}_1(1) = 1$.

Теорема 11.1. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned} \text{wal}_1(k) &= k, \quad k \in 0 : 1; \\ \text{wal}_\nu(2k) &= \text{wal}_{\nu-1}(k), \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\text{wal}_\nu(2k+1) = 2^\nu - 1 - \text{wal}_{\nu-1}(k), \quad (11.4)$$

$$k \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 2, \dots, s.$$

Доказательство. Первое соотношение верно. Проверим (11.3) и (11.4). Напомним, что $A_\nu[k, j] = (-1)^{\{k, j\}_\nu}$. Отсюда следует, что при $k, j \in 0 : \Delta_\nu - 1$

$$A_\nu[2k, 2j] = A_\nu[2k, 2j+1] = A_\nu[2k+1, 2j] = A_{\nu-1}[k, j],$$

$$A_\nu[2k+1, 2j+1] = -A_{\nu-1}[k, j].$$

Покажем сначала, что выполняется (11.3). Поскольку $A_\nu[2k, 2j] = A_\nu[2k, 2j+1]$, то при подсчете перемен знака элементы $A_\nu[2k, 2j+1]$ можно не учитывать. Останутся элементы $A_\nu[2k, 2j] = A_{\nu-1}[k, j]$, которые по определению имеют $\text{wal}_{\nu-1}(k)$ перемен знака. Соотношение (11.3) установлено.

Равенство (11.4) перепишем в виде

$$\text{wal}_\nu(2k) + \text{wal}_\nu(2k+1) = 2^\nu - 1. \quad (11.5)$$

Введем подматрицы второго порядка

$$G_j = \begin{bmatrix} A_\nu[2k, j-1] & A_\nu[2k, j] \\ A_\nu[2k+1, j-1] & A_\nu[2k+1, j] \end{bmatrix},$$

$$j = 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1.$$

Покажем, что у G_j в одной из строк имеется перемена знака, а в другой — нет. Рассмотрим два случая.

а) $j = 2j' + 1$, $j' \in 0 : \Delta_\nu - 1$. Запишем

$$\begin{aligned} G_j &= \begin{bmatrix} A_\nu[2k, 2j'] & A_\nu[2k, 2j'+1] \\ A_\nu[2k+1, 2j'] & A_\nu[2k+1, 2j'+1] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{\nu-1}[k, j'] & A_{\nu-1}[k, j'] \\ A_{\nu-1}[k, j'] & -A_{\nu-1}[k, j'] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что у G_j только вторая строка имеет переменную знака.

б) $j = 2j'$, $j' \in 1 : \Delta_\nu - 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} G_j &= \begin{bmatrix} A_\nu[2k, 2(j' - 1) + 1] & A_\nu[2k, 2j'] \\ A_\nu[2k + 1, 2(j' - 1) + 1] & A_\nu[2k + 1, 2j'] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{\nu-1}[k, j' - 1] & A_{\nu-1}[k, j'] \\ -A_{\nu-1}[k, j' - 1] & A_{\nu-1}[k, j'] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

У G_j имеется только одна переменная знака в первой или второй строке.

Последовательность $G_1, G_2, \dots, G_{\Delta_{\nu+1}-1}$ накапливает $\Delta_{\nu+1} - 1$ перемен знака в строках матрицы A_ν с индексами $2k$ и $2k + 1$, что соответствует (11.5). Теорема доказана. \square

Следствие. Отображение $k \rightarrow \text{wal}_\nu(k)$ является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. Действительно, при $\nu = 1$ это очевидно. Если это верно при $\nu - 1$, то верно и при ν , поскольку в силу (11.3) на четных индексах $\text{wal}_\nu(2k)$ находятся числа от 0 до $\Delta_\nu - 1$, а на нечетных индексах $\text{wal}_\nu(2k+1)$ согласно (11.4) располагаются числа от Δ_ν до $\Delta_{\nu+1} - 1$.

11.4. Напомним (см. п. 9.3), что $A_s[k, j] = v_k(j)$ при $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Это значит, что величина $\text{wal}_s(k)$ есть количество перемен знака у функции Уолша $v_k(j)$ на основном периоде. Как установлено выше, количество перемен знака у разных функций Уолша различно и изменяется от 0 до $N - 1$.

Обозначим $\tilde{v}_k = v_{\text{wal}_s^{-1}(k)}$. Так как $\text{wal}_s(\text{wal}_s^{-1}(k)) = k$, то функция \tilde{v}_k имеет k перемен знака на основном периоде. Функции Уолша $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{N-1}$ упорядочены по количеству перемен знака.

На рис. 7 изображены функции $\tilde{v}_k(j)$ при $N = 8$.

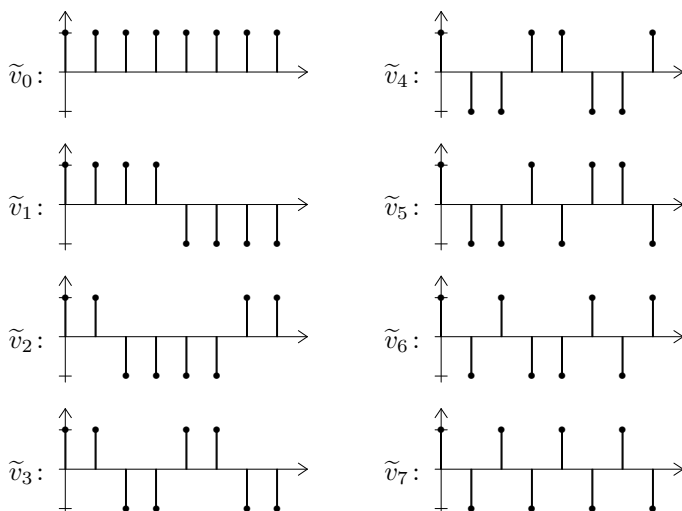


Рис. 7. Функции Уолша, упорядоченные по количеству перемен знака, при $N = 8$

11.5. Разложим сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ по базису $\{\tilde{v}_k\}$. Для этого в алгоритме (10.4) изменим начальные присваивания — вместо $x_0(k) = x(k)$ положим

$$x_0(k) = x(\text{wal}_s^{-1}(k)), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Остальное оставим без изменения. В результате получим

$$x_0(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k) v_k(j). \quad (11.6)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} v_k(j) &= (-1)^{\{\text{wal}_s^{-1}(k), \text{wal}_s^{-1}(j)\}_s} = \\ &= v_{\text{wal}_s^{-1}(k)}(\text{wal}_s^{-1}(j)) = \tilde{v}_k(\text{wal}_s^{-1}(j)). \end{aligned}$$

Следовательно, формулу (11.6) можно переписать так:

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k) \tilde{v}_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

Это и есть требуемое разложение.

11.6. С помощью перестановок rev_s и wal_s определяются частота и количество перемен знака у функций Уолша. Оказывается, что эти перестановки связаны между собой через перестановку grey_s (см. «Предварительные сведения», п. 4).

Теорема 11.2. *При всех $\nu \in 1 : s$ выполняется равенство*

$$\text{grey}_\nu(\text{wal}_\nu(k)) = \text{rev}_\nu(k), \quad k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1. \quad (11.7)$$

Доказательство. Напомним рекуррентные соотношения для перестановок rev_ν и grey_ν :

$$\text{rev}_1(k) = k, \quad k \in 0 : 1;$$

$$\text{rev}_\nu(2k) = \text{rev}_{\nu-1}(k),$$

$$\text{rev}_\nu(2k+1) = 2^{\nu-1} + \text{rev}_{\nu-1}(k),$$

$$k \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 2, 3, \dots;$$

$$\text{grey}_1(k) = k, \quad k \in 0 : 1;$$

$$\text{grey}_\nu(k) = \text{grey}_{\nu-1}(k),$$

$$\text{grey}_\nu(2^\nu - 1 - k) = 2^{\nu-1} + \text{grey}_{\nu-1}(k),$$

$$k \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

При $\nu = 1$ формула (11.7) верна. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν .

Отдельно рассмотрим случаи четного и нечетного k . Пусть $k = 2k'$, $k' \in 0 : \Delta_\nu - 1$. Согласно теореме 11.1 и индукционному предположению

$$\begin{aligned} \text{grey}_\nu(\text{wal}_\nu(2k')) &= \text{grey}_\nu(\text{wal}_{\nu-1}(k')) = \\ &= \text{grey}_{\nu-1}(\text{wal}_{\nu-1}(k')) = \text{rev}_{\nu-1}(k') = \text{rev}_\nu(2k'). \end{aligned}$$

Аналогично при $k = 2k' + 1$, $k' \in 0 : \Delta_\nu - 1$,

$$\begin{aligned} \text{grey}_\nu(\text{wal}_\nu(2k' + 1)) &= \text{grey}_\nu(2^\nu - 1 - \text{wal}_{\nu-1}(k')) = \\ &= 2^{\nu-1} + \text{grey}_{\nu-1}(\text{wal}_{\nu-1}(k')) = 2^{\nu-1} + \text{rev}_{\nu-1}(k') = \\ &= \text{rev}_\nu(2k' + 1). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Следствие. Справедливо равенство

$$\text{wal}_s^{-1}(k) = \text{rev}_s(\text{grey}_s(k)), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Действительно, согласно (11.7)

$$\text{grey}_s(\text{wal}_s(k)) = \text{rev}_s(k), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Перейдем к обратным отображениям:

$$\text{wal}_s^{-1}(\text{grey}_s^{-1}(k)) = \text{rev}_s^{-1}(k), \quad k \in 0 : N - 1.$$

В последнем соотношении заменим k на $\text{grey}_s(k)$. Получим

$$\text{wal}_s^{-1}(k) = \text{rev}_s^{-1}(\text{grey}_s(k)), \quad k \in 0 : N - 1.$$

Остается учесть, что $\text{rev}_s^{-1}(l) = \text{rev}_s(l)$ при $l \in 0 : N - 1$.

12. Теорема об отсчетах в базисе Уолша

12.1. Запишем разложение сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ по базису Уолша, упорядоченному по частоте:

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi(k) \widehat{v}_k, \quad (12.1)$$

где $\xi(k) = \langle x, \widehat{v}_k \rangle$. Нас интересует случай, когда $\xi(k) = 0$ при $k \in \Delta_{\nu+1} : N-1$, $\nu \in 0 : s-1$.

Обозначим

$$h_\nu(j) = \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N(j-q).$$

Функция $h_\nu(j)$ представляет собой N -периодическую ступеньку. На основном периоде она равна единице при $j \in 0 : N_\nu - 1$ и равна нулю при $j \in N_\nu : N-1$.

Теорема 12.1. Если в разложении (12.1) $\xi(k) = 0$ при $k \in \Delta_{\nu+1} : N-1$, $\nu \in 0 : s-1$, то

$$x(j) = \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} x(lN_\nu) h_\nu(j - lN_\nu), \quad j \in 0 : N-1. \quad (12.2)$$

Формула (12.2) показывает, что в условиях теоремы сигнал $x(j)$ является ступенчатым. Он равен $x(lN_\nu)$ при $j \in lN_\nu : (l+1)N_\nu - 1$, $l = 0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1$.

12.2. Доказательству теоремы предположим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 12.1. Справедлива формула

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}(\text{rev}_s(j)) = \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N(j-q), \quad j \in 0 : N-1. \quad (12.3)$$

Доказательство. Если $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$, то

$$\text{rev}_s(j) = j_0 2^{s-1} + \dots + j_{s-\nu-1} 2^\nu + j_{s-\nu} 2^{\nu-1} + \dots + j_{s-1}.$$

Обозначим $p = j_0 2^{s-\nu-1} + \dots + j_{s-\nu-1}$, $r = j_{s-\nu} 2^{\nu-1} + \dots + j_{s-1}$. Тогда $\text{rev}_s(j) = p \Delta_{\nu+1} + r$, причем $r \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. В силу $\Delta_{\nu+1}$ -периодичности единичного импульса $\delta_{\Delta_{\nu+1}}$ имеем

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}(\text{rev}_s(j)) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(r). \quad (12.4)$$

Пусть $j \in 0 : N_\nu - 1$. В этом случае $j_{s-1} = j_{s-2} = \dots = j_{s-\nu} = 0$. В частности, $r = 0$. Согласно равенству (12.4), $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(\text{rev}_s(j)) = 1$. Но при указанных j и правая часть (12.3) равна единице.

Если $j \in N_\nu : N - 1$, то хотя бы одна из компонент $j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_{s-\nu}$ отлична от нуля. Как следствие получаем $r \neq 0$, т.е. $r \in 1 : \Delta_{\nu+1} - 1$. Согласно (12.4), $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(\text{rev}_s(j)) = 0$. Но при указанных j и правая часть (12.3) равна нулю. Лемма доказана. \square

Формулу (12.3) можно переписать в виде $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(\text{rev}_s(j)) = h_\nu(j)$, откуда следует, что

$$h_\nu(\text{rev}_s(j)) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j), \quad j \in 0 : N - 1. \quad (12.5)$$

Лемма 12.2. *Для $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$ справедливо равенство*

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \delta_2(j_\alpha). \quad (12.6)$$

Доказательство. Имеем

$$j = j_{s-1} 2^{s-1} + \dots + j_\nu 2^\nu + j_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \dots + j_0.$$

Обозначим $p' = j_{s-1} 2^{s-\nu-1} + \dots + j_\nu$, $r' = j_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \dots + j_0$. Тогда $j = p' \Delta_{\nu+1} + r'$ и

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(r'). \quad (12.7)$$

Возможны два случая.

1) $j_0 = j_1 = \dots = j_{\nu-1} = 0$. В этом случае $r' = 0$. Согласно (12.7), $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = 1$. Очевидно, что и правая часть (12.6) равна единице.

2) Хотя бы одна из компонент $j_0, j_1, \dots, j_{\nu-1}$ отлична от нуля. Пусть $j_{\alpha'} = 1$ при некотором $\alpha' \in 0 : \nu - 1$. Тогда сомножитель $\delta_2(j_{\alpha'})$ в правой части (12.6) равен нулю, так что и все произведение равно нулю. Поскольку в данном случае $r' \in 1 : \Delta_{\nu+1} - 1$, то согласно (12.7) и $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = 0$.

Лемма доказана. \square

Лемма 12.3. *Справедливо разложение*

$$h_{\nu}(j) = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \widehat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N - 1. \quad (12.8)$$

Доказательство. Правую часть (12.8) обозначим $f_{\nu}(j)$ и покажем, что

$$f_{\nu}(\text{rev}_s(j)) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j). \quad (12.9)$$

Согласно определению функций Уолша \widehat{v}_k имеем

$$\begin{aligned} f_{\nu}(\text{rev}_s(j)) &= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), \text{rev}_s(j)\}_s} = \\ &= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_{\alpha} j_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Поскольку $k = (k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \dots, k_0)_2$, то

$$\begin{aligned} f_{\nu}(\text{rev}_s(j)) &= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k_{\nu-1}=0}^1 \dots \sum_{k_0=0}^1 \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} (-1)^{k_{\alpha} j_{\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{k_{\alpha}=0}^1 (-1)^{k_{\alpha} j_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{2} \sum_{k_\alpha=0}^1 (-1)^{k_\alpha j_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{k_\alpha=0}^1 \omega_2^{k_\alpha j_\alpha} = \delta_2(j_\alpha).$$

Получим

$$f_\nu(\text{rev}_s(j)) = \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \delta_2(j_\alpha).$$

Теперь (12.9) следует из (12.6).

В силу (12.9) и (12.5), $f_\nu(\text{rev}_s(j)) = h_\nu(\text{rev}_s(j))$. Заменив в последнем равенстве j на $\text{rev}_s(j)$, придем к (12.8).

Лемма доказана. \square

Формула (12.8) представляет собой разложение ступеньки h_ν по базису Уолша, упорядоченному по частоте.

Лемма 12.4. *При всех k, l из множества $0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ справедливо равенство*

$$\{\text{rev}_\nu(l), k\}_\nu = \{\text{rev}_s(k), lN_\nu\}_s. \quad (12.10)$$

Доказательство. Пусть $l = (l_{\nu-1}, l_{\nu-2}, \dots, l_0)_2$, $k = (k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \dots, k_0)_2$. Тогда $\text{rev}_\nu(l) = (l_0, l_1, \dots, l_{\nu-1})_2$ и

$$\{\text{rev}_\nu(l), k\}_\nu = l_{\nu-1}k_0 + l_{\nu-2}k_1 + \dots + l_0k_{\nu-1}. \quad (12.11)$$

Вместе с тем,

$$\text{rev}_s(k) = k_02^{s-1} + k_12^{s-2} + \dots + k_{\nu-1}2^{s-\nu},$$

$$lN_\nu = l_{\nu-1}2^{s-1} + l_{\nu-2}2^{s-2} + \dots + l_02^{s-\nu},$$

так что

$$\{\text{rev}_s(k), lN_\nu\}_s = k_0l_{\nu-1} + k_1l_{\nu-2} + \dots + k_{\nu-1}l_0. \quad (12.12)$$

Сравнивая (12.11) и (12.12), приходим к (12.10). Лемма доказана. \square

Лемма 12.5. При $j \in 0 : N - 1$ и $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ справедливо равенство

$$h_\nu(j \oplus lN_\nu) = h_\nu(j - lN_\nu). \quad (12.13)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\delta_N(j \oplus k) = \delta_N(j - k)$ при всех j, k из $0 : N - 1$. В силу определения h_ν получим

$$\begin{aligned} h_\nu(j \oplus lN_\nu) &= \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N((j \oplus lN_\nu) - q) = \\ &= \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N((j \oplus lN_\nu) \oplus q) = \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N(j \oplus (lN_\nu \oplus q)). \end{aligned}$$

Так как $lN_\nu = l_{\nu-1}2^{s-1} + l_{\nu-2}2^{s-2} + \dots + l_02^{s-\nu}$, $q = q_{s-\nu-1}2^{s-\nu-1} + \dots + q_0$, то $lN_\nu \oplus q = lN_\nu + q$. Значит,

$$\begin{aligned} h_\nu(j \oplus lN_\nu) &= \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N(j \oplus (lN_\nu + q)) = \\ &= \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N(j - (lN_\nu + q)) = \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \delta_N((j - lN_\nu) - q) = \\ &= h_\nu(j - lN_\nu). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

12.3. Переходим к доказательству теоремы. На основании условия теоремы и формулы (12.1) запишем

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \xi(k) \widehat{v}_k(j), \quad j \in 0 : N - 1. \quad (12.14)$$

Зафиксируем $j \in 0 : N - 1$, введем функцию $d(k) = \widehat{v}_k(j)$, $k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$, и разложим d по базису Уолша, определенному на множестве $\{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и упорядоченному по

частоте. Для этого вычислим коэффициенты Фурье–Уолша функции d . Согласно (12.10) имеем

$$\begin{aligned} D(l) &= \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} d(k) (-1)^{\{\text{rev}_{\nu}(l), k\}_{\nu}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \widehat{v}_k(j) (-1)^{\{\text{rev}_s(k), lN_{\nu}\}_s} = \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \widehat{v}_k(j) \widehat{v}_k(lN_{\nu}), \end{aligned}$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1.$$

Отметим, что

$$\widehat{v}_k(j) \widehat{v}_k(j') = \widehat{v}_k(j \oplus j'), \quad j, j' \in 0 : N - 1. \quad (12.15)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \widehat{v}_k(j) \widehat{v}_k(j') &= (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j\}_s + \{\text{rev}_s(k), j'\}_s} = \\ &= \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_{s-1-\alpha} \langle j_{\alpha} + j'_{\alpha} \rangle_2} = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{k_{s-1-\alpha} (j \oplus j')_{\alpha}} = \widehat{v}_k(j \oplus j'). \end{aligned}$$

Учитывая (12.15), (12.8) и (12.13), получаем

$$\begin{aligned} D(l) &= \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \widehat{v}_k(j \oplus lN_{\nu}) = \\ &= \Delta_{\nu+1} h_{\nu}(j \oplus lN_{\nu}) = \Delta_{\nu+1} h_{\nu}(j - lN_{\nu}). \end{aligned}$$

По формуле обращения для ДПУ и (12.10) восстанавливаем значения $\widehat{v}_k(j)$ при $k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$:

$$\begin{aligned} \widehat{v}_k(j) = d(k) &= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} D(l) (-1)^{\{\text{rev}_{\nu}(l), k\}_{\nu}} = \\ &= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_{\nu}(j - lN_{\nu}) (-1)^{\{\text{rev}_s(k), lN_{\nu}\}_s} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_{\nu}(j - lN_{\nu}) \widehat{v}_k(lN_{\nu}). \quad (12.16)$$

Остается подставить (12.16) в (12.14). Это дает

$$\begin{aligned} x(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \xi(k) \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_{\nu}(j - lN_{\nu}) \widehat{v}_k(lN_{\nu}) = \\ &= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_{\nu}(j - lN_{\nu}) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \xi(k) \widehat{v}_k(lN_{\nu}) \right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_{\nu}(j - lN_{\nu}) x(lN_{\nu}). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

12.4. Теорема 12.1 допускает обращение. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 12.2. У ступенчатой функции

$$x(j) = \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) h_{\nu}(j - lN_{\nu}) \quad (12.17)$$

коэффициенты Фурье–Уолша $\xi(k)$, определяемые формулой

$$\xi(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \widehat{v}_k(j),$$

равны нулю при $k \in \Delta_{\nu+1} : N - 1$.

Доказательство. На основании формул (12.13), (12.8) и (12.15) имеем

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \sum_{j=0}^{N-1} h_{\nu}(j \oplus lN_{\nu}) \widehat{v}_k(j) = \\ &= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{v}_k(j) \sum_{p=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \widehat{v}_p(j) \widehat{v}_p(lN_{\nu}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \sum_{p=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \widehat{v}_p(lN_\nu) \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{v}_k(j) \widehat{v}_p(j).$$

При $k \in \Delta_{\nu+1} : N-1$ и $p \in 0 : \Delta_{\nu+1}-1$ функции Уолша \widehat{v}_k и \widehat{v}_p ортогональны. Это обеспечивает равенство нулю коэффициентов $\xi(k)$ при $k \in \Delta_{\nu+1} : N-1$. Теорема доказана. \square

13. Базисы Ахмеда–Рао

13.1. По-прежнему считаем, что $N = 2^s$. Возьмем произвольные ненулевые комплексные числа $t(0), t(1), \dots, t(N/2-1)$ и построим еще одну последовательность базисов в \mathbb{C}_N :

$$\begin{aligned} g_0(k) &= \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ g_\nu(2lN_\nu + p) &= \\ &= g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) + t(l) g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ &g_\nu((2l+1)N_\nu + p) = \\ &= g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) - t(l) g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ &p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Формулы (13.1) отличаются от (6.2) только тем, что коэффициент $\omega_N^{\text{rev}_s(2l)}$ заменен на $t(l)$. Переход от базиса $g_{\nu-1}$ к базису g_ν можно записать одной строкой

$$g_\nu((2l + \sigma)N_\nu + p) = \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{\sigma\tau} [t(l)]^\tau g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{13.2}$$

где $\sigma \in 0 : 1$. В частности, при $\nu = 1$ имеем

$$\begin{aligned} g_1(\sigma N_1 + p) &= \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{\sigma\tau} [t(0)]^\tau g_0(\tau N_1 + p), \\ &p \in 0 : N_1 - 1, \quad \sigma \in 0 : 1. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Выразим сигналы ν -го уровня через сигналы нулевого уровня. Для этого введем последовательность матриц T_1, T_2, \dots, T_s по правилу

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & t(0) \\ 1 & -t(0) \end{bmatrix};$$

$$T_\nu[2l + \sigma, 2q + \tau] = (-1)^{\sigma\tau} [t(l)]^\tau T_{\nu-1}[l, q], \quad (13.4)$$

$$l, q \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma, \tau \in 0 : 1, \quad \nu = 2, \dots, s.$$

Теорема 13.1. *Справедливо представление*

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[l, q] g_0(qN_\nu + p), \quad (13.5)$$

$$p \in 0 : N_\nu - 1, \quad l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (13.5) с точностью до обозначений совпадает с (13.3). Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν , $\nu \geq 2$.

Возьмем индекс $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ и представим его в виде $l = 2l' + \sigma$, $\sigma \in 0 : 1$, $l' \in 0 : \Delta_\nu - 1$. На основании (13.2), индукционного предположения и (13.4) запишем

$$\begin{aligned} g_\nu(lN_\nu + p) &= g_\nu((2l' + \sigma)N_\nu + p) = \\ &= \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{\sigma\tau} [t(l')]^\tau g_{\nu-1}(l'N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) = \\ &= \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{\sigma\tau} [t(l')]^\tau \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu-1} T_{\nu-1}[l', q'] g_0(q'N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) = \\ &= \sum_{\tau=0}^1 \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu-1} T_\nu[2l' + \sigma, 2q' + \tau] g_0((2q' + \tau)N_\nu + p) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_{\nu}[l, q] g_0(qN_{\nu} + p).$$

Теорема доказана. \square

Из (13.5) при $\nu = s$ следует, что

$$g_s(l; j) = T_s[l, j], \quad l, j \in 0 : N - 1. \quad (13.6)$$

13.2. Найдем явное выражение для элементов матрицы T_{ν} .

Теорема 13.2. Для каждого $\nu \in 1 : s$ при $l, q \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$, $l = (l_{\nu-1}, \dots, l_0)_2$, $q = (q_{\nu-1}, \dots, q_0)_2$, справедлива формула

$$T_{\nu}[l, q] = (-1)^{\{l, q\}_{\nu}} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} [t(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor)]^{q_{\alpha}}. \quad (13.7)$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (13.7) принимает вид

$$T_1[l, q] = (-1)^{lq} [t(0)]^q, \quad l, q \in 0 : 1.$$

Справедливость этого равенства очевидна. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν , $\nu \geq 2$.

Пусть $l = 2l' + \sigma$, $q = 2q' + \tau$, где $\sigma, \tau \in 0 : 1$, $l', q' \in 0 : \Delta_{\nu} - 1$. Элементы двоичных кодов чисел l и l' , q и q' связаны соотношениями

$$l_{\alpha+1} = l'_{\alpha}, \quad q_{\alpha+1} = q'_{\alpha}, \quad l_0 = \sigma, \quad q_0 = \tau.$$

С учетом индукционного предположения и (13.4) получаем

$$\begin{aligned} T_{\nu}[l, q] &= T_{\nu}[2l' + \sigma, 2q' + \tau] = (-1)^{\sigma\tau} [t(l')]^{\tau} T_{\nu-1}[l', q'] = \\ &= (-1)^{\sigma\tau} [t(l')]^{\tau} (-1)^{\{l', q'\}_{\nu-1}} \prod_{\alpha=0}^{\nu-2} [t(\lfloor l'/2^{\alpha+1} \rfloor)]^{q'_{\alpha}} = \end{aligned}$$

$$= (-1)^{\{l, q\}_\nu} [t(\lfloor l/2 \rfloor)]^{q_0} \prod_{\alpha=1}^{\nu-1} [t(\lfloor l'/2^\alpha \rfloor)]^{q_\alpha}.$$

Остается проверить, что при $\alpha \in 1 : \nu - 1$

$$\lfloor l'/2^\alpha \rfloor = \lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor.$$

При $\alpha = \nu - 1$ последнее равенство принимает безусловно верный вид $0 = 0$. Пусть $\alpha \in 1 : \nu - 2$. Если $l' = l'_{\nu-2}2^{\nu-2} + \dots + l'_0$, то $l = 2l' + \sigma = l'_{\nu-2}2^{\nu-1} + \dots + l'_0 2 + \sigma$ и

$$\lfloor l'/2^\alpha \rfloor = l'_{\nu-2}2^{\nu-2-\alpha} + \dots + l'_\alpha = \lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor.$$

Теорема доказана. \square

На основании (13.6) и (13.7) приходим к представлению

$$\begin{aligned} g_s(k; j) &= (-1)^{\{k, j\}_s} \prod_{\alpha=0}^{s-1} [t(\lfloor k/2^{\alpha+1} \rfloor)]^{j_\alpha} = \\ &= v_k(j) \prod_{\alpha=0}^{s-1} [t(\lfloor k/2^{\alpha+1} \rfloor)]^{j_\alpha}, \quad k, j \in 0 : N - 1, \end{aligned} \quad (13.8)$$

где $v_k(j)$ — функция Уолша порядка k .

13.3. Выясним, когда семейство g_ν состоит из попарно ортогональных сигналов.

Лемма 13.1. Если $|t(l)| = 1$ при $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$, то при $k, k' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$

$$\sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[k, j] \overline{T_\nu[k', j]} = 2^\nu \delta_{\Delta_{\nu+1}}(k - k'). \quad (13.9)$$

Доказательство. При $\nu = 1$ имеем $|t(0)| = 1$, поэтому

$$\sum_{j=0}^1 T_1[k, j] \overline{T_1[k', j]} = \sum_{j=0}^1 (-1)^{kj} [t(0)]^j (-1)^{k'j} [\overline{t(0)}]^j =$$

$$= \sum_{j=0}^1 (-1)^{(k-k')j} = \sum_{j=0}^1 \omega_2^{(k-k')j} = 2\delta_2(k - k').$$

Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν , $\nu \geq 2$.

Пусть $k = 2l + \sigma$, $k' = 2l' + \sigma'$, $j = 2q + \tau$, где $\sigma, \sigma', \tau \in 0 : 1$, $l, l', q \in 0 : \Delta_\nu - 1$. На основании (13.4) и индукционного предположения запишем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[k, j] \overline{T_\nu[k', j]} = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{\tau=0}^1 T_\nu[2l + \sigma, 2q + \tau] \overline{T_\nu[2l' + \sigma', 2q + \tau]} = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{\sigma\tau} [t(l)]^\tau T_{\nu-1}[l, q] (-1)^{\sigma'\tau} \overline{[t(l')]^\tau T_{\nu-1}[l', q]} = \\ &= \left(\sum_{q=0}^{\Delta_\nu-1} T_{\nu-1}[l, q] \overline{T_{\nu-1}[l', q]} \right) \left(\sum_{\tau=0}^1 (-1)^{(\sigma-\sigma')\tau} [t(l)]^\tau \overline{[t(l')]^\tau} \right) = \\ &= 2^{\nu-1} \delta_{\Delta_\nu}(l - l') \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{(\sigma-\sigma')\tau} [t(l)]^\tau \overline{[t(l')]^\tau}. \end{aligned}$$

При $l \neq l'$ полученное выражение равно нулю. Пусть $l = l'$. По условию леммы $|t(l)| = 1$ при $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$, поэтому

$$\sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[k, j] \overline{T_\nu[k', j]} = 2^{\nu-1} \sum_{\tau=0}^1 (-1)^{(\sigma-\sigma')\tau} = 2^\nu \delta_2(\sigma - \sigma').$$

Видим, что левая часть (13.9) отлична от нуля только при $l = l'$, $\sigma = \sigma'$, т. е. только при $k = k'$. В последнем случае

$$\sum_{j=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} |T_\nu[k, j]|^2 = 2^\nu, \quad k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1.$$

Лемма доказана. \square

В лемме 13.1 по существу установлено, что при выполнении условия $|t(l)| = 1$, $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$, строки матрицы T_ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой строки равен 2^ν .

Теорема 13.3. *Если $|t(l)| = 1$ при $l \in 0 : \Delta_\nu - 1$, то сигналы*

$$g_\nu(0), g_\nu(1), \dots, g_\nu(N-1) \quad (13.10)$$

попарно ортогональны и $\|g_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$ при всех $k \in 0 : N-1$.

Доказательство. Пусть $k = lN_\nu + p$, $k' = l'N_\nu + p'$, $p, p' \in 0 : N_\nu - 1$, $l, l' \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. Согласно (13.5) и лемме 1.1.3 имеем

$$\begin{aligned} \langle g_\nu(k), g_\nu(k') \rangle &= \langle g_\nu(lN_\nu + p), g_\nu(l'N_\nu + p') \rangle = \\ &= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[l, q] \overline{T_\nu[l', q']} \delta_N((q - q')N_\nu + (p - p')). \end{aligned}$$

При $q \neq q'$ соответствующие слагаемые в двойной сумме равны нулю. Учитывая еще (13.9), получаем

$$\begin{aligned} \langle g_\nu(k), g_\nu(k') \rangle &= \delta_N(p - p') \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu[l, q] \overline{T_\nu[l', q]} = \\ &= 2^\nu \delta_N(p - p') \delta_{\Delta_{\nu+1}}(l - l'). \end{aligned}$$

Видим, что скалярное произведение $\langle g_\nu(k), g_\nu(k') \rangle$ отлично от нуля только при $p = p'$ и $l = l'$, т. е. только при $k = k'$. В последнем случае $\|g_\nu(k)\|^2 = 2^\nu$ при всех $k \in 0 : N-1$. Теорема доказана. \square

Следствие. Если $|t(l)| = 1$ при $l \in 0 : N/2 - 1$, то при каждом $\nu \in 1 : s$ сигналы (13.10) образуют ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N . Квадрат нормы у всех этих сигналов равен 2^ν .

13.4. Рассмотрим частный случай выбора коэффициентов $t(l)$, по модулю равных единице. Зафиксируем $r \in 1 : s$ и положим

$$t^{(r)}(l) = \begin{cases} \omega_N^{\text{rev}_s(2l)} & \text{при } l \in 0 : \Delta_r - 1, \\ 1 & \text{при } l \in \Delta_r : \Delta_s - 1. \end{cases} \quad (13.11)$$

Поскольку $|t^{(r)}(l)| \equiv 1$, то по теореме 13.3 сигналы

$$g_\nu^{(r)}(0), g_\nu^{(r)}(1), \dots, g_\nu^{(r)}(N-1), \quad (13.12)$$

определяемые рекуррентными соотношениями (13.1) с коэффициентами $t(l) = t^{(r)}(l)$, образуют ортогональный базис в пространстве \mathbb{C}_N при всех $\nu \in 1 : s$ и $r \in 1 : s$. Совокупность сигналов (13.12) при $\nu = s$ называется *базисом Ахмеда–Рао с индексом r* .

При $r = s$ формула (13.11) принимает вид $t^{(s)}(l) = \omega_N^{\text{rev}_s(2l)}$, $l \in 0 : \Delta_s - 1$. В этом случае рекуррентные соотношения (13.1) с $t(l) = t^{(s)}(l)$ совпадают с (6.2) и потому порождают последовательность базисов, приводящую к экспоненциальному базису. Явный вид сигналов такой последовательности указан в теореме 6.2. В частности, согласно (6.1)

$$g_s^{(s)}(k; j) = \omega_N^{\text{rev}_s(k)j}, \quad k, j \in 0 : N - 1.$$

При $r = 1$ имеем $t^{(1)}(l) = 1$, $l \in 0 : \Delta_s - 1$. На основании (13.8) приходим к формуле $g_s^{(1)}(k; j) = v_k(j)$, где $v_k(j)$ — функция Уолша порядка k . Отметим, что к базису Уолша приводит как последовательность (9.1), так и последовательность (13.1) с $t(l) \equiv 1$.

