150 задач по теории вероятностей

О.Г. ГОХМАН
А.Н. ГУДОВИЧ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Непосредственный подсчет вероятностей

Теория вероятностей применяется при решении часто встречающихся задач определения вероятности наступления некоторого события в результате проведения опыта (испытания). Значительная часть таких задач относится к опытам, элементарные исходы которых обладают симметрией (равной возможностью наступления). Для вычисления вероятностей возможных исходов опыта достаточно знания условий его проведения и некоторых формул комбинаторики.

В комбинаторике рассматриваются способы составления различных комбинаций из элементов некоторого конечного множества. Изучим следующие комбинации — перестановки, размещения, сочетания.

Перестановки

Рассмотрим в качестве конечного множества n пронумерованных шаров. Поместим эти шары в мешок, а затем извлечем все шары один за другим в случайной последовательности, в результате получим одно из возможных упорядочений элементов этого множества. Установленный в конечном множестве порядок называется перестановкой его элементов. Общее число перестановок n различных элементов обозначают через P_n и определяют по формуле

$$P_n = n! \qquad (1)$$

где $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$.

Теперь предположим, что среди n шаров имеются шары с одинаковыми номерами. В этом случае общее число возможных упорядочений (отличающихся друг от друга перестановок), которые можно получить, извлекая шары один за другим из мешка, станет меньше. Если среди n элементов имеются одинаковые: n_1 первых, n_2 вторых, ... n_k k—х, так что $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то число перестановок с повторениями обозначают через $\hat{P}_n$ и вычисляют по формуле

$$\hat{P}_n=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \qquad (2)$$

Размещения

Поместим в мешок n пронумерованных шаров, а затем извлечем из него один за другим m шаров. Получим упорядоченное множество из m элементов. Конечные упорядоченные множества в комбинаторике называют размещениями Повторяя описанный опыт, можно получать различные размещения. Общее число отличных друг от друга размещений по m элементов в каждом, образованных из n различных элементов, обозначают через A_n^m и определяют по формуле

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}, \quad 0\leqslant m\leqslant n. \qquad (3)$$

Перестановки являются частными случаями размещений при $m=n$, поэтому $A_n^n=P_n$.

Теперь изменим опыт. Из мешка, где помещено n пронумерованных шаров, извлечем шар, запишем его номер и возвратим шар в мешок. Повторив такую операцию m раз, получим упорядоченное множество, которое может содержать и одинаковые элементы, так как возможно неоднократное извлечение одних и тех же шаров. Полученные таким образом упорядоченные множества называют размещениями с повторениями. Общее число размещений с повторениями по m элементов в каждом, образованных из n различных элементов, обозначают через $\hat{A}_n^m$ и вычисляют по формуле

$$\hat{A}_n^m=n^m, \quad m\geqslant 0. \qquad (4)$$

Многие задачи теории вероятностей могут быть сведены к следующей задаче: имеется n урн и m шаров; сколькими способами можно распределить m шаров по n урнам, если в каждую урну может быть положено от 0 до m шаров? Общее число таких комбинаций определяют с помощью формулы (4), если шары, так же как и урны, отличаются друг от друга.

Сочетания

Пусть в опыте, описанном в начале раздела «Размещения», не отмечен порядок появления шаров. В таком случае мы имеем дело с неупорядоченными множествами. Конечные неупорядоченные множества в комбинаторике называют сочетаниями. Общее число сочетаний по m элементов в каждом, образованных из n различных элементов, обозначают через C_n^m и определяют по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{5}$$

Если не отмечать порядок появления шаров в опыте, в котором их возвращают в мешок, получим неупорядоченные множества, которые называют сочетаниями с повторениями. В этом случае общее число сочетаний с повторениями по m элементов в каждом, образованных из n различных элементов, обозначают через $\hat{C}_n^m$ и вычисляют по формуле

$$\hat{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}, \quad m \geqslant 0. \tag{6}$$

Рассмотрим, как применяются формулы комбинаторики при решении задач на непосредственный подсчет вероятностей.

Задача 1. В выпуклом двадцатиугольнике случайным образом берут 2 вершины и соединяют отрезком. Чему равна вероятность того, что построенный отрезок является диагональю двадцатиугольника?

Решение. Требуется вычислить P(A), где событие A заключается в том, что проведенный отрезок является диагональю.

Поскольку выбор любой пары вершин случаен и не является предпочтительным относительно какого-либо другого выбора пары вершин, то для вычисления вероятности можно применить классическую формулу

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — число всех исходов опыта, m — число исходов опыта, благоприятствующих событию A. Под исходом опыта понимают выбор какой-то конкретной пары вершин, определяющих сторону или диагональ двадцатиугольника. Такой выбор можно осуществить C_{20}^2 способами (порядок выбора вершин несуществен), следовательно, $n = C_{20}^2$. Под исходом опыта, благоприятствующим событию А, понимают такой, когда случайно выбранная пара вершин определяет диагональ (в отличие от стороны). Число диагоналей равно $C_{20}^2 - 20$. Таким образом, $m = C_{20}^2 - 20$. Тогда

$$P(A) = \frac{C_{20}^2 - 20}{C_{20}^2} = \frac{190 - 20}{190} = \frac{17}{19}.$$

Задача 2. В течение 5 недель студенты сдают 5 экзаменов, в том числе 2 по математике. Чему равна вероятность того, что при составлении расписания экзамены по математике не следуют друг за другом, если расписание составлено случайным образом?

Решение. В задаче речь идет о нахождении вероятности события А, заключающегося в том, что в составленном расписании 2 экзамена по математике не следуют друг за другом. Для удобства счета лучше вычислить вероятность наступления события В, противоположного событию А. Событие В означает, что в составленном расписании 2 экзамена по математике стоят рядом.

Поскольку возможны все варианты следования экзаменов друг за другом и ни один из них не является предпочтительным, то для вычисления $P(B)$ можно применить классическую формулу

$$P(B) = \frac{m}{n},$$

где n — число всех исходов опыта, m — число исходов опыта, благоприятствующих событию В. Тогда

$$n = P_5 = 5!$$

Для подсчета m проведем следующее рассуждение. Предположим, что экзамены по математике идут в 1-ю и 2-ю недели, в остальные недели возможны P_3 комбинаций остальных экзаменов. Всего таких комбинаций $2 \cdot P_3$, так как экзамены по математике можно поменять местами. Аналогичным образом экзамены по математике могут идти во 2-ю и 3-ю недели и т. д. Всего таких комбинаций 4. Таким образом,

$$m = 4 \cdot 2 \cdot P_3 = 4 \cdot 2 \cdot 3!$$

$$P(B) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3!}{5!} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{2}{5}.$$

Тогда

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

1.1. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 6 деталей 4 — стандартные.

1.2. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого случайным образом извлеченного жетона не содержит цифры 5.

1.3. В урне 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: О, П, Р, С, Т. Найти вероятность того, что на вытянутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово «спорт».

1.4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наугад извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) 1; б) 2; в) 3.

1.5. Имеется 10 карточек, на которых написаны числа 3; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6;6. Две из этих карточек вынимают одну за другой. Число на первой карточке считается числителем, на второй — знаменателем. Найти вероятность того, что получится правильная дробь.

1.6. На отдельных карточках написаны цифры 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Последовательно без возвращения выбирают и раскладывают 4 карточки. Какова вероятность получить: а) число 1234; б) любое четырехзначное четное число из указанных цифр?

