

А. Г. БУРГВИЦ и Г. А. ЗАВЬЯЛОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ
ДВИЖЕНИЯ ВАЛОВ
В ПОДШИПНИКАХ
ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОЕНИЕ*
Москва 1964

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга содержит основы теории устойчивости движения валов в подшипниках жидкостного трения и методику их графоаналитического расчета на устойчивость. Особое внимание уделено нестационарным явлениям в масляном слое. Описаны причины возникновения и способы устранения колебаний валов быстроходных машин, вызываемых действием масляной пленки подшипников конечной длины; рассмотрены случаи применения коротких подшипников и дана теория двухцентровых подшипников; приводятся карта расположения областей устойчивых режимов в зависимости от величин рабочих параметров машин и пример расчета на устойчивость.

Книга предназначена для инженеров-конструкторов и научных работников, связанных с конструированием быстроходных машин, а также может быть использована преподавателями и студентами старших курсов вузов.

В процессе эксплуатации паровых и газовых турбин, турбокомпрессоров и роторных машин других видов часто наблюдаются усиленные вибрации роторов, нарушающие работу машины. В связи с этим изучение явлений, вызывающих неустойчивую работу роторов под влиянием масляного слоя подшипников скольжения, относится к одной из важных задач машиностроения.

Предлагаемая работа является первым обобщением некоторых результатов, достигнутых в области исследования колебаний валов, вращающихся в подшипниках скольжения. В ней рассматриваются нестационарные процессы, происходящие в масляном слое, определяются силы, действующие на шейку вала, а также границы области устойчивых равновесных состояний и собственные частоты колебаний системы масляный слой—вал. Результаты исследований характеризуются безразмерными параметрами, позволяющими в общем виде оценить влияние отдельных величин на устойчивость системы. На основании этих зависимостей разработан графоаналитический метод расчета на устойчивость движения роторов, опирающихся на подшипники скольжения.

Данный метод может быть использован для качественной оценки устойчивой работы роторов при их проектировании, а также для определения путей устранения усиленных вибраций роторов в условиях эксплуатации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВАЛОВ В ПОДШИПНИКАХ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Вспомним некоторые основные соотношения гидродинамики вязкой жидкости, которые будут использованы в дальнейшем.

Закон сохранения массы, открытый М. В. Ломоносовым, в гидродинамике выражается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0.$$

Для несжимаемой жидкости, плотность которой во всех точках потока одинакова, уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0 \quad (1)$$

или в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где v_x , v_y и v_z — компоненты скоростей частиц жидкости.

Уравнение Навье—Стокса выражает закон сохранения импульса, в векторной форме для несжимаемой вязкой жидкости оно запишется в виде

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + (\bar{\Omega} \bar{V}) = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \operatorname{rot} \bar{\Omega}, \quad (3)$$

где $\bar{\Omega} = \operatorname{rot} \bar{V}$ — вектор вихря, определяемого полем скоростей движущейся жидкости;

\bar{F} — вектор массовых сил;

p — гидродинамическое давление, т. е. среднее давление трех нормальных составляющих для каждой из трех взаимно-перпендикулярных плоскостей в точке.

Для установившегося течения вязкой жидкости, когда конвективные члены и массовые силы пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости, уравнение (3) принимает вид

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p = - \operatorname{rot} \bar{\Omega}. \quad (4)$$

Если движение жидкости рассматривать в плоскости xOy , то $\Omega_x = 0$; $\Omega_y = 0$, а

$$\Omega_z = \Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Тогда на основании уравнения (4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение неразрывности (2) для плоского движения, записанное в форме

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

показывает, что существует функция тока W , с помощью которой проекции скорости частицы жидкости выражаются формулами

$$v_x = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial W}{\partial x}. \quad (6)$$

Выведем уравнение, которому должна удовлетворять функция тока W . Обобщенные уравнения Гельмгольца для вихревых движений вязкой несжимаемой жидкости могут быть записаны так [28]:

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (\bar{\Omega}\Delta)\bar{V} + \nu\Delta\bar{\Omega}. \quad (7)$$

При плоском движении жидкости, когда $v_z = 0$, а v_x и v_y не зависят от z , из трех составляющих вихря только значение Ω_z , отличное от нуля и равное, с учетом формулы (6),

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta W. \quad (8)$$

Уравнение (7) сводится к следующему:

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \nu \Delta \Omega_z, \quad (9)$$

так как

$$(\bar{\Omega}\Delta)\bar{V} = \Omega_z \frac{\partial v}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Подставляя в уравнение (9) значения v_x , v_y и Ω_z из выражений (6) и (8), получим

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Delta W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Delta W}{\partial y} = \nu \Delta \Delta W. \quad (10)$$

Этому уравнению должна удовлетворять функция тока W при двумерном неустановившемся течении вязкой несжимаемой жидкости.

Для установившегося движения тонкого слоя потока смазки предполагают, что силы инерции малы по сравнению с силами вязкости. Поэтому, пренебрегая ими, получают для функции тока бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta W = 0. \quad (11)$$

Уравнение плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в полярных координатах $r-\theta$ (массовыми силами пренебрегаем)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ &\quad + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (13)$$

показывает, что существует функция тока W , которая связана со скоростями v_r и v_θ соотношениями

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{\partial W}{\partial r}. \quad (14)$$

Уравнение (10) в полярных координатах

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta W}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial \Delta W}{\partial \theta} = \nu \Delta \Delta W. \quad (15)$$

Если не учитывать в уравнении (12) конвективные члены, то

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} = \nu \Delta \Delta W, \quad (16)$$

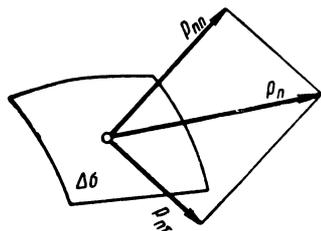
где оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Поверхностные силы, действующие на выделенную в среде частицу жидкости, характеризуются вектором p_n , определяемым как напряжение поверхностной силы. Составляющие этого вектора называются нормальным (p_{nn}) и касательным (p_{nt})

напряжениями на элементарной площадке $\Delta\sigma$ с нормалью n (фиг. 1). Для движущейся вязкой жидкости нормальное и касательное напряжения на любой площадке с внешней нормалью n представляются в виде $p_{nn} = -p + \tau_{nn}$ и $p_{n\tau} = \tau_{n\tau}$. Величины τ_{nn} и $\tau_{n\tau}$ зависят от наличия вязкости, и при их исчезновении величина p_n принимает значение давления p в идеальной жидкости.

Если положение жидких частиц определяется по отношению к некоторой прямоугольной системе координат xuz , то компоненты напряжений можно представить в виде [39]



$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \tau_{xx}; & p_{yy} &= -p + \tau_{yy}; \\ p_{zz} &= -p + \tau_{zz}; & p_{xy} &= \tau_{xy}; \\ p_{yz} &= \tau_{yz}; & p_{zx} &= \tau_{zx}, \end{aligned}$$

где первые три выражения носят название нормальных, а остальные — касательных напряжений.

Фиг. 1. Напряжения на элементарной площадке.

Связь между компонентами напряжений и скоростей деформаций для несжимаемой вязкой жидкости в прямоугольных декартовых координатах устанавливается следующая:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где μ — коэффициент вязкости.

Если направление течения жидкости параллельно оси Ox (при этом составляющие скорости $v_y = v_z = 0$, а скорость течения v_x , равная v , есть функция только координаты y), выражения для напряжений принимают вид

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ p_{xy} &= \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

В полярных координатах они запишутся как

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ p_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

Основные положения гидродинамической теории трения в машинах были изложены в трудах Н. П. Петрова [33].

Н. П. Петров научно объяснил физическую сущность процесса, наблюдающегося при трении смазанных частей машин. Он показал, что величина силы трения зависит от внутреннего трения смазывающей жидкости и от толщины смазывающего слоя между шипом и подшипником. Н. П. Петров впервые установил, что при вращении шипа в подшипнике смазывающий слой разделяет трущиеся твердые поверхности, не допуская их соприкосновения. Это открытие явилось началом нового периода в развитии науки о трении.

На основании глубокого анализа работ о сопротивлении жидкости, проведенных за два столетия, начиная от «Математических начал натуральной философии» Ньютона (1687 г.) до исследования Д. И. Менделеева «О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании» (1880 г.), Н. П. Петров сформулировал закон внутреннего трения жидкости. Этот закон стал основой гидродинамической теории трения в машинах.

Главную часть гидродинамической теории трения Н. П. Петрова составляет вывод формулы для определения величины силы трения в зависимости от основных условий работы трущихся частей и опытная проверка этой формулы. Вывод формулы был выполнен применительно к наиболее распространенному в машинах узлу — шипу, вращающемуся в неподвижном подшипнике. Учитывая трудности математического характера, возникающие при рассмотрении реального процесса, Н. П. Петров начал теоретические исследования с «идеальной» схемы. Он решил задачу об определении силы трения на поверхности вертикального кругового цилиндра безграничной длины, вращающегося внутри жидкости, заключенной в другом, соосном круговом цилиндре.

Не приводя здесь решения Н. П. Петрова, проанализированного подробно С. М. Таргом [39] и Н. А. Слезкиным [37], отметим, что он вывел дифференциальное уравнение движения жидкости в зазоре между двумя соосными круговыми цилиндрами и нашел решение, которое позволило вычислить величину главного момента сил трения, приложенных к внутреннему вращающемуся цилиндру при неподвижном внешнем цилиндре,

$$M = \mu \frac{S u_1 r_1}{h + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}, \quad (20)$$

где S — полная поверхность соприкосновения шипа и смазки; u_1 — окружная скорость на поверхности шипа; r_1 — радиус внутреннего цилиндра; h — толщина слоя смазки; λ_1 и λ_2 — коэффициенты внешнего трения между слоем смазки, шипом и подшипником.

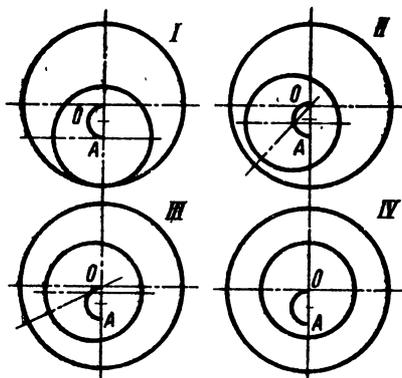
Из формулы (20) легко получить величину силы трения на поверхности шипа:

$$F = \mu \frac{Su_1}{h + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}} \quad (21)$$

Это выражение стало известно как формула Н. П. Петрова. В случае полного прилипания смазки к шипу и подшипнику ($\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$)

$$F = \mu \frac{Su_1}{h} \quad (22)$$

Как уже отмечалось, Н. П. Петров в исследованиях принимал, что между шипом и подшипником, расположенными концентрично, существует некоторый зазор, заполненный смазкой.



Фиг. 2. Перемещение шейки подшипника при изменении скорости вращения.

Ознакомившись с работами Н. П. Петрова, проф. Н. Е. Жуковский в статье «О гидродинамической теории трения хорошо смазанных твердых тел» [16] впервые отметил, что центр шипа под нагрузкой смещается относительно центра подшипника. Н. Е. Жуковский высказал предположение, что в результате эксцентричного расположения поверхностей шипа и подшипника в масляном слое появляется поддерживающая сила, т. е. создается равновесие сил

нагрузки и несущей способности шипа.

До начала вращения, когда число оборотов вала равно нулю, шип лежит на поверхности подшипника и его центр оказывается ниже центра подшипника. Благодаря разности величин радиусов шипа и подшипника в зазоре между их поверхностями размещается смазка. По мере увеличения скорости вращения вала шип начинает отделяться от поверхности вкладыша, опираясь на масляный слой. При этом он действует как насос, нагнетая смазку в сужающуюся часть зазора (фиг. 2).

Слой масла, прочно прилипшие к поверхности вала, увлекают за собой последующие.

В сужающейся части зазора образуется масляный клин, в котором развивается гидродинамическое давление, не одинаковое по величине в разных его сечениях. Это давление отжимает шип и позволяет ему выдерживать внешнюю нагрузку. Линия, проходящая через центр шипа и центр подшипника (линия центров), при вращении шипа поворачивается в сторону его враще-

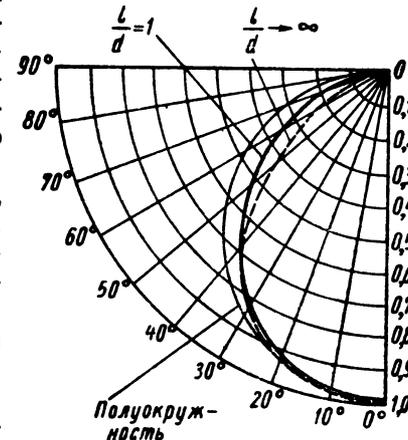
ния на такой угол, при котором реакция смазочного слоя на шип уравновешивает приложенную к нему внешнюю нагрузку. По мере изменения режима работы будут изменяться и равновесные положения центра шипа.

При постепенном возрастании числа оборотов шипа центр его все более и более приближается к центру подшипника, происходит не только вертикальный подъем, но и боковое смещение шипа. С увеличением числа оборотов до бесконечности или при уменьшении нагрузки до нуля центр шипа совместится с центром подшипника. Траектория АО, которую описывает центр шипа в подшипнике, является геометрическим местом возможных равновесных положений шипа. Эта траектория определяется как кривая подвижного равновесия. Приблизительно она может быть принята за полуокружность с диаметром, равным радиальному зазору. Внешний вид кривой в значительной мере зависит от расположения границ смазочного слоя, а также от отношения длины подшипника к его диаметру.

Примеры кривых подвижного равновесия, приводимые Г. Фогельполем [68] по данным Г. Сассенфельда и А. Вальтера [64], изображены на фиг. 3.

В 1883 г., через полгода после опубликования работы Н. П. Петрова, появился отчет инженера Б. Тоуэра об опытах над хорошо смазанными телами*, в котором Тоуэр повторяет мнение Н. П. Петрова, что трение хорошо смазанных машинных частей происходит в смазывающем слое и представляет собой гидродинамическую задачу. Выступая в 1886 г. с теоретической обработкой опытов Б. Тоуэра, О. Рейнольдс исследовал движение жидкости в зазоре между шипом и подшипником, используя дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Метод, примененный Рейнольдсом, не требовал упрощающих предположений о постоянстве гидродинамического давления во всех точках смазывающего слоя и о соосности шипа и подшипника.

Дифференциальные уравнения Рейнольдса для смазочного слоя, как показал Н. А. Слезкин [38], могут быть получены из дифференциальных уравнений установившегося движения не-



Фиг. 3. Кривые подвижного равновесия.

* „Engineering“ No 933, 1883.

сжимаемой вязкой жидкости, в которых не учтено действие массовых сил, если отбросить все квадратичные члены инерции и второстепенные слагаемые сил трения.

Записав применительно к тонкому слою смазки исходные уравнения в безразмерном виде, Н. А. Слезкин показал, что они содержат два безразмерных параметра ε и Re . Параметр ε представляет собой отношение толщины слоя к среднему радиусу кривизны поверхности, а Re — число Рейнольдса, оценивающее отношение сил инерции к силам вязкости. Если считать ε величиной заведомо малой и принять, что $Re \approx \frac{1}{\varepsilon}$, а затем сохранить в исходных соотношениях лишь слагаемые наибольшей величины, то, перейдя к размерным величинам, получим приближенные уравнения Рейнольдса для смазочного слоя:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Уравнения Рейнольдса предполагают, что параллельная радиусу скорость v_y крайне мала по сравнению со скоростью v_x в направлении относительного движения в какой-нибудь точке поверхности шипа и скоростью v_z в направлении, параллельном оси шипа.

Принятые допущения показывают, что в тонком смазочном слое наибольшим по величине будет напряжение давления и что оно не изменяется по толщине тонкого слоя. При плоскопараллельном течении вязкого слоя уравнения (23) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

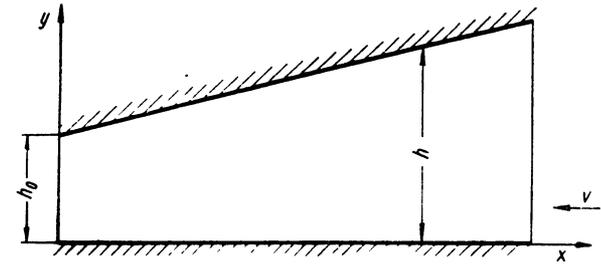
Рассмотрим течение вязкой жидкости между двумя пластинами. Верхняя, наклонная, ограниченной длины, неподвижна (фиг. 4), а нижняя, горизонтальная, неограниченной длины, перемещается со скоростью v . Расстояние между пластинами переменное.

Условия для скоростей на границах масляного слоя, учитывая, что смазка полностью прилипает к пластинам,

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y=0 \quad v_x &= -v, \quad v_y=0; \\ \text{при } y=h \quad v_x &= 0, \quad v_y=0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из второго уравнения системы (24) следует, что p не зависит от y : поэтому, интегрируя первое уравнение (24), получим

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2.$$



Фиг. 4. Течение вязкой жидкости между двумя пластинами.

Определив постоянные интегрирования C_1 и C_2 по условиям (25), имеем

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) - \frac{v}{h} (h - y). \quad (26)$$

Для определения $\frac{\partial p}{\partial x}$ используем третье из уравнений (24), имея в виду условия (25). Тогда $0 = - \int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x dy$, так как при $y=h$ $v_x=0$.

Подставив в последнее выражение значение v_x из формулы (26) и проинтегрировав еще раз, найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6\mu v}{h^3} (h_0 - h), \quad (27)$$

где h_0 представляет собой значение h , при котором давление имеет максимальную величину, так как при $h=h_0$ $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} < 0$.

Уравнение (27) используется Х. Гуммелем [57] для определения давления в масляном слое полуохватывающего (половинного) цилиндрического подшипника при условии, что величина h мала по сравнению с радиусами подшипника r_1 и шипа r_0 .

Величина h в любой точке, определяемой углом Θ (фиг. 5), принимая, что $\cos \gamma \approx 1$,

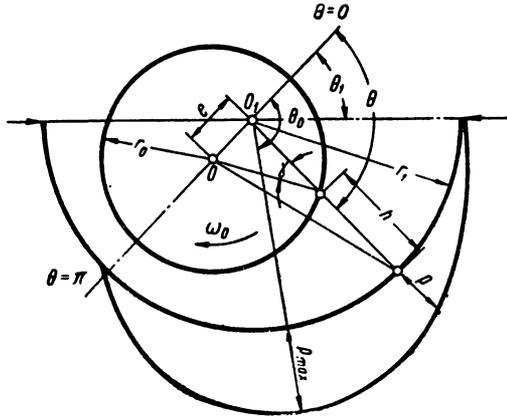
$$h = r_1 - r_0 \cos \gamma - e \cos(180^\circ - \Theta) = r_1 - r_0 + e \cos \Theta.$$

Окончательно

$$h = (r_1 - r_0) \left(1 + \frac{e}{r_1 - r_0} \cos \Theta \right) = \delta (1 + x \cos \Theta). \quad (28)$$

Для толщины смазочного слоя, при которой $p = p_{\max}$,

$$h_0 = \delta (1 + x \cos \Theta_0). \quad (29)$$



Фиг. 5. Элементы половинного подшипника.

Считая, что в верхнем вкладыше нет избыточного давления, давление в масляном клине подшипника

$$p = \frac{6\mu\omega_0}{\psi^2} \left[(1 + x \cos \Theta_0) \int_{\pi}^{\Theta_1} \frac{d\Theta}{(1 + x \cos \Theta)^3} - \int_{\pi}^{\Theta_1} \frac{d\Theta}{(1 + x \cos \Theta)^2} \right]. \quad (30)$$

Чтобы выделить безразмерные величины, уравнение запишем в форме

$$\frac{p\psi^2}{\mu\omega_0} = 6 \left[(1 + x \cos \Theta_0) \int_{\pi}^{\Theta_1} \frac{d\Theta}{(1 + x \cos \Theta)^3} - \int_{\pi}^{\Theta_1} \frac{d\Theta}{(1 + x \cos \Theta)^2} \right], \quad (31)$$

которая дает возможность построить кривые распределения давления в масляном слое.

Вертикальная и горизонтальная составляющие поддерживающей силы масляного клина для элемента длиной l , вырезанного

из бесконечно длинного подшипника, определяются по формулам (см. Фиг. 5)

$$\left. \begin{aligned} P_v &= \int_{\Theta_1}^{\pi} p \sin(\Theta - \Theta_1) l r_0 d\Theta = p_{cp} l 2r_0, \\ P_h &= \int_{\Theta_1}^{\pi} p \cos(\Theta - \Theta_1) l r_0 d\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

В безразмерном виде

$$\left. \begin{aligned} P'_v &= \int_{\Theta_1}^{\pi} \frac{p\psi^2}{2\mu\omega_0} \sin(\Theta - \Theta_1) d\Theta = \frac{\psi^2}{\mu\omega_0} \cdot \frac{P_v}{2r_0 l} = \frac{\psi^2}{\mu\omega_0} p_{cp}, \\ P'_h &= \int_{\Theta_1}^{\pi} \frac{p\psi^2}{2\mu\omega_0} \cos(\Theta - \Theta_1) d\Theta = \frac{\psi^2}{\mu\omega_0} \frac{P_h}{2r_0 l}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Значения P'_v и P'_h были подсчитаны Х. Гуммелем [57] для большого количества положений центра вала. При построении кривых $P'_v = \text{const}$ и $P'_h = \text{const}$ образуется силовое поле масляного клина подшипника, представленное как совокупность „изобар“ на фиг. 6.

Для вертикально нагруженного вала $P'_h = 0$. Следовательно, кривая $P'_h = 0$ является геометрическим местом равновесных положений центра вала. Такой кривой подвижного равновесия, как показали А. Стодола [65] и Х. Гуммель [57], может быть принята полуокружность с радиусом $\delta/2$.

Безразмерная величина $\frac{p_{cp}\psi^2}{\mu\omega_0}$, отвечающая среднему нормальному давлению, называется коэффициентом нагруженности или грузоподъемности подшипника.

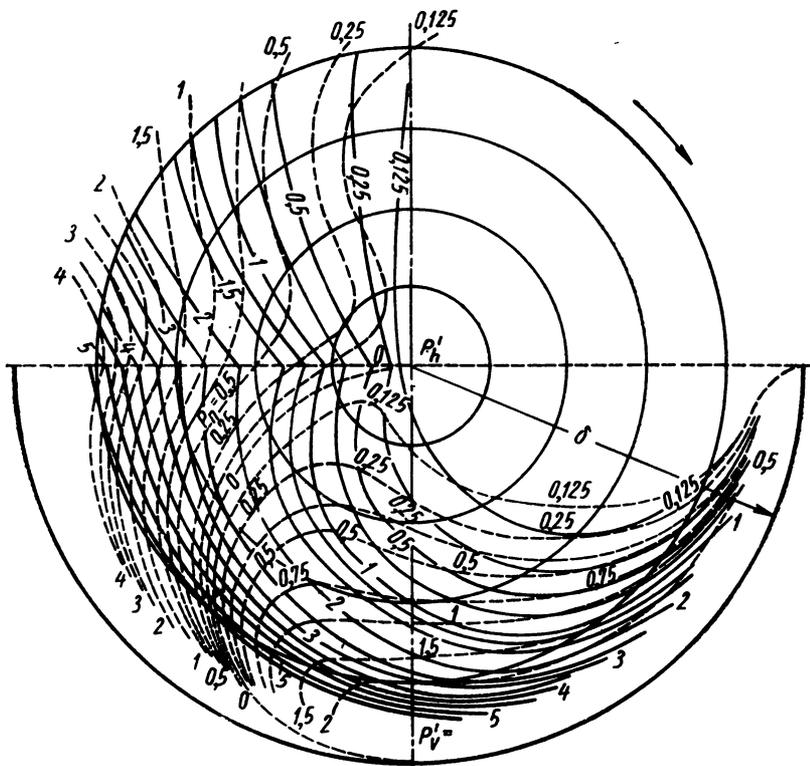
Более строгое решение задачи по определению давления, а значит и поддерживающей силы масляного слоя, предложено А. Зоммерфельдом и дается в работе [29].

На основании выражений (5), (6), (8).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial(\Delta W)}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial(\Delta W)}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Исключая из этих уравнений p , получим уравнение (11) для определения функции тока W . Перейдя к полярным координатам, на основании формул (19) и (34), будем иметь

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial}{\partial r} (\Delta W), \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial (\Delta W)}{\partial \theta}. \quad (35)$$



Фиг. 6. Силовые поля масляного клина.

Чтобы определить функцию W , принимаем

$$\left. \begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\theta = v \text{ при } r = r_0; \\ v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \text{ при } r = r_0 + h. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Здесь v — окружная скорость шипа; h — толщина смазочного слоя, изменяющаяся по окружности шипа.

Учитывая зависимости (14), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} = v, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \text{ при } r = r_0; \\ \frac{\partial W}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \text{ при } r = r_0 + h. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

На основании уравнения (11) и граничных условий (36) и (37) можно определить функцию тока W , а затем, пользуясь уравнениями (35), найти закон распределения гидродинамического давления в смазочном слое. При определении функции тока Зоммерфельд использует то обстоятельство, что эта величина изменяется весьма быстро в радиальном направлении, а ее производная по r на очень малом протяжении h , имеющем порядок δ , меняется от v до 0. В то же время функция тока в направлении окружности шипа меняется чрезвычайно медленно. Поэтому Зоммерфельд пренебрегает величиной $\frac{\partial W}{r \partial \theta}$ и считает W в первом приближении только функцией r .

На основании сделанных допущений функция тока определится уравнением

$$\Delta \Delta W = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W}{\partial r} = 0; \quad (38)$$

после трехкратного интегрирования получим

$$W = \frac{a}{2} r^2 \log r + (b - 2a) \frac{r^2}{4} + c \log r + d, \quad (39)$$

где a , b , c и d — постоянные интегрирования.

Из первого уравнения системы (35) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 2a\mu, \quad (40)$$

где

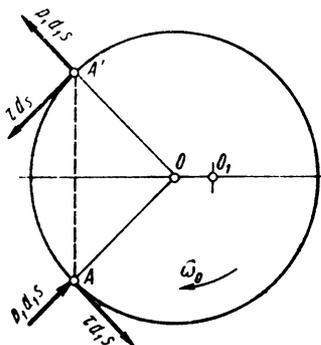
$$2a = 6 \frac{h - h_0}{h^3} r v - \frac{4h - 3h_0}{h^2} v - \frac{v}{r}.$$

Функция W , определяемая уравнением (39), удовлетворяет приближенному уравнению (38), но не точному уравнению (11).

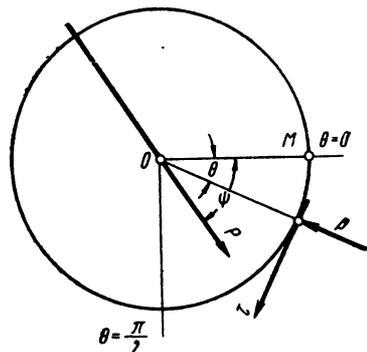
Следует отметить, что величина a будет величиной порядка δ^{-2} . Этот же порядок имеет и производная $\frac{\partial p}{\partial \theta}$. Предложенный Зоммерфельдом метод определения сил, действующих на шип со стороны смазочного слоя, получил широкое распространение. Основным допущением его является предположение, что смазочный слой полностью охватывает шип и при этом давление в нагруженной и ненагруженной областях подшипника распределяется симметрично. Таким образом, Зоммерфельд предположил, что в ненагруженной области существуют отрицательные давления, равные по величине положительным в нижней, нагруженной части подшипника.

Силы, действующие на шип со стороны смазки, складываются из внутреннего давления p и трения τ ; первое направлено радиально, второе по касательной к шипу. Давление в каждом месте масляного слоя состоит из некоторой части p_0 , постоянной

по окружности шипа, и некоторой изменяющейся части p_1 , которая, если рассматривать ее отдельно, отрицательна вдоль верхней половины вкладыша, т. е. усилие действует от шипа наружу, и положительна для нижней половины, т. е. усилие направлено внутрь шипа (фиг. 7). В каждой двух симметричных точках A' и A соответствующие величины растягивающего усилия и давления равны. На основании таких предположений Зоммерфельд пришел к выводу, что шип должен смещаться перпендикулярно направлению нагрузки (линия центров перпендикулярна нагрузке), причем место наименьшего расстояния



Фиг. 7. Элементарные силы, действующие на шип.



Фиг. 8. Силы, действующие на шип и отнесенные к единице длины шипа.

между шипом и вкладышем будет смещено относительно направления нагрузки в сторону вращения шипа.

Составим уравнение равновесия для шипа, нагруженного силой P , отнесенной к единице длины шипа и наклонной к радиусу OM под углом ψ (фиг. 8). Уравнения равновесия в направлениях $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$

$$\left. \begin{aligned} P \cos \psi - \int p \cos \theta ds - \int \tau \sin \theta ds &= 0, \\ P \sin \psi - \int p \sin \theta ds + \int \tau \cos \theta ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

При интегрировании по частям, получим

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta &= p \sin \theta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \sin \theta d\theta, \\ \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta &= -p \cos \theta \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \cos \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Заменяв ds на $r d\theta$ и используя уравнения (42), имеем

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dp}{d\theta} - \tau \right) \sin \theta d\theta &= -\frac{P}{r} \cos \psi, \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{dp}{d\theta} - \tau \right) \cos \theta d\theta &= \frac{P}{r} \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Так как $\frac{dp}{d\theta}$ и τ — четные функции θ , то произведение их разности на $\sin \theta$ есть нечетная функция θ , которая после интегрирования ее между 0 и 2π или между $-\pi$ и $+\pi$ обращается в нуль. Следовательно, первое из уравнений (43) удовлетворяется только при $\psi = \frac{\pi}{2}$. Это соответствует принятому Зоммерфельдом положению о перпендикулярности направления нагрузки и линии центров.

Разность $\left(\frac{dp}{d\theta} - \tau \right)$, входящая во второе уравнение (43), на основании уравнения (40) заменяется величиной $\frac{dp}{d\theta}$, так как число $\tau = -\mu v \frac{4h - 3h_0}{h^2}$ сокращается с одним из слагаемых правой части выражения (40).

Принимая во внимание также, что $\psi = \frac{\pi}{2}$, представим второе уравнение (43) в виде

$$6\mu r v \int_0^{2\pi} \frac{h - h_0}{h^3} \cos \theta d\theta = \frac{P}{r}$$

или, учитывая выражение (28), получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2} - \frac{h_0}{\delta} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} = \frac{\delta^2 P}{6\mu r^2 v}. \quad (44)$$

После интегрирования выражения (44) имеем

$$\frac{2\pi\chi}{\sqrt{1 - \chi^2} (2 + \chi^2)} = \beta, \quad (45)$$

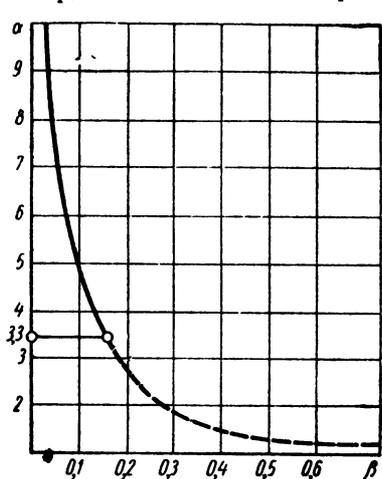
где

$$\beta = \frac{\delta^2 P}{6\mu r^2 v}. \quad (46)$$

Равенство (46), записанное в безразмерной форме, устанавливает зависимость между положением шипа в подшипнике (χ), с одной стороны, и нагрузкой на шип (P), окружной скоростью (v), размерами вкладыша (r , δ) и вязкостью смазывающей жидкости (μ), — с другой.

По гипотезе Зоммерфельда шип при равновесном состоянии располагается в подшипнике так, что линия центров перпендикулярна направлению действующей нагрузки. Следовательно, при вертикальной нагрузке центр шипа расположится на горизонтальном диаметре подшипника. Этот вывод отличается от выводов А. Стодолы [65] и Х. Гуммеля [57], согласно которым при равновесии центр шипа располагается на кривой подвижного равновесия (см. фиг. 6), достаточно точно приближающейся к полуокружности радиусом $\delta/2$.

Физический смысл уравнения (45) изображается кривой с координатами в виде безразмерных чисел α и β^* (фиг. 9). Здесь



Фиг. 9. Область применимости гипотезы Зоммерфельда.

заполнено смазкой при условии $\alpha > 3,303$, если $\beta < 0,153$.

Часть кривой, соответствующая значениям α и β , для которых теория Зоммерфельда неприменима, выделена на фиг. 9 пунктиром. Как показал анализ, результаты Зоммерфельда не могут быть распространены на широкую область значений относительных эксцентриситетов $\chi > 0,33$ ($\chi = \frac{1}{\alpha}$), соответствующих наиболее распространенным режимам работы подшипников. Тем не менее, гипотеза Зоммерфельда используется при анализе устойчивости равновесного положения шипа, например, в работах Д. Робертсона [63], А. Хегга [52], Г. Порицкого [62].

Наиболее полное и точное решение задачи по определению давления в смазочном слое подшипника предложено в 1904 г. Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным [16]. В нем течение смазки

величина $\alpha = \frac{\delta}{e} = \frac{1}{\chi}$, а величина β определяется формулой (46). Как видно из графика, при очень малой нагрузке P или при чрезвычайно большой скорости v величина β близка к нулю, значение α стремится к бесконечности, а эксцентриситет e стремится к нулю, что соответствует «идеальной» схеме Н. П. Петрова. Когда $\alpha = 1$, β стремится к бесконечности, при этом нагрузка равна бесконечности или скорость равна нулю. Анализ, проведенный Л. С. Лейбензоном [29] и подтвержденный С. М. Таргом [39], показал, что все пространство между шипом и подшипником будет полностью

принимается плоскопараллельным, полностью сохраняются все члены, зависящие от вязкости, и отбрасываются инерционные. Исходными служат уравнения движения вязкой жидкости (5) и бигармоническое уравнение (11) для функции тока. Впервые примененный переход к биполярным координатам позволил учесть кривизну масляного слоя в зазоре между шипом и подшипником, которая не принималась во внимание Рейнольдсом.

Каждой точке в плоскости xOy соответствует некоторое комплексное число $z = x + iy$, где x — вещественная часть и y — мнимая. Если осуществить конформное преобразование плоскости xOy с помощью функции

$$z = ai \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2}, \quad (47)$$

то $\zeta = \xi + i\eta$ — комплексное число, определяющее положение точки в преобразованной плоскости $\xi O'\eta$.

Координаты ξ и η могут быть найдены следующим образом.

— Приведем выражение (47) к виду

$$\ln \frac{z-a}{z+a} = i\zeta \quad (48)$$

или

$$e^{i\zeta} = e^{i(\xi+i\eta)} = e^{-\eta} \cdot e^{i\xi} = \frac{z-a}{z+a},$$

где $\frac{z-a}{z+a}$ — некоторое комплексное число.

Из равенства (48) следует, что

$$e^{-\eta} = \left| \frac{z-a}{z+a} \right| \quad \text{и} \quad \xi = \arg \frac{z-a}{z+a}.$$

На оси Ox (фиг. 10) отметим два полюса F и F' на расстояниях $+a$ и $-a$ от начала координат. Модули и аргументы комплексных чисел $z-a$ и $z+a$ соответственно равны

$$|z-a| = \rho, \quad \arg(z-a) = \theta;$$

$$|z+a| = \rho', \quad \arg(z+a) = \theta'.$$

Следовательно, $\left| \frac{z-a}{z+a} \right| = \frac{\rho}{\rho'} = e^{-\eta}$,

т. е.

$$\eta = \ln \frac{\rho'}{\rho} \quad (49)$$

и

$$\arg \frac{z-a}{z+a} = \theta - \theta' = \xi,$$

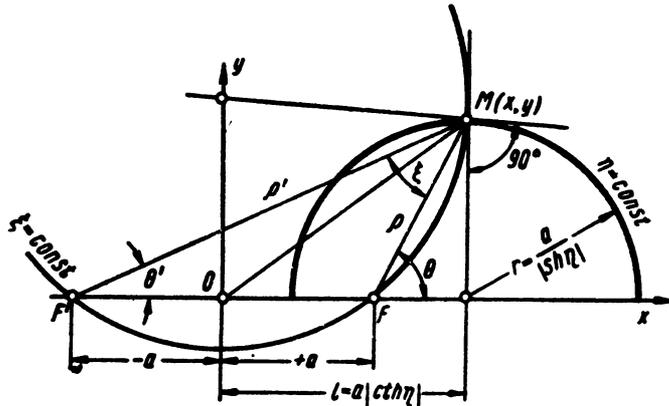
* Здесь сохранены обозначения, принятые А. Зоммерфельдом; см. работу [29].

т. е.

$$\xi = \theta - \theta'. \quad (50)$$

Каждой точке (ξ, η) соответствует определенная точка (x, y) , которая в плоскости xOy определяется как результат пересечения линий $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ (фиг. 10).

Линиями $\xi = \text{const}$ в плоскости xOy будут окружности, вмещающие хорды $FF' = 2a$ с диаметрами, расположенными на оси Oy ; линиями $\eta = \text{const}$ в плоскости xOy — окружности [42], определяемые уравнением $(x - a \text{cth} \eta)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\text{sh}^2 \eta}$.



Фиг. 10. Положение точки M в плоскости xOy .

Радиусы этих окружностей

$$r = \frac{a}{|\text{sh} \eta|}, \quad (51)$$

а их центры лежат на оси Ox на расстоянии

$$l = a |\text{cth} \eta| \quad (52)$$

от начала координат O .

Таким образом, семействам линий $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ в плоскости xOy будут соответствовать семейства ортогональных окружностей, причем окружности одного и того же семейства расположены эксцентрично одна по отношению к другой. Величины ξ и η называют биполярными координатами. Между прямоугольными и биполярными координатами существует следующая зависимость:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \text{sh} \eta}{\text{ch} \eta - \cos \xi}, \\ y &= \frac{a \sin \xi}{\text{ch} \eta - \cos \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

При исследовании движения потока смазки между шипом и подшипником целесообразно применять биполярные координаты, так как поверхности шипа и подшипника, расположенные эксцентрично, могут быть охарактеризованы простыми уравнениями $\eta_0 = \text{const}$ и $\eta_1 = \text{const}$ (фиг. 11).

Преобразуя уравнения (5) в соответствии с выбранной системой координат, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial (2\Omega)}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= - \frac{\partial (2\Omega)}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Зависимость между вихрем Ω и функцией тока W определяется формулой (8). Учитывая зависимость (53), получим

$$\Omega = - \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right), \quad (55)$$

где

$$H = \frac{a}{\text{ch} \eta - \cos \xi}$$

представляет собой параметр Ламе.