13.5. Изучим более детально базисы Ахмеда–Рао с индексом $r \in 2 : s - 1$. Для этого обратимся к матрицам $T_\nu^{(r)}$, элементы которых вычисляются по формуле (13.7) при $t(l) = t^{(r)}(l)$, $l \in 0 : \Delta_s - 1$.

Лемма 13.2. *При $\nu \leq r$ справедливо равенство*

$$T_\nu^{(r)}[l, q] = \omega_N^{\text{rev}_s(l)q}, \quad l, q \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1. \quad (13.13)$$

Доказательство. Пусть $l = (l_{\nu-1}, \dots, l_0)_2$, $q = (q_{\nu-1}, \dots, q_0)_2$. При $\nu \leq r$ имеем $\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor \in 0 : \Delta_r - 1$ и

$$t^{(r)}(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor) = \omega_N^{\text{rev}_s(2\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor)}, \quad \alpha \in 0 : \nu - 1. \quad (13.14)$$

Покажем, что

$$t^{(r)}(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor) = (-1)^{-l_\alpha} \omega_N^{2^\alpha \text{rev}_s(l)}, \quad \alpha \in 0 : \nu - 1. \quad (13.15)$$

При $\alpha = \nu - 1$ левая часть (13.15) равна единице. Поскольку

$$\begin{aligned} 2^{\nu-1} \text{rev}_s(l) &= 2^{\nu-1} (l_0 2^{s-1} + \dots + l_{\nu-1} 2^{s-\nu}) = \\ &= l_0 2^{s+\nu-2} + \dots + l_{\nu-1} 2^{s-1}, \end{aligned}$$

то при $\alpha = \nu - 1$ и правая часть (13.15) равна единице.

Возьмем $\alpha \in 0 : \nu - 2$. Запишем

$$\begin{aligned} \text{rev}_s(2\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor) &= \text{rev}_s((l_{\nu-1}, \dots, l_{\alpha+1}, 0)_2) = \\ &= l_{\alpha+1} 2^{s-2} + \dots + l_{\nu-1} 2^{s-\nu+\alpha} = 2^\alpha [l_0 2^{s-1} + \dots + l_\alpha 2^{s-\alpha-1} + \\ &+ l_{\alpha+1} 2^{s-\alpha-2} + \dots + l_{\nu-1} 2^{s-\nu} - (l_0 2^{s-1} + \dots + l_\alpha 2^{s-\alpha-1})] = \\ &= 2^\alpha \text{rev}_s(l) - (l_0 2^{s+\alpha-1} + \dots + l_\alpha 2^{s-1}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (13.14) следует (13.15).

В силу (13.15)

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} [t^{(r)}(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor)]^{q_\alpha} &= \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} (-1)^{-l_\alpha q_\alpha} \omega_N^{2^\alpha \text{rev}_s(l) q_\alpha} = \\ &= (-1)^{-\{l, q\}_\nu} \omega_N^{\text{rev}_s(l) \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} q_\alpha 2^\alpha} = (-1)^{-\{l, q\}_\nu} \omega_N^{\text{rev}_s(l) q}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Объединяя формулу (13.7) при $t(l) = t^{(r)}(l)$ и (13.16), приходим к (13.13). Лемма доказана. \square

Теперь рассмотрим случай $\nu \geq r+1$. Отметим, что индекс $l \in \Delta_{r+1} : \Delta_{\nu+1} - 1$ можно представить в виде

$$l = (1, l_{p-1}, \dots, l_{r-1}, \dots, l_0)_2, \quad p \in r : \nu - 1. \quad (13.17)$$

Здесь p — номер старшего ненулевого разряда в двоичной записи индекса l .

Введем еще одно обозначение. Если $q = (q_{\nu-1}, \dots, q_0)_2$, то

$$[q]_\alpha = (q_{\nu-1}, q_{\nu-2}, \dots, q_\alpha, 0, \dots, 0)_2, \quad \alpha \in 1 : \nu - 1.$$

Лемма 13.3. *При $\nu \geq r+1$ и $q \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ справедливо равенство*

$$T_\nu^{(r)}[l, q] = \begin{cases} \omega_N^{\text{rev}_s(l)q}, & l \in 0 : \Delta_{r+1} - 1; \\ (-1)^{\{l, q\}_{p-r+1}} \omega_N^{\text{rev}_s(l)[q]_{p-r+1}}, & \\ l = (1, l_{p-1}, \dots, l_0)_2, & p \in r : \nu - 1. \end{cases} \quad (13.18)$$

Доказательство. При $l \in 0 : \Delta_{r+1} - 1$ имеем $\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor \in 0 : \Delta_r - 1$, поэтому верна формула (13.14). Остается перейти от (13.14) к (13.15). Покажем, как это делается в данном случае.

Пусть $l = (l_{r-1}, \dots, l_0)_2$, так что $l_{\nu-1} = \dots = l_r = 0$ и

$$\begin{aligned} 2^\alpha \text{rev}_s(l) &= 2^\alpha (l_0 2^{s-1} + \dots + l_{r-1} 2^{s-r}) = \\ &= l_0 2^{s-1+\alpha} + \dots + l_{r-1} 2^{s-r+\alpha}. \end{aligned}$$

При $\alpha \in r-1 : \nu-1$ левая часть (13.15) равна единице. Правая часть (13.15) как при $\alpha \in r : \nu - 1$, так и при $\alpha = r - 1$ также равна единице. При $\alpha \in 0 : r - 2$ нужно повторить выкладки из доказательства предыдущей леммы, заменив ν на r .

Возьмем теперь $l \in \Delta_{r+1} : \Delta_{\nu+1} - 1$ и представим l в виде (13.17). При $\alpha \in 0 : p - r$ имеем $p - (\alpha + 1) \geq r - 1$, поэтому

$$\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor = (1, l_{p-1}, \dots, l_{\alpha+1})_2 \geq 2^{r+1} = \Delta_r.$$

Согласно (13.11)

$$t^{(r)}(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor) = 1, \quad \alpha \in 0 : p - r. \quad (13.19)$$

Покажем, что при $\alpha \in p - r + 1 : \nu - 1$

$$t^{(r)}(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor) = (-1)^{-l_\alpha} \omega_N^{2^\alpha \text{rev}_s(l)}. \quad (13.20)$$

При $\alpha \in p : \nu - 1$ левая часть (13.20) равна единице. Поскольку

$$\begin{aligned} 2^\alpha \text{rev}_s(l) &= 2^\alpha (l_0 2^{s-1} + \dots + l_{p-1} 2^{s-p} + 2^{s-p-1}) = \\ &= l_0 2^{s-1+\alpha} + \dots + l_{p-1} 2^{s-p+\alpha} + 2^{s-p-1+\alpha}, \end{aligned}$$

то правая часть (13.20) как при $\alpha \in p + 1 : \nu - 1$, так и при $\alpha = p$ также равна единице. При $\alpha \in p - r + 1 : p - 1$ выполняется неравенство $p - (\alpha + 1) \leq r - 2$, поэтому $\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor \in 0 : \Delta_r - 1$ и

$$\text{rev}_s(2 \lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor) = 2^\alpha \text{rev}_s(l) - (l_0 2^{s-1+\alpha} + \dots + l_\alpha 2^{s-1}).$$

Отсюда и из (13.14) следует (13.20).

Перейдем к вычислению $T_\nu^{(r)}[l, q]$ при $l \in \Delta_{r+1} : \Delta_{\nu+1} - 1$. На основании (13.19) и (13.20) запишем

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} [t^{(r)}(\lfloor l/2^{\alpha+1} \rfloor)]^{q_\alpha} &= \prod_{\alpha=p-r+1}^{\nu-1} (-1)^{-l_\alpha q_\alpha} \omega_N^{2^\alpha \text{rev}_s(l) q_\alpha} = \\ &= (-1)^{-\sum_{\alpha=p-r+1}^{\nu-1} l_\alpha q_\alpha} \omega_N^{\text{rev}_s(l) \sum_{\alpha=p-r+1}^{\nu-1} q_\alpha 2^\alpha}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (13.7) и учитывая, что

$$\sum_{\alpha=p-r+1}^{\nu-1} q_{\alpha} 2^{\alpha} = [q]_{p-r+1},$$

$$\{l, q\}_{\nu} - \sum_{\alpha=p-r+1}^{\nu-1} l_{\alpha} q_{\alpha} = \{l, q\}_{p-r+1},$$

получаем требуемую формулу для $T_{\nu}^{(r)}[l, q]$ при $l \in \Delta_{r+1} : \Delta_{\nu+1} - 1$.

Лемма доказана. \square

Согласно теореме 13.1 сигналы (13.12) могут быть представлены в виде (13.5) при $T_{\nu} = T_{\nu}^{(r)}$. Элементы матрицы $T_{\nu}^{(r)}$ при $r \in 2 : s - 1$ определяются формулами (13.13) или (13.18) в зависимости от соотношения между величинами r , ν и l . Тем самым, решен вопрос о явном задании сигналов $g_{\nu}^{(r)}(k; j)$, $k, j \in 0 : N - 1$.

Теорема 13.4. *Для функций Ахмеда–Пао $g_s^{(r)}(k; j)$ при $r \in 2 : s - 1$ справедливо представление*

$$g_s^{(r)}(k; j) = \begin{cases} \omega_N^{\text{rev}_s(k)j}, & k \in 0 : \Delta_{r+1} - 1; \\ (-1)^{\{k, j\}_{p-r+1}} \omega_N^{\text{rev}_s(k)[j]_{p-r+1}}, & k = (1, k_{p-1}, \dots, k_0)_2, \quad p \in r : s - 1. \end{cases}$$

Доказательство немедленно следует из (13.6) и (13.18).

13.6. Приведем характерное свойство функций Ахмеда–Пао.

Теорема 13.5. *Функция $g_s^{(r)}(k; j)$ при каждом j принимает одно из 2^r значений $\omega_{2^r}^q$, $q \in 0 : 2^r - 1$.*

Доказательство. При $k \in 0 : \Delta_{r+1} - 1$, $k = (k_{r-1}, \dots, k_0)_2$, имеем

$$\text{rev}_s(k) = k_0 2^{s-1} + \dots + k_{r-1} 2^{s-r} = 2^{s-r} \text{rev}_r(k),$$

так что согласно теореме 13.4

$$g_s^{(r)}(k; j) = \omega_N^{\text{rev}_s(k)j} = \omega_{2^r}^{\langle \text{rev}_r(k)j \rangle_{2^r}}.$$

Пусть $k = (1, k_{p-1}, \dots, k_0)_2$, $p \in r : s - 1$. Тогда

$$\text{rev}_s(k) = k_0 2^{s-1} + \dots + k_{p-1} 2^{s-p} + 2^{s-p-1} = 2^{s-p-1} k',$$

где $k' = \text{rev}_{p+1}(k)$. Вместе с тем,

$$[j]_{p-r+1} = \sum_{\alpha=p-r+1}^{s-1} j_\alpha 2^\alpha = 2^{p-r+1} j',$$

где $j' = \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor$. Значит,

$$\text{rev}_s(k)[j]_{p-r+1} = 2^{s-r} k' j'.$$

На основании теоремы 13.4 получаем

$$\begin{aligned} g_s^{(r)}(k; j) &= (-1)^{\{k, j\}_{p-r+1}} \omega_N^{\text{rev}_s(k)[j]_{p-r+1}} = \\ &= \omega_{2^r}^{\langle 2^{r-1} \{k, j\}_{p-r+1} + k' j' \rangle_{2^r}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

13.7. В заключение рассмотрим вопрос о частоте дискретных функций Ахмеда-Рао.

Теорема 13.6. Частота функции $g_s^{(r)}(k; j)$ равна $\text{rev}_s(k)$ при всех $r \in 2 : s - 1$.

Доказательство. При $k \in 0 : \Delta_{r+1} - 1$ утверждение очевидно.

Пусть $k = (1, k_{p-1}, \dots, k_0)_2$, $p \in r : s - 1$. Отметим, что $1 \leq p - r + 1 \leq s - r \leq s - 2$. Возьмем $j \in 0 : N - 1$ и представим его в виде $j = j' 2^{p-r+1} + j''$, где $j'' \in 0 : 2^{p-r+1} - 1$, $j' \in 0 : 2^{s-p+r-1} - 1$. Тогда

$$g_s^{(r)}(k; j) = (-1)^{\{k, j''\}_{p-r+1}} \omega_N^{\text{rev}_s(k)j' 2^{p-r+1}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (-1)^{\{k, j''\}_{p-r+1}} &= (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{p-r} k_{\alpha} (j''_{\alpha} + j''_{\alpha+1} 2 + \dots + j''_{p-r} 2^{p-r-\alpha})} = \\ &= (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{p-r} k_{\alpha} \lfloor j'' / \Delta_{\alpha+1} \rfloor}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\theta_k(j'') = \sum_{\alpha=0}^{p-r} k_{\alpha} \lfloor j'' / \Delta_{\alpha+1} \rfloor. \quad (13.21)$$

При этом обозначении

$$g_s^{(r)}(k; j) = \exp(i\pi[\theta_k(j'') + 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k)j']).$$

Положив

$$\zeta_k(j) = \theta_k(j'') + 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k)j',$$

придем к представлению

$$g_s^{(r)}(k; j) = \exp(i\pi\zeta_k(j)), \quad j \in 0 : N-1. \quad (13.22)$$

Формула (13.22) справедлива и при $j = N$. Действительно, в силу N -периодичности $g_s^{(r)}(k; N) = g_s^{(r)}(k; 0) = 1$. Вместе с тем, $j' = 2^{s-p+r-1}$, $j'' = 0$ при $j = N$, так что $\zeta_k(N) = 2\text{rev}_s(k)$ и $\exp(i\pi\zeta_k(N)) = 1$.

Поскольку $\zeta_k(0) = 0$ и $\zeta_k(N) = 2\text{rev}_s(k)$, то для завершения доказательства теоремы остается проверить, что функция $\zeta_k(j)$ монотонно не убывает при возрастании j от 0 до N .

Возьмем $j, l \in 0 : N$ и представим их в виде $j = j'2^{p-r+1} + j''$, $l = l'2^{p-r+1} + l''$. Предположим, что $j > l$. Тогда $j' \geq l'$, поскольку $|j'' - l''| \leq 2^{p-r+1} - 1$. При $j' = l'$ неравенство $\zeta_k(j) \geq \zeta_k(l)$ следует из монотонного неубывания функции $\theta_k(j'')$.

Допустим, что $j' > l'$. Оценим $\theta_k(j'')$. Согласно (13.21)

$$\theta_k(2^{p-r+1} - 1) \leq \sum_{\alpha=0}^{p-r} k_{\alpha} \lfloor 2^{p-r+1} / \Delta_{\alpha+1} \rfloor = \sum_{\alpha=0}^{p-r} k_{\alpha} 2^{p-r-\alpha+1} =$$

$$= 2^{-s+p-r+2} \sum_{\alpha=0}^{p-r} k_{\alpha} 2^{s-1-\alpha} \leq 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k).$$

В силу монотонного неубывания $\theta_k(j'')$ имеем

$$0 \leq \theta_k(j'') \leq 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k)$$

и

$$|\theta_k(j'') - \theta_k(l'')| \leq 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k).$$

Теперь запишем

$$\begin{aligned} \zeta_k(j) - \zeta_k(l) &\geq 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k)(j' - l') - |\theta_k(j'') - \theta_k(l'')| \geq \\ &\geq 2^{-s+p-r+2} \text{rev}_s(k)[(j' - l') - 1] \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Задачи

2.1. Пусть $N = 2^s$. Докажите, что в случае $x(j) = 0$ при $j \in \Delta_{\nu+1} : N - 1$ у сигнала $y(j) = x(\text{rev}_s(j))$, $j \in 0 : N - 1$, равны нулю отсчеты с индексами, не делящимися на N_{ν} .

2.2. Возьмем сигнал

$$h(j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - q).$$

Докажите, что $h(\text{rev}_s(j)) = \delta_{N_{\nu}}(j)$, $j \in 0 : N - 1$.

2.3. Пусть $\psi_{\nu}(j)$ и $\varphi_{\nu}(j)$ — сигналы, введенные в пп. 8.1, 8.3 соответственно. Докажите, что

$$\varphi_{\nu}(\text{rev}_s(j)) = \psi_{\nu}(j), \quad j \in 0 : N - 1.$$

- 2.4. Докажите, что сигнал $\psi_\nu(j)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\psi_1(j) = \delta_N(j) - \delta_N(j - N/2),$$

$$\psi_\nu(j) = \psi_{\nu-1}(2j), \quad \nu = 2, \dots, s.$$

- 2.5. Разложите единичный импульс δ_N по базису Хаара, связанному с прореживанием по времени.
- 2.6. Разложите единичный импульс δ_N по базису Хаара, связанному с прореживанием по частоте.

- 2.7. Пусть $q = (q_{s-1}, q_{s-2}, \dots, q_0)_2$. Докажите, что

$$\delta_N(j - q) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s (-1)^{q_{\nu-1}} 2^{-\nu} \varphi_\nu(j - \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}).$$

- 2.8. Пусть $q = (q_{s-1}, q_{s-2}, \dots, q_0)_2$. Докажите, что

$$\delta_N(j - q) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s (-1)^{q_{s-\nu}} 2^{-\nu} \psi_\nu(j - \langle q \rangle_{N_\nu}).$$

- 2.9. Введем сигнал

$$x(j) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \psi_\nu(j - p).$$

Докажите, что $x(j) = 1 - 2j/N$ при $j \in 0 : N - 1$.

- 2.10. Введем сигнал

$$y(j) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}).$$

Докажите, что $y(j) = 1 - 2 \operatorname{rev}_s(j)/N$ при $j \in 0 : N - 1$.

2.11. Рассмотрим единичные ступеньки вида

$$h_k(j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_N(j-q), \quad k \in 1:s-1.$$

Докажите, что

$$h_k(j) = 2^{-s+k} + \sum_{\nu=k+1}^s 2^{-\nu+k} \varphi_\nu(j).$$

2.12. Докажите, что для единичных ступенек из предыдущей задачи справедливо разложение

$$h_k(j) = 2^{-s+k} + \sum_{\nu=1}^{s-k} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{\Delta_{k+1}-1} \psi_\nu(j-p).$$

2.13. Возьмем разложение (8.12) сигнала $x(j)$, и пусть $q = (q_{s-1}, q_{s-2}, \dots, q_0)_2$. Докажите, что при $j \in 0:N-1$

$$\begin{aligned} x(j \oplus q) &= 2^{-s} \alpha + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s (-1)^{q_{\nu-1}} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \widehat{\xi}_\nu(p \oplus \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor) \varphi_\nu(j - p\Delta_{\nu+1}). \end{aligned}$$

2.14. Возьмем разложение (8.2) сигнала $y(j)$. Докажите, что при всех $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} y(j-q) &= 2^{-s} \beta + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (p-q)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(\langle p-q \rangle_{N_\nu}) \psi_\nu(j-p). \end{aligned}$$

2.15. Обозначим через V_ν линейную оболочку, натянутую на сигналы $g_\nu(k; j)$, $k = 0, 1, \dots, N_\nu - 1$. Докажите, что $V_\nu = \mathbb{C}_{N_\nu}$.

2.16. Обозначим через W_ν линейную оболочку, натянутую на сигналы $\psi_\nu(j-k)$, $k = 0, 1, \dots, N_\nu - 1$. Докажите, что

$$W_\nu = \{w \in \mathbb{C}_{N_\nu-1} \mid w(j - N_\nu) = -w(j), \quad j \in \mathbb{Z}\}.$$

2.17. Докажите, что функции Уолша $v_k(j)$ обладают следующими свойствами:

$$1/v_k(j) = v_k(j),$$

$$v_k(j) v_{k'}(j) = v_m(j),$$

где $m = k \oplus k'$.

2.18. Докажите, что

$$v_{2k+1}(j) = v_{2k}(j) v_1(j).$$

2.19. Обозначим через $v_k^{(1)}(j)$ функции Уолша с основным периодом $0 : N_1 - 1$, т. е.

$$v_k^{(1)}(j) = (-1)^{\{k, j\}_{s-1}}, \quad k, j \in 0 : N_1 - 1.$$

Докажите, что при $k, j \in 0 : N_1 - 1$ справедливы формулы

$$v_k(j) = v_k^{(1)}(j), \quad v_k(N_1 + j) = v_k^{(1)}(j),$$

$$v_{N_1+k}(j) = v_k^{(1)}(j), \quad v_{N_1+k}(N_1 + j) = -v_k^{(1)}(j).$$

2.20. Докажите, что при $N = 2^s$ и всех $j \in 0 : N - 1$ выполняется равенство

$$\{N - 1 - j, j\}_s = 0.$$

2.21. Пусть $v_k(j)$ — одна из функций Уолша, у которой $v_k(N - 1) = 1$. Докажите, что

$$v_k(N - 1 - j) = v_k(j), \quad j \in 0 : N - 1.$$

2.22. Пусть $v_k(j)$ — одна из функций Уолша, у которой $v_k(N-1) = -1$. Докажите, что

$$v_k(N-1-j) = -v_k(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

2.23. Докажите, что при $N \geq 8$ и $p \in 0 : N_2 - 1$

$$v_{3N_2+p}(j) = v_{N_1+p}(\langle j + N_2 \rangle_N), \quad j \in 0 : N-1.$$

2.24. Функции $r_\nu(j) = v_{N_\nu}(j)$, $\nu \in 1 : s$, называются *функциями Радемахера*. Постройте графики функций Радемахера на основном периоде при $N = 8$.

2.25. Выразите функции Уолша через функции Радемахера.

2.26. Докажите, что

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_N(j), \quad j \in 0 : N-1.$$

2.27. Обратимся к дискретному преобразованию Уолша \mathcal{W}_N (п. 10.2). Докажите равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = N^{-1} \|\mathcal{W}_N(x)\|^2.$$

2.28. Пусть z — диадная свертка сигналов x и y из \mathcal{C}_N при $N = 2^s$ (п. 8.4). Докажите, что

$$\mathcal{W}_N(z) = \mathcal{W}_N(x) \mathcal{W}_N(y).$$

2.29. Вычислите спектр Фурье функций Уолша v_1 , v_2 и v_3 .

2.30. Обозначим через R_ν спектр Фурье функции Радемахера r_ν (задача 2.24). Докажите, что

$$R_\nu(k) = \begin{cases} 2^\nu \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{(2l+1)\pi}{N_{\nu-1}} \right) & \text{при } k = (2l+1)\Delta_\nu, \\ & l \in 0 : N_\nu - 1; \\ 0 & \text{при остальных } k \in 0 : N-1. \end{cases}$$

2.31. Пусть $V_p = \mathcal{F}_N(v_p)$. Докажите, что при $p \in 0 : N_1 - 1$

$$V_{2p+1}(k) = V_{2p}(k - N_1), \quad k \in 0 : N - 1.$$

2.32. Наряду со спектром Фурье V_p функции Уолша v_p с основным периодом $0 : N - 1$ рассмотрим спектр Фурье $V_p^{(1)}$ функции Уолша $v_p^{(1)}$ с основным периодом $0 : N_1 - 1$. Докажите, что спектры V_p и $V_p^{(1)}$ при $p, k \in 0 : N_1 - 1$ связаны соотношениями

$$V_p(2k) = 2V_p^{(1)}(k), \quad V_p(2k + 1) = 0,$$

$$V_{N_1+p}(2k) = 0, \quad V_{N_1+p}(2k + 1) = \frac{1}{N_1} \sum_{l=0}^{N_1-1} V_p^{(1)}(l) h(k - l),$$

где

$$h(j) = 2 \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi(2j+1)}{N} \right).$$

2.33. Докажите, что при $N \geq 8$ и $p \in 0 : N_2 - 1$

$$V_{3N_2+p}(k) = i^k V_{N_1+p}(k), \quad k \in 0 : N - 1.$$

2.34. Докажите, что для функций Уолша \hat{v}_k , упорядоченных по частоте, при $k, j \in 0 : N_1 - 1$ справедлива формула

$$\hat{v}_{2k}(j) = \hat{v}_k(2j).$$

2.35. Пусть \tilde{v}_k — функция Уолша, упорядоченная по количеству перемен знака (п. 11.4). Докажите, что $\tilde{v}_{N-1} = v_1$.

2.36. Чему равны коэффициенты $\xi(k)$ в разложении ступенчатой функции (12.17) по базису Уолша, упорядоченному по частоте, при $k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$?

2.37. Найдите значения обратной перестановки $\operatorname{wal}_3^{-1}(k)$ при $k = 0, 1, \dots, 7$.

2.38. Введем сигнал Франка–Уолша

$$f(j_1 N + j_0) = v_{j_1}(j_0), \quad j_1, j_0 \in 0 : N - 1,$$

и положим $F = \mathcal{W}_{N^2}(f)$. Докажите, что

$$F(k_1 N + k_0) = N v_{k_1}(k_0), \quad k_1, k_0 \in 0 : N - 1.$$

Комментарии

Алгоритм Гёрцеля быстрого вычисления одной компоненты спектра Фурье опубликован в [45].

Введение рекуррентной последовательности ортогональных базисов (2.1) является принципиальным моментом. В последовательности (2.1) каждый сигнал ν -го базиса зависит только от двух сигналов $(\nu - 1)$ -го базиса. Это порождает простую рекуррентную схему вычисления коэффициентов разложения сигнала по всем базисам данной последовательности. На последнем шаге получаем полный спектр Фурье. Более того, последовательность (2.1) позволяет сформировать вейвлетные базисы, коэффициенты разложения сигнала по которым содержатся в таблице коэффициентов разложения сигнала по базисам исходной рекуррентной последовательности.

Мы кратко напомнили содержание разделов 2–4. Они написаны на основе работы [31].

Простейшим вейвлетным базисом является базис Хаара. Ему в книге уделяется большое внимание (разделы 5–8, задачи 2.3–2.14). На самом деле, имеются два базиса Хаара. Один из них связан с прореживанием по времени — он хорошо известен (см., например, [9], где имеется обширная библиография). Другой связан с прореживанием по частоте — он введен в [28]. Сравнительному изучению двух базисов Хаара посвящена работа [23].

Из результатов, касающихся базисов Хаара, выделим теорему о свертке. Точнее, теорему о циклической свертке в случае базиса Хаара, связанного с прореживанием по частоте, и теорему о диадной свертке в случае прореживания по времени. Эта тема имеет длинную историю. Окончательные результаты были получены в [22].

Рекуррентную последовательность ортогональных базисов (6.2) можно задать непосредственно, как это делалось в [30], а можно вывести из (2.1) с помощью перестановки *reverse*. В книге используется второй прием как более поучительный. Этот прием публикуется впервые.

Рекуррентная последовательность ортогональных базисов (9.1), приводящая к быстрому преобразованию Уолша, изучалась в [32]. Вопрос об упорядочении дискретных функций Уолша и их обобщений рассматривался в [40, 21].

Отметим, что рекуррентные соотношения (2.1), играющие центральную роль при построении быстрых алгоритмов, были просто *предъявлены*. Однако их можно *вывести* на основе разложения матрицы дискретного преобразования Фурье в произведение разреженных матриц. Для этого требуются более сложные технические средства, в частности, кронекерово произведение матриц. По поводу деталей и обобщений см. [6, 10, 20, 29, 38, 46, 50].

Теорема об отсчетах в базисе Уолша (в более общем виде) опубликована в [47].

Базисы Ахмеда–Рао введены в книге [1]. При $N = 2^s$ они параметрически объединяют базис Уолша и экспоненциальный базис. Сигналы из базиса Уолша принимают два значения ± 1 , сигналы из экспоненциального базиса — N значений ω_N^q , $q \in 0 : N - 1$. Сигналы из базиса Ахмеда–Рао с индексом $r \in 1 : s$ принимают 2^r значений $\omega_{2^r}^q$, $q \in 0 : 2^r - 1$. Изучению базисов Ахмеда–Рао посвящены работы [13, 14, 15].

Глава 3

Сплайновые подпространства

1. Периодические функции Бернулли

1.1. Пусть $N \geq 2$ и $r \geq 0$ — целые числа. *Дискретной периодической функцией Бернулли порядка r* называется сигнал вида

$$b_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Согласно определению

$$[\mathcal{F}_N(b_r)](k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (\omega_N^k - 1)^{-r} & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Условие $[\mathcal{F}_N(b_r)](0) = 0$ означает, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_r(j) = 0. \quad (1.2)$$

При $r = 0$ имеем

$$b_0(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \omega_N^{kj} = \delta_N(j) - \frac{1}{N}. \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. При любых $r \geq 0$ и $j \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\Delta b_{r+1}(j) := b_{r+1}(j+1) - b_{r+1}(j) = b_r(j), \quad (1.4)$$

$$b_r(r-j) = (-1)^r b_r(j). \quad (1.5)$$

Доказательство. Согласно (1.1)

$$\begin{aligned}\Delta b_{r+1}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r-1} \omega_N^{kj} (\omega_N^k - 1) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{kj} = b_r(j).\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}b_r(r-j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{k(r-j)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega_N^{-k})^{-r} \omega_N^{-kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega_N^{N-k})^{-r} \omega_N^{(N-k)j} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \omega_N^k)^{-r} \omega_N^{kj} = (-1)^r b_r(j).\end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Лемма 1.1. При $k \in 1 : N-1$ справедлива формула

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j+r) \omega_N^{-kj} = (-1)^r \left(2 \sin \frac{\pi k}{N}\right)^{-2r}. \quad (1.6)$$

Доказательство. Отметим, что

$$\begin{aligned}\omega_N^{-k} (\omega_N^k - 1)^2 &= \omega_N^{-k} (\omega_N^{2k} - 2\omega_N^k + 1) = \omega_N^k - 2 + \omega_N^{-k} = \\ &= -2 \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}\right) = -4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}.\end{aligned} \quad (1.7)$$

С учетом леммы 1.1.2 получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j+r) \omega_N^{-k(j+r)+kr} = \omega_N^{kr} \sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \omega_N^{kr} (\omega_N^k - 1)^{-2r} = [\omega_N^{-k} (\omega_N^k - 1)^2]^{-r} = (-1)^r \left(2 \sin \frac{\pi k}{N}\right)^{-2r}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

1.2. Сдвиги функции Бернулли можно использовать для разложения произвольных сигналов.

Теорема 1.2. *Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ при каждом $r \geq 0$ допускает представление*

$$x(j) = c + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^r x(k) b_r(j - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

где $c = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)$.

Доказательство. Обозначим

$$I_r(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^r x(k) b_r(j - k).$$

При $r = 0$ согласно (1.3) имеем

$$I_0(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) [\delta_N(j - k) - N^{-1}] = x(j) - c, \quad (1.9)$$

что соответствует (1.8).

Пусть $r \geq 1$. Покажем вначале, что для произвольных сигналов x, y из \mathbb{C}_N справедлива формула суммирования по частям

$$\sum_{j=0}^{N-1} x(j) \Delta y(j) = - \sum_{j=0}^{N-1} y(j) \Delta x(j - 1). \quad (1.10)$$

Действительно, в силу леммы 1.1.2

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \Delta y(j) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) [y(j + 1) - y(j)] = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} [x(j - 1) - x(j)] y(j) = - \sum_{j=0}^{N-1} y(j) \Delta x(j - 1). \end{aligned}$$

Напомним, что $\Delta^r(x) = \Delta(\Delta^{r-1}(x))$. Учитывая (1.10) и теорему 1.1, получаем

$$\begin{aligned} I_r(j) &= (-1)^r \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^r x(k) b_r(r-j+k) = \\ &= (-1)^{r+1} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^{r-1} x(k) b_{r-1}(r-j+k-1) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \Delta^{r-1} x(k) b_{r-1}(j-k) = I_{r-1}(j). \end{aligned}$$

Таким образом, $I_r(j) = I_{r-1}(j) = \dots = I_1(j) = I_0(j)$. Остается сослаться на формулу (1.9). Теорема доказана. \square

Подставим в (1.8) $x(j) = b_{r+s}(j)$. Согласно (1.2) и (1.4) получим

$$b_{r+s}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} b_s(k) b_r(j-k).$$

Эта формула подчеркивает сверточную природу функций Бернулли.

2. Периодические В-сплайны

2.1. Предположим, что $N = mn$ и $m \geq 2$. Введем сигнал

$$x_1(j) = \begin{cases} n-j & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ 0 & \text{при } j \in n : N-n, \\ j-N+n & \text{при } j \in N-n+1 : N-1, \end{cases} \quad (2.1)$$

и найдем его дискретное преобразование Фурье $X_1 = \mathcal{F}_N(x_1)$.

Лемма 2.1. *Справедливо равенство*

$$X_1(k) = \begin{cases} n^2 & \text{при } k = 0, \\ \left(\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} \right)^2 & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Доказательство. По определению ДПФ

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) \omega_N^{-kj} + \sum_{j=N-n+1}^{N-1} (n - (N-j)) \omega_N^{k(N-j)} = \\ &= n + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \omega_N^{-kj} + \sum_{j'=1}^{n-1} (n-j') \omega_N^{kj'} = \\ &= n + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \omega_N^{k(n-j)-kn} = n + 2 \operatorname{Re} \left\{ \omega_m^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{kj} \right\}. \end{aligned}$$

При $k = 0$ имеем $X_1(0) = n + n(n-1) = n^2$. Далее считаем, что $k \in 1 : N-1$.

Воспользуемся формулой (см. «Предварительные сведения», п. 6)

$$\sum_{j=1}^{n-1} j z^j = \frac{z}{(1-z)^2} [(n-1)z^n - n z^{n-1} + 1], \quad z \neq 1. \quad (2.3)$$

Подставив в (2.3) $z = \omega_N^k$, получим

$$\sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{kj} = \frac{\omega_N^k}{(1 - \omega_N^k)^2} [(n-1) \omega_m^k - n \omega_m^k \omega_N^{-k} + 1].$$

Согласно (1.7)

$$\omega_m^{-k} \sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{kj} = -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} [n-1 - n \omega_N^{-k} + \omega_m^{-k}].$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} X_1(k) &= n - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \left[n \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N} \right) - \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{m} \right) \right] = \\ &= \left(\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} \right)^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Сигнал x_1 характеризуется двумя свойствами: равенством $x_1(ln) = n \delta_m(l)$ и линейностью на каждом промежутке $ln: (l+1)n, l \in \mathbb{Z}$.

2.2. Положим

$$Q_1 = x_1; \quad Q_r = Q_1 * Q_{r-1}, \quad r = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Сигнал Q_r называется *дискретным периодическим В-сплайном порядка r* . Согласно (2.1) и (2.4) он принимает только целые неотрицательные значения.