1.7. На 8 одинаковых карточках написаны соответственно числа 2; 4; 6; 7; 8; 11; 12 и 13. Наугад берут 2 карточки. Определить вероятность того, что образованная из 2 полученных чисел дробь сократима.

1.8. Замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с написанными на них различными цифрами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

1.9. Восемь различных книг расставляют случайным образом на полке. Найти вероятность того, что 2 определенные книги окажутся поставленными рядом.

1.10 Десять различных книг расставляют в случайном порядке на полке. Определить вероятность того, что при этом 3 определенные книги окажутся поставленными рядом.

1.11. n человек садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что 2 определенных лица окажутся рядом.

1.12. Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 4 руб. каждая, 3 книги — по 1 руб. и 2 книги — по 3 руб. Найти вероятность того, что взятые наугад 2 книги стоят 5 руб.

1.13. Найти вероятность того, что при случайном распределении 3 шаров по 3 урнам все урны будут заняты (шары, так же как и урны, отличаются друг от друга: например, урны пронумерованы, а шары разных цветов).

1.14. Определить вероятность того, что при а) возведении в квадрат, б) возведении в четвертую степень, в) умножении на любое однозначное число выбранного наугад целого числа от 1 до 9 получится число, оканчивающееся единицей.

1.15. Определить вероятность того, что серия наугад выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

1.16. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Определить вероятность того, что среди взятых наугад 5 билетов а) 1 выигрышный, б) оба выигрышных, в) хотя бы 1 выигрышный.

1.17. Для проверки 6 магазинов нужны 3 ревизора, каждый из которых должен проверить 2 магазина. Какова вероятность того, что при случайном распределении объектов первый ревизор будет проверять определенные 2 магазина?

1.18. Что более вероятно: при однократном бросании 4 игральных костей (игральная кость представляет собой симметричный кубик, грани которого пронумерованы числами 1; 2; 3; 4; 5; 6) получить хотя бы одну единицу или при бросании 24 раза 2 игральных костей получить хотя бы 1 раз две единицы?

1.19. 20 человек рассаживаются на 5 скамейках по 4 человека на каждой. Найти вероятность того, что 2 данных лица окажутся сидящими рядом.

1.20. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выиграть хотя бы один раз, имея k билетов?

1.21. 5 мужчин и 10 женщин случайным образом образуют 5 групп по 3 человека. Найти вероятность того, что в каждой группе будет 1 мужчина.

1.22. Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 3 карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет 2 очка, дама — 3, король — 4, туз — 11, а остальные карты — соответственно 6; 7; 8; 9 и 10 очков.

1.23. Лифт с 4 пассажирами останавливается на 10 этажах. Какова вероятность того, что 2 пассажира не выйдут на одном этаже?

1.24. Имеется группа из 25 человек. Определить вероятность того, что хотя бы у 2 человек один и тот же день рождения, если в году 365 дней и каждый из группы мог с равной вероятностью родиться в любой день года.

§ 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теоремы сложения и умножения вероятностей позволяют перейти от непосредственного подсчета вероятностей к определению вероятностей наступления сложных событий.

Вероятность суммы 2 событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (7)$$

Если число событий более 2, то вероятность их суммы может быть вычислена следующим образом:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_iA_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (8)$$

Для независимых событий A_i вероятность суммы

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i)). \qquad (8\,а)$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (9)$$

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A называется вероятность наступления события A, вычисленная при условии, что событие B уже произошло.

Вероятность произведения 2 событий находят по формуле

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \quad (10)$$

Если число событий более 2, то вероятность произведения может быть вычислена с помощью формулы

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots \times$$

$$\times P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (11)$$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (12)$$

Применим теоремы сложения и умножения вероятностей для решения задач.

Задача 1. Электрическая цепь состоит из 4 лампочек, соединенных как показано на рис. 1. При повышенном на-

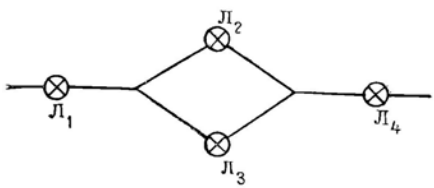


Рис. 1

пряжении лампочки перегорают с вероятностью 0,6. Определить вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет, если лампочки перегорают независимо друг от друга.

Решение. Тока в цепи не будет тогда, когда или перегорят одновременно лампочки $Л_2$ и $Л_3$, или перегорит хотя бы одна из лампочек $Л_1$, $Л_4$. Попробуем записать этот факт с помощью событий. Для этого введем событие A_j (j=1; 2;

3, 4), состоящее в том, что перегорела лампочка $Л_j$. Пусть B означает, что при повышенном напряжении перегорели одновременно лампочки $Л_2$, $Л_3$, а C означает, что перегорела хотя бы одна из лампочек $Л_1$, $Л_4$. Если A означает событие, вероятность которого нам требуется вычислить, то из определения суммы следует, что $A = C + B$. Тогда $B = A_2A_3$, $C = A_1 + A_4$. Из выписанных соотношений легко получить формулы для вычисления нужных вероятностей:

$$P(A) = P(C+B) = P(C) + P(B) - P(CB) =$$
$$= P(C) + P(B) - P(C)P(B)$$

(поскольку события C и B совместны и независимы, при вычислении P(A) необходимо учесть член P(CB) и правило умножения вероятностей для независимых событий),

$$P(C) = P(A_1) + P(A_4) - P(A_1A_4),$$
$$P(B) = P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3).$$

Подставив численные значения в полученные формулы, найдем:

$$P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36,$$
$$P(C) = 0{,}6 + 0{,}6 - 0{,}36 = 0{,}84,$$
$$P(A) = 0{,}36 + 0{,}84 - 0{,}84 \cdot 0{,}36 = 1{,}2 - 0{,}302 = 0{,}898.$$

Задача 2. Из 12 билетов, пронумерованных от 1 до 12, один за другим (без возвращения) выбирают 2 билета. Какова вероятность того, что номера этих билетов четные?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что выбранные 2 билета имеют четные номера, а через A_1 и A_2 — что выбранные первый и второй билеты четные. Тогда

$$A = A_1 \cdot A_2.$$

События A_1 и A_2 зависимы, поскольку вероятность A_2 зависит от того, происходило ли событие A_1 или нет. Действительно, в первом случае такая вероятность равна $\frac{5}{11}$, во втором — $\frac{6}{11}$. Применив теорему умножения, получим:

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{22}.$$

Искомая вероятность равна $\frac{5}{22}$.

2.1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, денежного и вещевого для владельца 1 лотерейного билета?

2.2. Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что номер 6 выпадет хотя бы на одной из них?

2.3. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1, вероятность выбить 9 очков составляет 0,3, вероятность выбить 8 очков или менее — 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

2.4. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных 2 деталей хотя бы 1 стандартная.

2.5. Ящик содержит 10 деталей, среди которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 деталях окажется не более 1 нестандартной.

2.6. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

2.7. В 2 ящиках находятся детали: в первом 10 (из них 3 стандартные), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наугад вынимают по 1 детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

2.8. В студии телевидения 3 телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы 1 камера.

2.9. Чему равна вероятность того, что при бросании 3 игральных костей 6 очков будет хотя бы на 1 из игральных костей?

2.10. Предприятие изготовляет 95% стандартных изделий, причем 86% из них — первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

2.11. Из цифр 1; 2; 3; 4; 5 сначала выбирают одну, а затем — еще одну цифру. Предположим, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра а) первый раз, б) второй раз, в) оба раза.