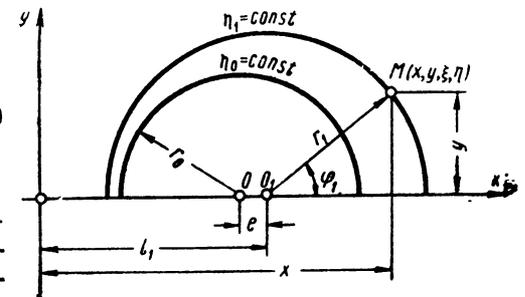
Уравнение для определения функции тока

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left[\frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \right] = 0. \quad (56)$$

Решение задачи по определению давления в слое смазки было проведено Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным с большим искусством и являлось наиболее точным для того времени. Двадцать лет спустя оно было использовано Ж. Дюффингом [51]. Анализ этого решения дан в работах [4], [22], [30], [41].

Во всех приведенных выше классических трудах принимались следующие допущения:

- 1) масло в зазоре подшипника движется ламинарно;
- 2) масло абсолютно несжимаемо;
- 3) влияние капиллярных сил в масляном зазоре не учитывается;
- 4) влияние сил тяжести и сил инерции ничтожно по сравнению с силами, обусловленными вязкостью смазки;
- 5) поверхностные явления на границе масляного слоя и смазываемой поверхности не нарушают прилипания масляного слоя к стенке и не влияют на распределение скоростей в зазоре;



Фиг. 11. Шип и подшипник в биполярных координатах.

б) изменения поверхностей шипа и подшипника, происходящие при износе и упругой деформации, не учитываются. Эти поверхности идеально гладкие, строго цилиндрической формы.

Подшипник принимался бесконечной длины, т. е. таким, в котором не учитывается торцовое истечение смазки.

ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ДВИЖЕНИЕ ВАЛА И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Начиная с середины 20-х годов текущего столетия, инженеры неоднократно интересовались причинами потери устойчивости движения вращающихся роторов, опирающихся на подшипники жидкостного трения. Это явление, впервые наблюдавшееся Б. Ньюкиркком и Г. Тейлором [59] в 1925 г., было предметом теоретических и экспериментальных исследований. Особенно возрос интерес к вопросам устойчивости в наши дни, когда форсирование режимов работы машины неизбежно повышает требования к их эксплуатационной надежности.

Подшипники скольжения обладают способностью демпфировать колебания вала, возникающие от действия внешних причин. Это свойство особенно ценно при эксплуатации машин с так называемыми гибкими роторами. Однако оно не всегда сохраняется. При определенных условиях масляная пленка подшипника сама может стать источником нарушения устойчивости движения как при жестких, так и при гибких валах. Возникающие колебания вала расплавляют вкладыши подшипников и усиливают вибрации машины.

Как известно, нормальная работа подшипников жидкостного трения будет обеспечена при условии полного разделения сопряженных поверхностей шипа и подшипника масляным слоем необходимой толщины. При этом в процессе работы машины шип в подшипнике плавает на упругой масляной подушке.

Систему масляный слой—шип независимо от вида внешней нагрузки следует рассматривать как динамическую, в которой масляный слой обладает упругими, демпфирующими и релаксационными свойствами, существенно влияющими на поведение всей системы в целом.

При постоянной нагрузке на вал и установившемся режиме его работы шип занимает в подшипнике определенное положение, причем центр шипа располагается на кривой подвижного равновесия. Положение центра шипа на кривой характеризуется тем, что внешние силы, действующие на вал, уравновешены поддерживающей силой масляного слоя подшипника. В зависимости от эксплуатационного режима и конструкции (геометрии) подшипника центр шипа может располагаться на кривой подвижного равновесия ближе к центру подшипника или дальше от него. Если такое равновесное состояние системы масляный слой—шип задано, то возникает вопрос: устойчиво ли оно по отношению к малым возмущениям?

Чтобы решить это, необходимо прежде всего определить поддерживающую силу масляного слоя и исследовать уравнения возмущенного движения центра шипа.

Так как решить задачу об устойчивости в данном случае весьма затруднительно (придется исследовать решение нелинейной системы уравнений), предположим, что для малых возмущений уравнения можно линеаризировать.

Если равновесное состояние оказывается устойчивым, что определяется известными критериями, то система совершает колебания с определенной собственной частотой относительно равновесного состояния, причем амплитуда этих колебаний меньше любой наперед заданной величины, при соответствующем выборе начальных возмущений, или убывает с течением времени. Если собственные частоты системы равны частоте вынужденных колебаний ротора, вызванных действием малых остаточных дисбалансов, то амплитуда этих колебаний может превысить значения, допустимые для нормальной эксплуатации. Если же равновесное состояние окажется неустойчивым, то амплитуда колебаний может непрерывно возрастать, что приведет к разрушению масляного слоя.

Рассматривая задачу об устойчивости движения шипа в подшипнике, обычно принимают, что шип совершает вращательное или равномерно-поступательное движение. В первом случае угловая скорость линии центров и скорость центра шипа равны нулю, во втором — угловая скорость линии центров равна нулю, а скорость центра шипа вдоль линии центров постоянна. В этих примерах внешняя нагрузка на шип и реакция слоя смазывающей жидкости в каждый момент времени уравновешиваются. Значение поддерживающей силы для стационарного состояния системы находится интегрированием уравнений установившегося течения смазочной жидкости в зазоре между шипом и подшипником.

При появлении каких-либо случайных малых возмущений, действующих на вал, центр шипа смещается с кривой подвижного равновесия, и на него будут действовать неуравновешенные силы со стороны масляного клина. Под влиянием этих сил центр шипа начнет совершать малые колебания, двигаясь по траекториям различного вида. Эти колебания в зависимости от ряда причин будут либо затухать, либо расти. Возможны также автоколебания.

В период возмущенного движения шипа в подшипнике в системе масляный слой—шип происходят нестационарные процессы. Чтобы решить задачу об устойчивости равновесного состояния шипа на масляной пленке, следует составить дифференциальные уравнения неустановившегося течения вязкой жидкости. При нестационарных процессах реакция смазки на шип является функцией времени, равновесие между ней и внешними силами, приложенными к шипу, отсутствует.

Необходимость дальнейшего развития гидродинамической теории трения с учетом нестационарности процессов диктуется еще и тем, что неустановившееся движение смазки имеется во всех случаях, когда нагрузка на подшипник меняется по величине и направлению (например, в поршневых машинах). Следовательно, перемещение центра шипа в подшипнике не представляет собой исключительного явления при работе подшипников скольжения. Это перемещение существенным образом влияет на образование поддерживающей силы масляного слоя.

Интегрирование уравнений движения вязкой жидкости может быть осуществлено, если известны граничные условия. При движущемся центре шипа граничные контуры движутся один относительно другого. Граничные значения скоростей зависят от характера движения шипа, которое, в свою очередь, определяется действием приложенных к нему сил. Таким образом, система уравнений, описывающих процессы в системе масляный слой—шип, кроме уравнений движения вязкой жидкости, включает уравнения движения центра шипа.

В современных паровых и газовых турбинах, насосах и других быстроходных машинах валы вращаются со скоростью, превышающей критическую, при которой изгибные колебания валов достигают значительной величины.

Среди задач, связанных с проблемой устойчивости равновесного состояния системы масляный слой—шип, важное практическое значение имеет исследование влияния на устойчивость не только неустановившегося характера движения смазки в зазоре, но и гибкости вала.

В настоящей работе рассматриваются в основном устойчивость равновесного состояния системы масляный слой—шип с учетом нестационарности явлений, протекающих в масляном слое, а также влияние гибкости вала.

КРАТКИЙ ОБЗОР ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследование равновесного состояния системы масляный слой—шип на устойчивость состоит из трех основных этапов.

В первом этапе определяют поддерживающую силу масляного слоя, во втором и третьем — условия устойчивости равновесного состояния по отношению к малым возмущениям и собственные частоты колебаний системы.

Исследования на устойчивость движения шипа в подшипнике, в зависимости от методов определения поддерживающей силы, можно разделить на две группы.

К первой группе относят работы, в которых реакция смазки на шип определяется без учета движения центра вращающегося шипа.

Во вторую группу включают работы, в которых движение центра шипа в подшипнике учитывается только граничными условиями.

В обеих группах при определении поддерживающей силы используются положения классической гидродинамической теории трения, изложенные в трудах Н. П. Петрова, Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, О. Рейнольдса и А. Зоммерфельда.

Предложенный Зоммерфельдом метод определения сил, действующих на шип со стороны смазочного слоя, применен в работах Д. Робертсона [63], А. Хегга [52], Г. Порицкого [62].

Решение Жуковского—Чаплыгина было развито Н. И. Мерцаловым [30], И. А. Трубициным [41] и М. В. Коровчинским [22]. На основании этого решения, с учетом разрыва масляного слоя, нами [4] получены безразмерные выражения составляющих поддерживающей силы и построено силовое поле масляного клина, используемое при исследовании устойчивости равновесного состояния системы [5], [6].

Вторая группа работ, как показано выше, включает те, в которых при определении поддерживающей силы масляного слоя граничными условиями учитывается движение центра шипа. Сюда относятся работы В. Гаррисона [54], Д. Робертсона [63], А. К. Дьячкова [14], А. Тондля [67]. Результаты Робертсона по определению поддерживающей силы нашли применение в работах Хегга и Порицкого. Они использовали уравнения Рейнольдса и приближенное уравнение неразрывности течения смазки, полученное осреднением точного уравнения по толщине масляного слоя.

М. В. Коровчинский [23] определяет поддерживающую силу с учетом движения центра шипа в подшипнике конечной длины.

В исследовании устойчивости равновесного состояния системы масляный слой—шип также наметилось два направления. К первому относятся те авторы, которые пытались объяснить движение шипа в неустойчивой области равновесных режимов. Сюда следует отнести работы Б. Ньюкирка и Г. Тейлора [59], Б. Ньюкирка и Л. Гробеля [58], Д. Робертсона, Г. Порицкого. Авторы этих исследований опираются на теорию Зоммерфельда, которая предопределяет равновесные положения неустойчивыми при всех значениях относительного эксцентриситета.

Ко второму направлению принадлежат работы, в которых не учитывается гипотеза Зоммерфельда и критерий устойчивости равновесного состояния системы находится из уравнения движения центра шипа. Этого направления придерживаются А. Стодола, Х. Гуммель, М. Г. Ханович [44], А. Г. Бургвиц [5], [6], С. А. Чернавский [47], М. В. Коровчинский [23], А. Хегг, А. Тондль.

Впервые условие устойчивости равновесного состояния шипа было получено А. Стодолой [см. 52] и Х. Гуммелем [57] на основании уравнений Рейнольдса.

Основные предположения, сделанные Стодолой при выводе условия устойчивости, применяются до настоящего времени. При равновесном состоянии системы сила, действующая со стороны

масляной пленки на шип, равна и противоположно направлена к нагрузке на подшипник. Если появляются возмущающие дополнительные силы, которые смещают центр вала, то изменяется противодействие пленки, а нагрузка на вал остается без изменения. Наступившее состояние может служить причиной критических явлений. Стодола принимал, что при малом отклонении центра вала от равновесного положения на вал со стороны силового поля смазочного слоя будут действовать позиционные силы, пропорциональные смещению центра вала от его первоначального положения на кривой подвижного равновесия.

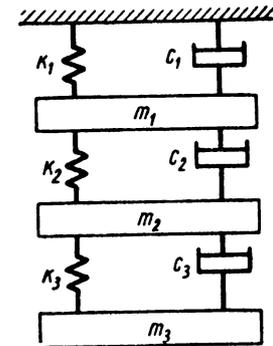
Рассматривая малые колебания относительно положения равновесия, Стодола предполагал линейную зависимость полученных сил от координат. При этом силы не имеют потенциала. Для решения вопроса об устойчивости равновесного состояния системы Стодола составил уравнения возмущенного движения центра шипа без учета сил сопротивления смазки движению шипа. Величина позиционных сил определялась графически из силового поля. Исследование корней характеристического уравнения показало, что при значениях относительного эксцентриситета (χ), больших 0,7, все четыре корня будут чисто мнимыми. В этом случае движение каждой из координат представляет собой наложение двух гармонических колебаний, амплитуды которых являются непрерывными функциями начальных возмущений и уничтожаются при возмущениях, равных нулю. Таким образом, смещения x и y центра шипа от равновесного положения могут быть меньше любой наперед заданной величины ϵ , поскольку начальные возмущения выбраны меньше величины $\delta = f(\epsilon)$. Следовательно, в случае чисто мнимых корней равновесное состояние системы будет устойчиво. При значениях относительного эксцентриситета, меньших 0,7, по крайней мере один из корней имеет положительную вещественную часть и, следовательно, равновесное состояние системы будет неустойчиво.

Исходя из условия совпадения угловой скорости вращения вала с одной из частот собственных колебаний системы масляный слой—шип, Стодола ввел понятие новой критической частоты вращающегося вала. Таким образом, он первый вывел условие устойчивости равновесного состояния системы, которое характеризуется только одним существенным параметром — относительным эксцентриситетом.

Работа Стодолы послужила толчком для дальнейших исследований в этой области. Так, Х. Гуммель [57] продолжил исследование Стодолы как теоретически, так и экспериментально. Подтвердив правильность критерия устойчивости системы ($\chi \geq 0,7$), полученного Стодолой, Гуммель уделил значительное внимание определению критических чисел оборотов вала в том смысле, как это было введено Стодолой.

Учет сопротивления движению шипа со стороны масляного слоя, осуществленный в работах [5], [6], [23], [47], [53], [67], пока-

зал, что область устойчивости может существовать и при значениях относительного эксцентриситета, меньших 0,7. Если в случае Стодолы—Гуммеля поведение системы в смысле устойчивости определялось только значением относительного эксцентриситета, то учет демпфирующих свойств позволил установить влияние еще одного параметра на устойчивость движения. Роль конечной длины подшипника в этом вопросе была оценена М. В. Коровчинским [23] с помощью третьего параметра. Важным моментом в развитии вопроса является введение уравнения движения центра шипа и сил сопротивления масляного слоя, пропорционального скорости. Для качественной оценки этого явления А. Хегг [52] предложил рассмотреть динамически идеальную систему, состоящую из трех масс, последовательно соединенных пружинами (фиг. 12). Параметры k_1, c_1, m_1 представляют собой не возвращающиеся части машины; k_2, c_2 характеризуют пленку смазочной жидкости. Величина c_2 , положительная или отрицательная, определяет демпфирующие свойства пленки. Параметры k_3, c_3, m_2 и m_3 можно принять за постоянные величины. Величины k_2 и c_2 — функции скорости и нагрузки. Параметр c_1 всегда положителен, а c_3 можно считать достаточно малым и не принимать во внимание. Возможность появления самовозбуждающихся колебаний в системе масляный слой—шип определяется параметром c_2 . Если он имеет положительное значение, то система устойчива, если отрицательное, — она может быть либо устойчивой, либо неустойчивой.



Фиг. 12. Динамическая схема системы масляный слой—шип.

Система будет неустойчива, если общее количество энергии затухания при колебательном движении шипа окажется больше, чем количество энергии, вызывающей это движение. Чтобы масляная пленка могла производить работу, влияющую на состояние движения всей системы, необходимо относительное движение между массами m_1 и m_2 . Следовательно, если имеются самовозбуждающиеся колебания масляного слоя, то непременно должно иметь место относительное движение шипа в подшипнике.

Уравнения движения, составленные Хеггом, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} + E \frac{dx}{dt} + C_1 x - D_1 y &= 0, \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} + E \frac{dy}{dt} + C_2 y + D_2 x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Значение коэффициента затухания E по направлению осей x и y принято одинаковым с некоторой степенью приближения.

Коэффициенты C_1, C_2, D_1, D_2 , характеризующие позиционные силы, определяются силовым полем масляного клина.

Используя критерий Рауса—Гурвица, Хегг получает условие устойчивости:

$$(C_1 - C_2)^2 + 2E^2 \left(\frac{C_1}{M} + \frac{C_2}{M} \right) > 4D_1D_2, \quad (58)$$

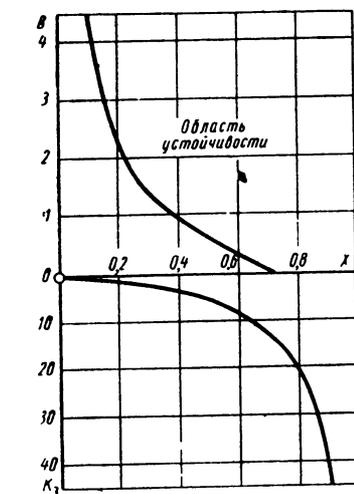
которое при $E=0$ превращается в условие Стодолы—Гуммеля:

$$(C_1 - C_2)^2 > 4D_1D_2. \quad (59)$$

Выражение $2E^2 \left(\frac{C_1}{M} + \frac{C_2}{M} \right)$ обычно соизмеримо с величиной $(C_1 - C_2)^2$, а иногда может оказаться и больше ее.

Величина коэффициента затухания в различных подшипниках будет зависеть от их конструкции. С учетом величины затухания устойчивое движение системы возможно, когда по условию Стодолы—Гуммеля она должна находиться в неустойчивой области равновесных положений. При этом устойчивое равновесное состояние системы будет определяться не одним, а двумя параметрами: относительным эксцентриситетом и параметром, учитывающим сопротивление масляного слоя.

При условии, что значение коэффициента сопротивления одинаково в направлениях осей x и y и не зависит от относительного эксцентриситета, граница устойчивости имеет вид, представленный на фиг. 13 [5]. Здесь по горизонтальной



Фиг. 13. Граница устойчивости при одинаковом значении B в двух направлениях.

оси отложен относительный эксцентриситет, а по вертикальной — безразмерный коэффициент B , характеризующий демпфирование масляного слоя. Условие $B=0$ соответствует случаю Стодолы, когда система устойчива при $\chi > 0,7$.

Более детально влияние демпфирующих сил на устойчивость с учетом их зависимости от относительного эксцентриситета было исследовано С. А. Чернавским [47].

Таким образом, равновесное состояние системы масляный слой—шип может быть устойчивым или неустойчивым. Устойчивость системы будет определяться значениями основных параметров. Если сопротивление возмущенному движению шипа не учитывается, то устойчивость зависит от одного параметра —

относительного эксцентриситета. При значениях его, больших 0,7, система устойчива, а при меньших 0,7 — неустойчива.

При учете сопротивления смазки возмущенному движению шипа, что более отвечает физической сути явления, устойчивость равновесного состояния системы будет определяться двумя безразмерными параметрами: относительным эксцентриситетом и обычно безразмерной угловой скоростью вращения вала. Граница области устойчивости, построенная в плоскости этих параметров, показывает, что равновесное состояние системы может быть устойчиво и при относительном эксцентриситете, меньшем 0,7, но при определенном значении второго параметра. Если учитывается еще и конечная длина подшипника, то отношение его длины к диаметру будет третьим параметром, определяющим поведение системы.

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ МАСЛЯНЫЙ СЛОЙ—ШИП

Задача об устойчивости равновесного состояния системы масляный слой—шип включает также и определение собственных частот колебаний системы. В случае устойчивого равновесного состояния система будет совершать колебания с определенными собственными частотами относительно равновесного положения. Когда возмущающая сила возникает в результате неуравновешенности масс или от ударов сцепления, частота возмущения кратна угловой скорости вала. При равенстве частоты помехи одной из частот собственных колебаний вала на масляной пленке наступит явление резонанса, при котором амплитуда колебания вала ротора может увеличиться до величины, не совместимой с нормальной работой машины. Числа оборотов вала, при которых происходит указанное явление, Стодола [65] назвал критическими.

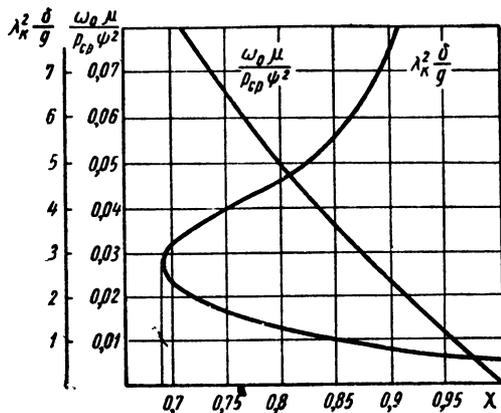
Подчеркиваем, что это критическое число оборотов вала обусловлено не приближением частоты вращения вала к круговой частоте его собственных колебаний на жестких опорах, а влиянием масляной пленки подшипников скольжения. Поэтому число оборотов вала, при котором частота его вращения равна частоте собственных колебаний вала на масляной пленке, мы будем называть критическим в смысле Стодолы.

Наиболее полно исследовал собственные частоты колебаний системы масляный слой—шип для жесткого вала Гуммель [57]. Он установил, что в области устойчивости, при $\chi > 0,7$, собственные частоты колебаний системы определяются выражением

$$\lambda^2 \frac{\delta}{g} = 1 + \frac{G}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{G}{2}\right)^2 - \frac{G}{\chi^2}}, \quad (60)$$

где $\lambda^2 \frac{\delta}{g}$ — квадрат безразмерной собственной частоты системы; G — величина, зависящая только от χ .

Когда $\chi > 0,7$, имеет место соотношение $(1 + \frac{G}{2})^2 > \frac{G}{\chi^2}$, при котором все четыре корня характеристического уравнения чисто мнимые*. Если $\chi < 0,7$, то $(1 + \frac{G}{2})^2 < \frac{G}{\chi^2}$ и корни будут комплексные (из них два будут иметь положительную и два отрицательную вещественную часть). Равновесное состояние при этом неустойчиво, и характер изменения частот для него Гуммель не рассматривал.



Фиг. 14. Определение критической частоты.

Для нормальной работы машины весьма важно установить критические, в смысле Стодолы, числа оборотов вала, так как они связаны с размерами вынужденных колебаний системы и особенно опасным случаем возникновения резонанса в системе. Если построить кривые изменения значений величин $\frac{\mu \omega_0}{P_{cp}} \frac{1}{\psi^2}$ и $\lambda^2 \frac{\delta}{g}$, которые являются функциями только одной величины — относительного эксцентриситета χ , то, зная для данного подшипника величину $\frac{\mu \omega_0}{P_{cp}} \frac{1}{\psi^2}$, можно по графику (фиг. 14) определить соответствующее значение χ , а по нему — величину $\lambda^2 \frac{\delta}{g}$. Каждому значению χ соответствует частота $\lambda_{k_1}^2 \frac{\delta}{g}$ или $\lambda_{k_2}^2 \frac{\delta}{g}$. Если возмущающая сила имеет частоту, совпадающую с λ_{k_1} или λ_{k_2} , то наступит резонанс и вал будет вращаться с увеличенной амплитудой колебаний.

Если ввести в рассмотрение характеристику подшипника $\Pi = \left[\frac{P_{cp}}{\mu} \psi^2 \right]^2 \frac{\delta}{g}$, то можно графически получить для каждого значения характеристики подшипника две критические угловые скорости вала (фиг. 15).

На фиг. 16 показана кривая изменения критических чисел оборотов в зависимости от Π . На этой же фигуре нанесены ли-

* Решение уравнений возмущенного движения Гуммель ищет в виде

$$x = Ae^{\lambda t}; \quad y = A_1 e^{\lambda t}.$$

нии, определяемые выражением $K_3 = \sqrt{\frac{\Pi}{\omega_k^2 \frac{\delta}{g}}}$. Прямые, соот-

ветствующие значениям $K_3 < 12$, располагаются в области неустойчивого равновесия. Кривая $K_3 = 11$ проходит касательно к кривой $\omega_k = f(\Pi)$, что отвечает одному значению ω_k . Кривые, соответствующие $K_3 > 12$, располагаются в области устойчивого равновесия, дважды пересекая кривую $\omega_k = f(\Pi)$, что свидетельствует о наличии двух критических частот вала.

Представленная на фиг. 17 номограмма для определения критических чисел оборотов вала и соответствующих им значений относительного эксцентриситета по известным величинам δ и Π позволяет дать качественную картину явления.

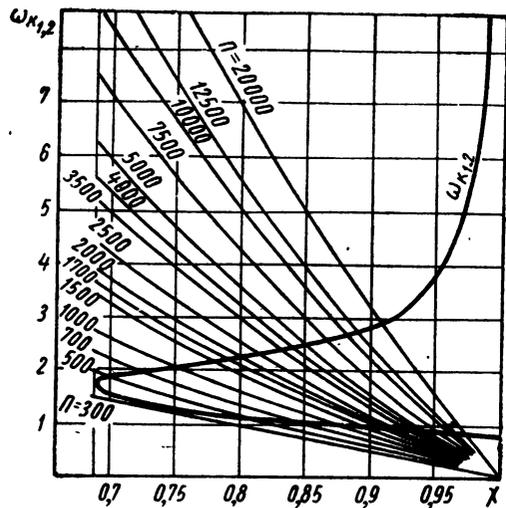
Значение меньшего критического числа оборотов вала может быть определено по формуле

$$n_{кр_1} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}}. \quad (61)$$

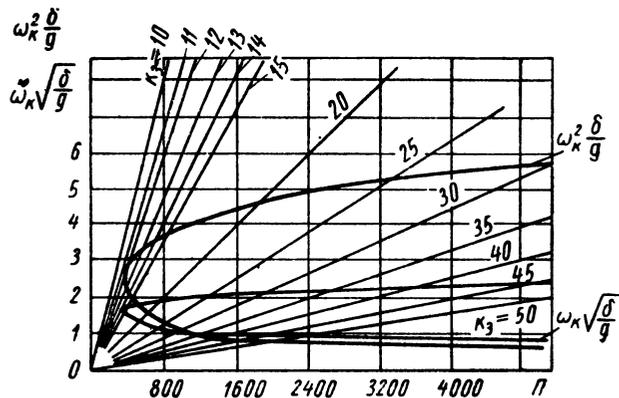
Изложенная теория была проверена Гуммелем соответствующими опытами, которые в полной степени подтвердили правильности теоретических результатов. Чтобы определить траекторию центра вала, Гуммель применил оптический метод, с помощью которого можно было не только сфотографировать путь центра вала в подшипнике, но и значительно увеличить траекторию центра вала на экране, а также исключить влияние упругости материалов и масс приборов. Опыты с большой точностью показали наличие двух критических чисел оборотов и соответствующее им увеличение амплитуды колебаний вала. Эти выводы были подтверждены также в других работах [5], [67].

В предыдущем параграфе было указано, что по сравнению с результатами Стодолы—Гуммеля влияние демпфирующих свойств масляной пленки расширяет область устойчивости равновесных положений системы. Если в случае Гуммеля корни характеристического уравнения в области устойчивых равновесных состояний были чисто мнимыми, то при учете демпфирующих свойств смазки корни характеристического уравнения в области устойчивости будут комплексные с отрицательной вещественной частью. При значениях относительного эксцентриситета, меньших 0,7, система имеет две равные собственные частоты, а при относительном эксцентриситете, большем 0,7, — две различные частоты (фиг. 18) [5].

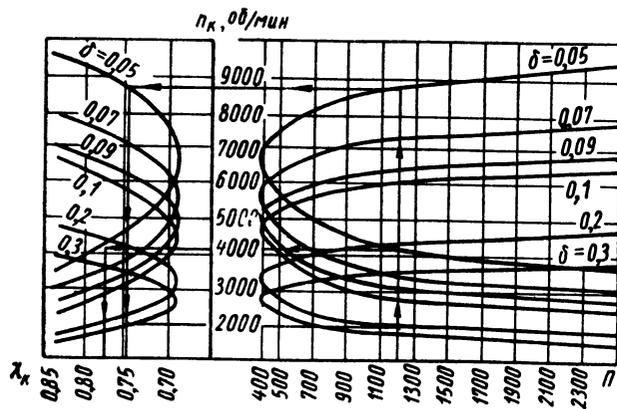
Следует отметить, что если существование двух собственных частот для системы с двумя степенями свободы является естественным, то возникает вопрос: почему система масляный слой—шип имеет при одних значениях относительного эксцентриситета ($\chi < 0,7$) одну, а при других ($\chi > 0,7$) — две собственные частоты?



Фиг. 15. Определение критических угловых скоростей в зависимости от значения характеристики подшипника.

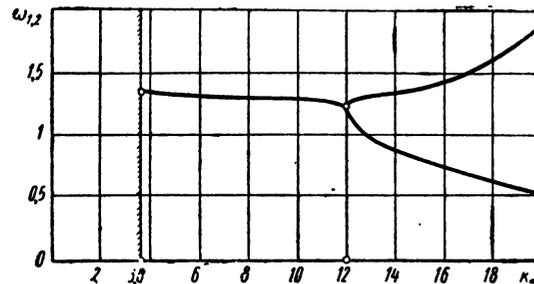


Фиг. 16. Зависимость критических чисел оборотов от характеристики подшипника Π.



Фиг. 17. Номограмма для определения Π и $\chi_{к}$ по известным характеристикам подшипника Π и δ .

Анализ силового поля масляного клина показал, что в нижней половине кривой подвижного равновесия при движении вверх и одновременно от вертикальной оси градиенты силы в направлениях главных осей жесткости существенно отличаются. В крайней левой точке кривой подвижного равновесия, соответствующей значению $\chi=0,7$ (см. фиг. 6), эти градиенты сил уравниваются. В верхней части кривой, где движение вверх



Фиг. 18. Распределение собственных частот с учетом демпфирования.

совпадает с движением к вертикальной оси, градиенты сил остаются примерно равными.

Таким образом, при значениях относительного эксцентриситета, больших 0,7, вследствие различной жесткости масляного слоя в направлениях главных осей жесткостей происходит раздвоение собственных частот при одном и том же значении χ . В этом смысле характерно значение относительного эксцентриситета, равное 0,7.

Зная собственные частоты колебаний, можно определять критические (в смысле Стодолы) частоты вращения вала.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ МАСЛЯНЫЙ СЛОЙ—ШИП

ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИИ

Для современного этапа развития гидродинамической теории трения характерно стремление учесть динамическое взаимодействие между смазочным слоем и движущимся шипом. Неустановившееся течение смазки в зазоре, обусловленное движением центра шипа, будет происходить как в случае нагружения шипа переменной по величине и направлению силой, так и в случае нарушения равновесного состояния при постоянной нагрузке.

Рассматриваемое движение характеризуется угловой скоростью вращения линии центров и скоростью движения центра шипа вдоль этой линии в зависимости от времени. Реакция смазки на шип при этом также является функцией времени.

Нельзя произвести расчет подшипника, в котором центр шипа движется по определенной траектории, опираясь только на уравнения гидродинамики. Дело в том, что интегрирование дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости можно осуществить только в случае, если известно значение скоростей частиц жидкости, прилипающих к поверхностям шипа и вкладыша, т. е. на основании граничных условий. Но в условиях динамической задачи центр шипа описывает внутри рассматриваемого периода времени траектории, заранее неизвестные. Следовательно, граничные значения скоростей зависят от характера движения шипа, которое определяется действием всех приложенных к нему сил. Уравнения, описывающие процессы, происходящие в масляном слое, и учитывающие его динамические свойства, составляют замкнутую систему. Уравнением, замыкающим систему и связывающим возникающие в масляном слое силы с силами, действующими на шип со стороны связанных с ним масс, является уравнение движения центра шипа.

Рассмотрим исходные уравнения неустановившегося движения вязкой жидкости с точки зрения возможности их упростить. Чтобы получить приближенные решения дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, пренебрегают либо вовсе либо частично действием одних сил по сравнению с другими.

Развернем уравнения (1) и (3) и произведем сравнительную оценку входящих в них слагаемых:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (62)$$

В системе уравнений (62) уже учтено предположение о незначительности массовых сил, высказанное ранее.

Силы инерции и силы вязкости можно сравнивать, так как они являются функциями одних и тех же величин — проекций (v_x, v_y) скорости движения на оси координат. Обычно имеют в виду два основных типа приближенных решений уравнений (62), определяемых величиной числа Рейнольдса Re . При малых значениях числа Re сила инерции будет незначительна по сравнению с силой вязкости. Число Re мало в тех случаях, когда характерная скорость потока невелика, когда характерный линейный размер потока очень мал или когда коэффициент кинематической вязкости жидкости ν весьма велик. Следовательно, силой инерции (при установившемся движении жидкости) можно пренебречь по сравнению с силой вязкости при очень медленном движении жидкости, при очень малых поперечных размерах потока или при движении в жидкости тела очень малых размеров и при движении жидкости очень большой вязкости и относительно малой плотности. Можно сказать, что малое значение числа Re является необходимым условием, чтобы пренебречь силой инерции по сравнению с силой вязкости; условие же достаточности определяется условиями конкретной задачи [32].

Пусть r — характерный размер вдоль оси x ; Δ — вдоль оси y ; U — характерная скорость в направлении оси x ; V — в направлении оси y ; T — характерное время. Величина $\frac{\Delta}{r} = \psi$ — весьма малая.

Для перехода к безразмерным величинам в системе (62) положим

$$x = r \cdot \varphi; \quad y = \Delta \bar{y};$$

$$v_x = Uu; \quad v_y = Vv; \quad \frac{V}{U} = \varepsilon;$$

$$Re = \frac{Ur}{\nu}; \quad p = \frac{\mu Ur}{\Delta^2} \bar{p}; \quad t = T\tau.$$

Тогда уравнения (62) примут вид *

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{\Delta^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \psi^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon}{\psi} v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + \psi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{T} \frac{\Delta^2}{\nu} \psi \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \operatorname{Re} \psi^3 \varepsilon \left(u \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon}{\psi} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \psi^3 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \psi \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon}{\psi} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (63)$$

При установившемся движении ($\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0$) из уравнений (63) можно получить уравнения Рейнольдса для слоя смазки. Для этого, как показал Н. А. Слезкин [38], значение числа Re должно быть значительно меньше $\frac{1}{\psi}$, что обычно и наблюдается в смазочном слое подшипника. Пренебрегая в уравнениях (63) слагаемыми, содержащими множитель ψ , получим уравнения Рейнольдса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (64)$$

Эти выводы справедливы для сравнительной оценки конвективной силы инерции и силы вязкости при неустановившемся движении.

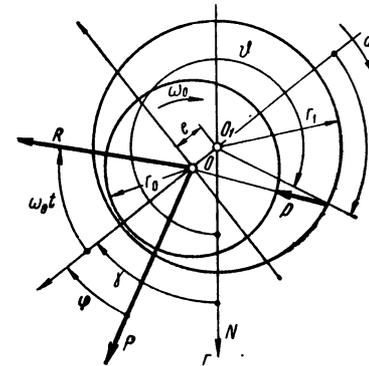
В условиях нашей задачи слагаемым $\frac{1}{T} \frac{\Delta^2}{\nu} \frac{\partial u}{\partial \tau}$ в первом уравнении системы (63) пренебрегать нельзя. Как показал М. В. Коровчинский [24], величина множителя $\frac{1}{T} \frac{\Delta^2}{\nu}$ в указанном слагаемом для современных быстроходных двигателей с числом оборотов 1000—4500 об/мин лежит в пределах 0,01—0,38. Следует отметить, что именно член, характеризующий локальное ускорение в уравнении движения вязкой жидкости, позволяет учесть динамические свойства масляного слоя при движении шипа в подшипнике.

* Уравнения (63) записаны в обозначениях, принятых у Н. А. Слезкина [38].

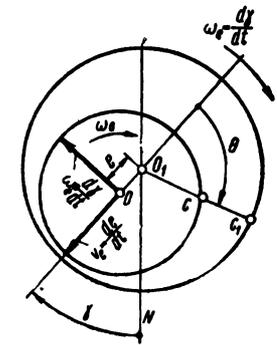
Таким образом, мы частично упрощаем исходные уравнения: пренебрегаем конвективной силой инерции и сохраняем локальную силу инерции. Уравнения (61) теперь будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} (65)$$

При составлении гидродинамических уравнений в дальнейшем будем пользоваться полярной системой координат. Уравнения движения вязкой жидкости в полярных координатах представлены выражениями (12) и (13). Применяя к ним приведем:



Фиг. 19. Положение шипа в подшипнике.



Фиг. 20. Составляющие скорости движения центра шипа.

ные выше рассуждения о пренебрежении конвективной силой инерции и учете локальной силы инерции, получим для функции тока W уравнение (16).

В общем случае нагружения (фиг. 19) на шип действуют постоянная внешняя сила P и внешняя сила R , являющаяся функцией времени. Движение центра шипа, происходящее под действием этих сил, можно представить состоящим из двух движений (фиг. 20) по отношению к неподвижному центру подшипника: вращения линии центров вокруг неподвижного центра подшипника с угловой скоростью $\omega_e = \frac{d\gamma}{dt}$ и движения центра шипа вдоль линии центров со скоростью $v_e = \frac{de}{dt} = \delta \frac{d\chi}{dt}$.

Толщина масляного слоя в любом месте зазора между шипом и подшипником (фиг. 21) определится формулой (28).

Пользуясь фиг. 19, можно записать

$$\vartheta = \Theta + \gamma + \pi. \quad (66)$$

В принятой системе координат уравнение подшипника

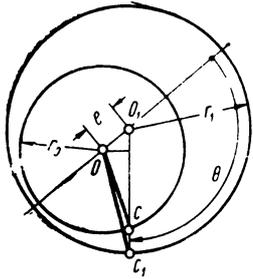
$$r = r_1, \quad (67)$$

а уравнение шипа

$$r = r_1 - h. \quad (68)$$

В силу принятого допущения частицы масла имеют скорость той поверхности, к которой прилипают. Радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы жидкости, лежащей на поверхности подшипника (точка C_1 , см. фиг. 20), соответственно равны

$$v_r = 0; \quad v_\vartheta = 0. \quad (69)$$



Фиг. 21. К определению толщины смазочного слоя.

Радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы жидкости, лежащей на поверхности шипа (точка C , фиг. 20), как известно [63], [43], выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= -\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \cos \Theta + \chi \frac{d\gamma}{dt} \sin \Theta \right), \\ v_\vartheta &= (r_1 - \delta) \omega_0 + \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Учитывая зависимости (14) между v_r , v_ϑ и W , получим следующие граничные условия для функции тока W : на поверхности подшипника при $r = r_1$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0; \quad (71)$$

на поверхности шипа при $r = r_1 - h$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= -(r_1 - \delta) \omega_0 - \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right), \\ \frac{\partial W}{\partial \vartheta} &= -(r_1 - h) \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \cos \Theta + \chi \frac{d\gamma}{dt} \sin \Theta \right), \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

или с точностью до величины δ^2

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -r_1 \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \cos \Theta + \chi \frac{d\gamma}{dt} \sin \Theta \right). \quad (73)$$

В каждый момент времени на шип со стороны масляного слоя действуют нормальное и касательное напряжения по си-

стеме (19), в которой величина $\frac{\partial v_r}{\partial r}$ имеет порядок δ и является незначительной по сравнению с величиной p . Поэтому будем считать, что $p_{rr} = -p$, т. е. нормальное давление будем принимать равным гидродинамическому. Касательным напряжением при малых значениях относительного зазора ψ (для современных машин $\psi = 0,003 - 0,0005$), можно пренебречь.