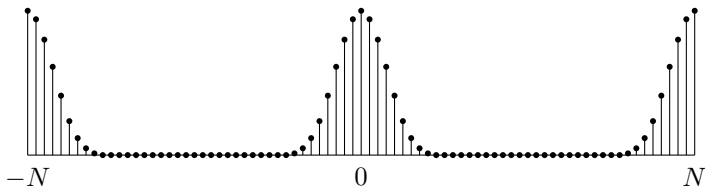


Рис. 8. График В-сплайна $Q_r(j)$ при $m = 8$, $n = 5$ и $r = 2$

Теорема 2.1. При всех натуральных r

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Доказательство. При $r = 1$ формула (2.5) совпадает с формулой обращения для ДПФ, восстанавливающей сигнал x_1 по его спектру X_1 . Сделаем индукционный переход от r к $r + 1$. Из справедливости (2.5) следует, что $\mathcal{F}_N(Q_r) = X_1^r$. По теореме о свертке

$$\mathcal{F}_N(Q_{r+1}) = \mathcal{F}_N(Q_1 * Q_r) = X_1 X_1^r = X_1^{r+1}.$$

По формуле обращения для ДПФ

$$Q_{r+1}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{r+1}(k) \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема доказана. \square

Формулу (2.5) можно считать определением В-сплайна порядка r . Она имеет смысл и при $m = 1$. В этом случае равенство (2.2) принимает вид $X_1 = N^2 \delta_N$, так что согласно (2.5) получаем $Q_r(j) \equiv N^{2r-1}$.

Отметим также, что при $m = N$ (и $n = 1$)

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} = \delta_N(j)$$

для всех натуральных r .

2.3. В дальнейшем нам потребуются значения $Q_r(pn)$ при $p \in 0 : m - 1$. Вычислим их. Воспользуемся тем, что любой индекс $k \in 0 : N - 1$ можно представить в виде $k = qm + l$, где $q \in 0 : n - 1$, $l \in 0 : m - 1$. Согласно (2.5) имеем

$$\begin{aligned} Q_r(pn) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm + l) \omega_N^{pn(qm+l)} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{pl} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm + l) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$T_r(l) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm + l), \quad (2.6)$$

получим

$$Q_r(pn) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} T_r(l) \omega_m^{pl}. \quad (2.7)$$

Отметим, что сигнал $T_r(l)$ в силу n -периодичности сигнала $f(q) = X_1^r(qm + l)$ является m -периодическим. Действительно, при целом s

$$T_r(l + sm) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r((q + s)m + l) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} f(q + s) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} f(q) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm + l) = T_r(l).$$

Мы воспользовались леммой 1.1.2.

Преобразуем формулу (2.6). При $l \in 1 : m - 1$ введем величину

$$\Lambda_r(l) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(qm + l)}{N} \right)^{-2r}.$$

Лемма 2.2. *Справедливо равенство*

$$T_r(l) = \begin{cases} n^{2r-1} & \text{при } l = 0, \\ \left(2 \sin \frac{\pi l}{m} \right)^{2r} \Lambda_r(l) & \text{при } l \in 1 : m - 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Доказательство. Согласно (2.2)

$$X_1(m) = X_1(2m) = \dots = X_1((n-1)m) = 0,$$

поэтому $T_r(0) = n^{-1} X_1^r(0) = n^{2r-1}$. При $l \in 1 : m - 1$ имеем

$$T_r(l) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(\frac{2 \sin(\pi(qm + l)/m)}{2 \sin(\pi(qm + l)/N)} \right)^{2r} = \left(2 \sin \frac{\pi l}{m} \right)^{2r} \Lambda_r(l).$$

Лемма доказана. □

Из (2.8), в частности, следует, что $T_r(l) > 0$ при всех $l \in \mathbb{Z}$.

На рис. 9 изображены графики сигнала $T_r(l)$ на основном периоде $0 : m - 1$ при $m = 512$, $n = 2$ и $r = 2, 3, 4$.

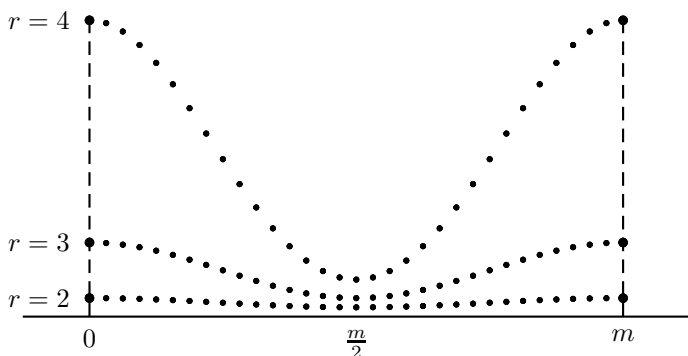


Рис. 9. Графики сигнала $T_r(l)$ при $m = 32$, $n = 2$ и $r = 2, 3, 4$

2.4. Установим связь между дискретными периодически-ми В-сплайнами и дискретными периодическими функциями Бернулли.

Теорема 2.2. *Справедлива формула*

$$Q_r(j) = \frac{1}{N} n^{2r} + \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j + r - ln). \quad (2.9)$$

Доказательство. Согласно (2.2) и (1.7) величину $X_1(k)$ при $k \in 1 : N - 1$ можно представить в виде

$$X_1(k) = \frac{\omega_m^{-k} (\omega_m^k - 1)^2}{\omega_N^{-k} (\omega_N^k - 1)^2}.$$

Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} X_1^r(k) \omega_N^{kj} = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_m^k - 1)^{2r} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \omega_N^{k(j+r-rn)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \sum_{p=0}^{2r} (-1)^{2r-p} C_{2r}^p \omega_N^{k(j+r-(r-p)n)} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \omega_N^{k(j+r-ln)} = \\
&= \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-2r} \omega_N^{k(j+r-ln)} \right\} = \\
&= \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_{2r}(j+r-ln).
\end{aligned}$$

Теперь заключение теоремы следует из формулы (2.5). \square

3. Дискретные периодические сплайны

3.1. Пусть $N = mn$ и $N \geq 2$. Дискретный периодический сплайн $S(j)$ порядка r определяется как линейная комбинация с комплексными коэффициентами сдвигов В-сплайна $Q_r(j)$:

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn). \quad (3.1)$$

Множество сплайнов вида (3.1) обозначим через \mathcal{S}_r^m . Поскольку $Q_r(j) = \delta_N(j)$ при $m = N$, то в силу леммы 1.1.1 $\mathcal{S}_r^N = \mathbb{C}_N$ для всех натуральных r . При $m = 1$ имеем $Q_r(j) \equiv N^{2r-1}$, поэтому \mathcal{S}_r^1 есть множество сигналов, тождественно равных комплексной константе.

Лемма 3.1. Базисные сигналы $Q_r(j - pn)$, $p \in 0:m-1$, линейно независимы на \mathbb{Z} .

Доказательство. Пусть

$$S(j) := \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

при некоторых комплексных $c(p)$. Покажем, что все $c(p)$ равны нулю. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{N-1} S(j) \omega_N^{-kj} = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j-pn) \omega_N^{-k(j-pn)-kpn} = \\ &= \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \omega_m^{-kp} \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j) \omega_N^{-kj} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно (2.5), $\sum_{j=0}^{N-1} Q_r(j) \omega_N^{-kj} = X_1^r(k)$. Обозначим $C(k) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \omega_m^{-kp}$. Тогда равенство (3.2) можно переписать в виде $C(k)X_1^r(k) = 0$. В силу (2.2) $X_1^r(k) \neq 0$ при $k \in 0 : m-1$. Значит, $C(k) = 0$ при тех же k . По формуле обращения для ДПФ получаем $c(p) = 0$ при $p \in 0 : m-1$. Лемма доказана. \square

Очевидно, что \mathcal{S}_r^m есть линейное комплексное пространство. Оно является подпространством \mathbb{C}_N . На основании леммы 3.1 можно утверждать, что размерность \mathcal{S}_r^m равна m .

Лемма 3.2. *Справедливо тождество*

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn) \equiv n^{2r-1}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Согласно (2.5) и (1.2.1)

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j-pn) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) \sum_{p=0}^{m-1} \omega_N^{k(j-pn)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) \omega_N^{kj} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{-kp} \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) \omega_N^{kj} \delta_m(k) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} X_1^r(lm) \omega_n^{lj}. \end{aligned}$$

Остается учесть, что $X_1(lm) = 0$ при $l \in 1 : n - 1$ и $X_1(0) = n^2$. \square

Из (3.3), в частности, следует, что сигнал, тождественно равный комплексной константе, принадлежит \mathcal{S}_r^m .

3.2. Можно дать эквивалентное определение дискретного периодического сплайна с помощью функций Бернулли.

Теорема 3.1. *Для того чтобы сигнал S принадлежал подпространству \mathcal{S}_r^m , необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление*

$$S(j) = d + \sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_{2r}(j + r - ln), \quad (3.4)$$

где $\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$.

Доказательство. **Необходимость.** Согласно (3.1) и (2.9)

$$\begin{aligned} S(j) &= \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \left\{ \frac{1}{N} n^{2r} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=-r}^r (-1)^{r-k} C_{2r}^{r-k} b_{2r}(j + r - (k+p)n) \right\} = \\ &= \frac{n^{2r}}{N} \sum_{p=0}^{m-1} c(p) + \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k=-r}^r c(p) (-1)^{r-k} C_{2r}^{r-k} b_{2r}(j + r - \langle k+p \rangle_m n). \end{aligned}$$

Приведя подобные в двойной сумме, придем к (3.4). При этом

$$\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \sum_{k=-r}^r (-1)^{r-k} C_{2r}^{r-k} = 0.$$

Достаточность. Как отмечалось, сигнал $f(j) \equiv d$ принадлежит \mathcal{S}_r^m . Остается проверить, что множеству \mathcal{S}_r^m принадлежит сигнал

$$g(j) = \sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_{2r}(j + r - ln), \quad (3.5)$$

у которого $\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$. Найдем $G = \mathcal{F}_N(g)$. Имеем

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} g(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} d(l) \sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j+r-ln) \omega_N^{-k(j-ln)-kln} = \\ &= \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} d(l) \omega_m^{-kl} \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} b_{2r}(j+r) \omega_N^{-kj} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $D(k) = \sum_{l=0}^{m-1} d(l) \omega_m^{-kl}$. По условию теоремы $D(0) = 0$. Учитывая еще равенство (1.6), получаем

$$G(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (-1)^r (2 \sin(\pi k/N))^{-2r} D(k) & \text{при } k \in 1 : N-1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Отметим, что в силу m -периодичности $D(m) = D(2m) = \dots = D((n-1)m) = 0$, поэтому

$$G(0) = G(m) = G(2m) = \dots = G((n-1)m) = 0. \quad (3.7)$$

Введем m -периодический сигнал $A(k)$:

$$A(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ (-1)^r (2 \sin(\pi k/m))^{-2r} D(k) & \text{при } k \in 1 : m-1. \end{cases}$$

Покажем, что

$$G(k) = A(k) X_1^r(k), \quad k \in 0 : N-1. \quad (3.8)$$

При $k = 0, m, 2m, \dots, (n-1)m$ эта формула верна в силу (3.7) и равенств $A(0) = 0$, $X_1(m) = X_1(2m) = \dots = X_1((n-1)m) = 0$. При остальных $k \in 1 : N-1$ согласно (3.6) и (2.2)

$$G(k) = (-1)^r (2 \sin(\pi k/m))^{-2r} X_1^r(k) D(k) = A(k) X_1^r(k).$$

Формула (3.8) позволяет привести сигнал g к виду (3.1). Действительно, положим

$$a(p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} A(k) \omega_m^{kp}.$$

Тогда согласно (2.5)

$$\begin{aligned} g(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \omega_N^{kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) X_1^r(k) \omega_N^{kj} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{m-1} a(p) \omega_m^{-kp} \right) X_1^r(k) \omega_N^{kj} = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} a(p) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) \omega_N^{k(j-pn)} \right\} = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} a(p) Q_r(j - pn). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Теорема доказана. \square

Замечание. Доказательство содержит схему перехода от разложения (3.5) сигнала g к разложению (3.9). Схема выглядит так:

$$\{d(l)\} \rightarrow \{D(k)\} \rightarrow \{A(k)\} \rightarrow \{a(p)\}.$$

3.3. Приведем одно важное для дальнейшего свойство дискретных периодических сплайнов.

Теорема 3.2. Для произвольного сплайна $S \in \mathcal{S}_r^m$ и произвольного сигнала $x \in \mathbb{C}_N$ справедливо соотношение

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j) \Delta^r x(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l) x(ln), \quad (3.10)$$

где $d(l)$ — коэффициенты из представления (3.4) сплайна S .

Доказательство. Обозначим через $I_r(x)$ выражение, стоящее в левой части равенства (3.10). Согласно (3.4) и (1.4)

$$I_r(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_r(r - (ln - j)) \right\} \Delta^r x(j).$$

Воспользуемся формулами (1.5) и (1.8). Получим

$$\begin{aligned} I_r(x) &= (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l) \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r x(j) b_r(ln - j) \right\} = \\ &= (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l) \{x(ln) - c\}, \end{aligned}$$

где $c = N^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)$. Учитывая, что $\sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$, приходим к (3.10). Теорема доказана. \square

4. Сплайн-интерполяция

4.1. Рассмотрим на множестве \mathcal{S}_r^m дискретных периодических сплайнов порядка r интерполяционную задачу

$$S(ln) = z(l), \quad l \in 0 : m-1, \quad (4.1)$$

где $z(l)$ — произвольные комплексные числа. Подробная запись задачи (4.1) в силу (3.1) имеет вид

$$\sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r((l-p)n) = z(l), \quad l \in 0 : m-1. \quad (4.2)$$

Таким образом, задача дискретной сплайн-интерполяции сводится к решению системы линейных уравнений (4.2) относительно коэффициентов сплайна $c(p)$.

Введем сигнал $h(p) = Q_r(pn)$. С его помощью систему (4.2) можно переписать так:

$$\sum_{p=0}^{m-1} c(p) h(l-p) = z(l), \quad l \in 0 : m-1,$$

или более компактно $c * h = z$. Переходя в спектральную область, получаем эквивалентную систему уравнений

$$C(k) H(k) = Z(k), \quad k \in 0 : m-1, \quad (4.3)$$

где $C = \mathcal{F}_m(c)$, $Z = \mathcal{F}_m(z)$ и

$$H(k) = \sum_{p=0}^{m-1} h(p) \omega_m^{-kp} = \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(pn) \omega_m^{-kp}.$$

Согласно (2.7), $H(k) = T_r(k)$, причем, как отмечалось после доказательства леммы 2.2, все значения $T_r(k)$ положительны. Система (4.3) имеет единственное решение $C(k) = Z(k)/T_r(k)$, $k \in 0 : m-1$. По формуле обращения для ДПФ

$$c(p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} [Z(k)/T_r(k)] \omega_m^{kp}, \quad p \in 0 : m-1. \quad (4.4)$$

Подведем итог.

Теорема 4.1. *Интерполяционная задача (4.1) имеет единственное решение. Для коэффициентов интерполяционного сплайна S_* справедлива формула (4.4).*

4.2. Покажем, что дискретный интерполяционный сплайн S_* обладает экстремальным свойством. Попутно выяснится роль параметра r .

Рассмотрим экстремальную задачу

$$f(x) := \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x(j)|^2 \rightarrow \min, \quad (4.5)$$

$$x(ln) = z(l), \quad l \in 0 : m-1; \quad x \in \mathbb{C}_N.$$

Теорема 4.2. Единственным решением задачи (4.5) является дискретный интерполяционный сплайн S_* .

Доказательство. Пусть x — произвольный сигнал, удовлетворяющий ограничениям задачи (4.5). Положим $\eta = x - S_*$. Очевидно, что $\eta(ln) = 0$ при $l \in 0 : m - 1$. В силу линейности конечной разности r -го порядка имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(S_* + \eta) = \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r S_*(j) + \Delta^r \eta(j)|^2 = \\ &= f(S_*) + f(\eta) + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j) \Delta^r \bar{\eta}(j). \end{aligned}$$

Согласно теореме 3.2

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S_*(j) \Delta^r \bar{\eta}(j) = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d_*(l) \bar{\eta}(ln) = 0.$$

Значит, $f(x) = f(S_*) + f(\eta)$. Отсюда следует неравенство $f(x) \geq f(S_*)$, гарантирующее оптимальность S_* .

Проверим единственность решения задачи (4.5). Допустим, что $f(x) = f(S_*)$. Тогда $f(\eta) = 0$. Это возможно лишь тогда, когда $\Delta^r \eta(j) = 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. По теореме 1.2 $\eta(j) \equiv \text{const}$. Но $\eta(ln) = 0$ при $l \in 0 : m - 1$, так что $\eta(j) \equiv 0$. Получили, что $x = S_*$. Теорема доказана. \square

5. Сглаживание дискретных периодических данных

5.1. Рассмотрим при $N = mn$ задачу сглаживания дискретных периодических данных в следующей постановке:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r x(j)|^2 \rightarrow \min, \\ g(x) &:= \sum_{l=0}^{m-1} |x(ln) - z(l)|^2 \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{C}_N, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\varepsilon > 0$ — фиксированное число (параметр). Таким образом, требуется найти сигнал $x_* \in \mathbb{C}_N$, обеспечивающий заданную точность аппроксимации $g(x_*) \leq \varepsilon$ данных $z(l)$ на крупной сетке $\{ln\}_{l=0}^{m-1}$ и имеющий минимальный квадрат нормы конечной разности r -го порядка. Последнее условие характеризует «плавность» искомого сигнала.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ задача (5.1) равносильна задаче (4.5).

5.2. Предварительно решим вспомогательную задачу

$$q(c) := \sum_{l=0}^{m-1} |c - z(l)|^2 \rightarrow \min, \quad (5.2)$$

где минимум берется по всем $c \in \mathbb{C}$. Имеем

$$\begin{aligned} q(c+h) &= \sum_{l=0}^{m-1} |(c - z(l)) + h|^2 = \\ &= q(c) + m|h|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{m-1} (c - z(l)) \bar{h}. \end{aligned}$$

Очевидно, что единственная точка минимума c_* функции $q(c)$ определяется из условия

$$\sum_{l=0}^{m-1} (c - z(l)) = 0,$$

так что

$$c_* = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} z(l). \quad (5.3)$$

При этом

$$\varepsilon_* := q(c_*) = - \sum_{l=0}^{m-1} (c_* - z(l)) \bar{z}(l) = \sum_{l=0}^{m-1} |z(l)|^2 - m |c_*|^2. \quad (5.4)$$

Величина ε_* есть критическое значение параметра ε . При $\varepsilon \geq \varepsilon_*$ решением задачи (5.1) является сигнал $x_*(j) \equiv c_*$, поскольку в этом случае $g(x_*) = q(c_*) = \varepsilon_* \leq \varepsilon$ и $f(x_*) = 0$. В дальнейшем считаем, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$. В частности, $\varepsilon_* > 0$. Это гарантирует, что $m \geq 2$ и $z(l) \not\equiv \text{const}$.

5.3. Зафиксируем параметр $\alpha > 0$, введем функцию

$$F_\alpha(x) = \alpha f(x) + g(x)$$

и рассмотрим еще одну вспомогательную задачу

$$F_\alpha(x) \rightarrow \min, \quad (5.5)$$

где минимум берется по всем $x \in \mathbb{C}_N$. Возьмем произвольный сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ и запишем разложение

$$\begin{aligned} F_\alpha(S + H) &= \alpha f(S + H) + g(S + H) = \\ &= \alpha \left[f(S) + f(H) + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r S(j) \Delta^r \bar{H}(j) \right] + \\ &+ g(S) + \sum_{l=0}^{m-1} |H(ln)|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{m-1} [S(ln) - z(l)] \bar{H}(ln). \end{aligned}$$

Согласно теореме 3.2 имеем

$$F_\alpha(S + H) = F_\alpha(S) + \alpha f(H) + \sum_{l=0}^{m-1} |H(ln)|^2 +$$

$$+2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{m-1} [(-1)^r \alpha d(l) + S(ln) - z(l)] \overline{H}(ln).$$

Здесь $d(l)$ — коэффициенты разложения (3.4) сплайна S по сдвигам функции Бернулли.

Допустим, что существует сплайн $S_\alpha \in \mathcal{S}_r^m$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} (-1)^r \alpha d(l) + S(ln) &= z(l), \quad l \in 0 : m-1, \\ \sum_{l=0}^{m-1} d(l) &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Тогда для любого $H \in \mathbb{C}_N$ будет выполняться равенство

$$F_\alpha(S_\alpha + H) = F_\alpha(S_\alpha) + \alpha f(H) + \sum_{l=0}^{m-1} |H(ln)|^2.$$

Из него, в частности, следует, что $F_\alpha(S_\alpha + H) \geq F_\alpha(S_\alpha)$, так что S_α — решение задачи (5.5). Более того, это единственное решение. Действительно, допустив, что $F_\alpha(S_\alpha + H) = F_\alpha(S_\alpha)$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r H(j)|^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{m-1} |H(ln)|^2 = 0.$$

Первое равенство выполняется только тогда, когда $H(j) \equiv \text{const}$ (теорема 1.2). Согласно второму равенству $H(j) \equiv 0$.

Остается проверить, что система (5.6) имеет единственное решение в классе сплайнов S вида (3.4). Возьмем решение $d_0, d_0(0), d_0(1), \dots, d_0(m-1)$ однородной системы

$$\begin{aligned} (-1)^r \alpha d(l) + S(ln) &= 0, \quad l \in 0 : m-1, \\ \sum_{l=0}^{m-1} d(l) &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Соответствующий сплайн обозначим через S_0 . Согласно теореме 3.2 и (5.7) имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\Delta^r S_0(j)|^2 = (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d_0(l) \overline{S_0(ln)} = -\alpha \sum_{l=0}^{m-1} |d_0(l)|^2.$$

В силу положительности α это равенство возможно только тогда, когда все $d_0(l)$ равны нулю. Но в этом случае $S_0(j) \equiv d_0$. Вместе с тем, $S_0(ln) = (-1)^{r+1} \alpha d_0(l) = 0$ при $l \in 0 : m-1$, так что $d_0 = 0$. Доказано, что однородная система (5.7) имеет только нулевое решение. Как следствие, получаем, что система (5.6) имеет единственное решение при любых $z(l)$, $l \in 0 : m-1$.

Подведем итог.

Теорема 5.1. *Вспомогательная задача (5.5) имеет единственное решение S_α . Это дискретный периодический сплайн вида (3.4), коэффициенты которого определяются из системы линейных уравнений (5.6).*

5.4. Покажем, что система (5.6) может быть решена явно. Для этого перейдем в спектральную область:

$$\begin{aligned} & (-1)^r \alpha \sum_{l=0}^{m-1} d(l) \omega_m^{-kl} + d \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{-kl} + \\ & + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m-1} d(p) b_{2r}((l-p)n+r) \omega_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} z(l) \omega_m^{-kl}. \end{aligned}$$

Обозначим $D = \mathcal{F}_m(d)$, $Z = \mathcal{F}_m(z)$. Учитывая, что $kl = k(l-p) + kp$, получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^r \alpha D(k) + m d \delta_m(k) + \\ & + \sum_{p=0}^{m-1} d(p) \omega_m^{-kp} \sum_{l=0}^{m-1} b_{2r}(ln+r) \omega_m^{-kl} = Z(k). \end{aligned}$$

Отметим, что $D(0) = \sum_{l=0}^{m-1} d(l) = 0$. Положив

$$B_r(k) = \sum_{l=0}^{m-1} b_{2r}(ln+r) \omega_m^{-kl},$$

придем к системе линейных уравнений относительно d , $D(1)$, \dots , $D(m-1)$:

$$[(-1)^r \alpha + B_r(k)] D(k) + m d \delta_m(k) = Z(k), \quad (5.8)$$

$$k \in 0 : m-1.$$

При $k = 0$ имеем

$$d = \frac{1}{m} Z(0) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} z(l) = c_*.$$

При $k \in 1 : m-1$ уравнение (5.8) принимает вид

$$[(-1)^r \alpha + B_r(k)] D(k) = Z(k). \quad (5.9)$$

Лемма 5.1. *При $k \in 1 : m-1$ справедливо равенство*

$$B_r(k) = (-1)^r \Lambda_r(k), \quad (5.10)$$

где, как и в п. 2.3,

$$\Lambda_r(k) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(qm+k)}{N} \right)^{-2r}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} B_r(k) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{N-1} (\omega_N^j - 1)^{-2r} \omega_N^{(ln+r)j} \omega_m^{-kl} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N-1} (\omega_N^j - 1)^{-2r} \omega_N^{rj} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{l(j-k)} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N-1} (\omega_N^j - 1)^{-2r} \omega_N^{rj} \delta_m(j-k).$$

Поскольку $j \in 1 : N-1$, $k \in 1 : m-1$, то

$$-m+2 \leq j-k \leq N-2.$$

Единичный импульс δ_m в последней сумме отличен от нуля только при $j-k = qm$, $q \in 0 : n-1$. Учитывая это и (1.7), получаем

$$\begin{aligned} B_r(k) &= \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (\omega_N^{qm+k} - 1)^{-2r} \omega_N^{r(qm+k)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left[\omega_N^{-(qm+k)} (\omega_N^{qm+k} - 1)^2 \right]^{-r} = \\ &= (-1)^r \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(2 \sin \frac{\pi(qm+k)}{N} \right)^{-2r} = (-1)^r \Lambda_r(k). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

На основании (5.9) и (5.10) запишем

$$D(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \\ \frac{(-1)^r Z(k)}{\alpha + \Lambda_r(k)} & \text{при } k \in 1 : m-1. \end{cases}$$

По формуле обращения для ДПФ

$$d(l) = \frac{(-1)^r}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z(k) \omega_m^{kl}}{\alpha + \Lambda_r(k)}, \quad l \in 0 : m-1. \quad (5.11)$$

Явное решение системы (5.6) найдено.

5.5. Решение вспомогательной задачи (5.5) получено в виде (3.4). Преобразуем его к виду (3.1).

Теорема 5.2. *Сглаживающий сплайн $S_\alpha(j)$ допускает представление*

$$S_\alpha(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c_\alpha(p) Q_r(j - pn), \quad (5.12)$$

где

$$c_\alpha(p) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Z(k) \omega_m^{kp}}{T_r(k) + \alpha (2 \sin(\pi k/m))^{2r}}. \quad (5.13)$$

Доказательство. Имеем

$$S_\alpha(j) = d + \sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_{2r}(j + r - ln), \quad (5.14)$$

где коэффициенты $d(l)$ вычисляются по формуле (5.11) и

$$d = \frac{1}{m} Z(0) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{Z(0)}{T_r(0)} Q_r(j - pn).$$

Последнее равенство справедливо в силу (2.8) и (3.3). Далее, по замечанию к теореме 3.1

$$\sum_{l=0}^{m-1} d(l) b_{2r}(j + r - ln) = \sum_{p=0}^{m-1} a(p) Q_r(j - pn).$$

Здесь

$$\begin{aligned} a(p) &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} [(-1)^r (2 \sin(\pi k/m))^{-2r} D(k)] \omega_m^{kp} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z(k) \omega_m^{kp}}{(2 \sin(\pi k/m))^{2r} (\alpha + \Lambda_r(k))} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{Z(k) \omega_m^{kp}}{T_r(k) + \alpha (2 \sin(\pi k/m))^{2r}}. \end{aligned}$$

Мы снова воспользовались формулой (2.8). Подставляя полученные выражения в (5.14), приходим к (5.12). Теорема доказана. \square

Отметим, что при $\alpha = 0$ формула (5.13) для коэффициентов сглаживающего сплайна совпадает с формулой (4.4) для коэффициентов интерполяционного сплайна.

5.6. Введем функцию $\varphi(\alpha) = g(S_\alpha)$. Согласно (5.1), (5.6) и равенству Парсеваля имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \alpha^2 \sum_{l=0}^{m-1} |d(l)|^2 = \frac{\alpha^2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |D(k)|^2 = \\ &= \frac{\alpha^2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|Z(k)|^2}{(\alpha + \Lambda_r(l))^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|Z(k)|^2}{(1 + \Lambda_r(k)/\alpha)^2}.\end{aligned}$$

Напомним, что $z(l) \neq \text{const}$, поэтому хотя бы одна из компонент $Z(1), \dots, Z(m-1)$ дискретного преобразования Фурье отлична от нуля.

Функция $\varphi(\alpha)$ на полуоси $(0, +\infty)$ строго возрастает, причем $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \varphi(\alpha) = 0$. Найдем предел $\varphi(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. С учетом (5.3) и (5.4) получаем

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha) &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} |Z(k)|^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |Z(k)|^2 - \frac{1}{m} |Z(0)|^2 = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} |z(l)|^2 - \frac{1}{m} \left| \sum_{l=0}^{m-1} z(l) \right|^2 = \sum_{l=0}^{m-1} |z(l)|^2 - m |c_*|^2 = \varepsilon_*,\end{aligned}$$

где ε_* — критическое значение параметра ε . Отсюда, в частности, следует, что уравнение $\varphi(\alpha) = \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ имеет единственный положительный корень α_* .

Теорема 5.3. *Дискретный периодический сплайн S_{α_*} является единственным решением задачи (5.1).*

Доказательство. Возьмем произвольный сигнал x , удовлетворяющий ограничениям задачи (5.1), и допустим, что $f(x) \leq f(S_{\alpha_*})$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{\alpha_*}(x) &= \alpha_* f(x) + g(x) \leq \alpha_* f(S_{\alpha_*}) + \varepsilon = \\ &= \alpha_* f(S_{\alpha_*}) + \varphi(\alpha_*) = \alpha_* f(S_{\alpha_*}) + g(S_{\alpha_*}) = F_{\alpha_*}(S_{\alpha_*}). \end{aligned}$$

Учитывая, что S_{α_*} — единственная точка минимума F_{α_*} на \mathbb{C}_N , заключаем, что $x(j) \equiv S_{\alpha_*}(j)$. Это значит, что в случае $x(j) \not\equiv S_{\alpha_*}(j)$ будет $f(x) > f(S_{\alpha_*})$. Теорема доказана. \square

6. Метод касательных гипербол

6.1. В п. 5.6 было установлено, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ единственным решением задачи сглаживания (5.1) является дискретный периодический сплайн $S_{\alpha}(j)$ вида (5.12) с $\alpha = \alpha_*$, где α_* — единственный положительный корень уравнения $\varphi(\alpha) = \varepsilon$. Рассмотрим вопрос о вычислении α_* .

Введем функцию

$$\psi(\beta) = \varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|Z(k)|^2}{(1 + \Lambda_r(k)\beta)^2}.$$

На интервале $(-\tau, +\infty)$, где $\tau = \min_{k \in 1:m-1} [\Lambda_r(k)]^{-1}$, выполняются неравенства $\psi'(\beta) < 0$, $\psi''(\beta) > 0$, поэтому на $(-\tau, +\infty)$ функция $\psi(\beta)$ является строго убывающей и строго выпуклой. При этом $\psi(0) = \varepsilon_*$ и $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \psi(\beta) = 0$. Если β_* — положительный корень уравнения $\psi(\beta) = \varepsilon$, то $\alpha_* = 1/\beta_*$. Таким образом, вместо уравнения $\varphi(\alpha) = \varepsilon$ можно решать уравнение $\psi(\beta) = \varepsilon$.

Рассмотрим равносильное уравнение $[\psi(\beta)]^{-1/2} = \varepsilon^{-1/2}$ и будем решать его методом Ньютона с начальным приближе-

нием $\beta_0 = 0$. Расчетная формула метода имеет вид

$$\begin{aligned}\beta_{k+1} &= \beta_k - \frac{\psi^{-1/2}(\beta_k) - \varepsilon^{-1/2}}{(-1/2) \psi^{-3/2}(\beta_k) \psi'(\beta_k)} = \\ &= \beta_k + \frac{2 \psi(\beta_k)}{\psi'(\beta_k)} \left[1 - \left(\frac{\psi(\beta_k)}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right], \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned}\quad (6.1)$$

Выясним, чему соответствует такой метод применительно к уравнению $\psi(\beta) = \varepsilon$.

6.2. Лемма 6.1. *Функция $[\psi(\beta)]^{-1/2}$ на интервале $(-\tau, +\infty)$ строго возрастает и вогнута.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}[\psi^{-1/2}(\beta)]' &= -\frac{1}{2} \psi^{-3/2}(\beta) \psi'(\beta), \\ [\psi^{-1/2}(\beta)]'' &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{3}{2} \psi^{-5/2}(\beta) (\psi'(\beta))^2 + \psi^{-3/2}(\beta) \psi''(\beta) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \psi^{-5/2}(\beta) [3 (\psi'(\beta))^2 - 2 \psi(\beta) \psi''(\beta)].\end{aligned}$$

Очевидно, что $[\psi^{-1/2}(\beta)]' > 0$. Неравенство $[\psi^{-1/2}(\beta)]'' \leq 0$ равносильно следующему:

$$3 (\psi'(\beta))^2 \leq 2 \psi(\beta) \psi''(\beta). \quad (6.2)$$

Для проверки (6.2) введем обозначения

$$\eta_k = m^{-1} (|Z(k)| / \Lambda_r(k))^2, \quad \theta_k = [\Lambda_r(k)]^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\psi(\beta) &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta_k}{(\beta + \theta_k)^2}, & \psi'(\beta) &= -2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta_k}{(\beta + \theta_k)^3}, \\ \psi''(\beta) &= 6 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta_k}{(\beta + \theta_k)^4}.\end{aligned}$$

Неравенство (6.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sqrt{\eta_k}}{\beta + \theta_k} \frac{\sqrt{\eta_k}}{(\beta + \theta_k)^2} \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta_k}{(\beta + \theta_k)^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta_k}{(\beta + \theta_k)^4} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Последнее справедливо в силу неравенства Коши–Буняковского. Лемма доказана. \square

Замечание. По лемме 1.1.4 неравенство (6.3) выполняется как равенство только тогда, когда $\beta + \theta_k \equiv \text{const}$. Если числа $\theta_k = [\Lambda_r(k)]^{-1}$ при $k \in 1 : m - 1$ не все равны между собой, то неравенство (6.3) выполняется как строгое. В этом случае функция $[\psi(\beta)]^{-1/2}$ является строго вогнутой.