2.12. Вероятность того, что при 1 выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 попасть в десятку хотя бы 1 раз?

2.13. Вероятность того, что событие A появится хотя бы 1 раз в 2 независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

2.14. Вероятность поражения цели первым стрелком при 1 выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком, если каждый сделал по выстрелу.

2.15. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий нестандартно только одно, б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

2.16. Вероятность того, что в результате 4 независимых опытов событие A произойдет хотя бы один раз, равна 1/2. Определить вероятность появления события в одном опыте, если она во всех опытах остается неизменной.

2.17. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с 3 командами общества B. Вероятности того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B равны: при встрече A_1 с B_1 —0,8; A_2 с B_2 —0,4, A_3 с B_3 —0,4. Для победы необходимо выиграть не менее 2 матчей из 3 (ничьи во внимание не принимаются). Победа какого спортивного общества вероятнее?

2.18. В жюри из 3 человек 2 человека независимо друг от друга принимают справедливое решение с вероятностью P, третий для вынесения решения бросает монету. Окончательное решение принимается большинством голосов. Кроме жюри, 1 человек выносит правильное решение с вероятностью P. Кто выносит справедливое решение с большей вероятностью — жюри из 3 человек или 1 человек?

2.19. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет, если лампочки перегорают независимо друг от друга.

2.20 Три электрические лампочки, 2 из которых соединены параллельно, а третья с ними последовательно, включены в цепь. Вероятность того, что 1 (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет, если лампочки перегорают независимо друг от друга.

2.21. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, для второго — 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

2.22. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна Р. Определить вероятность того, что на соревновании спортсмен улучшит свой результат, если ему разрешат сделать 2 попытки.

2.23. Из урны, содержащей n шаров с номерами от 1 до n, последовательно вынимают 2 шара, причем первый шар возвращают, если его номер не равен 1. Определить вероятность того, что шар с номером 2 будет вынут вторым.

2.24. Сосуд содержит m белых и n черных шаров. Два игрока по очереди вынимают шар и возвращают его обратно. Выигрывает тот, кто первый вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша для первого игрока.

2.25. Имеется n урн, в каждой из которых a белых и b черных шаров. Один шар перекладывают из первой во вторую урну, затем из второй в третью и т. д.. После этого из последней урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что он белый.

2.26. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

2.27. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого из игроков.

2.28. В круг радиусом R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что наугад помещенные в данный круг две точки окажутся внутри треугольника, если вероятность попадания точки внутрь некоторой области пропорциональна площади этой области?

2.29. Прибор состоит из 2 узлов. Работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла — P_1, второго — P_2. Прибор вышел из строя. Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

2.30. В таблице логарифмов, содержащей 10 000 значений, есть одна опечатка. Берут наугад 100 чисел, необязательно различных, и отыскивают их логарифмы по таблице. Какова вероятность того, что среди найденных значений хотя бы одно ошибочно?

2.31. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали, изготовленные заводом № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

2.32. В очереди за билетами стоимостью 5 руб. стоят $n + m$ человек, из которых n лиц имеют деньги пятирублевого достоинства, а m $(m \leqslant n + 1)$ — десятирублевого. Каждый покупает только один билет. В кассе до продажи билетов денег нет. Какова вероятность того, что никому из очереди не придется ожидать сдачи?

2.33. Цель, по которой ведется стрельба, состоит из 2 различных по уязвимости частей. Для поражения цели достаточно 1 попадания в ее первую часть или 2 попаданий во вторую. Вероятность попадания в первую часть равна p_1, во вторую — p_2 $(p_2 = 1 - p_1)$ для каждого попавшего в цель снаряда. По цели производится 3 выстрела. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна p. Найти вероятность того, что данными 3 выстрелами цель будет поражена.

2.34. Два стрелка произвели по 1 выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, а вторым — 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

2.35. Два игрока трижды подбрасывают по монете. Определить вероятность того, что хотя бы один раз у них совпадут результаты бросания.

2.36. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из урны извлекают подряд 4 шара. Определить вероятность того, что будут извлечены 2 черных и 2 белых шара.

2.37. Найти вероятность того, что при случайном распределении 3 шаров по 3 урнам одна урна будет свободной (шары, так же как и урны, отличаются друг от друга).

§ 3. Формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли

Вероятность наступления события А, которое может произойти только вместе с одним из событий B_j, составляющих полную группу несовместных событий $\left[\sum_{j=1}^{n} P(Bj) = 1\right]$ вычисляют по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A/B_j). \tag{13}$$

Вероятность $P(Bj/A)$ определяют по формуле Байеса

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}, \quad j=1, ..., n, \tag{14}$$

если события B_j составляют полную группу несовместных событий, а событие А наступает вместе с одним из событий B_j. Формула применяется для вычисления вероятности события B_j при условии, что событие А уже имело место.

Для определения вероятности $P_{m,n}$ наступления некоторого события m раз при проведении n независимых опытов в одинаковых условиях применяют формулу Бернулли

$$P_{m,n} = C_n{}^m p^m q^{n-m}, \tag{15}$$

если в каждом опыте вероятность наступления события равна p, а вероятность наступления противоположного события равна $1 - p = q$.

Вероятность $R_{m,n}$ наступления события не менее m раз в n независимых опытах

$$R_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} P_{i,n} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P_{i,n}, \tag{16}$$

вероятность наступления события в этих же условиях хотя бы один раз

$$R_{1,n} = 1 - q^n. \tag{17}$$

Наивероятнейшее число наступлений события m^* при повторении независимых испытаний n раз

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p. \qquad (18)$$

Приводим несколько задач, для решения которых используются приведенные формулы.

Задача 1. Предположим, что из 10 монет одна имеет герб с обеих сторон, а остальные монеты — с одной. Наугад выбранную монету бросают 3 раза. Какова вероятность того, что при всех бросаниях она падает гербом кверху?

Решение. Обозначим через A, B_1, B_2 следующие события:

A — наугад выбранная монета падает 3 раза гербом вверх;

B_1 — наугад выбранная монета — обычная;

B_2 — наугад выбранная монета имеет герб с обеих сторон.

События B_1, B_2 составляют полную группу несовместных событий, поэтому для решения задачи можно применить формулу полной вероятности:

$$P(A) = (P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2).$$

Из условия задачи ясно, что $P(B_1) = \frac{9}{10}$, $P(B_2) = \frac{1}{10}$. Значения условных вероятностей находим из исходных данных:

$$P(A/B_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad P(A/B_2) = 1.$$

Вторая вероятность равна единице, поскольку монета, имеющая герб с обеих сторон, всегда падает гербом вверх.

Подставив найденные значения в формулу полной вероятности, получим:

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{9+8}{10 \cdot 8} = \frac{17}{80}.$$

Задача 2. Предположим, что проведен опыт, соответствующий условиям задачи 1, и подброшенная монета 3 раза упала гербом вверх. Какова вероятность того, что: а) была выбрана обычная монета; б) была выбрана монета, имеющая герб с обеих сторон?

Решение. Для решения задач применим формулу Байеса, так как вероятности $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$ и есть те, которые требуется найти по условию. Получим:

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{17}{80}}=\frac{9}{17},$$

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{1\cdot\frac{1}{10}}{\frac{17}{80}}=\frac{8}{17}.$$

Задача 3. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что 6 очков выпадут не менее 2 раз?

Решение. Обозначим интересующее нас событие через A. Тогда

$$P(A)=1-\sum_{i=0}^{1}P_{i,10}=1-C^0_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}-C^1_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9=$$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}-\frac{10}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9=1-\left(\frac{5}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}+\frac{10}{6}\right)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^9\cdot\frac{15}{6}.$$

Для вычисления $\left(\frac{5}{6}\right)^9$ воспользуемся таблицей логарифмов. Пусть $x=\left(\frac{5}{6}\right)^9$, тогда $\log_{10}x=9\log_{10}\frac{5}{6}=9\log_{10}0{,}8333=$ $=9(\bar{1},9208)=9(-0{,}0792)=-0{,}7128=\bar{1},2872.$ Отсюда $x=$ $=0{,}1938$. Окончательно

$$P(A)=1-0{,}1938\cdot2{,}5=0{,}5155.$$

3.1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника — 0,9, для велосипедиста — 0,8, для бегуна — 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наугад, выполнит норму.

3.2. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что стандартна деталь завода № 1, равна 0,8, завода № 2—0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наугад взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь

3.3. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором —30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем —10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что случайным образом извлеченная деталь из наугад взятого ящика стандартна.

3.4. В телевизионном ателье 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

3.5. В 2 ящиках имеются радиолампы: в первом ящике их 12, из них 1 нестандартная, во втором — 10, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет стандартной.

3.6. Из полного набора костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно будет приставить к первой.

3.7. В ящик, содержащий 3 одинаковые детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена 1 деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.

3.8. В ящике 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берут 3 мяча, которые после игры возвращают в ящик и считают неновыми. Для второй игры также наугад берут 3 мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

3.9. В сосуд, содержащий черные и белые шары (могут быть только белые или только черные) общим числом n, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном соотношении черных и белых шаров равновозможны?

3.10. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из 3 независимых опытов, если вероятность отказа прибора при 1; 2; 3 опасных перегрузках соответственно равна 0,2; 0,5; 0,8.

3.11. Определить вероятность того, что 100 лампочек взятых наудачу из 1000 окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек из этого количества может составлять с одинаковой вероятностью от 0 до 5.

3.12. По самолету производится 3 одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, при третьем — 0,8. Для вывода самолета из строя достаточно 3 попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3, при двух — 0,6. Найти вероятность того, что в результате 3 выстрелов самолет будет сбит.

3.13. Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

3.14. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4 студента, из второй — 6 студентов, из третьей — 5. Вероятности того, что студент из первой, второй и третьей групп попадет в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Один из отобранных студентов в итоге соревнования попал в сборную. К какой группе вероятнее всего он принадлежит?

3.15. При отклонении от нормального режима работы автомата сигнализатор С—I срабатывает с вероятностью 0,8, а сигнализатор С—II — с вероятностью I. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С—I или С—II, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разладке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С—I или С—II?

3.16. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек на 1000 равновозможно от 0 до 5.

3.17. Из партии, содержащей 5 изделий, наудачу взято 1 изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

3.18. Вероятность для изделия некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предложена упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и 0,05 для изделий, не удовлетворяющих ему. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно таково.

3.19. Первое орудие батареи поражает цель с вероятностью 0,3, остальные 3 орудия — с вероятностью 0,2. Два орудия произвели по выстрелу, цель поражена. Найти вероятность того, что стреляло первое орудие.

3.20. На склад поступила готовая продукция трех фабрик. Продукция первой фабрики составила 20%, второй — 46%, третьей — 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий первой фабрики равен 3, второй — 2, третьей — 1. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

3.21. Некто, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что для различных дорог вероятности выхода из леса за час соответственно равны 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Определить вероятность того, что заблудившийся пошел по первой дороге, если известно, что он вышел из леса через час.

3.22. В цехе имеется 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора, б) включены все моторы, в) выключены все моторы.

3.23. Найти вероятность того, что событие А появится в 5 независимых испытаниях не менее 2 раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,3.

3.24. Для появления события В необходимо, чтобы событие А появилось не менее 2 раз. Найти вероятность того, что наступит событие В, если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,4.

3.25. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,1. Найти вероятность того, что событие А появится хотя бы 2 раза.

3.26. В ящике имеется по одинаковому числу деталей, изготовленных заводами № 1 и 2. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу извлеченных деталей окажется изготовленных заводом № 1: а) 2 детали, б) менее 2 деталей, в) более 2 деталей.

3.26 а. Решить пункт а) предыдущей задачи, используя классическую формулу для определения вероятности. Дать анализ полученного результата.

3.27. Вероятность попадания в цель при 1 выстреле из орудия равна 0,9, вероятность поражения цели при $k (k \geqslant 1)$

попаданиях равна $1-q^k$. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если произведено 2 выстрела.

3.28. Найти вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) одну цифру 7, б) две цифры 7. Все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновероятные.

3.29. Два баскетболиста делают по 3 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих баскетболистов будет равное число попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

3.30. Для прикуривания гражданин пользовался двумя коробками спичек, доставая наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время, достав коробку, он обнаружил, что в коробке нет спичек и он не может прикурить. Какова вероятность того, что во второй коробке еще имеется k спичек, если вначале в каждой коробке было n спичек?

3.31. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,1. Найти: а) наивероятнейшее число наступлений события A, б) вероятность того, что событие A наступит наивероятнейшее число раз.

3.32. Монету бросают 20 раз. Найти наивероятнейшее число появлений герба.

3.33. Игральную кость бросают 120 раз. Найти наивероятнейшее число появления на ее верхней грани цифры 6.

3.34. Игральную кость бросают 16 раз. Найти наивероятнейшее число появления на ее верхней грани числа очков, кратного 3.

3.35. В первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй — 1 белый и 2 черных, в третьей — 3 белых и 1 черный шар. Один шар перекладывают наугад из первой урны во вторую, затем таким же образом — из второй урны в третью. Какова вероятность вынуть после этого белый шар из третьей урны?

3.36. Два человека поочередно извлекают по 2 карты из колоды в 36 карт. Определить вероятность того, что каждый из них будет иметь карты одной масти.

ГЛАВА II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 4. Дискретные случайные величины

Закон распределения дискретной случайной величины может быть представлен в виде ряда распределения — таблицы, в которой указаны все возможные значения случайной величины и вероятности этих значений. Если имеется n возможных значений случайной величины X, то ряд распределения имеет вид:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Основные числовые характеристики случайной величины X — математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ — вычисляются по формулам

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{19}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i. \tag{20}$$

Для вычисления $D(X)$ можно использовать также формулу

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2. \tag{20 a}$$

При решении практических задач часто рассматривают не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$, равное корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{21}$$

Для числовых характеристик системы двух случайных величин справедливы следующие соотношения:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y), \tag{22}$$

$$M(XY) = M(X)M(Y), \tag{23}$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y), \tag{24}$$

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[M(X)]^2D(Y)+[M(Y)]^2D(X). \tag{25}$$

Формулы (23, 24 и 25) верны только для независимых случайных величин.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать аналитически, указав формулу, позволяющую вычислить вероятность каждого значения случайной величины. При решении экономических задач часто применяют биномиальный закон распределения: случайная величина X распределяется по биномиальному закону с параметрами n и p (n — натуральное число, $0<p\leqslant 1$), если множество ее значений совпадает с множеством натуральных чисел от 0 до n, а соответствующие вероятности равны:

$$P(X=m)=P_{m,n}=C_n{}^m p^m q^{n-m}, \quad (m=0,1, ..., n). \tag{26}$$

Здесь и далее $q=1-p$. Из формулы (26) следует, что число появлений события A в серии независимых испытаний подчинено биномиальному закону, где параметр p — вероятность события A, n — число опытов.

Числовые характеристики биномиального закона легко выразить через его параметры:

$$M(X)=np, \tag{27}$$

$$D(X)=\sigma^2(X)=npq. \tag{28}$$

Дискретную случайную величину X можно описывать с помощью функции распределения, т. е. функции $F(x)$, равной вероятности того, что случайная величина X принимает значение меньше x, т. е. $F(x)=P(X<x)$. Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \sum\limits_{m<x} C_n{}^m p^m q^{n-m} & \text{при } 0<x\leqslant n, \\ 1 & \text{при } x>n. \end{cases} \tag{29}$$

Для вычисления вероятности $P_{m,n}$ при больших значениях n применение формулы Бернулли (15) нецелесообразно. В этом случае используют теоремы Лапласа, позволяющие получить две удобные для вычислений формулы (30, 31), основанные на приближенной замене биномиального распределения нормальным:

$$P_{m,n} \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{30}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

$$P[m_1 < m < m_2] \cong \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{31}$$

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ находят из таблиц (приложения 1 и 2).

Другим известным законом распределения является закон Пуассона. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda (\lambda > 0)$, если множество ее возможных значений совпадает с множеством всех целых неотрицательных чисел, а соответствующие вероятности равны:

$$P(X=m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (m=0, 1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Параметр λ равен и математическому ожиданию и дисперсии этой случайной величины.

При малых значениях P и большом значении n биномиальное распределение может быть приближено с помощью закона Пуассона, т. е. имеет место формула

$$P_{m,n} \cong \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{33}$$

где принимают $\lambda = np$.

Применим приведенные формулы к решению задач.

Задача 1. Имеется 8 деталей, 2 из которых нестандартны. Случайным образом отбирают 2 детали. Найти закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Случайная величина X — число отобранных стандартных деталей — может принимать следующие значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Тогда вероятности, соответствующие указанным значениям X, будут равны:

$$P_1 = \frac{C^0_6 \cdot C^2_2}{C^2_8} = \frac{1}{28}, \; P_2 = \frac{C^1_6 \cdot C^1_2}{C^2_8} = \frac{12}{28}, \; P_3 = \frac{C^2_6 \cdot C^0_2}{C^2_8} = \frac{15}{28}.$$

Получаем ряд распределения, что является решением задачи:

X	0	1	2
P	1/28	12/28	15/28

З а д а ч а 2. Монету бросают до появления герба. Определить математическое ожидание числа бросаний монеты до появления герба.

Р е ш е н и е. Случайной величиной X является число бросаний монеты до появления герба. Эта случайная величина дискретна, множество ее возможных значений есть натуральный ряд чисел 1, 2, 3, ..., n, ... Для построения ряда распределения достаточно вычислить вероятности соответствующих значений X. Пусть $X=1$; это означает, что при первом бросании выпал герб. Вероятность этого события равна $\frac{1}{2}$. Если $X=2$, это значит, что герб выпал только при втором бросании. Это событие представляется в виде произведения двух независимых событий, поэтому $P[X=2]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. По аналогии имеем $P(X=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$. Таким образом можно построить ряд распределения:

X	1	2	3	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$	...

Математическое ожидание рассматриваемой дискретной случайной величины может быть вычислено следующим образом:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\ldots+$$

$$+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}+\ldots=\frac{1}{2}\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots\right]=\frac{1}{2}S,$$

где S — выражение, заключенное в скобки. Чтобы найти $\frac{1}{2}S$, составим разность:

$$S-\frac{1}{2}S=\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ \dots\ +n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ \dots\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ \dots\ +n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ \dots\right]=$$

$$=\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ \dots\ +n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ \dots\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ \dots\ +n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\ \dots\right]=$$

$$=1+\frac{1}{2}(2-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^2(3-2)+\ \dots\ +\ \dots\ =1+$$

$$+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots$$

Следовательно, величина $\frac{1}{2}S$ равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $q=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

откуда

$$M(X)=2.$$

4.1. Игральная кость брошена 3 раза. Построить ряд распределения числа появлений цифры 6.

4.2. Составить ряд распределения числа появлений события A в 3 независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,6.

4.3. Производят последовательные испытания 5 приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывают только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

4.4. Условия задачи те же, что и в 4.3. Построить ряд распределения случайного числа приборов, выдержавших испытания.

4.5. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, для второго —0,6.

4.6. При тех же значениях вероятности попадания, что и в 4.5, построить ряд распределения случайного числа бросков для каждого из игроков, если игра заканчивается при первом промахе.

4.7. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованные изделия с вероятностью p. Построить ряд распределения числа изделий, изготовленных между двумя переналадками, если переналадка производится после изготовления k-го бракованного изделия.

4.8. Найти математическое ожидание случайной величины, зная закон ее распределения:

X	6	3	1
P	0,2	0,3	0,5

4.9. Произведено 4 выстрела с вероятностями попадания в цель, соответственно равными 0,6; 0,4; 0,5; 0,7. Найти математическое ожидание числа попаданий.

4.10. Случайные величины X и У заданы законами распределения:

а)

X	1	3
P	0,4	0,6

У	0,2	0,5	0,7
P	0,1	0,6	0,3

б)

X	—1	1
P	0.6	0.4

У	1	3
P	0,7	0,3

Найти математическое ожидание произведения XУ.

4.11. Независимые случайные величины X и У заданы законами распределения:

X	1	2
P	0,2	0,8

У	0,5	1
P	0,3	0,7

Найти математическое ожидание суммы X и У.

4.12. Производится испытание деталей на надежность. Вероятность отказа детали за время испытания равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей. если испытанию подвергнуты: а) 1 деталь; б) 10 деталей.

4.13. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

4.14. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша на один билет равна 0,3.

4.15. Случайная величина X принимает только два значения: $+C$ и $-C$, каждое с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой величины.

4.16. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распределения:

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

4.17. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X) = 2{,}7$ и $D(X) = 0{,}21$.

4.18. Найти дисперсию случайной величины числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если $M(X) = 0{,}8$.

4.19. Испытывается устройство, состоящее из 4 независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов соответственно равны 0,3; 0,4; 0,5; 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

4.20. Дисперсия случайной величины равна 6,25. Найти среднее квадратическое отклонение.

4.21. Случайная величина задана законом распределения

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

4.22. Дисперсия каждой из 9 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равна 36. Найти дисперсию среднего арифметического этих величин.

4.23. Среднее квадратическое отклонение каждой из 16 одинаково распределенных независимых случайных величин равно 10. Найти среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих величин.

4.24. Случайная величина X может иметь любое целое положительное значение n с вероятностью, пропорциональной $\frac{1}{3^n}$. Найти математическое ожидание X.

4.25. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпустить бракованное изделие с вероятностью p. Переналадка линии производится после выпуска первого бракованного изделия. Найти среднее число изделий, изготовленных между двумя переналадками.

4.26. По данным задачи 2.20 найти математическое ожидание числа перегоревших лампочек при условии, что при повышении напряжения тока в цепи не будет.

4.27. В лотерее имеется m_1 выигрышей стоимостью k_1, m_2 — стоимостью k_2, ..., m_n — стоимостью k_n. Число билетов равно N. Какую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

4.28. Доказать, что дисперсия числа появлений события A в одном опыте не превосходит 1/4.

4.29. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события равна 0,7.

4.30. Дискретная случайная величина X задана следующим законом распределения:

X	2	6	10
P	0,5	0,4	1,0

Построить график функции распределения случайной величины X.

4.31. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

4.32. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

4.33. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний постоянна и равна 0,75. Найти вероятность того, что частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,0001.

4.34. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что распределение вероятностей числа опечаток подчинено закону Пуассона.

4.35. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на 5 веретенах.

4.36. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение 1 минуты позвонит 3 абонента; позвонит 4 абонента?

4.37. Рукопись объемом 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы 1 опечатку; б) 2 опечатки; в) не менее 2 опечаток. Предполагается, что распределение вероятностей числа опечаток на странице рукописи подчинено закону Пуассона.

4.38. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7,5 с испускало в среднем 3,87 α-частиц. Найти вероятность того, что за 1 с это вещество испустит хотя бы одну α-частицу, если число частиц, испускаемых за 1 с, распределено по закону Пуассона.

§ 5. Непрерывные случайные величины

Закон распределения непрерывной случайной величины X может быть представлен в виде интегрального закона распределения — функции распределения F(x), или в виде дифференциального закона распределения — плотности распределения f(x).

Функция распределения

$$F(x)=P[X<x], \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{34}$$

где x — действительная переменная (произвольное действительное число). Основные свойства функции распределения таковы:

$$0\leqslant F(x)\leqslant 1, \tag{35}$$

$$F(-\infty)=0, \qquad F(\infty)=1, \tag{36}$$

$$F(x_1)\leqslant F(x_2), \qquad \text{если } x_1<x_2 \tag{37}$$

$$P(x_1\leqslant X<x_2)=F(x_2)-F(x_1). \tag{38}$$

Плотность распределения (плотность вероятности) случайной величины есть производная функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P[x\leqslant X<x+\Delta x]}{\Delta x}. \tag{39}$$

Свойства плотности распределения следующие:

$$f(x)\geqslant 0, \tag{40}$$

$$P[x_1\leqslant X<x_2]=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,d(x), \tag{41}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1. \tag{42}$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины вычисляются по формулам

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,d(x). \tag{43}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx. \qquad (44)$$

Наибольшее применение при решении задач по теории вероятностей имеет нормальный закон распределения, для которого

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (45)$$

и

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}\,dz. \qquad (46)$$

Можно показать, что параметры a и σ в формулах (45) и (46) являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины, распределенной по нормальному закону. Сокращенно нормальное распределение записывается так: $N(a, \sigma)$.

Вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины X в интервал (x_1, x_2)

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \qquad (47)$$

где $\Phi(x)$ определяется по формуле

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz, \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (48)$$

и называется функцией Лапласа. Значения функции $\Phi(x)$ содержатся в таблице (см. приложение 2). Функцией Лапласа называется также функция $\Phi^*(x)$, задаваемая формулой

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz. \qquad (49)$$

Можно показать, что эти функции связаны друг с другом соотношением

$$\Phi^*(x) = \Phi(x) + 0{,}5, \qquad (50)$$

т. е. отличаются друг от друга константой. Поэтому в формуле (47) функцию $\Phi(x)$ можно заменить на $\Phi^*(x)$. Значения функции $\Phi^*(x)$ приведены в таблице (см., например, [1]).

Нормальное распределение называют нормированным, если $a=0$, $\sigma=1$, и обозначают через $N(0,1)$. Функция $\varphi(x)$ в формуле (30) есть плотность нормированного нормального распределения, а функция $\Phi^*(x)$ есть функция распределения нормированной нормальной случайной величины.

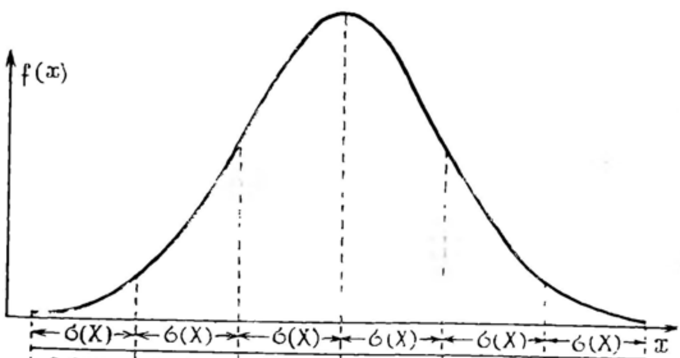
Используя свойство нечетности функции $\Phi(x)$, из формулы (47) легко можно получить формулу

$$P(|X-M(X)|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(X)}\right), \tag{51}$$

где δ — произвольное положительное число, и ее частный случай ($\delta = t\sigma(X)$, t — любое положительное число)

$$P(|X-M(X)|<t\sigma(X))=2\Phi(t). \tag{52}$$

Положив в (52) последовательно $t=1$, $t=2$, $t=3$, найдем, что для нормально распределенной величины X вероятности отклонения от своего среднего значения не более чем на $\sigma(X)$, $2\sigma(X)$, $3\sigma(X)$ соответственно равны 0,6826, 0,9545, 0,9973. Если принять во внимание симметричность нормального распределения, то на основе полученных значений можно вычислить вероятности, с которыми значения X попадают в интервалы длиной $\sigma(X)$ (см. первую строку таблицы на рис. 2).



0,0214	0,1360	0.3413	0.3413	0.1360	0.0214
0,02	0.14	0.34	0,34	0.14	0.02

Рис. 2

Сумма вероятностей, составляющих первую строку таблицы, равна 0,9974. Таким образом, вероятность отклонения значений случайной величины X от $M(X)$ более чем на $3\sigma(X)$ весьма мала (0,0026). Если пренебречь этой величиной и считать, что все значения X попадают в интервал $[M(X)-3\sigma(X),\ M(X)+3\sigma(X)]$ (правило трех сигм), то получим нижнюю строку таблицы, в которой вероятности округлены до 0,01.

Решим две задачи.

З а д а ч а 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию плотности и математическое ожидание X.

Р е ш е н и е. Функцию плотности можно получить дифференцированием функции распределения. Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Известно, что $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$. Применительно к условиям данной задачи

$$M(X) = \int\limits_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

З а д а ч а 2. Найти функцию распределения случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad \text{(закон Лапласа)}.$$

Р е ш е н и е. Указанную функцию можно записать несколько другим способом:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & \text{при } x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{при } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Положим $x\leqslant 0$. Выразив функцию распределения через плотность вероятности, найдем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{z}\,dz=\frac{1}{2}e^{x}.$$

Теперь примем $x\geqslant 0$. При этом условии удобно разделить интеграл на два:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=\int\limits_{-\infty}^{0} f(z)\,dz+\int\limits_{0}^{x} f(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{z}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} e^{-z}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-x})=1-\frac{1}{2}e^{-x}.$$

Запишем выражение для функции распределения:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} \text{ при } x\leqslant 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} \text{ при } x\geqslant 0.\end{cases}$$

График $F(x)$ представлен на рис. 3.

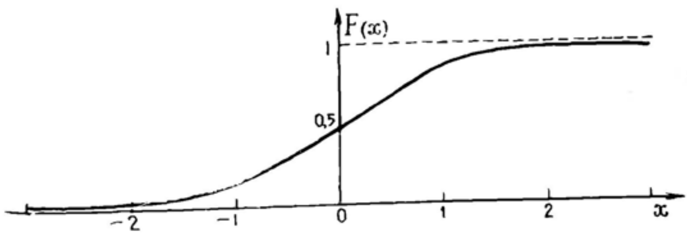


Рис. 3

5.1. Случайная величина задана дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

5.2. Функция распределения равномерно распределенной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины X и числовые характеристики $M(X)$ и $\sigma(X)$.

5.3. Случайная величина задана дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент a.

5.4. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2, \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

5.5. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant -1, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3} & \text{при } -1<x\leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

5.6. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F(t)=1-e^{-\frac{t}{T}},(t\geqslant 0).$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T; б) плотность вероятности $f(t)$.

5.7. Точка помещена наугад внутрь круга радиусом R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти: а) функцию распределения, б) математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра круга.

5.8. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=a+b\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ (-\infty<x<\infty).$$

Определить: а) постоянные a и b, б) плотность вероятности $f(x)$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

5.9. При каком значении a функция

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},(-\infty<x<\infty)$$

является плотностью вероятности случайной величины X? Найти: а) функцию распределения случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (—1, 1). Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

5.10. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

5.11. Каково должно быть значение a, чтобы $f(x)=ae^{-x^2}$ являлось плотностью вероятности случайной величины X, изменяющейся в бесконечных пределах?

5.12. Найти плотность равномерно распределенной случайной величины X, если известны ее числовые характеристики ($M(X)=4$; $\sigma(X)=\sqrt{3}$).

5.13. Для закона распределения N (1, 1) найти вероятность попадания случайной величины в интервал (0, 1).

5.14. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$ для $N(2, 1)$.

5.15. Найти вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(-1, 1)$, если $M(X)=2$, $\sigma(X)=2$.

5.16. Случайная величина X — ошибка измерительного прибора — распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мкм и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что величина ошибки при одном измерении не превзойдет 6 мкм.

5.17. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке распределено по нормальному закону, имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, равное 5 мкм. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более чем на 2 мкм?

ОТВЕТЫ

Глава I. Случайные события

§ 1

1.1. $\frac{1}{2}$. **1.2.** 0,81. **1.3.** $\frac{1}{120}$. **1.4.** а) 0,384; **б)** 0,096; **в)** 0,008. **1.5.** 0,41. **1.6.** а) 0,00033; **б)** $\frac{4}{9}$. **1.7.** $\frac{5}{14}$. **1.8.** $\frac{1}{6^5}$. **1.9.** $\frac{1}{4}$. **1.10.** $\frac{1}{15}$. **1.11** $\frac{2}{n-1}$. **1.12.** $\frac{1}{3}$. **1.13.** $\frac{2}{9}$. **1.14.** а) $\frac{2}{9}$; **б)** $\frac{4}{9}$; **в)** $\frac{4}{81}$. **1.15.** 0,302. **1.16.** а) $\frac{5}{9}$; **б)** $\frac{2}{9}$; **в)** $\frac{7}{9}$. **1.17.** $\frac{1}{15}$. **1.18.** $P_1=0{,}518$; $P_2=0{,}491$. **1.19.** $\frac{3}{38}$. **1.20.** $\frac{(n-m)!\,(n-k)!}{n!\,(n-m-k)!}$. **1.21.** 0,081. **1.22.** 0,079. **1.23.** 0,504. **1.24.** 0,569.

§ 2

2.1. 0,02. **2.2** $\frac{11}{36}$. **2.3.** 0,4. **2.4.** $\frac{44}{45}$. **2.5.** $\frac{2}{3}$. **2.6.** 0,729. **2.7.** 0,12. **2.8.** 0,936. **2.9.** $\frac{91}{216}$. **2.10.** 0,817. **2.11.** а) $\frac{3}{5}$; **б)** $\frac{3}{5}$; **в)** $\frac{3}{10}$. **2.12.** $n \geqslant 2$. **2.13.** 0,5. **2.14.** 0,44. **2.15.** а) 0,243; **б)** 0,0729. **2.16.** 0,16. **2.17.** $P(A)=0{,}544$. **2.18.** Жюри и 1 человек с вероятностью P. **2.19.** 0,936. **2.20.** 0,744. **2.21.** 0,455. **2.22.** $P(2-P)$. **2.23.** $\frac{n^2-n+1}{n^2(n-1)}$. **2.24.** $\frac{m}{m+n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{m}{m+n}\right)^{2k-2}$.

2.25. $\frac{a}{a+b}$. **2.26.** $p_1=\frac{2}{3}$; $p_2=\frac{1}{3}$. **2.27.** $p_1=\frac{4}{7}$; $p_2=\frac{2}{7}$; $p_3=\frac{1}{7}$. **2.28.** 0,17. **2.29.** $\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$. **2.30.** $1-0{,}9999^{100}$. **2.31.** 0,968. **2.32.** $\frac{n-m+1}{n+1}$. **2.33.** $p[p(3-2p)+3p_1(1-p)^2]$. **2.34.** 0,88. **2.35.** 0,875. **2.36.** $\frac{6}{14}$. **2.37.** $\frac{2}{3}$.

§ 3

3.1. 0,86. 3.2. 0,84. 3.3. 0,717. 3.4. 0,875. 3.5. $\frac{13}{132}$. 3.6. $\frac{7}{18}$. 3.7. 0,625. 3.8. 0,089 3.9. $\frac{n+2}{2(n+1)}$. 3.10. 0,2816. 3.11. 0,78. 3.12. 0,594. 3.13. $p_1=0{,}103$; $p_2=0{,}276$; $p_3=0{,}62$. 3.14. $p_1=\frac{18}{59}$; $p_2=\frac{21}{59}$; $p_3=\frac{20}{59}$. 3.15. $p_1=\frac{6}{11}$; $p_2=\frac{5}{11}$ 3.16. 0,214. 3.17. 5. 3.18. 0,998. 3.19. 0,55. 3.20. 0,322. 3.21. $\frac{6}{13}$ 3.22. а) 0,246; б) 0,262; в) 0,000064. 3.23. 0,472. 3.24. 0,766. 3.25. 0,187. 3.26. а) 0,313; б) 0,188; в) 0,5. 3,27. 0,964. 3.28. а) 0,656; б) 0,94. 3.29. а) 0,321; б) 0,243. 3.30. $\frac{1}{2^{2n-k}}C^n_{2n-k}$. 3.31. а) 1; б) 0,387. 3.32. 10. 3.33. 20. 3.34. 5. 3.35. $\frac{17}{25}$. 3.36. 0,0526.

Глава II. Случайные величины

§ 4

4.1.

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

4.2.

X_i	0	1	2	3
P_i	0,064	0,288	0,432	0,216

4.3.

X_i	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

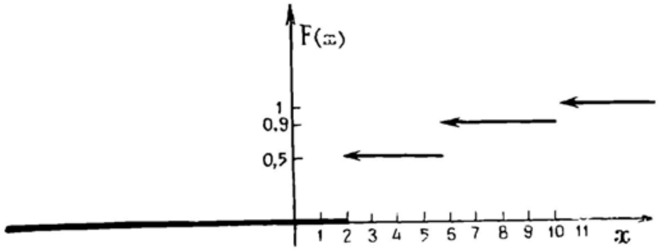
4.4.

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561	0.5905

4.5. $P(X_1=k)=(0{,}6\cdot0{,}4)^{k-1}(0{,}4+0{,}6^2)$; $P(X_2=k)=0{,}6(0{,}6\times 0{,}4)^{k-1}(0{,}6+0{,}4^2)$. 4.6. $P(X_1=k)=(0{,}4\cdot0{,}6)^{k-1}(0{,}6+0{,}4^2)$; $P(X_2=k)=0{,}4(0{,}4\cdot0{,}6)^{k-1}(0{,}4+0{,}6^2)$. 4.7. $P(X=k)=pq^{k-1}$. 4.8. 2,6. 4.9. 2,2. 4.10. а) 2,73; б) 1,4. 4.11. 1,53. 4.12. а) 0,2; б) 2. 4.13. 12,25. 4.14. 6. 4.15. C^2. 4.16. 67,64. 4.17. $x_1=2$; $x_2=3$. 4.18. 0,48. 4.19. $M(X)=1{,}8$; $D(X)=0{,}94$. 4.20. 2,5. 4.21. 2,2. 4.22. 4. 4.23. 2,5. 4.24. $\frac{3}{2}$ 4.25. $\frac{1}{p}$.

4.26. $M(X)=2{,}161$ 4.27. $\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{n} m_i k_i$. 4.29. 21.

4.30.



4.31. 0,00055. **4.32.** а) 0,7498; б) 0,1251. **4.33.** 0,0184. **4.34.** ≈ 3. **4.35.** 0,1562. **4.36.** $P_{3,100} = 0{,}18$; $P_{4,100} = 0{,}09$. **4.37.** а) 0,632; б) 0,184; в) 0,264. **4.38.** 0,4.

§ 5

5.1. а) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi; \end{cases}$ б) $\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

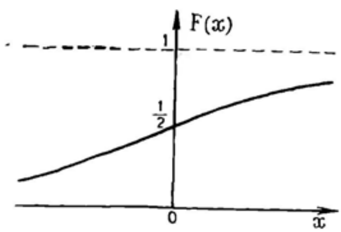
5.2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x > 1; \end{cases}$ $M(X) = \frac{1}{2}$; $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

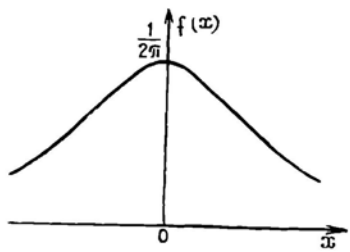
5.3. $\frac{1}{2}$. **5.4.** $\frac{1}{2}$. **5.5.** $\frac{1}{3}$. **5.6.** а) $\frac{1}{e}$; б) $\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$.

5.7. а) $F(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leqslant 0, \\ \left(\frac{r}{R}\right)^2 & \text{при } 0 < r \leqslant R, \\ 1 & \text{при } r > R; \end{cases}$ б) $M(X) = \frac{2}{3} R$; $D(X) = \frac{R^2}{18}$.

5.8. а) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{\pi}$; б) $f(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 4)}$;

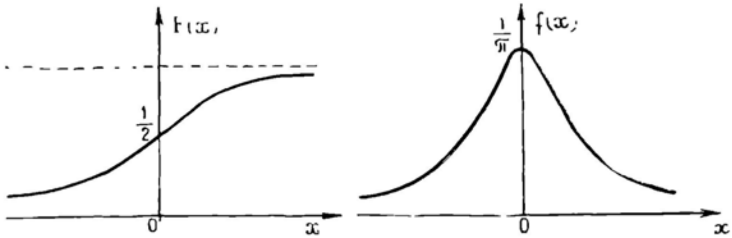
в)





5.9. $a=\frac{1}{\pi}$; а) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; б) $P(|X|<1)=\frac{1}{2}$;

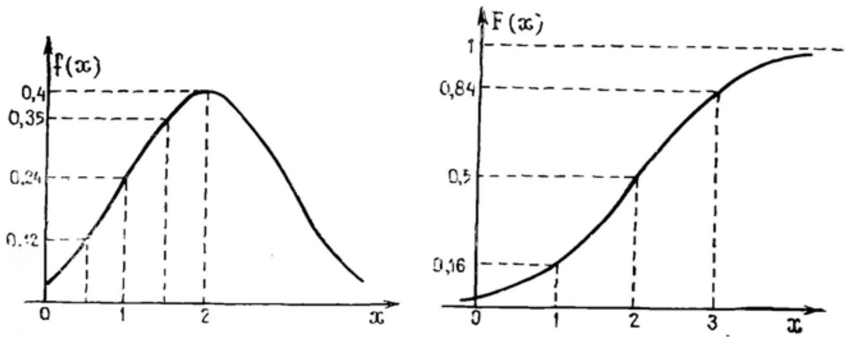
в)



5.10. $M(X)=0$; $D(X)=2$. 5.11. $a=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

5.12. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 1, \\ \frac{1}{6} & \text{при } 1<x\leqslant 7, \\ 0 & \text{при } x>7. \end{cases}$ 5.13. 0,3413.

5.14.



5.15. 0,2417. 5.16. 0,8664. 5.17. $n\geqslant 7$.

Приложение I

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz.$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4881	3,60	0,499841
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Значения квадратных корней

x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$
1,0	1,00	3,16	4,0	2,00	6,33	7,0	2,65	8,37
1,1	05	32	4,1	03	40	7,1	67	43
1,2	10	46	4,2	05	48	7,2	68	49
1,3	14	61	4,3	07	56	7,3	70	54
1,4	18	74	4,4	10	63	7,4	72	60
1,5	1,23	3,87	4,5	2,12	6,71	7,5	2,74	8,66
1,6	27	4,00	4,6	15	78	7,6	76	72
1,7	30	12	4,7	17	86	7,7	78	78
1,8	34	24	4,8	19	93	7,8	79	83
1,9	38	36	4,9	21	7,00	7,9	81	89
2,0	1,41	4,47	5,0	2,24	7,07	8,0	2,83	8,94
2,1	45	58	5,1	26	14	8,1	85	9,00
2,2	48	69	5,2	28	21	8,2	86	06
2,3	52	80	5,3	30	28	8,3	88	11
2,4	55	90	5,4	32	35	8,4	90	17
2,5	1,58	5,00	5,5	2,35	7,42	8,5	2,92	9,22
2,6	61	10	5,6	37	48	8,6	93	27
2,7	64	20	5,7	39	55	8,7	95	33
2,8	67	29	5,8	41	62	8,8	97	38
2,9	70	39	5,9	43	68	8,9	98	43
3,0	1,73	5,48	6,0	2,45	7,75	9,0	3,00	9,49
3,1	76	57	6,1	47	81	9,1	02	54
3,2	79	66	6,2	49	87	9,2	03	59
3,3	81	75	6,3	51	94	9,3	05	64
3,4	84	83	6,4	53	8,00	9,4	07	68
3,5	1,87	5,92	6,5	2,55	8,06	9,5	3,08	9,75
3,6	90	6,00	6,6	57	12	9,6	10	80
3,7	92	08	6,7	59	19	9,7	11	84
3,8	95	16	6,8	61	25	9,8	13	90
3,9	98	25	6,9	63	31	9,9	15	95
						10,0	3,16	10,00

Приложение 4

Значения e^{-x}

x	e^{-x}
1	0,36788
2	0,13534
3	0,04979
4	0,01832
5	0,00674
6	0,00248
7	0,00091
8	0,00034
9	0,00012
10	0,00005

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., 1969.
2. Володин Б. Г. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., 1970.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1977.
4. Емельянов Г. В., Скитович В. Н. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л., 1967.
5. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М., 1971.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1967, т. 1.
7. 100 задач по теории вероятностей. Воронеж, 1969.