Между гидродинамическим давлением и функцией тока имеет место зависимость [28] $\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -\mu \frac{\partial W}{\partial r}$, или для нашего случая, так как производные по ϑ и Θ на основании формулы (66) равны между собой,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Theta} = -\mu \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (74)$$

Величины проекций поддерживающей силы масляного слоя на линию центров и на перпендикулярное ей направление (см. фиг. 19)

$$\left. \begin{aligned} P_r &= r_1 l \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \cos \Theta d\Theta, \\ P_\gamma &= r_1 l \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p \sin \Theta d\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Вопрос о границах смазочного слоя дискуссионный. В последнее время появились экспериментальные работы (например, [19], [46]), в которых приводятся результаты измерений давления в масляном слое подшипников скольжения при переменной нагрузке. В работе [46] используется идея замера давления в масляной пленке подшипника с помощью полупроводников, высказанная А. К. Дьячковым в 1952 г. Если обеспечено высокое давление подачи масла ($p_n = 1,3 - 4,5 \text{ атм}$), положительное давление в масляном слое возникает и в ненагруженной части вкладыша подшипника двигателя [19].

В рассматриваемом случае имеется в виду, что давление подачи смазки незначительное ($p_n = 0,5 \text{ атм}$). Излагаемая теория относится, главным образом, к работе подшипников турбоагрегатов с постоянной нагрузкой по величине и направлению. При вычислении поддерживающей силы принимаем, что масляный слой начинается в месте наибольшего зазора и обрывается у наименьшего.

Колебания, совершаемые центром шипа в период возмущенного движения, рассматриваются как малые и не изменяющие существенно границ смазочного слоя. Допустимость применения таких границ смазочного слоя для подшипников турбоагрегатов подтверждается теоретической и экспериментальной работой Юкио Хори [56].

Принтегрируем выражения (75) на основании уравнения (42), имея в виду, что для рассматриваемого участка смазочного слоя давление непрерывно и условие $p(0) = p(\pi) = 0$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} P_e &= -r_1 l \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta d\theta, \\ P_\gamma &= r_1 l \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos \theta d\theta. \end{aligned} \right\} (76)$$

Теперь мы имеем все данные, чтобы составить гидродинамические уравнения системы. Однако согласно сказанному в начале параграфа, система уравнений должна быть замкнутой. Уравнениями, замыкающими систему, являются уравнения движения центра шипа. На шип действуют внешние силы P и R , а также сила реакции со стороны смазочного слоя. Уравнения движения центра шипа под действием указанных сил будут иметь в полярных координатах следующий вид (см. фиг. 19):

$$\left. \begin{aligned} M\delta \frac{d^2 \chi}{dt^2} - M\delta \chi \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 &= P_e + P \cos \varphi + R \cos(\omega_0 t), \\ M\delta \chi \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + 2M\delta \frac{d\chi}{dt} \frac{d\gamma}{dt} &= P_\gamma - P \sin \varphi + R \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \right\} (77)$$

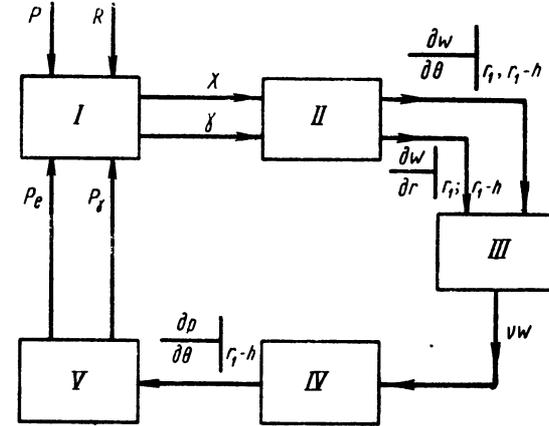
На основании изложенного, процессы, происходящие в системе масляный слой—шип при движущемся центре шипа, характеризуются следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} M\delta \frac{d^2 \chi}{dt^2} - M\delta \chi \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 &= P_e + P \cos \varphi + R \cos(\omega_0 t), \\ M\delta \chi \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + 2M\delta \frac{d\chi}{dt} \frac{d\gamma}{dt} &= P_\gamma - P \sin \varphi + R \sin(\omega_0 t), \\ \frac{\partial \Delta W}{\partial t} &= \nu \Delta \Delta W, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -\mu \frac{\partial \Delta W}{\partial r}, \\ P_e &= -r_1 l \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta d\theta, \\ P_\gamma &= r_1 l \int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos \theta d\theta; \end{aligned} \right\} (78)$$

при граничных условиях для функции тока W на поверхности подшипника

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0; \\ \text{на поверхности шипа} \\ \frac{\partial W}{\partial r} &= -(r_1 - \delta) \omega_0 - \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \theta \right), \\ \frac{\partial W}{\partial \theta} &= -r\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \cos \theta + \chi \frac{d\gamma}{dt} \sin \theta \right). \end{aligned} \right\} (79)$$

Рассматриваемая система масляный слой—шип обладает той особенностью, что помимо звеньев, описываемых обыкновенными



Фиг. 22. Структурная схема исследуемой динамической системы.

дифференциальными уравнениями, она включает звенья, описываемые уравнениями в частных производных и связанных с остальной системой граничными условиями.

Чтобы более наглядно представить зависимость между отдельными звеньями, на фиг. 22 изображена структурная схема исследуемой динамической системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ТОКА

Для определения значения функции тока необходимо решить третье уравнение системы (78) при граничных условиях (79).

В качестве первого приближения решения уравнения $\frac{\partial \Delta W}{\partial t} = \nu \Delta \Delta W$ рассмотрим решение бигармонического уравнения (11) $\Delta \Delta W = 0$.

Метод решения уравнения (11) в полярных координатах был рассмотрен в первой главе, и решение его представлено выражением (39). И. М. Фишман [43] решил уравнение (11) для случая переменной нагрузки на шип.

Если произвольная функция $f(x)$ вместе со своими n первыми производными непрерывна на промежутке $a \leq x < a+h$ и имеет $n+1$ производную на том же промежутке, то она может быть разложена в ряд Тейлора:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + R_n.$$

Используя это формально, разложим функцию $W(r-h)$ в ряд Тейлора по степеням h :

$$W(r-h) = W(r) - h \frac{\partial W(r)}{\partial r} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 W(r)}{\partial r^3} + \dots \quad (80)$$

Предполагая, что ряд сходится, продифференцируем выражение (80) по r :

$$\frac{\partial W(r-h)}{\partial r} = \frac{\partial W(r)}{\partial r} - h \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 W(r)}{\partial r^3}. \quad (81)$$

Примем в выражении (81) $r = r_1$. Тогда $\frac{\partial W(r_1-h)}{\partial r} = \frac{\partial W(r_1)}{\partial r} - h \frac{\partial^2 W(r_1)}{\partial r^2} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 W(r_1)}{\partial r^3}$.

Заменим в последнем выражении производные

$$\left. \frac{\partial W(r_1-h)}{\partial r} \right|_{r=r_1-h} \text{ и } \left. \frac{\partial W(r_1)}{\partial r} \right|_{r=r_1}$$

их значениями, согласно граничным условиям (72) и (73).

Тогда

$$\begin{aligned} - (r_1 - \delta) \omega_0 - \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right) = \\ = -h \frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3}, \end{aligned} \quad (82)$$

где $\frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2}$ и $\frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3}$ — значения второй и третьей производных функции W по r при $r = r_1$.

Проинтегрировав по θ граничное условие (73), получим с точностью до произвольного слагаемого, зависящего от времени,

$$W(r_1 - h) = -r_1 \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right). \quad (83)$$

Подставив в разложение (80) значение $r = r_1$ и сравнив полученное выражение для $W(r_1 - h)$ с последним (83), имеем

$$\begin{aligned} -r_1 \delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right) = -\frac{1}{2} h_0 r_1 + \\ + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3}. \end{aligned} \quad (84)$$

Определение величины h_0 , связанной с расходом жидкости, будет дано ниже.

Из выражений (82) и (84) с точностью до величины δ^2 находим значения $\frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3}$ и $\frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2}$:

$$\frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3} = -\frac{6r_1}{h^3} \left[h\omega_0 - h_0 + 2\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right) \right] \quad (85)$$

или

$$\frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3} = \frac{1}{r_1} M, \quad (86)$$

где

$$M = -\frac{6r_1^2}{h^3} \left[h\omega_0 - h_0 + 2\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right) \right] \quad (87)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2} = N = -\frac{r_1}{h^2} \left[2h\omega_0 - 3h_0 + \right. \\ \left. + 6\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \Theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \Theta \right) \right]. \end{aligned} \quad (88)$$

Продифференцировав три раза выражение (39), получим при $r = r_1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_0(r_1)}{\partial r} &= ar_1 \ln r_1 + \frac{1}{2} (b-a)r_1 + \frac{c}{r_1}, \\ \frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2} &= a \ln r_1 + \frac{1}{2} (b+a) - \frac{c}{r_1^2}, \\ \frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3} &= \frac{a}{r_1} + \frac{2c}{r_1^3}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Сравнив значения производных $\frac{\partial W_0(r_1)}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3}$, согласно выражениям (72), (86), (88), получим систему уравнений для определения постоянных a , b , c :

$$\left. \begin{aligned} ar_1 \ln r_1 + \frac{r_1}{2}(b-a) + \frac{c}{r_1} &= 0, \\ a \ln r_1 + \frac{1}{2}(b+a) - \frac{c}{r_1^2} &= N, \\ \frac{a}{r_1} + \frac{2c}{r_1^3} &= \frac{M}{r_1}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Решив систему уравнений (90), получим

$$\left. \begin{aligned} 2a &= M + N, \\ \frac{4c}{r_1^2} &= M - N, \\ b &= -M \ln r_1 + (1 - \ln r_1)N. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Имея в виду, что величина M [см. равенства (87), (88)], имеет порядок $1/\delta^2$, а величина N — порядок $1/\delta$, мы в дальнейшем будем пренебрегать величиной N как малой по сравнению с M .

Тогда из выражения (91) следует, что

$$2a = M. \quad (92)$$

Величина h_0 определяется следующим образом. Продифференцировав по r выражение

$$\Delta W = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) W$$

и подставив результат в уравнение (74), получим

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -2\mu a$$

или, согласно зависимости (92),

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\mu M. \quad (93)$$

Используя равенство (87), получим

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{6\mu r_1^3}{h^3} \left[h\omega_0 - h_0 + 2\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \theta \right) \right]. \quad (94)$$

Так как было принято, что величина гидродинамического давления в слое смазки в местах наибольшей и наименьшей толщины масляного слоя равна нулю, то

$$\int_0^\pi \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta = 0$$

или, используя выражения (94) и (29), будем иметь

$$\int_0^\pi \frac{6\mu r_1^3}{h^3 (1 + \chi \cos \theta)^3} \left[\delta (1 + \chi \cos \theta) \omega_0 - h_0 + 2\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \theta \right) \right] d\theta = 0. \quad (95)$$

Теперь из уравнения (95) определим h_0 , предварительно обозначив

$$\int_0^\pi \frac{\sin^m \theta \cos^n \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^k} d\theta = I_k^{m,n}. \quad (96)$$

При $m=n=0$ верхние индексы в интеграле $I_k^{m,n}$ опускаются. Величина

$$h_0 = \frac{\delta}{I_3} \left(I_2 \omega_0 + 2I_3^{(1,0)} \frac{d\chi}{dt} - 2\chi I_3^{(0,1)} \frac{d\gamma}{dt} \right); \quad (97)$$

после интегрирования

$$h_0 = \frac{\delta}{2 + \chi^2} \left[2(1 - \chi^2) \omega_0 + \frac{8}{\pi} (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi}{dt} + 6\chi^2 \frac{d\gamma}{dt} \right]. \quad (98)$$

Значения интегралов приведены в табл. 1.

Подставив в выражение (87) значения h и h_0 из формул (29) и (98), имеем

$$\begin{aligned} M = & - \frac{6r_1^2}{h^3 (1 + \chi \cos \theta)^3} \left\{ \delta (1 + \chi \cos \theta) \omega_0 - \right. \\ & - \frac{\delta}{2 + \chi^2} \left[2(1 - \chi^2) \omega_0 + \frac{8}{\pi} (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi}{dt} + 6\chi^2 \frac{d\gamma}{dt} \right] + \\ & \left. + 2\delta \left(\frac{d\chi}{dt} \sin \theta - \chi \frac{d\gamma}{dt} \cos \theta \right) \right\}. \end{aligned}$$

Таблица 1

Значения интегралов вида

$$I_k^{m, n} = \int_0^\pi \frac{\sin^m \theta \cos^n \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^k} d\theta$$

Интеграл	Значение интеграла
$I_1 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\frac{\pi}{(1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$I_2 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{\pi}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$
$I_3 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{\pi}{2} \frac{2 + \chi^2}{(1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}}$
$I_3^{(1,0)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{2}{(1 - \chi^2)^2}$
$I_3^{(0,1)} = \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$-\frac{3}{2} \frac{\pi \chi}{(1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}}$
$I_1^{(1,0)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$-\frac{1}{\chi} \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi}$
$I_1^{(2,0)} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\frac{\pi}{\chi^2} \left[1 - (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \right]$
$I_1^{(1,1)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\frac{1}{\chi} \left(2 + \frac{1}{\chi} \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \right)$
$I_2^{(1,1)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$-\frac{1}{\chi} \left(\frac{2\chi}{1 - \chi^2} + \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \right)$
$I_2^{(2,1)} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{\pi}{\chi^3} \left[\frac{\chi^2 - 2}{(1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 \right]$

Интеграл	Значение интеграла
$I_2^{(1,2)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{2}{\chi^2} \left(\frac{2 - \chi^2}{1 - \chi^2} + \frac{1}{\chi} \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \right)$
$I_3^{(1,0)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{2}{(1 - \chi^2)^2}$
$I_3^{(2,0)} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{\pi}{2(1 - \chi)^{\frac{3}{2}}}$
$I_3^{(1,1)} = \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$-\frac{2\chi}{(1 - \chi^2)^2}$
$I_1^{(0,1)} = \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$-\pi \frac{1 - (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}{\chi (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$I_1^{(0,2)} = \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\pi \frac{1 - (1 - \chi)^{\frac{1}{2}}}{\chi^2 (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$I_2^{(0,2)} = \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{\pi}{\chi^2} \frac{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}} - (1 - 2\chi^2)}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$
$I_2^{(0,3)} = \int_0^\pi \frac{\cos^3 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{\pi}{\chi^3} \left[\frac{2 - 3\chi^2}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \right]$
$I_3^{(0,2)} = \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{\pi}{2} \frac{1 + 2\chi^2}{(1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}}$

Сделаем необходимые преобразования и введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 3\chi^2 \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{8}{\pi} (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d\chi}{dt}, \\ k_2 &= 2(2 + \chi^2) \frac{d\chi}{dt}, \\ k_3 &= \chi(2 + \chi^2) \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right), \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

получим

$$M = - \frac{6r_1^2}{\delta^2(2 + \chi^2)} \cdot \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}. \quad (100)$$

Вернемся к выражению (39) для функции тока W и подставим в это выражение значения постоянных a , b , c из равенств (91). Тогда

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} (M + N) r^2 \ln r + [(1 - \ln r_1) N - M \ln r_1] \frac{r^2}{4} - \\ &- (M + N) \frac{r^2}{4} + (M - N) \frac{r_1^2}{4} \ln r + d. \end{aligned}$$

После преобразования получим значение функции тока в первом приближении

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} \left(r^2 \ln \frac{r}{r_1} + r_1^2 \ln r - r^2 \right) M + \\ &+ \frac{1}{4} \left(r^2 \ln \frac{r}{r_1} - r_1^2 \ln r \right) N + d. \end{aligned} \quad (101)$$

В выражение (101) входит постоянная интегрирования d , которая не зависит от r , но может быть функцией θ или t .

Нашей дальнейшей задачей является определить функцию тока W из уравнения

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} = \nu \Delta \Delta W. \quad (102)$$

На основании равенства (101), будем считать левую часть уравнения (102) известной и вычислим его правую часть, в результате чего определим следующее приближенное значение функции тока. Полученное значение функции тока будет удовлетворять уравнению (102) и граничным условиям системы (79). Зная выражение для функции тока W , можно найти величину $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ и составляющие поддерживающей силы масляного слоя, определяемые двумя последними уравнениями системы (78).

Определим левую часть уравнения (102), имея в виду, что $\Delta W = (M + N) \ln r - M \ln r_1 + (1 - \ln r_1) N = M \ln \frac{r}{r_1} + N \times \left(1 + \ln \frac{r}{r_1} \right)$.

Полученное выражение проинтегрируем по t :

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial t} = \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial M}{\partial t} + \left(1 + \ln \frac{r}{r_1} \right) \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (103)$$

Записав уравнение (102) в виде

$$\ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial M}{\partial t} + \left(1 + \ln \frac{r}{r_1} \right) \frac{\partial N}{\partial t} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W}{\partial r} \quad (104)$$

и интегрируя дважды по r , получим

$$\begin{aligned} \nu \Delta W &= \nu \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{4} r^2 \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) - \\ &- \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial M}{\partial t} + 2A \ln r + B. \end{aligned} \quad (105)$$

Дальнейшее интегрирование по r даст

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{1}{16} r^3 \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) - \frac{1}{64} r^3 \left(5 \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} Ar (2 \ln r - 1) + \frac{1}{2} Br + \frac{C}{r}, \end{aligned} \quad (106)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \nu W &= \frac{1}{64} r^4 \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) - \frac{1}{128} r^4 \left(3 \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{A}{2} r^2 (\ln r - 1) + \frac{B}{4} r^2 + \frac{C}{r^2} + D. \end{aligned} \quad (107)$$

Здесь A , B , C , D — постоянные интегрирования, зависящие только от θ и t .

Используя граничные условия (71), (72) и (73), перейдем к составлению уравнений, необходимых для определения постоянных интегрирования.

Продифференцировав дважды по r выражение (106) и полагая $r=r_1$, получим

$$\nu \frac{\partial W_0(r_1)}{\partial r} = -\frac{1}{64} r_1^3 \left(5 \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \right) + A r_1 \ln r_1 + \frac{1}{2} (B - A) r_1 + \frac{C}{r_1}, \quad (108)$$

$$\nu \frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2} = -\frac{1}{64} r_1^2 \left(11 \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) + A \ln r_1 + \frac{1}{2} (A + B) - \frac{C}{r_1^2}, \quad (109)$$

$$\nu \frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3} = -\frac{1}{32} r_1 \left(5 \frac{\partial M}{\partial t} - 7 \frac{\partial N}{\partial t} \right) + \frac{A}{r_1} + \frac{2C}{r_1^3}. \quad (110)$$

Заменив производные $\frac{\partial W_0(r_1)}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 W_0(r_1)}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^3 W_0(r_1)}{\partial r^3}$ их значениями из формул (71), (86) и (88), получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A r_1 \ln r_1 + \frac{1}{2} (B - A) r_1 + \frac{C}{r_1} &= \frac{1}{64} r_1^3 \left(5 \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \right), \\ A \ln r_1 + \frac{1}{2} (A + B) - \frac{C}{r_1^2} &= \frac{1}{64} r_1^2 \left(11 \frac{\partial M}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) + \nu N, \\ \frac{A}{r_1} + \frac{2C}{r_1^3} &= \frac{1}{32} r_1 \left(5 \frac{\partial M}{\partial t} - 7 \frac{\partial N}{\partial t} \right) + \frac{\nu}{r_1} M. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Решая систему уравнений (111), можно определить постоянные интегрирования A , B , C . В дальнейшем нас будет интересовать только постоянная A , для которой

$$2A = \frac{1}{4} r_1^2 \frac{\partial}{\partial t} (M - N) + \nu (M + N). \quad (112)$$

Выражение (107) и система уравнений (111) дают приближенное значение для функции тока W , удовлетворяющее уравнению (102) и граничным условиям (79).

Чтобы найти значение $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ на поверхности шипа, следует воспользоваться зависимостью (74), определив предварительно величину $-\mu r \frac{\partial \Delta W}{\partial r}$.

Умножив обе части выражения (104) на r и проинтегрировав его по r , получим

$$\nu r \frac{\partial \Delta W}{\partial r} = \frac{1}{2} r^2 \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial}{\partial t} (M - N) + 2A. \quad (113)$$

Умножив обе части выражения (113) на $(-\rho)$, где ρ — плотность смазывающей жидкости, найдем

$$-\mu r \frac{\partial \Delta W}{\partial r} = -\rho \left[\frac{1}{2} r^2 \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial}{\partial t} (M - N) + 2A \right].$$

Подставив полученный результат в равенство (74), имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = - \left[\frac{1}{2} r^2 \ln \frac{r}{r_1} \frac{\partial}{\partial t} (M + N) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial}{\partial t} (M - N) + 2A \right]. \quad (114)$$

Так как нас интересует величина $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ на шипе, то в выражении (114) положим $r=r_1-h$ и подставим в него значение постоянной интегрирования A из равенств (112):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{r=r_1-h} &= \frac{1}{2} (r_1 - h)^2 \ln \left(\frac{r_1 - h}{r_1} \right) \frac{\partial (M + N)}{\partial t} - \\ &- \frac{1}{4} (r_1 - h)^2 \frac{\partial}{\partial t} (M - N) + \\ &+ \frac{1}{4} r_1^2 \frac{\partial}{\partial t} (M - N) + \nu (M + N). \end{aligned} \quad (115)$$

Учитывая, что сказанное ранее в отношении сравнительного порядка величин M и N полностью относится и к их производным $\frac{\partial M}{\partial t}$ и $\frac{\partial N}{\partial t}$, запишем выражение (115) так:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{r=r_1-h} &= \frac{1}{2} (r_1 - h)^2 \ln \left(\frac{r_1 - h}{r_1} \right) \frac{\partial M}{\partial t} - \\ &- \frac{1}{4} (r_1 - h)^2 \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{4} r_1^2 \frac{\partial M}{\partial t} + \nu M. \end{aligned} \quad (116)$$

Разложив в выражении (116) величину $\ln \frac{r_1 - h}{r_1}$ в ряд [36] по степеням величины h , имеющей порядок величины δ , и ограничиваясь членами порядка δ^2 , получим

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{r=r_1-h} = -\frac{1}{2} \rho h^2 \frac{\partial M}{\partial t} - \mu M. \quad (117)$$

Зная величину $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ на поверхности шипа, можем рассмотреть последнее звено нашей системы (см. фиг. 22), т. е. приступить к определению составляющих поддерживающей силы масляного слоя.*

В наших рассуждениях мы исходим из того, что наиболее важной задачей для работы современных быстроходных машин является учет влияния локальных сил инерции, развиваемых смазывающей жидкостью. Следует отметить, что метод решения уравнения (102) путем последовательных приближений не отражает релаксационных процессов, происходящих в масляном слое с неустановившимся течением смазки. Принятый метод решения обуславливает квазистатическое рассмотрение смены положений центра шипа в подшипнике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙ СИЛЫ МАСЛЯНОГО СЛОЯ

Составляющие поддерживающей силы P_e и P_τ можно определить, решая уравнение (76). Подставляя в выражения (76) значение $\frac{\partial p}{\partial \theta}$, из равенства (117) получим

$$\left. \begin{aligned} P_e &= r_1 l \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \rho h^2 \frac{\partial M}{\partial t} + \mu M \right) \sin \theta d\theta, \\ P_\tau &= -r_1 l \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \rho h^2 \frac{\partial M}{\partial t} + \mu M \right) \cos \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

*В упомянутой работе [43] определяется значение функции тока, удовлетворяющее уравнению (15) и граничным условиям (71), (72), (73). Учитывая в исходном уравнении (15) полностью инерционные члены, И. М. Фишман в ходе решения задачи пренебрегает всеми слагаемыми, зависящими от времени. В результате этого в конечное выражение для величины $\left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{r=r_1-h}$

не вошли слагаемые, отражающие влияние локальных сил инерции в слое смазки при нестационарном режиме работы.

Величина $\frac{\partial M}{\partial t}$ на основании формулы (100) равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{6r_1^2}{\delta^2 (2 + \chi^2) (1 + \chi \cos \theta)^3} \left[\frac{2\chi}{2 + \chi^2} \frac{d\chi}{dt} (k_1 + k_2 \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + k_3 \cos \theta) - \left(\frac{dk_1}{dt} + \frac{dk_2}{dt} \sin \theta + \frac{dk_3}{dt} \cos \theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{d\chi}{dt} \cos \theta \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \right]. \end{aligned} \quad (119)$$

Введем в уравнения (118) значения h , M , $\frac{\partial M}{\partial t}$ согласно формулам (28), (100) и (119) и выпишем полученные выражения для P_e и P_τ :

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{3r_1^3 l \rho}{2 + \chi^2} \left[\frac{2\chi}{2 + \chi^2} \frac{d\chi}{dt} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \sin \theta d\theta - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \frac{dk_1}{dt} + \frac{dk_2}{dt} \sin \theta + \frac{dk_3}{dt} \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \sin \theta d\theta + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{d\chi}{dt} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] - \\ &\quad - \frac{6r_1^3 l \mu}{\delta^2 (2 + \chi^2)} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} \sin \theta d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

$$\left. \begin{aligned} P_\tau &= -\frac{3r_1^3 l \rho}{2 + \chi^2} \left[\frac{2\chi}{2 + \chi^2} \frac{d\chi}{dt} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \cos \theta d\theta - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \frac{dk_1}{dt} + \frac{dk_2}{dt} \sin \theta + \frac{dk_3}{dt} \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \cos \theta d\theta + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{d\chi}{dt} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2} \cos^2 \theta d\theta \right] + \\ &\quad + \frac{6r_1^3 l \mu}{\delta^2 (2 + \chi^2)} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} \cos \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

В формулах (120) и (121) слагаемые, заключенные в квадратные скобки, отражают влияние нестационарных процессов в системе масляный слой—шип на поддерживающую силу масляного слоя.

Пользуясь равенствами (99), определим производные от k_1 , k_2 , k_3 по времени:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dk_1}{dt} &= 6\chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\chi}{dt} - 6\chi^2 \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{8}{\pi} (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2\chi}{dt^2} + \\ &\quad + \frac{8}{\pi} \chi (1 - \chi^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2, \\ \frac{dk_2}{dt} &= 2 (2 + \chi^2) \frac{d^2\chi}{dt^2} + 4\chi \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2, \\ \frac{dk_3}{dt} &= (2 + 3\chi^2) \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\chi}{dt} - 2\chi (2 + \chi^2) \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{aligned} \right\} (122)$$

Вычислим проекцию несущей способности масляного слоя на линию центров P_e в соответствии с формулой (120):
Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{2\chi}{(2 + \chi^2)^2} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \sin \theta d\theta, \\ I_2 &= \frac{1}{2 + \chi^2} \int_0^\pi \frac{\frac{dk_1}{dt} + \frac{dk_2}{dt} \sin \theta + \frac{dk_3}{dt} \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \sin \theta d\theta, \\ I_3 &= \frac{3}{2 + \chi^2} \frac{d\chi}{dt} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2} \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ I_4 &= \frac{1}{2 + \chi^2} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} \sin \theta d\theta, \end{aligned} \right\} (123)$$

запишем выражение (120) так:

$$P_e = 3r_1^3 l \rho (I_1 - I_2 + I_3) - \frac{6r_1^3 l \mu}{8^2} I_4. \quad (124)$$

После вычисления интегралов (см. табл. 1) и необходимых преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} P_e &= 3r_1^3 l \rho \left[-A_1 \frac{d^2\chi}{dt^2} + A_2 \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\chi}{dt} + A_3 \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + A_4 \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right] - \frac{6r_1^3 l \mu}{8^2} \frac{1}{(2 + \chi^2) (1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2\chi^2 (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + \pi \left(2 + \chi^2 - \frac{16}{\pi^2} \right) \frac{d\chi}{dt} \right], \end{aligned} \right\} (125)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{2\pi}{\chi^2} \left\{ 1 + (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4\chi}{\pi^2 (2 + \chi^2)} \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} - 1 \right] \right\}, \\ A_2 &= \frac{2}{\chi^2 (2 + \chi^2)^2} \left[(10 + 7\chi^2 - 2\chi^4) \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} + \right. \\ &\quad \left. + 2\chi (10 + 7\chi^2 + 2\chi^4) \right], \\ A_3 &= \frac{2}{\pi \chi^3 (2 + \chi^2)^2 (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 4\chi (6 + \chi^2 - 4\chi^4) \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} + \right. \\ &\quad \left. + 3\pi^2 \left[\frac{8\chi^2 (2 + \chi^2)}{\pi^2} + 2 (2 + \chi^2)^2 (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi^2 (\chi^4 + 2\chi^2 - 4) - 8 \right] \right\}, \\ A_4 &= \frac{4}{\chi (2 + \chi^2)} \left[(1 - \chi^2) \ln \frac{1 - \chi}{1 + \chi} + \chi (2 + \chi^2) \right]. \end{aligned} \right\} (126)$$

В соответствии с формулой (121) введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} I_5 &= \frac{2\chi}{(2 + \chi^2)^2} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \cos \theta d\theta, \\ I_6 &= \frac{1}{2 + \chi^2} \int_0^\pi \frac{\frac{dk_1}{dt} + \frac{dk_2}{dt} \sin \theta + \frac{dk_3}{dt} \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \cos \theta d\theta, \\ I_7 &= \frac{3}{2 + \chi^2} \frac{d\chi}{dt} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2} \cos^2 \theta d\theta, \\ I_8 &= \frac{1}{2 + \chi^2} \int_0^\pi \frac{k_1 + k_2 \sin \theta + k_3 \cos \theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\} (127)$$

и запишем выражение (121) так:

$$P_\tau = -3r_1^3 l \rho (I_5 - I_6 + I_7) + \frac{6r_1^3 l \mu}{8^2} I_8. \quad (128)$$

Вычислив интегралы и произведя необходимые преобразования, получим

$$\left. \begin{aligned} P_\tau &= 3r_1^3 l \rho \left[B_1 \frac{d^2\chi}{dt^2} - B_2 \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\chi}{dt} - B_3 \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 - B_4 \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right] + \\ &\quad + \frac{6r_1^3 l \mu \pi \chi}{8^2 (2 + \chi^2) (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{4}{\pi (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\chi}{dt} \right], \end{aligned} \right\} (129)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2}{\chi^2(2+\chi^2)} \times \\
 &\times \left\{ (2+\chi^2) \ln \frac{1-\chi}{1+\chi} + 2\chi \left[4+\chi^2 - 2(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \\
 B_2 &= \frac{2\pi}{\chi^2(2+\chi^2)^2(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}}} \times \\
 &\times \left[2+3\chi^2-2\chi^4 - (10+7\chi^2-2\chi^4)(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}} \right], \\
 B_3 &= \frac{4}{\chi^3(2+\chi^2)^2(1-\chi^2)} \left[3(\chi^6+3\chi^4-4) \ln \frac{1-\chi}{1+\chi} + \right. \\
 &\quad \left. + 2\chi(5\chi^4+3\chi^2-6)(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \chi(3\chi^6+16\chi^4+6\chi^2-36) \right], \\
 B_4 &= 4\pi \frac{(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 - (1-\chi^2)^{\frac{1}{2}} \right]}{\chi(2+\chi^2)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Итак, при нестационарных процессах в смазочном слое проекции реакции смазочного слоя на линию центров и перпендикуляр к ней определяются равенствами (125) и (129). Слагаемые, заключенные в первые квадратные скобки обоих равенств, учитывают влияние локальных сил инерции при неустановившемся процессе в системе масляный слой—шип. То обстоятельство, что в эти слагаемые входят проекции ускорения центра шипа на линию центров и перпендикуляр к ней, указывает на связь между ускоренными движениями шипа и частицами смазывающей жидкости.

Исследование, проведенное А. Т. Полецким [34], показало, что влияние присоединенной массы шипа может в несколько раз превосходить влияние массы вала в подшипниках машин с относительным зазором $\psi = 0,003 \div 0,0005$. При определении поддерживающей силы масляного слоя подшипников быстровращающихся валов пренебрежение слагаемыми, зависящими от ускорения центра шипа, может существенно изменить результат вычисления.

Слагаемые, заключенные во вторые квадратные скобки равенств (125) и (129), обусловлены вязкостными свойствами смазывающей жидкости.

Если при решении задачи не принимать во внимание инерционность масляного слоя, а нестационарность учитывать только граничными условиями, то равенства (125) и (129) примут вид

$$\left. \begin{aligned}
 P_e &= - \frac{6r_1^3 l \mu}{\delta^2(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2\chi^2(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \pi \left(2 + \chi^2 - \frac{16}{\pi^2} \right) \frac{d\chi}{dt} \right], \\
 P_\tau &= \frac{6r_1^3 l \mu \pi \chi}{\delta^2(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{4}{\pi(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\chi}{dt} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

Если предположить, что смазывающий слой полностью охватывает шип и в соответствии с этим при определении составляющих поддерживающей силы интегрировать в пределах от 0 до 2π , то равенства (131) запишутся в виде, предложенном Гаррисоном [54]:

$$\left. \begin{aligned}
 P_e &= - \frac{12\pi r_1^3 l \mu}{\delta^2(1-\chi^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d\chi}{dt}, \\
 P_\tau &= \frac{12r_1^3 l \mu \pi \chi}{\delta^2(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

При вращательном движении шипа и неподвижном центре шипа, когда на шип действует постоянная по величине и направлению внешняя нагрузка, получим следующие известные выражения для составляющих поддерживающей силы смазочного слоя:

$$\left. \begin{aligned}
 P_e &= - \frac{12r_1^3 l \mu \omega_0 \chi^2}{\delta^2(2+\chi^2)(1-\chi^2)}, \\
 P_\tau &= \frac{6r_1^3 l \mu \pi \omega_0 \chi}{\delta^2(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Для рассматриваемого нами нестационарного движения несжимаемой вязкой жидкости обобщенное уравнение Рейнольдса имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu v_r +$$

$$+ \frac{6\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta h) + 6\mu \frac{\partial}{\partial z} (v_z h). \quad (135)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙ СИЛЫ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ШИПА С УЧЕТОМ ТОРЦОВОГО ИСТЕЧЕНИЯ СМАЗКИ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В предыдущей главе поддерживающая сила масляного слоя определялась для подшипника неограниченной протяженности, в котором не учитывается торцовое вытекание смазки.

Реальные подшипники имеют конечную длину, вследствие чего результаты, полученные в предыдущей главе, будут тем точнее, чем длиннее рассматриваемый подшипник.

Существуют различные методы определения закона распределения гидродинамического давления для подшипника конечной длины. Анализ этих методов подробно выполнен М. В. Коровчинским [25].

Обычно при интегрировании уравнения Рейнольдса для подшипника конечной длины

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu V \frac{\partial h}{\partial x} \quad (134)$$

решение ищут в виде произведения двух функций. Например, М. В. Коровчинский [25] записывает решение в виде

$$p(x, z) = p_\infty(x) \varphi(z),$$

где $p_\infty(x)$ — функция распределения давления в подшипнике неограниченной длины;

$\varphi(z)$ — неизвестная функция, определяемая по методу Галеркина.

При более общем подходе к решению задачи отсутствуют априорные допущения относительно вида функции распределения давления в смазочном слое. Подобное решение при неподвижном центре шипа дано А. Т. Полецким [35].

Нестационарность процессов учитывается лишь граничными условиями.

Решение уравнения (135) будем искать при граничных условиях для скоростей, определяемых выражениями (69) и (70), к которым дополнительно присоединяется условие $v_z = 0$ на поверхностях шипа и подшипника. Величина v_z характеризует скорость частицы масла вдоль оси подшипника.

Полагая, что толщина масляного слоя h не зависит от z , перепишем уравнение (135) с точностью до δ , пренебрегая членами порядка δ^2 :

$$\frac{1}{r^2} h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{3h^2}{r^2} \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} =$$

$$= -6\mu\delta\chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \theta + 12\mu\delta \frac{d\chi}{dt} \cos \theta. \quad (136)$$

Умножив последнее уравнение на $\frac{r^2}{h^3}$ и обозначив $\frac{z}{r} = w$, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial w^2} = \frac{-6\mu r^2 \chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \theta + 12\mu r^2 \frac{d\chi}{dt} \cos \theta}{\delta^2 (1 + \chi \cos \theta)^3} -$$

$$- \frac{3}{h} \frac{dh}{d\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (137)$$

При интегрировании уравнения (137) принимаем следующие граничные условия для θ и z : $0 \leq \theta \leq \pi$; $-\frac{l}{2} \leq z \leq +\frac{l}{2}$

или

$$0 \leq \theta \leq \pi; \quad -\lambda \leq w \leq +\lambda, \quad (138)$$

где

$$\lambda = \frac{l}{2}.$$

Так как точное интегрирование уравнения (137) невозможно, то распределение давления в слое смазки будем находить приближенным способом.

Положим, как это сделал А. Т. Полецкий [35], что

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = f(\theta, \omega), \quad (139)$$

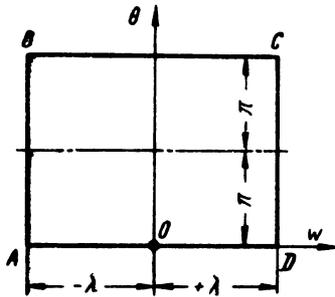
где $f(\theta, \omega)$ — известная функция.

Тогда уравнение (137) примет вид уравнения Пуассона:

$$\Delta p = A(\theta) - \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} f(\theta, \omega), \quad (140)$$

где

$$A(\theta) = - \frac{6\mu r^2 \chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \theta + 12\mu r^2 \frac{d\chi}{dt} \cos \theta}{8^2 (1 + \chi \cos \theta)^3};$$



Фиг. 23. К определению граничных условий подшипника конечной длины.

Такой вид задания функции $f(\theta, \omega)$ приближается к наблюдаемому в реальных подшипниках распределению давления в смазочном слое.

Уравнение (140) запишется теперь как

$$\Delta p = A(\theta) - \frac{3}{h} \frac{dh}{d\theta} \frac{dp_\infty(\theta)}{d\theta}. \quad (142)$$

Решение уравнения (142) может быть использовано для следующих приближений.