6.3. Согласно вогнутости функции $[\psi(\beta)]^{-1/2}$, при $\beta \geq 0$ имеем

$$\psi^{-1/2}(\beta) - \psi^{-1/2}(\beta_k) \leq -\frac{1}{2} \psi^{-3/2}(\beta_k) \psi'(\beta_k) (\beta - \beta_k),$$

так что

$$0 < \psi^{-1/2}(\beta) \leq \psi^{-1/2}(\beta_k) \left[1 - \frac{\psi'(\beta_k)}{2\psi(\beta_k)} (\beta - \beta_k) \right].$$

Возведя в степень -2 , получим

$$\psi(\beta) \geq \psi(\beta_k) \left[1 - \frac{\psi'(\beta_k)}{2\psi(\beta_k)} (\beta - \beta_k) \right]^{-2}. \quad (6.4)$$

Обозначим функцию, стоящую в правой части неравенства (6.4), через $\zeta_k(\beta)$. График этой функции является гиперболой, которая в силу (6.4) лежит под графиком функции $\psi(\beta)$. Поскольку $\zeta_k(\beta_k) = \psi(\beta_k)$ и $\zeta'_k(\beta_k) = \psi'(\beta_k)$, то указанные графики касаются друг друга при $\beta = \beta_k$ (рис. 10).

Более того, корень β_{k+1} уравнения $\zeta_k(\beta) = \varepsilon$ вычисляется по формуле (6.1).

Сказанное дает основание назвать итерационный метод (6.1) для решения уравнения $\psi(\beta) = \varepsilon$ *методом касательных гипербол*.

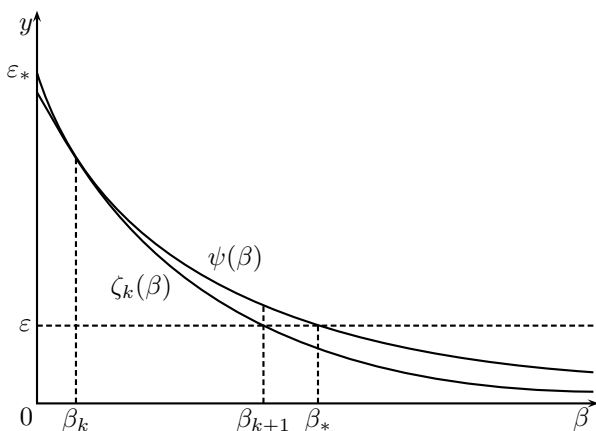


Рис. 10. Метод касательных гипербол

7. Вычисление значений дискретного сплайна

7.1. Начнем с дискретного периодического сплайна первого порядка

$$S_1(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_1(j - pn). \quad (7.1)$$

Коэффициенты $c(p)$ считаются продолженными с периодом m на все целые p . В частности, $c(m) = c(0)$.

Лемма 7.1. Значения $S_1(0), S_1(1), \dots, S_1(N)$ вычисляются последовательно по схеме

$$S_1(0) = n c(0);$$

$$S_1(ln + k + 1) = S_1(ln + k) + \Delta c(l), \quad (7.2)$$

$$k \in 0 : n - 1, \quad l \in 0 : m - 1.$$

Доказательство. Пусть $j = ln + k$, $k \in 0 : n - 1$, $l \in 0 : m - 1$. Согласно (7.1)

$$\begin{aligned} S_1(j) &= \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_1(k - (p - l)n) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p + l) Q_1(k - pn) = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} c(p + l) Q_1(k + (m - p)n). \end{aligned}$$

При $p \in 2 : m - 1$ имеем

$$n \leq k + (m - p)n \leq n - 1 + (m - 2)n = N - n - 1.$$

Поэтому (см. (2.4) и (2.1)) $Q_1(k + (m - p)n) = 0$ при указанных p . Получаем

$$S_1(j) = c(l) Q_1(k) + c(l + 1) Q_1(k + N - n).$$

Напомним, что $Q_1(k) = n - k$ при $k \in 0 : n - 1$. Кроме того, $Q_1(j) = j - N + n$ при $j \in N - n : N - 1$. Поскольку $N - n \leq k + N - n \leq N - 1$ при $k \in 0 : n - 1$, то $Q_1(k + N - n) = k$. Таким образом, при $k \in 0 : n - 1$, $l \in 0 : m - 1$

$$S_1(ln + k) = c(l)(n - k) + c(l + 1)k = nc(l) + k\Delta c(l). \quad (7.3)$$

В частности, $S_1(ln) = nc(l)$ при $l \in 0 : m - 1$. В силу периодичности последнее равенство справедливо и при $l = m$.

Отметим, что формула (7.3) верна при $k = n$. В этом случае она принимает вид $S_1((l + 1)n) = nc(l + 1)$, $l \in 0 : m - 1$. Заменяя в (7.3) k на $k + 1$, запишем

$$S_1(ln + k + 1) = nc(l) + (k + 1)\Delta c(l), \quad k \in 0 : n - 1. \quad (7.4)$$

На основании (7.3) и (7.4) приходим к (7.2). Лемма доказана. \square

Приведем программу, реализующую вычисления по схеме (7.2).

```

s1(0) := n * c(0);  j := 0;

for l := 0 to m - 1 do

begin  h := c(l + 1) - c(l);

      for k := 1 to n do

begin  j := j + 1;

      s1(j) := s1(j - 1) + h  end

end

```

Видим, что вычисление значений $S_1(j)$ при $j = 0, 1, \dots, N$ требует одного умножения на n и $(n + 1)m$ сложений.

7.2. Перейдем к общему случаю дискретного периодического сплайна порядка r . С помощью циклической свертки введем последовательность сигналов

$$S_\nu = Q_1 * S_{\nu-1}, \quad \nu = 2, 3, \dots \quad (7.5)$$

Здесь S_1 имеет вид (7.1).

Теорема 7.1. *Справедливо равенство*

$$S_r(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (7.6)$$

Доказательство. При $r = 1$ формула (7.6) совпадает с (7.1). Сделаем индукционный переход от $r - 1$ к r . Согласно индукционному предположению, (7.5) и (2.4) имеем

$$S_r(j) = \sum_{l=0}^{N-1} Q_1(l) S_{r-1}(j - l) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} c(p) \sum_{l=0}^{N-1} Q_1(l) Q_{r-1}(j-l-pn) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j-pn).$$

Теорема доказана. \square

7.3. Теорема 7.1 показывает, что вычисление значений $S_r(j)$ сводится к вычислению значений $S_1(j)$ и последовательной свертке с В-сплайном $Q_1(j)$. Рассмотрим вопрос о вычислении свертки с Q_1 отдельно. Пусть

$$y(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) Q_1(j-k).$$

Теорема 7.2. *Справедливо равенство*

$$y(j) = nx(j) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)[x(j+k) + x(j-k)], \quad (7.7)$$

$$j \in 0 : N-1.$$

Доказательство. В силу четности Q_1 имеем

$$\begin{aligned} y(j) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) Q_1(k-j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k+j) Q_1(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)x(k+j) + \sum_{k=N-n+1}^{N-1} (n-(N-k))x(j-(N-k)) = \\ &= nx(j) + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)[x(j+k) + x(j-k)]. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Зафиксируем $j \in 0 : N-1$ и введем обозначения

$$d_0 = x(j); \quad d_k = x(j+k) + x(j-k), \quad k \in 1 : n-1; \quad t_k = n-k.$$

Тогда формулу (7.7) можно переписать в виде

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k t_k.$$

Построим числовую последовательность $\{h_k\}$ по правилу

$$h_k = d_k + h_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad h_{-1} = 0. \quad (7.8)$$

Учитывая, что $t_k - t_{k+1} = 1$, получаем

$$\begin{aligned} y(j) &= \sum_{k=0}^{n-1} (h_k - h_{k-1}) t_k = \sum_{k=0}^{n-1} h_k t_k - \sum_{k=-1}^{n-2} h_k t_{k+1} = \\ &= h_{n-1} t_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} h_k = \sum_{k=0}^{n-1} h_k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k, \quad (7.9)$$

где h_k вычисляются по рекуррентной формуле (7.8).

Приведем программу вычисления значений $y(j)$ при $j \in 0 : N-1$, основанную на представлении (7.9).

```

for  $j := 0$  to  $n-1$  do
  begin  $h := x(j)$ ;  $s := h$ ;
    for  $k := 1$  to  $n-1$  do
      begin  $h := h + (x(j+k) + x(j-k))$ ;
         $s := s + h$  end;
       $y(j) := s$ 
    end
  end

```

В программе используются только сложения в количестве $3(n-1)N$.

У сигнала x должны быть явно заданы значения $x(j)$ при j от $(-n + 1)$ до $N + n - 2$. В силу периодичности следует положить

$$x(j) = x(N + j) \text{ при } j \in -n + 1 : -1;$$

$$x(j) = x(j - N) \text{ при } j \in N : N + n - 2.$$

8. Ортогональный базис в пространстве сплайнов

8.1. Рассмотрим дискретный периодический сплайн

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn) \quad (8.1)$$

и преобразуем его коэффициенты по правилу $\xi = \mathcal{F}_m(c)$. Учитывая формулу обращения для ДПФ, запишем

$$\begin{aligned} S(j) &= \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \omega_m^{kp} \right\} Q_r(j - pn) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \left\{ \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{kp} Q_r(j - pn) \right\}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Введем обозначение

$$\mu_k(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{kp} Q_r(j - pn), \quad k \in 0 : m - 1. \quad (8.3)$$

Тогда формула (8.2) примет вид

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \mu_k(j). \quad (8.4)$$

Очевидно, что сигналы μ_k принадлежат \mathcal{S}_r^m . Согласно (8.4) они образуют базис в \mathcal{S}_r^m . Покажем, что это ортогональный базис.

8.2. Лемма 8.1. *Справедливо равенство*

$$\mu_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm+k) \omega_N^{(qm+k)j}. \quad (8.5)$$

Доказательство. Согласно (2.5) и (8.3) имеем

$$\begin{aligned} \mu_k(j) &= \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{kp} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} X_1^r(l) \omega_N^{l(j-pm)} \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1^r(l) \omega_N^{lj} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{(k-l)p} \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1^r(l) \omega_N^{lj} \delta_m(k-l). \end{aligned}$$

Индекс l допускает представление $l = qm + k'$, где $q \in 0 : n-1$, $k' \in 0 : m-1$. Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} \mu_k(j) &= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{m-1} X_1^r(qm+k') \omega_N^{(qm+k')j} \delta_m(k-k') = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^r(qm+k) \omega_N^{(qm+k)j}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Теорема 8.1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \langle \mu_k, \mu_{k'} \rangle &= 0 \quad \text{при } k \neq k', \\ \|\mu_k\|^2 &= \frac{1}{m} T_{2r}(k), \quad k \in 0 : m-1. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Доказательство. На основании (8.5) запишем

$$\langle \mu_k, \mu_{k'} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \mu_k(j) \bar{\mu}_{k'}(j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{q, q'=0}^{n-1} X_1^r(qm+k) X_1^r(q'm+k') \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(qm+k-q'm-k')j} \right\} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{q, q'=0}^{n-1} X_1^r(qm+k) X_1^r(q'm+k') \delta_N((q-q')m+k-k').
\end{aligned}$$

Очевидно, что $|k-k'| \leq m-1$ и $|(q-q')m+k-k'| \leq N-1$. Если $k \neq k'$, то аргумент единичного импульса δ_N отличен от нуля при всех $q, q' \in 0 : n-1$. В этом случае $\langle \mu_k, \mu_{k'} \rangle = 0$. При $k = k'$ согласно (2.6) получаем

$$\|\mu_k\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n-1} X_1^{2r}(qm+k) = \frac{1}{m} T_{2r}(k).$$

Теорема доказана. \square

8.3. Установлено, что сплайны $\{\mu_k\}_{k=0}^{m-1}$ образуют ортогональный базис в пространстве \mathcal{S}_m^r . Переход от разложения (8.1) к разложению (8.4) основан на преобразовании коэффициентов $\xi = \mathcal{F}_m(c)$. Обратный переход связан с формулой обращения для ДПФ: $c = \mathcal{F}_m^{-1}(\xi)$.

Отметим, что в силу (8.5) и (2.2)

$$\mu_0(j) \equiv N^{-1} n^{2r}. \quad (8.7)$$

Лемма 8.2. При $k \in 1 : m-1$ справедливо равенство

$$\mu_{m-k}(j) = \bar{\mu}_k(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.8)$$

Доказательство. Согласно (8.3)

$$\bar{\mu}_{m-k}(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{-(m-k)p} Q_r(j-pn) = \mu_k(j),$$

что равносильно (8.8). Лемма доказана. \square

Лемма 8.3. При всех целых l справедливо равенство

$$\mu_k(j + ln) = \omega_m^{kl} \mu_k(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.9)$$

Действительно,

$$\mu_k(j + ln) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{k(p-l)+kl} Q_r(j - (p-l)n) = \omega_m^{kl} \mu_k(j).$$

Теорема 8.2. Пусть $k \in 1 : m-1$ и p — натуральное число. Если произведение kp не делится на m , то

$$\sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^p = 0.$$

Доказательство. На основании (8.9) запишем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^p &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} [\mu_k(q + ln)]^p = \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \omega_m^{klp} \sum_{q=0}^{n-1} [\mu_k(q)]^p = m \delta_m(kp) \sum_{q=0}^{n-1} [\mu_k(q)]^p. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. \square

Рассмотрим частные случаи. При $p = 1$ имеем

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mu_k(j) = 0, \quad k \in 1 : m-1.$$

Пусть $p = 2$. При $k \in 1 : m-1$ условие $\langle 2k \rangle_m \neq 0$ сводится к соотношению $2k \neq m$. Таким образом, при $k \in 1 : m-1$, $k \neq m/2$ справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} [\mu_k(j)]^2 = 0.$$

Видим, что среди значений $\mu_k(j)$ при указанных k обязательно имеются комплексные. Вместе с тем, при четном m все значения $\mu_{m/2}(j)$ вещественны, поскольку

$$\mu_{m/2}(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p Q_r(j - pn). \quad (8.10)$$

8.4. Вернемся к формуле (8.3) и перепишем ее так:

$$\mu_k(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} Q_r(j - pn) \omega_m^{pk}.$$

Данная формула имеет вид формулы обращения для ДПФ, поэтому

$$Q_r(j - pn) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k(j) \omega_m^{-pk}, \quad p \in 0 : m-1.$$

В частности,

$$Q_r(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8.11)$$

9. Базисы сдвигов

9.1. Как отмечалось в п. 3.1, система сдвигов В-сплайна $\{Q_r(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$ образует базис в пространстве \mathcal{S}_r^m . Существуют ли еще сплайны с аналогичным свойством? На этот вопрос можно дать полный ответ.

Возьмем сплайн $\varphi \in \mathcal{S}_r^m$ и разложим его по ортогональному базису:

$$\varphi(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \mu_k(j). \quad (9.1)$$

Согласно (8.9)

$$\varphi(j - pn) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \omega_m^{-kp} \mu_k(j). \quad (9.2)$$

Значит, сдвиги $\varphi(j - pn)$ также принадлежат \mathcal{S}_r^m .

Теорема 9.1. Система сдвигов $\{\varphi(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$ является базисом в \mathcal{S}_r^m тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\xi(k)$ в разложении (9.1) отличны от нуля.

Доказательство. Перепишем (9.2) в виде

$$\varphi(j - pn) = \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \mu_k(j) \omega_m^{-kp}.$$

По формуле обращения для ДПФ

$$\xi(k) \mu_k(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_m^{kp} \varphi(j - pn), \quad k \in 0 : m - 1. \quad (9.3)$$

Если все $\xi(k)$ отличны от нуля, то, поделив (9.3) на $\xi(k)$, получим разложение всех сплайнов $\mu_k(j)$ по системе $\{\varphi(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$. Значит, эта система является базисом в \mathcal{S}_r^m .

Наоборот, пусть $\{\varphi(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$ — базис в \mathcal{S}_r^m . Если хотя бы один коэффициент $\xi(k)$ в разложении (9.1) равен нулю, то согласно (9.3) система $\{\varphi(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$ линейно зависима. Но это противоречит определению базиса. Теорема доказана. \square

9.2. Два сплайна φ и ψ из \mathcal{S}_r^m называются *двойственными*, если при всех $p, q \in 0 : m - 1$ выполняется соотношение

$$\langle \varphi(\cdot - pn), \psi(\cdot - qn) \rangle = \delta_m(p - q). \quad (9.4)$$

Таким образом, двойственность сплайнов φ, ψ характеризуется тем, что системы их сдвигов $\{\varphi(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}, \{\psi(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$ биортогональны.

Наряду с (9.1) запишем разложение

$$\psi(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \eta(k) \mu_k(j).$$

Отметим, что согласно (9.2) и (8.6)

$$\begin{aligned}
 & \langle \varphi(\cdot - pn), \psi(\cdot - qn) \rangle = \\
 & = \left\langle \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \omega_m^{-kp} \mu_k, \sum_{l=0}^{m-1} \eta(l) \omega_m^{-lq} \mu_l \right\rangle = \\
 & = \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \bar{\eta}(k) \omega_m^{k(q-p)} \|\mu_k\|^2 = \\
 & = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \bar{\eta}(k) T_{2r}(k) \omega_m^{k(q-p)}. \tag{9.5}
 \end{aligned}$$

Теорема 9.2. *Для того чтобы сплайны φ и ψ из \mathcal{S}_r^m были двойственными, необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты $\xi(k)$, $\eta(k)$ в разложении по ортогональному базису удовлетворяли условию*

$$\xi(k) \bar{\eta}(k) = [T_{2r}(k)]^{-1}, \quad k \in 0 : m-1. \tag{9.6}$$

Доказательство. **Необходимость.** Положим в (9.4) $p = 0$. Согласно (9.5) получим

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \xi(k) \bar{\eta}(k) T_{2r}(k) \omega_m^{kq} = \delta_m(q).$$

Значит,

$$\xi(k) \bar{\eta}(k) T_{2r}(k) = \sum_{q=0}^{m-1} \delta_m(q) \omega_m^{-kq} = 1, \quad k \in 0 : m-1,$$

что равносильно (9.6).

Достаточность очевидным образом следует из (9.5) и (9.6). Теорема доказана. \square

9.3. Теорема 9.2 позволяет ввести *самодвойственный сплайн*. Он получается при $\xi(k) = \eta(k)$, $k \in 0 : m - 1$. Условие (9.6) в данном случае принимает вид

$$|\xi(k)|^2 = [T_{2r}(k)]^{-1}, \quad k \in 0 : m - 1.$$

Простейший самодвойственный сплайн определяется формулой

$$\varphi_r(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(j)}{\sqrt{T_{2r}(k)}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Согласно (9.5), $\langle \varphi_r(\cdot - pn), \varphi_r(\cdot - qn) \rangle = \delta_m(q - p)$. Последнее означает, что сдвиги $\{\varphi_r(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$ образуют ортонормированную систему.

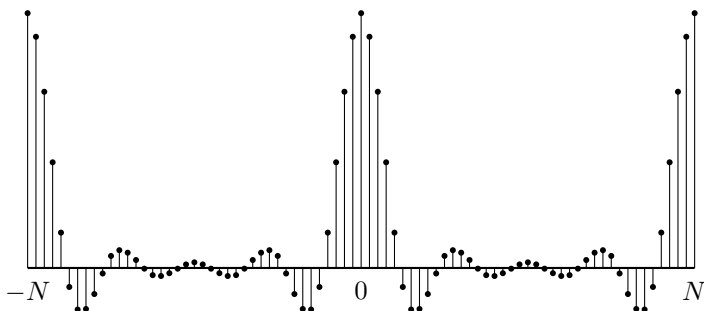


Рис. 11. График самодвойственного сплайна $\varphi_r(j)$ при $m = 8$, $n = 5$ и $r = 2$

9.4. Согласно (8.11) все коэффициенты в разложении дискретного периодического В-сплайна $Q_r(j)$ по ортогональному базису равны единице. Двойственный к $Q_r(j)$ сплайн $R_r(j)$ в силу (9.6) имеет вид

$$R_r(j) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(j)}{T_{2r}(k)}. \quad (9.7)$$

Покажем, как с помощью двойственных сплайнов $Q_r(j)$ и $R_r(j)$ решается задача о сплайн-обработке дискретных периодических данных по методу наименьших квадратов.

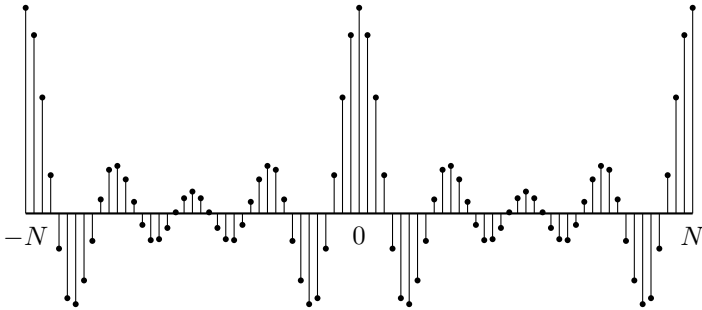


Рис. 12. График сплайна $R_r(j)$, двойственного к В-сплайну $Q_r(j)$ при $m = 8$, $n = 5$ и $r = 2$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$F(S) := \sum_{j=0}^{N-1} |S(j) - z(j)|^2 \rightarrow \min, \quad (9.8)$$

где минимум берется по всем $S \in \mathcal{S}_r^m$. Для произвольного $H \in \mathcal{S}_r^m$ имеем

$$F(S + H) = \|(S - z) + H\|^2 = F(S) + \|H\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle S - z, H \rangle.$$

Если удастся построить сплайн $S_* \in \mathcal{S}_r^m$, такой, что разность $S_* - z$ будет ортогональна любому элементу H из \mathcal{S}_r^m , то S_* будет единственным решением задачи (9.8).

Воспользуемся представлением

$$S_*(j) = \sum_{q=0}^{m-1} d(q) R_r(j - qn). \quad (9.9)$$

Условие ортогональности запишем в виде

$$\left\langle \sum_{q=0}^{m-1} d(q) R_r(\cdot - qn) - z, Q_r(\cdot - pn) \right\rangle = 0, \quad p \in 0 : m-1.$$

В силу двойственности сплайнов Q_r и R_r получим

$$d(p) = \langle z, Q_r(\cdot - pn) \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} z(j) Q_r(j - pn), \quad (9.10)$$

$$p \in 0 : m-1.$$

Таким образом, единственным решением задачи (9.8) является сплайн (9.9), коэффициенты которого вычисляются по формуле (9.10).

Задачу (9.8) можно интерпретировать как задачу ортогонального проектирования сигнала z на подпространство S_r^m .

9.5. От разложения (9.9) сплайна $S_*(j)$ по базису сдвигов $\{R_r(j - qn)\}_{q=0}^{m-1}$ можно перейти к разложению по базису $\{Q_r(j - pn)\}_{p=0}^{m-1}$. Для этого, воспользовавшись формулами (9.7) и (9.2), запишем

$$\begin{aligned} S_*(j) &= \sum_{q=0}^{m-1} d(q) R_r(j - qn) = \sum_{q=0}^{m-1} d(q) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_m^{-kq}}{T_{2r}(k)} \mu_k(j) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(j)}{T_{2r}(k)} \sum_{q=0}^{m-1} d(q) \omega_m^{-kq}. \end{aligned}$$

Обозначим $D = \mathcal{F}_m(d)$, $\xi(k) = D(k)/T_{2r}(k)$, $c = \mathcal{F}_m^{-1}(\xi)$. Тогда

$$S_*(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn).$$

10. Вейвлетные подпространства

10.1. Дальнейший анализ будем проводить в предположении, что $m = 2^t$, где t — натуральное число. Положим $m_\nu = m/2^\nu$, $n_\nu = 2^\nu n$. В этом случае $m_\nu n_\nu = N$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, t$.

Обозначим через μ_k^ν ортогональные сплайны, соответствующие параметрам m_ν , n_ν . В частности, $\mu_k^0 = \mu_k$. По определению $\mu_k^\nu \in \mathcal{S}_r^{m_\nu}$. В силу (8.3) сплайны μ_k^ν можно считать определенными при всех целых k . Ясно, что по k они являются m_ν -периодическими.

Теорема 10.1. При $\nu = 0, 1, \dots, t-1$ справедлива рекуррентная формула

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = c_\nu(k) \mu_k^\nu(j) + c_\nu(m_{\nu+1} + k) \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j), \quad (10.1)$$

где $c_\nu(l) = (2 \cos(\pi l / m_\nu))^{2r}$.

Доказательство. Введем обозначение

$$y_\nu(l) = \begin{cases} n_\nu^{2r} & \text{при } l = 0, \\ \left(\frac{\sin(\pi l / m_\nu)}{\sin(\pi l / N)} \right)^{2r} & \text{при } l \in 1 : N-1. \end{cases}$$

Согласно (8.5)

$$\mu_k^\nu(j) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + k) \omega_N^{(qm_\nu+k)j}.$$

Отметим, что

$$y_{\nu+1}(l) = c_\nu(l) y_\nu(l), \quad l \in 0 : N-1. \quad (10.2)$$

Учитывая m_ν -периодичность сигнала c_ν , получаем

$$\mu_k^{\nu+1}(j) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{2n_\nu-1} y_{\nu+1}(qm_{\nu+1} + k) \omega_N^{(qm_{\nu+1}+k)j} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_{\nu+1}(2qm_{\nu+1} + k) \omega_N^{(2qm_{\nu+1}+k)j} + \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_{\nu+1}((2q+1)m_{\nu+1} + k) \omega_N^{((2q+1)m_{\nu+1}+k)j} = \\
&= c_\nu(k) \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + k) \omega_N^{(qm_\nu+k)j} + \\
&+ c_\nu(m_{\nu+1} + k) \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + m_{\nu+1} + k) \omega_N^{(qm_\nu+m_{\nu+1}+k)j} = \\
&= c_\nu(k) \mu_\nu(j) + c_\nu(m_{\nu+1} + k) \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Из формулы (10.1) следует, в частности, включение $\mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}} \subset \mathcal{S}_r^{m_\nu}$.

10.2. Построим ненулевой сплайн $w_k^{\nu+1} \in \mathcal{S}_r^{m_\nu}$, $k \in 0 : m_{\nu+1} - 1$, вида

$$w_k^{\nu+1}(j) = a_\nu(k) \mu_k^\nu(j) + a_\nu(m_{\nu+1} + k) \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j), \quad (10.3)$$

ортогональный $\mu_k^{\nu+1}$. Поскольку

$$\begin{aligned}
&\langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1} \rangle = \\
&= a_\nu(k) c_\nu(k) \|\mu_k^\nu\|^2 + a_\nu(m_{\nu+1} + k) c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2,
\end{aligned}$$

то условие $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1} \rangle = 0$ можно записать в виде равенства нулю определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_\nu(k) & c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2 \\ a_\nu(m_{\nu+1} + k) & -c_\nu(k) \|\mu_k^\nu\|^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10.4)$$

Второй столбец определителя — ненулевой, поэтому равенство (10.4) возможно лишь тогда, когда найдется число $\lambda_\nu(k)$, такое, что

$$a_\nu(k) = \lambda_\nu(k) c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2,$$

$$a_\nu(m_{\nu+1} + k) = -\lambda_\nu(k) c_\nu(k) \|\mu_k^\nu\|^2.$$

Положив

$$\lambda_\nu(m_{\nu+1} + k) = -\lambda_\nu(k), \quad k \in 0 : m_{\nu+1} - 1, \quad (10.5)$$

придем к единой формуле

$$a_\nu(k) = \lambda_\nu(k) c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2, \quad (10.6)$$

$$k \in 0 : m_\nu - 1.$$

Таким образом, сплайн $w_k^{\nu+1}$ вида (10.3) ортогонален $\mu_k^{\nu+1}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $a_\nu(k)$ допускают представление (10.6), в котором числа $\lambda_\nu(k)$ обладают свойством (10.5). Условие $w_k^{\nu+1}(j) \neq 0$ равносильно тому, что $\lambda_\nu(k) \neq 0$, $k \in 0 : m_{\nu+1} - 1$.

Для чисел $\rho_\nu(k) = \lambda_\nu(k) \omega_{m_\nu}^{-k}$ согласно (10.5) справедливо равенство $\rho_\nu(m_{\nu+1} + k) = \rho_\nu(k)$, $k \in 0 : m_{\nu+1} - 1$. Это значит, что $\lambda_\nu(k)$ можно представить в виде $\lambda_\nu(k) = \rho_\nu(k) \omega_{m_\nu}^k$, где $\{\rho_\nu(k)\}$ — произвольная $m_{\nu+1}$ -периодическая последовательность, все члены которой отличны от нуля.

Рассмотрим простейший случай $\rho_\nu(k) \equiv 1$. Ему соответствуют сплайны $w_k^{\nu+1}$ вида (10.3) с коэффициентами

$$a_\nu(k) = \omega_{m_\nu}^k c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2. \quad (10.7)$$

Формула (10.7) позволяет считать сплайны $w_k^{\nu+1}$ определенными при всех целых k . При этом согласно (10.3) последовательность $\{w_k^{\nu+1}(j)\}$ будет $m_{\nu+1}$ -периодической по k .

Отметим, что

$$w_0^{\nu+1}(j) = a_\nu(m_{\nu+1}) \mu_{m_{\nu+1}}^\nu(j) = -2^{2r} \|\mu_0^\nu\|^2 \mu_{m_{\nu+1}}^\nu(j).$$

Лемма 10.1. *При всех целых l справедливо равенство*

$$w_k^{\nu+1}(j + ln_{\nu+1}) = \omega_{m_{\nu+1}}^{kl} w_k^{\nu+1}(j). \quad (10.8)$$

Доказательство. Согласно (10.3) и (8.9) запишем

$$\begin{aligned} w_k^{\nu+1}(j + ln_{\nu+1}) &= \\ &= a_\nu(k) \mu_k^\nu(j + 2ln_\nu) + a_\nu(m_{\nu+1} + k) \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j + 2ln_\nu) = \\ &= a_\nu(k) \omega_{m_\nu}^{2lk} \mu_k^\nu(j) + a_\nu(m_{\nu+1} + k) \omega_{m_\nu}^{2l(m_{\nu+1}+k)} \mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j) = \\ &= \omega_{m_{\nu+1}}^{kl} w_k^{\nu+1}(j). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Теорема 10.2. *Сплайны $\{w_k^{\nu+1}\}_{k=0}^{m_{\nu+1}-1}$ образуют ортогональную систему. При этом*

$$\begin{aligned} \langle w_k^{\nu+1}, \mu_{k'}^{\nu+1} \rangle &= 0 \text{ при всех } k, k' \in 0 : m_{\nu+1} - 1, \\ \|w_k^{\nu+1}\| &= \|\mu_k^\nu\| \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\| \|\mu_k^{\nu+1}\|. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Доказательство. Равенства $\langle w_k^{\nu+1}, w_{k'}^{\nu+1} \rangle = 0$ и $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_{k'}^{\nu+1} \rangle = 0$ при $k \neq k'$, $k, k' \in 0 : m_{\nu+1} - 1$, следуют из (10.3), (10.1) и ортогональности системы $\{\mu_k^\nu\}_{k=0}^{m_\nu-1}$. Равенство $\langle w_k^{\nu+1}, \mu_k^{\nu+1} \rangle = 0$ обеспечено выбором сплайна $w_k^{\nu+1}$. Норма $w_k^{\nu+1}$ вычисляется непосредственно на основе формулы (10.7). Действительно,

$$\begin{aligned} \|w_k^{\nu+1}\|^2 &= |a_\nu(k)|^2 \|\mu_k^\nu\|^2 + |a_\nu(m_{\nu+1} + k)|^2 \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2 = \\ &= \|\mu_k^\nu\|^2 \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2 \left(|c_\nu(m_{\nu+1} + k)|^2 \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ |c_\nu(k)|^2 \|\mu_k^\nu\|^2) = \|\mu_k^\nu\|^2 \|\mu_{m_\nu+1+k}^\nu\|^2 \|\mu_k^{\nu+1}\|^2.$$

Остается извлечь квадратный корень. Теорема доказана. \square

10.3. Обозначим через $\mathcal{W}_r^{m_\nu+1}$ линейную оболочку, натянутую на сплайны $w_k^{\nu+1}$, $k \in 0 : m_{\nu+1} - 1$. Поскольку все $w_k^{\nu+1}$ принадлежат $\mathcal{S}_r^{m_\nu}$, то $\mathcal{W}_r^{m_\nu+1} \subset \mathcal{S}_r^{m_\nu}$. Как отмечалось ранее, справедливо также включение $\mathcal{S}_r^{m_\nu+1} \subset \mathcal{S}_r^{m_\nu}$. Согласно теореме 10.2 сплайны

$$\mu_0^{\nu+1}, \mu_1^{\nu+1}, \dots, \mu_{m_{\nu+1}-1}^{\nu+1}, w_0^{\nu+1}, w_1^{\nu+1}, \dots, w_{m_{\nu+1}-1}^{\nu+1}$$

образуют ортогональный базис в $\mathcal{S}_r^{m_\nu}$. Само пространство $\mathcal{S}_r^{m_\nu}$ можно рассматривать как ортогональную сумму подпространств $\mathcal{S}_r^{m_\nu+1}$ и $\mathcal{W}_r^{m_\nu+1}$, т.е.

$$\mathcal{S}_r^{m_\nu} = \mathcal{S}_r^{m_\nu+1} \oplus \mathcal{W}_r^{m_\nu+1}. \quad (10.10)$$

Последовательно применяя формулу (10.10) при $\nu = 0, 1, \dots, t-1$, приходим к разложению

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_r^m &= \mathcal{S}_r^{m_0} = \mathcal{S}_r^{m_1} \oplus \mathcal{W}_r^{m_1} = (\mathcal{S}_r^{m_2} \oplus \mathcal{W}_r^{m_2}) \oplus \mathcal{W}_r^{m_1} = \\ &= \mathcal{S}_r^{m_2} \oplus (\mathcal{W}_r^{m_2} \oplus \mathcal{W}_r^{m_1}) = \dots = \\ &= \mathcal{S}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_t-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_r^{m_1}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{S}_r^{m_t} = \mathcal{S}_r^1$ — одномерное пространство, состоящее из сигналов, тождественно равных комплексной константе (п. 3.1).

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 10.3. *Пространство дискретных периодических сплайнов \mathcal{S}_r^m при $m = 2^t$ разлагается в ортогональную сумму*

$$\mathcal{S}_r^m = \mathcal{S}_r^1 \oplus \mathcal{W}_r^{m_t} \oplus \mathcal{W}_r^{m_t-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_r^{m_1}.$$

Согласно этой теореме любой сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ при $m = 2^t$ допускает представление

$$S(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^t \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \alpha_\nu(k) w_k^\nu(j),$$

где α и $\alpha_\nu(k)$ — комплексные коэффициенты.

Подпространства $\mathcal{W}_r^{m_\nu}$, $\nu \in 1:t$, называются *вейвлетными*.

Формула (10.10) показывает, что $\mathcal{W}_r^{m_{\nu+1}}$ есть ортогональное дополнение $\mathcal{S}_r^{m_{\nu+1}}$ до $\mathcal{S}_r^{m_\nu}$.

11. Быстрое вейвлетное разложение дискретных периодических сплайнов

11.1. Введем в вейвлетном подпространстве $\mathcal{W}_r^{m_\nu}$ новый базис. Для этого положим

$$\theta_r^\nu(j) = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \frac{w_k^\nu(j)}{\|w_k^\nu\|}. \quad (11.1)$$

Очевидно, что $\theta_r^\nu \in \mathcal{W}_r^{m_\nu}$.

Теорема 11.1. Сдвиги $\{\theta_r^\nu(j - ln_\nu)\}_{l=0}^{m_\nu-1}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{W}_r^{m_\nu}$.

Доказательство. Согласно (10.8)

$$\theta_r^\nu(j - ln_\nu) = \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \frac{\omega_{m_\nu}^{-kl}}{\|w_k^\nu\|} w_k^\nu(j).$$

Далее

$$\langle \theta_r^\nu(\cdot - ln_\nu), \theta_r^\nu(\cdot - l'n_\nu) \rangle = \frac{1}{m_\nu} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \omega_{m_\nu}^{k(l'-l)} = \delta_{m_\nu}(l' - l).$$

Тем самым установлено, что сдвиги $\theta_r^\nu(j - ln_\nu)$ при $l = 0, 1, \dots, m_\nu - 1$ принадлежат подпространству $\mathcal{W}_r^{m_\nu}$ и образуют в нем ортонормированный базис. Теорема доказана. \square

На основании теорем 10.3 и 11.1 приходим к следующему результату.

Теорема 11.2. *При $m = 2^t$ любой сплайн $S \in \mathcal{S}_r^m$ допускает представление*

$$S(j) = \alpha + \sum_{\nu=1}^t \sum_{l=0}^{m_\nu-1} \beta_\nu(l) \theta_r^\nu(j - ln_\nu), \quad (11.2)$$

где α и $\beta_\nu(l)$ — комплексные коэффициенты.

11.2. Преобразуем формулу (11.1). Учитывая (10.3) и m_ν -периодичность по k последовательности $\{w_\nu^k\}$, получаем

$$\begin{aligned} \theta_r^\nu(j) &= \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \left[\frac{a_{\nu-1}(k)}{\|w_k^\nu\|} \mu_k^{\nu-1}(j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{\nu-1}(m_\nu + k)}{\|w_{m_\nu+k}^\nu\|} \mu_{m_\nu+k}^{\nu-1}(j) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_\nu}} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \frac{a_{\nu-1}(k)}{\|w_k^\nu\|} \mu_k^{\nu-1}(j). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Коэффициенты $a_{\nu-1}(k)$ в (11.3) определяются формулой (10.7). Отметим, что $a_{\nu-1}(0) = 0$.

11.3. По-прежнему считаем, что $m = 2^t$ и $m_\nu = m/2^\nu$. Возьмем дискретный периодический сплайн $S(j)$ вида (8.1). Положив $\xi_0 = \mathcal{F}_m(c)$, придем к формуле, аналогичной (8.4):

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_0-1} \xi_0(k) \mu_k^0(j). \quad (11.4)$$

Теперь воспользуемся разложением (10.10) при $\nu = 0$, согласно которому

$$S(j) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \xi_1(k) \mu_k^1(j) + \sum_{l=0}^{m_1-1} \beta_1(l) \theta_r^1(j - l n_1). \quad (11.5)$$

Вычислим коэффициенты $\xi_1(k)$ и $\beta_1(l)$.

Имеем $\langle S, \mu_k^1 \rangle = \xi_1(k) \|\mu_k^1\|^2$. Вместе с тем, в силу рекуррентного соотношения (10.1) при $\nu = 0$,

$$\begin{aligned} \langle S, \mu_k^1 \rangle &= \left\langle \sum_{k'=0}^{m_0-1} \xi_0(k') \mu_{k'}^0, c_0(k) \mu_k^0 + c_0(m_1 + k) \mu_{m_1+k}^0 \right\rangle = \\ &= \xi_0(k) c_0(k) \|\mu_k^0\|^2 + \xi_0(m_1 + k) c_0(m_1 + k) \|\mu_{m_1+k}^0\|^2. \end{aligned}$$

Значит,

$$\xi_1(k) = c_0(k) \frac{\|\mu_k^0\|^2}{\|\mu_k^1\|^2} \xi_0(k) + c_0(m_1 + k) \frac{\|\mu_{m_1+k}^0\|^2}{\|\mu_k^1\|^2} \xi_0(m_1 + k).$$

Обозначим $A_0(k) = c_0(k) \|\mu_k^0\|^2 \|\mu_k^1\|^{-2}$. Последовательность $\{\mu_k^1\}$ m_1 -периодична по k , что позволяет переписать формулу для $\xi_1(k)$ в более компактном виде

$$\xi_1(k) = A_0(k) \xi_0(k) + A_0(m_1 + k) \xi_0(m_1 + k), \quad (11.6)$$

$$k \in 0 : m_1 - 1.$$

Далее, $\langle S, \theta_r^1(\cdot - l n_1) \rangle = \beta_1(l)$. Вместе с тем, согласно (11.3) при $\nu = 1$ и (8.9)

$$\begin{aligned} \langle S, \theta_r^1(\cdot - l n_1) \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_1}} \left\langle \sum_{k'=0}^{m_0-1} \xi_0(k') \mu_{k'}^0, \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{a_0(k)}{\|w_k^1\|} \mu_k^0(\cdot - 2l n_0) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\bar{a}_0(k) \|\mu_k^0\|^2}{\|w_k^1\|} \xi_0(k) \omega_{m_1}^{kl}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}\beta_1(l) &= \frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_{k=0}^{m_0-1} \frac{\bar{a}_0(k) \|\mu_k^0\|^2}{\|w_k^1\|} \xi_0(k) \omega_{m_1}^{kl} = \\ &= \frac{1}{m_1} \sum_{k=0}^{m_1-1} \sqrt{m_1} \left[\frac{\bar{a}_0(k) \|\mu_k^0\|^2}{\|w_k^1\|} \xi_0(k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{a}_0(m_1+k) \|\mu_{m_1+k}^0\|^2}{\|w_{m_1+k}^1\|} \xi_0(m_1+k) \right] \omega_{m_1}^{kl}.\end{aligned}$$

Обозначим $B_0(k) = \sqrt{m_1} \bar{a}_0(k) \|\mu_k^0\|^2 \|w_k^1\|^{-1}$ и $\eta_1 = \mathcal{F}_{m_1}(\beta_1)$.

Тогда

$$\eta_1(k) = B_0(k) \xi_0(k) + B_0(m_1+k) \xi_0(m_1+k), \quad (11.7)$$

$$k \in 0 : m_1 - 1.$$

Вычислив η_1 , найдем β_1 по формуле обращения для ДПФ: $\beta_1 = \mathcal{F}_{m_1}^{-1}(\eta_1)$.

Вернемся к равенству (11.5). Вторая сумма из правой части войдет в представление (11.2) при $\nu = 1$, в то время как первая сумма

$$S_1(j) = \sum_{k=0}^{m_1-1} \xi_1(k) \mu_k^1(j)$$

подвергнется дальнейшему преобразованию на основе формулы (10.10) при $\nu = 1$.

Общий шаг сводится к тому, что для сплайна

$$S_\nu(j) = \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \xi_\nu(k) \mu_k^\nu(j)$$

записывается разложение

$$S_\nu(j) = \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \xi_{\nu+1}(k) \mu_k^{\nu+1}(j) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{m_{\nu+1}-1} \beta_{\nu+1}(l) \theta_r^{\nu+1}(j - l n_{\nu+1}). \quad (11.8)$$

Его коэффициенты вычисляются по формулам, аналогичным (11.6) и (11.7):

$$\xi_{\nu+1}(k) = A_{\nu}(k) \xi_{\nu}(k) + A_{\nu}(m_{\nu+1} + k) \xi_{\nu}(m_{\nu+1} + k),$$

$$\eta_{\nu+1}(k) = B_{\nu}(k) \xi_{\nu}(k) + B_{\nu}(m_{\nu+1} + k) \xi_{\nu}(m_{\nu+1} + k),$$

$$k \in 0 : m_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 0, 1, \dots, t-1.$$

Здесь

$$A_{\nu}(k) = c_{\nu}(k) \|\mu_k^{\nu}\|^2 \|\mu_k^{\nu+1}\|^{-2},$$

$$B_{\nu}(k) = \sqrt{m_{\nu+1}} \bar{a}_{\nu}(k) \|\mu_k^{\nu}\|^2 \|w_k^{\nu+1}\|^{-1}.$$

При этом $\beta_{\nu+1} = \mathcal{F}_{m_{\nu+1}}^{-1}(\eta_{\nu+1})$. Вторая сумма из правой части (11.8) войдет в представление (11.2), а первая сумма подвергнется дальнейшему преобразованию. В результате придем к вейвлетному разложению (11.2) сплайна S .

При $\nu = t-1$ формула (11.8) примет вид

$$S_{t-1}(j) = \xi_t(0) \mu_0^t(j) + \beta_t(0) \theta_r^t(j).$$

Ортогональный сплайн $\mu_0^t(j)$ соответствует параметру $m = 1$, поэтому $\mu_0^t(j) = Q_r(j) = N^{2r-1}$ (см. п. 2.2). Это значит, что константа α в (11.2) равна $\xi_t(0) N^{2r-1}$. Отметим также, что $\beta_t(0) = \eta_t(0)$.

11.4. Рассмотрим обратную задачу перехода от представления (11.2) сплайна S с константой $\alpha = \xi_t(0) N^{2r-1}$ к представлению (11.4). Воспользуемся формулой (11.8). Коэффициенты $\xi_{\nu+1}(k)$ и $\beta_{\nu+1}(k)$ будем считать $m_{\nu+1}$ -периодическими. Согласно (10.1) и (11.3) имеем

$$\sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \xi_{\nu+1}(k) \mu_k^{\nu+1}(j) = \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \xi_{\nu+1}(k) c_{\nu}(k) \mu_k^{\nu}(j),$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{m_{\nu+1}-1} \beta_{\nu+1}(l) \theta_r^{\nu+1}(j - l n_{\nu+1}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}} \sum_{l=0}^{m_{\nu+1}-1} \beta_{\nu+1}(l) \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \frac{a_{\nu}(k)}{\|w_k^{\nu+1}\|} \omega_{m_{\nu+1}}^{-kl} \mu_k^{\nu}(j) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m_{\nu+1}}} \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \frac{a_{\nu}(k)}{\|w_k^{\nu+1}\|} \mu_k^{\nu}(j) \sum_{l=0}^{m_{\nu+1}-1} \beta_{\nu+1}(l) \omega_{m_{\nu+1}}^{-kl}.
\end{aligned}$$

Обозначив $\eta_{\nu+1} = \mathcal{F}_{m_{\nu+1}}(\beta_{\nu+1})$, получим

$$S_{\nu}(j) = \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \left[c_{\nu}(k) \xi_{\nu+1}(k) + \frac{a_{\nu}(k)}{\sqrt{m_{\nu+1}} \|w_k^{\nu+1}\|} \eta_{\nu+1}(k) \right] \mu_k^{\nu}(j).$$

Отсюда следует, что

$$\xi_{\nu}(k) = c_{\nu}(k) \xi_{\nu+1}(k) + \frac{a_{\nu}(k)}{\sqrt{m_{\nu+1}} \|w_k^{\nu+1}\|} \eta_{\nu+1}(k), \quad (11.9)$$

$$k \in 0 : m_{\nu} - 1, \quad \nu = t - 1, t - 2, \dots, 0.$$

Вычисления по формуле (11.9) позволяют найти коэффициенты $\xi_0(k)$ разложения (11.4) сплайна S по ортогональному базису $\{\mu_k\}_{k=0}^{m-1}$.

Задачи

3.1. Докажите, что дискретные функции Бернулли вещественны.

3.2. Докажите, что дискретная функция Бернулли первого порядка $b_1(j)$ допускает представление

$$b_1(j) = \frac{1}{N} \left(\frac{N+1}{2} - j \right) \quad \text{при } j \in 1 : N.$$

3.3. Докажите, что дискретная функция Бернулли второго порядка $b_2(j)$ допускает представление

$$b_2(j) = -\frac{N^2 - 1}{12N} + \frac{(j-1)(N-j+1)}{2N}$$

при $j \in 1 : N$.

3.4. Докажите, что В-сплайн $Q_r(j)$ — это четный сигнал.

3.5. Докажите, что сигнал $T_r(l)$, введенный в п. 2.3, является четным.

3.6. Докажите, что при $n = 2$

$$T_r(l) = 2^{2r-1} \left[\left(\cos \frac{\pi l}{N} \right)^{2r} + \left(\sin \frac{\pi l}{N} \right)^{2r} \right], \quad l \in 0 : m-1.$$

3.7. Докажите, что при $p, p' \in 0 : m-1$ справедливо равенство

$$\langle Q_r(\cdot - pn), Q_r(\cdot - p'n) \rangle = Q_{2r}((p - p')n).$$

3.8. Докажите, что

$$\Delta^{2r} Q_r(j) = \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \delta_N(j + r - ln).$$

- 3.9. Докажите, что при $2r(n-1) \leq N-2$ В-сплайн $Q_r(j)$ обладает следующими свойствами:

$$Q_r(j) > 0 \text{ при } j \in 0:r(n-1) \text{ и } j \in N-r(n-1):N-1,$$

$$Q_r(j) = 0 \text{ при } j \in r(n-1)+1:N-r(n-1)-1,$$

$$Q_r(r(n-1)) = 1.$$

(Условие задачи гарантирует непустоту множества, на котором $Q_r(j) = 0$.)

- 3.10. При $N = mn$, $m \geq 2$, положим

$$Q_{1/2}(j) = \frac{1}{N} \left[n + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} \omega_N^{kj} \right].$$

Докажите, что при нечетном n

$$Q_{1/2}(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in 0:(n-1)/2 \\ & \text{или } j \in N-(n-1)/2:N-1, \\ 0 & \text{при остальных } j \in 0:N-1. \end{cases}$$

- 3.11. Докажите, что сигнал $\tilde{Q}_{1/2}(j) = Q_{1/2}(j) - 1/m$ при четном n является чисто мнимым.

- 3.12. Пусть коэффициенты $c(p)$ сплайна $S(j)$ вида (3.1) после m -периодического продолжения образуют четный сигнал. Докажите, что тогда сплайн $S(j)$ также является четным.

- 3.13. Возьмем сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\Delta^r(x - S)\|^2 \rightarrow \min,$$

где минимум берется по всем $S \in \mathcal{S}_r^m$. Докажите, что единственным с точностью до аддитивной постоянной решением этой задачи является интерполяционный

сплайн S_* , удовлетворяющий условиям $S_*(ln) = x(ln)$,
 $l \in 0 : m - 1$.

- 3.14. Докажите, что сглаживающий сплайн S_α из п. 5.3 принимает вещественные значения, если исходные данные $z(l)$, $l \in 0 : m - 1$, вещественны.
- 3.15. Докажите, что ортогональный сплайн $\mu_k(j)$ является четным по j .
- 3.16. Формула (8.3) определяет $\mu_k(j)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что при фиксированном j m -периодическая по k последовательность $\{\mu_k(j)\}$ является четной.
- 3.17. Постройте ортогональный базис в S_r^m при $m = n = 2$ и $r = 1$.
- 3.18. Пусть в разложении (8.4) сплайна S по ортогональному базису m -периодически продолженные коэффициенты $\xi(k)$ образуют четный сигнал. Докажите, что в этом случае $S(j)$ принимает только вещественные значения.
- 3.19. Пусть в условиях предыдущей задачи сигнал ξ , составленный из коэффициентов разложения (8.4), вещественный и четный. Докажите, что это гарантирует вещественность и четность сплайна $S(j)$.
- 3.20. Докажите, что самодвойственный сплайн $\varphi_r(j)$, определенный формулой (9.7), является вещественным и четным.
- 3.21. Докажите, что двойственный к В-сплайну $Q_r(j)$ сплайн $R_r(j)$ является вещественным и четным.
- 3.22. Докажите, что

$$\sum_{q=0}^{m-1} R_r(j - qn) \equiv n^{-2r}.$$

3.23. Докажите, что для чисел

$$T_r^\nu(k) = \frac{1}{n_\nu} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + k)$$

(см. п. 10.1) справедливо рекуррентное соотношение

$$T_r^{\nu+1}(k) = \frac{1}{2} [c_\nu(k) T_r^\nu(k) + c_\nu(m_{\nu+1} + k) T_r^\nu(m_{\nu+1} + k)].$$

3.24. Докажите, что

$$c_\nu(l) = \sum_{p=-r}^r C_{2r}^{r-p} \omega_{m_\nu}^{-lp}.$$

3.25. Докажите, что для В-сплайнов

$$Q_r^\nu(j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_\nu(l) \omega_N^{lj}$$

справедливо рекуррентное соотношение

$$Q_r^{\nu+1}(j) = \sum_{p=-r}^r C_{2r}^{r-p} Q_r^\nu(j - pn_\nu).$$

3.26. Докажите, что m_ν -периодическая по k последовательность $\{a_\nu(k)\}$, определенная формулой (10.7), является четной.

3.27. Докажите, что $m_{\nu+1}$ -периодическая по k последовательность $\{w_k^{\nu+1}(j)\}$ вида (10.3) с коэффициентами (10.7) четна.

3.28. Докажите, что для сплайнов $w_k^{\nu+1}$, введенных в п. 10.2, при $k \in 1 : m_{\nu+1} - 1$, $k \neq m_{\nu+1}/2$, выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} [w_k^{\nu+1}(j)]^2 = 0.$$

- 3.29. Докажите, что сплайн $w_{m_\nu+2}^{\nu+1}(j)$ принимает только вещественные значения.
- 3.30. Пусть сплайн φ принадлежит вейвлетному подпространству $\mathcal{W}_r^{m_\nu}$. Докажите, что система $\{\varphi(\cdot - ln_\nu)\}_{l=0}^{m_\nu-1}$ образует базис в $\mathcal{W}_r^{m_\nu}$ тогда и только тогда, когда в разложении φ по базису $\{w_k^\nu\}_{k=0}^{m_\nu-1}$ все коэффициенты отличны от нуля.
- 3.31. Сплайн-вейвлеты $\varphi, \psi \in \mathcal{W}_r^{m_\nu}$ называются двойственными, если их сдвиги $\{\varphi(\cdot - ln_\nu)\}_{l=0}^{m_\nu-1}$ и $\{\psi(\cdot - ln_\nu)\}_{l=0}^{m_\nu-1}$ биортогональны. Докажите, что φ и ψ двойственны тогда и только тогда, когда их коэффициенты $\beta_\nu(k), \gamma_\nu(k)$ в разложении по базису $\{w_k^\nu\}_{k=0}^{m_\nu-1}$ удовлетворяют условию

$$\beta_\nu(k) \overline{\gamma}_\nu(k) = [m_\nu \|w_k^\nu\|^2]^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m_\nu - 1.$$

- 3.32. Докажите, что сплайн $\theta_r^\nu(j)$, введенный в п. 11.1, является вещественным.
- 3.33. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \theta_r^\nu(j) = 0.$$

- 3.34. При $\nu \in 0 : t-1$ по аналогии с (8.11) введем В-вейвлет

$$P_r^{\nu+1}(j) = \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} w_k^{\nu+1}(j).$$

Докажите, что

$$P_r^{\nu+1}(j) = \sum_{p=0}^{m_\nu-1} d_\nu(p) Q_r^\nu(j - pn_\nu),$$

где $d_\nu = \mathcal{F}_{m_\nu}^{-1}(a_\nu)$, а последовательность $\{a_\nu(k)\}$ определена формулой (10.7).

3.35. Докажите, что коэффициенты $d_\nu(p)$ из предыдущей задачи допускают представление

$$d_\nu(p) = (-1)^{p+1} \sum_{l=-r}^r C_{2r}^{r-l} Q_{2r}^\nu((p+l+1)n_\nu).$$

3.36. Найдите $\mathcal{F}_N(P_r^{\nu+1})$.

3.37. Докажите, что

$$\langle P_r^{\nu+1}(\cdot - ln_{\nu+1}), P_r^{\nu+1}(\cdot - l'n_{\nu+1}) \rangle = \zeta_r^{\nu+1}(l - l'),$$

где $\zeta_r^{\nu+1}$ есть ДПФ порядка $m_{\nu+1}$ последовательности $\{\|w_k^{\nu+1}\|^2\}$.

3.38. Докажите, что сплайн $P_r^{\nu+1}(j - n_\nu)$ является четным по j .

Комментарии

Дискретные периодические функции Бернулли введены в работе [4]. Там же доказана теорема о разложении произвольного сигнала по сдвигам функции Бернулли, играющая важную роль в дискретном гармоническом анализе.

Дискретным периодическим сплайнам и их вычислительным применениям посвящена работа [27]. Кусочно-полиномиальная природа В-сплайнов исследуется в [26].

Определение сплайна как линейной комбинации сдвигов В-сплайна является стандартным приемом. Менее стандартно эквивалентное определение через линейную комбинацию сдвигов функции Бернулли (теорема 3.1). Второе определение существенно используется при выводе ключевого соотношения (3.10), на основе которого устанавливается свойство минимальной нормы (теорема 4.2). В непрерывном случае

свойство минимальной нормы характерно для натуральных сплайнов [25].

Решение задачи о дискретной сплайн-интерполяции (вместе со свойством минимальной нормы) получено в [27]. Отметим, что дискретная сплайн-интерполяция используется при построении лифтинговых схем вейвлетных разложений сигналов [8, 10]. Общие подходы к вейвлет-обработке сигналов представлены в монографии [18].

Анализ задачи о сглаживании дискретных периодических данных проводится в рамках общей теории сглаживания [37]. Вместе с тем, для реализации общего подхода привлекается техника дискретного гармонического анализа в полном объеме. Авторы надеются, что при изучении этого вопроса читатель получит эстетическое удовольствие.

С формулы (8.3), определяющей ортогональный базис в пространстве сплайнов, начинается собственно дискретный сплайн-гармонический анализ. В терминах коэффициентов разложения по ортогональному базису решаются многие вопросы. В частности, именно в этих терминах указывается критерий двойственности двух сплайнов (теорема 9.2). В практическом плане сплайн, двойственный к В-сплайну, помогает решить задачу о сплайн-обработке дискретных периодических данных по методу наименьших квадратов.

Ортогональные сплайны используются при получении вейвлетного разложения пространства сплайнов.

Разделы 8–11 написаны на основе статьи [12]. В непрерывном случае вопрос об ортогональных периодических сплайнах и их применении рассматривался в [7, 48, 49].

Некоторые дополнительные задачи представляют самостоятельный интерес. Например, в задаче 3.25 указано так называемое *калибровочное соотношение* для В-сплайнов. Свойство интерполяционного сплайна, отмеченное в зада-

че 3.13, называется свойством наилучшего приближения. В задачах 3.34–3.38 введено понятие В-вейвлета и изучены некоторые его свойства.

В работах [34, 35] исследуются предельные свойства дискретных периодических сплайнов. Применению дискретных периодических сплайнов к задачам геометрического моделирования посвящены работы [36, 42].

Решения задач

К «Предварительным сведениям»

1. При $N = 1$ утверждение очевидно. Пусть $N \geq 2$ и $j \in pN + 1 : (p + 1)N$ при некотором $p \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\left\lfloor \frac{j-1}{N} \right\rfloor = p, \quad \left\lfloor -\frac{j}{N} \right\rfloor = -(p+1),$$

откуда и следует требуемое.

2. По определению вычета

$$\begin{aligned} \langle nj \rangle_{nN} &= nj - \lfloor (nj)/(nN) \rfloor nN = \\ &= n(j - \lfloor j/N \rfloor N) = n\langle j \rangle_N. \end{aligned}$$

3. При $j \in 0 : N - 1$ имеем

$$\begin{aligned} f(f(j)) &= \langle f(j)n \rangle_N = \langle \langle jn \rangle_N n \rangle_N = \langle jn^2 \rangle_N = \\ &= \langle j\langle n^2 \rangle_N \rangle_N = \langle j \rangle_N = j. \end{aligned}$$

4. Поскольку $f(j) \in 0 : N - 1$, то достаточно установить, что $f(j) \neq f(j')$ при $j \neq j'$, $j, j' \in 0 : N - 1$. Допустим противное: $f(j) = f(j')$ при некоторых j, j' с указанными свойствами. Тогда

$$\begin{aligned} \langle (j - j')n \rangle_N &= \langle (jn + l) - (j'n + l) \rangle_N = \\ &= \langle \langle jn + l \rangle_N - \langle j'n + l \rangle_N \rangle_N = \langle f(j) - f(j') \rangle_N = 0. \end{aligned}$$

Учитывая взаимную простоту n и N , заключаем, что $j - j'$ делится на N . Но $|j - j'| \leq N - 1$, так что необходимо $j = j'$. Это противоречит допущению.

5. Имеем $n = pd$, $N = qd$, причем $\text{НОД}(p, q) = 1$. Согласно результату задачи 2

$$f(j) = \langle jpd \rangle_{qd} = d \langle jp \rangle_q = d \langle \langle j \rangle_q p \rangle_q.$$

Отсюда следует, что

$$f(j) \in \{0, d, 2d, \dots, (q-1)d\}.$$

6. Воспользоваться равенством множеств

$$\{aj + bk \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\} = \{p(j - k) + qk \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$$

и теоремой 1.

7. Согласно (6), $a_1 n_2 + a_2 n_1 = 1$ при некоторых целых a_1, a_2 . Положим $j_1 = \langle a_1 j \rangle_{n_1}$, $j_2 = \langle a_2 j \rangle_{n_2}$. Учитывая результат задачи 2, получаем

$$\begin{aligned} \langle j_1 n_2 + j_2 n_1 \rangle_N &= \langle \langle a_1 j \rangle_{n_1} n_2 + \langle a_2 j \rangle_{n_2} n_1 \rangle_N = \\ &= \langle \langle a_1 j n_2 \rangle_{n_1 n_2} + \langle a_2 j n_1 \rangle_{n_1 n_2} \rangle_N = \\ &= \langle j(a_1 n_2 + a_2 n_1) \rangle_N = j. \end{aligned}$$

Проверим, что данное представление числа j единственно. Допустим, что имеется еще одно представление $j = \langle j'_1 n_2 + j'_2 n_1 \rangle_N$ с $j'_1 \in 0 : n_1 - 1$, $j'_2 \in 0 : n_2 - 1$. Тогда $\langle (j_1 - j'_1) n_2 + (j_2 - j'_2) n_1 \rangle_N = 0$. Это означает, что

$$(j_1 - j'_1) n_2 + (j_2 - j'_2) n_1 = pN$$

при некотором целом p . Возьмем вычеты по модулю n_1 . Придем к равенству $\langle (j_1 - j'_1) n_2 \rangle_{n_1} = 0$. В силу взаимной простоты n_1 и n_2 разность $j_1 - j'_1$ делится на n_1 . Поскольку к тому же $|j_1 - j'_1| \leq n_1 - 1$, то необходимо $j'_1 = j_1$. Аналогично показывается, что $j'_2 = j_2$.

8. Согласно (6), $a_\alpha n_\alpha + b_\alpha m = 1$ при некоторых целых $a_\alpha, b_\alpha, \alpha \in 1 : s$. Перемножив эти равенства, получим

$$(a_1 a_2 \cdots a_s)(n_1 n_2 \cdots n_s) + pm = 1.$$

Отсюда следует взаимная простота произведения $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ и m .

9. Рассмотрим вначале случай $s = 2$. Пусть $j = p_1 n_1$, $j = p_2 n_2$. Тогда $0 = \langle j \rangle_{n_2} = \langle p_1 n_1 \rangle_{n_2}$. Так как $\text{НОД}(n_1, n_2) = 1$, то по теореме 2 $\langle p_1 \rangle_{n_2} = 0$. Учитывая результат задачи 2, получаем

$$\langle j \rangle_{n_1 n_2} = \langle p_1 n_1 \rangle_{n_1 n_2} = n_1 \langle p_1 \rangle_{n_2} = 0.$$

Сделаем индукционный переход от s к $s + 1$. По индукционному предположению j делится на произведение $n_1 n_2 \cdots n_s$. Кроме того, j делится на n_{s+1} . Согласно результату предыдущей задачи число $n_1 n_2 \cdots n_s$ взаимно просто с n_{s+1} . Значит, j делится на произведение $N = (n_1 \cdots n_s) n_{s+1}$.

10. При $s = 2$ имеем $N = n_1 n_2$, $\hat{N}_1 = n_2$, $\hat{N}_2 = n_1$. Утверждение задачи соответствует формуле (6). Сделаем индукционный переход от s к $s + 1$.

Пусть $N = n_1 \cdots n_s n_{s+1}$. По индукционному предположению существуют целые числа a_1, a_2, \dots, a_s , такие, что

$$\sum_{\alpha=1}^s a_\alpha \frac{\hat{N}_\alpha}{n_{s+1}} = 1.$$

Кроме того, в силу взаимной простоты \hat{N}_{s+1} и n_{s+1} найдутся целые числа a_{s+1} и b_{s+1} со свойством

$$a_{s+1} \hat{N}_{s+1} + b_{s+1} n_{s+1} = 1.$$

Комбинируя два указанных равенства, получаем

$$b_{s+1} \sum_{\alpha=1}^s a_\alpha \hat{N}_\alpha + b_{s+1} n_{s+1} = 1 - a_{s+1} \hat{N}_{s+1},$$

что равносильно требуемому.

11. Согласно результату предыдущей задачи, существуют целые числа a_1, a_2, \dots, a_s , такие, что

$$\sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} = 1. \quad (\text{P.1})$$

Положим $j_{\alpha} = \langle a_{\alpha} j \rangle_{n_{\alpha}}$. Учитывая результат задачи 2, получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{\alpha=1}^s j_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} \right\rangle_N &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^s \langle a_{\alpha} j \rangle_{n_{\alpha}} \hat{N}_{\alpha} \right\rangle_N = \\ &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^s \langle a_{\alpha} j \hat{N}_{\alpha} \rangle_{n_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}} \right\rangle_N = \left\langle j \sum_{\alpha=1}^s a_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} \right\rangle_N = j. \end{aligned}$$

Единственность данного представления проверяется по той же схеме, что и при решении задачи 7.

Из (P.1) следует, что $\langle \langle a_{\alpha} \rangle_{n_{\alpha}} \hat{N}_{\alpha} \rangle_{n_{\alpha}} = 1$. Это значит, что число $p_{\alpha} = \langle a_{\alpha} \rangle_{n_{\alpha}}$ является единственным на множестве $0 : n_{\alpha} - 1$ решением уравнения $\langle x \hat{N}_{\alpha} \rangle_{n_{\alpha}} = 1$. Принимая во внимание этот факт, приходим к окончательному выражению для коэффициентов j_{α} :

$$j_{\alpha} = \langle \langle a_{\alpha} \rangle_{n_{\alpha}} j \rangle_{n_{\alpha}} = \langle p_{\alpha} j \rangle_{n_{\alpha}}, \quad \alpha \in 1 : s.$$

12. Покажем, что формула

$$k = \left\langle \sum_{\alpha=1}^s k_{\alpha} p_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} \right\rangle_N, \quad (\text{P.2})$$

где $k_{\alpha} \in 0 : n_{\alpha} - 1$, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между наборами коэффициентов (k_1, k_2, \dots, k_s) и числами $k \in 0 : N - 1$. Поскольку два рассматриваемых

множества имеют одинаковое количество элементов, то достаточно проверить, что разным наборам коэффициентов соответствуют разные k . Допустим, что наряду с (Р.2) выполняется равенство

$$k = \left\langle \sum_{\alpha=1}^s k'_\alpha p_\alpha \hat{N}_\alpha \right\rangle_N,$$

где $k'_\alpha \in 0 : n_\alpha - 1$. Тогда

$$\left\langle \sum_{\alpha=1}^s (k_\alpha - k'_\alpha) p_\alpha \hat{N}_\alpha \right\rangle_N = 0,$$

так что

$$\sum_{\nu=1}^s (k_\nu - k'_\nu) p_\nu \hat{N}_\nu = pN$$

при некотором целом p . Взяв вычеты по модулю n_α , получим $\langle (k_\alpha - k'_\alpha) p_\alpha \hat{N}_\alpha \rangle_{n_\alpha} = 0$. В силу взаимной простоты чисел $p_\alpha \hat{N}_\alpha$ и n_α разность $k_\alpha - k'_\alpha$ делится на n_α . Поскольку к тому же $|k_\alpha - k'_\alpha| \leq n_\alpha - 1$, то необходимо $k_\alpha = k'_\alpha$ при всех $\alpha \in 1 : s$.

Установлено, что любое число $k \in 0 : N - 1$ допускает представление (Р.2), в котором $k_\alpha \in 0 : n_\alpha - 1$. Перепишем формулу (Р.2) в виде

$$\sum_{\nu=1}^s k_\nu p_\nu \hat{N}_\nu = qN + k, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Беря вычеты по модулю n_α и учитывая определение p_α , получаем

$$\langle k \rangle_{n_\alpha} = \langle k_\alpha \langle p_\alpha \hat{N}_\alpha \rangle_{n_\alpha} \rangle_{n_\alpha} = k_\alpha,$$

т. е. $k_\alpha = \langle k \rangle_{n_\alpha}$.

13. Покажем, что

$$\text{grey}_\nu \left(j_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \sum_{k=2}^{\nu} j_{\nu-k} 2^{\nu-k} \right) =$$

$$= j_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \text{grey}_{\nu-1} \left(\sum_{k=2}^{\nu} \langle j_{\nu-1} + j_{\nu-k} \rangle_2 2^{\nu-k} \right). \quad (\text{P.3})$$

При $j_{\nu-1} = 0$ это является другой формой записи второй строки соотношений (11). Пусть $j_{\nu-1} = 1$. Согласно (12)

$$\begin{aligned} & \text{grey}_{\nu} \left(2^{\nu-1} + \sum_{k=2}^{\nu} j_{\nu-k} 2^{\nu-k} \right) = \\ & = 2^{\nu-1} + \text{grey}_{\nu-1} \left(\sum_{k=2}^{\nu} (1 - j_{\nu-k}) 2^{\nu-k} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $1 - j_{\nu-k} = \langle 1 + j_{\nu-k} \rangle_2$, то последняя формула соответствует (P.3) при $j_{\nu-1} = 1$.