Интегрирование уравнения (142) произведем при следующих граничных условиях (фиг. 23):

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \pi \quad p &= 0; \\ \text{при } w = \pm \lambda \quad p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Общее решение уравнения (142) может быть представлено суммой

$$p = p_1 + p_2, \quad (144)$$

где p_1 — частное решение неоднородного уравнения (142);
 p_2 — общее решение однородного уравнения (уравнения Лапласа).

Частное решение уравнения (142) совпадает с решением для подшипника неограниченной протяженности. При интегрировании этого уравнения в пределах от 0 до π получим решение в виде

$$\begin{aligned} p_1 = p_\infty = & - \frac{6\mu r^2 \chi^3}{8^2 (1 - \chi^2)^2} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \times \\ & \times \left[\frac{(1 + \chi^2) \sqrt{1 - \chi^2}}{\chi^2 (1 + \chi \cos \theta)} \sin \theta - \frac{\sqrt{1 - \chi^2} (\chi + \cos \theta)}{2\chi (1 + \chi \cos \theta)^2} \sin \theta + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2\chi} \arcsin \frac{\chi + \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} \right] + \frac{12\mu r^2}{28^2 \chi (1 + \chi \cos \theta)^2} \frac{d\chi}{dt} - \\ & - \left[\frac{18\mu r^2 \chi^2}{8^2 (2 + \chi^2)} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) - \frac{48\mu r^2 \sqrt{1 - \chi^2}}{\pi 8^2 (2 + \chi^2)} \frac{d\chi}{dt} \right] \times \\ & \times \left[\frac{2 + \chi^2}{2\chi^2} \arcsin \frac{\chi + \cos \theta}{1 + \chi \cos \theta} + \frac{2\sqrt{1 - \chi^2} \sin \theta}{\chi (1 + \chi \cos \theta)} - \right. \\ & \left. - \frac{(\chi + \cos \theta) \sqrt{1 - \chi^2}}{2(1 + \chi \cos \theta)^2} \sin \theta \right] \frac{\chi^2}{(1 - \chi^2)^2} - \\ & - \frac{6\mu r^2 (1 + \chi^2)}{8^2 (1 - \chi^2)^2 \chi} \frac{d\chi}{dt}. \end{aligned} \quad (145)$$

Чтобы найти общее решение уравнения Лапласа

$$\Delta p_2 = 0, \quad (146)$$

определим граничные условия функции $p_2(\theta, \omega)$ из условия

$$p_2 = p - p_1, \quad (147)$$

где p_1 — решение для подшипника бесконечной длины.

Граничные условия

$$\text{при } \theta = 0 \quad p_2 = 0;$$

$$\text{при } \theta = \pi \quad p_2 = 0;$$

$$\text{при } w = \pm \lambda \quad p_2 = -p_1(\theta). \quad (148)$$

Интегрируя уравнение Лапласа методом Фурье, найдем элементарное решение в виде

$$p_2 = x(\theta) z(\omega). \quad (149)$$

Подставив равенство (149) в уравнение (146), получим

$$\frac{x''(\theta)}{x(\theta)} = -\frac{z''(\omega)}{z(\omega)} = -k^2, \quad (150)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x''(\theta) + k^2 x(\theta) &= 0, \\ z''_2(\omega) - k^2 z(\omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

где k^2 — число постоянное и вещественное.

Общее решение первого уравнения системы (151)

$$x(\theta) = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta. \quad (152)$$

Чтобы p_2 удовлетворяло первым двум граничным условиям (148), необходимо $x(0) = x(\pi) = 0$, что дает $c_1 \equiv 0$; $c_2 \sin k\pi = 0$.

Чтобы c_2 не было равно нулю, необходимо иметь $\sin k\pi = 0$, что дает $k_n = n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, — ряд натуральных чисел.

Перейдем к решению второго уравнения системы (151). Общее решение запишем в виде

$$z_n(\omega) = c_3 \operatorname{ch} n\omega + c_4 \operatorname{sh} n\omega. \quad (153)$$

Элементарное решение уравнения (149) с учетом решений (152) и (153)

$$p_{2n} = (A_n \operatorname{ch} n\omega + B_n \operatorname{sh} n\omega) \sin n\theta. \quad (154)$$

Общее решение уравнения Лапласа ищем в виде суммы элементарных решений:

$$p_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} n\omega + B_n \operatorname{sh} n\omega) \sin n\theta. \quad (155)$$

Функция $p_2(\theta, \omega)$ удовлетворяет первым двум граничным условиям уравнения (148). Постоянные A_n и B_n выберем так, чтобы функция $p_2(\theta, \omega)$ удовлетворяла бы его последним условиям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} n\lambda + B_n \operatorname{sh} n\lambda) \sin n\theta &= -p_1(\theta), \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} n\lambda - B_n \operatorname{sh} n\lambda) \sin n\theta &= -p_1(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

Разлагая $-p_1(\theta)$ в ряд Фурье, в промежутке от 0 до π по $\sin n\theta$, найдем

$$-p_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \quad (157)$$

где

$$b_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p_1(\theta) \sin n\theta d\theta. \quad (158)$$

Подставляя выражение (157) в (156) и сравнивая коэффициенты при $\sin n\theta$, получим

$$A_n = \frac{b_n}{\operatorname{ch} n\lambda}; \quad B_n = 0. \quad (159)$$

Общее решение уравнения Лапласа (146), удовлетворяющее условиям (148), имеет вид

$$p_2(\theta, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\operatorname{ch} n\lambda} \operatorname{ch} n\omega \sin n\theta. \quad (160)$$

Ряд $p_2(\theta, \omega)$ сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{e^a} < 1$, где $a = \lambda - |\omega|$ и $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Общее решение уравнения (142) на основании (144) запишется в виде

$$p = p_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\operatorname{ch} n\lambda} \operatorname{ch} n\omega \sin n\theta, \quad (161)$$

где слагаемое p_{∞} определяется выражением (145).

Из анализа решения (153) следует, что давление p удовлетворяет граничным условиям. При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ первое слагаемое в правой части (161) обращается в нуль как решение для бесконечного подшипника. При $\omega = \pm \lambda$

$$p = p_{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta. \quad (162)$$

Учитывая условие (157), получим $p = 0$.

Решение (161) можно рассматривать как сумму двух давлений, из которых первое учитывает давление для подшипника бесконечной длины, а второе — дополнительное давление, обусловленное конечной длиной подшипника.

При $\lambda \rightarrow \infty$ второе слагаемое в решении (161) стремится к нулю и остается решение для подшипника бесконечной длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЙ СИЛЫ

Проекции поддерживающей силы на линию центров и направление, перпендикулярное ей, определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} P_e &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_0^{\pi} p \cos \theta d\theta, \\ P_{\gamma} &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_0^{\pi} p \sin \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

На основании соотношения (144) гидродинамическое давление смазочного слоя

$$p = p_\infty + p_2. \quad (164)$$

Представим выражения (163) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P_e &= r_l \int_0^\pi p_\infty \cos \theta d\theta + r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^\pi p_2 \cos \theta d\theta dw, \\ P_\tau &= r_l \int_0^\pi p_\infty \sin \theta d\theta + r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^\pi p_2 \sin \theta d\theta dw. \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

Первые слагаемые обоих выражений были вычислены в предыдущей главе, и результаты представлены формулами (125) и (129).

Чтобы найти вторые слагаемые выражения (165), воспользуемся зависимостью (160). После интегрирования уравнения (165) получим

$$\left. \begin{aligned} P_e &= - \frac{6\mu r_l^3 l}{\delta^2 (2 + \chi^2) (1 - \chi^2)^2} \left\{ 2\chi^2 \sqrt{1 - \chi^2} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \pi \left[\frac{16}{\pi^2} - (2 + \chi^2) \right] \frac{d\chi}{dt} \right\} + 4r^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 - 1} \text{th } n\lambda, \\ P_\tau &= - \frac{6\mu r_l^3 l \pi \chi}{\delta^2 (2 + \chi^2) \sqrt{1 - \chi^2}} \left[\left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + \frac{4}{\pi \sqrt{1 - \chi^2}} \frac{d\chi}{dt} \right] + \\ &\quad + \pi r^2 b_1 \text{th } \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

где n — только четное число, т. е. $n=2, 4, 6, \dots$

Значения коэффициентов b_n в уравнении (166) определяются на основании равенства (158), представленного в виде

$$b_n = - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \cos n\theta d\theta. \quad (167)$$

Величина градиента

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} &= \frac{6\mu r_l^2 \chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \cos \theta + 12\mu r_l^2 \frac{d\chi}{dt} \sin \theta}{\delta^2 (1 + \chi \cos \theta)^3} + \\ &+ \left[\frac{18\mu r_l^2 \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \chi^2}{(2 + \chi^2) \delta^2} - \frac{48\mu r_l^2 \frac{d\chi}{dt} \sqrt{1 - \chi^2}}{\delta^2 (2 + \chi^2) \pi} \right] \frac{1}{(1 + \chi \cos \theta)^3}. \end{aligned}$$

Подставив значение b_n и $\frac{\partial p_1}{\partial \theta}$ в выражение (166), получим после преобразований

$$\left. \begin{aligned} P_e &= - \frac{6\mu r_l^3 l}{\delta^2 (2 + \chi^2) (1 - \chi^2)^2} \left\{ 2\chi^2 \sqrt{1 - \chi^2} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \pi \left[\frac{16}{\pi^2} - (2 + \chi^2) \right] \frac{d\chi}{dt} \right\} - \frac{24\mu r_l^3 l}{\pi \lambda \delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{th } n\lambda}{n(n^2 - 1)} \times \\ &\quad \times \left\{ \chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) I_1^n + 2I_2^n \frac{d\chi}{dt} + \frac{1}{2 + \chi^2} \left[3 \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \chi^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8}{\pi} \sqrt{1 - \chi^2} \frac{d\chi}{dt} \right] I_3^n \right\}, \\ P_\tau &= \frac{6\mu r_l^3 l \pi \chi}{\delta^2 (2 + \chi^2) \sqrt{1 - \chi^2}} \left[\left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi \sqrt{1 - \chi^2}} \frac{d\chi}{dt} \right] \left(1 - \frac{1}{\lambda} \text{th } \lambda \right), \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

где интегралы $I_1^n = \int_0^\pi \frac{\cos \theta \cos n\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} d\theta$, $I_2^n = \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos n\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} d\theta$, $I_3^n =$

$= \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3} d\theta$ вычисляются при четном значении индекса n .

Выражение, стоящее под знаком \sum за фигурной скобкой первой формулы (168) ограничено в интервале изменения χ от 0 до 1. Так как $\text{th } n\lambda$ не превосходит единицы, то все выражение под знаком суммы сходится ввиду того, что величина $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{m}{n(n^2 - 1)}$ уменьшается очень быстро.

Определяя величину P_e , необходимо вычислять интегралы, задаваясь значениями $n=2, 4, 6$, соответственно при $\frac{l}{d} > 2$, $1 < \frac{l}{d} < 2$, $\frac{l}{d} < 1$. При этом составляющие поддерживающей силы P_e и P_τ будут вычислены с точностью до величины относительного зазора ψ . При $\frac{l}{d} > 2$ влияние конечности длины на поддерживающую силу уменьшается, а при $\frac{l}{d} < 1$ возрастает. Чем меньше отношение $\frac{l}{d}$, тем большее число слагаемых надо учитывать в выражении для P_e .

В связи с этим при $\frac{l}{d} < 1$ целесообразно определить поддерживающую силу, считая подшипник коротким. Результаты подсчетов в обоих случаях удовлетворительные.

**ПОДДЕРЖИВАЮЩАЯ СИЛА МАСЛЯНОГО СЛОЯ
В КОРОТКИХ ПОДШИПНИКАХ**

В машиностроении, в частности в турбостроении, широко применяются подшипниковые узлы, у которых величина $\frac{l}{d} < 1$. Эти подшипники относятся к категории так называемых коротких. Рассмотрим, как определяется поддерживающая сила в таких подшипниках.

Применяя к короткому подшипнику уравнение Рейнольдса (135), опустим первое слагаемое в левой его части. По мере уменьшения длины подшипника по сравнению с его диаметром, второе слагаемое левой части уравнения будет значительно превосходить первое. Доминирующее влияние на распределение гидродинамического давления в слое смазки в этом случае оказывают торцовые утечки. Допустимость такого предположения доказана Ф. Оквирком [50], [60] и использована Р. Холлсом [55].

Представим уравнение (135) в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu v_r + 6\mu \frac{\partial}{r\partial\theta} (v_\theta h) + 6\mu \frac{\partial}{\partial z} (v_z h). \quad (169)$$

Граничные условия для скоростей v_r , v_θ , v_z приняты такими же, как для подшипника конечной длины.

Проинтегрируем уравнения (169) для следующих граничных условий: при $z=0$ и $z=l$ $p=0$.

После интегрирования и соответствующих преобразований имеем

$$p = \frac{12\mu \frac{d\chi}{dt} \cos \theta - 6\mu\chi \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \theta}{2\delta^2 (1 + \chi \cos \theta)^3} z(z-l). \quad (170)$$

Из выражения (170) следует, что давление вдоль оси подшипника изменяется по закону параболы.

Составляющие поддерживающей силы определяются формулами, подобными (163), т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_e &= r \int_0^l \int_0^\pi p \cos \theta d\theta dz, \\ P_\tau &= r \int_0^l \int_0^\pi p \sin \theta d\theta dz. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Учитывая зависимость (170) и используя таблицу определенных интегралов (см. табл. 1), получим

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{\mu l^3 r}{2\delta^2} \left[\pi \frac{1 + 2\chi^2}{(1 - \chi^2)^2} \frac{d\chi}{dt} + \frac{2 \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \chi^2}{(1 - \chi^2)^2} \right], \\ P_\tau &= - \frac{\mu l^3 r}{2\delta^2} \left[\frac{4\chi}{(1 - \chi^2)^2} \frac{d\chi}{dt} + \frac{\left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \pi \chi}{2(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Часто при эксплуатации коротких подшипников смазка подается с торца под давлением p_0 . Это обстоятельство влияет на закон распределения давления в масляном слое и видоизменяет выражения для составляющих реакций смазки на шип.

Проинтегрировав уравнение (169) при известных граничных условиях для v_r , v_θ и v_z , получим давление в масляном слое:

$$p = \frac{-6\mu\chi \sin \theta \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + 12\mu \frac{d\chi}{dt} \cos \theta}{\delta^2 (1 + \chi \cos \theta)^3} \cdot \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2. \quad (173)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий для функции давления p : при $z=0$ $p=p_0$; при $z=l$ $p=0$.

Распределение гидродинамического давления в масляном слое короткого подшипника при подаче масла под давлением с торца подшипника

$$p = \frac{-6\mu\chi \sin \theta \left(\omega_0 - 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) + 12\mu\delta \frac{d\chi}{dt} \cos \theta}{2\delta^2 (1 + \chi \cos \theta)^3} z(z-l) - \frac{p_0}{l} z + p_0. \quad (174)$$

Два последних слагаемых учитывают влияние давления подачи масла, которое изменяется по длине подшипника по линейному закону.

Так как при подаче масла в подшипник под давлением вряд ли возможен разрыв масляного слоя, границами интегрирования примем 0 и 2π . Таким образом, границы протяженности масляного слоя по длине шипа и по его охвату будут

$$0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (175)$$

Значения интегралов вида

$$I_k^{m,n} = \int_0^{2\pi} \frac{\pi \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^k}$$

Интеграл	Значение интеграла
$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\frac{2\pi}{(1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{2\pi}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$
$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\pi \frac{2 + \chi^2}{(1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}}$
$I_3^{(1,0)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	0
$I_3^{(0,1)} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$-\frac{3\pi\chi}{(1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}}$
$I_1^{(1,0)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	0
$I_1^{(2,0)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\frac{2\pi}{\chi^2} \left[1 - (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}} \right]$
$I_1^{(1,1)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	0
$I_2^{(1,1)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	0

Интеграл	Значение интеграла
$I_2^{(2,1)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{2\pi}{\chi^3} \left[\frac{\chi^2 - 2}{(1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}} + 2 \right]$
$I_2^{(1,2)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	0
$I_3^{(1,0)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	0
$I_3^{(2,0)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{\pi}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$
$I_3^{(1,1)} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	0
$I_1^{(0,1)} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$-\frac{2\pi}{\chi} \frac{1 - (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$I_1^{(0,2)} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{1 + \chi \cos \theta}$	$\frac{2\pi}{\chi^2} \frac{1 - (1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \chi^2)^{\frac{1}{2}}}$
$I_2^{(0,2)} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{2\pi}{\chi^2} \frac{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}} - (1 - 2\chi^2)}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}}$
$I_2^{(0,3)} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^2}$	$\frac{2\pi}{\chi^3} \left[\frac{2 - 3\chi^2}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}} - 2 \right]$
$I_3^{(0,3)} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \theta d\theta}{(1 + \chi \cos \theta)^3}$	$\frac{\pi(1 + 2\chi^2)}{(1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}}$

Интегрируя выражения (173) при указанных границах интегрирования (табл. 2), получим следующие зависимости для составляющих поддерживающей силы масляного слоя:

$$\left. \begin{aligned} P_e &= + \frac{\mu r l^3 \pi (1 + 2\chi^2)}{\delta^2 (1 - \chi^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{d\chi}{dt}, \\ P_T &= - \frac{\mu r l^3 \pi \chi}{2\delta^2 (1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\omega_0 - 2 \frac{d\chi}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (176)$$

Давление p_0 в явном виде не входит в выражения (176), его влияние проявляется изменением граничных условий. Если движения центра шипа в подшипнике не наблюдается, т. е. $\frac{d\chi}{dt}$ и $\frac{d\gamma}{dt}$ равны нулю, то формулы (176) принимают вид, приводимый А. И. Голубевым [12]:

$$P_T = - \frac{\pi}{2} \frac{\mu r l^3 \omega_0}{\delta^2} \frac{\chi}{(1 - \chi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (177)$$

Закономерности, установленные для короткого подшипника, экспериментально подтверждены в ряде работ [50], [60]. Сравнительно простой вид выражений, характеризующих распределение гидродинамического давления и поддерживающей силы, учитывающих торцовое истечение смазки и движение центра шипа, делает практически удобным применять зависимости, полученные в настоящем параграфе.

КОЭФФИЦИЕНТ НАГРУЖЕННОСТИ ПОДШИПНИКА

Одной из важнейших характеристик подшипника является коэффициент нагруженности или, как его еще называют, коэффициент грузоподъемности, определяемый равенством

$$K_s = \frac{P}{ld} \cdot \frac{l^2}{\mu \omega_0}, \quad (178)$$

где P — величина поддерживающей силы, действующей на шип со стороны смазки.

Коэффициент нагруженности обычно представляют в виде

$$K_s = \frac{q l^2}{\mu \omega_0}, \quad (179)$$

где q — удельное давление на шип, отнесенное к единице площади проекции подшипника.

Имея в виду соотношение (133), получим проекции коэффициента нагруженности на линию центров и перпендикулярное ей направление:

$$\left. \begin{aligned} K_{3e} &= - \frac{6\chi_0^2}{(2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)}, \\ K_{3T} &= \frac{3\pi\chi}{(2 + \chi_0^2)\sqrt{1 - \chi_0^2}}. \end{aligned} \right\}$$

Для подшипника неограниченной длины полная величина коэффициента нагруженности

$$K_{3\infty} = \frac{3\pi\chi_0}{(2 + \chi_0^2)\sqrt{1 - \chi_0^2}} \times \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \frac{\chi_0^2}{1 - \chi_0^2}}. \quad (181)$$

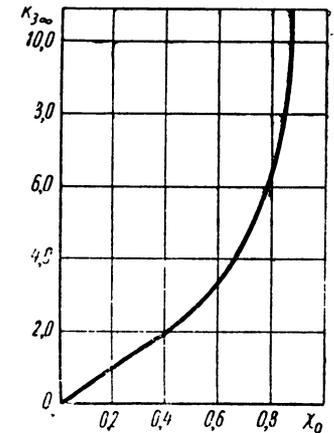
При расчете важно вычислить коэффициент нагруженности, который служит фактором относительного сравнения подшипников по нагрузке. Зависимость коэффициента нагруженности от относительного эксцентриситета согласно формуле (181) представлена на фиг. 24.

Рассмотрим коэффициент нагруженности подшипника конечной длины. На основании выражений (168) при неподвижном центре шипа

$$\left. \begin{aligned} P_e &= - \frac{12\mu r^3 l \chi_0^2 \omega_0}{\delta^2 (2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)} - \frac{24\mu r^3 l \omega_0}{\pi l \delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi \operatorname{th} n\lambda}{n(n^2 - 1)} \times \\ &\quad \times \left(I_1^n + \frac{3\chi}{2 + \chi^2} I_3^n \right), \\ P_T &= \frac{6\mu r^3 l \pi \chi_0}{\delta^2 (2 + \chi_0^2)\sqrt{1 - \chi_0^2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda \right). \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Тогда проекции коэффициента нагруженности на линию центров и на перпендикулярное ей направление будут

$$\left. \begin{aligned} K_{3e} &= - \frac{6\chi_0^2}{(2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)} - \frac{12}{\pi\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi \operatorname{th} \lambda}{n(n^2 - 1)} \left(I_1^n + \frac{3\chi_0}{2 + \chi_0^2} I_3^n \right), \\ K_{3T} &= \frac{3\pi\chi_0}{(2 + \chi_0^2)\sqrt{1 - \chi_0^2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda \right). \end{aligned} \right\} \quad (183)$$



Фиг. 24. Изменение коэффициента нагруженности для бесконечного подшипника.

Величина коэффициента нагруженности для подшипника конечной длины

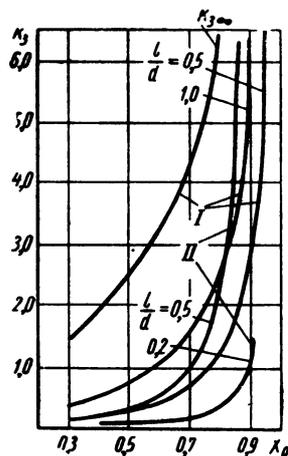
$$K_3 = \sqrt{K_{3e}^2 + K_{3r}^2}$$

Если в формулах (182) положить $\lambda \rightarrow \infty$, что соответствует случаю подшипника неограниченной протяженности, то получим выражения (180).

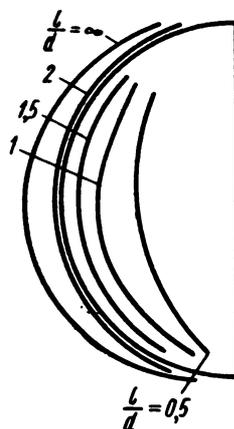
Подставив в формулы (183) $n=2$, что возможно сделать, обеспечив достаточную степень точности при $l/d > 1$, получим

$$\left. \begin{aligned} K_{3e} &= -\frac{6\chi_0^2}{(2+\chi_0^2)(1-\chi_0^2)} + \frac{2\chi_0 \operatorname{th} 2\lambda}{\lambda} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\chi_0^3} \left(\frac{9\chi_0^4 - 10\chi_0^2 + 4}{2(1-\chi_0^2)^2} - 2 \right) - \frac{9\chi_0^3}{2(2+\chi_0^2)(1-\chi_0^2)^2} \right], \\ K_{3r} &= \frac{3\pi\chi_0}{(2+\chi_0^2)\sqrt{1-\chi_0^2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda \right). \end{aligned} \right\} (184)$$

При использовании формул (183) в случае $l/d < 1$ необходимо в выражении коэффициента нагруженности (183) принять $n=6$



Фиг. 25. Изменения коэффициента нагруженности для различных отношений $\frac{l}{d}$:
I — реальный, II — короткий.



Фиг. 26. Кривые подвижного равновесного состояния при различных отношениях $\frac{l}{d}$.

и выше, чтобы получить достаточную точность, т. е. точность порядка ϕ . Сравнение результатов вычислений по формулам (183) с формулами для короткого подшипника (фиг. 25) показывает, что при $l/d < 1$ вполне возможно считать подшипник коротким (см. табл. 3).

Значения коэффициента нагруженности K_3 для различных

отношений $\frac{l}{d}$

$\frac{l}{d}$	Значения χ_0							
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
Подшипник конечной длины								
1,5	0,600	0,835	1,132	1,527	2,170	3,407	7,163	15,030
1,0	0,370	0,532	0,744	1,063	1,544	2,552	5,710	12,590
0,5	0,130	0,194	0,290	0,438	0,696	1,243	3,810	7,865
Короткий подшипник								
1,0	0,580	0,930	1,500	2,540	4,850	11,400	41,400	—
0,8	0,370	0,595	0,980	1,630	3,100	7,300	26,400	—
0,7	0,284	0,460	0,735	1,195	2,380	5,600	20,100	—
0,5	0,145	0,232	0,374	0,635	1,120	2,860	10,400	—
0,4	0,094	0,149	0,240	0,407	0,760	1,820	6,640	—
0,3	0,050	0,084	0,135	0,228	0,436	1,030	3,730	—
0,2	0,023	0,037	0,060	0,103	0,190	0,457	1,650	—

Примечание. Коэффициент K_3 , подсчитанный по формуле (186) для короткого подшипника, дает удовлетворительные результаты при малых отношениях $\frac{l}{d}$ и малых значениях относительного эксцентриситета χ_0 , что встречается у высокооборотных машин.

В случае короткого подшипника поддерживающая сила, уравновешивающая вертикальную нагрузку,

$$P = \frac{\mu \lambda l^2 r^2 \omega_0 \chi_0}{2b^2} \frac{V \pi^2 (1 - \chi_0^2) + 16\chi_0^2}{(1 - \chi_0^2)^2}. \quad (185)$$

Коэффициент нагруженности короткого подшипника

$$K_{3K} = \frac{\lambda^2 \chi_0}{2(1 - \chi_0^2)^2} \sqrt{\pi^2 + \chi_0^2 (16 - \pi^2)}. \quad (186)$$

При торцовой подаче масла

$$K_{3K} = \frac{\pi \lambda^2}{4} \frac{\chi_0}{\sqrt{(1 - \chi_0^2)^3}}. \quad (187)$$

В каждом из рассмотренных в этом параграфе случаев положение линии центров определяется углом γ , составленным линией центров с вертикалью. Для подшипника неограниченной протяженности

$$\operatorname{tg} \gamma_\infty = \frac{\pi (1 - \chi_0^2)^{\frac{1}{2}}}{2\chi_0}. \quad (188)$$

Для подшипника конечной длины

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\xi_2}{\xi_1} \operatorname{tg} \gamma_\infty, \\ \xi_1 &= 1 + \frac{2(2 + \gamma_0^2)(1 - \gamma_0^2)}{\pi \lambda \gamma_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_0 \operatorname{th} n\lambda}{n(n^2 - 1)} \left(I_n^1 + \frac{3\gamma}{2 + \gamma^2} I_n^3 \right), \\ \xi_2 &= 1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda. \end{aligned} \right\} (189)$$

Для короткого подшипника

$$\operatorname{tg} \gamma_k = \frac{\pi \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{4\gamma_0}. \quad (190)$$

Кривые подвижного равновесия, построенные для различных значений l/d , представлены на фиг. 26.

Торцовые утечки масла в подшипнике конечной длины существенно влияют на несущую способность подшипника, уменьшая ее по сравнению с подшипником бесконечной длины. Особенно резко это проявляется для подшипников с $l/d < 1,5$. Более сильно сказывается влияние торцовых утечек при значениях относительного эксцентриситета $\chi > 0,7$.

Исследование [35] положения кривых подвижного равновесия при различных значениях l/d (фиг. 26) показало, что при $l/d < 2$ они лежат между кривыми, характеризующими бесконечный и короткий подшипники.

При $l/d = 2$ кривая практически может быть принята за полуокружность с радиусом, равным половине радиального зазора. Сравнение формул (188), (189), (190) показывает, что

$$\operatorname{tg} \gamma_k < \operatorname{tg} \gamma < \operatorname{tg} \gamma_\infty \quad (191)$$

Таким образом, угол, образованный с вертикалью линией центров подшипника конечной длины, занимает промежуточное положение между углом для подшипника бесконечной длины и углом короткого подшипника, являющимися предельными случаями.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ШИПА В ПОДШИПНИКЕ

ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

При действии на подшипник нагрузок, изменяющихся по величине и направлению, центр шипа в течение рабочего цикла движется по траекториям определенного вида. В подобных случаях движение центра шипа является его нормальным рабочим состоянием.

Методика определения поддерживающей силы масляного слоя при движущемся центре шипа с учетом инерционности смазки была рассмотрена во второй главе.

Движение центра шипа в подшипнике может возникнуть и при нагружении последнего постоянной по величине и направлению силой. Именно этот случай будет нас интересовать теперь.

Причины, вызывающие движение центра шипа, могут быть условно разделены на механические и гидродинамические.

Первая группа включает такие факторы, как неуравновешенность ротора, жесткость подшипников и вала, несоосность и т. п.

Вторая группа объединяет причины, вызывающие появление в масляном слое подшипника неуравновешенных гидродинамических сил, действующих на шип.

Таким образом, движение центра шипа в подшипнике, часто наблюдаемое на практике, складывается из двух движений, возникающих в результате указанных причин.

В дальнейшем нас будет интересовать движение центра шипа, вызванное действием на шип неуравновешенных гидродинамических сил со стороны масляного слоя, являющееся признаком нарушения нормальной работы подшипника, нагруженного силой, постоянной по величине и направлению.

Движение центра шипа по какой-либо траектории описывается первыми двумя уравнениями системы (78). В период возмущенного движения на шип будут действовать со стороны масляного слоя силы, определяемые формулами (125), (129). Подставив из этих формул значения сил P_e и P_γ в уравнения движения центра шипа, получим выражения, являющиеся исходными при исследовании поведения системы масляный слой — шип.

Как было установлено, силы, действующие на шип со стороны масляного слоя, зависят не только от координат, определяющих положение центра шипа, но и от скорости и ускорения центра шипа.

Исследуя вопрос об устойчивости равновесного состояния системы масляный слой—шип, мы понимаем состояние равновесия как рабочий режим, при котором среднее положение центра шипа определяется постоянными координатами χ_0, γ_0 .

Согласно определению А. М. Ляпунова об устойчивости нелинейной системы, можно сказать: система устойчива в малом, если отрицательны все вещественные части корней характеристического уравнения, составленного для ее линейного приближения. Система неустойчива в малом, если хотя бы один корень характеристического уравнения ее линейного приближения имеет положительную вещественную часть. При выполнении условия устойчивости все отклонения от предписанного значения координат, появившиеся в системе в результате внешних возмущений, с течением времени затухают.

Введя в уравнения движения системы ее существенные параметры, определим в плоскости этих параметров расположение области устойчивых режимов. Считая отклонения параметров от их граничных значений достаточно малыми, под областью Рауса—Гурвица, относящейся к данному состоянию равновесия, будем понимать совокупность значений параметров, при которых для рассматриваемого состояния равновесия имеют место отрицательные действительные части всех корней характеристического уравнения.

Решить аналитически нелинейные уравнения движения центра шипа не представляется возможным. Чтобы достичь некоторого результата, будем считать, что движение центра шипа относительно его положения на кривой подвижного равновесия может быть охарактеризовано малыми колебаниями. Последовательность операций при линеаризации следующая.

1. Составляют уравнения равновесного состояния системы, при котором положение центра шипа на кривой подвижного равновесия определяется координатами χ_0 и γ_0 .

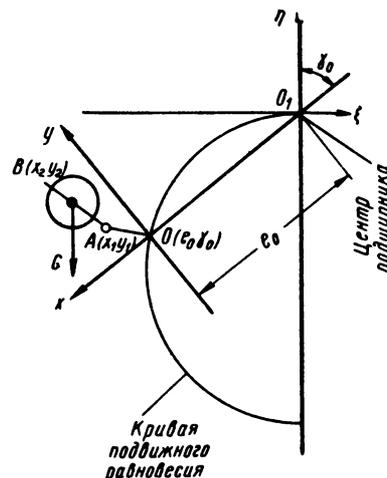
2. Нелинейные функции координат, входящие в уравнение, разлагают в окрестности установившихся значений координат в ряд Тейлора. Члены, содержащие отклонения в степенях выше первой, отбрасывают.

3. Приближенные разложения подставляют в исходные уравнения. Уравнения равновесного состояния вычитают. В полученных линейных уравнениях в качестве переменных входят абсолютные отклонения координат $\Delta\chi$ и $\Delta\gamma$ от их установившихся значений.

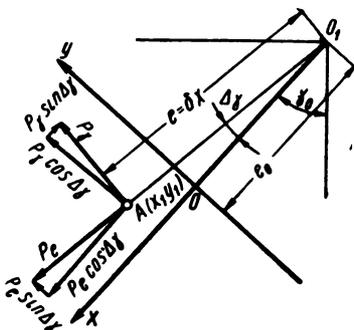
Таким образом, устойчивость равновесного состояния системы масляный слой—шип при нагружении вала постоянной силой рассматривается на основании линейной теории. При этом вал считается статически и динамически отбалансированным.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ МАСЛЯНЫЙ СЛОЙ—ШИП ПРИ ГИБКОМ ВАЛЕ

В настоящее время в технике широко применяются высокооборотные валы. Скорости вращения таких валов превышают критическую, при которой изгибные колебания достигают значительной величины. Устойчивость равновесного состояния системы масляный слой—шип для этого случая представляет значительный интерес.



Фиг. 27. Положение центров шипа и ротора для гибкого вала.



Фиг. 28. Составляющие реакции масляного слоя.

Пусть при малом отклонении центра шипа от положения равновесия он перейдет в положение, определяемое точкой $A(x_1, y_1)$, а центр ротора будет занимать положение $B(x_2, y_2)$ (фиг. 27) в системе координат xOy .

Поддерживающая сила при нестационарных процессах в системе характеризовалась в полярных координатах (χ, γ) формулами (125) и (129).

Запишем уравнения, характеризующие малые колебания системы в прямоугольной системе координат.

Спроектировав на координатные оси x и y с началом координат в точке O , определяющей положение центра шипа на кривой подвижного равновесия (фиг. 28), составляющие реакции масляного слоя P_e и P_γ , получим

$$P_x = P_e \cos(\Delta\gamma) - P_\gamma \sin(\Delta\gamma),$$

$$P_y = P_\gamma \cos(\Delta\gamma) + P_e \sin(\Delta\gamma).$$

В связи с малостью угла $\Delta\gamma$ принимаем $\cos(\Delta\gamma) \approx 1$, $\sin(\Delta\gamma) \approx \text{tg}(\Delta\gamma) = \frac{y_1}{e}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} P_x &= +P_e - P_\gamma \frac{y_1}{e}, \\ P_y &= P_\gamma + P_e \frac{y_1}{e}. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Система уравнений, характеризующих малые колебания, будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_s(x_2 - x_1) + mg \cos \gamma_0 &= 0, \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} + k_s(y_2 - y_1) - mg \sin \gamma_0 &= 0, \\ k_s(x_2 - x_1) + P_e - P_\gamma \frac{y_1}{e} &= 0, \\ k_s(y_2 - y_1) + P_\gamma + P_e \frac{y_1}{e} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

где k_s — жесткость вала,
 m — масса ротора.

На основании значений P_e и P_γ из формул (125) и (129), а также зависимостей $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\delta} \frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\delta\chi} \frac{dy_1}{dt}$ произведем линеаризацию системы уравнений (193) в последовательности, изложенной в предыдущем параграфе.

После преобразований получим систему линейных уравнений, характеризующих возмущенное состояние:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m\delta}{3pr^3l} \frac{d^2 \Delta x_2}{dt^2} + a_{11} \frac{d^2 \Delta x_1}{dt^2} - a'_{12} \omega_0 \frac{d \Delta x_1}{dt} + \frac{2\nu}{\delta^2} a'_{12} \frac{d \Delta x_1}{dt} + \\ + \frac{2\nu}{\delta^2} \omega_0 a_{13} \Delta x_1 - \frac{b_{11}}{x_0} \frac{d^2 \Delta y_1}{dt^2} - \frac{2\nu}{\delta^2} \frac{b_{12}}{x_0} \frac{d \Delta y_1}{dt} + \frac{2\nu}{\delta^2} \omega_0 b_{13} \Delta y_1 &= 0, \\ \frac{m\delta}{3pr^3l} \frac{d^2 \Delta y_2}{dt^2} + \frac{b_{21}}{x_0} \frac{d^2 \Delta y_1}{dt^2} + \frac{2\nu}{\delta^2} \frac{b_{22}}{x_0} \frac{d \Delta y_1}{dt} + \frac{2\nu}{\delta^2} \omega_0 \frac{b_{23}}{x_0} \Delta y_1 - a_{21} \frac{d^2 \Delta x_1}{dt^2} + \\ + a'_{22} \omega_0 \frac{d \Delta x_1}{dt} - \frac{2\nu}{\delta^2} a'_{22} \frac{d \Delta x_1}{dt} - \frac{2\nu}{\delta^2} \omega_0 a_{23} \Delta x_1 &= 0, \\ \frac{m d^2 \Delta x_2}{dt^2} + k_s \Delta x_2 - k_s \Delta x_1 &= 0, \\ m \frac{d^2 \Delta y_2}{dt^2} + k_s \Delta y_2 - k_s \Delta y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

В качестве переменных в систему (194) входят абсолютные отклонения координат центра шипа Δx_1 и Δy_1 и центра ротора Δx_2 и Δy_2 от положения равновесия. Коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , функции значений относительного эксцентриситета χ_0 при рав-

новесном состоянии, определяются следующими выражениями [7]:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{2\pi}{\chi_0^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \chi_0^2} \left[\frac{4\chi_0}{\pi^2(2 + \chi_0^2)} \ln \frac{1 - \chi_0}{1 + \chi_0} - 1 \right] \right\}, \\ a'_{12} &= \frac{2}{\chi_0^2(2 + \chi_0^2)^2} \left[(10 + 7\chi_0^2 - 2\chi_0^4) \ln \frac{1 - \chi_0}{1 + \chi_0} + \right. \\ &\quad \left. + 2\chi_0(10 + 7\chi_0^2 + 2\chi_0^4) \right], \\ a'_{12} &= \frac{\pi^2(2 + \chi_0^2) - 16}{\pi(2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ a_{13} &= \frac{4\chi_0(2 + \chi_0^4)}{(2 + \chi_0^2)^2(1 - \chi_0^2)^2}, \\ a_{21} &= \frac{2}{\chi_0^2(2 + \chi_0^2)} \left[2\chi_0(4 + \chi_0^2 - 2\sqrt{1 - \chi_0^2}) + \right. \\ &\quad \left. + (2 + \chi_0^2) \ln \frac{1 - \chi_0}{1 + \chi_0} \right], \\ a'_{22} &= \frac{2\pi}{\chi_0^2(2 + \chi_0^2)^2 \sqrt{1 - \chi_0^2}} \left[2 + 3\chi_0^2 - 2\chi_0^4 - \right. \\ &\quad \left. - (10 + 7\chi_0^2 - 2\chi_0^4) \sqrt{1 - \chi_0^2} \right], \\ a'_{22} &= \frac{4\chi_0}{(2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)}, \quad a_{23} = \frac{\pi(2\chi_0^4 - \chi_0^2 + 2)}{(2 + \chi_0^2)^2(1 - \chi_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ b_{11} &= \frac{4}{\chi_0(2 + \chi_0^2)} \left[(1 - \chi_0^2) \ln \frac{1 - \chi_0}{1 + \chi_0} + \chi_0(2 + \chi_0^2) \right], \\ b_{12} &= \frac{4\chi_0^2}{(2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)}, \quad b_{13} = \frac{\pi\chi_0}{(2 + \chi_0^2)\sqrt{1 - \chi_0^2}}, \\ b_{21} &= \frac{4\pi\sqrt{1 - \chi_0^2}(1 - \sqrt{1 - \chi_0^2})}{\chi_0(2 + \chi_0^2)}, \\ b_{22} &= \frac{2\pi\chi_0}{(2 + \chi_0^2)\sqrt{1 - \chi_0^2}}, \\ b_{23} &= \frac{2\chi_0^2}{(2 + \chi_0^2)(1 - \chi_0^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

Численные значения коэффициентов a_{ik} , b_{ik} приведены в табл. 4 и 5.

Значения коэффициентов a_{ik} и $K_{3\infty}$

Таблица 4

$\frac{\lambda_0}{b_{1k}}$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
a_{11}	-0,63	0,72	0,63	0,94	1,13	1,30	1,46	1,55	1,97	2,18	2,35	3,52	3,75	3,75
a'_{12}	-51,00	-1,80	-0,90	-0,81	-1,52	-1,60	-1,91	-2,32	-1,75	-1,40	-2,61	-3,30	-4,21	-5,30
a_{12}	0,66	0,66	0,82	1,10	1,42	1,51	2,00	2,33	3,10	3,74	5,40	8,10	17,20	43,00
a_{13}	0,20	0,40	0,67	0,94	1,40	1,76	2,20	2,96	2,80	5,40	8,70	16,50	30,00	127,00
a_{21}	-18,80	-0,60	-0,17	0,30	0,15	0,08	0,12	-0,04	0,03	0,24	-0,38	-0,66	-1,14	-1,50
a'_{22}	-1256,00	-312,00	-137,00	-82,00	-48,00	-38,00	-29,00	-24,00	-18,00	-15,00	-12,20	-9,00	-7,00	-4,20
a_{22}	0,20	0,40	0,64	0,89	1,20	1,40	1,60	1,91	2,20	2,71	3,42	4,50	6,51	13,00
a_{23}	1,60	1,60	1,60	1,60	1,70	1,80	1,90	2,20	2,80	3,60	4,70	6,50	12,50	31,40
$K_{3\infty}$	0,47	0,95	1,45	1,98	2,57	2,90	3,32	3,80	4,38	5,20	6,24	7,80	11,43	21,53

Значения коэффициентов b_{ik} и $K_{3\infty}$

Таблица 5

$\frac{\lambda_0}{b_{1k}}$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,85	0,80	0,85	0,90	0,95
b_{11}	-1,90	0,08	0,41	0,73	1,07	1,30	1,51	1,90	2,00	2,42	2,50	2,90	3,10	3,50
b_{12}	0,02	0,08	0,20	0,41	0,62	0,70	1,00	1,21	1,50	2,00	2,72	3,71	5,70	12,40
b_{13}	0,15	0,31	0,50	0,64	0,80	0,91	1,00	1,10	1,20	1,40	1,61	1,91	2,30	3,30
b_{21}	0,30	0,64	0,91	1,20	1,31	1,42	1,48	1,50	1,47	1,43	1,45	1,40	1,26	1,00
b_{22}	0,30	0,60	0,90	1,30	1,60	1,80	2,00	2,21	2,51	2,72	3,12	3,70	4,60	6,45
b_{23}	0,01	0,04	0,09	0,21	0,32	0,40	0,52	0,60	0,81	0,92	1,31	2,00	3,00	6,31
$K_{3\infty}$	0,47	0,95	1,45	1,98	2,57	2,90	3,32	3,80	4,38	5,20	6,24	7,80	11,43	21,53

Введя безразмерное время $\tau = t \sqrt{\frac{g}{\delta}}$ и отклонения координат $\tilde{x}_1 = \frac{\Delta x_1}{\delta}$, $\tilde{y}_1 = \frac{\Delta y_1}{\delta}$, $\tilde{x}_2 = \frac{\Delta x_2}{\delta}$, $\tilde{y}_2 = \frac{\Delta y_2}{\delta}$, а затем преобразовав коэффициенты уравнений (194), запишем эту систему в безразмерном виде:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d^2 \tilde{x}_2}{d\tau^2} + B_1 \frac{d^2 \tilde{x}_1}{d\tau^2} - C_1 \frac{d^2 \tilde{y}_1}{d\tau^2} - D_1 \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} - E_1 \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} + F_1 \tilde{x}_1 + H_1 \tilde{y}_1 &= 0, \\ A \frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tau^2} + B_2 \frac{d^2 \tilde{y}_1}{d\tau^2} - C_2 \frac{d^2 \tilde{x}_1}{d\tau^2} + D_2 \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} + E_2 \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} + F_2 \tilde{y}_1 - H_2 \tilde{x}_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{x}_2}{d\tau^2} + K_4 \tilde{x}_2 - K_4 \tilde{x}_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tau^2} + K_4 \tilde{y}_2 - K_4 \tilde{y}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} (197)$$

Значение безразмерных коэффициентов уравнений (197)

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} K_1 K_2 K_3, & B_2 &= \frac{1}{\chi_0} b_{21}, \\ B_1 &= a_{11}, & C_2 &= a_{21}, \\ C_1 &= \frac{1}{\chi_0} b_{11}, & D_2 &= \frac{1}{\chi_0} b_{22} K_2, \\ D_1 &= a'_{12} K_1 - a'_{12} K_2, & E_2 &= a'_{22} K_1 - a'_{22} K_2, \\ E_1 &= \frac{1}{\chi_0} b_{12} K_2, & F_2 &= \frac{1}{\chi_0} b_{23} K_1 K_2, \\ F_1 &= a_{13} K_1 K_2, & H_2 &= a_{23} K_1 K_2, \\ H_1 &= \frac{1}{\chi_0} b_{13} K_1 K_2, \end{aligned} \right\} (198)$$

В уравнениях (197) коэффициенты B_1, C_1, B_2, C_2 характеризуют величину присоединенной массы, появившейся в результате ускоренного движения центра шипа. Коэффициенты D_1, E_1, D_2, E_2 характеризуют демпфирование в системе, а коэффициенты F_1, H_1 и F_2, H_2 — упругие силы масляного слоя.

Коэффициенты системы (197) зависят от безразмерных параметров

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{g}}, & K_3 &= \frac{q\psi^2}{\mu\omega_0}, \\ K_2 &= \frac{2\nu}{\delta} \sqrt{\frac{1}{\delta g}}, & K_4 &= \omega_{кр}^2 \frac{\delta}{g}. \end{aligned} \right\} (199)$$

Здесь параметр K_3 однозначно связан с относительным эксцентриситетом χ_0 . Следует обратить внимание на параметр K_2 , который возникает в связи с инерционностью потока смазки при нестационарных процессах в системе масляный слой—шип. Параметр K_2 отражает влияние локальных сил инерции и по своему характеру является величиной, обратно пропорциональной числу Рейнольдса.

Решение уравнений (197) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \alpha_1 e^{\lambda \tau}, & \tilde{y}_1 &= \alpha_3 e^{\lambda \tau}, \\ \tilde{x}_2 &= \alpha_2 e^{\lambda \tau}, & \tilde{y}_2 &= \alpha_4 e^{\lambda \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (197), получим систему алгебраических уравнений для определения λ :

$$\left. \begin{aligned} A\alpha_2\lambda^2 + B_1\alpha_1\lambda^2 - C_1\alpha_3\lambda^2 - D_1\alpha_1\lambda - E_1\alpha_3\lambda + F_1\alpha_1 + H_1\alpha_3 &= 0, \\ A\alpha_4\lambda^2 + B_2\alpha_3\lambda^2 - C_2\alpha_1\lambda^2 + D_2\alpha_3\lambda + E_2\lambda\alpha_1 + F_2\alpha_3 - H_2\alpha_1 &= 0, \\ \alpha_2\lambda^2 + K_4\alpha_2 - K_4\alpha_1 &= 0, \\ \alpha_4\lambda^2 + K_4\alpha_4 - K_4\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Характеристическое уравнение системы (201) запишем в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} B_1\lambda^2 - D_1\lambda + F_1 & A\lambda^2 & -C_1\lambda^2 - E_1\lambda + H_1 & 0 \\ -C_2\lambda^2 + E_2\lambda - H_2 & 0 & B_2\lambda^2 + D_2\lambda + F_2 & A\lambda^2 \\ -K_4 & \lambda^2 + K_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & \lambda^2 + K_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (202)$$

После преобразования определителя (202) получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} n_0\lambda^8 + n_1\lambda^7 + n_2\lambda^6 + n_3\lambda^5 + n_4\lambda^4 + n_5\lambda^3 + n_6\lambda^2 + \\ + n_7\lambda + n_8 = 0, \end{aligned} \quad (203)$$

коэффициенты которого

$$\begin{aligned} n_0 &= q_0, & n_1 &= q_1K_2 + q_2K_1, \\ n_2 &= \frac{1}{3} K_1K_2K_3K_4q_3 + K_1K_2q_4 + K_2^2q_5 + 2K_4q_0, \\ n_3 &= \frac{1}{3} K_1K_2^2K_3K_4q_6 - \frac{1}{3} K_1^2K_2K_3K_4q_7 + K_1K_2^2q_8 - \\ &\quad - K_1^2K_2q_9 + 2K_1K_4q_2 + 2K_2K_4q_1, \\ n_4 &= \frac{1}{9} K_1^2K_2^2K_3^2K_4^2\chi_0 + \frac{1}{3} K_1^2K_2^2K_3K_4q_{10} + \frac{1}{3} K_1K_2K_3K_4^2q_3 + \\ &\quad + 2K_1K_2K_4q_4 + 2K_2^2K_4q_5 + K_4^2q_0 + K_1^2K_2^2q_{11}, \\ n_5 &= \frac{1}{3} K_1K_2^2K_3K_4^2q_6 - \frac{1}{3} K_1^2K_2K_3K_4^2q_7 + K_1K_4^2q_2 + K_4^2K_2q_1 + \\ &\quad + 2K_1K_2^2K_4q_8 - 2K_1^2K_2K_4q_9, \\ n_6 &= \frac{1}{3} K_1^2K_2^2K_3K_4^2q_{10} - 2K_1^2K_2^2K_4q_{11} + K_1K_2K_4^2q_4 + \\ &\quad + K_2^2K_4^2q_5, \end{aligned} \quad (204)$$

$$n_7 = K_1K_2^2K_4^2q_8 - K_1^2K_2K_4^2q_9,$$

$$n_8 = K_1^2K_2^2K_4^2q_{11},$$

где

$$q_0 = a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11},$$

$$q_1 = a_{11}b_{22} + a_{12}^*b_{21} - a_{22}^*b_{11} - a_{21}b_{12},$$

$$q_2 = a_{22}^*b_{11} - a_{12}^*b_{21},$$

$$q_3 = a_{11}\chi_0 + b_{21},$$

$$q_4 = a_{11}b_{23} - a_{12}^*b_{22} + a_{13}b_{21} + a_{21}b_{13} + a_{22}^*b_{12} - a_{23}b_{11},$$

$$q_5 = a_{12}^*b_{22} - a_{22}^*b_{12},$$

$$q_6 = a_{12}^*\chi_0 + b_{22},$$

$$q_7 = a_{12}^*\chi_0,$$

$$q_8 = a_{13}b_{22} - a_{23}b_{12} + a_{12}^*b_{23} + a_{22}^*b_{13},$$

$$q_9 = a_{22}^*b_{13} + a_{12}^*b_{23},$$

$$q_{10} = a_{13}\chi_0 + b_{23},$$

$$q_{11} = a_{13}b_{23} + a_{23}b_{13}.$$

Численные значения коэффициентов q_i в функции относительного эксцентриситета даны в табл. 6.

Таблица 6

Значения коэффициентов q_i

$\frac{\chi_0}{q_i}$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65
q_0	0,50	0,91	1,36	2,08	2,40
q_1	1,02	1,73	2,29	3,34	3,34
q_2	-55,18	-59,03	-49,01	-41,00	-42,00
q_3	0,99	1,58	1,88	2,31	2,51
q_4	-22,36	-32,80	-26,70	-23,90	-22,70
q_5	0,61	1,06	1,63	2,40	2,85
q_6	1,14	1,74	2,31	3,20	3,73
q_7	-0,27	-0,33	-0,60	-1,15	-1,50
q_8	0,68	1,37	2,60	5,14	7,39
q_9	69,31	52,67	38,88	29,66	27,80
q_{10}	0,29	0,58	1,02	1,84	2,52
q_{11}	0,86	1,23	1,80	3,04	4,20

Продолжение табл. 6

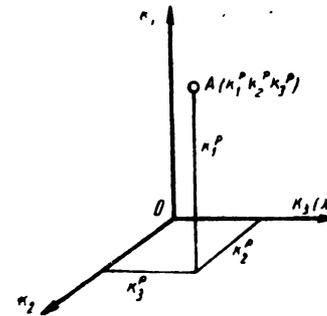
$\frac{\chi_0}{q_i}$	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
q_0	2,84	3,54	4,35	6,84	8,37	9,00
q_1	5,06	4,24	7,61	11,64	25,20	40,30
q_2	-33,40	-33,40	-27,00	-21,40	-16,40	-9,40
q_3	2,85	3,07	3,33	4,39	4,64	4,67
q_4	-20,75	-24,86	-21,70	-10,82	+13,62	+16,85
q_5	4,50	4,58	7,60	13,30	43,00	117,00
q_6	5,11	5,52	7,42	10,60	20,10	47,45
q_7	-1,21	-1,12	-2,20	-2,46	-3,80	-5,00
q_8	10,50	14,74	26,98	61,70	132,10	743,00
q_9	23,02	22,29	22,92	23,80	28,70	43,30
q_{10}	3,47	4,97	8,26	16,00	30,00	126,30
q_{11}	6,44	10,01	18,97	45,40	118,80	904,00

Устойчивость системы характеризуется безразмерными параметрами K_1, K_2, K_3, K_4 . В рассматриваемом случае граница устойчивости будет иметь форму поверхности, если, сохраняя постоянным значение одного из параметров, изменять остальные. Целесообразно считать параметр $K_4 = \text{const}$, так как в каж-

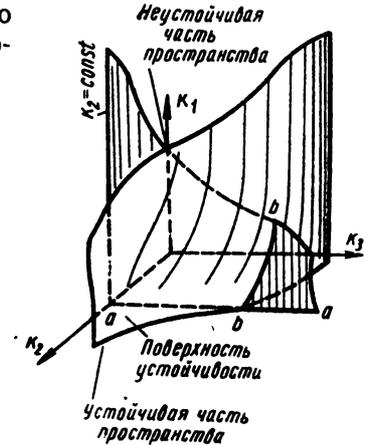
дом конкретном случае величина первой критической скорости задана.

Выберем декартову систему координат с осями K_3, K_2, K_1 . Рабочее состояние системы при определенном значении K_4 характеризуется точкой A (фиг. 29) с координатами K_3^p, K_2^p, K_1^p . Значение координат однозначно определяет состояние системы в смысле устойчивости. Чтобы выяснить расположение области устойчивых рабочих режимов машины, необходимо построить граничную поверхность устойчивости (фиг. 30).

Однако построить, а также практически использовать такую поверхность весьма затруднительно, поэтому целесообразно применить метод секущих плоскостей.



Фиг. 29. Положение точки A , характеризующей рабочий режим в пространстве безразмерных параметров.



Фиг. 30. Общий вид граничной поверхности устойчивости.

Примем постоянным значение коэффициента K_2 . Уравнение секущей плоскости $K_2 = \text{const}$. Эта плоскость пересечет граничную поверхность по кривой $b-b$ (фиг. 30), а координатную плоскость K_3OK_2 — по прямой $a-a$. Назовем прямую $a-a$ следом секущей плоскости, а линию $b-b$ — границей устойчивости в секущей плоскости $K_2 = \text{const}$. Параметр K_2 может иметь различные значения.

Так как плоскость $K_2 = \text{const}$ параллельна плоскости K_1OK_3 , то кривая $b-b$ спроектируется на эту плоскость в натуральную величину. Поэтому поверхность устойчивости будем задавать сечениями плоскостей $K_2 = \text{const}$ при различных значениях K_2 , линию $b-b$ проектировать на плоскость K_1OK_3 и указывать след секущей плоскости.

Поверхность целесообразно задать сечениями $K_2 = \text{const}$, если учесть, что вязкость масла остается постоянной для данной рабочей температуры, а величина радиального зазора известна.

Построение граничной поверхности производится методом D -разбиения [1], который предусматривает подстановку в характеристическое уравнение (203) значения $\lambda = \omega i$. Тогда характеристическое уравнение распадается на уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} n_0 \omega^8 - n_2 \omega^6 + n_4 \omega^4 - n_6 \omega^2 + n_8 &= 0, \\ -n_1 \omega^7 + n_3 \omega^5 - n_5 \omega^3 + n_7 \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Учитывая однозначную зависимость для $K_3 = f(\chi_0)$ при данном отношении $\frac{l}{d}$, подставляя вместо коэффициентов n_i в уравнения (206) их значения из выражений (204) и считая переменными величины K_1 и ω , найдем при данных $K_2, K_3(\chi), K_4$ такое значение K_1^{*p} , которое определяет положение точки на граничной поверхности устойчивости.

Если пренебречь инерционностью масляного слоя, составляющую поддерживающей силы масляного слоя определяются формулами (131). Нестационарность процессов в системе учитывается граничными условиями. Линеаризованные уравнения возмущенного движения системы в безразмерном виде представляются так:

$$\left. \begin{aligned} A' \frac{d^2 \tilde{x}_2}{d\tau^2} + B_1' \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} - C_1' \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} + D_1' \tilde{x}_1 + E_1' \tilde{y}_1 &= 0, \\ A' \frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tau^2} + B_2' \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} - C_2' \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} + D_2' \tilde{y}_1 - E_2' \tilde{x}_1 &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{x}_2}{d\tau^2} + K_4 (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tau^2} + K_4 (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{3} K_1 K_3, & B_2' &= \frac{1}{\chi_0} b_{22}, \\ B_1' &= a_{12}^*, & C_2' &= a_{22}^*, \\ C_1' &= \frac{1}{\chi_0} b_{12}, & D_2' &= K_1 \frac{b_{23}}{\chi_0}, \\ D_1' &= K_1 a_{13}, & E_2' &= K_1 a_{23}, \\ E_1' &= K_1 \frac{b_{13}}{\chi_0}, & & \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

Решение уравнений (207) ищем в форме, представленной выражениями (200). Тогда уравнения (207) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} A' \alpha_2 \lambda^2 + B_1' \alpha_1 \lambda - C_1' \alpha_3 \lambda + D_1' \alpha_1 + E_1' \alpha_3 &= 0, \\ A' \alpha_4 \lambda^2 + B_2' \alpha_3 \lambda - C_2' \alpha_1 \lambda + D_2' \alpha_3 - E_2' \alpha_1 &= 0, \\ \alpha_2 \lambda^2 + K_4 \alpha_2 - K_4 \alpha_1 &= 0, \\ \alpha_4 \lambda^2 + K_4 \alpha_4 - K_4 \alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

Характеристическое уравнение системы (209) представим в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} B_1' \lambda + D_1' & A' \lambda^2 & -C_1' \lambda + E_1' & 0 \\ -C_2' \lambda - E_2' & 0 & B_2' \lambda + D_2' & A' \lambda^2 \\ -K_4 & \lambda^2 + K_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & \lambda^2 + K_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (210)$$

После преобразований получим характеристическое уравнение

$$n_0' \lambda^6 + n_1' \lambda^5 + n_2' \lambda^4 + n_3' \lambda^3 + n_4' \lambda^2 + n_5' \lambda + n_6' = 0, \quad (211)$$

коэффициенты которого

$$\left. \begin{aligned} n_0' &= q_5, \\ n_1' &= \frac{1}{3} K_1 K_3 K_4 q_8 + K_1 q_6, \\ n_2' &= \frac{1}{9} K_1^2 K_3^2 K_4^2 \chi_0 + \frac{1}{3} K_1^2 K_3 K_4 q_{10} + K_1^2 q_{11} + 2K_4 q_5, \\ n_3' &= \frac{1}{3} K_1 K_3 K_4^2 q_6 + 2K_1 K_4 q_8, \\ n_4' &= \frac{1}{3} K_1^2 K_3^2 K_4^2 q_{10} + 2K_1^2 K_4 q_{11} + K_4^2 q_5, \\ n_5' &= K_1 K_4^2 q_8, \\ n_6' &= K_1^2 K_4^2 q_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Вопрос об устойчивости рассматриваемой системы можно решить, воспользовавшись условием Рауса—Гурвица. Вычислять определитель Рауса—Гурвица для уравнения шестого порядка обычными методами нецелесообразно. Для этого можно было бы использовать практический способ, предложенный, например, М. А. Айзерманом [2], который основан на приведении определителя Гурвица к диагональной форме. При этом сам критерий

рий устойчивости по определителю в диагональной форме сводится к тому, что все элементы его главной диагонали должны быть положительными, если коэффициент при высшей степени характеристического уравнения положителен. Однако в нашем случае и этот метод весьма сложен.



Фиг. 31. Граница устойчивости гибкого вала (K_1, K_2, K_3, K_4).

размерного параметра жесткости вала для каждого случая считается известным (фиг. 31).

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОГО ВАЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА КОРОТКИЕ ПОДШИПНИКИ

В связи с тем, что на практике часто приходится решать вопрос об устойчивости движения валов, опирающихся на подшипники с отношением $\lambda = \frac{l}{d} < 1$, рассмотрим эту задачу, считая подшипник коротким.

Поддерживающая сила масляного слоя в этом случае определяется выражениями (172). Малые колебания при возмущенном движении будут описываться системой безразмерных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}_2}{d\tau^2} + K_4 (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tau^2} + K_4 (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) &= 0, \\ N \frac{d^2 \tilde{x}_2}{d\tau^2} + Q_1 \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} + R_1 \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} + S_1 \tilde{x}_1 + T_1 \tilde{y}_1 &= 0, \\ N \frac{d^2 \tilde{y}_2}{d\tau^2} + Q_2 \frac{d\tilde{y}_1}{d\tau} + R_2 \frac{d\tilde{x}_1}{d\tau} + S_2 \tilde{y}_2 - T_2 \tilde{x}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

в которых коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} N &= K_1 K_2 K_5, & Q_2 &= d_{21}, \\ Q_1 &= c_{11}, & R_2 &= c_{21}, \\ R_1 &= d_{11}, & & \\ S_1 &= c_{12} K_1, & S_2 &= d_{22} K_1, \\ T_1 &= d_{12} K_1, & T_2 &= c_{22} K_1. \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Коэффициенты c_i, d_i определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \pi \frac{1 + 2\chi_0^2}{(1 - \chi_0^2)^{\frac{5}{2}}}, & c_{21} &= -\frac{4\chi_0}{(1 - \chi_0^2)^2}, \\ d_{11} &= -\frac{4\chi_0}{(1 - \chi_0^2)^2}, & d_{21} &= \frac{\pi}{(1 - \chi_0^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ c_{12} &= \frac{4\chi_0(1 + \chi_0^2)}{(1 - \chi_0^2)^3}, & c_{22} &= \frac{\pi(1 + 2\chi_0^2)}{2(1 - \chi_0^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ d_{12} &= \frac{\pi}{2(1 - \chi_0^2)^{\frac{3}{2}}}, & d_{22} &= \frac{2\chi_0}{(1 - \chi_0^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

Используя методы, аналогичные изложенным в предыдущем параграфе, получим характеристическое уравнение системы (203)

$$m_0 \lambda^6 + m_1 \lambda^5 + m_2 \lambda^4 + m_3 \lambda^3 + m_4 \lambda^2 + m_5 \lambda + m_6 = 0, \quad (216)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= r_1, \\ m_1 &= K_1 K_3 K_4 K_5 r_2 + K_1 r_3, \\ m_2 &= K_1^2 K_3^2 K_4^2 K_5^2 + K_1^2 K_3 K_4 K_5 r_4 + K_1^2 r_5 + 2K_4 r_1, \\ m_3 &= K_1 K_3 K_4^2 K_5 r_2 + 2K_1 K_4 r_3, \\ m_4 &= K_1^2 K_3 K_4^2 K_5 r_4 + 2K_1^2 K_4 r_5 + K_4^2 r_1, \\ m_5 &= K_1 K_4^2 r_3, \\ m_6 &= K_1^2 K_4^2 r_5, \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= c_{11}d_{21} - c_{21}d_{11}, \\ r_2 &= c_{11} + d_{21}, \\ r_3 &= c_{11}d_{22} + c_{12}d_{21} + c_{22}d_{11} - c_{21}d_{12}, \\ r_4 &= c_{12} + d_{22}, \\ r_5 &= c_{12}d_{22} + c_{22}d_{12}. \end{aligned} \right\} (218)$$

Значения перечисленных коэффициентов в зависимости от относительного эксцентриситета представлены в табл. 7. В отличие от случаев, рассмотренных в предыдущем параграфе, появился новый безразмерный параметр $K_5 = \frac{1}{\lambda^2}$, характеризующий влияние конечной длины подшипника на устойчивость движения вала. Таким образом, поведение системы в отношении устойчивости ее равновесного состояния при коротком подшипнике и нестационарном движении шипа гибкого вала характеризуется четырьмя безразмерными параметрами $K_1, K_3(\chi), K_4, K_5$.

Таблица 7

Значения c_{ik}, d_{ik} для короткого подшипника

Значения коэффициентов	Значения χ_0								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
c_{11}	+3,30	+3,80	+4,80	+6,34	+9,80	+16,30	+33,60	+91,00	+500,00
d_{11}	-0,41	-0,87	-1,45	-2,26	-3,56	-5,85	-10,80	-24,80	-100,00
c_{12}	0,42	0,94	1,73	3,12	5,96	14,00	31,50	112,00	950,00
d_{12}	1,60	1,67	1,82	2,04	2,42	3,05	4,30	7,30	17,80
c_{21}	-0,41	-0,87	-1,45	-2,26	-3,56	-5,85	-10,80	-24,80	-100,00
d_{21}	3,20	3,34	3,64	4,08	4,82	6,10	8,60	14,60	35,60
c_{22}	1,65	1,90	2,35	3,17	4,90	8,15	16,80	45,50	250,00
d_{22}	0,20	0,43	0,73	1,13	1,78	2,92	5,40	12,40	50,00

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ МАСЛЯНЫЙ СЛОЙ—ШИП ПРИ ЖЕСТКОМ ВАЛЕ

В случае, когда вал работает при числах оборотов, значительно меньших первого критического, его можно практически считать жестким. В связи с этим в принятой постановке задачи число степеней свободы системы понизится до двух, а характеристическое уравнение (203) примет вид

$$n_0^4 \lambda^4 + n_1^4 \lambda^3 + n_2^4 \lambda^2 + n_3^4 \lambda + n_4^4 = 0, \quad (219)$$

где

$$\left. \begin{aligned} n_0^4 &= \frac{1}{9} K_1^2 K_2^2 K_3^2 \chi_0 + \frac{1}{3} K_1 K_2 K_3 q_3 + q_0, \\ n_1^4 &= \frac{1}{3} K_1 K_2^2 K_3 q_6 - \frac{1}{3} K_1^2 K_2 K_3 q_7 + K_1 q_2 + K_2 q_1, \\ n_2^4 &= \frac{1}{3} K_1^2 K_2^2 K_3 q_{10} + K_1 K_2 q_4 + K_2^2 q_5, \\ n_3^4 &= K_1 K_2^2 q_8 - K_1^2 K_2 q_9, \\ n_4^4 &= K_1^2 K_2^2 q_{11}. \end{aligned} \right\} (220)$$

Значения коэффициентов q_i , зависящих от относительного эксцентриситета χ_0 , находятся по формулам (205) и табл. 6.

Чтобы определить условие, обеспечивающее устойчивость невозмущенного движения, нет надобности вычислять корни характеристического уравнения (219). Согласно критерию Гурвица, см. работу [11], для устойчивости системы четвертого порядка необходимо, чтобы: а) все коэффициенты характеристического уравнения были положительны, б) предпоследний определитель Гурвица был положителен.

В нашем случае условия Гурвица имеют вид

$$\left. \begin{aligned} n_0^4 > 0, \quad n_1^4 > 0, \quad n_2^4 > 0, \quad n_3^4 > 0, \quad n_4^4 > 0, \\ \begin{vmatrix} n_1^4 & n_0^4 & 0 \\ n_3^4 & n_2^4 & n_1^4 \\ 0 & n_4^4 & n_3^4 \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \right\} (221)$$

Расчеты величин q_0, q_3, q_{11} , произведенные для всех значений относительного эксцентриситета (табл. 6), показывают, что коэффициенты n_0^4 и n_4^4 всегда положительны. Коэффициенты n_1^4, n_2^4 и n_3^4 могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от величин $K_1, K_2, K_3(\chi)$.

В связи с тем, что нестационарность рассматриваемого процесса характеризуется параметром K_2 , выясним, как эта величина влияет на устойчивость системы.

Исследуем условия положительности коэффициентов n_1^4, n_2^4, n_3^4 . Пользуясь выражениями (220), запишем

$$n_1^4 = \frac{1}{3} K_1 K_2^2 K_3 q_6 - \frac{1}{3} K_1^2 K_2 K_3 q_7 + K_1 q_2 + K_2 q_1 > 0.$$

Для определения условий положительности n_1^4 решим уравнение $n_1^4 = 0$ относительно K_1 . Границы устойчивости, как мы уже отмечали, целесообразно строить в координатных осях χ, K_1 , задаваясь значениями параметра K_2 . Такое построение

удобно в том отношении, что оно дает граничное значение относительного эксцентриситета, отделяющее устойчивые и неустойчивые области движения на кривых подвижного равновесия центра шипа.

Корни уравнения $n_1^* = 0$ будут равны

$$K_{1,2} = \frac{-\left(\frac{1}{3} K_2^2 K_3 q_6 + q_2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3} K_2^2 K_3 q_6 + q_2\right)^2 + \frac{4}{3} K_2^2 K_3 q_7}}{-\frac{2}{3} K_2 K_3 q_7}, \quad (222)$$

при этом знаменатель всегда положителен, так как величина $q_7 < 0$.

Рассмотрим возможные значения знака дискриминанта в выражении (222).

Дискриминант больше нуля.

В этом случае возможны два различных корня.

Если оба корня $(K_1)_1$ и $(K_1)_2$ положительны, то коэффициент n_1^* положителен в областях $0 < K_1 < (K_1)_1$ и $(K_1)_2 < K_1 < \infty$, так как коэффициент при высшей степени неизвестного K_1 положителен. Отрицательное значение коэффициента K_1 , как не имеющее физического смысла, рассматривать не будем.

Дискриминант равен нулю.

Чтобы корни были положительными, необходимо соблюдать неравенство $-\left(\frac{1}{3} K_2^2 K_3 q_6 + q_2\right) > 0$. Это условие имеет место, когда

$$K_2 < \frac{3q_2}{-K_3 q_6}, \quad (223)$$

где $q_2 < 0$.

Неравенство (223) выполнимо для каждого значения K_2 в определенном интервале величин относительного эксцентриситета χ .

Случай, когда дискриминант отрицателен, рассматривать не будем, как не имеющий физического смысла для нашей задачи.

Таким образом, каждому значению параметра K_2 будут соответствовать вполне определенные значения относительного эксцентриситета, при которых возможно устойчивое равновесное состояние системы.

Рассматривая вопрос о положительности коэффициента n_2^* , устанавливаем также, что условие $n_2^* > 0$ будет выполнено при определенных значениях K_1 и χ , когда задан коэффициент K_2 , причем ограничения по K_1 и χ могут сузить область устойчивости в плоскости этих параметров.

Коэффициент n_3^* положителен при

$$K_1 < K_2 \frac{q_9}{q_8}. \quad (224)$$

Так как отношение $\frac{q_9}{q_8}$ зависит от величины χ , которая в свою очередь изменяется от 0 до 1, то для заданного значения параметра K_2 область устойчивости будет ограничена по параметру K_1 . Чем больше величина K_2 при данном χ , тем больше значение K_1 и область устойчивых режимов.

Оценивая влияние параметра K_2 , учитывающего инерционность масляного слоя при нестационарных движениях шипа, замечаем, что параметр K_2 отделяет от оси χ те значения, при которых система устойчива. С увеличением K_2 область устойчивых значений χ возрастает, и при $K_2 \rightarrow \infty$ граница области устойчивости не пересекает оси относительного эксцентриситета. С увеличением K_2 область устойчивых режимов по параметру K_1 тоже расширяется.

Раскрывая предпоследний определитель Гурвица (221), получим

$$n_1^* n_2^* n_3^* - n_1^{*2} n_4^* - n_3^{*2} n_0^* > 0. \quad (225)$$

Граница устойчивости, построенная по условию (225) в совокупности с условиями, рассмотренными выше, окончательно определяет расположение устойчивых и неустойчивых областей равновесных режимов работы системы.

Влияние параметра K_2 проявляется тем сильнее, чем больше скорость вращения ротора, поэтому при сравнительно невысоких числах оборотов практически можно рассмотреть устойчивость без учета влияния инерционности масляного слоя. Характеристическое уравнение (219) в этом случае будет иметь следующие значения коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} n_0^* &= \frac{1}{9} K_1^2 K_3^2 \chi_0, \\ n_1^* &= \frac{1}{3} K_1 K_3 q_6, \\ n_2^* &= \frac{1}{3} K_1^2 K_3 q_{10} + q_6, \\ n_3^* &= K_1 q_8, \\ n_4^* &= K_1^2 q_{11}, \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

т. е. все коэффициенты в этом случае положительны. Решая неравенство (225), учитывая зависимости (226), получим условие устойчивости:

$$K_1 \leq \sqrt{\frac{3q_5 q_6 q_8}{K_3 (q_8^2 \chi_0 + q_6^2 q_{11} - q_6 q_8 q_{10})}}. \quad (227)$$

Характер расположения границы устойчивости, построенной по условию (227), представлен на фиг. 32. При значениях отно-

сительного эксцентриситета, больших 0,8, система устойчива при любом значении параметра K_1 . Если относительный эксцентриситет меньше 0,8, система устойчива при определенных значениях параметра K_1 . Наличие области устойчивости при значениях $\chi < 0,8$ объясняется демпфирующими свойствами масляного слоя. Учет влияния гибкости вала, осуществленный в уравнениях (209), несколько сужает область устойчивости. Коэффициенты характеристического уравнения (211) будут положительны, так же как и коэффициенты, определяемые равенствами (226).



Фиг. 32. Граница устойчивости гибкого и жесткого роторов.

В связи с этим граница устойчивости для гибкого вала имеет тот же характер, что и для жесткого (фиг. 32), причем она располагается тем ниже, чем меньше жесткость.

Если при расчете на устойчивость, после того как граница по условию (227) построена, режим работы системы окажется неустойчивым, то производить расчет с учетом коэффициента K_4 не следует, ибо при этом область устойчивости сузится. Если же режим оказался устойчивым, а рабочее число оборотов ротора близко к первому критическому, то ротор следует проверить на устойчивость с учетом параметра K_4 .

В условии устойчивости, определяемом неравенством (227), нестационарность процессов учитывается граничными условиями для скоростей частиц смазывающей жидкости на поверхности движущегося шипа.

Характеристическое уравнение (216) для жестких валов, опирающихся на подшипники с отношением $\frac{l}{d} < 1$, примет вид

$$m'_0 \lambda^4 + m'_1 \lambda^3 + m'_2 \lambda^2 + m'_3 \lambda + m'_4 = 0, \quad (228)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m'_0 &= K_1^2 K_3^2 K_5^2, \\ m'_1 &= K_1 K_3 K_5 r_2, \\ m'_2 &= K_1^2 K_3 K_5 r_4 + r_1, \\ m'_3 &= K_1 r_3, \\ m'_4 &= K_1^2 r_5. \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

Значения коэффициентов r_i определяются выражениями (218). Условие устойчивости короткого подшипника опреде-

ляется предпоследним определителем Гурвица:

$$\begin{vmatrix} m'_1 & m'_0 & 0 \\ m'_3 & m'_2 & m'_1 \\ 0 & m'_4 & m'_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Раскрыв определитель и решив его относительно параметра K_1 , получим

$$K_1 \leq \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{K_2 K_3 (r_2^2 r_5 + r_3^2 - r_2 r_3 r_4)}}. \quad (230)$$

Выражение (230) позволяет сравнительно просто построить границу устойчивости для короткого подшипника. Пример расположения границы показан на фиг. 33. Равновесный режим всегда устойчив при $\chi > 0,7$. Возможность устойчивой работы при $\chi < 0,7$ объясняется влиянием демпфирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СИСТЕМЫ МАСЛЯНЫЙ СЛОЙ—ШИП В УСТОЙЧИВОЙ ОБЛАСТИ

Как отмечалось в первой главе, система масляный слой—шип в области устойчивых, или «спокойных», равновесных режимов может совершать малые колебания с определенными собственными частотами. Гуммель показал, что при $\chi > 0,7$ система имеет две собственные частоты, определяемые формулой (60).

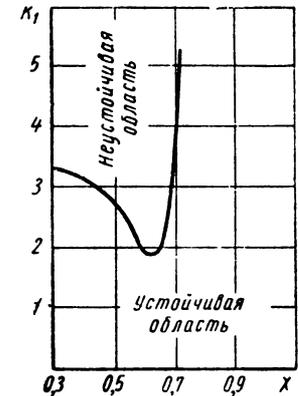
Продолжая исследования Х. Гуммеля, А. Камерон [49] распространил их на случай, когда корни характеристического уравнения комплексные. Согласно выражению (60) корни будут комплексными, если $(1 + \frac{G}{2})^2 < \frac{G}{\chi^2}$ при $\chi < 0,7$. Так как Гуммель не учитывал демпфирования масляного слоя, то наличие комплексных корней при $\chi < 0,7$ будет показывать, что процесс происходит в неустойчивой, или «неспокойной», области равновесных состояний.

Преобразуя выражения (60) в виде

$$\lambda = \pm \left(\frac{g}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{\frac{G^2}{2\chi} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G}{2}\right)} \pm i \sqrt{\frac{G^2}{2\chi} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G}{2}\right)} \right],$$

где

$$i = \sqrt{-1},$$



Фиг. 33. Граница устойчивости короткого подшипника.

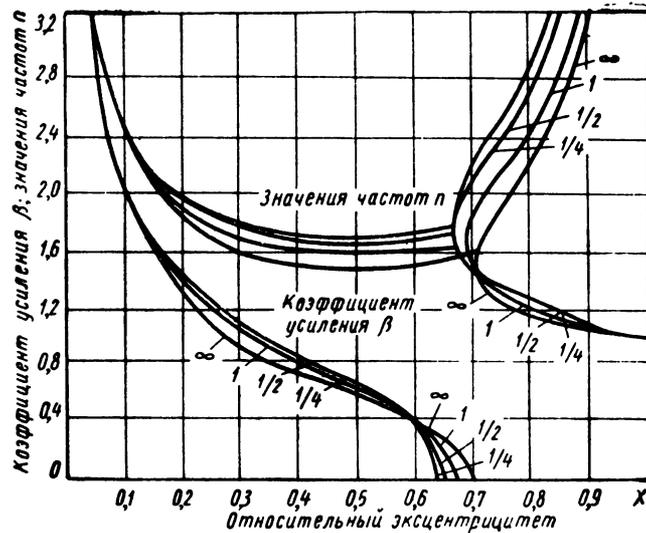
и введя обозначения

$$\sqrt{\frac{g}{\delta} \left[\frac{G^2}{2\chi} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G}{2} \right) \right]} = n \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

$$\sqrt{\frac{g}{\delta} \left[\frac{G^2}{2\chi} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G}{2} \right) \right]} = \beta \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

получим

$$\lambda = \pm \left(n \sqrt{\frac{g}{\delta}} \pm i\beta \sqrt{\frac{g}{\delta}} \right). \quad (231)$$



Фиг. 34. Кривые собственных частот и коэффициента усиления по данным Камерона.

Так как решения уравнений возмущенного движения системы имеют вид

$$x = Ae^{i\lambda t} = Ae^{\pm \beta \sqrt{\frac{g}{\delta}} t} e^{\pm in \sqrt{\frac{g}{\delta}} t},$$

$$y = A_1 e^{i\lambda t} = A_1 e^{\pm \beta \sqrt{\frac{g}{\delta}} t} e^{\pm in \sqrt{\frac{g}{\delta}} t},$$

то колебание системы масляный слой—шип происходит с собственной частотой $n \sqrt{\frac{g}{\delta}}$.

Как следует из фиг. 34, для значений $\chi < 0,7$ система имеет одну частоту, а при $\chi > 0,7$ — две собственные частоты. Кривые изменения экспонентного фактора усиления β в зависимости от χ показывают, что нагружение подшипника уменьшает интенсивность вибрации.

В случае, рассмотренном Стодолой, Гуммелем и Камероном, величины собственных частот зависят от положения центра шипа на кривой подвижного равновесия, т. е. только от величины относительного эксцентриситета χ .

Следуя этим авторам, а также А. Тондю [67], при определении собственных частот не будем учитывать силы демпфирования, что дает возможность аналитически определить частоты в рассматриваемом нами случае.

Учитывая это, для гибкого вала при нестационарных процессах в масляном слое на основании выражения (202) получим следующее характеристическое уравнение системы (201):

$$\begin{vmatrix} B_1 \lambda^2 + F_1 & A \lambda^2 & C_1 \lambda^2 + H_1 & 0 \\ -C_2 \lambda^2 - H_2 & 0 & B_2 \lambda^2 + F_2 & A \lambda^2 \\ -K_4 & \lambda^2 + K_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & \lambda^2 + K_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (232)$$

На основании уравнения (232) имеем

$$\bar{n}_0 \lambda^8 + \bar{n}_2 \lambda^6 + \bar{n}_4 \lambda^4 + \bar{n}_6 \lambda^2 + \bar{n}_8 = 0,$$

в котором коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}_0 &= q_0, \\ \bar{n}_2 &= \frac{1}{3} K_1 K_2 K_3 K_4 q_3 + K_1 K_2 q_4 + 2K_4 q_0, \\ \bar{n}_4 &= \frac{1}{9} K_1^2 K_2^2 K_3^2 K_4^2 \lambda_0 + \frac{1}{3} K_1^2 K_2^2 K_3 K_4 q_{10} + \\ &+ \frac{1}{3} K_1 K_2 K_3 K_4^2 q_3 + 2K_1 K_2 K_4 q_4 + K_4^2 q_0 + K_1^2 K_2 q_{11}, \\ \bar{n}_6 &= \frac{1}{3} K_1^2 K_2^2 K_3 K_4^2 q_{10} - 2K_1^2 K_2^2 K_4 q_{11} + K_1 K_2 K_4^2 q_4, \\ \bar{n}_8 &= K_1^2 K_2^2 K_4^2 q_{11}, \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_4 &= a_{11} b_{23} + a_{13} b_{21} + a_{21} b_{13} - a_{23} b_{11} \neq q_4, \\ q_1 &= q_2 = q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = q_9 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Значения коэффициентов q_0, q_3, q_{10}, q_{11} совпадают с приведенными в формулах (205).

При подстановке $\lambda^2 = z$ в уравнения (233), получим

$$\bar{n}_0 z^4 + \bar{n}_2 z^3 + \bar{n}_4 z^2 + \bar{n}_6 z + \bar{n}_8 = 0. \quad (235)$$

Определить корни уравнения (235) можно, но это будет связано с большой вычислительной работой, если учесть, что для того, чтобы построить кривые собственных частот, необходимо получить большое количество точек.

В случае жесткого вала, при учете параметра K_2 , степень уравнения (235) понижается до второй. Тогда корни этого уравнения определяются по формуле

$$z = \lambda^2 = \frac{A \times \sqrt{\frac{1}{9} K_1^2 K_2^2 K_3^2 (q_{10}^2 - 4q_{11}\chi_0) + (q_4^2 - q_{10}q_{11}) + \frac{2}{3} K_3 (q_4 q_{10} - 2q_3 q_{11})}}{2 \left(\frac{1}{9} K_1^2 K_2^2 K_3^2 \chi_0 + \frac{1}{3} K_1 K_2 K_3 q_3 + q_0 \right)}, \quad (236)$$

где $A = -K_1 K_2 \left(\frac{1}{3} K_1 K_2 K_3 q_{10} + q_4 \right) \pm K_1 K_2$.

В области устойчивости корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda = \pm \omega i$. Величина коэффициента $|\omega|$ при мнимой единице является безразмерной собственной частотой системы. Существование корней такого вида свидетельствует о том, что система работает в устойчивой области, т. е. при положительном значении дискриминанта в выражении (236). Если же дискриминант меньше нуля, то система войдет в неустойчивую область. Анализ формулы (236) показывает, что величина собственной частоты зависит от безразмерной угловой скорости вращения шипа — параметра K_2 , параметра K_2 , характеризующего влияние инерционности масляного слоя, и от положения центра шипа в подшипнике.

На фиг. 35 представлен характер изменения собственных частот для различных значений параметра K_2 . С возрастанием K_2 собственная частота увеличивается. При $K_2 \rightarrow \infty$ имеем случай, рассмотренный Стодолой и Гуммелем. При этом формула (236) принимает вид

$$\lambda^2 = \frac{3}{2K_3\chi_0} (-q_{10} \pm \sqrt{q_{10}^2 - 4q_{11}\chi_0}). \quad (237)$$

Как следует из выражения (237), собственная частота зависит теперь только от положения центра шипа и не зависит явно от безразмерной угловой скорости вращения шипа.

Это обстоятельство можно объяснить тем, что в случае Стодолой—Гуммеля учитываются только упругие силы масляного слоя, являющиеся функциями положения центра шипа, т. е. величины χ_0 , так как коэффициент нагруженности $K_3 = f(\chi_0)$. В связи с этим и собственные частоты системы оказываются зависящими только от положения центра шипа.

При учете инерционности масляного слоя параметром K_2 , влияние которого возрастает с увеличением быстроходности машин, в уравнениях движения центра шипа появляется присоединенная масса и собственные частоты системы оказываются зависящими от нее. Принимая для жесткого вала $K_2 \rightarrow \infty$, мы тем самым пренебрегаем влиянием локальных сил инерции масляного слоя и получаем для определения собственных частот системы формулу (237), тождественную формуле Гуммеля.

Граница устойчивости будет определяться уравнением

$$q_{10}^2 - 4q_{11}\chi_0 = 0,$$

которое удовлетворяется при $\chi_0 \approx 0,75$.

Если при гибком вале не учитывать инерционность масляного слоя, то формула для определения собственной частоты системы будет

$$\lambda^2 = \frac{-\left(\frac{1}{3} K_3 K_4^2 q_{10} + 2K_4 q_{11}\right) \pm \frac{1}{3} K_3 K_4^2 \sqrt{q_{10}^2 - 4q_{11}\chi_0}}{2 \left(\frac{1}{9} K_3^2 K_4^2 \chi_0 + \frac{1}{3} K_3 K_4 q_{10} + q_{11} \right)}. \quad (238)$$

На фиг. 36 показан характер изменения собственных частот в зависимости от величины параметра K_4 , характеризующего жесткость вала. С ростом этого параметра увеличиваются значения собственных частот системы.

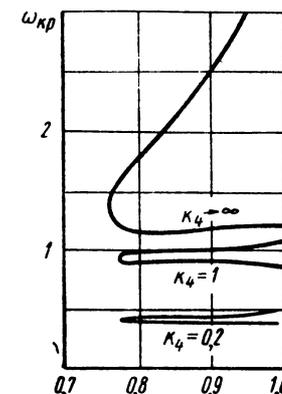
Таким образом, при работе вала с числом оборотов, превышающим первое критическое, собственные частоты системы зависят как от упругих свойств масляной пленки, так и от упругих свойств вала. Если принять $K_4 \rightarrow \infty$, что соответствует случаю жесткого вала, то выражение (238) преобразуется в формулу (237). Рассматривая подобным же образом собственные частоты системы масляный слой—шип в случае короткого подшипника, получим для гибкого вала

$$\lambda^2 = \frac{-(K_3 K_4^2 K_5 r_4 + 2K_4 r_5) \pm K_3 K_4^2 K_5 \sqrt{r_4^2 - 4r_5}}{2(K_3^2 K_4^2 K_5^2 + K_3 K_4 K_5 r_4 + r_5)}, \quad (239)$$

для жесткого вала

$$\lambda^2 = \frac{-r_4 \pm \sqrt{r_4^2 - 4r_5}}{2K_3 K_5}; \quad (240)$$

коэффициенты r_4, r_5 определяются по формулам (218).

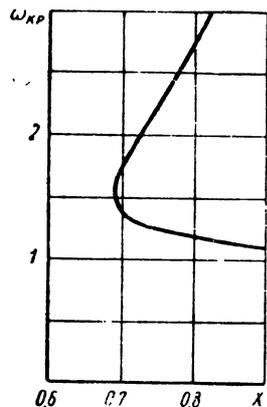


Фиг. 36. Кривые собственных частот с изменением параметра K_4 .

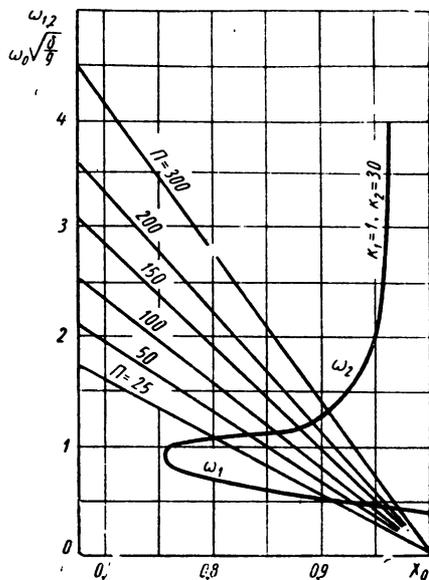
Характер изменения собственных частот системы для короткого подшипника показан на фиг. 37.

Мы рассмотрели вопрос об определении собственных частот для двух предельных случаев: подшипника неограниченной протяженности и короткого подшипника.

Исследование показало, что поддерживающая сила, траектория движения центра шипа и коэффициент нагруженности для подшипника конечной длины



Фиг. 37. Кривые собственных частот для короткого подшипника.



Фиг. 38. Определение собственных частот.

заклучены между подобными же характеристиками предельных случаев. Такого же результата следует ожидать в расположении границы устойчивости и спектра собственных частот. Для рассмотренных случаев могут быть определены значения критических (резонансных) частот колебаний вала на масляном слое при помощи построений, аналогичных описанным. Например, для жесткого вала по заданным значениям параметров K_1 , K_2 , K_3 можно построить кривую безразмерных собственных частот (фиг. 38), а затем при известной характеристике подшипника, $\Pi = \left(\frac{q\psi^2}{\mu}\right) \sqrt{\frac{\delta}{g}}$ — кривую изменения безразмерной угловой скорости вала $\omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{g}}$ в зависимости от относительного эксцентриситета χ_0 . Точки пересечения этих кривых дадут значения критических частот. На фиг. 38 показано, как изменяется собственная частота системы при $K_2 = 30$, $K_1 = 1$. Для ряда значений характеристики подшипника Π приведены кривые $\omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{g}}$. Каждому значению Π соответствуют две критические частоты.

РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

ВЛИЯНИЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВАЛА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Задача расчета на устойчивость движения ротора заключается в том, чтобы построить границы области устойчивости, определить величины безразмерных параметров для данного ротора, а также выявить влияние отдельных величин (ω_0 , δ , $\frac{l}{d}$) на устойчивость движения [9]. Методику расчета рассмотрим на примере ротора газового компрессора с параметрами

$$K_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{g}} = 2,5;$$

$$K_3 = \frac{q\psi^2}{\mu\omega_0} = 0,2 (\chi \approx 0,25), \quad K_4 = \omega_{кр}^2 \frac{\delta}{g} = 0,80.$$

При этом

$$\frac{l}{d} = 0,8; \quad \delta = 0,07 \text{ мм}; \quad \omega_0 = 953 \frac{1}{\text{сек}}; \quad \omega_{кр} = 338 \frac{1}{\text{сек}}.$$

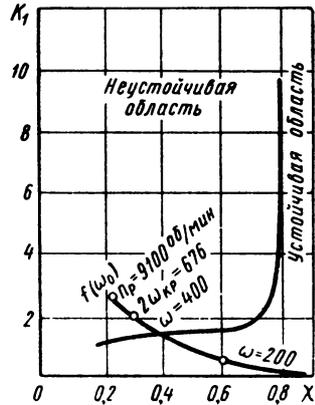
На основании теории, изложенной ранее, в плоскости основных параметров K_1, χ_0 могут быть построены границы устойчивости. На фиг. 39 показана граница области устойчивости для рассматриваемого ротора. Над границей устойчивости располагается область неустойчивых равновесных режимов, а под границей — область устойчивых режимов.

Точка с координатами $\chi = 0,25$, $K_1 = 2,6$, характеризующими работу ротора, находится в неустойчивой области. Таким образом, подшипники скольжения могут вызвать усиленные вибрации ротора компрессора, что и наблюдалось при его работе.

Одним из основных параметров, вызывающих усиленные вибрации ротора, является скорость вращения. Чтобы выяснить влияние скорости вращения ротора на устойчивость движения, построим зависимость параметров K_1 и K_3 от скорости вращения ротора при $\delta = 0,07 \text{ мм}$ (фиг. 39). Для построения этой кривой, именуемой в дальнейшем линией угловых скоростей вала, в выражениях параметров K_1 и K_3 сохраним все величины постоянными, за исключением угловой скорости вала. Тогда на основании выражений (199) коэффициент K_1 будет пропорционален

угловой скорости вращения вала, а коэффициент K_3 — обратно пропорционален ей.

Меняя угловую скорость ω_0 от нуля до определенной величины, получим для каждой угловой скорости соответствующие значения параметров K_1 и K_3 . Учитывая однозначную зависимость между коэффициентами K_3 и относительным эксцентриситетом χ_0 для данного отношения $\frac{l}{d}$ (см. стр. 75), будем иметь величину χ_0 , соответствующую каждому значению угловой скорости. Геометрическим местом точек в координатной плоскости $K_1 O \chi$, полученных таким способом, является $f(\omega_0)$ — линия угловых скоростей вала.



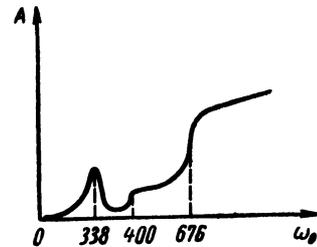
Фиг. 39. Определение режима работы шипа с изменением угловой скорости.

$\omega_0 = 400$ 1/сек; первая критическая скорость ротора $\omega_{кр} = 338$ 1/сек. Таким образом, ротор войдет в неустойчивую область при числе оборотов $n = 3830$ об/мин, тогда как рабочее число оборотов ротора $n = 9100$ об/мин. После того как скорость вращения достигнет удвоенной критической скорости ($2\omega_{кр} = 676$ 1/сек), амплитуда колебаний резко увеличится. При дальнейшем возрастании скорости вращения до $\omega_0 = 953$ 1/сек амплитуда уменьшаться не будет (фиг. 40), так как теперь система находится в области самовозбужденных колебаний, возбуждаемых масляным слоем подшипников. При скорости вращения ротора, когда $n = 3830$ об/мин, система находится в устойчивой области. Однако при этом центр шипа все же не находится в состоянии покоя, так как он подвержен действию внешних периодических сил. При переходе через первое критическое число оборотов ($n = 3230$ об/мин) наступает явление резонанса и амплитуда колебаний вала резко возрастает. Но так как система находится в области устойчивости, то демпфирующие силы в значительной степени уменьшают амплитуду резонансных

колебаний. Следует отметить, что масляная пленка снижает критическую угловую скорость, соответствующую валу на жестких опорах. Если на систему, работающую в области устойчивости, действует внешняя периодическая сила, по частоте совпадающая с одной из собственных частот системы масляный слой — шип, то возникают новые резонансные явления.

После перехода системы в неустойчивую область ($n > 3830$ об/мин) колебания системы будут носить несинусоидальный характер и могут иметь ограниченную амплитуду.

В зависимости от значений тех или иных величин, характеризующих работу подшипников скольжения, взаимное расположение границы устойчивости и кривой, характеризующей изменение угловой скорости в координатах $K_1 O \chi$ может быть таким, что линия угловой скорости пересекает границу устойчивости при скорости вращения, меньшей первой критической скорости ($\omega_0 < \omega_{кр}$), например в случае легких роторов. При тяжелых роторах кривая угловой скорости может пересечь границу устойчивости, когда значение угловой скорости вращения будет больше удвоенной первой критической скорости ($\omega_0 > 2\omega_{кр}$). Рассмотренный нами случай является промежуточным.

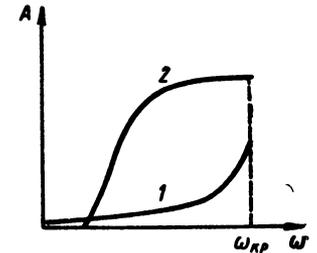


Фиг. 40. Характер изменения амплитуды колебаний с изменением скорости вращения ротора.

колебаний. Следует отметить, что масляная пленка снижает критическую угловую скорость, соответствующую валу на жестких опорах. Если на систему, работающую в области устойчивости, действует внешняя периодическая сила, по частоте совпадающая с одной из собственных частот системы масляный слой — шип, то возникают новые резонансные явления.

После перехода системы в неустойчивую область ($n > 3830$ об/мин) колебания системы будут носить несинусоидальный характер и могут иметь ограниченную амплитуду.

В зависимости от значений тех или иных величин, характеризующих работу подшипников скольжения, взаимное расположение границы устойчивости и кривой, характеризующей изменение угловой скорости в координатах $K_1 O \chi$ может быть таким, что линия угловой скорости пересекает границу устойчивости при скорости вращения, меньшей первой критической скорости ($\omega_0 < \omega_{кр}$), например в случае легких роторов. При тяжелых роторах кривая угловой скорости может пересечь границу устойчивости, когда значение угловой скорости вращения будет больше удвоенной первой критической скорости ($\omega_0 > 2\omega_{кр}$). Рассмотренный нами случай является промежуточным.



Фиг. 41. Характер изменения амплитуды колебаний от неуравновешенности вала (1) и амплитуды самовозбужденных колебаний (2) при изменении угловой скорости ω_0 .

Таким образом, неустойчивость может обнаружиться в случае, когда угловая скорость вращения ротора меньше первой критической скорости, и в то же время режим может оказаться устойчивым при угловой скорости вращения вала большей, чем его двойная критическая скорость.

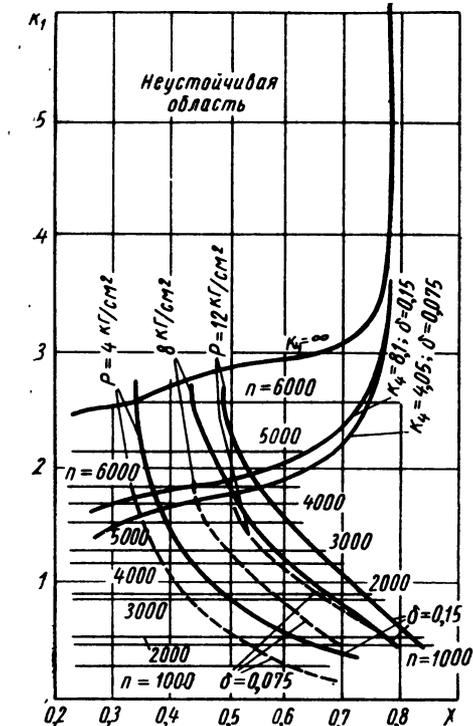
Следует отметить, что распространенное в иностранной литературе мнение, что соотношение $\omega_0 < 2\omega_{кр}$ является критерием устойчивости, не всегда правильно.

В случае, когда переход в неустойчивую область совершается до первой критической скорости, увеличение амплитуды в результате колебаний, вызванных масляным слоем, является более опасным, чем от неуравновешенности (фиг. 41).

Рассмотрим взаимное расположение границ устойчивости и линий угловой скорости для роторов с различными нагрузками на подшипники и значениями безразмерного коэффициента жесткости K_4 . Для таких роторов критические угловые скорости на жестких опорах приблизительно равны. Различие в значениях K_4 происходит из-за изменения величины радиального зазора. На фиг. 42 показаны границы области устойчивости для $K_4 = 8,1$; $K_4 = 4,05$ и $K_4 = \infty$. Из расположения границ следует, что область

устойчивости расширяется с увеличением параметра K_4 , достигая наибольшей протяженности при жестком вале. Для каждой нагрузки построены линии угловых скоростей вала: линии $f(\omega_0)$.

Линиям $f(\omega_0)$ при $\delta=0,15$ мм соответствует и граница устойчивости, построенная для этого же значения δ ; то же для $\delta=0,075$ мм.



Фиг. 42. Графическое исследование различных режимов работы роторов.

же числе оборотов и $\delta=0,15$ мм система будет находиться в неустойчивой области. Это объясняется тем, что параметр K_1 в первом случае меньше, чем во втором.

Итак, чтобы выяснить влияние того или иного параметра на устойчивость, необходимо в каждом отдельном случае рассматривать взаимное расположение границы устойчивости и линий $f(\omega_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА

При конструировании опорных узлов ротора обычно бывает задано его рабочее и критическое число оборотов, а также температура масла в подшипнике. Параметрами, изменением кото-

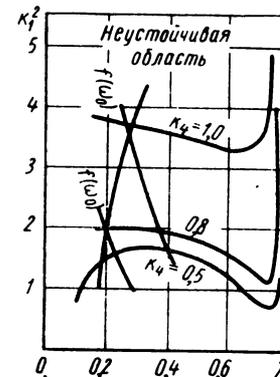
рых можно добиться устойчивого режима, являются удельная нагрузка q , отношение длины шейки вала к его диаметру $\frac{l}{d}$, радиальный зазор δ . Чтобы определить значения $\frac{l}{d}$ и δ , при которых система будет устойчива, необходимо выполнить ряд построений [9], [10].

Для заданного отношения $\frac{l}{d}$ и δ строится ряд границ устойчивости при известном значении $\omega_{кр}$, и изменяемом значении радиального зазора δ . Для этих же величин δ наносят кривые изменения угловой скорости вала (фиг. 43). Отмечают точки пересечения кривых с соответствующими (по δ) границам устойчивости, и через них проводят кривую, ограничивающую область устойчивости по скорости вращения ротора. Справа от границы, построенной по ω_0 , движение будет устойчиво, слева — неустойчиво. Такое построение выполнено на фиг. 43 для подшипника, у которого $\frac{l}{d}=0,8$.

Чтобы выяснить влияние величины радиального зазора на устойчивость, построим кривую, характеризующую зависимость параметров K_1 и χ от изменения δ при постоянной скорости вращения ротора. На фиг. 44 показаны линии изменения величины δ для $\frac{l}{d}=0,8$ при $\omega_0=950, 700$ и 600 1/сек. На фиг. 44 кривой a отмечена граница устойчивости по ω_0 . Пересечение этих кривых покажет значение радиального зазора, обеспечивающего устойчивую работу.

Увеличение радиального зазора для рассматриваемых роторов расширяет область устойчивости. Однако, например, при $n=5000$ об/мин и $\delta=0,075$ мм система работает в устойчивой области, а при том же числе оборотов и $\delta=0,15$ мм система будет находиться в неустойчивой области. Это объясняется тем, что параметр K_1 в первом случае меньше, чем во втором.

Итак, чтобы выяснить влияние того или иного параметра на устойчивость, необходимо в каждом отдельном случае рассматривать взаимное расположение границы устойчивости и линий $f(\omega_0)$.



Фиг. 43. Построение границ устойчивости по скорости вала.

Построив (фиг. 44) кривые изменения δ и границы по ω_0 для ротора с угловой скоростью вращения $\omega_0=600$ 1/сек, замечаем, что устойчивый режим работы возможен при $\frac{l}{d}=0,8$ и $\delta=0,1$ мм, а также при $\frac{l}{d}=0,5$ и $\delta > 0,08$ мм.

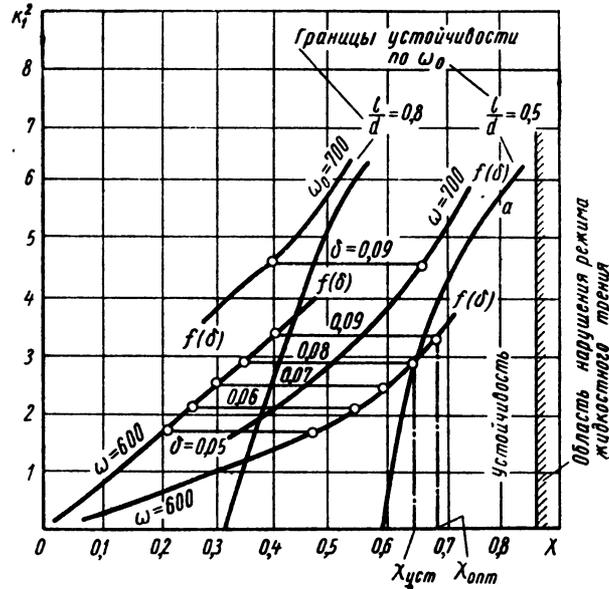
На основании изложенного можно предложить следующую последовательность расчета на устойчивость.

1. Построить границу устойчивости при заданных значениях величины K_1 и δ в плоскости параметров χ, K_1 .
2. Определить значения параметров системы $\chi(K_3)$ и K_1 для рассматриваемого случая. По величине параметров $\chi(K_3)$ и K_1 выяснить, располагается данный режим работы в области устойчивости или нет

Если движение ротора окажется неустойчивым, следует:

1. Построить границы устойчивости при различных значениях параметра K_4 и различных величинах отношения $\frac{l}{d}$. Варьирование величины K_4 можно осуществить изменением радиального зазора δ , так как критическая скорость вращения ротора задана.

2. Построить линии изменения угловой скорости ω_0 вращения вала, линии $f(\omega_0)$, при различных постоянных значениях радиального зазора для ряда отношений $\frac{l}{d}$, а затем получить кривую, ограничивающую область устойчивости по угловой скорости. Линии угловой скорости следует строить для тех значений δ и $\frac{l}{d}$, для которых найдены границы области устойчивости.



Фиг. 44. Графическое определение значения радиального зазора, обеспечивающего устойчивую работу ротора.

3. Построить линии изменения радиального зазора, линии $f(\delta)$, при различных постоянных значениях угловой скорости для тех же значений $\frac{l}{d}$.

4. Сопоставив взаимное расположение линий $f(\delta)$ и кривой, ограничивающей область устойчивости по угловой скорости, определить значения δ и $\frac{l}{d}$, обеспечивающие устойчивость движения ротора в подшипниках скольжения.

Такое построение (фиг. 44) дает возможность определить

значения относительного эксцентриситета ($\chi_{уст}$), обеспечивающего устойчивую работу вала в подшипнике.

Этому значению относительного эксцентриситета при данном отношении $\frac{l}{d}$ соответствует определенная величина коэффициента грузоподъемности $K_{зуст}$. На основании третьего соотношения формул (199) получим

$$\psi_{уст} = \sqrt{(K_{зуст}) \frac{\mu \omega_0}{q}}. \quad (241)$$

Выражение (241) позволяет определить величину радиального зазора, обеспечивающую устойчивую работу системы при заданном значении радиуса шипа r_0 :

$$\delta_{уст} = \psi_{уст} r_0. \quad (242)$$

Значение радиального зазора, вычисленное по формуле (242), является наименьшим допустимым, обеспечивающим устойчивость движения. При назначении оптимальной величины радиального зазора следует стремиться к неравенству

$$\delta_{опт} \geq \delta_{уст}. \quad (243)$$

Таким образом, чтобы обеспечить устойчивую работу подшипника, иногда возникает необходимость несколько увеличить радиальный зазор, а также и значение относительного эксцентриситета (фиг. 44). Увеличение же последнего, как это видно из результатов исследований, всегда повышает вероятность устойчивой работы системы масляный слой—шип.

Если величина радиального зазора обеспечивает устойчивую работу подшипника, то необходимо проверить, соблюдается ли при этом режим жидкостного трения.

На основании фиг. 45 можно установить

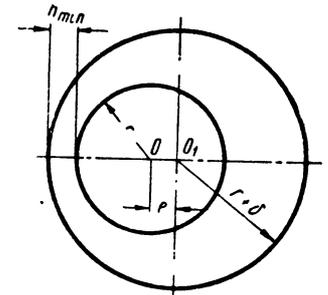
$$h_{min} = \delta - e = (1 - \chi) \delta, \quad (244)$$

или

$$h_{min} = (1 - \chi) \frac{\psi d}{2},$$

где значение относительного зазора ψ для данного $\frac{l}{d}$ определяется из выражения (241) по соответствующему значению коэффициента грузоподъемности K_3 .

Критическая минимальная толщина масляной пленки $h_{кр min}$ определяется в результате расчета, учитывающего включения в масло, величин оптимальной шероховатости поверхностей, искажений их геометрической формы и других факторов.



Фиг. 45. К определению h_{min} .

Работа подшипника в условиях жидкостного трения будет обеспечена, если толщина масляного слоя превышает критическую, т. е.

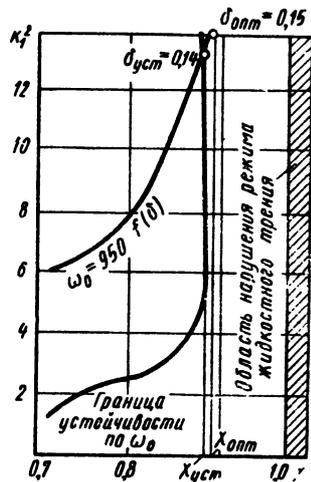
$$h_{\min} = kh_{кр \min}, \quad (245)$$

где коэффициент надежности $k > 1$.

Если значение $h_{кр \min}$ известно, то можно, используя формулу (244), вычислить критическое значение относительного эксцентриситета:

$$\chi_{крит} = 1 - \frac{2h_{кр \min}}{\psi d}, \quad (246)$$

где значение ψ найдено из условия устойчивости системы.



Фиг. 46. Выбор оптимального значения $\chi_{\text{опт}}$.

Отложив величину $\chi_{крит}$ по оси абсцисс (фиг. 46), получим область значений относительного эксцентриситета, определяемую неравенством

$$\chi_{крит} < \chi < 1, \quad (247)$$

в которой режим жидкостного трения не обеспечивается.

Если окажется, что $\chi_{крит} < \chi_{уст}$, то, чтобы обеспечить режим жидкостного трения и устойчивую работу подшипника, необходимо повысить чистоту обработки поверхностей цапфы и вкладыша, в результате чего уменьшится величина $h_{кр \min}$ и соответственно увеличится значение $\chi_{крит}$.

Таким образом, для устойчивой работы системы и режима жидкостного трения оптимальная величина относительного эксцентриситета должна удовлетворять неравенству

$$\chi_{уст} < \chi_{\text{опт}} < \chi_{крит}. \quad (248)$$

Если величина коэффициента надежности k известна заранее, то при данном радиальном зазоре можно определить необходимую обработку поверхностей цапфы и вкладыша.

По формуле (244) находят h_{\min} , а затем из выражения (245) $h_{кр \min}$. Считая приближенно, что неровности между поверхностями цапфы и вкладыша распределяются поровну, и пренебрегая величиной прогиба цапфы, получим

$$\Delta_u = \Delta_s = \frac{h_{кр \min}}{2}. \quad (249)$$

Зная величину неровностей, выбирают чистоту поверхностей и, пользуясь ГОСТ 2789-59, назначают способ обработки поверхностей цапфы и вкладыша.

Следует отметить, что чрезмерное увеличение радиального зазора может не только снизить несущую способность масляного слоя, но и увеличить потери на трение и повысить температуру масла.

Изложенная методика расчета величины радиального зазора позволяет определить его величину исходя из условия устойчивой работы системы с последующей проверкой обеспечения режима жидкостного трения.

Пример расчета. Определим величину радиального зазора для подшипников скольжения по следующим данным:

нагрузка на подшипник	$P = 240 \text{ кг}$
диаметр цапфы	$d = 50 \text{ мм}$
длина шейки вала	$l = 25 \text{ мм}$
рабочее число оборотов	$n = 9100 \text{ об/мин}$
первое критическое число оборотов	$n_{кр1} = 3230 \text{ об/мин}$
масло турбинное марки „Л“ с рабочей температурой	50°C

Вычислим безразмерные параметры системы.

1. Квадрат безразмерной угловой скорости ротора

$$K_1^2 = \omega_0^2 \frac{\delta}{g} = \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \frac{\delta}{g}.$$

Радиальный зазор определяется на основании принятого в практике соотношения

$$\delta = 0,001d = 0,05 \text{ мм}.$$

Тогда

$$K_1 = 953^2 \frac{0,007}{981} = 6,4.$$

2. Коэффициент грузоподъемности подшипника

$$K_3 = \frac{q\psi^2}{\mu\omega_0}.$$

Удельное давление на подшипник

$$q = \frac{P}{ld} = 192\,000 \text{ кг/м}^2.$$

Относительный зазор

$$\psi = \frac{\delta}{r} = \frac{0,05}{25} = 0,002.$$

Динамический коэффициент вязкости

$$\mu_{50} = 1,46 \cdot 10^{-3} \text{ кгсек/м}^2.$$

Таким образом,

$$K_3 = \frac{192 \cdot 10^3 (0,002)^2}{1,46 \cdot 10^{-3} \cdot 953} \approx 0,55.$$

3. Безразмерный параметр жесткости вала

$$K_4 = \omega_{кр}^2 \frac{\delta}{g};$$

$$\omega_{кр} = \frac{\pi n_{кр1}}{30} = 338 \text{ 1/сек.}$$

Тогда

$$K_4 = 338^2 \frac{0,007}{981} = 0,82.$$

Расчеты показали, что при данных значениях безразмерных параметров система будет неустойчива. Результаты эксплуатации машины подтверждают этот вывод.

Проведя построения согласно методике, изложенной выше, получим расположение линии $f(\omega_0)$ и границы устойчивости по угловой скорости ротора, представленное на фиг. 46. Точке пересечения этих кривых соответствует значение радиального зазора $\delta_{уст} = 0,14$.

Учитывая неравенство (243), назначим $\delta_{опт} = 0,15 \text{ мм}$. Этому значению радиального зазора соответствует относительный эксцентриситет $\chi_{опт} = 0,89$.

Таким образом, при $\delta_{опт} = 0,15 \text{ мм}$ и $\chi_{опт} = 0,89$ можно ожидать устойчивой работы машины.

Приняв далее коэффициент надежности обеспечения жидкостного режима трения $k=10$, определим на основании формулы (245) минимальную критическую толщину масляного слоя:

$$h_{кр \text{ min}} = \frac{h_{\text{min}}}{k} = \frac{(1 - \chi) \frac{\psi d}{2}}{k} = 0,00154 \text{ мм.}$$

Имея в виду, что прогиб вала учитывается коэффициентом надежности, и считая высоту неровностей на поверхностях цапфы и вкладышей одинаковой, получим

$$\Delta_u = \Delta_v = 0,77 \text{ мк.}$$

При этом чистота поверхности должна быть $\nabla 10$, что обеспечивает хонингование.

Определение оптимального радиального зазора для жесткого вала, опирающегося на короткие подшипники, может быть произведено более простым методом. В случае короткого подшипника на границу устойчивости не влияет отношение l/d , а для определения зависимости относительного эксцентриситета от коэффициента грузоподъемности — это существенный параметр.

Пусть в плоскости χOK_1 построена граница устойчивости для короткого подшипника (фиг. 47). На этой же фигуре нанесены кривые, характеризующие связь между относительным эксцентриситетом и коэффициентом грузоподъемности для различных

отношений l/d . Преобразуем выражения для параметров K_1 и K_3 следующим образом:

$$K_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{\delta}{g}} = a \sqrt{\psi}, \quad (250)$$

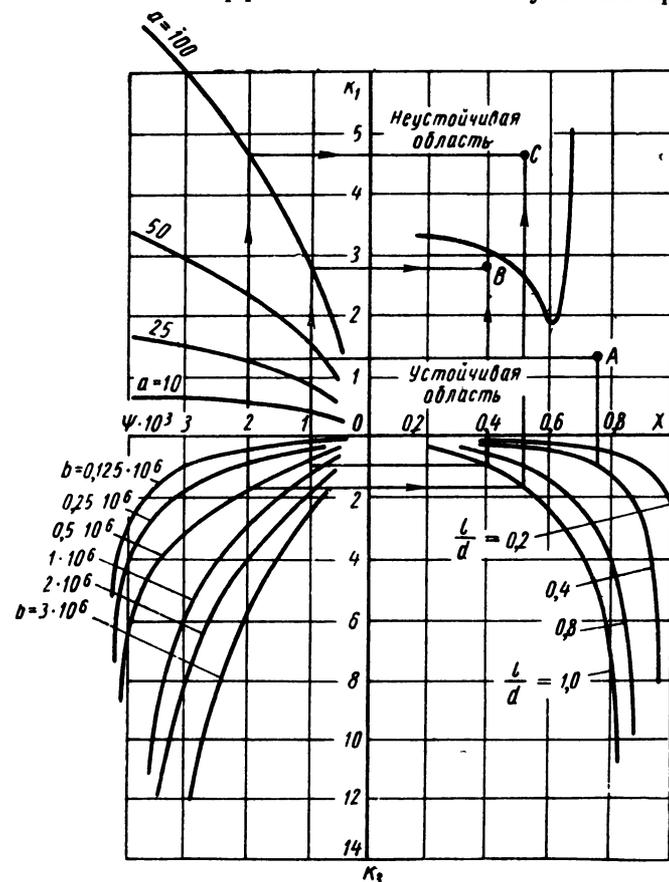
где

$$\left. \begin{aligned} a &= \omega_0 \sqrt{\frac{r}{g}}, \\ K_3 &= \frac{q\psi^2}{\mu\omega_0} = b\psi^2, \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

причем

$$b = \frac{q}{\mu\omega_0}.$$

На основании формул (250) и (251) построим зависимости, характеризующие связь между параметрами K_1 и K_3 при различных значениях коэффициентов a и b . Полученные кривые на-



Фиг. 47. Определение устойчивого режима короткого подшипника.

несены на фиг. 47. Совокупность представленных кривых позволяет для различных случаев при заданном радиусе шипа выбрать значение относительного зазора, обеспечивающего устойчивую работу системы.

Предположим, что $a=25$, $b=0,25 \cdot 10^6$. Зададимся величиной ψ , учитывая, что для современных машин значение ψ колеблется в пределах 0,0005—0,003. Пусть $\psi=0,002$, $l/d=0,4$. Тогда, как это следует из построения, режим работы системы, определяемый положением точки А (фиг. 47), будет устойчив.

Изменяя величину ψ , можно перевести систему из неустойчивого режима в устойчивый. Пусть режим работы характеризуется точкой С, расположенной в неустойчивой области. Этому режиму соответствуют значения $a=100$, $b=0,5 \cdot 10^6$, $l/d=1$ и $\psi=0,002$. Уменьшив ψ до 0,001 и сохранив прежними значения a , b и l/d , получим точку В, расположенную в устойчивой области.

Рассмотренный метод предполагает постоянство вязкости и угловой скорости для данного ротора. Изменение отношения l/d приведет к изменению удельного давления q и, следовательно, к пересчету коэффициента b . Имея новое значение коэффициента b , необходимо, пользуясь кривой $K_3-\chi$ для соответствующего l/d , получить в плоскости $K_1-\chi$ положение точки, характеризующей данный режим.

Построив названные кривые для определенной группы роторов, можно быстро решить вопрос о величинах ψ и l/d , обеспечивающих работу роторов в устойчивой области.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВЯЗКОСТИ СМАЗЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ВАЛА В ПОДШИПНИКЕ

Результаты исследований [61] показывают, что увеличение вязкости смазывающей жидкости может как расширять, так и сужать область устойчивости.

Очевидно, для подшипника скольжения с определенными рабочими параметрами существует интервал температур, при котором движение вала будет устойчиво и усиленные поперечные вибрации не возникают.

Влияние вязкости масла на возникновение колебаний в системе масляный слой—цапфа отмечается в работе А. Тондла [67], который считает, что автоколебания в системе зависят от температурного режима подшипника.

Сложность явлений, происходящих в масляном слое подшипника, свидетельствует о том, что расположение границы устойчивости системы нельзя считать лишь функцией относительного эксцентриситета χ_0 , характеризующего размещение центра цапфы в подшипнике.

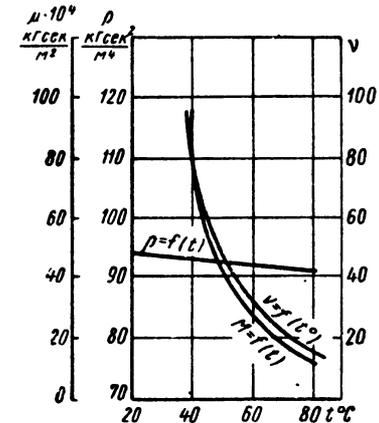
Рассматривая устойчивость движения шипа в подшипнике в наиболее общей постановке задачи с учетом нестационарного состояния масляного слоя, мы показали, что устойчивость системы характеризуется тремя безразмерными коэффициентами K_1 , K_2 , K_3 .

При помощи этих коэффициентов представляется возможным оценить влияние изменения вязкости масла на устойчивость движения вала.

Из коэффициентов, определяемых выражением (199), два (K_2 и K_3) зависят от вязкости масла и один (K_1) не зависит от нее.



Фиг. 48. Граница устойчивости в плоскости χOK_2 при $K_1=\text{const}$.



Фиг. 49. Характеристика светлого масла.

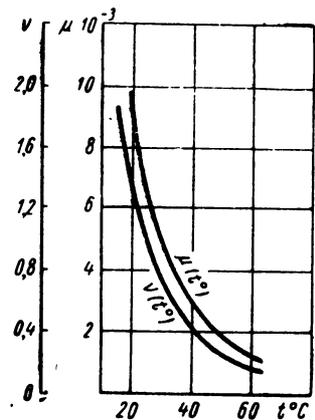
Построим границу области устойчивости в плоскости безразмерных коэффициентов $K_3(\chi)$, K_2 , зависящих от вязкости, считая значение коэффициента K_1 известным для каждого случая. Построенная таким образом граница области устойчивости представлена на фиг. 48.

Если, сохраняя постоянными величины, входящие в параметры K_2 и K_3 , изменить только вязкость масла при различной температуре, то получим кривую, характеризующую изменение вязкости в координатах K_2 , K_3 при определенном постоянном значении параметра K_1 . Кривая вязкости, или линия температур $f(t^\circ)$, будет определенным образом расположена относительно соответствующей по параметру K_1 границы устойчивости. Ход кривой изменения вязкости покажет, на каком интервале температур система устойчива и где неустойчива.

На фиг. 48 нанесены кривые, отражающие процесс изменения вязкости в координатах K_2 и χ для масла, характеристика которого представлена на фиг. 49 по данным С. М. Тарга [39]

и для турбинного масла, характеристика которого приведена на фиг. 50.

Режим, характеризуемый положением точки А (фиг. 48), будет неустойчивым. При $t=30^\circ$ происходит переход через границу области устойчивости. С дальнейшим увеличением температуры параметр K_2 уменьшается, а параметр K_3 и вместе с ним величина относительного эксцентриситета χ_0 увеличиваются. Точка, характеризующая рабочий режим, перемещается в области устойчивости с повышением температуры по кривой $f(t^\circ)$ вниз. Чем выше кривая характеристики масла, тем меньше влияет изменение температуры масла на устойчивость системы.



Фиг. 50. Характеристика турбинного масла «Л».

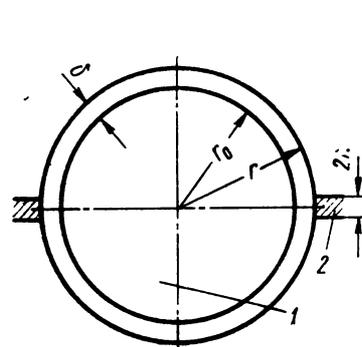
Из изложенного видно, что система масляный слой—цапфа весьма чувствительна к изменению вязкости масла в отношении устойчивости равновесного состояния. Поэтому при эксплуатации подшипников скольжения роторов, работающих на режимах, при которых можно ожидать неустойчивости, необходимо тщательно следить за состоянием смазывающей жидкости. Особое внимание нужно уделять температурному режиму подшипника и предохранению смазывающей жидкости от попадания примесей, способных изменять ее вязкость [8].

Таким образом, влияние вязкости смазывающей жидкости следует рассматривать во взаимодействии с другими параметрами, влияющими на устойчивость системы. Выбранные комбинации безразмерных коэффициентов (K_1, K_2, K_3) позволяют в общем виде оценить значение отдельных входящих в них величин на поведение системы в смысле устойчивости движения. Чтобы определить влияние вязкости на устойчивость в каждом конкретном случае, необходимо по значениям конструктивных и эксплуатационных характеристик подсчитать величины безразмерных коэффициентов K_1, K_2, K_3 и построить границу устойчивости в плоскости коэффициентов K_3, K_2 , считая значение K_1 известным. Затем, оставляя все параметры постоянными, изменять только вязкость масла с помощью температуры и далее строить кривую вязкости, линию $f(t^\circ)$, в плоскости K_2, K_3 . По взаимному расположению кривой вязкости и границы устойчивости нетрудно определить интервал рабочих температур масла, на котором можно ожидать устойчивый режим работы системы.

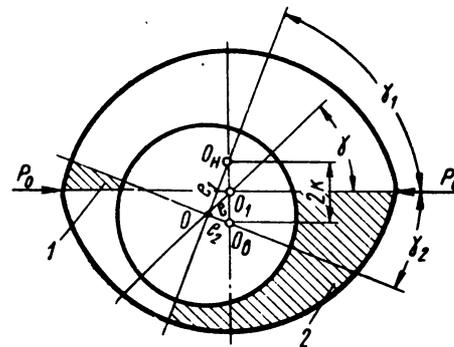
Для рассматриваемого масла должны быть известны температурные характеристики.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ВКЛАДЫША НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА

Существуют различные способы, пользуясь которыми можно избежать неустойчивой работы опорных подшипников. Так,



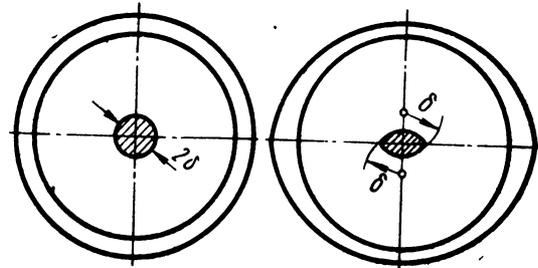
Фиг. 51. Расположение прокладок в двухцентровом подшипнике: 1 — шип, 2 — прокладки.



Фиг. 52. Двухцентровый подшипник: 1 — верхний клин, 2 — нижний.

вкладыши с особой формой рабочих поверхностей обеспечивают устойчивую работу роторов. Широко распространен в турбостроении двухцентровый подшипник [45], [61], [66].

Двухцентровый подшипник состоит из двух половин. При механической обработке подшипника завывают радиальный зазор. По разьему помещают прокладки, толщина которых



Фиг. 53. Области возможных положений пента шипа в круглоцилиндрическом и двухцентровом вкладышах.

$$2k = a\delta,$$

где δ — разность между радиусом расточки вкладыша и шипа, a — коэффициент пропорциональности; выбирается из условия, обеспечивающего устойчивую работу шипа и минимального трения.

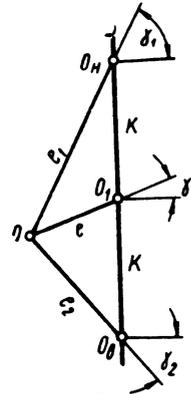
Толщина прокладок определяет расстояние между центром симметрии подшипника и центрами кривизны нижней и верхней половин его (фиг. 52).

В круглоцилиндрическом подшипнике областью возможного перемещения центра цапфы является круг с радиусом δ , а в двухцентровом такая область будет ограничена двумя дугами окружностей (фиг. 53).

Рассмотрим подшипник, считая его симметричным относительно плоскости развѐма; такой вид подшипника наиболее часто применяют. Смазка подводится в нижнюю и верхнюю половины подшипника; так как масляный клин может существовать как в нижней, так и в верхней половине его, то следует учитывать работу обеих половин.

Будем определять положение центра шипа O по отношению к центру симметрии подшипника O_1 величиной абсолютного эксцентриситета $OO_1 = e$ и величиной угла γ , образованного линией центров OO_1 , проходящей через центр симметрии подшипника и центр шипа O , и горизонталью (фиг. 54).

По отношению к центрам кривизны O_n и O_s соответственно нижней и верхней половин подшипника положение центра шипа O будем определять координатами $e_1, \gamma_1, e_2, \gamma_2$, которые зависят от положения центра шипа по отношению к центру симметрии подшипника и от величины прокладки, помещенной при его расточке. Из треугольников O_1OO_n и O_1OO_s следует (фиг. 54)



Фиг. 54. Геометрия двухцентрового подшипника.

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \sqrt{e^2 + k^2 + 2ek \sin \gamma}, \\ \gamma_1 &= \arccos \frac{e \cos \gamma}{\sqrt{e^2 + k^2 + ek \sin \gamma}}, \\ e_2 &= \sqrt{e^2 + k^2 - 2ek \sin \gamma}, \\ \gamma_2 &= \arccos \frac{e \cos \gamma}{\sqrt{e^2 + k^2 - 2ek \sin \gamma}}. \end{aligned} \right\} \quad (252)$$

Обозначим через δ_1 минимальный радиальный зазор между поверхностью вкладыша и шипа (фиг. 55).

Отношение толщины прокладок k к максимальному радиальному зазору δ обозначим через ε :

$$\varepsilon = \frac{k}{\delta} = 1 - \frac{\delta_1}{\delta}. \quad (253)$$

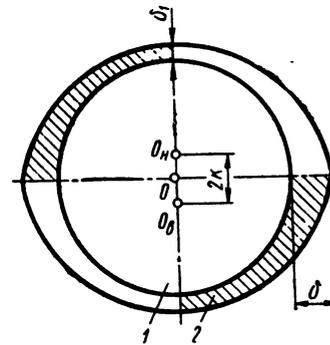
Величину ε условно назовем относительной эллипсностью ($\varepsilon < 1$). Случай $\varepsilon = 1$ соответствует нулевому зазору δ_1 . При $\varepsilon = 0$ имеем круглоцилиндрический подшипник.

Введем безразмерные величины

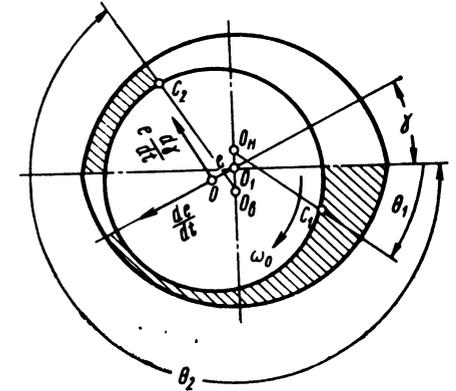
$$\chi = \frac{e}{\delta}; \quad \chi_1 = \frac{e_1}{\delta}; \quad \chi_2 = \frac{e_2}{\delta}. \quad (254)$$

Между χ, χ_1 и χ_2 , а также углами γ, γ_1 и γ_2 существует следующая зависимость:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}, \\ \gamma_1 &= \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}}, \\ \chi_2 &= \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}, \\ \gamma_2 &= \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}}. \end{aligned} \right\} \quad (255)$$



Фиг. 55. Расположение максимального и минимального радиального зазоров: 1 — шип, 2 — масляный клин.



Фиг. 56. К определению толщины масляного слоя.

Толщина масляного слоя h_1 для произвольной точки C_1 нижней половины и h_2 — для произвольной точки C_2 верхней половины подшипника (фиг. 56) соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \delta \left[1 + \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma} \cos(\theta_1 + \right. \\ &\quad \left. + \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right], \\ h_2 &= \delta \left[1 + \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma} \cos(\theta_2 - \right. \\ &\quad \left. - \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

Запишем уравнения Рейнольдса для нижней и верхней половин подшипника при движущемся центре шипа:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(h^3 \frac{\partial p_1}{\partial \theta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) = \\
 & = -6\mu\omega_0\delta \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma} \times \\
 & \times \sin \left(\theta_1 + \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right) - \\
 & - 12\mu\delta \frac{-\varepsilon \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt} + \chi(\chi + \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \sin \left(\theta_1 + \right. \\
 & \left. + \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right) + \\
 & + 12\mu\delta \frac{(\varepsilon \sin \gamma + \chi) \frac{d\chi}{dt} + \chi\varepsilon \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \times \\
 & \times \cos \left(\theta_1 + \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right), \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(h^3 \frac{\partial p_2}{\partial \theta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) = \\
 & = -6\mu\omega_0\delta \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma} \times \\
 & \times \sin \left(\theta_2 - \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right) + \\
 & + 12\mu\delta \frac{\varepsilon \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} + \chi(\chi - \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \times \\
 & \times \sin \left(\theta_2 - \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right) + \\
 & + 12\mu\delta \frac{(\chi - \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\chi}{dt} - \chi\varepsilon \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \times \\
 & \times \cos \left(\theta_2 - \arccos \frac{\chi \cos \gamma}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \right),
 \end{aligned} \tag{257}$$

где

$$0 \leq \theta_1 \leq \pi,$$

$$\pi \leq \theta_2 \leq 2\pi.$$

Выражения (257) при $\varepsilon=0$ переходят в уравнение круглоцилиндрического подшипника, показанного на фиг. 57:

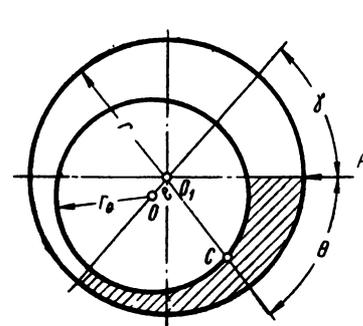
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\
 & = -6\mu\delta\chi \left(\omega_0 + 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin(\theta + \gamma) + 12\mu\delta \frac{d\chi}{dt} \cos(\theta + \gamma). \tag{258}
 \end{aligned}$$

В этом случае толщина масляного слоя

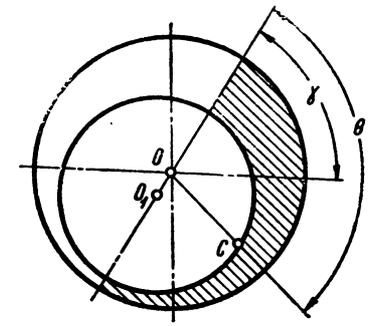
$$h = \delta [1 + \chi \cos(\theta + \gamma)], \tag{259}$$

где

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Фиг. 57. Случай отсчета угла θ от горизонтали.



Фиг. 58. Случай отсчета угла θ от линии центров.

Для некоторых подшипников удобно угол θ отсчитывать от линии центров. При этом правая часть уравнения (258) и толщина масляного слоя не зависят от угла (фиг. 58):

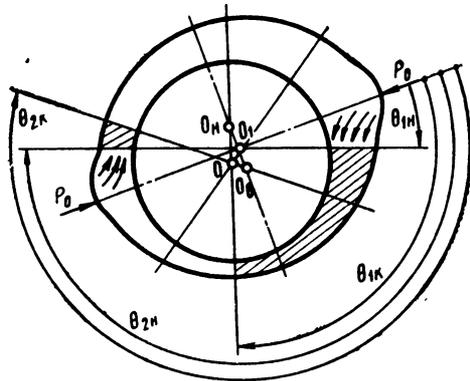
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\
 & = -6\mu\delta\chi \left(\omega_0 + 2 \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \theta + 12\mu\delta \frac{d\chi}{dt} \cos \theta, \tag{260} \\
 & h = \delta (1 + \chi \cos \theta).
 \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (257) в первом приближении, без учета торцового истечения масла, получим закон распределения давления в двухцентровом подшипнике:

$$\begin{aligned}
 p_{11} = & -a_i r^2 \int \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i)}{(h'_i)^3} d\theta_i + b_i r^2 \int \frac{\sin(\theta_i + \alpha_i)}{(h'_i)^3} d\theta_i + \\
 & + C_{11} \int \frac{d\theta_i}{(h'_i)^3} + C_{12} \text{ при } i = 1, 2, \tag{261}
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{6\mu\omega_0}{\delta^2} \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma} - \\ &\quad - \frac{12\mu}{\delta^2} \frac{-\varepsilon \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} + \chi(\chi + \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}}, \\ b_1 &= \frac{12\mu}{\delta^2} \frac{(\chi + \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\chi}{dt} + \chi\varepsilon \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 + 2\chi\varepsilon \sin \gamma}}, \\ a_2 &= -\frac{6\mu\omega_0}{\delta^2} \sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma} + \\ &\quad + \frac{12\mu}{\delta^2} \frac{\varepsilon \cos \gamma \frac{d\chi}{dt} + \chi(\chi - \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}}, \\ b_2 &= \frac{12\mu}{\delta^2} \frac{(\chi - \varepsilon \sin \gamma) \frac{d\chi}{dt} - \chi\varepsilon \cos \gamma \frac{d\gamma}{dt}}{\sqrt{\chi^2 + \varepsilon^2 - 2\chi\varepsilon \sin \gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (262)$$



Фиг. 59. Протяженность масляного клина в двухцентровом подшипнике.

Чтобы определить постоянные интегрирования C_{11} и C_{12} , входящие в уравнение (261), необходимо знать границы протяженности масляного слоя.

Начало масляного слоя можно отсчитывать от места подвода смазки или от начала перехода холодильника в рабочую зону подшипника (фиг. 59).

В ненагруженной части масляного слоя при больших числах оборотов наблюдается разрыв масляного слоя и могут образовываться зоны пониженного давления.

Протяженность масляного слоя зависит от положения центра шипа. Будем определять начало масляного слоя координатой Θ_n а конец — Θ_k .

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\cos \varphi_l}{(h'_l)^3} d\varphi_l \Big|_{\Theta_l = \Theta_{1n}} &= I_{1n}, \\ \int \frac{\cos \varphi_l}{(h'_l)^3} d\varphi_l \Big|_{\Theta_l = \Theta_{1k}} &= I_{1k}, \\ \int \frac{\sin \varphi_l}{(h'_l)^3} d\varphi_l \Big|_{\Theta_l = \Theta_{1n}} &= J_{1n}, \\ \int \frac{\sin \varphi_l}{(h'_l)^3} d\varphi_l \Big|_{\Theta_l = \Theta_{1k}} &= J_{1k}, \\ \int \frac{d\Theta_l}{(h'_l)^3} \Big|_{\Theta_l = \Theta_{1n}} &= R_{1n}, \\ \int \frac{d\Theta_l}{(h'_l)^3} \Big|_{\Theta_l = \Theta_{1k}} &= R_{1k}, \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

где

$$\varphi_l = \Theta_l + \alpha_l.$$

Постоянные C_{11} и C_{12} , входящие в зависимость (261), равны

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \frac{a_1 r^2 (I_{1k} - I_{1n}) - b_1 r^2 (J_{1k} - J_{1n})}{R_{1k} - R_{1n}}, \\ C_{12} &= a_1 r^2 J_{1n} - b_1 r^2 J_{1k} - C_{11} R_{1n}. \end{aligned} \right\} \quad (264)$$

Подставив значения постоянных из формул (264) в выражение (261), найдем закон распределения давления в двухцентровом подшипнике неограниченной протяженности при движущемся центре шипа, удовлетворяющий нулевым граничным условиям. Решение уравнений (257) включает решение для подшипника неограниченной протяженности (261) и решение, учитывающее торцовую утечку масла

$$p_l = p_{11} + p_{12}.$$

Решение p_{12} имеет вид

$$p_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{1n} \sin \frac{\pi n}{\Theta_{1k} - \Theta_{1n}} (\alpha_l + \Theta_l)}{\operatorname{ch} \frac{\pi n}{\Theta_{1k} - \Theta_{1n}} \lambda} \operatorname{ch} \frac{\pi n}{\Theta_{1k} - \Theta_{1n}} w, \quad (265)$$

где

$$\beta_{1n} = -\frac{2}{\Theta_{1k} - \Theta_{1n}} \int_{\Theta_{1n}}^{\Theta_{1k}} p_{11} \sin \frac{\pi n}{\Theta_{1k} - \Theta_{1n}} (\Theta_l + \alpha_l) d\Theta_l,$$

$$w = \frac{z}{r}, \quad \lambda = \frac{l}{d}.$$

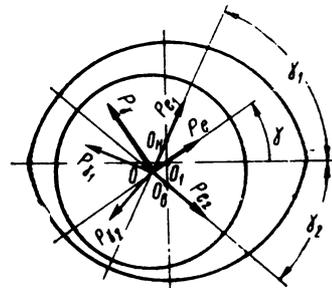
Далее обозначим согласно выражению (268)

$$\begin{aligned}
 I_{11}^{(n)} &= \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i) \cos \frac{\pi n}{\theta_{ik} - \theta_{in}} (\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i - \\
 &\quad - \frac{I_{1k} - I_{1n}}{R_{1k} - R_{1n}} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos \frac{\pi n}{\theta_{ik} - \theta_{in}} (\theta_i + \alpha_i) d\theta_i}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3}, \\
 I_{12}^{(n)} &= \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\sin(\theta_i + \alpha_i) \cos \frac{\pi n}{\theta_{ik} - \theta_{in}} (\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i - \\
 &\quad - \frac{J_{1k} - J_{1n}}{R_{1k} - R_{1n}} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos \frac{\pi n}{\theta_{ik} - \theta_{in}} (\theta_i + \alpha_i) d\theta_i}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3}, \\
 I_{13} &= \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i) \sin(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i - \\
 &\quad - \frac{I_{1k} - I_{1n}}{R_{1k} - R_{1n}} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\sin(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i, \\
 I_{14} &= \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\sin(\theta_i + \alpha_i) \sin(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i - \\
 &\quad - \frac{J_{1k} - J_{1n}}{R_{1k} - R_{1n}} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\sin(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i, \\
 I_{15} &= \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i) \cos(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i - \\
 &\quad - \frac{J_{1k} - J_{1n}}{R_{1k} - R_{1n}} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i, \\
 I_{16} &= \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\sin(\theta_i + \alpha_i) \cos(\theta_i + \alpha_i)}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3} d\theta_i - \\
 &\quad - \frac{J_{1k} - J_{1n}}{R_{1k} - R_{1n}} \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \frac{\cos(\theta_i + \alpha_i) d\theta_i}{[1 + \chi_i \cos(\theta_i + \alpha_i)]^3},
 \end{aligned} \tag{270}$$

Для нижней половины вкладыша проекции поддерживающей силы масляного слоя на линию центров и линию, ей перпендикулярную, равны

$$\left. \begin{aligned}
 P_{e1} &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} p_1 \cos(\theta_1 + \alpha_1) d\theta_1, \\
 P_{\gamma 1} &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} p_1 \sin(\theta_1 + \alpha_1) d\theta_1.
 \end{aligned} \right\} \tag{266}$$

Аналогично проекции поддерживающей силы масляного слоя, действующей со стороны верхней половины вкладыша на линию центров верхней половины и линию, ей перпендикулярную, равны



$$\left. \begin{aligned}
 P_{e2} &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_{\theta_{2n}}^{\theta_{2k}} p_2(\theta_2 + \alpha_2) d\theta_2, \\
 P_{\gamma 2} &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_{\theta_{2n}}^{\theta_{2k}} p_2(\theta_2 + \alpha_2) d\theta_2.
 \end{aligned} \right\} \tag{267}$$

Учитывая, что

$$p_{i1} = 0 \quad \text{при} \quad \theta_i = \begin{cases} \theta_{1k} \\ \theta_{1n} \end{cases}$$

Фиг. 60. Силы, действующие на шип со стороны масляных клиньев.

и интегрируя по частям, запишем уравнения (266) и (267) в виде

$$\left. \begin{aligned}
 P_{e1} &= -r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \left[\frac{\partial p_{11}}{\partial \theta_i} \sin(\theta_i + \alpha_i) + p_{12} \sin(\theta_i + \alpha_i) \right] d\theta_i, \\
 P_{\gamma 1} &= r^2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} d\omega \int_{\theta_{in}}^{\theta_{ik}} \left[\frac{\partial p_{11}}{\partial \theta_i} \cos(\theta_i + \alpha_i) + p_{12} \cos(\theta_i + \alpha_i) \right] d\theta_i.
 \end{aligned} \right\} \tag{268}$$

Проектируя выражения (268) на линию центров подшипника, проходящую через центр симметрии подшипника, и линию, ей перпендикулярную, получим проекции поддерживающей силы, учитывающие работу обеих половин подшипника (фиг. 60):

$$\left. \begin{aligned}
 P_e &= P_{e1} \cos(\gamma_1 - \gamma) + P_{e2} \cos(\gamma_2 + \gamma) - P_{\gamma 1} \sin(\gamma_1 - \gamma) - \\
 &\quad - P_{\gamma 2} \sin(\gamma_2 + \gamma), \\
 P_{\gamma} &= P_{e1} \sin(\gamma_1 - \gamma) - P_{e2} \sin(\gamma_2 + \gamma) + P_{\gamma 1} \cos(\gamma_1 - \gamma) - \\
 &\quad - P_{\gamma 2} \cos(\gamma_2 + \gamma).
 \end{aligned} \right\} \tag{269}$$

$$\left. \begin{aligned} I_{17}^{(n)} &= \int_{\theta_{1n}}^{\theta_{1k}} \sin \frac{\pi n}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} (\theta_i + \alpha_i) \cos (\theta_i + \alpha_i) d\theta_i, \\ I_{18}^{(n)} &= \int_{\theta_{1n}}^{\theta_{1k}} \sin \frac{\pi n}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} (\theta_i + \alpha_i) \sin (\theta_i + \alpha_i) d\theta_i. \end{aligned} \right\} (270)$$

Проекция поддерживающей силы запишем теперь в виде

$$\left. \begin{aligned} P_e &= -2r^4 \lambda \sum_{i=1}^2 \left(a_i I_{13} - b_i I_{14} + \frac{2a_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} I_{17}^{(n)} \times \right. \\ &\times \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} - \frac{2b_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{12}^{(n)} I_{17}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \left. \right) \times \\ &\times \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - (a_i I_{15} - b_i I_{16} - \\ &- \frac{2a_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} + \\ &+ \frac{2b_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{12}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}}) \times \\ &\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\ P_\gamma &= -2r^4 \lambda \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(a_i I_{13} - b_i I_{14} + \frac{2a_i}{\pi^2 \lambda} \times \right. \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} I_{17}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} - \\ &- \frac{2b_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{12}^{(n)} I_{17}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \left. \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + \\ &+ (-1)^{i+1} (a_i I_{15} - b_i I_{16} - \\ &- \frac{2a_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} + \\ &+ \frac{2b_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{12}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}}) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma]. \end{aligned} \right\} (271)$$

Вследствие быстрой сходимости рядов, входящих в выражения (271), число членов, учитывающих торцовую утечку масла для обеспечения наперед заданной точности, будет небольшим. Несущую способность масляного слоя можно характеризовать коэффициентом грузоподъемности

$$K_3 = \frac{P}{l d \psi^2} \mu \omega_0. \quad (272)$$

Значение коэффициента K_3 и угла γ можно найти из системы уравнений, записанных в безразмерном виде и определяющих равновесное состояние системы

$$\left. \begin{aligned} K_3 \sin \gamma &= 3 \sum_{i=1}^2 \left(\chi_i I_{13} + \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} \times \right. \\ &\times I_{11}^{(n)} I_{17}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \left. \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \\ &- \left(\chi_i I_{15} - \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \right) \times \\ &\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\ K_3 \cos \gamma &= 3 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{13} + \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} \times \right. \\ &\times I_{17}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \left. \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + (-1)^{i+1} (\chi_i I_{15} - \\ &- \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} I_{11}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}}) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma]. \end{aligned} \right\} (273)$$

Введем в уравнения (273) коэффициенты, учитывающие торцовое истечение масла в двухцентровом подшипнике,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{1}{\sum_{i=1}^2 \chi_i I_{13} \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \chi_i I_{15} \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma]} \times \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{1k} - \theta_{1n}}{n^2} \left(I_{11}^{(n)} I_{17}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \right) \times \right. \\ &\times \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + I_{11}^{(n)} I_{18}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{1k} - \theta_{1n}} \times \\ &\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \end{aligned} \right\} (274)$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{1}{\sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (\chi_i I_{i3} \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + \chi_i I_{i5} \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma])} \times \left. \begin{aligned} & \times \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} (-1)^{i+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} \left(J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] \right\} \right\} \quad (274) \end{aligned}$$

Систему уравнений (271) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} K_3 \sin \gamma &= 3\lambda_1 \sum_{i=1}^2 (\chi_i I_{i3} \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \chi_i I_{i5} \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma]), \\ K_3 \cos \gamma &= 3\lambda_2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (\chi_i I_{i3} \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + \\ & + \chi_i I_{i5} \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma]). \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

Для подшипника неограниченной протяженности $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

С помощью уравнений (275) можно найти положение центра шипа в двухцентровом подшипнике, а следовательно, и минимальную толщину масляного слоя, которая должна обеспечить режим гидродинамического трения.

Чтобы установить минимальную толщину масляного слоя, недостаточно знать только относительный эксцентриситет, необходимо определить также и угол γ .

Для исследования, устойчиво или нет равновесное состояние, характеризуемое уравнением (275), составим линеаризованную систему уравнений малых колебаний в безразмерном виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \chi}{d\tau^2} + \frac{3}{K_1 K_3} \left(q_1 \frac{d\Delta \chi}{d\tau} + q_2 \frac{d\Delta \gamma}{d\tau} + K_1 q_3 \Delta \chi - K_1 q_4 \Delta \gamma \right) &= 0, \\ \frac{d^2 \Delta \gamma}{d\tau^2} + \frac{3}{K_1 K_3 \chi_0} \left(p_1 \frac{d\Delta \gamma}{d\tau} + p_2 \frac{d\Delta \chi}{d\tau} + K_1 p_3 \Delta \gamma + K_1 p_4 \Delta \chi \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

где $\Delta \chi$ и $\Delta \gamma$ — отклонения относительного эксцентриситета χ и угла γ от равновесного состояния.

Введя дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} c_i &= (-1)^i \frac{\varepsilon \cos \gamma}{\chi_i}, & d_i &= \frac{\chi (\chi - (-1)^i \varepsilon \sin \gamma)}{\chi_i}, \\ f_i &= \frac{\chi - (-1)^i \varepsilon \sin \gamma}{\chi_i}, & h_i &= (-1)^{i+1} \frac{\chi \varepsilon \cos \gamma}{\chi_i}, \end{aligned}$$

получим, что.

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=1}^2 \left(c_i I_{i3} - f_i I_{i4} + \frac{2c_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^2 \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} \times \right. \\ & \times J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} - \frac{2f_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} \times \\ & \times J_{i2}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \left. \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \left(c_i I_{i5} - \right. \\ & - f_i I_{i6} - \frac{2c_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \times \\ & \times \frac{2f_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{iK} - Q_{iH}}{n^2} J_{i2}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \left. \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\ q_2 &= \sum_{i=1}^2 \left(d_i I_{i3} - h_i I_{i4} + \frac{2d_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} \times \right. \\ & \times J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} - \frac{2h_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} \times \\ & \times J_{i2}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \left. \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \left(d_i I_{i5} - \right. \\ & - h_i I_{i6} - \frac{2d_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} + \\ & + \frac{2h_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} J_{i2}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \left. \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\ q_3 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{i=1}^2 \left(\chi_i I_{i3} + \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \right) \times \\ & \times \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \left(\chi_i I_{i5} - \frac{2\chi_i}{\pi^2 \lambda} \times \right. \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iH}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iH}} \left. \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

$$\begin{aligned}
q_4 &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{i3} + \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \times \\
&\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{i5} - \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} \times \right. \\
&\times \left. J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma] - \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i=1}^2 \times \\
&\times \left(\chi_i I_{i3} + \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\
p_1 &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(d_i I_{i3} - h_i I_{i4} + \frac{2d_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} \times \right. \\
&\times \left. J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} - \frac{2h_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i2}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \times \\
&\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + (-1)^{i+1} \left(d_i I_{i5} - h_i I_{i6} - \frac{2d_i}{\pi^{2\lambda}} \times \right. \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} + \frac{2h_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} \times \\
&\times \left. J_{i2}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\
p_2 &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(C_i I_{i3} - f_i I_{i4} + \frac{2C_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} \times \right. \\
&\times \left. J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} - \frac{2f_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i2}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \times \\
&\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + (-1)^{i+1} \left(C_i I_{i5} - f_i I_{i6} - \frac{2C_i}{\pi^{2\lambda}} \times \right. \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} + \frac{2f_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} \times \\
&\times \left. J_{i2}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma],
\end{aligned}$$

(277)

$$\begin{aligned}
p_3 &= \sum_{i=1}^2 \left(\chi_i I_{i3} + \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \cos \gamma_i + \\
&+ (-1)^i \gamma] - \left(\chi_i I_{i5} - \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i2}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \times \\
&\times \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i=2}^2 (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{i3} + \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \times \right. \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \left. \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + \\
&+ (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{i5} - \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \times \\
&\times \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma], \\
p_4 &= \frac{\partial}{\partial \chi} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{i3} + \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i7}^{(n)} \times \right. \\
&\times \left. \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \right) \sin [\gamma_i + (-1)^i \gamma] + (-1)^{i+1} \left(\chi_i I_{i5} - \frac{2\chi_i}{\pi^{2\lambda}} \times \right. \\
&\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{iK} - \theta_{iN}}{n^2} J_{i1}^{(n)} J_{i8}^{(n)} \operatorname{th} \frac{\pi n \lambda}{\theta_{iK} - \theta_{iN}} \left. \right) \cos [\gamma_i + (-1)^i \gamma].
\end{aligned}$$

(277)

Коэффициенты q_1, q_2, p_1, p_2 характеризуют демпфирующую способность двухцентрового подшипника. Демпфирующая способность двухцентрового подшипника больше, чем цилиндрического, вследствие того, что в последнем работают две половины подшипника, каждая из которых имеет клиновое пространство. Коэффициенты q_3, q_4, p_3, p_4 характеризуют упругие свойства масляного слоя в двухцентровом подшипнике. Демпфирующие и упругие свойства при низких положениях центра шипа такого подшипника близки к тем же свойствам цилиндрического подшипника. Однако при малых значениях относительного эксцентриситета свойства двухцентрового подшипника отличаются от свойств цилиндрического, так как упругие и демпфирующие коэффициенты масляного слоя верхней половины имеют тот же порядок, что и для нижней половины.

В уравнения (276) входят параметры $K_1 = \omega \sqrt{\frac{\delta}{g}}$ — безразмерная угловая скорость вращения вала и $K_3 = \frac{P \sqrt{\mu}}{l d \mu \omega_0}$ — коэф-

коэффициент нагруженности подшипника, связанный с положением центра шипа для подшипника с заданным отношением $\lambda = \frac{l}{d}$ и эллипсностью ϵ .

Решение уравнений (276) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta\chi &= A_1 e^{\sigma\tau}, \\ \Delta\gamma &= A_2 e^{\sigma\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (278)$$

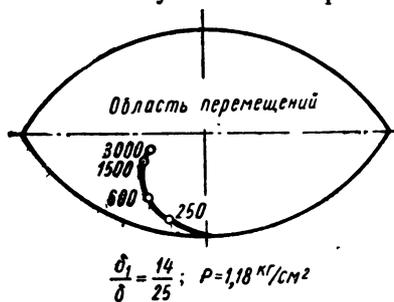
Характеристическое уравнение системы (276)

$$\sigma^4 + n_1\sigma^3 + n_2\sigma^2 + n_3\sigma + n_4 = 0, \quad (279)$$

где

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{3}{K_1 K_3} \left(q_1 + \frac{p_1}{\chi_0} \right), \\ n_2 &= \frac{9}{K_1^2 K_3^2 \chi_0} (q_1 p_1 - q_2 p_2) + \frac{3}{K_3} \left(q_3 + \frac{p_3}{\chi_0} \right), \\ n_3 &= \frac{9}{K_1 K_3^2 \chi_0} (q_3 p_1 + q_1 p_3) + \frac{9}{K_1 K_3^2 \chi_0} (q_4 p_2 - q_2 p_4), \\ n_4 &= \frac{9}{K_3^2 \chi_0} (q_3 p_3 + q_4 p_4). \end{aligned} \right\} \quad (280)$$

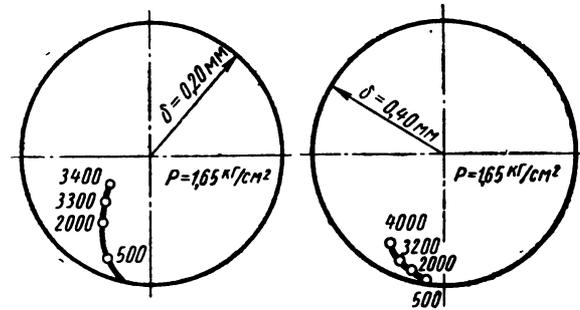
Наряду с устойчивыми в двухцентровом подшипнике могут быть и неустойчивые равновесные состояния. Однако только устойчивые состояния представляют практический интерес.



Фиг. 61. Пример траектории центра шипа в двухцентровом подшипнике при вертикальной нагрузке.

затруднительно, так как придется решать большое число трансцендентных уравнений. В этом случае следует построить силовое поле, аналогичное полю цилиндрического подшипника; при этом будет легче найти траекторию центра шипа, соответствующую внешней вертикальной нагрузке. Пример такой траектории показан на фиг. 61 [40], на характер которой существенно влияет отношение l/d и величина эллипсности ϵ .

При увеличении зазора в круглоцилиндрическом подшипнике центр шипа опускается (фиг. 62). С увеличением зазоров δ и δ_1 в двухцентровом подшипнике центр шипа также опускается и подшипник по своим свойствам приближается к круглоцилиндрическому, так как влияние верхней половины умень-



Фиг. 62. Примеры траекторий центра шипа в круглоцилиндрическом подшипнике при различных радиальных зазорах.

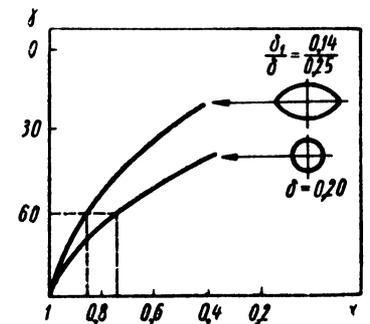
шается. Но и в этом случае шип будет работать устойчиво, так как увеличенный (до определенного предела) зазор в круглоцилиндрическом подшипнике способствует вводу шипа в устойчивую область вследствие быстрого снижения несущей способности. Однако потери на трение при этом возрастают.

Траектория центра шипа в двухцентровом подшипнике отличается от траектории круглоцилиндрического подшипника тем, что при данном угле γ центр шипа в двухцентровом подшипнике располагается ниже, чем в круглоцилиндрическом (фиг. 63). Эта разница особенно заметна при дальнейшем уменьшении угла γ .

После определения координат равновесного состояния необходимо проверить, устойчиво оно или нет.

Равновесное состояние устойчиво в случае, если при жестком роторе будет удовлетворено неравенство

$$K_1 \leq \sqrt{\frac{3r_1}{K_3 r_2 \chi_0}}, \quad (281)$$



Фиг. 63. Зависимость $\chi = f(\gamma)$ для круглоцилиндрического и двухцентрового подшипников.

где

$$r_1 = \left(q_1 + \frac{p_1}{\chi_0} \right) (q_1 p_1 - q_2 p_2) [(q_3 p_1 + q_1 p_3) + (q_4 p_2 - q_2 p_4)],$$

$$r_2 = [q_3 p_1 + q_1 p_3 + p_2 q_4 - p_4 q_2]^2 - \left(q_1 + \frac{p_1}{\chi_0} \right)^2 (q_3 p_3 + q_4 p_4) -$$

$$- \left(q_1 + \frac{p_1}{\chi_0} \right) \left(q_3 + \frac{p_3}{\chi_0} \right) [q_3 p_1 + q_1 p_3 + q_4 p_2 - q_2 p_4].$$

Система будет устойчива, если число оборотов ротора

$$n \leq \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta}} \sqrt{\frac{3r_1}{K_3 r_2 \chi_0}}. \quad (282)$$

Вследствие упругости масляной пленки шип может колебаться с определенной собственной частотой, будучи выведенным из равновесного состояния. Величина амплитуды колебаний в некоторых случаях может превзойти допустимые пределы.

Собственную частоту можно найти, используя метод, изложенный на стр. 100.

Равенство

$$\Omega = \sqrt{-\frac{\delta}{K_3} \left(q_3 + \frac{p_3}{\chi_0} \right) \pm \sqrt{\frac{9}{K_3^2} \left[\left(q_3 + \frac{p_3}{\chi_0} \right)^2 - \frac{4}{\chi_0} (q_3 p_3 + q_4 p_4) \right]}} \quad (283)$$

при выполнении условия

$$\frac{9}{K_3^2} \left[q_3 + \frac{p_3}{\chi_0} \right]^2 \geq \frac{4}{\chi_0} (q_3 p_3 + q_4 p_4) \quad (284)$$

имеет вид $\Omega = \omega_{\text{соб}}$.

Выражение (284) является условием устойчивости без учета сил демпфирования, а величина $|\omega_{\text{соб}}|$ — собственной частотой системы.

Если принять $\varepsilon = 0$, то условие (284) перейдет в неравенство для круглоцилиндрического подшипника, которое будет выполняться при $\chi = \chi_1 > 0,7$. Поэтому принято величину эллипсности ε назначать такой, чтобы при отсутствии нагрузки центр шипа находился в центре двухугольника (см. фиг. 53) и имел относительный эксцентриситет $\chi_1 = 0,75$ ($\chi = 0$).

Однако при этом двухцентровый подшипник будет иметь повышенный коэффициент трения и значительный расход масла, обусловленный работой двух его половин. Толщина прокладки $2k = 1,5\delta$ и соответствующая ей эллипсность $\varepsilon = 0,75$ двухцентрового подшипника в этом случае также завышены, так как они

выбираются только из условия, обеспечивающего устойчивую работу цилиндрического подшипника.

Условие (284) при увеличении ε от 0 до 1 выполняется, если $\chi_1 \geq 0,75$. Поэтому, чтобы обеспечить устойчивую работу, необходимо подобрать величину ε такой, при которой положение центра шипа, определяемое равенствами (275), будет устойчивым.

Если $\chi \leq 0,75$, то можно обеспечить устойчивую работу и в том случае, когда условие (284) уже не выполняется. В этом случае устойчивость ограничена по параметру K_1 .

Это равносильно тому, что толщину прокладок (или коэффициент a) можно уменьшить для данного подшипника, обеспечивая условия устойчивой работы двухцентрового подшипника. Толщину прокладок желательно уменьшать, так как в этом случае снижаются потери на трение.

При совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний системы в устойчивой области могут возникать резонансные явления.

Характеристика подшипника

$$\Pi = \frac{P}{Ia} \frac{\psi^2}{\mu} \sqrt{\frac{\delta}{g}}.$$

Для данного подшипника

$$K_1 = \Pi \frac{1}{K_3(\chi_0, \gamma_0)}. \quad (285)$$

Корни системы уравнений

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\delta}{g}} \frac{\Pi}{K_3(\chi_0, \gamma_0)},$$

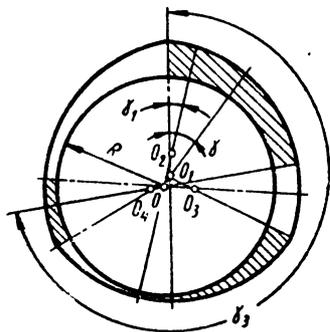
$$n_{\text{соб}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\delta}{g}} \omega_{\text{соб}}(\chi_0, \gamma_0), \quad (286)$$

найденные при изменении χ_0, γ_0 , позволят найти резонансные критические числа оборотов вала.

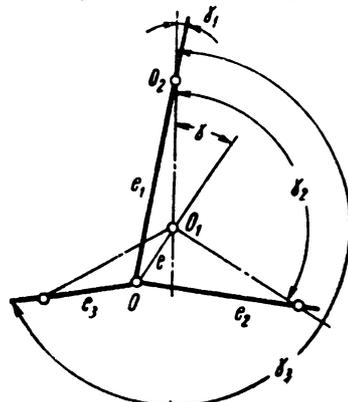
Другим видом подшипника, обеспечивающим устойчивую работу шипа, является трехцентровый подшипник (фиг. 64). Геометрию этого вида подшипника можно определить на фиг. 65. Такой вид подшипника получается также, если при его расточке поместить прокладки под углом 120° (фиг. 66). Обычно толщину прокладок $2k$ выбирают так, чтобы центры кривизны отдельных сегментов подшипника были бы расположены вне круга с радиусом $R = \delta_1$, где δ_1 — минимальный зазор между поверхностью подшипника и шипа при его центральном положении (фиг. 67).

В этом подшипнике стабилизирующее положение вала при приближении его к центру симметрии O_1 обеспечивают три масляных клина.

Исследование такого вида подшипника можно выполнить аналогично двухцентровому подшипнику, однако учет трех одно-



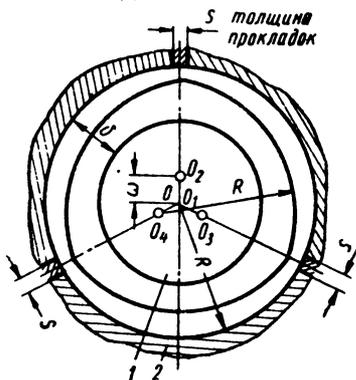
Фиг. 64. Расположение масляных клиньев в трехцентровом подшипнике.



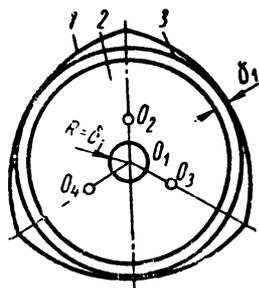
Фиг. 65. Геометрия трехцентрового подшипника.

временно работающих сегментов приведет к громоздким выражениям.

Следует также заметить, что дальнейшее увеличение числа сегментов не дает необходимого эффекта по борьбе с неустой-



Фиг. 66. Расположение прокладок в трехцентровом подшипнике:
1 — шип, 2 — подшипник с прокладками.



Фиг. 67. Расположение центров кривизны в трехцентровом подшипнике:
1 — подшипник; 2 — шип; 3 — вписанный круг.

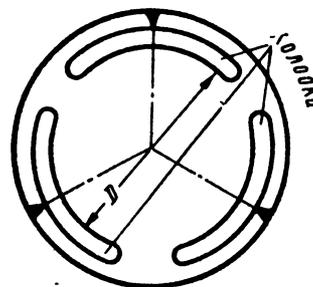
чивостью по сравнению с двухцентровым и трехцентровым подшипником.

Наиболее надежным типом подшипника, противодействующим возбуждению колебаний масляного слоя, является подшип-

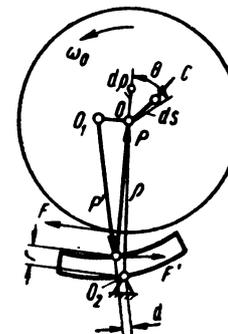
ник с качающимися колодками. Подшипники такого типа имеют обычно три или четыре сегментообразные колодки, опирающиеся в центре (фиг 68) так, что очертания внутренней поверхности подшипника могут изменяться в зависимости от положения равновесия вала. Подобные подшипники во всех случаях предупреждают колебания роторов, вызванные масляной пленкой.

По принципу работы подшипник с качающимися колодками отличается от двух- и трехцентровых подшипников. Исследуя характер работы подшипника с качающимися колодками, целесообразно использовать энергетический метод [53]. Устойчивая работа вала будет обеспечена, если возмущающая сила, действующая на шип со стороны масляного слоя, меньше работы его демпфирующих сил.

Чтобы определить работу возму-



Фиг. 68. Подшипник с качающимися колодками.



Фиг. 69. Схема сил, действующих в подшипнике с качающимися колодками.

щающей силы, рассмотрим отдельно одну колодку. Возникающая при вращении шипа результирующая реакция масляного слоя (P) проходит через его центр. Сила (P'), действующая на колодку и равная по величине силе P , проходит через центр кривизны колодки. Кроме этих сил, на шип и на колодку действуют силы жидкостного трения F и F' (фиг. 69).

Предполагаем, что отношение $\frac{F'}{P'}$ значительно меньше единицы.

Из условия равновесия колодки находим, что $F'r = P'd$, где величины r и d обозначены на фиг. 69. Отсюда следует, что

$d = \frac{F'}{P'} r$. Так как величина r меньше других размеров колодки,

то величина d в свою очередь весьма мала. В связи с этим можно предположить, что реакция P' проходит через точку качения колодки. Учитывая, что центр кривизны колодки весьма близко расположен к центру шипа, примем, что сила P также проходит через точку O_2 качания колодки. Так как колодка может поворачиваться относительно точки O_2 , то сила P является функцией расстояния ρ между центром шипа O и точкой качения колодки O_2 , т. е. $P = f(\rho)$.

Работа силы P при смещении центра шипа вдоль какой-либо кривой равна

$$A = \int_C f(P) \cos \Theta ds, \quad (287)$$

где Θ — угол между направлением силы P (или радиусом ρ) и направлением смещения центра шипа вдоль кривой C (фиг. 69).

Из фиг. 69 следует, что

$$\cos \Theta = \frac{d\rho}{ds}, \quad (288)$$

поэтому

$$A_p = \int f(\rho) d\rho.$$

При перемещении центра шипа по замкнутому контуру

$$A_p = \oint f(\rho) d\rho = 0. \quad (289)$$

Следует отметить, что этот вывод не справедлив для подшипников с неподвижными рабочими поверхностями, так как реакция масляного слоя P в этом случае не проходит через фиксированную неподвижную точку подшипника.

В результате движения центра шипа по какой-то кривой возникают силы демпфирования. Предположим, что эти силы линейно зависят от эксцентриситета. При движении вала сила демпфирования, выдавливающая масло из зазора или всасывающая его в зазор, будет направлена против движения центра вала. Давая оценку величине работы сил демпфирования, А. Хегг [52] показал, что она имеет такой же порядок, как и работа сил демпфирования цилиндрического подшипника. Таким образом, работа этих сил оказывается всегда больше работы сил, вызывающих вибрацию, вследствие чего подшипник с качающимися колодками обеспечивает устойчивую работу валов. По сравнению с обычными подшипниками скольжения рассмотренная конструкция сложнее и дороже.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В книге рассмотрены основные вопросы расчета на устойчивость движения валов в подшипниках жидкостного трения.

Совершенно очевидно, что в дальнейшем следует уточнить представления о явлениях, протекающих в масляном слое подшипников скольжения, особенно быстроходных машин.

Наиболее актуальными, на наш взгляд, являются работы, в которых показано влияние турбулентного режима течения смазки, расположения границ протяженности масляной пленки, а также различных конструктивных мер на устойчивость движе-

ния валов. Перспективным должно быть развитие нелинейной теории рассматриваемой задачи.

За последнее время появились теоретические и экспериментальные работы, изучающие характер турбулентного режима подшипников скольжения.

Так, В. Константинеску в 1957 г. исследовал этот вопрос и разработал метод определения закона распределения скоростей и давлений при двумерном течении смазки [20].

В современных машинах при возрастании относительной скорости между смазываемыми поверхностями и использовании смазки с малой вязкостью (вода), числа Рейнольдса становятся значительными. В связи с этим необходимо создать метод расчета на устойчивость подшипников, работающих при турбулентном режиме смазки.

При ламинарном движении смазки профиль изменения скоростей в поперечном сечении подшипника носит параболический характер, движение частиц одномерное.

При турбулентном режиме движение частиц жидкости не имеет слоистого характера; осредненные скорости по сечению потока распределяются почти равномерно, с резким изменением до нуля на неподвижной стенке. Закономерности для сил внутреннего трения при турбулентном режиме резко отличаются от соответствующих закономерностей при ламинарном движении жидкости.

При турбулентном характере движения сопротивление трения вызывают не только силы вязкости, но и силы турбулентного (пульсационного) трения.

Течение смазки станет турбулентным, если местное число Рейнольдса больше критического. Это явление характерно для значительных по размеру подшипников при малой вязкости смазывающей жидкости, больших числах оборотов вала и увеличенном зазоре. Поэтому в методике расчета подшипников по выбору конструктивных величин $(\delta, \frac{l}{a})$ и вязкости масла должен быть учтен характер турбулентного потока смазки в подшипнике.

Турбулентность в слое смазки повышает несущую способность подшипника и заметно увеличивает трение. Так как при больших числах оборотов потери на трение становятся решающим фактором, определяющим работу подшипника, то появление турбулентности вредно сказывается на его работе. Чтобы увеличить несущую способность, желательно иметь турбулентный режим течения смазки в подшипнике. Однако работоспособность подшипника зависит от того, будет ли устойчивой работа шипа при таком режиме.

В связи с этим предстоит исследовать следующие проблемы работы подшипников при турбулентном режиме.

1. Установить с возможно большей точностью условия перехода ламинарного потока к турбулентному.

2. Определить характеристики подшипника, работающего в турбулентном режиме, и создать методы их расчета.

3. Найти условия устойчивой работы шипов, работающих в турбулентном потоке смазки. С учетом нелинейной постановки задачи этот вопрос не решен даже для ламинарного потока.

Рассмотрим условия перехода ламинарного потока в турбулентный [21].

Для ненагруженных подшипников при центральном положении шипа критическое число Рейнольдса

$$Re_{кр} = \frac{\rho U \delta}{\mu} = \frac{41,4}{\sqrt{\psi}}, \quad (290)$$

где U — окружная скорость шипа.

С увеличением относительного зазора условия перехода в турбулентный режим облегчаются, так как число $Re_{кр}$ уменьшается.

Критическому числу Рейнольдса соответствует критическое число оборотов

$$n_{кр} = 392,7 \frac{\mu}{\rho r^2 \psi^{\frac{3}{2}}}. \quad (291)$$

Если вязкость масла низка, турбулентный режим наступает при сравнительно небольшом числе оборотов. При смазке водой подшипника с радиусом $r=3$ см и относительным зазором $\psi=0,003$ $n_{кр} = 2650$ об/мин.

Когда на подшипник действует нагрузка, относительный эксцентриситет χ не равен нулю. Для этого случая можно считать, что критическое число Рейнольдса справедливо, однако его необходимо определить с помощью средней эффективной скорости U^o в слое смазки:

$$Re_U = 2 \frac{\rho U^o h}{\mu}. \quad (292)$$

При $\chi=0$ толщина масляного слоя $h=\delta$, $U^o = \frac{U}{2}$ и число Рейнольдса

$$Re_U = 2 \frac{\rho \frac{U}{2} \delta}{\mu} = Re.$$

Если $\chi \neq 0$, то Re_U изменяется в зависимости как от величины $U^o h$, так и от вязкости масла μ по длине протяженности смазки.

Вязкость масла μ изменяется вдоль слоя согласно выражению

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1} \right)^q, \quad (293)$$

где μ_1 — вязкость масла при входе в диффузорную часть подшипника при $h_1 = \delta(1 + \chi)$.

Показатель q ориентировочно оценивают по формуле

$$q = \frac{\ln \frac{\mu_1}{\mu_2}}{\ln \frac{h_1}{h_2}}, \quad (294)$$

где μ_2 — вязкость масла вблизи минимального зазора $h_2 = \delta(1 - \chi)$.

Величину $U^o h$ можно оценить исходя из ламинарного режима течения смазки

$$U^o h = - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{Uh}{2}.$$

Уравнения движения смазки после осреднения скоростей, учитывая, что движение происходит в тонких слоях, запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \chi} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{v}'_x \bar{v}'_y), \\ - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{v}_y^2), \\ \rho \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{v}'_y \bar{v}'_z), \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

где \bar{v}_x , \bar{v}_z — составляющие скорости;
 \bar{v}'_x , \bar{v}'_y , \bar{v}'_z — турбулентные пульсации.

Пренебрегая производными, зависящими от времени, систему уравнений перепишем в виде [20]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{v}'_x \bar{v}'_y), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{v}_y^2), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{v}'_y \bar{v}'_z), \end{aligned} \right\} \quad (296)$$

к которым необходимо присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0. \quad (297)$$

Эти уравнения для ламинарного потока имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (298)$$

Интегрировать уравнение (296) сложнее, чем уравнения (298). На основании теории Прандтля можно получить уравнение турбулентного движения, которое является обобщением уравнения Рейнольдса для ламинарного потока:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Uh}{2} \right), \quad (299)$$

где

$$k_x = 12 + 0,53R^{0,725},$$

$$k_z = 12 + 0,256R^{0,670},$$

$$R = k^2 \text{Re} = k^2 \frac{\rho U h}{\mu},$$

$$k = 0,2 \div 0,4.$$

Метод интегрирования, примененный для уравнения ламинарного потока, может быть распространен и на уравнение (299). Однако вычислить интегралы в этом случае будет затруднительно в связи с тем, что вязкость масла меняется по длине смазочного слоя согласно выражению (293). Чтобы упростить вычисления, рассматривают плоскую задачу или случай «короткого подшипника» [12].

Зависимость распределения давления в виде $\frac{p}{p_{\max}} = f(\chi)$ для турбулентного и ламинарного режима приведена на фиг. 70. Характер изменения этой величины показывает, что при одинаковых максимальных давлениях в масляном слое несущая способность при турбулентном потоке выше, чем при ламинарном.

Устойчивость работы подшипников исследовал В. Константинеску [20]. Он показал, что неустойчивость проявляется при $0,17 \leq \chi \leq 0,4$ и переменной вязкости μ , а в случае постоянной вязкости — в области очень небольших значений эксцентриситета. Однако эти результаты отражают некоторые явления устойчивости лишь в первом приближении. Дальнейшее исследование устойчивости шипа, работающего при турбулентном

режиме, позволит выделить безразмерные параметры, с помощью которых можно решить вопрос, устойчива его работа или нет. В целом эта задача сложна тем, что необходимо учесть гибкость вала, податливость опор, а также определить более точно величины, сил, действующих на шип со стороны смазки.

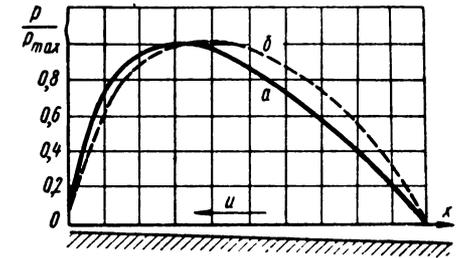
В предшествовавшем изложении рассматривалась линеаризованная задача об устойчивости движения валов в подшипниках скольжения. Вполне естественно, что решение линеаризованной задачи не может полностью охарактеризовать систему, которая по своей природе является потенциально-автоколебательной. Поэтому остаются пока необъясненными некоторые явления, наблюдаемые при эксплуатации подшипников жидкостного трения. Нелинейная постановка задачи, которая в настоящее время начинает рассматриваться рядом авторов, очевидно, в ближайшее время позволит существенно дополнить наши представления о характере вибраций валов на масляной пленке.

Так, В. А. Гробов, учитывая нелинейность гидродинамических сил масляного слоя подшипников показал, что она является при некоторых условиях причиной дробного резонанса, который наблюдается при эксплуатации ряда машин. Возможность возникновения такого резонанса, наряду с основными видами резонанса, в случае, когда частота внешних возмущений равна одной из собственных частот системы, является характерной особенностью нелинейной системы [3].

Устойчивость жесткого вала с учетом нелинейности позиционных сил масляного слоя в подшипниках скольжения исследовал Ю. В. Жуковский [17]. В его работе было показано, что силы, действующие на шип со стороны масляного слоя, зависят не только от координат центра шипа, но и от скорости и ускорения перемещения шипа.

Нелинейное решение задачи и, как это признается рядом авторов [23], [17], является важным еще и потому, что в этом случае может быть объяснено возникновение автоколебаний шипа на масляном слое и вскрыты причины, поддерживающие эти колебания [13].

Высокие скорости вращения валов и роторов усиливают инерционные силы смазывающей жидкости подшипников скольжения. Проведенный нами учет локальных сил инерции показал, что они определенным образом влияют на устойчивость движения валов на масляной пленке. Для полного учета влияния



Фиг. 70. Распределение давления в слое смазки при ламинарном (а) и турбулентном (б) потоках.

инерционных сил масляного слоя необходимо учесть также и конвективные силы инерции. Решение дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, учитывающих инерционные силы в общем виде, в силу их нелинейности представляет значительные трудности. В настоящее время появились работы, в которых решается эта задача [18].

А. К. Никитин [31], рассматривая плоскую нелинейную задачу об установившемся движении смазки между шипом и подшипником при полном заполнении жидкостью смазочного зазора, установил, что благодаря инерционным членам в дифференциальных уравнениях движения смазки, появляется составляющая главного вектора реакции смазочного слоя на шип вдоль линии центров. В то же время к составляющей главного вектора, перпендикулярной к линии центров и к величине главного момента, соответствующих линейной задаче, прибавляются добавочная сила и добавочный момент, имеющие второй порядок малости относительно числа Рейнольдса.

Более подробное теоретическое и экспериментальное исследование перечисленных вопросов позволит полнее представить природу процессов, протекающих в масляном слое подшипников скольжения, что, в свою очередь, даст возможность создавать более совершенные конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Введение в динамику автоматического регулирования двигателей. М., Машгиз, 1951.
2. Айзерман М. А. О практическом использовании критерия Гурвица. — «Автоматика и телемеханика». Т. VIII, 1952, № 2.
3. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
4. Бургвиц А. Г. Об устойчивости движения шипа в подшипнике. В сб. «Расчет и конструирование машин». Т. I. М., Машгиз, 1954.
5. Бургвиц А. Г. Устойчивость движения шипа в подшипнике с учетом гибкости вала и сопротивления масляного слоя. В сб. «Расчет и конструирование машин». Дополнение к вып. 10, Свердловск, Машгиз, 1957.
6. Бургвиц А. Г. К вопросу о колебании валов, опирающихся на подшипники скользящего трения. Труды семинара по теории машин и механизмов. Т. XII. Вып. 50. М., Изд-во АН СССР, 1953.
7. Бургвиц А. Г. Устойчивость движения шипа в подшипнике при неустановившемся движении смазки. Труды семинара по теории машин и механизмов. ИМАШ АН СССР. Т. XVII. Вып. 67. М., Изд-во АН СССР, 1957.
8. Бургвиц А. Г. Влияние изменения вязкости смазывающей жидкости на устойчивость движения вала в подшипнике. Известия ВУЗов СССР. — «Машиностроение». 1961, № 8.
9. Бургвиц А. Г. и Завьялов Г. А. Графоаналитический метод расчета устойчивости движения шипа в подшипнике. Труды Института машиноведения. Семинар по теории машин и механизмов. Т. XXII. Вып. 87. М., Изд-во АН СССР, 1961.
10. Бургвиц А. Г. и Завьялов Г. А. Определение величины радиального зазора подшипников скольжения, исходя из обеспечения устойчивости движения системы. Известия ВУЗов СССР. — «Машиностроение», 1961, № 10.
11. Воронов А. А. Элементы теории автоматического регулирования. М., Оборонгиз, 1954.
12. Голубев А. И. О движении вязкой несжимаемой жидкости в коротких подшипниковых щелях при ламинарном и турбулентном режимах течения. Труды III Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1960.
13. Гутьяр Е. М. Современные направления в развитии гидродинамической теории смазки. Труды III Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1960.
14. Дьячков А. К. Исследование в области динамически нагруженных подшипников. В сб. «Трение и износ в машинах». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1949.
15. Жуковский Н. Е. О гидродинамической теории трения хорошо смазанных твердых тел. — Журнал Русского физико-химического общества. Вып. 7, 1886.
16. Жуковский Н. Е. и Чаплыгин С. А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником. Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания. Т. XII, 1904.
17. Жуковский Ю. В. Устойчивость гибкого вала в подшипниках жидкостного трения. Сб. трудов ХПИ им. Ленина. Т. XIV, 1958.

18. Иванова Н. Г. Влияние сил инерции смазки на характеристики подшипников скольжения. В сб. «Развитие гидродинамической теории смазки подшипников быстроходных машин». М., Изд-во АН СССР, 1962.
19. Каратышкин С. Г. К теории масляного слоя в динамически нагруженном подшипнике. В сб. «Трение и износ в машинах». Т. XII. М., Изд-во АН СССР, 1958.
20. Константинеску В. Н. Устойчивость подшипников при турбулентном режиме. Труды III Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1960.
21. Константинеску В. Н. Анализ работы подшипников в турбулентном режиме. Техническая механика. Серия Д. Труды Американского общества инженеров-механиков. Т. I. Изд-во «Иностранная литература», 1962.
22. Коровчинский М. В. Плоская задача гидродинамической теории смазки. В сб. «Трение и износ в машинах». Т. V. М., Изд-во АН СССР, 1950.
23. Коровчинский М. В. Устойчивость равновесного положения шипа на смазочном слое. В сб. «Трение и износ в машинах». Т. XI, М., Изд-во АН СССР, 1956.
24. Коровчинский М. В. О теории динамически нагруженных подшипников скольжения. Известия АН СССР, Отделение техн. наук, 1953, № 3.
25. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. М., Машгиз, 1959.
26. Костомаров В. М. и Бургвиц А. Г. Основоположник теории гидродинамического трения в машинах. Н. П. Петров. М., Машгиз, 1952.
27. Костомаров В. М. и Бургвиц А. Г. О русском первенстве создания теории гидродинамического трения в машинах. — «Вестник машиностроения», 1952, № 9.
28. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1 и 2, М.—Л. Гостехиздат, 1948.
29. Лейбензон Л. С. Гидродинамическая теория смазки. М.—Л. Гостехиздат, 1934.
30. Мерцалов Н. И. Гидродинамическая теория смазки. — «Техническая энциклопедия». Т. 24, 1934.
31. Никитин А. К. Плоская нелинейная задача об установившемся движении смазки между шипом и подшипником. Известия АН СССР, Отд. техн. наук, механики и машиностроения, 1959, № 4.
32. Патрашев А. Н. Гидромеханика. М., Военмориздат, 1953.
33. Петров Н. П. Гидродинамическая теория смазки. Избранные работы. М., Изд-во АН СССР, 1948.
34. Полецкий А. Т. Интегрирование дифференциальных уравнений неустановившегося течения смазки. В сб. «Расчет и конструирование машин». Вып. 5. Челябинский политехнический институт. М., Машгиз, 1955.
35. Полецкий А. Т. Определение характеристик смазочного слоя подшипника конечной длины. В сб. статей Челябинского политехнического института. Вып. 10. М., Машгиз, 1957.
36. Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.—Л. Гостехиздат, 1948.
37. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., ГИИТЛ, 1955.
38. Слезкин Н. А. К вопросу об уточнении решений уравнения Рейнольдса. Доклады АН СССР. Т. 54, 1946, № 2.
39. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л. Гостехиздат, 1951.
40. Тондль А. Экспериментальное исследование самовозбуждающихся колебаний роторов, возникающих в результате воздействия смазочного слоя в подшипниках скольжения. В сб. «Развитие гидродинамической теории смазки подшипников быстроходных машин». Институт машиноведения. М., Изд-во АН СССР, 1962.
41. Трубицын И. А. Применение метода Жуковского—Чаплыгина, Мерцалова—Гутьяр к теории подшипника бесконечной длины. Всесоюзная

- конференция по трению и износу в машинах. ОТН АН СССР. Доклады. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1939.
42. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Серия «Современные проблемы механики». М.—Л. Гостехиздат, 1950.
43. Фишман И. М. О движении сильно вязкой жидкости между цапфой и подшипником. Прикладная математика и механика. Т. XIV. Вып. 6, 1950.
44. Ханович М. Г. Влияние направления нагрузки и конфигурации рабочей поверхности подшипника на его несущую способность и вибрационную устойчивость. Труды II Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах. Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1947.
45. Ханович М. Г. Опоры жидкостного трения и комбинированные. М., Машгиз, 1960.
46. Хрисанова Л. Б. Измерение давлений в масляном слое подшипника скольжения. В сб. «Трение и износ в машинах». Т. XIII, М., Изд-во АН СССР, 1959.
47. Чернавский С. А. Устойчивость цапфы в масляном слое подшипника паровой турбины. — «Расчет и конструирование деталей машин». М., Машгиз, 1956.
48. Эльсгольд Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1950.
49. Cameron A. Oil whirl in bearings. Theoretical deduction of a further criterion. Engineering, v. 179, N 4648, 1955.
50. Dubois G. B. and Ocvirik F. W. NACA, Report 1957, Short, bearing approximation for full journal bearings, 1953.
51. Duffing J. Beitrag zur Theorie der Flüssigkeitsbewegung zwischen Zapfen und Lager. Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik, August 1924, N 9.
52. Hagg A. C. The influence of oil—film journal bearings on the stability of rotating machines. Journ. of appl. mech., v. 13, 1946, N 3.
53. Hagg A. C. and Warner P. C. Oil whip of flexible rotors. Trans. of ASME, v. 75, 1953, N 7.
54. Harrison W. J. The hydrodynamical theory of the lubrication of a cylindrical bearing under variable load and of a pivot bearing. Trans. Cambridge Phil Soc., v. 22, 1920.
55. Holmes R. The vibration of a rigid shaft on short sleeve bearings. Journal of mechanical engineering science, v. 2, 1960, N. 4.
56. Hori Yukio. The theory of the oil whip. Trans. of ASME, Series E. Journal of appl. mech., June, 1959.
57. Hummel Ch. Kritische Drehzahlen als Folge der Nachgiebigkeit des Schmiermittels im Lager. Forschungsarbeit VDI, 1926, N 287.
58. Newkirk B. L. and Grobel L. P. Oil—film whirl. A nonwhirling. Trans. ASME, v. 56—10, 1954, N 8.
59. Newkirk B. and Taylor H. Shaft whipping due to oil action in journal bearings. General Electric Review, August 1925.
60. Ocvirik F. W. NACA, TN 2808, 1952.
61. Pinkus O., Lynn and Mass. Experimental investigation of resonant whip. Trans. ASME, v. 78, N 5, July 1956, pp. 975—983.
62. Poritsky H. Contribution to the theory of oil whip. Trans. ASME, v. 1953, N 6.
63. Robertson D. Whirling of a journal in a sleeve bearing. Philosophical Magazine, v. 13, 1933.
64. Sassenfeld H. and Walther A. Gleitlagerberechnungen. VDI—Forsch, Heft 441, Düsseldorf, VDI Verl., 1954.
65. Stodola A. Kritische Wellenstörungen infolge die Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager. Schweizerische Bauzeitung, Bd. 85, 1926.
66. Timon D. Product Engineering, v. 24, N 2, 1953.
67. Tondl A. Vpliv nosne masaci verstvy na stabilitu pohibu cepu v losisku a vznik samoburených kmitu rotoru. Rozpravy československé akademie věd. t. 66, 1956, N 2.
68. Vogel pohl G. Betriebssichere Gleitlager. Berechnungsverfahren für Konstruktion und Betrieb. Berlin u. a., Springer—Verl., 1958.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	1
Постановка задачи об устойчивости движения валов в подшипниках жидкостного трения	1
Уравнения движения вязкой жидкости	1
Основные положения гидродинамической теории смазки	1
Факторы, влияющие на движение вала и его устойчивость	2
Краткий обзор задачи об устойчивости	2
Собственные частоты колебаний системы масляный слой—шип	3
Нестационарные процессы в системе масляный слой—шип	3
Исходная система уравнений	3
Определение значения функции тока	4
Определение составляющих поддерживающей силы масляного слоя	5
Определение поддерживающей силы смазочного слоя при нестационарном движении шипа с учетом торцового истечения смазки	6
Распределение гидродинамического давления	6
Определение поддерживающей силы	6
Поддерживающая сила масляного слоя в коротких подшипниках	6
Коэффициент нагруженности подшипника	7
Устойчивость движения шипа в подшипнике	7
Постановка вопроса	7
Нестационарные процессы в системе масляный слой—шип при гибком вале	7
Устойчивость гибкого вала, опирающегося на короткие подшипники	9
Нестационарные процессы в системе масляный слой—шип при жестком вале	9
Определение собственных частот системы масляный слой—шип в устойчивой области	9
Расчеты на устойчивость движения	10
Влияние угловой скорости вала на устойчивость	10
Определение оптимального значения радиального зазора	10
Влияние изменения вязкости смазывающей жидкости на устойчивость движения вала в подшипнике	11
Влияние формы вкладыша на устойчивость движения ротора	11
Заключение	13
Литература	14

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
7	14-я сверху	$= \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$	$= - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$

Зак. 2/848.

Редактор издательства Л. П. Стрелецкая
 Технические редакторы Г. В. Смирнова, Н. В. Тимофеева Корректор Н. И. Шарунина
 Переплет художника А. В. Петрова

Сдано в производство 28/X 1963 г. Подписано к печати 26/II 1964 г. Т-03050.
 Тираж 3700 экз. Печ. л. 9,25. Уч.-изд. л. 9,5. Бум. л. 4,63. Темплан 1964 г. № 124.
 Формат 60×90^{1/16}. Цена 58 коп. Зак. 2/848.

Ленинградская типография № 15 Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина, 54