Далее, по тем же соображениям

$$\begin{aligned} & \text{grey}_{\nu-1} \left(\sum_{k=2}^{\nu} \langle j_{\nu-1} + j_{\nu-k} \rangle_2 2^{\nu-k} \right) = \\ & = \langle j_{\nu-1} + j_{\nu-2} \rangle_2 2^{\nu-2} + \text{grey}_{\nu-2} \left(\sum_{k=3}^{\nu} \langle j_{\nu-2} + j_{\nu-k} \rangle_2 2^{\nu-k} \right). \end{aligned}$$

Мы воспользовались равенством

$$\langle \langle j_{\nu-1} + j_{\nu-2} \rangle_2 + \langle j_{\nu-1} + j_{\nu-k} \rangle_2 \rangle_2 = \langle j_{\nu-2} + j_{\nu-k} \rangle_2.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\begin{aligned} \text{grey}_{\nu}(j) &= j_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \langle j_{\nu-1} + j_{\nu-2} \rangle_2 2^{\nu-2} + \langle j_{\nu-2} + j_{\nu-3} \rangle_2 2^{\nu-3} + \\ &+ \cdots + \langle j_1 + j_0 \rangle_2. \end{aligned}$$

Возможна более компактная запись $\text{grey}_{\nu}(j) = j \oplus \lfloor j/2 \rfloor$.

14. В силу результата предыдущей задачи достаточно решить систему уравнений

$$j_{\nu-1} = p_{\nu-1},$$

$$\langle j_{\nu-k+1} + j_{\nu-k} \rangle_2 = p_{\nu-k}, \quad k = 2, \dots, \nu.$$

Она решается элементарно. Действительно, при $k \in 2 : \nu$

$$\begin{aligned} \langle p_{\nu-1} + p_{\nu-2} + \dots + p_{\nu-k} \rangle_2 &= \langle j_{\nu-1} + (j_{\nu-1} + j_{\nu-2}) + (j_{\nu-2} + j_{\nu-3}) + \\ &+ \dots + (j_{\nu-k+1} + j_{\nu-k}) \rangle_2 = j_{\nu-k}. \end{aligned}$$

15. Имеем

$$\sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] = \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = n^3.$$

Вместе с тем,

$$\sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1).$$

Значит,

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n k^2 &= n^3 + \frac{3}{2} n(n+1) - n = \frac{1}{2} n(2n^2 + 3n + 1) = \\ &= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1), \end{aligned}$$

что равносильно требуемому.

16. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^n k C_n^k.$$

Принимая во внимание формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$, получаем

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n [n - (n-k)] C_n^{n-k} = \sum_{k'=0}^n (n - k') C_n^{k'} = \\ &= n 2^n - S_n. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое.

17. Имеем

$$\varepsilon_n^k = \omega_N^{kn} = \omega_N^{\langle kn \rangle_N}.$$

Остается учесть, что множество степеней $\{\langle kn \rangle_N\}_{k=0}^{N-1}$ в силу взаимной простоты n и N является перестановкой множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

18. Имеем $a_0 m + b_0 n = 1$ при некоторых целых a_0, b_0 . Запишем

$$\omega_m^{b_0} \omega_n^{a_0} = \omega_{mn}^{b_0 n} \omega_{nm}^{a_0 m} = \omega_{mn}^{a_0 m + b_0 n} = \omega_{mn}.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_{mn} = \omega_m^{\langle b_0 \rangle_m} \omega_n^{\langle a_0 \rangle_n}.$$

Положив $p = \langle b_0 \rangle_m$, $q = \langle a_0 \rangle_n$, получим требуемое разложение $\omega_{mn} = \omega_m^p \omega_n^q$. Докажем его единственность. Допустим, что $\omega_{mn} = \omega_m^{p'} \omega_n^{q'}$ при некоторых $p' \in 0 : m-1$, $q' \in 0 : n-1$. Тогда $\omega_m^{p-p'} = \omega_n^{q'-q}$. Возведя в степень n , придем к равенству $\omega_m^{\langle (p-p')n \rangle_m} = 1$. Значит, $\langle (p-p')n \rangle_m = 0$. По условию НОД(m, n) = 1, поэтому разность $p-p'$ делится на m . Поскольку к тому же $|p-p'| \leq m-1$, то $p' = p$. Аналогично показывается, что $q' = q$.

Взаимная простота p и m , q и n следует из соотношений

$$(a_0 + \lfloor b_0/m \rfloor n) m + \langle b_0 \rangle_m n = 1,$$

$$\langle a_0 \rangle_n m + (\lfloor a_0/n \rfloor m + b_0) n = 1.$$

19. Обозначим

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^k.$$

При $z \neq 1$

$$P_{N-1}(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z}.$$

Ясно, что $P_{N-1}(\omega_N^j) = 0$ при $j = 1, 2, \dots, N-1$. Таким образом, у полинома $(N-1)$ -й степени $P_{N-1}(z)$ известны $N-1$ различных корней $\omega_N, \omega_N^2, \dots, \omega_N^{N-1}$. Это позволяет записать разложение

$$P_{N-1}(z) = \prod_{j=1}^{N-1} (z - \omega_N^j).$$

20. Пусть

$$P_r(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k.$$

Тогда

$$\Delta P_r(j) = a_r [(j+1)^r - j^r] + \sum_{k=0}^{r-1} a_k [(j+1)^k - j^k] =: P_{r-1}(j).$$

Значит, конечная разность первого порядка от полинома r -й степени есть полином степени $r-1$. По тем же соображениям, конечная разность второго порядка от полинома r -й степени есть полином степени $r-2$ и т. д. Конечная разность r -го порядка от полинома r -й степени равна тождественно константе, так что конечная разность $(r+1)$ -го порядка от полинома r -й степени равна тождественно нулю.

К главе 1

1.1. Если x — четный сигнал, то $x(0) = \bar{x}(0)$, так что значение $x(0)$ вещественно. В силу N -периодичности $x(N-j) = \bar{x}(j)$ при $j \in 1 : N-1$.

Наоборот, пусть $x(0)$ — вещественное число и $x(N-j) = \bar{x}(j)$ при $j \in 1 : N-1$. Тогда $x(-j) = \bar{x}(j)$ при $j \in 0 : N-1$ и в силу N -периодичности $x(-j) = \bar{x}(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

В этой задаче показано, как определить четный сигнал, используя его значения только на основном периоде.

1.2. Решение аналогично предыдущему.

1.3. Предположим, что существует четный сигнал x_0 и нечетный сигнал x_1 , такие, что $x(j) = x_0(j) + x_1(j)$. Тогда

$$\bar{x}(-j) = \bar{x}_0(-j) + \bar{x}_1(-j) = x_0(j) - x_1(j).$$

Складывая и вычитая указанные равенства, получаем, что необходимо

$$x_0(j) = \frac{1}{2}(x(j) + \bar{x}(-j)), \quad x_1(j) = \frac{1}{2}(x(j) - \bar{x}(-j)). \quad (\text{Р.4})$$

Теперь легко проверяется, что сигналы x_0 , x_1 вида (Р.4) являются соответственно четным и нечетным и что $x = x_0 + x_1$.

1.4. Сигнал $\delta_{mn}(mj)$ является n -периодическим, поэтому равенство $\delta_{mn}(mj) = \delta_n(j)$ достаточно проверить при $j \in 0 : n - 1$. При $j = 0$ оно выполняется. Если $1 \leq j \leq n - 1$, то $m \leq mj \leq mn - m$, так что $\delta_{mn}(mj) = 0$. При указанных j и $\delta_n(j) = 0$.

1.5. Проверим, что сигнал $x(j) = \sum_{l=0}^{m-1} \delta_{mn}(j + ln)$ является n -периодическим. В силу m -периодичности по l сигнала $\delta_{mn}(j + ln)$ и леммы 1.2 имеем

$$x(j + sn) = \sum_{l=0}^{m-1} \delta_{mn}(j + (l + s)n) = \sum_{l=0}^{m-1} \delta_{mn}(j + ln) = x(j),$$

так что действительно $x \in \mathbb{C}_n$.

Равенство $x(j) = \delta_n(j)$ достаточно доказать при $j \in 0 : n - 1$. Отметим, что при указанных j и $l \in 0 : m - 1$ выполняются неравенства $0 \leq j + ln \leq mn - 1$, причем левое неравенство обращается в равенство только при $j = 0$ и $l = 0$.

Отсюда следует, что $x(0) = 1 = \delta_n(0)$ и $x(j) = 0 = \delta_n(j)$ при $j \in 1 : n - 1$.

1.6. Воспользуемся леммой 1.3. Приняв во внимание, что $r \leq N - 1$, получим

$$\begin{aligned} & \|\Delta^r(\delta_N)\|^2 = \\ &= \left\langle \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} C_r^s \delta_N(\cdot + s), \sum_{s'=0}^r (-1)^{r-s'} C_r^{s'} \delta_N(\cdot + s') \right\rangle = \\ &= \sum_{s,s'=0}^r (-1)^{s+s'} C_r^s C_r^{s'} \delta_N(s - s') = \sum_{s=0}^r (C_r^s)^2. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{s=0}^r (C_r^s)^2 = C_{2r}^r.$$

Для этого нужно в тождестве $(1+z)^r(1+z)^r = (1+z)^{2r}$ приравнять коэффициенты при z^r . Придем к более компактной формуле

$$\|\Delta^r(\delta_N)\|^2 = C_{2r}^r.$$

1.7. По лемме 1.1

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m-1} x(s + ln) &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \delta_N(s + ln - j) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \sum_{l=0}^{m-1} \delta_{mn}((s - j) + ln) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \delta_n(s - j). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали результат предыдущей задачи.

1.8. Достаточно проверить, что равенство $\langle j \rangle_{kN} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\langle j \rangle_k = 0$ и $\langle j \rangle_N = 0$.

Пусть $\langle j \rangle_{kN} = 0$. Это значит, что $j = p k N$ при некотором целом p . Отсюда следует, что j делится как на k , так и на N , т. е. что $\langle j \rangle_k = 0$ и $\langle j \rangle_N = 0$.

Обратное утверждение составляет содержание задачи 9 (при $s = 2$).

1.9. При взаимно простых k и N отображение $j \rightarrow \langle kj \rangle_N$ есть перестановка множества $\{0, 1, \dots, N-1\}$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(kj + l) &= \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(\langle kj \rangle_N + l) = \sum_{j'=0}^{N-1} \delta_N(j' + l) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j) = 1. \end{aligned}$$

1.10. Условие нечетности сигнала $x(-j) = -\overline{x}(j)$ по формуле обращения для ДПФ равносильно тождеству

$$\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{-kj} = \sum_{k=0}^{N-1} (-\overline{X}(k)) \omega_N^{-kj}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

которое, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда $X(k) = -\overline{X}(k)$ или $\overline{X}(k) = -X(k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Последнее характеризует спектр X как чисто мнимый.

1.11. В силу линейности ДПФ

$$X(k) = A(k) + iB(k),$$

где спектры A и B — четные (теорема 2.3). Далее

$$\overline{X}(N-k) = \overline{X}(-k) = \overline{A}(-k) - i\overline{B}(-k) = A(k) - iB(k).$$

Остается сложить и вычесть полученные равенства.

Видим, что вычисление спектров двух вещественных сигналов a и b сводится к вычислению спектра одного комплексного сигнала $x = a + ib$.

1.12. По формуле обращения для ДПФ имеем

$$\begin{aligned} x_a(j) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2} X(k) \omega_N^{kj} + \sum_{k=1}^{N/2-1} X(k) \omega_N^{kj} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2} X(k) \omega_N^{kj} + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} X(N-k) \omega_N^{(N-k)j} \right]. \end{aligned}$$

Спектр X вещественного сигнала x является четным, поэтому

$$\sum_{k=N/2+1}^{N-1} X(N-k) \omega_N^{(N-k)j} = \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \overline{X}(k) \omega_N^{-kj}.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x_a(j) &= \frac{1}{N} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N/2} X(k) \omega_N^{kj} + \operatorname{Re} \sum_{k=N/2+1}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} \right] = \\ &= \operatorname{Re} x(j) = x(j). \end{aligned}$$

1.13. Вещественному сигналу x сопоставим комплексный сигнал x_a со спектром

$$X_a(k) = \begin{cases} X(k) & \text{при } k = 0, \\ 2X(k) & \text{при } k \in 1 : (N-1)/2, \\ 0 & \text{при } k \in (N+1)/2 : N-1. \end{cases}$$

Покажем, что $\operatorname{Re} x_a = x$. Имеем

$$x_a(j) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{(N-1)/2} X(k) \omega_N^{kj} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} X(k) \omega_N^{kj} \right].$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{(N-1)/2} X(k) \omega_N^{kj} = \sum_{k=(N+1)/2}^{N-1} X(N-k) \omega_N^{(N-k)j} =$$

$$= \sum_{k=(N+1)/2}^{N-1} \overline{X}(k) \omega_N^{-kj},$$

то

$$\operatorname{Re} x_a(j) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} \right\} = \operatorname{Re} x(j) = x(j).$$

1.14. Проверим, например, второе равенство. Имеем

$$\begin{aligned} X(N/2 + k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-(N/2+k)j} = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j x(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j) \omega_N^{-k(2j)} - \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j+1) \omega_N^{-k(2j+1)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} [x(2j) - \omega_N^{-k} x(2j+1)] \omega_N^{-kj}. \end{aligned}$$

1.15. Проверим, например, второе равенство. Имеем

$$\begin{aligned} X(2k+1) &= \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} x(j) \omega_N^{-(2k+1)j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} x(N/2+j) \omega_N^{-(2k+1)(N/2+j)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} [x(j) - x(N/2+j)] \omega_N^{-j} \omega_N^{-kj}. \end{aligned}$$

1.16. Согласно (2.6) имеем

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \sin \frac{\pi j}{N} \omega_N^{-kj} = \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega_{2N}^{-(2k-1)j} - \omega_{2N}^{-(2k+1)j}) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1 - \omega_{2N}^{-(2k-1)N}}{1 - \omega_{2N}^{-(2k-1)}} - \frac{1 - \omega_{2N}^{-(2k+1)N}}{1 - \omega_{2N}^{-(2k+1)}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{i} \left(\frac{1}{1 - \omega_{2N}^{-(2k-1)}} - \frac{1}{1 - \omega_{2N}^{-(2k+1)}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{2N} - \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{2N} \right) = \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{\cos \frac{2k\pi}{N} - \cos \frac{\pi}{N}}.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{2 \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}.$$

1.17. Поскольку $(-1)^j = \omega_2^j = \omega_{2n}^{nj}$, то при $N = 2n$ по лемме 2.1 имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \omega_N^{-kj} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(n-k)j} = N \delta_N(k - n).$$

Пусть $N = 2n + 1$. Покажем, что $X(k) = 1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi k}{N}$ при $k \in 0 : N - 1$.

По определению ДПФ

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{j=0}^n (-1)^{2j} \omega_N^{-2kj} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{2j+1} \omega_N^{-k(2j+1)} = \\
&= \omega_N^{-2kn} + (1 - \omega_N^{-k}) \sum_{j=0}^{n-1} \omega_N^{-2kj}.
\end{aligned}$$

В частности $X(0) = 1$. При $k \in 1 : N - 1$ аналогично (2.6) получим

$$\begin{aligned}
X(k) &= \omega_N^{-2kn} + (1 - \omega_N^{-k}) \frac{1 - \omega_N^{-2kn}}{1 - \omega_N^{-2k}} = \omega_N^{-2kn} + \frac{1 - \omega_N^{-2kn}}{1 + \omega_N^{-k}} = \\
&= \frac{2}{1 + \omega_N^{-k}} = 1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi k}{N}.
\end{aligned}$$

1.18. Запишем

$$X(k) = \sum_{j=0}^n j \omega_N^{-kj} + \sum_{j=n+1}^{2n} (j - N) \omega_N^{-k(j-N)} = \sum_{j=-n}^n j \omega_N^{-kj}.$$

Очевидно, что $X(0) = 0$. Пусть $k \in 1 : N - 1$. Обозначим $z = \omega_N^{-k}$. Учитывая, что $z^{-n} = z^{n+1}$, получаем

$$\begin{aligned}(1 - z)X(k) &= \sum_{j=-n}^n jz^j - \sum_{j=-n+1}^{n+1} (j-1)z^j = \\ &= -nz^{-n} - nz^{n+1} + \sum_{j=-n+1}^n z^j = \\ &= -2nz^{-n} + \frac{z^{-n+1} - z^{n+1}}{1 - z} = -2nz^{-n} + \frac{z^{-n}(z-1)}{1 - z} = -Nz^{-n}.\end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}z^{-n} &= \omega_N^{kn} = \cos \frac{2\pi kn}{N} + i \sin \frac{2\pi kn}{N} = \\ &= \cos \frac{(N-1)\pi k}{N} + i \sin \frac{(N-1)\pi k}{N} = \\ &= (-1)^k \left(\cos \frac{\pi k}{N} - i \sin \frac{\pi k}{N} \right), \\ 1 - z &= 2 \sin \frac{\pi k}{N} \left(\sin \frac{\pi k}{N} + i \cos \frac{\pi k}{N} \right) = \\ &= 2i \sin \frac{\pi k}{N} \left(\cos \frac{\pi k}{N} - i \sin \frac{\pi k}{N} \right).\end{aligned}$$

Приходим к окончательной формуле

$$X(k) = \frac{1}{2} N i \frac{(-1)^k}{\sin \frac{\pi k}{N}}, \quad k \in 1 : N - 1.$$

1.19. По определению ДПФ

$$\begin{aligned}X(k) &= \sum_{j=0}^n j \omega_N^{-kj} + \sum_{j=n+1}^{N-1} (N-j) \omega_N^{k(N-j)} = \\ &= n \omega_N^{-kn} + \sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{-kj} + \sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{kj} =\end{aligned}$$

$$= n(-1)^k + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{-kj} \right\}.$$

Ясно, что $X(0) = n^2$. Пусть $k \in 1 : N - 1$. Воспользуемся формулой

$$\sum_{j=1}^{n-1} j z^j = \frac{z}{(1-z)^2} [1 - n z^{n-1} + (n-1) z^n], \quad z \neq 1 \quad (\text{P.5})$$

(см. «Предварительные сведения», п.6). Поскольку число $z = \omega_N^{-k}$ отлично от единицы и $z^n = (-1)^k$, то согласно (P.5)

$$\sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{-kj} = \frac{\omega_N^{-k}}{(1 - \omega_N^{-k})^2} [1 - n(-1)^k \omega_N^k + (n-1)(-1)^k]. \quad (\text{P.6})$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\omega_N^{-k}}{(1 - \omega_N^{-k})^2} = -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}}, \quad k \in 1 : N - 1. \quad (\text{P.7})$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_N^{-k}}{(1 - \omega_N^{-k})^2} &= \frac{\omega_N^{-k}}{1 - 2\omega_N^{-k} + \omega_N^{-2k}} = \frac{1}{\omega_N^k - 2 + \omega_N^{-k}} = \\ &= -\frac{1}{2\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}\right)} = -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}}. \end{aligned}$$

На основании (P.6), (P.7) получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} j \omega_N^{-kj} \right\} = \\ &= -\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \left[(1 - (-1)^k) + n(-1)^k 2 \sin^2 \frac{\pi k}{N} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} n(-1)^k - \frac{1 - (-1)^k}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}},$$

так что

$$X(k) = -\frac{1 - (-1)^k}{2 \sin^2 \frac{\pi k}{N}}, \quad k \in 1 : N-1.$$

1.20. Согласно леммам 1.2 и 2.1 имеем

$$\begin{aligned} X(k) \overline{X}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j^2 - kj} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{-l^2 + kl} = \sum_{j,l=0}^{N-1} \omega_N^{(j^2 - l^2) - k(j-l)} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(j-l)((j-l)+2l-k)} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j(j+2l-k)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j(j-k)} \sum_{l=0}^{N-1} \omega_N^{2jl} = N \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j(j-k)} \delta_N(2j). \end{aligned}$$

Ясно, что при нечетном N выполняется равенство $|X(k)| = \sqrt{N}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Если же $N = 2n$, то $|X(k)|^2 = N(1 + \omega_N^{n(n-k)}) = N(1 + (-1)^{n-k})$, так что в этом случае $|X(k)| = \sqrt{N(1 + (-1)^{n-k})}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

1.21. По определению ДПФ и лемме 1.2

$$\begin{aligned} X_l(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j+l) \omega_N^{-k(j+l)+kl} = \omega_N^{kl} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \omega_N^{kl} X(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

1.22. Имеем

$$\begin{aligned} X_l(k) &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega_N^{lj} + \omega_N^{-lj}) x(j) \omega_N^{-kj} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-(k-l)j} + \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-(k+l)j} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(X(k-l) + X(k+l)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.23. Поскольку $\text{НОД}(p, N) = 1$, то существуют целые числа r и q , такие, что $rp + qN = 1$, причем можно считать, что $r \in 1 : N - 1$ и $\text{НОД}(r, N) = 1$. Учитывая еще, что отображение $j \rightarrow \langle pj \rangle_N$ есть перестановка множества $\{0, 1, \dots, N - 1\}$, запишем

$$\begin{aligned} Y_p(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(\langle pj \rangle_N) \omega_N^{-kj(rp+qN)} = \sum_{j=0}^{N-1} x(\langle pj \rangle_N) \omega_N^{-rk\langle pj \rangle_N} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-\langle rk \rangle_N j} = X(\langle rk \rangle_N), \quad k \in 0 : N - 1. \end{aligned}$$

Видим, что эйлерова перестановка $j \rightarrow \langle pj \rangle_N$ отсчетов сигнала приводит к эйлеровой перестановке $k \rightarrow \langle rk \rangle_N$ компонент его спектра. Здесь $\langle rp \rangle_N = 1$.

1.24. На основании определения ДПФ и формулы обращения получаем

$$\begin{aligned} X_n(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_{nN}^{-kj} = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \omega_N^{lj} \right\} \omega_{nN}^{-kj} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{nN}^{-j(k-ln)} \right\} = \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \bar{h}(k - ln), \end{aligned}$$

$$\text{где } h(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{nN}^{kj}.$$

1.25. В силу N -периодичности имеем $x(j) = x(\langle j \rangle_N)$, поэтому

$$X_n(k) = \sum_{j=0}^{nN-1} x(j) \omega_{nN}^{-kj} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{N-1} x(lN + p) \omega_{nN}^{-k(lN+p)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} x(p) \omega_{nN}^{-kp} \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{-kl} = \left(\sum_{p=0}^{N-1} x(p) \omega_{nN}^{-kp} \right) n \delta_n(k).$$

Приходим к следующей формуле

$$X_n(k) = \begin{cases} nX(k/n), & \text{если } \langle k \rangle_n = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

1.26. По определению ДПФ

$$X_n(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_{nN}^{-kln} = X(\langle k \rangle_N), \quad k \in 0 : nN - 1.$$

1.27. Число $j \in 0 : nN - 1$ представим в виде $j = ln + p$, где $p \in 0 : n - 1$, $l \in 0 : N - 1$. Поскольку $\lfloor j/n \rfloor = l$, то

$$X_n(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{n-1} x(l) \omega_{nN}^{-k(ln+p)} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_N^{-kl} \sum_{p=0}^{n-1} \omega_{nN}^{-kp}.$$

Обозначим $h(k) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \omega_{nN}^{kp}$. Тогда

$$X_n(k) = nX(\langle k \rangle_N) \bar{h}(k), \quad k \in 0 : nN - 1.$$

1.28. Согласно (2.1)

$$\begin{aligned} Y_n(k) &= \sum_{j=0}^{n-1} x(jm) \omega_{nm}^{-kjm} = \sum_{j'=0}^{N-1} x(j') \omega_N^{-kj'} \delta_m(j') = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_{mn}^{-pjn} \right\} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-j(k+pn)} = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} X(k+pn). \end{aligned}$$

1.29. То, что $y_n \in \mathbb{C}_n$, проверяется так же, как при решении задачи 1.5. Вычислим спектр сигнала y_n . Имеем

$$\begin{aligned} Y_n(k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{m-1} x(j+pn) \omega_n^{-k(j+pn)} = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \omega_N^{-kml} = X(km). \end{aligned}$$

Формула обращения

$$\sum_{p=0}^{m-1} x(j+pn) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(km) \omega_n^{kj}, \quad j \in 0 : n-1,$$

называется формулой суммирования Пуассона. Здесь $x \in \mathbb{C}_N$ и $N = mn$.

1.30. По формуле обращения для ДПФ

$$\begin{aligned} y_n(j) &= \sum_{p=0}^{m-1} x(p+jm) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \omega_N^{l(p+jm)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} X(qn+k) \omega_N^{(qn+k)(p+jm)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{q=0}^{m-1} X(qn+k) \left[\frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_N^{(qn+k)p} \right] \right\} \omega_n^{kj}. \end{aligned}$$

В силу единственности разложения по экспоненциальному базису получаем

$$Y_n(k) = \sum_{q=0}^{m-1} X(k+qn) h(k+qn),$$

где $h(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_N^{pj}$.

1.31. Введем сигнал $y_n(j) = \sum_{p=0}^{m-1} x(p+jm)$, $y_n \in \mathbb{C}_n$. Тогда $y(j) = y_n(\lfloor j/m \rfloor)$. Обозначим $X = \mathcal{F}_N(x)$, $Y = \mathcal{F}_N(y)$, $Y_n = \mathcal{F}_n(y_n)$. Принимая во внимание решение задач 1.27 (с заменой n на m и N на n) и 1.30, запишем

$$Y(k) = m Y_n(\langle k \rangle_n) \bar{h}(k), \quad k \in 0 : N-1,$$

$$Y_n(k) = \sum_{q=0}^{m-1} X(k+qn) h(k+qn), \quad k \in 0 : n-1,$$

где $h(j) = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} \omega_N^{pj}$. Отсюда следует, что

$$Y(k) = m \bar{h}(k) \sum_{q=0}^{m-1} X(\langle k \rangle_n + qn) h(\langle k \rangle_n + qn), \quad k \in 0 : N-1.$$

1.32. Имеем

$$\begin{aligned} X_1(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_{j+1} \omega_N^{-k(j+1)+k} = \omega_N^k \sum_{j=1}^N c_j \omega_N^{-kj} = \\ &= \omega_N^k \left(\sum_{j=0}^{N-1} c_j \omega_N^{-kj} + c_N - c_0 \right) = \omega_N^k (X_0(k) + (c_N - c_0)). \end{aligned}$$

1.33. По условию задачи $y(k) = X(N-k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Согласно (1.4)

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_N(y)](j) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(N-k) \omega_N^{(N-k)j} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{kj} = Nx(j). \end{aligned}$$

Тем самым установлено, что вычисление обратного ДПФ спектра X сводится к вычислению прямого ДПФ сигнала y .

1.34. Пусть $X = \mathcal{F}_N(x)$. Тогда по формуле обращения для ДПФ

$$[\mathcal{F}_N^2(x)](j) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \omega_N^{k(N-j)} = N x(N-j).$$

Применив последнюю формулу к сигналу $\mathcal{F}_N^2(x)$, получим

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_N^4(x)](j) &= N[\mathcal{F}_N^2(x)](N-j) = \\ &= N^2 x(N - (N-j)) = N^2 x(j). \end{aligned}$$

Данный результат можно переформулировать так: отображение $N^{-2} \mathcal{F}_N^4: \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_N$ является тождественным.

1.35. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} [\mathcal{F}_N^{-1}(X * Y)](j) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) Y(k-l) \omega_N^{(k-l)j+l j} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \omega_N^{l j} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k-l) \omega_N^{(k-l)j} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) \omega_N^{l j} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \omega_N^{k j} = x(j) y(j), \end{aligned}$$

что равносильно требуемому.

1.36. Согласно результату задачи 1.35

$$X * Y = N \mathcal{F}_N(xy) = N \mathcal{F}_N(\mathbb{1}) = N^2 \delta_N.$$

1.37. Четным сигналам x, y соответствуют вещественные спектры X, Y (теорема 2.3). Спектр свертки $x*y$, равный XY , также вещественный, а значит, сама свертка $x * y$ — четна.

1.38. Автокорреляционная функция четна, поскольку ее преобразование Фурье вещественно. Можно дать и непосредственное доказательство:

$$\overline{R_{xx}}(-j) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x(k)} x(k+j) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x(k-j)} x(k) = R_{xx}(j).$$

1.39. По теореме о корреляции

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j) = [\mathcal{F}_N(R_{xx})](0) = |X(0)|^2.$$

1.40. По теоремам о корреляции и о свертке

$$\mathcal{F}_N(R_{uu}) = |\mathcal{F}_N(u)|^2 = |\mathcal{F}_N(x * y)|^2 = |X|^2 |Y|^2,$$

$$\mathcal{F}_N(R_{xx} * R_{yy}) = \mathcal{F}_N(R_{xx}) \mathcal{F}_N(R_{yy}) = |X|^2 |Y|^2.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F}_N(R_{uu}) = \mathcal{F}_N(R_{xx} * R_{yy})$. По формуле обращения $R_{uu} = R_{xx} * R_{yy}$.

Полученный результат можно сформулировать так: автокорреляционная функция свертки равна свертке автокорреляционных функций.

1.41. В силу дельта-коррелированности $|X(k)| \equiv \sqrt{R_{xx}(0)}$, $|Y(k)| \equiv \sqrt{R_{yy}(0)}$. На основании равенства Парсеваля и теоремы о свертке получаем

$$\begin{aligned} E(u) &= N^{-1} E(U) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k) Y(k)|^2 = \\ &= R_{xx}(0) R_{yy}(0) = E(x) E(y). \end{aligned}$$

1.42. Пусть $u = x * y$ и $R_{xx} = E(x) \delta_N$, $R_{yy} = E(y) \delta_N$. Согласно результатам задач 1.40 и 1.41 имеем

$$R_{uu} = R_{xx} * R_{yy} = E(x) E(y) \delta_N * \delta_N = E(u) \delta_N,$$

что и требовалось установить.

1.43. Очевидно, что $E(v) = N^2$, поэтому достаточно доказать, что $|V(k)| \equiv N$. По определению ДПФ

$$\begin{aligned} V(k) &= \sum_{j=0}^{N^2-1} v(j) \omega_{N^2}^{-kj} = \sum_{j_1, j_0=0}^{N-1} \omega_N^{j_1 j_0} \omega_{N^2}^{-k(j_1 N + j_0)} = \\ &= \sum_{j_0=0}^{N-1} \omega_{N^2}^{-k j_0} \sum_{j_1=0}^{N-1} \omega_N^{j_1(j_0 - k)} = N \sum_{j_0=0}^{N-1} \omega_{N^2}^{-k j_0} \delta_N(j_0 - \langle k \rangle_N) = \\ &= N \omega_{N^2}^{-k \langle k \rangle_N}. \end{aligned}$$

Как следствие получаем требуемое тождество.

1.44. Исследуем, например, случай нечетного N . Поскольку $s(sN + 1)$ чётно при любом $s \in \mathbb{Z}$, то

$$a(j + sN) = \omega_{2N}^{(j+sN)(j+sN+1)+2q(j+sN)} = a(j) \omega_{2N}^{sN(sN+1)} = a(j).$$

Это значит, что $a \in \mathbb{C}_N$. Далее

$$\begin{aligned} R_{aa}(j) &= \sum_{k=0}^{N-1} a(k) \bar{a}(k-j) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k+j) \bar{a}(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{2N}^{(k+j)(k+j+1)+2q(k+j)-k(k+1)-2qk} = \\ &= \omega_{2N}^{j(j+1)+2qj} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{2N}^{2kj} = N a(j) \delta_N(j) = N \delta_N(j). \end{aligned}$$

Дельта-коррелированность сигнала a установлена.

1.45. Если бинарный сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ дельта-коррелирован, то, в частности, $R_{xx}(1) = 0$. Это означает, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) x(k-1) = 0.$$

Все произведения $x(k)x(k-1)$ равны $+1$ или -1 . Их сумма может равняться нулю только при четном N , т. е. когда $N = 2n$.

Далее, для бинарного дельта-коррелированного сигнала выполняется соотношение $|X(0)| = \sqrt{R_{xx}(0)} = \sqrt{N}$ или, подробнее,

$$|x(0) + x(1) + \dots + x(N-1)| = \sqrt{2n}.$$

В левой части последнего равенства стоит целое число, так что целым должен быть и корень квадратный из $2n$. Это возможно только при $n = 2p^2$. Таким образом, бинарный дельта-коррелированный сигнал может существовать только при $N = 4p^2$.

При $p = 1$ бинарный дельта-коррелированный сигнал существует. Это, например, $x = (1, 1, 1, -1)$. Недоказанная до сих пор в полном объеме гипотеза заключается в том, что при $p > 1$ бинарных дельта-коррелированных сигналов не существует.

1.46. Покажем, что

$$R_{x_n x_n}(j) = \begin{cases} R_{xx}(j/n), & \text{если } \langle j \rangle_n = 0, \\ 0 & \text{при остальных } j \in 0 : nN - 1. \end{cases} \quad (\text{P.8})$$

При решении задачи 1.26 было установлено, что $X_n(k) = X(\langle k \rangle_N)$, поэтому

$$[\mathcal{F}_{nN}(R_{x_n x_n})](k) = |X_n(k)|^2 = |X(\langle k \rangle_N)|^2, \quad k \in 0 : nN - 1.$$

Согласно той же задаче 1.26 дискретное преобразование Фурье сигнала из правой части формулы (P.8) имеет вид $[\mathcal{F}_N(R_{xx})](\langle k \rangle_N) = |X(\langle k \rangle_N)|^2$. Получили, что ДПФ сигналов из левой и правой частей формулы (P.8) равны. Значит, равны и сами сигналы.

1.47. По теореме о корреляции

$$R_{u_1 v_1} = U_1 \bar{V}_1 = (X \bar{Y})(\bar{W} Z),$$

$$R_{u_2 v_2} = U_2 \bar{V}_2 = (X \bar{W})(\bar{Y} Z).$$

Правые части в этих соотношениях равны. Значит, равны и левые.

1.48. По условию $R_{xy} = \mathbb{O}$. В обозначениях предыдущей задачи последовательно получаем $u_1 = R_{xy} = \mathbb{O}$, $U_1 = \mathbb{O}$, $R_{u_1 v_1} = \mathbb{O}$, $R_{u_2 v_2} = R_{u_1 v_1} = \mathbb{O}$. Остается вспомнить, что $u_2 = R_{xw}$, $v_2 = R_{yz}$.

1.49. Пусть $k, k' \in 0 : N - 1$, $k \neq k'$, и $x = \delta_N(\cdot - k)$, $y = \delta_N(\cdot - k')$. Согласно лемме 1.3 имеем

$$\begin{aligned} R_{xy}(j) &= \langle \delta_N(\cdot - k), \delta_N(\cdot - k' - j) \rangle = \delta_N(k - k' - j) = \\ &= \delta_N(j - \langle k - k' \rangle_N). \end{aligned}$$

При $j' = \langle k - k' \rangle_N$ получим $R_{xy}(j') = 1$. Это характеризует сигналы как коррелированные.

1.50. Приравняем нулю линейную комбинацию сдвигов сигнала x :

$$\sum_{k=0}^{N-1} c(k) x(j - k) = 0 \text{ при всех } j \in \mathbb{Z}.$$

Это условие можно переписать в виде $c * x = \mathbb{O}$, что по теореме о свертке равносильно соотношению $CX = \mathbb{O}$. Теперь ясно, что $C = \mathbb{O}$ (а значит, и $c = \mathbb{O}$) тогда и только тогда, когда все компоненты спектра X отличны от нуля.

1.51. Аналогично доказательству леммы 6.1.

1.52. В силу результата предыдущей задачи нужно построить сигнал y , такой, что $R_{xy} = \delta_N$. Пользуясь теоремой

о корреляции, запишем равносильное условие $X\bar{Y} = \Pi$. Здесь все компоненты спектра X отличны от нуля (см. задачу 1.50), поэтому $Y = (\bar{X})^{-1}$. Искомый сигнал получим по формуле обращения для ДПФ.

1.53. Справедливы неравенства

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2 \leq \max_{j \in 0:N-1} |x(j)|^2,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2 \geq \max_{j \in 0:N-1} |x(j)|^2.$$

Отсюда следует, что $1 \leq p(x) \leq N$. Левое неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $|x(j)| \equiv \text{const}$, а правое — только тогда, когда у сигнала x на основном периоде лишь один отсчет отличен от нуля.

1.54. Рассмотрим эквивалентное уравнение в спектральной области

$$-\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^2 x(j-1) \omega_N^{-kj} + c \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} = \sum_{j=0}^{N-1} g(j) \omega_N^{-kj}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^2 x(j-1) \omega_N^{-kj} &= \sum_{j=0}^{N-1} [x(j+1) - 2x(j) + x(j-1)] \omega_N^{-kj} = \\ &= (\omega_N^k - 2 + \omega_N^{-k}) \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega_N^{-kj} = -4 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) X(k), \end{aligned}$$

то уравнение для спектров можно переписать в виде

$$(4 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) + c) X(k) = G(k).$$

Отсюда следует, что

$$X(k) = G(k) / (4 \sin^2(\pi k/N) + c), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Искомый сигнал $x(j)$ найдем по формуле обращения для ДПФ.

К главе 2

2.1. Пусть $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$. Условие $j \neq pN_\nu$ означает, что не все компоненты $j_{s-\nu-1}, \dots, j_0$ равны нулю. Но тогда

$$\text{rev}_s(j) \geq j_0 2^{s-1} + \dots + j_{s-\nu-1} 2^\nu \geq 2^\nu = \Delta_{\nu+1}.$$

Отсюда следует, что $y(j) := x(\text{rev}_s(j)) = 0$.

2.2. Следует воспользоваться решением предыдущей задачи. Учесть, что при $p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ выполняется равенство $\text{rev}_s(pN_\nu) = \text{rev}_\nu(p)$.

2.3. Имеем

$$\varphi_\nu(j) = \varphi_\nu(N_\nu; j) = f_\nu(\Delta_\nu; j),$$

$$\psi_\nu(j) = g_\nu(N_\nu; j) = f_\nu(\text{rev}_s(N_\nu); \text{rev}_s(j)).$$

Остается принять во внимание, что $\text{rev}_s(N_\nu) = \Delta_\nu$.

2.4. Первое равенство следует из формулы (8.1). Для доказательства второго равенства воспользуемся результатом задачи 1.4. Получим

$$\begin{aligned} \psi_{\nu-1}(2j) &= \delta_{N_{\nu-2}}(2j) - \delta_{N_{\nu-2}}(2j - N_{\nu-1}) = \\ &= \delta_{2N_{\nu-1}}(2j) - \delta_{2N_{\nu-1}}(2(j - N_\nu)) = \\ &= \delta_{N_{\nu-1}}(j) - \delta_{N_{\nu-1}}(j - N_\nu) = \psi_\nu(j). \end{aligned}$$

2.5. Искомое разложение имеет вид

$$\delta_N(j) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \varphi_\nu(j).$$

Его можно получить так же, как в примере из п. 5.2, но можно вывести и аналитически. Действительно, согласно (5.3)

$$2\varphi_{\nu-1}(0; j) = \varphi_{\nu}(0; j) + \varphi_{\nu}(N_{\nu}; j).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(j) &= 2 \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \varphi_{\nu-1}(0; j) - \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(0; j) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(0; j) - \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(0; j) = \\ &= \varphi_0(0; j) - 2^{-s} \varphi_s(0; j). \end{aligned}$$

Остается учесть, что $\varphi_0(0; j) = \delta_N(j)$ и $\varphi_s(0; j) \equiv 1$.

2.6. Искомое разложение имеет вид

$$\delta_N(j) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \psi_{\nu}(j).$$

Его можно получить так же, как в примере из п. 6.5, но можно вывести и аналитически. Действительно, согласно (6.10)

$$2g_{\nu-1}(0; j) = g_{\nu}(0; j) + g_{\nu}(N_{\nu}; j).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \psi_{\nu}(j) &= 2 \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} g_{\nu-1}(0; j) - \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} g_{\nu}(0; j) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{-\nu} g_{\nu}(0; j) - \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} g_{\nu}(0; j) = \\ &= g_0(0; j) - 2^{-s} g_s(0; j). \end{aligned}$$

Остается учесть, что $g_0(0; j) = \delta_N(j)$ и $g_s(0; j) \equiv 1$.

2.7. Согласно (8.12)

$$\delta_N(j-q) = 2^{-s}\alpha + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \widehat{\xi}_\nu(p) \varphi_\nu(j-p\Delta_{\nu+1}).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle \delta_N(\cdot - q), \varphi_s(0) \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j-q) = 1, \\ \widehat{\xi}_\nu(p) &= \langle \delta_N(\cdot - q), \varphi_\nu(p + N_\nu) \rangle = \\ &= \langle \delta_N(\cdot - q), f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) \rangle = \\ &= f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}; q) = f_\nu(\Delta_\nu; q - p\Delta_{\nu+1}). \end{aligned}$$

Поскольку $-N + \Delta_{\nu+1} \leq q - p\Delta_{\nu+1} \leq N-1$ при $p \in 0 : N_\nu - 1$, то в силу (4.6) коэффициент $\widehat{\xi}_\nu(p)$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда

$$q - p\Delta_{\nu+1} \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1. \quad (\text{P.1})$$

Отметим, что

$$q - p\Delta_{\nu+1} = (\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor - p)\Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_\nu + \cdots + q_0,$$

поэтому условие (P.1) выполняется только при $p = \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor$. Еще раз ссылаясь на формулу (4.6) и учитывая, что $q_{\nu-1} \in 0 : 1$, получаем

$$\widehat{\xi}_\nu(\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor) = f_\nu(\Delta_\nu; q_{\nu-1}\Delta_\nu + \cdots + q_0) = (-1)^{q_{\nu-1}}.$$

Таким образом,

$$\delta_N(j-q) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} (-1)^{q_{\nu-1}} \varphi_\nu(j - \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \Delta_{\nu+1}).$$

2.8. Согласно (8.2)

$$\delta_N(j-q) = 2^{-s}\beta + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \widehat{y}_\nu(p) \psi_\nu(j-p).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\beta &= \langle \delta_N(\cdot - q), g_s(0) \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j - q) = 1, \\ \widehat{y}_\nu(p) &= \langle \delta_N(\cdot - q), g_\nu(p + N_\nu) \rangle = \\ &= g_\nu(p + N_\nu; q) = g_\nu(N_\nu; q - p) = \psi_\nu(q - p) = \\ &= \delta_{N_{\nu-1}}(q - p) - \delta_{N_{\nu-1}}(q - p - N_\nu).\end{aligned}$$

Поскольку $q = lN_{\nu-1} + q_{s-\nu}N_\nu + \langle q \rangle_{N_\nu}$, то

$$\begin{aligned}\widehat{y}_\nu(p) &= \delta_{N_{\nu-1}}(q_{s-\nu}N_\nu + \langle q \rangle_{N_\nu} - p) - \\ &- \delta_{N_{\nu-1}}((q_{s-\nu} - 1)N_\nu + \langle q \rangle_{N_\nu} - p).\end{aligned}$$

Если $q_{s-\nu} = 0$, то

$$\widehat{y}_\nu(p) = \delta_{N_{\nu-1}}(\langle q \rangle_{N_\nu} - p) - \delta_{N_{\nu-1}}(\langle q \rangle_{N_\nu} - p - N_\nu).$$

Учитывая неравенства $|\langle q \rangle_{N_\nu} - p| \leq N_\nu - 1$ и

$$-N_{\nu-1} + 1 \leq \langle q \rangle_{N_\nu} - p - N_\nu \leq -1,$$

закключаем, что

$$\widehat{y}_\nu(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p = \langle q \rangle_{N_\nu}, \\ 0 & \text{при } p \neq \langle q \rangle_{N_\nu}. \end{cases}$$

Если $q_{s-\nu} = 1$, то

$$\widehat{y}_\nu(p) = \delta_{N_{\nu-1}}(\langle q \rangle_{N_\nu} - p + N_\nu) - \delta_{N_{\nu-1}}(\langle q \rangle_{N_\nu} - p).$$

Учитывая, что $1 \leq \langle q \rangle_{N_\nu} - p + N_\nu \leq N_{\nu-1} - 1$, получаем

$$\widehat{y}_\nu(p) = \begin{cases} -1 & \text{при } p = \langle q \rangle_{N_\nu}, \\ 0 & \text{при } p \neq \langle q \rangle_{N_\nu}. \end{cases}$$

При этом в обоих случаях $\widehat{y}_\nu(\langle q \rangle_{N_\nu}) = (-1)^{q_{s-\nu}}$.

Приходим к формуле

$$\delta_N(j - q) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} (-1)^{q_{s-\nu}} \psi_\nu(j - \langle q \rangle_{N_\nu}).$$

2.9. Согласно (6.10)

$$2g_{\nu-1}(p; j) = g_\nu(p; j) + \psi_\nu(j - p), \quad p \in 0 : N_\nu - 1.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} \psi_\nu(j - p) &= \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} [2g_{\nu-1}(p; j) - g_\nu(p; j)] = \\ &= \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu+1}-1} g_\nu(p; j) - \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_\nu-1} g_\nu(p; j) - \\ &\quad - 2^{-s} g_s(0; j) + \sum_{p=0}^{N-1} g_0(0; j) = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \delta_N(j - p) - 2^{-s} - \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{-\nu} \sum_{p=N_{\nu+1}}^{N_\nu-1} \delta_{N_\nu}(j - p). \quad (\text{P.2}) \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались формулой (7.9).

Пусть $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$. Покажем, что

$$\sum_{p=N_{\nu+1}}^{N_\nu-1} \delta_{N_\nu}(j - p) = j_{s-\nu-1}. \quad (\text{P.3})$$

Поскольку $j = lN_\nu + j_{s-\nu-1}2^{s-\nu-1} + \dots + j_0$, то

$$\begin{aligned} \sum_{p=N_{\nu+1}}^{N_\nu-1} \delta_{N_\nu}(j - p) &= \\ &= \sum_{p=N_{\nu+1}}^{N_\nu-1} \delta_{N_\nu}((j_{s-\nu-1}2^{s-\nu-1} + \dots + j_0) - p). \quad (\text{P.4}) \end{aligned}$$

Если $j_{s-\nu-1} = 0$, то правая часть (Р.4) равна нулю. В этом случае (Р.4) соответствует (Р.3). Пусть $j_{s-\nu-1} = 1$. Тогда правая часть (Р.4) равна единице. И в этом случае (Р.4) соответствует (Р.3).

Подставляя (Р.3) в (Р.2) и учитывая, что

$$\sum_{p=0}^{N-1} \delta_N(j-p) \equiv 1,$$

получаем

$$x(j) = 1 - \sum_{\nu=0}^{s-1} 2^{-\nu} j_{s-\nu-1} = 1 - 2j/N, \quad j \in 0 : N-1.$$

2.10. По определению

$$\varphi_{\nu}(j - p\Delta_{\nu+1}) = \varphi_{\nu}(N_{\nu}; j - p\Delta_{\nu+1}) = f_{\nu}(\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Имеем

$$\begin{aligned} y(\text{rev}_s(j)) &= 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} f_{\nu}(\Delta_{\nu} + p\Delta_{\nu+1}; \text{rev}_s(j)) = \\ &= 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} f_{\nu}(\Delta_{\nu} + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p); \text{rev}_s(j)). \end{aligned}$$

Согласно (6.3), $\Delta_{\nu} + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p) = \text{rev}_s(N_{\nu} + p)$, поэтому

$$\begin{aligned} f_{\nu}(\Delta_{\nu} + \Delta_{\nu+1} \text{rev}_{s-\nu}(p); \text{rev}_s(j)) &= \\ &= f_{\nu}(\text{rev}_s(p + N_{\nu}); \text{rev}_s(j)) = g_{\nu}(p + N_{\nu}; j) = \psi_{\nu}(j - p). \end{aligned}$$

Принимая во внимание результат предыдущей задачи, получаем

$$y(\text{rev}_s(j)) = 2^{-s} + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} \psi_{\nu}(j - p) = 1 - 2j/N.$$

Отсюда следует, что

$$y(j) = 1 - 2 \operatorname{rev}_s(j)/N, \quad j \in 0 : N - 1.$$

2.11. Так же, как при решении задачи 2.5, запишем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=k+1}^s 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(j) &= \sum_{\nu=k}^{s-1} 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(0; j) - \sum_{\nu=k+1}^s 2^{-\nu} \varphi_{\nu}(0; j) = \\ &= 2^{-k} \varphi_k(0; j) - 2^{-s} \varphi_s(0; j). \end{aligned} \quad (\text{P.5})$$

В п. 7.1 отмечалось, что

$$\varphi_k(0; j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_N(j - q) =: h_k(j).$$

Теперь требуемое разложение следует из (P.5).

2.12. Отметим, что при $\nu \in 1 : s - k$ выполняется неравенство

$$N_{\nu} \geq 2^k = \Delta_{k+1}.$$

Согласно (6.10),

$$2 g_{\nu-1}(p; j) = g_{\nu}(p; j) + \psi_{\nu}(j - p) \quad \text{при} \quad p \in 0 : \Delta_{k+1} - 1.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{s-k} 2^{-\nu} \psi_{\nu}(j - p) &= \sum_{\nu=0}^{s-k-1} 2^{-\nu} g_{\nu}(p; j) - \sum_{\nu=1}^{s-k} 2^{-\nu} g_{\nu}(p; j) = \\ &= g_0(p; j) - 2^{-s+k} g_{s-k}(p; j). \end{aligned}$$

Просуммировав последние равенства по p от 0 до $\Delta_{k+1} - 1$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{s-k} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{\Delta_{k+1}-1} \psi_{\nu}(j - p) = h_k(j) - 2^{-s+k} \sum_{p=0}^{\Delta_{k+1}-1} g_{s-k}(p; j). \quad (\text{P.6})$$

В силу (7.9), $g_{s-k}(p; j) = \delta_{\Delta_{k+1}}(j - p)$, так что

$$\sum_{p=0}^{\Delta_{k+1}-1} g_{s-k}(p; j) = \sum_{p=0}^{\Delta_{k+1}-1} \delta_{\Delta_{k+1}}(j - p) \equiv 1.$$

Теперь требуемое разложение следует из (Р.6).

2.13. На основании (8.12) и (8.19) имеем

$$x(j \oplus q) = 2^{-s}\alpha + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} \widehat{\xi}_{\nu}(p) \varphi_{\nu}((j \oplus q) \oplus p\Delta_{\nu+1}).$$

Так как

$$\begin{aligned} (j \oplus q) \oplus p\Delta_{\nu+1} &= j \oplus (q \oplus p\Delta_{\nu+1}) = \\ &= j \oplus ((\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p)\Delta_{\nu+1} + q_{\nu-1}\Delta_{\nu} + \langle q \rangle_{\Delta_{\nu}}), \end{aligned}$$

то в силу (8.16)

$$\begin{aligned} x(j \oplus q) &= 2^{-s}\alpha + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s (-1)^{q_{\nu-1}} 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} \widehat{\xi}_{\nu}(p) \varphi_{\nu}(j - (\lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p)\Delta_{\nu+1}). \end{aligned}$$

Произведя замену $p' = \lfloor q/\Delta_{\nu+1} \rfloor \oplus p$, получим требуемое.

2.14. На основании (8.2) и (8.6) имеем

$$\begin{aligned} y(j - q) &= 2^{-s}\beta + \\ &+ \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p=0}^{N_{\nu}-1} \widehat{y}_{\nu}(p) (-1)^{\lfloor (q+p)/N_{\nu} \rfloor} \psi_{\nu}(j - \langle q + p \rangle_{N_{\nu}}). \end{aligned}$$

Произведем замену $p' = \langle q + p \rangle_{N_{\nu}}$. В этом случае $p = \langle p' - q \rangle_{N_{\nu}}$ и

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{q + p}{N_{\nu}} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{q + \langle p' - q \rangle_{N_{\nu}}}{N_{\nu}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p' - ((p' - q) - \langle p' - q \rangle_{N_{\nu}})}{N_{\nu}} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{p' - \lfloor (p' - q)/N_{\nu} \rfloor N_{\nu}}{N_{\nu}} \right\rfloor = - \left\lfloor \frac{p' - q}{N_{\nu}} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$y(j-q) = 2^{-s}\beta + \\ + \sum_{\nu=1}^s 2^{-\nu} \sum_{p'=0}^{N_\nu-1} (-1)^{\lfloor (p'-q)/N_\nu \rfloor} \widehat{y}_\nu(\langle p'-q \rangle_{N_\nu}) \psi_\nu(j-p').$$

2.15. Согласно (7.9), при $k \in 0 : N_\nu - 1$ справедливо тождество

$$g_\nu(k; j) = \delta_{N_\nu}(j - k).$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое.

2.16. Обозначим

$$G_\nu = \{w \in \mathbb{C}_{N_\nu-1} \mid w(j - N_\nu) = -w(j), \ j \in \mathbb{Z}\}.$$

Нужно проверить, что $W_\nu = G_\nu$.

Возьмем $w \in W_\nu$. Тогда

$$w(j) = \sum_{k=0}^{N_\nu-1} a(k) \psi_\nu(j - k).$$

Согласно (8.1) $\psi_\nu(\cdot - k) \in \mathbb{C}_{N_\nu-1}$, поэтому $w \in \mathbb{C}_{N_\nu-1}$. Далее, в силу той же формулы (8.1) $\psi_\nu(j - N_\nu) = -\psi_\nu(j)$, откуда следует, что $w(j - N_\nu) = -w(j)$. Значит, $w \in G_\nu$. Установлено, что $W_\nu \subset G_\nu$.

Пусть теперь $w \in G_\nu$. Поскольку $w \in \mathbb{C}_{N_\nu-1}$, то

$$w(j) = \sum_{k=0}^{2N_\nu-1} w(k) \delta_{N_\nu-1}(j - k). \quad (\text{P.7})$$

Равенство $w(j - N_\nu) = -w(j)$ запишем в виде

$$w(j) = - \sum_{k=0}^{2N_\nu-1} w(k) \delta_{N_\nu-1}(j - k - N_\nu). \quad (\text{P.8})$$

Складывая (Р.7) и (Р.8) и учитывая (8.1), получаем

$$\begin{aligned} 2w(j) &= \sum_{k=0}^{2N_\nu-1} w(k) \psi_\nu(j-k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N_\nu-1} w(k) \psi_\nu(j-k) + \sum_{k=0}^{N_\nu-1} w(k+N_\nu) \psi_\nu(j-k-N_\nu) = \\ &= \sum_{k=0}^{N_\nu-1} [w(k) - w(k+N_\nu)] \psi_\nu(j-k). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $w \in W_\nu$. Включение $G_\nu \subset W_\nu$, а с ним и равенство $G_\nu = W_\nu$, установлены.

2.17. Поскольку дискретные функции Уолша $v_k(j)$ принимают только два значения $+1$ и -1 , то $[v_k(j)] \equiv 1$. В равносильной записи $1/v_k(j) = v_k(j)$.

Далее,

$$v_k(j) v_{k'}(j) = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (-1)^{\langle k_\alpha + k'_\alpha \rangle_2 j_\alpha} = v_m(j),$$

где $m = k \oplus k'$.

2.18. Учтеть, что $2k+1 = 2k \oplus 1$, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

2.19. Напомним, что числа $v_k(0), v_k(1), \dots, v_k(N-1)$ образуют строку матрица Адамара A_s с индексом k . Требуемые формулы следуют из рекуррентного соотношения

$$A_s = \begin{bmatrix} A_{s-1} & A_{s-1} \\ A_{s-1} & -A_{s-1} \end{bmatrix}.$$

2.20. Числа $N-1-j$ и j при $j \in 0 : N-1$ принадлежат множеству $0 : N-1$ и их сумма равна $N-1 = (1, 1, \dots, 1)_2$.

Это возможно лишь тогда, когда в каждом разряде двоичного кода у одного из этих чисел стоит ноль, а у другого — единица.

2.21. Условие задачи можно записать в виде

$$\prod_{\alpha=0}^{N-1} (-1)^{k_{\alpha}} = 1. \quad (\text{P.9})$$

Зафиксируем $j \in 0 : N-1$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$, и введем обозначения

$$U_1 = \{\alpha \in 0 : s-1 \mid j_{\alpha} = 1\}, \quad U_0 = \{\alpha \in 0 : s-1 \mid j_{\alpha} = 0\}.$$

Поскольку $U_1 \cup U_0 = 0 : s-1$, то в силу (P.9)

$$\prod_{\alpha \in U_1} (-1)^{k_{\alpha}} = \prod_{\alpha \in U_0} (-1)^{k_{\alpha}}. \quad (\text{P.10})$$

Как отмечалось при решении предыдущей задачи,

$$\{\alpha \in 0 : s-1 \mid (N-j-1)_{\alpha} = 0\} = U_1,$$

$$\{\alpha \in 0 : s-1 \mid (N-j-1)_{\alpha} = 1\} = U_0.$$

По определению функций Уолша

$$v_k(j) = \prod_{\alpha \in U_1} (-1)^{k_{\alpha}}, \quad v_k(N-1-j) = \prod_{\alpha \in U_0} (-1)^{k_{\alpha}}.$$

Теперь равенство $v_k(j) = v_k(N-1-j)$ следует из (P.10).

У функции Уолша \tilde{v}_{2k} количество перемен знака на основном периоде чётно, поэтому $\tilde{v}_{2k}(N-1) = \tilde{v}_{2k}(0) = 1$. По доказанному $\tilde{v}_{2k}(N-j-1) = \tilde{v}_{2k}(j)$, $j \in 0 : N-1$.

2.22. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

У функции Уолша \tilde{v}_{2k+1} количество перемен знака на основном периоде нечётно, поэтому $\tilde{v}_{2k+1}(N-1) = -\tilde{v}_{2k+1}(0) =$

$= -1$. Как следствие, получаем $\tilde{v}_{2k+1}(N - j - 1) = -\tilde{v}_{2k+1}(j)$ при $j \in 0 : N - 1$.

2.23. Зафиксируем $p = (p_{s-3}, \dots, p_0)_2$ и запишем

$$3N_2 + p = N_1 + N_2 + p = (1, 1, p_{s-3}, \dots, p_0)_2,$$

$$N_1 + p = (1, 0, p_{s-3}, \dots, p_0)_2.$$

Возьмем $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$. Если $j_{s-2} = 0$, т.е. $j = (j_{s-1}, 0, j_{s-3}, \dots, j_0)_2$, то $\langle j + N_2 \rangle_N = (j_{s-1}, 1, j_{s-3}, \dots, j_0)_2$. Получаем

$$\{3N_2 + p, j\}_s = \{N_1 + p, \langle j + N_2 \rangle_N\}_s = j_{s-1} + \sum_{\alpha=0}^{s-3} p_\alpha j_\alpha.$$

Это гарантирует справедливость равенства

$$v_{3N_2+p}(j) = v_{N_1+p}(\langle j + N_2 \rangle_N). \quad (\text{P.11})$$

Пусть $j_{s-2} = 1$, т.е. $j = (j_{s-1}, 1, j_{s-3}, \dots, j_0)_2$. Тогда

$$\langle j + N_2 \rangle_N = (\langle j_{s-1} + 1 \rangle_2, 0, j_{s-3}, \dots, j_0)_2.$$

Имеем

$$\{3N_2 + p, j\}_s = j_{s-1} + 1 + \sum_{\alpha=0}^{s-3} p_\alpha j_\alpha,$$

$$\{N_1 + p, \langle j + N_2 \rangle_N\}_s = \langle j_{s-1} + 1 \rangle_2 + \sum_{\alpha=0}^{s-3} p_\alpha j_\alpha.$$

Поскольку

$$(-1)^{\langle j_{s-1}+1 \rangle_2} = (-1)^{j_{s-1}+1},$$

то и в этом случае выполняется равенство (P.11).

2.24. По определению функций Радемахера

$$r_\nu(j) = v_{N_\nu}(j) = (-1)^{j_{s-\nu}} = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}.$$

При $N = 8$ имеем

$$r_1(j) = (-1)^{\lfloor j/4 \rfloor}, \quad r_2(j) = (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor}, \quad r_3(j) = (-1)^j, \\ j \in 0 : 7.$$

На рис. 13 представлены графики функций r_1, r_2, r_3 .

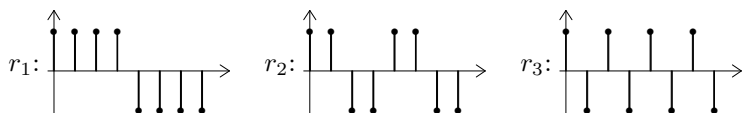


Рис. 13. Графики функций Радемахера при $N = 8$

2.25. Как отмечалось при решении предыдущей задачи, $r_\nu(j) = (-1)^{j_{s-\nu}}$. Учитывая это, получаем

$$v_k(j) = \prod_{\nu=1}^s (-1)^{k_{s-\nu} j_{s-\nu}} = \prod_{\nu=1}^s [r_\nu(j)]^{k_{s-\nu}}, \quad k \in 0 : N-1.$$

2.26. Воспользуемся тождеством $v_0(k) \equiv 1$ и тем, что $v_k(j) = v_j(k)$. Запишем

$$\sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \sum_{k=0}^{N-1} v_0(k) v_j(k).$$

Теперь видно, что требуемое равенство следует из ортогональности функций Уолша и равенства $\langle v_0, v_0 \rangle = N$.

2.27. Обозначим $x_s = \mathcal{W}_N(x)$. В силу (10.2) и (10.1)

$$\begin{aligned} \|x_s\|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) v_k(j) \right) \bar{x}_s(k) = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}_s(k) v_k(j) \right\} = N \|x\|^2, \end{aligned}$$

что равносильно требуемому.

2.28. На основании определения дискретного преобразования Уолша и диадной свертки запишем

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_N(z)](k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) y(j \oplus l) \right) v_k((j \oplus l) \oplus l) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j=0}^{N-1} y(j) v_k(j \oplus l). \end{aligned}$$

Согласно результату задачи 2.17,

$$v_k(j \oplus l) = v_{j \oplus l}(k) = v_j(k) v_l(k) = v_k(j) v_k(l).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_N(z)](k) &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) v_k(l) \sum_{j=0}^{N-1} y(j) v_k(j) = \\ &= [\mathcal{W}_N(x)](k) [\mathcal{W}_N(y)](k), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2.29. Обозначим $V_p = \mathcal{F}_N(v_p)$. Учитывая, что $v_1(j) = (-1)^{j_0} = (-1)^j$ при $j \in 0 : N-1$, получаем

$$\begin{aligned} V_1(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \omega_N^{-kj} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_2^j \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{-j(k-N_1)} = N \delta_N(k - N_1). \end{aligned}$$

Далее, $v_2(j) = (-1)^{j_1} = (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor}$ при $j \in 0 : N-1$. Положим $j = 2l + q$, $q \in 0 : 1$, $l \in 0 : N_1 - 1$. Тогда $\lfloor j/2 \rfloor = l$ и

$$V_2(k) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor} \omega_N^{-kj} = \sum_{q=0}^1 \sum_{l=0}^{N_1-1} (-1)^l \omega_N^{-k(2l+q)} =$$

$$= \sum_{q=0}^1 \omega_N^{-kq} \sum_{l=0}^{N_1-1} \omega_{N_1}^{-l(k-N_2)} = N_1(1 + \omega_N^{-k})\delta_{N_1}(k - N_2).$$

Поскольку $v_3(j) = (-1)^{j_1+j_0} = (-1)^{\lfloor j/2 \rfloor + j} = (-1)^{3l+q}$, то

$$V_3(k) = N_1(1 - \omega_N^{-k})\delta_{N_1}(k - N_2).$$

На основном периоде спектры Фурье $V_2(k)$ и $V_3(k)$ отличаются от нуля только при $k = N_2 = N/4$ и $k = N_2 + N_1 = 3N/4$. При этом

$$V_2(N/4) = N_1(1 + \omega_4^{-1}) = N_1(1 - i),$$

$$V_2(3N/4) = N_1(1 + \omega_4^{-3}) = N_1(1 + i);$$

$$V_3(N/4) = N_1(1 + i), \quad V_3(3N/4) = N_1(1 - i).$$

Дальнейшие результаты о спектре Фурье функций Уолша имеются в [16].

2.30. Воспользуемся тем, что $r_\nu(j) = (-1)^{\lfloor j/N_\nu \rfloor}$ при $j \in 0 : N-1$ (см. решение задачи 2.24). Положим $j = pN_\nu + q$, $q \in 0 : N_\nu - 1$, $p \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$. Тогда $\lfloor j/N_\nu \rfloor = p$ и

$$\begin{aligned} R_\nu(k) &= \sum_{p=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^p \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-k(pN_\nu+q)} = \\ &= \sum_{p=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} (-1)^p \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-kp} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-kq} = \sum_{p=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-p(k-\Delta_\nu)} \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-kq} = \\ &= 2^\nu \delta_{\Delta_{\nu+1}}(k - \Delta_\nu) \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-kq}. \end{aligned}$$

Ясно, что спектр Фурье $R_\nu(k)$ отличен от нуля на основном периоде только при $k = \Delta_\nu + l\Delta_{\nu+1} = (2l+1)\Delta_\nu$, $l \in 0 : N_\nu - 1$. При указанных k согласно (1.2.6) имеем

$$R_\nu(k) = 2^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_N^{-(2l+1)\Delta_\nu q} = 2^\nu \sum_{q=0}^{N_\nu-1} \omega_{N_{\nu-1}}^{-(2l+1)q} =$$

$$= 2^\nu \frac{1 - \omega_{N_{\nu-1}}^{-(2l+1)N_\nu}}{1 - \omega_{N_{\nu-1}}^{-(2l+1)}} = 2^\nu \left(1 - i \operatorname{ctg} \frac{(2l+1)\pi}{N_{\nu-1}} \right).$$

2.31. Как известно (задача 2.18), $v_{2p+1}(j) = v_{2p}(j) v_1(j)$. Воспользуемся результатом задачи 1.35, согласно которому

$$V_{2p+1} = N^{-1}(V_{2p} * V_1).$$

Поскольку $V_1(k) = N\delta_N(k - N_1)$ (задача 2.29), то

$$V_{2p+1}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} V_{2p}(l) \delta_N(k - l - N_1) = V_{2p}(k - N_1).$$

2.32. Согласно результату задачи 2.19 при $p \in 0 : N_1 - 1$ имеем

$$\begin{aligned} V_p(k) &= \sum_{j=0}^{N_1-1} v_p(j) \omega_N^{-kj} + \sum_{j=0}^{N_1-1} v_p(N_1 + j) \omega_N^{-k(N_1+j)} = \\ &= (1 + (-1)^k) \sum_{j=0}^{N_1-1} v_p^{(1)}(j) \omega_N^{-kj}. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$V_p(2k) = 2V_p^{(1)}(k), \quad V_p(2k+1) = 0, \quad k \in 0 : N_1 - 1. \quad (\text{P.12})$$

Теперь отметим, что $N_1 + p = N_1 \oplus p$ при $p \in 0 : N_1 - 1$. Поэтому (задача 2.17)

$$v_{N_1+p}(j) = v_{N_1}(j) v_p(j).$$

Переходя к преобразованиям Фурье, получаем (задача 1.35)

$$V_{N_1+p} = N^{-1}(V_p * V_{N_1}). \quad (\text{P.13})$$

Спектр V_{N_1} вычисляется легко. Действительно,

$$v_{N_1}(j) = (-1)^{j_{s-1}} = (-1)^{\lfloor j/N_1 \rfloor} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \in 0 : N_1 - 1, \\ -1 & \text{при } j \in N_1 : N - 1. \end{cases}$$

Как показано в п. 1.2.5,

$$V_{N_1}(k) = \begin{cases} 0 & \text{при четных } k, \\ 2(1 - i \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N}) & \text{при нечетных } k. \end{cases}$$

Распишем формулу (Р.13) подробнее:

$$\begin{aligned} V_{N_1+p}(2k) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N_1-1} V_p(2l+1) V_{N_1}(2(k-l)-1) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N_1-1} V_p(2l) V_{N_1}(2(k-l)). \end{aligned} \quad (\text{Р.14})$$

Обе суммы в правой части (Р.14) равны нулю. Первая — за счет $V_p(2l+1)$, вторая — за счет $V_{N_1}(2(k-l))$. Таким образом, $V_{N_1+p}(2k) = 0$ при $k \in 0 : N_1 - 1$. Далее, аналогично (Р.14) с использованием (Р.12) получаем

$$V_{N_1+p}(2k+1) = \frac{1}{N_1} \sum_{l=0}^{N_1-1} V_p^{(1)}(l) V_{N_1}(2(k-l)+1),$$

$$k \in 0 : N_1 - 1.$$

Остается учесть, что $V_{N_1}(2j+1) = h(j)$.

2.33. В силу N -периодичности функций Уолша и (Р.11) при $p \in 0 : N_2 - 1$ получим

$$\begin{aligned} V_{3N_2+p}(k) &= \sum_{j=0}^{N-1} v_{N_1+p}(j+N_2) \omega_N^{-kj} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} v_{N_1+p}(j) \omega_N^{-k(j-N_2)} = \omega_4^k V_{N_1+p}(k) = i^k V_{N_1+p}(k), \end{aligned}$$

$$k \in 0 : N - 1.$$

2.34. Достаточно проверить, что

$$\{\text{rev}_s(2k), j\}_s = \{\text{rev}_s(k), 2j\}_s, \quad k, j \in 0 : N_1 - 1.$$

Пусть $k = (0, k_{s-2}, \dots, k_0)_2$, $j = (0, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$. Тогда

$$\text{rev}_s(k) = (k_0, \dots, k_{s-2}, 0)_2, \quad \text{rev}_s(2k) = (0, k_0, \dots, k_{s-2})_2.$$

Получаем

$$\{\text{rev}_s(2k), j\}_s = \{\text{rev}_s(k), 2j\}_s = \sum_{\alpha=0}^{s-2} k_{s-2-\alpha} j_{\alpha}.$$

2.35. Нужно проверить, что $\text{wal}_s^{-1}(N-1) = 1$ или, что равносильно, $\text{wal}_s(1) = N-1$. По определению $\text{wal}_s(1)$ — это количество перемен знака на основном периоде у функции Уолша $v_1(j)$. Поскольку $v_1(j) = (-1)^j$ при $j \in 0 : N-1$, то $\text{wal}_s(1) = N-1$.

2.36. Из доказательства теоремы 12.2 следует, что при $k \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ справедлива формула

$$\xi(k) = N_{\nu} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \hat{v}_k(lN_{\nu}).$$

2.37. С помощью теоремы 11.1 последовательно заполним таблицу значений перестановок $\text{wal}_1(k)$, $\text{wal}_2(k)$, $\text{wal}_3(k)$ (табл. 9).

Таблица 9. Значения $\text{wal}_{\nu}(k)$ при $\nu = 1, 2, 3$

ν	$\text{wal}_{\nu}(k)$ при $k = 0, 1, \dots, 2^{\nu} - 1$							
1	0	1						
2	0	3	1	2				
3	0	7	3	4	1	6	2	5

На основании определения обратного отображения получаем

$$\text{wal}_3^{-1}(k) = \{0, 4, 6, 2, 3, 7, 5, 1\}.$$

2.38. Отметим, что

$$\begin{aligned} v_{k_1 N + k_0}(j_1 N + j_0) &= (-1)^{\{k_1, j_1\}_s + \{k_0, j_0\}_s} = \\ &= v_{k_1}(j_1) v_{k_0}(j_0). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F(k_1 N + k_0) &= \sum_{j_1, j_0=0}^{N-1} f(j_1 N + j_0) v_{k_1 N + k_0}(j_1 N + j_0) = \\ &= \sum_{j_1, j_0=0}^{N-1} v_{j_1}(j_0) v_{k_1}(j_1) v_{k_0}(j_0) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{N-1} v_{k_1}(j_1) \sum_{j_0=0}^{N-1} v_{j_1}(j_0) v_{k_0}(j_0) = \\ &= N \sum_{j_1=0}^{N-1} v_{k_1}(j_1) \delta_N(j_1 - k_0) = N v_{k_1}(k_0). \end{aligned}$$

К главе 3

3.1. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{b}_r(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^{N-k} - 1)^{-r} \omega_N^{(N-k)j} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega_N^k - 1)^{-r} \omega_N^{kj} = b_r(j). \end{aligned}$$

Это гарантирует вещественность $b_r(j)$.

3.2. Согласно (1.4) и (1.3) при $j \in 1 : N - 1$ имеем

$$b_1(j+1) - b_1(1) = \sum_{k=1}^j [b_1(k+1) - b_1(k)] = \sum_{k=1}^j b_0(k) = -j/N.$$

Обозначив $c = b_1(1)$, получим

$$b_1(j) = c - (j-1)/N, \quad j \in 2 : N.$$

Последнее равенство верно и при $j = 1$.

Константу c определим из условия $\sum_{j=1}^N b_1(j) = 0$, равносильного (1.2) при $r = 1$:

$$c = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N (j-1) = \frac{N-1}{2N}.$$

Приходим к формуле

$$b_1(j) = \frac{1}{N} \left(\frac{N+1}{2} - j \right), \quad j \in 1 : N.$$

3.3. Согласно (1.4) и результату предыдущей задачи, при $j \in 1 : N - 1$ имеем

$$\begin{aligned} b_2(j+1) - b_2(1) &= \sum_{k=1}^j [b_2(k+1) - b_2(k)] = \\ &= \sum_{k=1}^j b_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^j \left(\frac{N+1}{2} - k \right) = \\ &= \frac{1}{N} \left[\frac{N+1}{2} j - \frac{(j+1)j}{2} \right] = \frac{j(N-j)}{2N}. \end{aligned}$$

Обозначив $c = b_2(1)$, получим

$$b_2(j) = c + \frac{(j-1)(N-j+1)}{2N}, \quad j \in 1 : N.$$

Константу c определим из условия $\sum_{j=1}^N b_2(j) = 0$, равносильного (1.2) при $r = 2$:

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^N (j-1)(N-j+1) = -\frac{1}{2N^2} \sum_{j=1}^{N-1} j(N-j) = \\ &= -\frac{1}{2N^2} \left[\frac{N^2(N-1)}{2} - \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \right] = -\frac{N^2-1}{12N}. \end{aligned}$$

Приходим к формуле

$$b_2(j) = -\frac{N^2-1}{12N} + \frac{(j-1)(N-j+1)}{2N}, \quad j \in 1:N.$$

3.4. В силу (2.5), $\mathcal{F}_N(Q_r) = X_1^r$. Поскольку X_1^r — вещественный сигнал, то В-сплайн $Q_r(j)$ является четным (теорема 1.2.3). Более того, в силу вещественности Q_r выполняется равенство $Q_r(-j) = Q_r(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

3.5. Четность $T_r(l)$ следует из формулы (2.7) и вещественности $Q_r(pn)$ (теорема 1.2.2). Более того, в силу вещественности T_r выполняется равенство $T_r(-l) = T_r(l)$ при всех $l \in \mathbb{Z}$.

3.6. Согласно (2.6) и (2.2) при $n = 2$ имеем $N = 2m$ и

$$T_r(l) = \frac{1}{2} [X_1^r(l) + X_1^r(m+l)], \quad l \in 0:m-1,$$

где $X_1(k) = \left(2 \cos \frac{\pi k}{2m}\right)^2$ при $k \in 0:N-1$. Учитывая, что $X_1(m+l) = \left(2 \sin \frac{\pi l}{2m}\right)^2$ при $l \in 0:m-1$, приходим к требуемой формуле.

3.7. Отметим, что

$$\begin{aligned} Q_r(j-pn) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^r(k) \omega_N^{k(j-pn)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_1^r(k) \omega_N^{-kpn}] \omega_N^{kj}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся обобщенным равенством Парсеваля (1.2.6). Получим

$$\begin{aligned} & \langle Q_r(\cdot - pn), Q_r(\cdot - p'n) \rangle = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_1^T(k) \omega_N^{-kpn}] [X_1^r(k) \omega_N^{kp'n}] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1^{2r}(k) \omega_N^{k(p'-p)n} = Q_{2r}((p' - p)n). \end{aligned}$$

3.8. В силу (2.9) и (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \Delta^{2r} Q_r(j) &= \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} \Delta^{2r} b_{2r}(j + r - ln) = \\ &= \sum_{l=-r}^r (-1)^{r-l} C_{2r}^{r-l} b_0(j + r - ln). \end{aligned}$$

Остается воспользоваться формулой (1.3).

3.9. При $r = 1$ утверждение следует из определения $Q_1(j)$. Сделаем индукционный переход от $r - 1$ к r , $r \geq 2$. Согласно (2.4) имеем

$$\begin{aligned} Q_r(j) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=N-n+1}^{N-1} \right) Q_1(k) Q_{r-1}(j - k) = \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} Q_1(k) Q_{r-1}(j - k). \end{aligned} \quad (\text{P.1})$$

При $j \in 0 : (r - 1)(n - 1)$ возьмем в правой части (P.1) слагаемое, соответствующее $k = 0$. Это слагаемое равно $Q_1(0) Q_{r-1}(j)$. В силу индукционного предположения оно положительно. Поскольку остальные слагаемые неотрицательны, то $Q_r(j) > 0$.

Если $j \in (r-1)(n-1)+1 : r(n-1)$, то возьмем слагаемое, соответствующее $k = n-1$. Оно равно $Q_1(n-1) Q_{r-1}(j-n+1)$. Так как $j-n+1$ принадлежит множеству $(r-2)(n-1)+1 : (r-1)(n-1)$, то $Q_{r-1}(j-n+1) > 0$. Следовательно, и в этом случае в правой части (Р.1) имеется положительное слагаемое, что гарантирует положительность $Q_r(j)$.

При $j = r(n-1)$ имеем

$$(r-1)(n-1) \leq j-k \leq (r+1)(n-1),$$

так что в правой части (Р.1) только при $k = n-1$ слагаемое отлично от нуля. Получаем

$$Q_r(r(n-1)) = Q_1(n-1) Q_{r-1}((r-1)(n-1)) = 1.$$

Пусть, наконец, $j \in r(n-1)+1 : N-r(n-1)-1$. В этом случае разность $j-k$ при всех $k \in -n+1 : n-1$ принадлежит множеству

$$(r-1)(n-1)+1 : N-(r-1)(n-1)-1,$$

на котором $Q_{r-1}(j-k) = 0$. Получаем, что $Q_r(j) = 0$ при указанных j .

То, что $Q_r(j) > 0$ при $j \in N-r(n-1)+1 : N-1$, следует из четности В-сплайна $Q_r(j)$ (см. задачу 3.4).

3.10. Найдем ДПФ сигнала x , стоящего в правой части доказываемого равенства. Имеем

$$X(k) = \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \omega_N^{-kj} + \sum_{j=N-(n-1)/2}^{N-1} \omega_N^{k(N-j)} = \sum_{j=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \omega_N^{kj}.$$

Очевидно, что $X(0) = n$. Пусть $k \in 1 : N-1$. Воспользуемся формулой (1.4.3) при $\mu = (n+1)/2$. Получим

$$X(k) = \frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)}, \quad k \in 1 : N-1.$$

Видим, что ДПФ сигналов x и $Q_{1/2}$ равны. Значит, равны и сами сигналы.

3.11. Обозначим $G = \mathcal{F}_N(Q_{1/2}^0)$. Имеем

$$G(0) = 0, \quad G(k) = \frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} \quad \text{при} \quad k \in 1 : N-1.$$

Отметим, что при $k \in 1 : N-1$ в силу четности n

$$\begin{aligned} G(N-k) &= \frac{\sin(\pi(N-k)/m)}{\sin(\pi(N-k)/N)} = \frac{\sin(\pi n - \pi k/m)}{\sin(\pi - \pi k/N)} = \\ &= -\frac{\sin(\pi k/m)}{\sin(\pi k/N)} = -G(k). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{Q_{1/2}^0}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} G(k) \omega_N^{-kj} = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} G(N-k) \omega_N^{(N-k)j} = \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} G(k) \omega_N^{kj} = -Q_{1/2}^0(j). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $\operatorname{Re} Q_{1/2}^0 = \mathbb{O}$, означающее по определению, что сигнал $Q_{1/2}^0$ является чисто мнимым.

3.12. Воспользуемся равенством $\bar{c}(p) = c(-p)$, четностью В-сплайна $Q_r(j)$ и формулой (1.1.4). Получим

$$\begin{aligned} \bar{S}(-j) &= \sum_{p=0}^{m-1} c(-p) Q_r(-j + (-p)n) = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn) = S(j), \end{aligned}$$

что равносильно требуемому.

3.13. Имеем

$$\begin{aligned}
\|\Delta^r(x - S)\|^2 &= \|\Delta^r(S_* - S) + \Delta^r(x - S_*)\|^2 = \\
&= \|\Delta^r(S_* - S)\|^2 + \|\Delta^r(x - S_*)\|^2 + \\
&+ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r(S_*(j) - S(j)) \Delta^r(\overline{x}(j) - \overline{S}_*(j)).
\end{aligned}$$

Согласно теореме 3.2

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} \Delta^r(S_*(j) - S(j)) \Delta^r(\overline{x}(j) - \overline{S}_*(j)) = \\
&= (-1)^r \sum_{l=0}^{m-1} d(l) (\overline{x}(ln) - \overline{S}_*(ln)) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $d(l)$ — коэффициенты разложения дискретного периодического сплайна $S_* - S$ по сдвигам функции Бернулли. Объединяя указанные равенства, получаем

$$\|\Delta^r(x - S)\|^2 = \|\Delta^r(S_* - S)\|^2 + \|\Delta^r(x - S_*)\|^2.$$

Отсюда следует оптимальность S_* .

Пусть $S_1 \in \mathcal{S}_r^m$ — другое решение исходной задачи. Тогда

$$\|\Delta^r(S_* - S_1)\|^2 = 0.$$

В силу теоремы 1.2 $S_*(j) - S_1(j) \equiv \text{const}$, т. е. S_1 отличается от S_* на аддитивную постоянную.

3.14. Базисные функции сплайна S_α , представленного в виде (3.4), вещественны. Его коэффициенты определяются из системы линейных уравнений (5.6) с вещественной матрицей. При вещественности правых частей решение этой системы вещественно.

3.15. Утверждение следует из формулы (8.5).

3.16. Заключение о четности $\mu_k(j)$ по k следует из формул (8.7), (8.8) и результата задачи 1.1.

3.17. В данном случае ортогональный базис образуют два сплайна $\mu_0(j)$ и $\mu_1(j)$. Согласно (8.7) и (8.10)

$$\mu_0(j) \equiv 1, \quad \mu_1(j) = \frac{1}{2} [Q_1(j) - Q_1(j-2)].$$

Поскольку $Q_1(j)$ при $j = 0, 1, 2, 3$ принимает значения 2, 1, 0, 1, то $\mu_1(j)$ при тех же j принимает значения 1, 0, -1, 0.

3.18. Положим $c = \mathcal{F}_m^{-1}(\xi)$. Тогда

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn).$$

В этом представлении коэффициенты $c(p)$ вещественны (теорема 1.2.2). Остается учесть, что и значения В-сплайна Q_r вещественны.

3.19. Согласно теоремам 1.2.2 и 1.2.3 сигнал $c = \mathcal{F}_m^{-1}(\xi)$ является вещественным и четным. Представление

$$S(j) = \sum_{p=0}^{m-1} c(p) Q_r(j - pn)$$

позволяет сделать вывод о вещественности S (что очевидно) и четности S (задача 3.12).

3.20. Коэффициенты $\xi(k) = [T_{2r}(k)]^{-1/2}$ в разложении $\varphi_r(j)$ по ортогональному базису вещественны и образуют четную последовательность (задача 3.5). Остается воспользоваться результатом задачи 3.19.

3.21. Решение аналогично предыдущему.

3.22. Согласно (9.7) и (8.9) имеем

$$\sum_{q=0}^{m-1} R_r(j - qn) = \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(j) \omega_m^{-kq}}{T_{2r}(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(j)}{T_{2r}(k)} \sum_{q=0}^{m-1} \omega_m^{-kq} = m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_k(j)}{T_{2r}(k)} \delta_m(k) = m \frac{\mu_0(j)}{T_{2r}(0)}.$$

Остается учесть, что $\mu_0(j) \equiv \frac{1}{N} n^{2r}$ и $T_{2r}(0) = n^{4r-1}$.

3.23. Решение аналогично доказательству теоремы 10.1.

3.24. Поскольку

$$\omega_{m_\nu}^{-l} (\omega_{m_\nu}^l + 1)^2 = \omega_{m_\nu}^l + \omega_{m_\nu}^{-l} + 2 = (2 \cos(\pi l / m_\nu))^2,$$

то

$$c_\nu(l) = \omega_{m_\nu}^{-lr} (\omega_{m_\nu}^l + 1)^{2r} = \sum_{p=0}^{2r} C_{2r}^p \omega_{m_\nu}^{-l(r-p)} = \sum_{p=-r}^r C_{2r}^{r-p} \omega_{m_\nu}^{-lp}.$$

3.25. Учитывая (10.2) и результат предыдущей задачи, получаем

$$\begin{aligned} Q_r^{\nu+1}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_{\nu+1}(l) \omega_N^{lj} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} c_\nu(l) y_\nu(l) \omega_N^{lj} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=-r}^r C_{2r}^{r-p} \sum_{l=0}^{N-1} y_\nu(l) \omega_N^{l(j-pn_\nu)} = \sum_{p=-r}^r C_{2r}^{r-p} Q_r^\nu(j - pn_\nu). \end{aligned}$$

3.26. Имеем

$$a_\nu(-k) = \omega_{m_\nu}^{-k} c_\nu(m_{\nu+1} - k) \|\mu_{m_{\nu+1}-k}^\nu\|^2.$$

Воспользуемся четностью по k последовательностей $\{c_\nu(k)\}$ и $\{\mu_k^\nu\}$. (Первая из них четна в силу определения. По поводу четности второй см. задачу 3.16.) Учитывая, что $m_{\nu+1} - k = m_\nu - (m_{\nu+1} + k)$, получаем

$$a_\nu(-k) = \omega_{m_\nu}^{-k} c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2 = \bar{a}_\nu(k).$$

3.27. Так же, как при решении предыдущей задачи, имеем

$$w_{-k}^{\nu+1}(j) = \bar{a}_\nu(k) \overline{\mu_k^\nu(j)} + \bar{a}_\nu(m_{\nu+1} + k) \overline{\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu(j)} = \overline{w_k^{\nu+1}(j)}.$$

3.28. На основании (10.8) получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{N-1} [w_k^{\nu+1}(j)]^2 &= \sum_{l=0}^{m_{\nu+1}-1} \sum_{p=0}^{n_{\nu+1}-1} [w_k^{\nu+1}(p + ln_{\nu+1})]^2 = \\
 &= \sum_{l=0}^{m_{\nu+1}-1} \omega_{m_{\nu+1}}^{2kl} \sum_{p=0}^{n_{\nu+1}-1} [w_k^{\nu+1}(p)]^2 = \\
 &= m_{\nu+1} \delta_{m_{\nu+1}}(2k) \sum_{p=0}^{n_{\nu+1}-1} [w_k^{\nu+1}(p)]^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое.

3.29. Согласно четности сигнала a_ν (задача 3.26) имеем

$$a_\nu(m_{\nu+1} + m_{\nu+2}) = a_\nu(m_\nu - m_{\nu+2}) = \overline{a_\nu}(m_{\nu+2}).$$

Аналогично, со ссылкой на задачу 3.16, выводится равенство

$$\mu_{m_{\nu+1}+m_{\nu+2}}^\nu(j) = \overline{\mu_{m_{\nu+2}}^\nu}(j).$$

На основании (10.7) получаем

$$w_{m_{\nu+2}}^{\nu+1}(j) = 2 \operatorname{Re} [a_\nu(m_{\nu+2}) \mu_{m_{\nu+2}}^\nu(j)].$$

3.30. Если

$$\varphi(j) = \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \beta_\nu(k) w_k^\nu(j),$$

то согласно (10.8)

$$\varphi(j - ln_\nu) = \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \beta_\nu(k) w_k^\nu(j) \omega_{m_\nu}^{-lk}.$$

По формуле обращения для ДПФ

$$\beta_\nu(k) w_k^\nu(j) = \frac{1}{m_\nu} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \omega_{m_\nu}^{lk} \varphi(j - ln_\nu).$$

Теперь решение заканчивается так же, как доказательство теоремы 9.1.

3.31. Отметим, что

$$\langle \varphi(\cdot - ln_\nu), \psi(\cdot - l'n_\nu) \rangle = \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \beta_\nu(k) \bar{\gamma}_\nu(k) \|w_k^\nu\|^2 \omega_{m_\nu}^{k(l-l')}.$$

Поэтому равенство $\langle \varphi(\cdot - ln_\nu), \psi(\cdot - l'n_\nu) \rangle = \delta_{m_\nu}(l - l')$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$m_\nu \beta_\nu(k) \bar{\gamma}_\nu(k) \|w_k^\nu\|^2 \equiv 1$$

(см. доказательство теоремы 9.2).

3.32. Воспользуемся формулой (11.3). В ней коэффициенты $a_{\nu-1}$ и $\|w_k^\nu\|$ четны по k (задачи 3.26 и 3.27). Результат задачи 3.18 гарантирует, что в этом случае сплайн θ_r^ν является вещественным.

3.33. В представлении (11.3) сплайна $\theta_r^\nu(j)$ коэффициент $a_{\nu-1}(0)$ равен нулю. Остается учесть, что при $k \in 1 : m_{\nu-1} - 1$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mu_k^{\nu-1}(j) = 0$$

(см. п. 8.3).

3.34. Так же, как при переходе от (11.1) к (11.3), получаем

$$P_r^{\nu+1}(j) = \sum_{k=0}^{m_\nu-1} a_\nu(k) \mu_k^\nu(j). \quad (\text{P.2})$$

Поскольку

$$\mu_k^\nu(j) = \frac{1}{m_\nu} \sum_{p=0}^{m_\nu-1} \omega_{m_\nu}^{kp} Q_r^\nu(j - pn_\nu),$$

то

$$P_r^{\nu+1}(j) = \sum_{p=0}^{m_\nu-1} Q_r^\nu(j - pn_\nu) \left\{ \frac{1}{m_\nu} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} a_\nu(k) \omega_{m_\nu}^{kp} \right\}.$$

Остается положить $d_\nu = \mathcal{F}_{m_\nu}^{-1}(a_\nu)$.

3.35. Напомним, что

$$a_\nu(k) = \omega_{m_\nu}^k c_\nu(m_{\nu+1} + k) \|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2.$$

Согласно результату задачи 3.24

$$c_\nu(m_{\nu+1} + k) = \sum_{l=-r}^r (-1)^l C_{2r}^{r-l} \omega_{m_\nu}^{kl}.$$

В силу (8.6)

$$\|\mu_{m_{\nu+1}+k}^\nu\|^2 = \frac{1}{m_\nu} T_{2r}^\nu(m_{\nu+1} + k).$$

Следовательно,

$$a_\nu(k) = \frac{1}{m_\nu} T_{2r}^\nu(m_{\nu+1} + k) \sum_{l=-r}^r (-1)^l C_{2r}^{r-l} \omega_{m_\nu}^{k(l+1)}.$$

Принимая во внимание формулу (2.7), получаем

$$\begin{aligned} d_\nu(p) &= \frac{1}{m_\nu} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} a_\nu(k) \omega_{m_\nu}^{kp} = \\ &= \frac{1}{m_\nu^2} \sum_{l=-r}^r (-1)^l C_{2r}^{r-l} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} T_{2r}^\nu(m_{\nu+1} + k) \omega_{m_\nu}^{k(p+l+1)} = \\ &= \frac{1}{m_\nu} \sum_{l=-r}^r (-1)^l C_{2r}^{r-l} \left\{ \frac{1}{m_\nu} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} T_{2r}^\nu(k) \omega_{m_\nu}^{(k-m_{\nu+1})(p+l+1)} \right\} = \\ &= (-1)^{p+1} \frac{1}{m_\nu} \sum_{l=-r}^r C_{2r}^{r-l} Q_{2r}^\nu((p+l+1)n_\nu). \end{aligned}$$

3.36. Воспользуемся формулой (Р.2) и тем, что

$$\mu_k^\nu(j) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} y_\nu(qm_\nu + k) \omega_N^{(qm_\nu+k)j}$$

(см. п. 10.1). Учитывая m_ν -периодичность последовательности $\{a_\nu(k)\}$, получаем

$$\begin{aligned} P_r^{\nu+1}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{m_\nu-1} \sum_{q=0}^{n_\nu-1} a_\nu(qm_\nu + k) y_\nu(qm_\nu + k) \omega_N^{(qm_\nu+k)j} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} a_\nu(l) y_\nu(l) \omega_N^{lj}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$[\mathcal{F}_N(P_r^{\nu+1})](l) = a_\nu(l) y_\nu(l), \quad l \in 0 : N-1.$$

3.37. Согласно (10.8) и теореме 10.2 имеем

$$\begin{aligned} &\langle P_r^{\nu+1}(\cdot - ln_{\nu+1}), P_r^{\nu+1}(\cdot - l'n_{\nu+1}) \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \omega_{m_{\nu+1}}^{-kl} w_k^{\nu+1}, \sum_{k'=0}^{m_{\nu+1}-1} \omega_{m_{\nu+1}}^{-k'l'} w_{k'}^{\nu+1} \right\rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{m_{\nu+1}-1} \|w_k^{\nu+1}\|^2 \omega_{m_{\nu+1}}^{-k(l-l')}, \end{aligned}$$

что равносильно требуемому.

3.38. Согласно результатам задач 3.34 и 3.35 имеем

$$\begin{aligned} P_r^{\nu+1}(j - n_\nu) &= \sum_{p=0}^{m_\nu-1} d_\nu(p) Q_r^\nu(j - (p+1)n_\nu) = \\ &= \sum_{p=0}^{m_\nu-1} d_\nu(p-1) Q_r^\nu(j - pn_\nu). \end{aligned}$$

Здесь

$$d_\nu(p-1) = (-1)^p \frac{1}{m_\nu} \sum_{l=-r}^r C_{2r}^{r-l} Q_{2r}^\nu((p+l)n_\nu).$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} P_r^{\nu+1}(-j-n_\nu) &= \sum_{p=0}^{m_\nu-1} d_\nu(p-1) Q_r^\nu(j+pn_\nu) = \\ &= \sum_{p=0}^{m_\nu-1} d_\nu(-p-1) Q_r^\nu(j-pn_\nu). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d_\nu(-p-1) &= (-1)^p \frac{1}{m_\nu} \sum_{l=-r}^r C_{2r}^{r+l} Q_{2r}^\nu((p-l)n_\nu) = \\ &= (-1)^p \frac{1}{m_\nu} \sum_{l=-r}^r C_{2r}^{r-l} Q_{2r}^\nu((p+l)n_\nu) = d_\nu(p-1), \end{aligned}$$

то

$$P_r^{\nu+1}(-j-n_\nu) = P_r^{\nu+1}(j-n_\nu).$$

Это и означает, что вещественный сплайн $P_r^{\nu+1}(j-n_\nu)$ является четным по j .

Список литературы

- [1] Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980. 248 с.
- [2] Бер М. Г., Малоземов В. Н. О восстановлении дискретных периодических данных // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1990. Вып. 3 (№ 15). С. 8–13.
- [3] Бер М. Г., Малоземов В. Н. Об интерполяции дискретных периодических данных // Проблемы передачи инф. 1992. Т. 28. Вып. 4. С. 60–68.
- [4] Бер М. Г., Малоземов В. Н. Наилучшие формулы для приближенного вычисления дискретного преобразования Фурье // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 11. С. 1709–1719.
- [5] Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
- [6] Власенко В. А., Лаппа Ю. М., Ярославский Л. П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990. 180 с.
- [7] Желудев В. А. О вейвлетах на базе периодических сплайнов // Докл. РАН. 1994. Т. 355. № 1. С. 9–13.
- [8] Желудев В. А., Певный А. Б. Биортогональные вейвлетные схемы, основанные на интерполяции дискретными сплайнами // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 4. С. 537–548.
- [9] Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.

- [10] Избранные главы дискретного гармонического анализа и геометрического моделирования. Под ред. проф. В. Н. Малоземова. СПб.: СПбГУ, 2009. 584 с. (книга доступна online).
- [11] Ипатов В. П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992. 152 с.
- [12] Кирушев В. А., Малоземов В. Н., Певный А. Б. Вейвлетное разложение пространства дискретных периодических сплайнов // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 5. С. 712–720.
- [13] Коровкин А. В. Обобщенное дискретное преобразование Ахмеда–Рао // Вестник молодых ученых. 2003. № 2. С. 33–41.
- [14] Коровкин А. В., Малоземов В. Н. Базисы Ахмеда–Рао // Матем. заметки. 2004. Т. 75. Вып. 6. С. 834–840.
- [15] Коровкин А. В., Машарский С. М. О быстром преобразовании Ахмеда–Рао с прореживанием по частоте // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 6. С. 986–996.
- [16] Львович А. А., Кузьмин Б. Д. Аналитическое выражение для спектров функций Уолша // Радиотехника. 1980. Т. 35. № 1. С. 33–39.
- [17] Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 264 с.
- [18] Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

- [19] Малоземов В. Н., Машарский С. М. Основы дискретного гармонического анализа. Части 1–3. Препринт. СПб.: НИИММ СПбГУ, 2003. 288 с.
- [20] Малоземов В. Н., Машарский С. М. Формула Глассмана, быстрое преобразование Фурье и вейвлетные разложения // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 9. 2001. С. 97–119.
- [21] Малоземов В. Н., Машарский С. М. Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.
- [22] Малоземов В. Н., Машарский С. М. Хааровские спектры дискретных сверток // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 954–960.
- [23] Малоземов В. Н., Машарский С. М. Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов // Проблемы передачи инф. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.
- [24] Малоземов В. Н., Машарский С. М., Цветков К. Ю. Сигнал Франка и его обобщения // Проблемы передачи инф. 2001. Т. 37. Вып. 2. С. 18–26.
- [25] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 120 с.
- [26] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Дискретные периодические В-сплайны // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 4 (№ 22). С. 14–19.
- [27] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1235–1246.

- [28] Малоземов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А. Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений // Проблемы передачи инф. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.
- [29] Малоземов В. Н., Просеков О. В. Параметрические варианты быстрого преобразования Фурье // Доклады РАН. 2008. Т. 421. № 5. С. 593–595.
- [30] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Новый подход к алгоритму Кули–Тьюки // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 3 (№ 15). С. 57–60.
- [31] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Алгоритм Кули–Тьюки и дискретное преобразование Хаара // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№ 15). С. 31–34.
- [32] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Секционирование, ортогональность и перестановки // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1 (№ 1). С. 16–21.
- [33] Малоземов В. Н., Цветков К. Ю. Об оптимальных парах сигнал–фильтр // Проблемы передачи инф. 2003. Т. 39. Вып. 2. С. 63–74.
- [34] Малоземов В. Н., Чашников Н. В. Предельные теоремы теории дискретных периодических сплайнов // Доклады РАН. 2011. Т. 436. № 2. С. 168–169.
- [35] Малоземов В. Н., Чашников Н. В. Предельные теоремы теории дискретных периодических сплайнов // В сб.: Проблемы матем. анализа. Вып. 48. 2010. С. 53–74.
- [36] Малоземов В. Н., Чашников Н. В. Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование // Доклады РАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 19–21.

- [37] Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [38] Просеков О. В., Малоземов В. Н. Параметрические варианты быстрого преобразования Фурье. Lambert Academic Publishing, 2010. 122 с.
- [39] Сарвате Д. В., Персли М. Б. Взаимно-корреляционные свойства псевдослучайных и родственных последовательностей // ТИИЭР. 1980. Т. 68. № 5. С. 59–90.
- [40] Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 208 с.
- [41] Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. СПб.: Лань, 2007. 416 с.
- [42] Чашников Н. В. Дискретные периодические сплайны и поверхности Кунса. Lambert Academic Publishing, 2010. 110 с.
- [43] Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. 1965. Vol. 19. No. 90. P. 297–301.
- [44] Donoho D. L., Stark P. B. Uncertainty principles and signal recovery // SIAM J. Appl. Math. 1989. Vol. 49. No. 3. P. 906–931.
- [45] Goertzel G. An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series // Amer. Math. Monthly. 1958. Vol. 65. P. 34–35.
- [46] Johnson J., Johnson R. W., Rodriguez D., Tolimieri R. A methodology for designing, modifying and implementing

- Fourier transform algorithms on various architectures // Circuits, Systems and Signal Processing. 1990. Vol. 9. No. 4. P. 449–500.
- [47] Malozemov V. N., Tsvetkov K. Yu. A sampling theorem in Vilenkin—Chrestenson basis // Communications in Applied Analysis. 2006. Vol. 10. No. 2. P. 201–207.
- [48] Masaru Kamada, Kazuo Toraichi, Ryoichi Mori. Periodic spline orthogonal bases // J. Approx. Theory. 1988. Vol. 55. No. 1. P. 27–34.
- [49] Narcowich F. J., Ward J. D. Wavelets associated with periodic basis functions // Appl. Comput. Harmonic Anal. 1996. Vol. 3. No. 1. P. 40–56.
- [50] Temperton C. Self-sorting in-place Fast Fourier Transform // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1991. Vol. 12. No. 4. P. 808–823.

Предметный указатель

А

Алгоритм

Гёрцеля 83

Кули–Тьюки

с прореживанием

по времени 93

с прореживанием

по частоте 106

Ансамбли сигналов 63

Б

Базис

Ахмеда–Рао 156

Уолша–Адамара 132

Уолша–Пэли 136

Хаара, связанный

с прореживанием

по времени 98

Хаара, связанный

с прореживанием

по частоте 107

вейвлетный 95, 107

ортогональный

в пространстве

сплайнов 206

сдвигов 51

экспоненциальный 34

Быстрое преобразование

Уолша 133

Фурье 93, 106

Хаара

с прореживанием

по времени 101

с прореживанием

по частоте 110

В

Вейвлет-пакет 95

Вычеты 10

Д

Двоичный код 14

Дискретное преобразование

Уолша 132

Фурье 32

Дискретные функции

Ахмеда–Рао 160

Бернулли 171

Радемахера 167

Уолша 130

упорядоченные

по количеству

перемен знака 139

упорядоченные

по частоте 136

Дискретный периодический

В-сплайн 176

Дискретный периодический

сплайн 180

интерполяционный 186

сглаживающий 194

И

Импульс единичный 27

Интерполяция 42, 52, 185

К

Корреляция

взаимная 49

циклическая 49

М

Матрица Адамара 127

Метод касательных

гипербол 196

Н

Неравенство

Коши–Буняковского 30

Сидельникова–Сарвате

65

Носитель сигнала 70

П

Пара сигнал–фильтр 58

Перестановка

 grey_ν 16 rev_ν 14, 87, 103 wal_ν 139

эйлерова 13

Пик-фактор сигнала 81

Подпространства

вейвлетные 97, 219

сплайнов 181

Преобразование сигналов

линейное 46

стационарное 46

Принцип неопределенности

70

Прореживание сигнала 78

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ**Р**

Равенство Парсеваля 38

обобщенное 37

Растяжение сигнала 78

Рекуррентные соотношения

15, 16, 84, 86, 92,

95, 99, 102, 106,

108, 126, 133, 150,

203

С

Свертка

диадная 124

косоциклическая 121

циклическая 44

Сигнал 27

 $T_r(l)$ 177

Задова–Чу 80

Франка 80

Франка–Уолша 169

бинарный 80

вещественный 31

дельта-коррелирован-

ный 59

нечетный 31

нормированный 29

четный 31

чисто мнимый 31

Сигналы

некоррелированные 65

ортогональные 29

Сложение поразрядное 19

Спектр

Уолша 132

Фурье 33

амплитудный 77

Сплайн самодвойственный

211

Сплайн-вейвлеты

двойственные 229

Сплайны двойственные 209

Т

Теорема

о диадной свертке 124

о корреляции 49

о свертке 45

в базисе Хаара 119

об отсчетах 40

в базисах Хаара 112,

116

в базисе Уолша 143

У

Удлинение сигнала 78

Ф

Фильтр 48

подавления боковых

лепестков 60

согласованный 58

Формула обращения для

ДПФ 33

Функция автокорреляцион-

ная 50

нормированная 59

Х

Характеристика фильтра

импульсная 48

частотная 49

Э

Энергия сигнала 60

*Василий Николаевич МАЛОЗЕМОВ
Сергей Михайлович МАШАРСКИЙ*

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-математической литературы
О. А. Митрофанова
Выпускающие *Е. П. Королькова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 13.08.12.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108^{1/32}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,96. Тираж 700 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru