

Московский физико-технический институт

В.С.Бескин

Квантовая механика и астрофизика

Москва 2013

Содержание

1	Предисловие	6
2	Введение	7
3	Постижение истины — историческое введение	9
3.1	Вступление	9
3.1.1	Классический мир	9
3.1.2	Квантовый мир	17
3.2	Излучение	19
3.2.1	Спектральный анализ — дискретность частот	19
3.2.2	Планк (тепловое излучение) — дискретность энергии?	20
3.2.3	Эйнштейн (фотоэффект) — свет это частицы?	23
3.2.4	Эффект Комптона — да, свет это частицы	24
3.3	Частицы	27
3.3.1	Опыты Резерфорда — да, частицы	27
3.3.2	Атом Бора — нет, не во всем частицы	29
3.3.3	Магнетон Бора	32
3.4	Дуализм	33
3.4.1	Де Бройль — и волны, и частицы	33
3.4.2	Игра в кости	36
4	Осознание истины	39
4.1	Волны	39
4.1.1	Основные понятия	39
4.1.2	Соотношение неопределенностей	42
4.1.3	Соотношение неопределенностей энергия-время	45
4.1.4	Плотность состояний	46
4.2	Формализация	50

4.2.1	Предпосылки	50
4.2.2	Заготовки	51
4.2.3	Реализация	53
4.2.4	Примеры — гармонический осциллятор, мелкая яма, туннелирование	58
4.3	Характерные длины и поля	64
4.3.1	Планковские величины	64
4.3.2	Классический радиус электрона	67
4.3.3	Комптоновская длина волны	69
4.3.4	Радиус Бора	71
4.3.5	Длина волны излучения	72
4.4	Туман рассеивается	74
4.4.1	Квант действия	74
4.4.2	Классический предел	78
4.4.3	Первые итоги	79

5 Квантовая истина **81**

5.1	Спин	81
5.1.1	Внутренние степени свободы	81
5.1.2	Угловой момент в квантовой механике	85
5.1.3	Вращения в трехмерном пространстве	90
5.1.4	Вращения и волновые функции	95
5.1.5	Квантовый волчок	103
5.1.6	Ремни и стаканы	106
5.1.7	Спин фотона	111
5.1.8	Так что же такое спин?	112
5.2	Квантовая статистика	113
5.2.1	Тождественность частиц	113
5.2.2	Связь спина и статистики	116
5.3	Измерение	118

5.3.1	Роль регистрирующего прибора	118
5.3.2	Аргумент Эйнштейна-Подольского-Розена	120
5.3.3	Кошка Шредингера	125
5.3.4	Неравенства Белла	126
5.3.5	Копенгаген или иные миры?	132
5.4	В неведомый мир	136
5.4.1	Квантовая гравитация	136
5.4.2	Прорыв М.П. Бронштейна — квантовый предел разрешения	139
5.4.3	Суперсимметрия — объединение фермионов и бозонов	141

6 Астрофизические приложения 146

6.1	Радиоастрономия — простейшие примеры	146
6.1.1	Радикационные переходы при больших n	146
6.1.2	Линия 21 см	149
6.1.3	Вращательные уровни молекул	151
6.1.4	Космические мазеры	153
6.2	Квантовые эффекты в звездах	155
6.2.1	Звезды главной последовательности — Гамовский пик	155
6.2.2	Белые карлики — Чандрасекаровский предел	164
6.2.3	Нейтронные звезды	170
6.2.4	Радиопульсары	174
6.2.5	Черные дыры — эффект Хокинга	181
6.3	Еще несколько примеров	185
6.3.1	Эддингтоновский предел	185
6.3.2	Обратный Комптон-эффект	188
6.3.3	Квантовый предел в детекторах гравитационных волн	193

7 Заключение 196

8	Приложения	198
8.1	Принцип равнораспределения энергии по степеням свободы	198
8.2	Закон Релея-Джинса	200
8.3	Формула Планка	203
8.4	Атом Бора против теории Максвелла	208
8.5	Соотношение неопределенностей — точная формулировка	210
8.6	Томсоновское сечение	212
8.7	Оператор момента импульса	214
8.8	Эффект Казимира	216
8.9	Гравитационное излучение от двойных систем	219
9	Упражнения	223

1 Предисловие

Эта книга является продолжением курса "Гравитация и астрофизика", выпущенная в 2009 году издательством ФИЗМАТЛИТ. Точнее, это еще одна часть в двухгодичном цикле "Введение в специальность", который уже более десяти лет читается студентам первого-второго курсов МФТИ. При этом порядок, в котором можно читать эти две книги, совершенно произволен. Возникающие же иногда пересечения, когда отдельные результаты более подробно излагались в другой части такого двухгодичного цикла, не имеют принципиального значения, так что соответствующие утверждения вполне можно принять на веру.

Предполагается, что читатель знаком с предметом в рамках школьного курса физики, т.е. ему в общих чертах известны такие явления и понятия, как фотоэффект, опыты Резерфорда, постулаты Бора. Поэтому об этих результатах будет сказано достаточно конспективно. Задача же этого курса состоит в том, чтобы, не отвлекаясь на сложности математического аппарата, обсудить именно физические основы квантовой механики. Это позволит нам в последней части рассмотреть некоторые явления, происходящие в окружающем нас мире, гораздо глубже, чем это обычно делается в популярной литературе. Иными словами, пособие, фактически, является предисловием к стандартному университетскому курсу, ни в коей мере не стремящимся его заменить. В частности, именно поэтому автор постарался сделать объем книги достаточно малым.

Автор благодарит В.В.Лосякова за полезное обсуждение.

2 Введение

Квантовая механика, как одна из областей фундаментальной физики, наряду с теорией гравитации и электродинамикой, лежит в основе современной астрофизики. Фактически, современная астрофизика и началась в середине 19 века, когда открытый незадолго до этого спектральный анализ был применен для определения химического строения Солнца и звезд. Неудивительно поэтому, что несомненный лидер журнальной астрофизики — The Astrophysical Journal — долгие годы с момента своего учреждения в 1895 году назывался журналом по спектроскопии и астрономической физике.

Как и в случае пособия ”Гравитация и астрофизика”, мы не сможем совсем обойтись без аппарата высшей математики. Действительно, дифференциальное и интегральное исчисление создавалась И. Ньютоном (1643-1727) и Г.В. Лейбницем (1646-1716) в значительной степени именно для того, чтобы законы физики можно было сформулировать просто и компактно. Поэтому в некоторых случаях мы будем приводить и дифференциальные соотношения, которые, как можно надеяться, должны прояснить обсуждаемые вопросы для читателя, знакомого с высшей математикой.

Для тех же, кто еще не знаком с понятием производной, следует рассматривать ”иероглиф” dx как малое приращение величины x , т.е. $dx \approx \delta x$, а ”иероглиф” dx/dt как скорость изменения величины x при изменении t

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\delta x}{\delta t}, \quad (1)$$

тем более что везде, где это возможно, будут использоваться лишь малые приращения δx . При этом использование термина ”скорость”, конечно же, не случайно. Ведь всем хорошо известная физическая величина — скорость частицы v_x — и есть производная координаты частицы x по времени t : $v_x = dx/dt$. ”Иероглиф” же $\partial f(x, y)/\partial x$ соответствует т.н. частной производной функции $f(x, y)$ по x , при вычислении которой нужно считать, что переменная y остается постоянной.

Что же касается интегралов, т.е. ”иероглифов” $F_1 = \int_a^b f(x)dx$ (хорошо известный смысл — площадь под графиком), то они в основном тексте будут появляться лишь в

исключительных случаях. При этом для оценки величины F_1 практически везде можно будет положить приблизительно $F_1 = f(x_0)(b - a)$, где x_0 — произвольная точка между a и b . Исключение составят лишь разделы 5.1.2 и 5.1.3, в которых нам придется иметь дело с кратными интегралами по поверхности единичной сферы

$$F_2 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (2)$$

В отличие от однократного интеграла $F_1 = \int_a^b f(x)dx$, являющегося пределом суммы $\sum_{x_0=a}^b f(x_0)\delta x$, интеграл (??) представляет собой суммирование не по элементам длины δx , а по элементам площади поверхности единичной сферы δS , которая в полярных координатах θ и φ имеет вид $\delta S = \sin \theta \delta\theta \delta\varphi$

$$F_2 = \sum_{\theta_0=0, \varphi_0=0}^{\pi, 2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \delta S. \quad (3)$$

При этом во всех интересующих нас случаях функция $f(\theta, \varphi)$ может быть разложена на сомножители как

$$f(\theta, \varphi) = f_1(\theta)f_2(\varphi). \quad (4)$$

В этом случае кратный интеграл (??) записывается как произведение однократных интегралов

$$F_2 = \int_0^\pi f_1(\theta) \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \, d\varphi, \quad (5)$$

после чего интегрирование производится достаточно элементарно.

Далее, везде в тексте буква E будет обозначать электрическое поле. Что же касается энергии, то она будет обозначаться буквами ε и \mathcal{E} . Наконец, везде ниже будет использоваться система СГСЭ. Именно эта система единиц наиболее естественна при описании электромагнитных явлений, которые постоянно будут обсуждаться ниже. В частности, в этой системе электрические и магнитные поля имеют одинаковую размерность. В настоящее время именно эта система единиц повсеместно используется в астрофизической литературе.

3 Постижение истины — историческое введение

Хронология развития квантовой теории очень поучительна. В течение первой четверти 20 века, а именно с 1899-1900 по 1925-1926 годы, человечество, шаг за шагом, проникало вглубь совершенно неизведанного мира. В этой Главе мы напомним основные этапы этого продвижения, не выходя при этом за рамки курса средней школы.

3.1 Вступление

3.1.1 Классический мир

Наше понимание окружающего мира, наша интуиция, позволяющая свободно ориентироваться в нем, основана на повседневном опыте. Именно повседневный опыт говорит нам, например, что камень, брошенный вверх, со временем обязательно вернется на Землю. Как хорошо известно, точные количественные законы механики, сформулированные на основе такого опыта, позволили предсказать, а затем и обнаружить внешние планеты солнечной системы. Это в еще большей мере породило уверенность в основных постулатах механики, которые мы теперь называем классическими.

К таким, казалось бы незыблимым понятиям относятся прежде всего понятия **непрерывного пространства и времени**. Конечно же, уже здесь таится некоторое лукавство. Мы прекрасно понимаем, что измерительные приборы всегда имеют ограничение — цену деления. Однако опыт показывает, что во многих случаях повышение точности измерения с практической точки зрения ничего не прибавляет к нашему знанию о движении, а иногда и просто бесполезно. Действительно, для того, чтобы не опоздать на поезд, совсем не обязательно знать время его прихода на станцию с точностью до долей секунды. Соответственно, совершенно не важно, в каком месте на платформе вы окажетесь в момент прихода поезда. Неудивительно поэтому, что в качестве удовлетворительной модели движения тел вводятся понятия материальной точки и траектории.

Еще одним из фундаментальных принципов классической механики является **принцип детерминизма**. Сама траектория и положение тела на ней однозначно определяют

ся начальной координатой тела \mathbf{r}_0 в момент времени t_0 и его скоростью \mathbf{v}_0 в этот момент времени¹. Сколько бы мы не повторяли опыт, для одних и тех же начальных значений результат опыта должен оставаться одним и тем же. В частности, если бы мы могли в точности воспроизвести начальные условия при бросании монеты, она бы падала всегда одной стороной вверх.

Наконец, в рамках классической физики всегда неявно предполагается, что **явления природы не зависят от наблюдателя**, т.е. от того, наблюдаем мы за ними или нет. При этом речь идет не только о пассивном, но и активном наблюдении, т.е. об измерении. Для всех классических систем, как показывает опыт, измерение всегда можно провести так, что параметры движения останутся практически невозмущенными. Практически в том смысле, что их всегда можно сделать меньше цены деления измерительного прибора. И уж во всяком случае никто не сомневается в том, что, например, планеты солнечной системы будут двигаться по своим орбитам независимо от того, наблюдаем мы за ними или нет.

Успехи механики, достигнутые в 17–18 веках, были столь значительны, что даже была высказана гипотеза о том, что и все остальные явления природы могут быть сведены к механическому. В частности, это относилось и к самому человеку, который представлялся набором простейших механических деталей. На такой точке зрения стояли лучшие умы того времени — Р.Декарт (1596-1650), А.Д.Гольбах (1723-1789). С подобной картиной, как известно, был категорически несогласен Лев Толстой, посвятивший этому вопросу немало страниц в "Войне и мире".

Впрочем, к концу 19 века стало ясно, насколько ограничен механистический подход при анализе хотя бы уже термодинамических процессов. Действительно, несмотря на то, что молекулярно-кинетическая (т.е., фактически, механическая) природа тепловых

¹То, что для полного определения траектории частицы нужно задать лишь ее начальную координату и скорость (и только их) является на самом деле фундаментальным свойством нашего мира. Это свойство означает, что уравнения, описывающие физические явления, должны содержать лишь первые и вторые производные по координатам и времени. Впервые этот принцип, фактически, был сформулирован Ньютоном как его Второй закон.

явлений ни у кого не вызывала сомнений, поначалу было совершенно непонятно, где, в каком звене рассуждений у механической системы появляется, например, необратимость во времени. Напомним, что в простейших механических системах изменение скорости на обратное в конце траектории должно привести к тому, что тело, двигаясь по той же траектории, вернется в начальную точку. Однако в термодинамике возможно лишь движение в одном направлении по времени. Так газ, заполняющий половину сосуда, быстро заполнит весь объем, а противоположный процесс никогда не реализуется. Хотя формально, повернув все скорости на обратные, процесс можно было бы повернуть вспять. Соответственно, соединение двух тел с разными начальными температурами приведет к выравниванию их температур. Противоположный же процесс, когда одно из тел вдруг начинает нагреваться, а другое — охлаждаться, невозможен.

После десятилетий мучительных раздумий ответ на этот вопрос был наконец найден. В действительности количество молекул в газе всегда настолько велико, что следить за их положением (и, в частности, точно фиксировать их скорости) практически невозможно. Это было невозможно как в конце 19 века, так и сейчас, при наличии сверхбыстрых компьютеров. Читатель сам может убедиться, сколько бумаги (чернил, памяти компьютера) необходимо, чтобы просто записать положения всех 10^{20} атомов, находящихся в одном кубическом сантиметре воздуха при нормальном давлении и температуре. Поэтому при описании термодинамических систем мы вынуждены пользоваться разными усредненными величинами. В большинстве интересующих нас случаев достаточно ограничиться лишь несколькими параметрами — например температурой газа и его плотностью.

В итоге (и это очень важно), в описании термодинамических систем появляется неопределенность, связанная хотя бы с неопределенностью задания начальных скоростей. В свою очередь, неопределенность в начальных условиях приводит к необходимости привлечения языка теории вероятностей. Поэтому-то тепловые явления относятся к разделу статистической физики. Вероятность появляется уже при бросании монеты, поскольку результат в действительности очень чувствителен к начальным условиям. В результате, "цены деления" прибора (т.е. точности в направлении и точки приложения силы) ока-

зывается недостаточно, чтобы предсказать результат, поскольку начальные условия в пределах цены деления будут соответствовать различным ответам. Что уж тут говорить о реальном газе. Вероятность того, что, поменяв с определенной точностью скорости молекул газа на обратные, мы соберем их все в одной половине объема, оказывается исчезающе малой.

Более того, анализируя термодинамические явления, удалось сформулировать два базовых количественных принципа, универсальность которых, как мы увидим, сродни закону сохранения энергии, и поэтому они выходят далеко за рамки классической физики. Это **гипотеза эргодичности**, а также **принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы**. Ниже мы повсеместно будем опираться на эти принципы при анализе квантовых явлений.

Прежде всего подумаем, что означает вероятностный подход к описанию событий. Что означает, например, что монета падает определенной стороной вверх с вероятностью $1/2$? Ясно, что эта вероятность может быть экспериментально определена, если мы проведем очень большую серию из N опытов и определим величину

$$\mathcal{P}_1 = \frac{N_1}{N}, \quad (6)$$

где N_1 — число событий, соответствующих определенному результату. Тогда в пределе $N \rightarrow \infty$ величина \mathcal{P}_1 и будет стремиться к вероятности интересующего нас события. Однако вероятность может быть определена и другим способом, например, если мы достаточно долго будем следить за положением маятника. Измерив время T_1 , которое маятник находится в правой части траектории, мы можем определить вероятность как

$$\mathcal{P}_1 = \frac{T_1}{T}, \quad (7)$$

где T есть полное время наблюдения. В итоге, в пределе $T \rightarrow \infty$ мы получим, что с вероятностью $1/2$ маятник находится в левой части траектории, и с той же вероятностью $1/2$ — в правой ее части. Таким образом, если нас интересуют вероятность какого-нибудь события, то она может быть определена и путем соответствующей процедуры усреднения по времени.

Ясно, однако, что усреднение по времени, которое мы имели в виду в случае маятника, вообще говоря, не то же самое, что усреднение по ансамблю реализаций, как это было в случае бросания монеты. И, по большому счету, утверждение о равенстве полученных такими способами вероятностей до сих пор остается лишь гипотезой. Иными словами, это скорее аксиома, справедливость которой можно было проверить лишь экспериментально. Тем не менее, эта гипотеза, которая лежит в основании статистической физики и носит название принципа эргодичности, представляется достаточно разумной. Например, мы не сомневаемся, что для того, чтобы определить среднюю скорость частиц в газе, можно долгое время следить за одной частицей (и затем провести усреднение по времени), а можно взять среднее по всем частицам газа в определенный момент времени. Результат будет один и тот же. Во всяком случае, до сих пор никаких данных, противоречащих этой гипотезе, обнаружено не было.

Второй базовый принцип, а именно принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы, был сформулирован Л. Больцманом (1844-1906) в 1876 году. Ниже для иллюстрации мы рассмотрим простой пример, который, однако, позволяет понять основную идею принципа равнораспределения. Необходимые же математические выкладки приведены в Приложении 8.1. Здесь также следует подчеркнуть, что принцип равнораспределения, как и 150 лет назад, также по-прежнему является в значительной степени эвристическим. В последствии мы не раз, явно или неявно, будем использовать и этот принцип.

Итак, рассмотрим некоторый объем ("комнату"), поделенную для простоты всего на две части, и будем рассматривать различные варианты заполнения этой комнаты одинаковыми молекулами газа (которые мы, однако, для наглядности будем раскрашивать в разные цвета). Если у нас есть всего одна частица, то, как показано на Рис. 1, возможны всего два состояния — частица находится либо в правой, либо в левой половине комнаты. Принцип же равнораспределения говорит о том, что вероятности этих двух состояний должны быть одинаковыми. Соответственно, одинаковыми должны быть вероятности четырех различных состояний, в которых могут находиться две молекулы, и

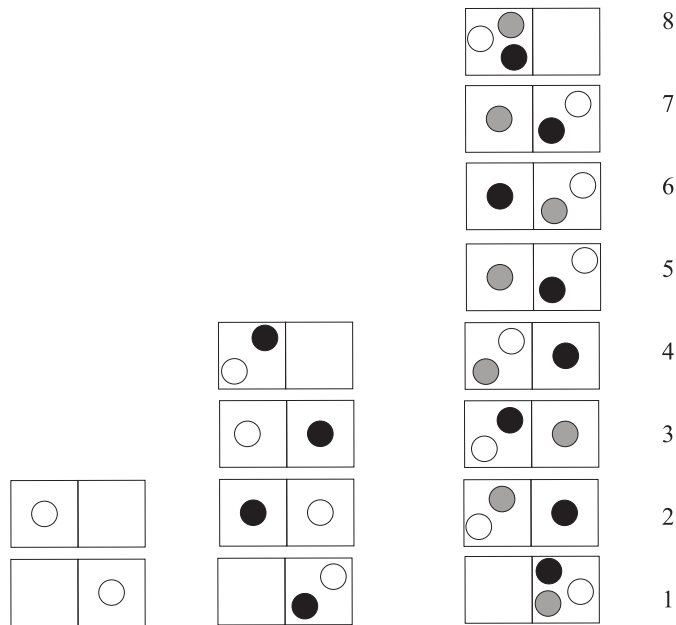


Рис. 1: Различные состояния для одной, двух и трех частиц. Согласно принципу равномерного распределения, вероятности этих состояний должны быть одинаковыми, т.е. $1/2$ для одной, $1/4$ для двух и $1/8$ для трех частиц

вероятности восьми состояний для трех частиц.

Понятно, однако, что состояния 2 и 3 для двух частиц представляют собой, фактически, одно и то же состояние. То же относится и к состояниям 2, 3 и 4, а также к состояниям 5, 6 и 7 для трех частиц. В этом случае, как показано в Приложении 8.1, вероятность того, что для N частиц выпадет состояние, в котором в левой части объема находится K частиц, а в правой — $(N - K)$ частиц, дается соотношением

$$\mathcal{P}_K = \frac{N!}{2^N K! (N - K)!}. \quad (8)$$

В результате, как легко проверить, полная вероятность зарегистрировать какое-нибудь событие, как это и должно быть, оказывается равной единице

$$\sum_{K=0}^N \mathcal{P}_K = 1. \quad (9)$$

В частности, вероятность того, что все частицы соберутся в левой половине, есть просто $1/2^N$. При больших же K и N вероятность с хорошей точностью может быть записана

как

$$\mathcal{P}(K) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp \left[-\frac{2(K - N/2)^2}{N} \right]. \quad (10)$$

Это означает, что вероятность выпадения K между величинами K_1 и K_2 может быть определена как

$$\mathcal{P}(K_1 < K < K_2) = \int_{K_1}^{K_2} \mathcal{P}(K) dK. \quad (11)$$

Распределение (6) является частным случаем знаменитого универсального распределения, носящее имя К.Ф.Гаусса (1777-1855)

$$\mathcal{P}_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (12)$$

Как мы видим, это распределение определяется лишь двумя параметрами, а именно наиболее вероятной величиной $x = \mu$ и характерной шириной распределения (или т.н. дисперсией) σ . При этом для $|x - \mu| \gg \sigma$ вероятность выпадения соответствующего события оказывается исчезающе (или, как в этом случае говорят, экспоненциально) малой. Так, вероятность не попасть в диапазон $\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma$, согласно формуле (8), составляет 0.3%, а оказаться вне диапазона $\mu - 5\sigma < x < \mu + 5\sigma$ — уже лишь 0.00006%.

В нашем случае (т.е. при очень больших N) величина дисперсии

$$\sigma = \frac{\sqrt{N}}{2} \quad (13)$$

много меньше средней величины $\mu = N/2$. Поэтому вероятность оказывается не исчезающе малой лишь при $K \approx N/2$, т.е. при равном количестве молекул в правой и левой частях комнаты. Например, для обычной комнаты ($N = 2 \cdot 10^{28}$ молекул) с вероятностью 99.9999% число молекул в правой части комнаты будет заключено в пределах $10^{28} - 2.5 \times 10^{14} < K < 10^{28} + 2.5 \times 10^{14}$. Т.е. с вероятностью 99.9999% отличие от равенства числа молекул в правой и левой частях комнаты $|K - N/2|/N$ будет не превышать 10^{-14} .

Величина 10^{-14} (тринадцать нулей после запятой) все же еще не столь мала, и, в принципе, ее можно даже представить. Это, например, есть возраст Вселенной — примерно 14 миллиардов лет — выраженный в секундах. Гораздо хуже дело состоит с вероятностью

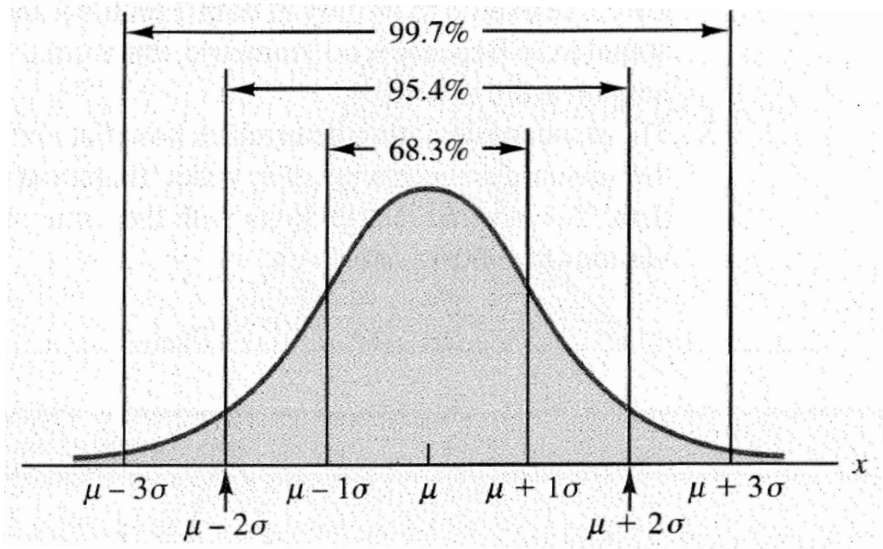


Рис. 2: Универсальное распределение Гаусса (8) характеризуется лишь двумя параметрами, а именно наиболее вероятной величиной μ (в нашем случае $K = N/2$) и характерной шириной σ (в нашем случае $\sqrt{N}/2$)

$1/2^N$, с которой все частицы соберутся в одной половине комнаты. Для $N = 10^{28}$ это уже число с 27 нулями после запятой. Можно ли представить себе столь малую вероятность? Например, она означает, что если каждое из 10^{28} состояний длится 0.01 секунды (это есть характерное время, которая молекула проходит расстояние, сравнимое с размером комнаты), то для выпадения всех возможных состояний необходимо ждать время, в миллиард раз большее, чем время жизни Вселенной. А это уже, фактически, означает, что эта вероятность не просто очень мала, а что она не только с житейской, но и с физической точки зрения просто равна нулю. Такое событие не наступит никогда.

Еще раз подчеркнем, что появление статистических свойств в термодинамических системах не нарушает общего принципа детерминизма. Вероятность появляется из-за неизбежной потери полной и точной информации о системе. Поэтому статистическая физика, безусловно, также относится к разделу классической физики. Особенно ясно это стало после открытия во второй половине 20 века явления динамического хаоса, при котором движение частиц, описываемое достаточно простыми нелинейными уравнениями, выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется строгими детерминистическими

законами. Причиной же появления хаоса является именно чрезвычайная чувствительность траектории движения по отношению к ее начальным условиям. Поскольку же, как мы уже отмечали, начальное состояние физической системы не может быть задано абсолютно точно, то при анализе движения частиц всегда необходимо рассматривать некоторую, пусть и очень маленькую, область начальных условий. В итоге, при движении в ограниченной области пространства из-за быстрой расходимости изначально близких траекторий происходит перемешивание начальных точек по всей области. После такого перемешивания уже бессмысленно говорить о траектории частицы. Можно найти лишь вероятность ее обнаружения в некоторой точке.

3.1.2 Квантовый мир

К началу 20 века происходит коренной перелом в развитии человечества. Понятия "опыт" и "повседневный опыт" перестают быть синонимами. Технологический прогресс приводит к тому, что измерительные приборы позволяют теперь проводить измерения на таких масштабах длин и времен, которые недоступны невооруженному глазу. И неожиданно оказывается, что на малых масштабах природа устроена совершенно не так, как мы привыкли, наблюдая макроскопические явления. В результате, для понимания того, как устроен окружающий нас мир, человечеству пришлось, шаг за шагом, отказаться от большинства понятий, которые мы теперь называем классическими.

Так, оказалось, что **на малых масштабах мир теряет непрерывность**. Не только энергия системы, но и многие другие характеристики оказывается дискретными. Поэтому от понятий "координата", "событие", "траектория" пришлось перейти к понятиям "состояние", и, как следствие, "вероятность перехода" между двумя состояниями системы, начальным и конечным. Более того, оказалось, что **в микромире нарушается принцип детерминизма**, поскольку одинаковые начальные условия приводят к разным результатам. Например, однозначно предсказать, распадется ли за некоторое время радиоактивное ядро атома, невозможно. Можно лишь сказать, с какой вероятностью произойдет этот распад.

Еще раз подчеркнем, что причина, по которой пришлось полностью пересмотреть наши представления об окружающем нас мире, была связана с экспериментом. Именно экспериментальные данные, которые невозможно было объяснить на основе классических представлений, привели к созданию квантовой механики. В частности, это потребовало создания совершенно нового математического аппарата, который, следуя уже своей внутренней логике, предсказал еще более удивительные свойства. Так, оказалось, что **в микромире состояние объекта и его наблюдение неразрывно связаны**. Иными словами, до измерения бессмысленно говорить о том, в каком состоянии находится квантовый объект (например, радиоактивное ядро). Только в процессе измерения, вследствие взаимодействия с измерительным прибором, происходит переход объекта в определенное состояние. В настоящее время и этот, совершенно неожиданный с точки зрения классической физики вывод, был экспериментально подтвержден. Мы подробно обсудим этот круг вопросов в Главе 5.

Наверно, даже те, кто слабо представляют себе, что такое квантовая механика, слышали, что основой величиной, определяющей квантовые свойства вещества, является постоянная Планка

$$h = 6.62606896(33) \times 10^{-27} \text{erg s}, \quad (14)$$

или $\hbar = h/2\pi$

$$\hbar = 1.054571628(53) \times 10^{-27} \text{erg s}. \quad (15)$$

Практически всегда критерием того, что мы имеем дело с квантовыми процессами, является появление этой величины в соответствующих формулах. Поскольку размерность постоянной Планка есть энергия \times время или импульс \times длина, то квантовые свойства должны проявляться, когда произведение характерных энергий и времен или же импульсов и масштабов становятся сравнимым с постоянной Планка.

В итоге, появившись впервые в теории излучения, квантовые свойства вновь и вновь стали проявляться и в других областях физики. Причем, как уже отмечалось, не только на уровне теории, но и при анализе экспериментальных данных. Стало ясно, что мы имеем дело не с какой-то одной областью физики, а с фундаментальным свойством

природы.

Однако, обо всем по порядку.

3.2 Излучение

3.2.1 Спектральный анализ — дискретность частот

Как уже говорилось, все началось с экспериментов, проведенных еще в 19 веке. Конечно, в истории науки можно найти немало примеров, когда революционные идеи (например, идея дискретности, присущая квантовой механике) высказывались и раньше. Сюда можно отнести и атомизм древних греков (Демокрит, Платон), и корпускулярную теорию света И. Ньютона (1642-1727). Однако эти идеи не были тогда подтверждены строгими экспериментами и оставались поэтому в значительной мере умозрительными. Кстати, фактически многие годы оставалась столь же умозрительной и волновая теория света Р. Гука (1635-1703) и Х. Гюйгенса (1629-1695). Лишь количественная теория интерференции (Т. Юнг, 1773-1829) и дифракции (О. Френель, 1788-1827), казалось бы, окончательно разрешила спор о том, является ли свет волной или частицами. Как оказалось, ненадолго.

Интересно, что первый шаг позволили сделать именно астрономические наблюдения. В 1814 году Й. Фраунгофер (1787-1826), благодаря существенному увеличению спектрального разрешения, описал линии поглощения в солнечном спектре. А в 1859 году, после работ Г. Кирхгофа (1824-1887) и Р.В. Бунзена (1811-1899), отцов-основателей спектрального анализа, стало окончательно ясно, что различные вещества поглощают (и излучают) свет на вполне определенных, им только свойственных частотах. Более того, как впервые обнаружил в 1885 году учитель физики в Базеле И.Я. Бальмер (1825-1898), для простейшего вещества — водорода, соответствующие частоты могут быть записаны в виде простой формулы. В окончательном виде, после работ Й.Р. Ридберга (1854-1919), ее записывают как

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi c\mathcal{R} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (16)$$

где n_1 и n_2 — натуральные числа, c — скорость света, а

$$\mathcal{R} = 109677.58 \text{ cm}^{-1} \quad (17)$$

постоянная Ридберга. Наконец, в 1908 году В. Ритц (1878-1909) показал, что и для всех остальных веществ частоты из многих сотен наблюдаемых линий может быть объяснен разностью всего нескольких, характерных для данного вещества значений энергий T_i , которые он назвал термами

$$\Delta\varepsilon = T_2 - T_1. \quad (18)$$

3.2.2 Планк (тепловое излучение) — дискретность энергии?

Таким образом, к рубежу 20 века экспериментальные данные уже вполне определенно указывали на то, что в теории излучения должны были содержаться элементы, несовместимые с классическими представлениями о непрерывности. Однако, эта подсказка для большинства осталось неслышанной. И это несмотря на то, что теорией излучения активно занимались тогда такие выдающиеся ученые, как Л. Больцман, Й. Стефан (1835-1893), Д. Рэлей (1842-1919), Д. Джинс (1877-1946), В. Вин (1864-1928). Конечно, новые идеи были столь революционными, что нужна была исключительная смелость, чтобы не испугаться произнести их вслух. Первый, еще очень осторожный шаг, суждено было сделать М. Планку (1858-1947).

Напомним, что к открытию Планка привели трудности, возникшие при попытке теоретически объяснить наблюдаемые свойства теплового излучения (см. Рис. 3). Спектральная плотность излучения $\mathcal{P}(\omega)$ (определяемая так, чтобы поток энергии теплового излучения в диапазоне частот от ω до $\omega + \delta\omega$ есть $\mathcal{P}(\omega)\delta\omega$) имела максимум на частотах

$$\omega_{\max} = \mathcal{C}T, \quad (19)$$

где \mathcal{C} — некоторая постоянная, а T — температура тела, которую мы везде в дальнейшем будем измерять в энергетических единицах (1 электронвольт = 11604.55 К). Это так называемый закон смещения Вина (Нобелевская премия 1907 г.), который был обнаружен экспериментально. А на малых и больших частотах спектральная плотность излучения

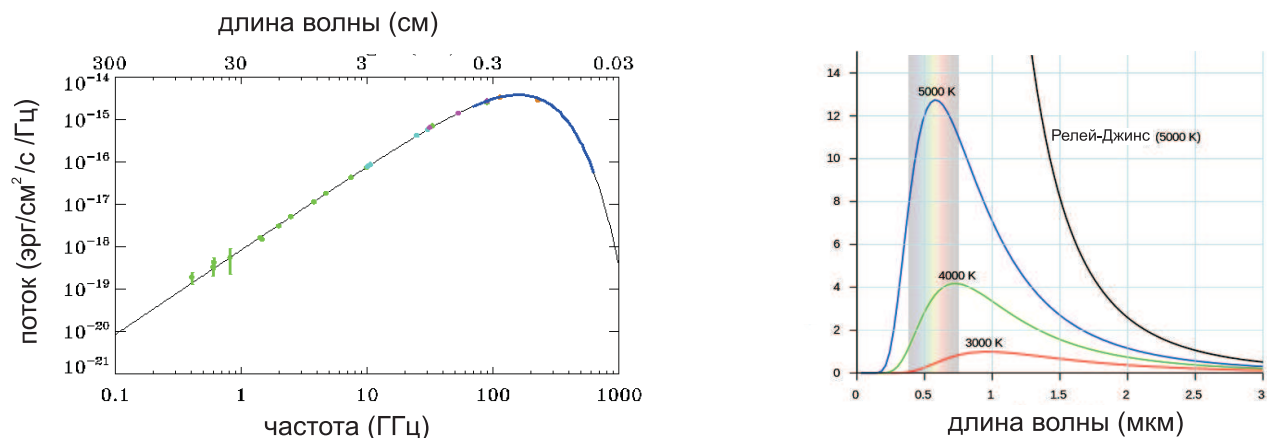


Рис. 3: Слева: спектр реликтового излучения (в дважды логарифмическом масштабе), с хорошей точностью соответствующий излучению абсолютно черного тела с температурой 2.7 К. Справа: закон Планка (20) для трех разных температур и закон Релея-Джинса (16), справедливый при малых частотах (больших длинах волн). Показан также видимый диапазон

спала до нуля. При этом в области малых частот соответствующая асимптотика была уже найдена теоретически (закон Релея-Джинса, см. Приложение 8.2)

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} T. \quad (20)$$

Проблема же заключалась в том, что было совершенно непонятно, почему завал происходит и на больших частотах. Это противоречие между теорией и экспериментом было даже названо "ультрафиолетовой катастрофой". Действительно, классическая формула (16) никакого максимума в спектральной плотности излучения не давала. А это означало, что полная энергия теплового излучения (т.е. сумма по всем частотам) оказывалась бесконечной.

И вот на рубеже 19 и 20 веков в голове М. Планка родилась идея, что правильный ответ может быть получен, если предположить, что вещество, излучающее свет, обладает дискретными свойствами. В качестве модели такого вещества Планк предположил, что оно состоит из отдельных осцилляторов, имеющих собственную частоту ω , причем

энергия каждого осциллятора могла принимать лишь дискретный набор значений, пропорциональный его частоте:

$$\epsilon_n = n\epsilon_q, \quad (21)$$

где

$$\epsilon_q = h\nu = \hbar\omega. \quad (22)$$

Формула (18) и является математической записью основной идеи М. Планка, определяющей минимальную порцию энергии колеблющегося осциллятора частоты $\omega = 2\pi\nu$. Полная же энергия осциллятора могла принимать лишь дискретные значения

$$\epsilon_n = n\hbar\omega. \quad (23)$$

Именно так, как простой коэффициент пропорциональности, постоянная Планка и возникла впервые в мировой научной литературе.

Надо сразу оговориться, что вся глубина этой идеи Планка была понята гораздо позже. А тогда это был, скорее, технический прием, позволяющий помимо всего прочего быстро провести необходимые вычисления (чтобы не отвлекаться от нашей основной темы, мы приводим соответствующие выкладки в Приложении 8.3). В частности, сам Планк говорил о дискретности энергии колебаний лишь для излучающего вещества и не подвергал сомнению волновые свойства самого света. Оценивая свою идею как "акт отчаяния", он многие годы, вплоть до присуждения ему Нобелевской премии в 1918 г., чувствовал огромную неудовлетворенность от логической неполноценности своей теории.

В результате, как показано в Приложении 8.3, формула для спектральной плотности излучения может быть записана в виде

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}. \quad (24)$$

Как видно из Рис. 3, формула Планка (20) позволила полностью объяснить наблюдаемый спектр теплового излучения. В частности, в пределе малых частот $\hbar\omega \ll T$ она совпадала с классическим законом Релея-Джинса (16). Более того, сравнивая аналитическое выражение для частоты максимума спектра

$$\omega_{\max} = 2.821439 \frac{T}{\hbar}, \quad (25)$$

следующее из закона Планка (20), с экспериментальным значением (15), удалось впервые определить и саму постоянную Планка. Для дальнейшего нам потребуется еще соотношение для полной светимости L (эрг/с) с поверхности S

$$L = \sigma_{\text{SB}} T^4 S, \quad (26)$$

которая получается интегрированием соотношения (20) по всем частотам. Здесь

$$\sigma_{\text{SB}} = \frac{\pi^2}{60c^2\hbar^3} \quad (27)$$

есть т.н. постоянная Стефана-Больцмана (температура, напомним, измеряется в эргах).

3.2.3 Эйнштейн (фотоэффект) — свет это частицы?

Как уже подчеркивалось, сам Планк ввел дискретность прежде всего для осцилляторов вещества. Конечно, при этом он был вынужден сказать, что и свет излучается порциями — квантами. Однако он не подвергал сомнению волновую природу света при его распространении. Да и действительно, после работ по дифракции света трудно было сомневаться в его волновой природе.

Напомним, что явление фотоэффекта — точнее, внешнего фотоэффекта — состоит в том, что поверхность, облучаемая светом, начинает испускать заряженные частицы (к началу 20 века уже было понято, что это электроны). Опыты по фотоэффекту (наиболее полное исследование было проведено А.Г. Столетовым, 1839-1896) показали, что, вопреки классической электродинамике, энергия вылетающего электрона всегда строго связана с частотой падающего излучения и практически не зависит от интенсивности облучения. Объяснить это свойство с позиций классической физики было невозможно.

И вот в 1905 году А. Эйнштейн (1879-1955) показал, что свойства фотоэффекта легко могут быть поняты, если предположить, что не только при излучении, но и при распространении свет состоит из отдельных квантов, энергия которых пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon = \hbar\omega. \quad (28)$$

Тогда не представляет труда записать уравнение энергии

$$\frac{mv^2}{2} + A_w = \hbar\omega, \quad (29)$$

где A_w — характерная для каждого вещества работа выхода, т.е. энергия, которую необходимо затратить, чтобы электрон покинул поверхность этого вещества. В частности, из формулы (25) сразу следует, что эжекция электронов становится невозможной, если энергия квантов падающего света $\hbar\omega$ (они впоследствии были названы фотонами) меньше работы выхода A_w .

Казалось бы, продвижение от формулы Планка (18) к формуле (24) незначительно. Однако, это только на первый взгляд. Соотношение (24) отражает понимание того, что при определенных условиях свет действительно может вести себя как отдельные частицы с энергией $\hbar\omega$. Этот вывод, полностью противоречащий общепризнанной точке зрения, показывал, что взгляд на электромагнитное поле как на набор волн принципиально неполон. Это было, вне всякого сомнения, эпохальное открытие. Неудивительно поэтому, что А. Эйнштейн был удостоен Нобелевской премии именно за эту работу, а не за создание теории относительности. Интересно, что это произошло лишь в 1921 году. Как мы видим, понадобилось больше пятнадцати лет, чтобы глубина открытия Эйнштейна была осознана.

3.2.4 Эффект Комптона — да, свет это частицы

Окончательно же корпускулярная природа света (точнее то, что при определенных условиях свет ведет себя как отдельные частицы с энергией $\hbar\omega$) стала ясна после экспериментов А. Комптона (1892-1962, Нобелевская премия 1927 г.) в 1922 году. Комптон изучал изменение длины волны рентгеновского излучения при их рассеянии электронами вещества. Результаты этих экспериментов, позволяющие регистрировать отдельные фотоны и, следовательно, количественно определять их свойства, однозначно свидетельствовали, что свет проявляет себя как поток отдельных частиц.

Действительно, известные формулы специальной теории относительности для энергии и импульса релятивистской частицы $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ и $p = mV/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ в пределе

$V \rightarrow c$ дают

$$\mathcal{E} = pc. \quad (30)$$

Воспользовшись теперь условием $\omega = ck$, справедливым для волны $A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$, движущейся со скоростью c и соотношением (24), мы немедленно приходим к соотношению

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad (31)$$

связывающему импульс кванта света \mathbf{p} и волновой вектор \mathbf{k} .

После этого, расчет, проведенный самим Комптоном, уже не может вызвать затруднений. Нужно было просто записать законы сохранения энергии и импульса. В системе отсчета, в которой электрон изначально покоится, а после столкновения фотон и электрон остаются в плоскости xy , соответствующая система уравнений (первое — для энергии, а два остальных — для двух проекций импульса на оси x и y) будет выглядеть как

$$\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + mc^2\gamma_e, \quad (32)$$

$$\hbar\omega/c = \cos\theta \hbar\omega'/c + mV_x\gamma_e, \quad (33)$$

$$0 = \sin\theta \hbar\omega'/c + mV_y\gamma_e. \quad (34)$$

Здесь θ — угол отклонения фотона от направления движения, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ — скорость электрона после взаимодействия, $\gamma_e = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ — т.н. лоренц-фактор, а ω и ω' суть частоты фотона до и после столкновения соответственно. Читателю самому предлагается показать, что решение этой системы уравнений может быть представлено в удивительно компактном виде

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta), \quad (35)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны фотона, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, а индексы 1 и 2 соответствуют значениям до и после взаимодействия. Тем самым, в теорию вошла новая характерная длина

$$\lambda = \frac{\hbar}{m_e c}, \quad (36)$$

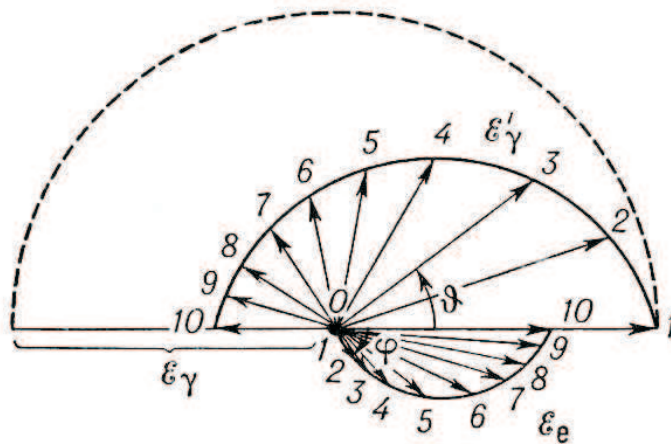


Рис. 4: Энергия рассеянного фотона $\mathcal{E}'_\gamma = \hbar\omega'$ для $\mathcal{E}_\gamma \ll m_e c^2$ (штриховая линия) и $\mathcal{E}_\gamma \gg m_e c^2$ (сплошная линия). Снизу показано направление движения и энергии электрона после взаимодействия

которая с тех пор и называется комптоновской длиной волны. Подчеркнем, что она относится не только к электронам, а к любым массивным частицам. Ее физический смысл мы обсудим в следующей Главе.

Формула Комптона (31) показывает, что в случае, когда длина волны падающего фотона много больше комптоновской длины (легко проверить, что это равносильно тому, что энергия фотона $\hbar\omega$ много меньше энергии покоя электрона $m_e c^2 \approx 511$ кэВ), то энергия фотона после столкновения, как показано на Рис. 4 (штриховая линия), практически не изменится. Такое столкновение подобно столкновению легкого шарика с покоящимся тяжелым. С другой стороны, при энергиях фотона много больших 511 кэВ фотоны, отразившиеся обратно, будут иметь энергию, существенно отличающуюся от первоначальной. Согласие формулы (31) с наблюдениями было столь хорошее, что не приходилось сомневаться: при определенных условиях свет распространялся не как волна, а как отдельные частицы.

В заключение следует отметить, что в астрофизике большую роль играет т.н. обратный Комптон-эффект (Inverse Compton effect — IC), когда в лабораторной системе отсчета энергия электрона существенно превышает энергию фотона. Особенно сильно этот

эффект проявляется для релятивистских электронов. В этом случае после взаимодействия фотон может преобрести энергию, существенно большую, чем он имел до взаимодействия. Например, при лобовом столкновении (проверьте!)

$$\hbar\omega' \approx 4\gamma_e^2 \hbar\omega. \quad (37)$$

Поэтому если энергия налетающего электрона достаточно высока, то для мягких рентгеновских фотонов, характерных для теплового излучения поверхности нейтронных звезд, их энергия может быть переброшена в область жесткого гамма-излучения вплоть до энергий порядка нескольких ТэВ, как это и наблюдается в действительности. Подробнее астрофизические приложения будут рассмотрены в разделе 6.3.2.

3.3 Частицы

3.3.1 Опыты Резерфорда — да, частицы

Мы уже говорили о том, что идея атомизма восходит к древним грекам. Однако, если говорить серьезно, то к началу 20 века про строение вещества было мало что известно. Впрочем, несколько известных к тому времени фактов все же позволяли приблизиться к пониманию того, как устроен наш мир на уровне атомной физики. Капля масла, растекшаяся по поверхности воды, позволяла оценить размер атомов, а открытие периодического закона Д.И. Менделеевым (1834-1907) показало, что свойства веществ зависит от дискретной величины — их порядкового номера. Опыты по электролизу также указывали на то, что существует минимальная порция электрического заряда. Этого, однако, было совершенно недостаточно, чтобы понять устройство микромира.

В итоге, квантовая механика была, фактически, сформулирована, когда были известны лишь три элементарные частицы — электрон, протон и фотон. Существование электрона было окончательно доказано в 1897 году, когда Дж.Дж.Томсон (1856-1940, Нобелевская премия 1906 г.) установил, что отношение заряда к массе для катодных лучей не зависит от материала источника. Протон был обнаружен в 1919 году Э. Резерфордом (1871-1937) при исследовании продуктов столкновения альфа-частиц (теперь мы знаем,

что это ядра гелия) с ядрами азота. Существование фотона как кванта излучения, как мы видели, было окончательно подтверждено уже по ходу дела. Что же касается всех остальных элементарных частиц (нейтрона, нейтрино, позитрона, мю-мезона, а потом кварков и глюонов, из которых слагаются тяжелые частицы, промежуточные бозоны, ответственные за слабое взаимодействие; впрочем, мы здесь несколько отклонились от темы), то их открытие произошло уже после того, как в 1925-1926 годах были заложены математические основы квантовой механики. Поэтому подавляющее большинство экспериментальных данных, которые привели к осознанию квантовой природы микромира, были взяты из атомной физики.

Итак, следующим важнейшим (и вновь экспериментальным) шагом было открытие Резерфордом атомного ядра, размеры которого оказались на несколько порядков меньше, чем размер атома. Это стало возможным, как уже было подчеркнуто, благодаря бурному развитию химии и технологии. Резерфорд (а он уже получил в 1908 году Нобелевскую премию по химии за исследования в области распада радиоактивных веществ) использовал альфа-частицы для бомбардировки металлической фольги. При этом он обнаружил, что альфа-частицы иногда отражаются обратно, что было невозможно понять в рамках принятой тогда модели атома (аморфный "пудинг с изюмом" Дж.Дж. Томсона). Однако согласие, и притом очень хорошее, можно было получить, если предположить, что атом содержит практически точечное положительно заряженное ядро, содержащее почти всю массу атома. Тогда отражение естественно возникало при почти лобовом столкновении одинаково заряженных частиц. Электроны же, подобно планетам в солнечной системе, вращались по удаленным орбитам и тем самым определяли размер атома.

Как мы видим, модель рассеяния Резерфорда была построена на основе классических представлений о строении материи. Еще не было ни тени сомнения в том, что ядра и электроны могут быть чем то иным, кроме как частицами. И знаменитая формула Резерфорда, описывающая столкновение альфа-частицы с ядром атома, практически ничем не отличалась от хорошо известной формулы, описывающей взаимодействие двух массивных тел в теории Всемирного тяготения. Нужно было лишь заменить силу притя-

жения $-Gm_1m_2/r^2$ на силу отталкивания q_1q_2/r^2 , где q_1 и q_2 — заряды сталкивающихся ядер.

Однако, как хорошо известно, планетарная модель атома Резерфорда, несмотря на точное количественное согласие предсказаний теории с данными экспериментов по рассеянию альфа-частиц, полностью противоречила теории электромагнитного поля Максвелла, сомневаться в которой было невозможно (она объясняла все известные к тому времени электромагнитные явления). Дело в том, что теория однозначно требовала падения электрона на ядро за ничтожно малое время. Действительно, согласно теории электромагнетизма, любая заряженная частица, двигающаяся с ускорением, должна терять энергию за счет излучения электромагнитных волн. Как показано в Приложении 8.4, для атома водорода такое время составляет лишь 10^{-11} с. Классическое представление об окружающем нас мире вдребезги разбивалось при столкновении с микромиром. Это была другая страна, с ее собственными законами.

3.3.2 Атом Бора — нет, не во всем частицы

Остановимся здесь на минуту и поговорим немного о научном прозрении. Что необходимо для того, чтобы объяснить необъяснимое? Если не говорить о Боге, то возможный рецепт был сформулирован уже в средние века. Еще в 14 веке У. Оккам ($\sim 1285-1349$), продолжая традицию Аристотеля, сформулировал принцип, который известен теперь как "Бритва Оккама": не следует привлекать новые сущности без самой крайней на то необходимости. Это означает, что сначала нужно перебрать все возможные варианты, и лишь потом начинать осторожно выходить за пределы известных теорий. Речь, таким образом, прежде всего должна идти об осознании существования границ применимости известных законов, а не об их отрицании. Именно так поступил Эйнштейн, сформулировав свою общую теорию относительности. Она не отрицала теорию Всемирного тяготения, а лишь ограничивала область ее применения.

С другой стороны, новая идея должна быть достаточно радикальной. Много лет спустя Нильс Бор (1885-1962), обсуждая одну из новых гипотез, говорил: "Это, безусловно,

безумная идея. Но достаточно ли она безумна, чтобы быть верной?” Метод эпициклов, когда известная модель излишне усложняется, рано или поздно становится бесполезной, и на ее место должна прийти другая теория, подчас основанная на совершенно иных принципах. И здесь во главу угла часто становятся представления, на первый взгляд далекие от науки. Но это только на первый взгляд.

Дело в том, что, как давно было понято, наука, научный взгляд на окружающий мир, при всей своей мощи в одиночку не в состоянии проникнуть в суть вещей. Во времена резкой смены основополагающих идей на первые роли часто выходит другой взгляд на природу, которую мы называем искусством. Это хорошо понимали в Древней Греции. Это хорошо понимали и в средние века. Недаром научные трактаты писались в стихах. Об этом впоследствии, в той или иной форме, говорили все создатели квантовой механики.

Возвратимся, однако, к модели атома Бора. На первый взгляд это был еще один акт отчаяния. С одной стороны, опыты Резерфорда настойчиво показывали, что атомы должны состоять из положительно заряженных ядер, вокруг которых вращаются отрицательно заряженные электроны. С другой стороны, теория электромагнитного поля Максвелла требовала падения электрона на ядро. И вот, чтобы разрешить это противоречие, Бор предположил, что в микромире законы классической электродинамики неприменимы. Электроны, вращающиеся вокруг ядра, могут занимать лишь дискретный набор орбит (термов), для которых момент импульса должен быть кратен постоянной Планка. Для круговой орбиты это условие имеет вид

$$m_e v r = n \hbar. \quad (38)$$

Соответственно, каждому уровню соответствует своя величина энергии

$$T_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (39)$$

Эта формула легко может быть получена из выражения для полной энергии электрона $\mathcal{E} = m_e v^2/2 - e^2/r$, силы e^2/r^2 , которую нужно уравнять с центростремительным ускорением $m_e v^2/r$ и соотношения (34). При этом электрон, находящийся на своем уровне, энергию не теряет. Излучение происходит лишь при переходах между уровнями.

Хорошо известно, что эта идея мгновенно объяснила наблюдаемый спектр излучения атомов водорода. В частности, легко проверить, что постоянная Ридберга \mathcal{R} (13) может быть выражена через мировые постоянные как

$$\mathcal{R} = \frac{m_e e^4}{4\pi c \hbar^3}. \quad (40)$$

При этом согласие теории и наблюдений (после учета того, что в действительности движение электрона должно происходить вокруг общего центра масс) уже в двадцатых годах 20 века составляла лишь доли процента. Сейчас же величина \mathcal{R} (13) известна с точностью до девятого знака.

Здесь следует особенно подчеркнуть то, что Бору не потребовалось выдумывать никаких новых параметров. Можно было воспользоваться уже известной величиной — постоянной Планка. Правда, теперь это уже не был чисто технический коэффициент пропорциональности, а главное действующее лицо — квант углового момента, задающий масштаб дискретности микромира.

С другой стороны, отметим, что открытие Бора было сделано не на пустом месте. Он, фактически, просто переосмыслил идею Планка о дискретности уровней энергии осцилляторов. Действительно, основное препятствие, стоящее на его пути — теория электромагнитного излучения ускоренных электронов — неявно предполагала, что энергии ускоренных частиц могут принимать непрерывный, а не дискретный набор энергий. Лишь в этом случае, когда для электрона возможен непрерывный спуск по лестнице энергий, становится возможным само излучение. Если спуск по каким-то причинам невозможен (лестницы нет, а лифт не работает, или нижние этажи полны народу), то становится невозможным и само излучение. Эта идея, только в зеркальном изображении, фактически, была использована и Планком. Если энергия излучающих частиц, задаваемая температурой, меньше расстояния между уровнями энергии в осцилляторе, то их возбуждение (а, значит, и последующее излучение на соответствующих высоких частотах) становится невозможным. С этим, по существу, и было связано падение спектральной плотности теплового излучения на высоких частотах. Запомним это фундаментальное свойство квантовых систем, оно еще не раз понадобится нам в дальнейшем.

3.3.3 Магнетон Бора

С именем Н. Бора связан еще один физический термин. Это т.н. магнетон Бора — квант магнитного момента элементарных частиц. Дело в том, что элементарные частицы обладают еще одним удивительным квантовым свойством, которое также сначала было обнаружено экспериментально. Это свойство связано с собственным моментом импульса элементарных частиц, и, как следствие — с их собственным магнитным моментом. Про собственный момент импульса частиц (по науке он называется спин) мы подробно поговорим в Главе 5. Здесь же мы покажем, как характерное значение магнитного момента может быть получено из элементарных соображений.

Действительно, если рассмотреть круговую траекторию электрона в атоме как контур с током, то можно определить магнитный момент такого контура μ . Напомним, что магнитный момент — вектор, направленный перпендикулярно плоскости контура. Величина μ входит, например, в формулу, определяющую спадание дипольного магнитного поля в экваториальной плоскости:

$$B = \frac{\mu}{r^3}. \quad (41)$$

Стандартные электромагнитные формулы дают

$$\mu = \frac{IS}{c}, \quad (42)$$

где $I = q/t$ — полный ток, текущий в контуре, а $S = \pi r^2$ — площадь контура. Для одного электрона, движущегося по окружности радиуса r имеем просто $t = 2\pi r/v$, так что $I = ev/2\pi r$. В итоге, воспользовавшись соотношением (34), квантующим момент импульса частицы, получаем окончательно $\mu = n\mu_B$, где

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (43)$$

есть элементарный квант магнитного момента. Он и носит название магнетона Бора.

Казалось бы, модель кругового тока для электрона, находящегося в атоме, не имеет прямого отношения к его собственному магнитному моменту. Однако, как оказалось, по порядку величины магнетон Бора может служить хорошей оценкой, в том числе и для

более тяжелых частиц. Так, например, магнитный момент электрона в точности есть $\mu_e = \mu_B$. Что же касается магнитного момента протона и нейтрона, то их естественно измерять в единицах ядерного магнетона

$$\mu_p = \frac{e\hbar}{2m_p c}. \quad (44)$$

Оказалось, что магнитный момент протона составляет $2.79\mu_p$ и направлен вдоль собственного момента импульса. Более нетривиальный факт состоит в том, что электрически нейтральный нейтрон также обладает магнитным моментом $-1.91\mu_p$. Знак минус здесь означает то, что магнитный момент нейтрона направлен против направления его механического момента импульса.

Для нас в дальнейшем будет важно еще то, что магнитный момент μ , как и любой другой контур с током, во внешнем магнитном поле \mathbf{B} будет обладать дополнительной энергией

$$U = -\mu\mathbf{B}. \quad (45)$$

Действительно, если магнитный момент μ направлен вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B} , то полное магнитное поле вблизи контура (а, значит, и его плотность энергии $B^2/8\pi$) будет увеличиваться, а при противоположном направлении — уменьшаться. Соответственно, в неоднородном магнитном поле на магнитный момент будет действовать сила $F = -dU/dx$, выталкивающая контур в область слабого поля.

3.4 Дуализм

3.4.1 Де Бройль — и волны, и частицы

Л.Д. Ландау (1908-1968, Нобелевская премия 1962 года), несомненно, принадлежал к элите научного мира. Родись он на несколько лет раньше, его имя стояло бы наряду с главными создателями квантовой механики. Но даже войдя в науку уже в конце двадцатых годов, ему удалось сделать очень и очень многое. Мы еще не раз встретимся с его именем по ходу нашего рассказа. И вот, понимая как никто саму суть квантовой ме-

ханики, Ландау давал максимальный балл² именно де Бройлю (1892-1987, Нобелевская премия 1929 года). За результат. За основополагающую идею. Действительно, обратите внимание: между открытием Бора (которое, казалось бы, позволило понять основные свойства атомов и даже выйти на уровень количественных предсказаний) и работой де Бройля прошли долгих десять лет. А между открытием де Бройля и завершением первого этапа развития квантовой механики — построения математически строгой нерелятивистской квантовой теории — лишь один-два года. Волновая гипотеза де Бройля оказалась более плодотворной.

Основная идея де Бройля состояла в том, что раз свет при определенных условиях проявляет себя как частицы, то почему бы и частицам — тоже при определенных условиях — не проявлять волновые свойства. По глубине идеи это было равносильно прозрению Максвелла, который понял, что раз переменное магнитное поле создает поле электрическое (эффект Фарадея), то и переменное электрическое поле должно создавать магнитное.

В итоге, заменив в релятивистской формуле $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ (27) импульс \mathbf{p} на нерелятивистскую величину $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, Де Бройль и получил знаменитое выражение для длины волны

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (46)$$

которая и носит его имя. Эта величина и определяет масштаб, на котором для любой частицы массы m начинают проявляться ее квантовые свойства. В частности, как легко проверить, основной постулат Бора о квантовании момента количества движения в атоме (34) может быть теперь записан просто как

$$2\pi r = n\lambda. \quad (47)$$

Иными словами, в атоме оказываются возможными лишь такие орбиты, на которых укладывается целое число волн. В противном случае в данной точке амплитуда волны становится неопределенной величиной.

²Наряду с Н.Бором, В.Гейзенбергом, Э.Шредингером и П.Дираком; выше был только А.Эйнштейн.

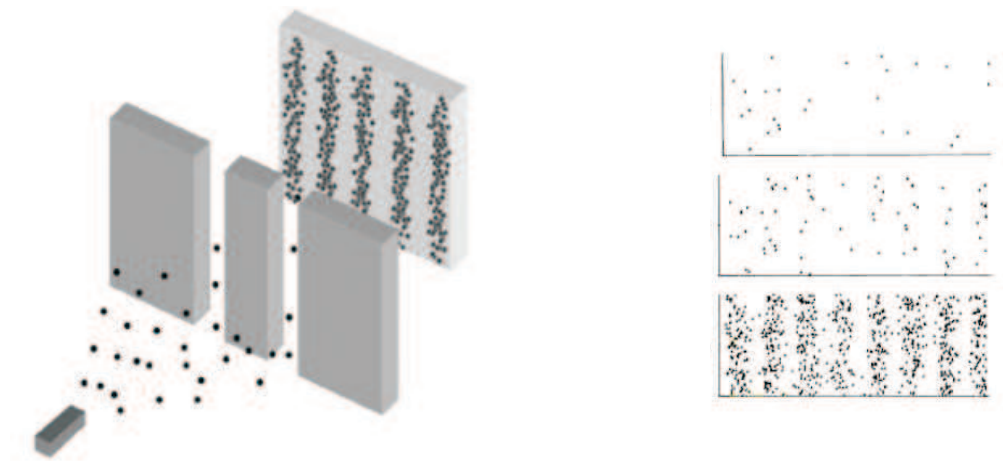


Рис. 5: Опыты Фабриканта. Слева: схема эксперимента. Справа: постепенное формирование диффракционной картины.

Первое подтверждение гипотезы де Бройля было получено уже в 1927 году в опытах американских физиков К. Дэвиссона и Л. Джермера. Пучок электронов с энергией 100–150 эВ (что соответствует длине волны $\lambda \approx 0,1$ нм) падал на кристалл никеля, играющий роль пространственной диффракционной решётки. Было установлено, что электроны дифрагируют на кристалле, причем именно так, как должно быть для волн, длина которых определяется соотношением де Бройля. Но самым знаменитым экспериментом, окончательно подтвердившим волновые свойства частиц, без сомнения, были опыты по дифракции электронов, проведенный в 1947 году в МЭИ группой В.А. Фабриканта (1907–1991) (см. Рис. 5). Этот опыт был полностью аналогичен опыту Юнга по дифракции световых волн, проходящих через две щели. Только теперь вместо света на пластину с двумя щелями падали электроны. Тем не менее, в полном соответствии с теорией волнового распространения, была зарегистрирована четкая интерференционная картина. В том числе и тогда, когда электроны падали на пластину так редко, что никак не могли взаимодействовать друг с другом.

Мы еще не раз вернемся к этому эксперименту. Здесь же заметим лишь то, что волновые свойства частиц были экспериментально обнаружены уже после того, как на основе

волновых свойств, предсказанных де Бройлем, была сформулирована нерелятивистская квантовая механика. Кстати, вы обратили внимание, что мы пока ничего не сказали о том, какая физическая величина совершает волновые движения при описании частицы (например, электрона в поле ядра)? Ответить на этот вопрос мы сможем лишь в конце следующей Главы.

3.4.2 Игра в кости

Волновые свойства частиц — не единственное совершенно новое свойство квантовых систем, не существующее классической физике. Другим фундаментальным отличием оказалась принципиальная невозможность в микромире предсказать исход конкретного события. Мы уже упоминали о процессе распада ядер. Хорошо известно, что основной характеристикой этого процесса является время полураспада $t_{1/2}$. Оно показывает, через какое время распадется половина исследуемых ядер. Как мы видим, это чисто статистическая характеристика. Для одного конкретного атома она говорит лишь о вероятности распада. Таким образом, взяв два одинаковых радиоактивных атома в момент времени t_0 , мы получим разные ответы в моменты времени $t = t_0 + t_{1/2}$. В классической физике такая ситуация была бы невозможна.

В качестве другого примера, который понадобится нам в дальнейшем, рассмотрим прохождение линейно поляризованного излучения (т.е. излучения, свойства которого, как говорят, специально ”приготовлены” благодаря прохождению через поляризатор, пропускающий лишь одну линейную поляризацию) через второй поляризатор, ось которого не совпадает с поляризацией падающего излучения. Хорошо известно, что при этом интенсивность прошедшего излучения I_{out} выражается через интенсивность падающего излучения I_{in} простой формулой

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} \cos^2 \Theta, \quad (48)$$

где Θ — угол между направлением поляризации падающего излучения и вторым поляризатором. Это свойство легко может быть объяснено для волновых процессов (линейно поляризованная волна может быть представлена как сумма двух ортогонально поляри-

зованных волн), но это совершенно непонятно, если мы вспомним, что свет состоит из отдельных фотонов.

Действительно, рассмотрим случай $\Theta = 45^\circ$. Тогда на выходе мы будем иметь поток половинной интенсивности, причем поляризация выходящих фотонов будет отличаться от поляризации падающего излучения. Важно, что эта ситуация, как и в случае дифракции электронов, будет иметь место и при такой малой интенсивности, когда падающие фотоны никак не взаимодействуют друг с другом. Поэтому уменьшение интенсивности должно быть связано со свойством индивидуального фотона, а не со свойством всего ансамбля фотонов. Поскольку же энергия фотона $\hbar\omega$ (и это экспериментальный факт!) не изменяется при прохождении поляризатора, то уменьшение интенсивности можно связать лишь с тем, что фотон проходит через поляризатор с некоторой вероятностью. Иными словами, мы, как и в случае радиоактивных ядер, не можем однозначно сказать, пройдет ли через поляризатор данный фотон или нет. Можно говорить лишь о вероятности такого прохождения.

Кстати, на этом примере, основанном именно на волновой природе света, можно прекрасно проиллюстрировать еще одно ключевое свойство квантовых систем. Предположим, что фотону удалось пройти через поляризатор. Зададимся вопросом: а какая поляризация была у него непосредственно перед прохождением через пластину? С классической точки зрения, как уже говорилось, вопроса не возникало. Благодаря линейности волн (об этом важнейшем свойстве мы поговорим еще не раз) излучение с линейной поляризацией под углом 45° можно представить как сумму излучений с двумя ортогональными поляризациями половинной интенсивности. Одна из них будет проходить через поляризатор, другая полностью поглощаться. Для отдельного же фотона что-то вразумительное сказать нельзя. Получается, что фотон изменил свою поляризацию в момент прохождения пластины!

Осознание этого свойства, по большому счету, продолжается до сих пор. Однако основной точкой зрения остается подход, который был сформулирован еще Нильсом Бором и известен теперь как "Копенгагенская интерпретация квантовой механики". В основе ее

лежит постулат, согласно которому имеет смысл обсуждать лишь величины, которые могут быть измерены, т.е. зарегистрированы измерительными приборами. До процесса же измерения говорить о каком-то состоянии квантовой системы невозможно. Иными словами, в микромире возможно существование "никакого" состояния, т.е. смешенного состояния, являющегося линейной комбинацией двух состояний, которые уже может зарегистрировать детектор. Система же приобретает определенное состояние лишь в процессе измерения, т.е. при ее взаимодействии с измерительным прибором (в нашем примере процессом измерения было взаимодействие фотона с поляризационной пластиной).

Впрочем, мы и здесь несколько забежали вперед.

4 Осознание истины

По большому счету, все результаты, изложенные в предыдущей Главе, не выходили за рамки средней школы³. Поэтому мы специально пробежали их достаточно конспективно, чтобы не тратить на них много времени и лишь напомнить основные понятия квантовой механики. В этой же Главе мы сделаем следующий шаг и постараемся понять природу квантовых свойств более детально.

4.1 Волны

4.1.1 Основные понятия

Для начала, напомним несколько важных свойств, присущих волновым процессам. Простейшая волна с частотой ω и амплитудой A_0 , бегущая вдоль оси x , имеет вид

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0), \quad (49)$$

где φ_0 — произвольная константа. Здесь величина A может соответствовать любой физической величине, например, давлению газа в звуковой волне или же напряженности полей при распространении света. Условие постоянства фазы

$$\Phi = kx - \omega t + \varphi_0 \quad (50)$$

т.е. условие

$$\Phi(x, t) = \text{const}, \quad (51)$$

показывает, что эта волна движется со скоростью $V = \omega/k$ в направлении положительных значений координаты x . Эта скорость, соответствующая скорости движения максимумов синусоиды (когда $\Phi = 0, \pm 2\pi, \dots$), называется фазовой скоростью. При этом длина волны λ связана с волновым вектором k очевидным соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (52)$$

³По крайней мере, все это входило в школьную программу в 60-70 годах прошлого века.

Соответственно, для волны, бегущей вдоль оси x в противоположном направлении, следовало бы поменять знак у волнового вектора k , т.е. записать фазу в виде $\Phi = -kx - \omega t + \varphi_0$. Однако поскольку $\cos \Phi = \cos(-\Phi)$ (а смена знака у $\sin \Phi$ приводит лишь к переобозначению постоянной A_0), мы в дальнейшем будем записывать такую волну как

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx + \omega t + \varphi_0). \quad (53)$$

Введенная выше фаза волны $\Phi(x, t)$ — одно из ключевых понятий волновой физики. В частности, зная фазу волны, мы можем определить величину волнового вектора из очевидного соотношения

$$k = \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x}. \quad (54)$$

Понятно, что понятие фазы может быть легко обобщено и на трехмерный случай, когда $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$. При этом по-прежнему поверхности равной фазы $\Phi = 0, \pm 2\pi, \dots$ будут совпадать с горбами волн. В двумерном пространстве линии равной фазы — это и есть хорошо всем известные волны, видимые на поверхности воды. Соответственно, волновые векторы будут перпендикулярны волновым фронтам. В компактной форме это свойство записывают в виде

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (55)$$

что означает просто, что $k_x = \partial \Phi / \partial x$ и т.д. Запомним это соотношение — оно, как мы увидим, будет играть ведущую роль и в квантовой механике.

Отметим, наконец, что фаза $\Phi(\mathbf{r}, t)$ не обязательно должна быть простой линейной функцией координат и времени. Конечно, если отличие будет большим, мы уже не сможем говорить о регулярном волновом процессе. Однако если поверхности равной фазы почти параллельны друг другу, этот подход будет разумным. Критерием здесь, как легко сообразить, будет условие малого отклонения волнового вектора $\mathbf{k} = \partial \Phi / \partial \mathbf{r}$ от некоторого среднего значения на масштабе длины волны $\lambda = 2\pi/k$. Иными словами, мы вполне можем говорить о волновом процессе, если выполнено условие

$$\delta k \ll \frac{1}{\lambda}. \quad (56)$$

Т.е. если разность значений k , вычисленных по формуле (50) в точках x и $x + \lambda$, удовлетворяет условию (52).

Следующее важнейшее свойство волн есть их свойство линейности. Так обозначают тот факт, что при наличии нескольких волн суммарный сигнал будет простой суммой индивидуальных колебаний. Этот случай соответствует слабому волнению на море до появления барашков или же звуковым волнам, недостаточно интенсивным, чтобы возникли ударные волны. Именно благодаря этому свойству наш слух может выделить любой инструмент в симфоническом оркестре.

Пусть теперь волновое движение состоит из двух колебаний с одинаковой амплитудой A_0 и с близкими частотами $\omega + \delta\omega$ и $\omega - \delta\omega$ и волновыми векторами $k + \delta k$ и $k - \delta k$. В итоге, воспользовавшись известным тригонометрическим соотношением, получаем для нулевых фаз φ_1 и φ_2

$$A(x, t) = 2A_0 \cos(\delta k x - \delta\omega t) \cos(kx - \omega t). \quad (57)$$

В результате, как показано на Рис. 6, амплитуда колебаний становится сильно модулированной. При этом огибающая волны также имеет вид синусоиды, но уже с пространственным масштабом

$$\delta x = \frac{2\pi}{\delta k}. \quad (58)$$

Если, например, точности измерительного прибора будет недостаточно, чтобы увидеть быстропеременную рябь внутри огибающей, то мы зарегистрируем лишь волну, распространяющуюся со скоростью

$$V_{\text{gr}} = \frac{\delta\omega}{\delta k}. \quad (59)$$

В пределе малых $\delta\omega$ и δk получаем просто

$$V_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (60)$$

Величина V_{gr} (56) называется групповой скоростью. Оказывается, что именно она должна соответствовать истинной скорости распространения сигнала. Проверим, например, что именно выражение (55) имеет правильный физический смысл, если мы захотим

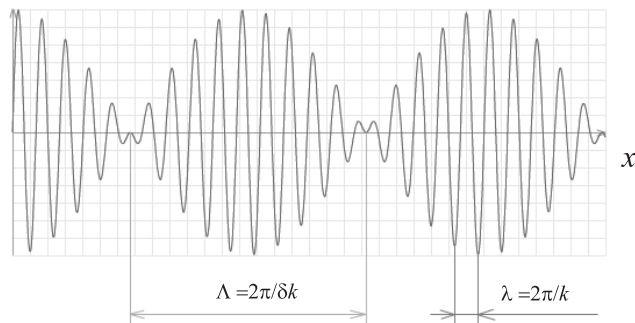


Рис. 6: Бегущая волна при наложении двух волн с близкими частотами

рассмотреть частицу как распространяющуюся волну. Вспоминая, что для одномерного движения $\mathcal{E} = \hbar\omega$ и $p = \hbar k$, получаем для нерелятивистской частицы ($\mathcal{E} = p^2/2m$)

$$V_{\text{gr}} = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{p}{m} = v. \quad (61)$$

Таким образом, именно групповая $V_{\text{gr}} = d\mathcal{E}/dp$, а не фазовая скорость $V_{\text{ph}} = \mathcal{E}/p = 2v$, будет соответствовать истинной скорости частицы.

Другой важный пример, который также будет широко использован в дальнейшем — это стоячая волна, которая может быть представлена в виде суммы двух бегущих навстречу волн одинаковой амплитуды

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t) + A_0 \cos(kx + \omega t) = 2A_0 \cos \omega t \cos kx. \quad (62)$$

Иными словами, для стоячих волн вклад колебаний с волновыми векторами k и $-k$ оказываются одинаковыми. Запомним и это свойство, оно нам тоже не раз пригодится.

4.1.2 Соотношение неопределенностей

Волновое движение обладает рядом свойств, которые, конечно же, были известны задолго до создания квантовой механики. И одно из важнейших, ставшее краеугольным камнем квантовой механики — это соотношение неопределенностей. Рассмотрим, например, гармоническую волну (45) с волновым вектором k , показанную на Рис. 7а. Она, как мы видим, занимает все пространство от минус до плюс бесконечности. Это означает,

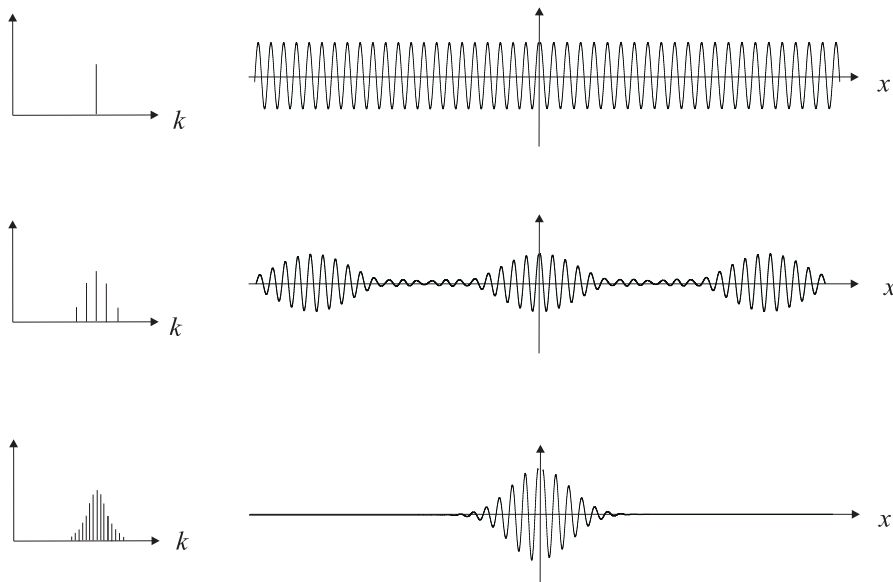


Рис. 7: При фиксированном значении волнового вектора k волна заполняет все пространство от минус до плюс бесконечности. Локализованная же волна требует сложения большого количества волн со многими значениями волнового вектора k . В пределе нужно рассматривать бесконечно много волн с волновыми векторами от нуля до бесконечности.

что при точно фиксированном значении волнового вектора неопределенность в координате бесконечно велика. Если же мы хотим рассмотреть волну, локализованную на конечном промежутке Δx , то для формирования такой волны нужно будет сложить волны с различными значениями k (и с различными амплитудами). Пример такой итерационной процедуры для 5 и 21 волны показаны на Рис. 7б–в. Как мы видим, при увеличении числа волн, заполняющих один и тот же диапазон волновых чисел Δk , локализация волны $\Delta x \sim 1/\Delta k$ остается практически постоянной. Меняется лишь расстояние между "фантомными" импульсами. Соответственно, локализация волны лишь в одном месте на оси x потребовала бы сложения бесконечного количества волн со всеми значениями волнового вектора k от нуля до бесконечности.

В итоге, для любых волновых процессов должно быть выполнено соотношение

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}, \quad (63)$$

где Δx и Δk — характерный разброс значениях x и k (точнее, среднеквадратичные откло-

нения величин Δx и Δk , см. Приложение 8.5). Разобранный выше пример (53), состоящий из двух волн с близкими волновыми векторами, прекрасно иллюстрирует это общее соотношение. Понятно, что для трехмерного случая соответствующие соотношения должны быть переписаны в виде $\Delta x \Delta k_x \geq 1/2$, $\Delta y \Delta k_y \geq 1/2$ и $\Delta z \Delta k_z \geq 1/2$.

Но если это так, то такие же соотношения должны быть выполнены и для волн, описывающие частицы, например, электроны. Вспоминая теперь, что в квантовой механике волновой вектор волны связан с импульсом частицы соотношением $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, получаем окончательно

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (64)$$

и такие же соотношения для других проекций. Это и есть знаменитые соотношения неопределенностей Гейзенберга, представляющие собой основу квантовой физики. Они показывают, что в микромире такие хорошо знакомые нам из классики понятия как координата и импульс оказываются размытыми; частица (точнее, волна, соответствующая частице) не может иметь одновременно точно фиксированную координату и импульс (волновой вектор).

Тем самым, мы подошли к важнейшему моменту, показывающему коренное отличие классической и квантовой физики. Как уже отмечалось, в области применимости классического приближения, где имеет смысл говорить о траектории частицы, мы должны в некоторый момент времени одновременно задать ее координату и импульс. Квантовая же механика говорит, что это принципиально невозможно. Конечно, при рассмотрении классических явлений неточность в определении координат и импульсов будет исчезающе мала. Так, неопределенность в координате 10^{-8} см — размер атома Бора — должно привести к неопределенности в величине импульса порядка 10^{-19} г см/с. Для любого макроскопического тела это ничтожно малая величина.

Однако если мы рассмотрим явления, в которых само произведение масштабов координат и импульсов оказывается порядка постоянной Планка (а движение электронов в атоме Бора как раз и удовлетворяет такому соотношению), то неопределенность координат и импульсов частиц должно быть порядка 100%. А это означает, что у электрона в

атоме вообще нет определенной траектории. Электрон с одинаковой вероятностью может находиться в любой точке орбиты, которая сама может быть произвольным образом расположена относительно ядра. В частности, поэтому такое состояние электрона (вспомним, что именно так следует говорить о его свойствах) на самом деле имеет нулевой момент импульса.

Наблюдение за волнами позволяет понять причину, почему не имеет смысла говорить о траектории частиц при их соударениях. Действительно, рассмотрим волну, набегающую на скалу, размер которой сравним с длиной волны. Вдали от скалы, как в набегающем, так и в уходящем потоках, волна с хорошей точностью может быть описана плоской волной, для которой в каждой точке хорошо определен волновой вектор \mathbf{k} , и, значит, и направление распространения \mathbf{V}_{gr} . Однако вблизи самой скалы, где волну уже нельзя считать плоской, понятие о траектории становится некорректным.

4.1.3 Соотношение неопределенностей энергия-время

Соотношение неопределенностей, как оказалось, относится не только к координате и импульсу, но и к энергии и времени. Действительно, как мы поняли, в квантовой механике энергия определяется частотой волны, описывающей излучение или частицу. Однако, как и пространственная частота (волновой вектор k), обычная частота ω будет точно определена лишь в том случае, если частица находится в соответствующем состоянии бесконечно долго. Если же, например, электрон находится в определенном состоянии конечное время Δt , то, как и в координатном случае, такой процесс должен соответствовать набору частот с характерным разбросом $\Delta\omega \approx 1/\Delta t$. Вспоминая теперь, что в квантовом мире частота однозначно связана с энергией, получаем окончательно

$$\Delta\mathcal{E} \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (65)$$

Здесь, однако, необходимо сделать важное уточнение. Формально, соотношение неопределенностей координата-импульс по своему смыслу соответствуют некоторому определенному моменту времени. Соотношение же (61) предполагает, что соответствующие значения ΔE и Δt берутся в какой-то определенной точке. Но мы знаем, что определить

положение частицы можно лишь с некоторой точностью. Пусть, например, мимо наблюдателя со скоростью v проходит объект, размазанный на масштабе Δx . Тогда связанная с этой неопределенностью временная привязка будет даваться соотношением

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{v}. \quad (66)$$

С другой стороны, вспоминая соотношение (57), можно оценить неточность в определении энергии, связанную с неопределенностью импульса.

$$\Delta \mathcal{E} \approx v \Delta p. \quad (67)$$

Формулы (62) и (63) и приводят к соотношению (61).

С другой стороны, как мы видели, в квантовой механике часто приходится говорить не об энергии какой-то выделенной частицы, а об уровне энергии, который эта частица может занимать, например, в атоме. В этом случае соотношение (61) можно интерпретировать как ширину уровня энергии, которое частица может занимать лишь конечное время Δt . Причем причина, по которой частица может уйти с данного уровня, может быть совершенно произвольной. Это может быть, например, связано с существованием другого уровня энергии с меньшей энергией, а может и со столкновениями атомов друг с другом, благодаря чему может произойти переход на более высокий уровень или даже ионизация атома.

4.1.4 Плотность состояний

В заключение этого раздела разберем подробно еще один важный вопрос, который также понадобится нам в дальнейшем. Он касается т.н. плотности состояний для электромагнитного излучения $n_b^{(3)}$, которая определяет, сколько волн находится в объеме $\delta \mathbf{r}$ в интервале волновых векторов между \mathbf{k} и $\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}$. Здесь и далее мы для простоты будем обозначать объем "кубика" в обычном трехмерном пространстве $\delta \mathbf{r} = \delta x \delta y \delta z$ и соответственно для "объема" в трехмерном пространстве волновых векторов $\delta \mathbf{k} = \delta k_x \delta k_y \delta k_z$. Как было показано в предыдущей Главе, число возможных состояний является ключевой величиной, определяющей статистические свойства системы.

В одномерном случае число таких состояний следует записать в виде

$$\delta N = n_b^{(1)} \delta x \delta k_x. \quad (68)$$

Например, если величина $n_b^{(1)}$ есть некоторая постоянная (а, как мы сейчас увидим, это действительно так), то число волн на длине L , имеющих волновые вектора в диапазоне от $k = k_1$ до $k = k_2$ будет равно

$$N = n_b^{(1)} L(k_2 - k_1). \quad (69)$$

Зная величину $n_b^{(1)}$, можно определять и другие важные параметры системы. Например, если энергия каждого осциллятора есть ϵ_n , то полная энергия может быть определена как

$$\mathcal{E} = \int \epsilon_n n_b^{(1)} \delta x \delta k_x, \quad (70)$$

т.е. как интеграл по всем значениям координат и волновых векторов. При этом мы, естественно, вновь воспользовались принципом равномерного распределения, согласно которому все состояния входят с одинаковым весом. В итоге, приведенные выше соотношения обобщают случай дискретного спектра, разобранный в Главе 3.

Для определения величины n_b рассмотрим на первый взгляд принципиально другую систему, когда объем, занятый электромагнитными волнами, ограничен непрозрачными, т.е. хорошо проводящими электрический ток стенками. При таких проводящих стенках электрическое поле на границе области должно быть равно нулю⁴. Поэтому естественно предположить, что волны, запертые в потенциальной яме, должны иметь узлы при $x = 0$ и $x = L$. Примером таких колебаний может служить струна, закрепленная в этих точках. В итоге, колебания должны иметь вид стоячих волн с волновыми векторами $k_n = n\pi/L$

$$A_n(x, t) = A_0 \sin(n\pi x/L) \sin \omega_n t. \quad (71)$$

Здесь A_0 — произвольный параметр, описывающий данную волну, а частота $\omega_n = \mathcal{E}_n/\hbar$ выражается через энергию соответствующего уровня n . Таким образом, как показано сверху на Рис. 8, в нашем примере спектр волновых чисел k_x состоит из дискретного набора эквидистантных уровней, расположенных на расстоянии $\Delta k_x = \pi/L$ друг от друга.

⁴Закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где \mathbf{j} — плотность тока а σ — проводимость, в пределе $\sigma \rightarrow \infty$ дает $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma \rightarrow 0$.

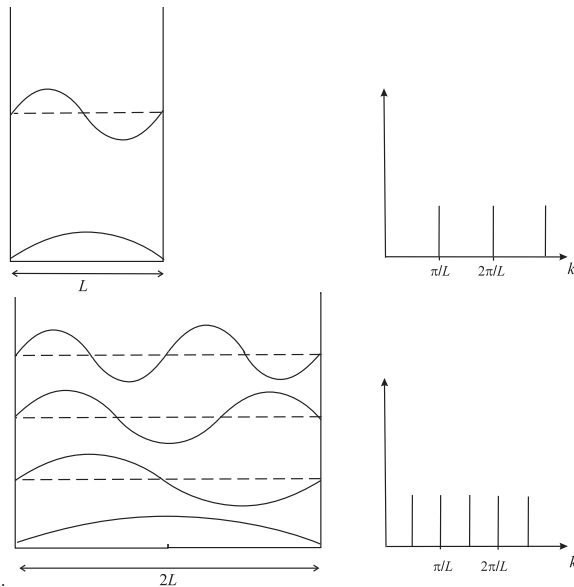


Рис. 8: Дискретный спектр уровней энергии электромагнитных волн, запертых в "ящике" с расстоянием между стенками L и $2L$. В предельном случае $L \rightarrow \infty$ спектр становится непрерывным

Отметим, что при последовательном определении плотности состояний необходимо учесть, что волновой вектор k_x , как и координата x , должны изменяться во всем диапазоне значений от $-\infty$ до ∞ . Однако, как уже было отмечено выше, для стоячих волн значения k_x и $-k_x$ входят на равных правах. Поэтому удобно считать, что волновые векторы k_x изменяются от 0 до ∞ . В итоге, для дискретного спектра соотношение (65) для $k_1 = 0$ и $k_2 = \pi/L$ перепишется как

$$1 = 2 \cdot n_b^{(1)} \cdot L \cdot (\pi/L). \quad (72)$$

Здесь слева стоит единица, то есть число волн в диапазоне от 0 до π/L , а коэффициент 2 появился как раз благодаря тому, что мы должны просуммировать и колебания с отрицательными значениями k . Более того, благодаря эквидистантности между уровнями, соотношение (68) будет справедливо и для любого другого интервала волновых векторов между $k_1 = n\pi/L$ и $k_2 = (n+1)\pi/L$.

Таким образом, плотность состояний может быть записана как

$$n_b^{(1)} = \frac{1}{2\pi}. \quad (73)$$

Как мы видим, эта величина универсальна и не зависит от расстояния L . Это наводит на мысль, что в пределе бесконечного пространства, когда $L \rightarrow \infty$, плотность состояний по прежнему будет выражаться соотношением (69). И действительно, посмотрим, как изменится плотность состояний, если мы раздвинем стенки в два раза, т.е. заменим L на $2L$. В этом случае объем увеличится в два раза, но, как видно из Рис. 8, станет в два раза чаще и частотол линий волновых векторов, поскольку теперь становятся возможными и волновые векторы вида $k_n = n\pi/2L$ с нечетными значениями n . В итоге, условие того, что одно колебание содержится в диапазоне волновых векторов между $k_1 = 0$ и $k_2 = \pi/2L$ будет выглядеть как

$$1 = 2 \cdot n_b^{(1)} \cdot 2L \cdot (\pi/2L), \quad (74)$$

и то же самое для любого другого интервала волновых векторов между $k_1 = n\pi/2L$ и $k_2 = (n+1)\pi/2L$. Поэтому плотность состояний $n_b^{(1)}$ (т.е. число волн на единичной длине и в единичном диапазоне длин волн) остается постоянной и равной $1/2\pi$. Увеличивая теперь расстояние между пластинами до бесконечности, мы приходим к выводу, что такая же плотность состояний должна быть и в неограниченном объеме, когда спектр электромагнитных волн становится непрерывным. Ясно, что в трехмерном пространстве соответствующее выражение должно быть записано как⁵

$$n_b^{(3)} = \frac{1}{(2\pi)^3}. \quad (75)$$

Вспоминая теперь, что волновой вектор связан с импульсом частиц соотношением $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, мы приходим к заключению, что плотность состояний в фазовом пространстве $\delta\mathbf{r} \delta\mathbf{p}$ (т.е. когда число частиц или волн в объеме $\delta x \delta y \delta z$ в интервале импульсов $\delta p_x \delta p_y \delta p_z$ есть $\delta N = n_b^{(3)} \delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z$) может быть записана как

$$n_b^{(3)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (76)$$

⁵Это понятно? Если нет, то нужно вспомнить, что элементарными ячейками как в обычном пространстве, δV , так и в пространстве волновых векторов δV_k являются произведения $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ и $\delta V_k = \delta k_x \delta k_y \delta k_z$

Иными словами, постоянная Планка $h = 2\pi\hbar$ (не перечеркнутая) задает размер элементарной ячейки в фазовом пространстве координат и импульсов, в которой может находиться одна частица. Иными словами, мы вновь пришли к соотношению неопределенностей.

4.2 Формализация

4.2.1 Предпосылки

Напомним, что в рамках нашего повествования мы не ставим перед собой задачу выйти на уровень университетского курса квантовой механики. Тем не менее, рассмотренные выше примеры позволяют понять основные идеи, позволившие в 1925-1926 годах оформить квантовую механику в виде математически строгой теории. Это было сделано в работах Э. Шредингера (1887-1961, Нобелевская премия 1933 г.) и В. Гейзенберга (1901-1976, Нобелевская премия 1927 г.). Любопытно, что они подошли к решению проблемы с разных сторон, и на первый взгляд их теории были совершенно непохожи друг на друга. Так, Шредингер предложил в качестве математического языка теорию дифференциальных уравнений (см. ниже), а Гейзенберг — теорию матриц. Лишь позднее было понято, что эти теории полностью эквивалентны друг другу, т.е. они дают одни и те же ответы на одинаково поставленные вопросы. Впрочем, по большому счету, это не удивительно, поскольку и у Шредингера, и у Гейзенберга в качестве фундамента были одни и те же физические идеи. Тем не менее, за основу они взяли различные грани тогда еще смутно различимого кристалла.

Итак, многочисленные эксперименты, накопленные к тому времени, настойчиво говорили о том, что

1. частицы на малых масштабах ведут себя как волны; их энергия может принимать лишь дискретный набор величин,
2. не имеет смысла говорить о траектории частицы, а лишь о состоянии, в котором она находится,
3. процессы, происходящие в микромире, имеют вероятностный характер.

Последний пункт, однако, требует пояснения. Рассмотренные выше примеры показывают, что вероятность (т.е. неопределенность результата) возникает в микромире в двух ипостасях. Во-первых, она появляется в связи с необходимостью определения вероятности обнаружить частицу, находящуюся в некотором состоянии, в данной точке нашего трехмерного пространства. В этом случае уравнения квантовой механики должны быть записаны в обычном трехмерном пространстве, а статистика состояний и переходов между ними должна быть рассмотрена отдельно. Этот подход, который мы и рассмотрим ниже, был реализован Шредингером.

Однако вопрос может быть поставлен и по другому: какова вероятность найти частицу в данном состоянии или же какова вероятность ее перехода из одного состояния в другое. В этом случае мы можем сразу полностью абстрагироваться от нашего трехмерного пространства и перейти к чисто квантовому понятию — ”пространству состояний”. Именно такой язык, о котором также пойдет разговор ниже, и был использован Гейзенбергом при формулировке матричных уравнений квантовой механики.

4.2.2 Заготовки

Как мы уже отмечали, сформулированный на основе классической физики принцип эргодичности можно рассматривать как универсальный метод, позволяющий определять вероятности событий как усреднение по времени. В дальнейшем мы будем обозначать усреднение по времени квадратными скобками. В частности, среднее значение величины $A(t)$ за время наблюдения T будет равно

$$\langle A(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt. \quad (77)$$

В пределе же $T \rightarrow \infty$ индекс T после знаков усреднения $\langle \rangle$ мы будем для простоты опускать.

Постараемся теперь применить этот подход к волновым явлениям. При этом нам, фактически, понадобятся лишь очевидные соотношения, что среднее по времени от значений $\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $\sin(\omega t + \varphi_0)$ есть ноль, а средние значения их квадратов равны $1/2$

независимо от фазы φ_0

$$\langle \sin^2(\omega t + \varphi_0) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (78)$$

Ключевым же здесь будет вопрос о том, какая величина, характеризующая волну, может быть связана с вероятностью нахождения частицы в определенном состоянии.

Рассмотрим прежде всего бегущую волну $A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ (45), описывающую, как мы теперь знаем, свободно распространяющуюся частицу. Интуитивно ясно, что вероятность обнаружить ее не должна зависеть от координаты x . Понятно, что таким свойством будет обладать амплитуда волны A_0 . Но усредненная по времени величина $A(x, t)$ всегда будет равна нулю. Другое дело — квадрат величины $A(x, t)$. После очевидного усреднения

$$\begin{aligned} \langle A^2(x, t) \rangle &= A_0^2 \langle [\cos kx \cos(\omega t + \varphi_0) - \sin kx \sin(\omega t + \varphi_0)]^2 \rangle \\ &= A_0^2 [\cos^2 kx \langle \cos^2(\omega t + \varphi_0) \rangle - 2 \cos kx \sin kx \langle \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) \rangle \\ &\quad + \sin^2 kx \langle \sin^2(\omega t + \varphi_0) \rangle] \\ &= \frac{1}{2} A_0^2 (\cos^2 kx + \sin^2 kx) = \frac{1}{2} A_0^2 \end{aligned} \quad (79)$$

мы действительно получаем величину, не зависящую от координат. С другой стороны, для стоячей волны $A(x, t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \cos kx$ (58) соответствующая величина

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \cos^2 kx \quad (80)$$

будет теперь зависеть от координаты x . Так, однако, и должно быть, поскольку вероятность зарегистрировать фотон в районе пучности должна быть больше, чем в районе узлов.

Усредненный квадрат амплитуды волны обладает еще одним важнейшим свойством, еще более убеждающим нас в том, что именно эта величина может претендовать на роль вероятности. Для этого воспользуемся уже упоминавшимся выше свойством линейности волн и рассмотрим состояние, состоящее из двух бегущих волн

$$A(x, t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2). \quad (81)$$

Тогда благодаря тому, что среднее значение от перекрестных произведений, например,

$$\langle \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle = 1/2 \langle \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_2] \rangle = 0, \quad (82)$$

где $\phi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ и т.д. равны нулю, получаем окончательно⁶

$$\langle A^2(x, t) \rangle = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2. \quad (83)$$

Но это и есть основное соотношение теории вероятностей — вероятность двух независимых событий есть сумма их вероятностей. Это наводит на мысль, что основным действующим лицом в квантовой теории может быть некоторая функция, квадрат амплитуды которой будет пропорционален вероятности того или иного события.

4.2.3 Реализация

Постараемся теперь воспроизвести ход рассуждения Шредингера. Наводящие соображения, о которых мы рассказали в предыдущем разделе, показывают, что волны, которые уже не раз возникали при попытке объяснить квантовые свойства частиц, должны быть волнами вероятности. Например, вероятность обнаружить частицу в точках с координатами между x и $x + \delta x$ должна быть пропорциональна квадрату амплитуды некоторой волновой функции $\Psi(x, t)$, усредненному по большому промежутку времени. Для стоячих волн, которые для простоты мы в основном только и будем рассматривать, волновая функция может быть представлена в виде

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (84)$$

При этом усреднение проводится элементарно, и мы приходим к соотношению, что вероятность должна быть пропорциональна $\psi^2(x)$.

Обратите внимание, что мы пока говорим лишь о пропорциональности между вероятностью и величиной $\psi^2(x)$. Дело в том, что вероятность любого события — это величина, по своему определению меньшая или равная единице; сумма же вероятностей всех возможных событий должна быть равна единице. В формуле (2) этой проблемы

⁶Исключение составит случай $\omega_1 = \omega_2$. Что должно получиться при равенстве частот?

не возникало, поскольку в случае бросания монеты были возможны лишь две различные реализации. В случае же волн, число которых может быть бесконечным, возникает необходимость интерпретировать бесконечно большие величины. Впрочем, как мы сейчас увидим, это свойство и позволило прояснить ситуацию.

Итак, основным действующим лицом в нерелятивистской квантовой теории, по идее Шредингера, должна была стать волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Оставалось подобрать математический язык, который позволил бы объяснить дискретность уровней энергии. Впрочем, область математики, в которой решения обладают таким свойством, была хорошо известна. Это так называемая задача на собственные значения, которая возникает в теории дифференциальных уравнений.

Действительно, рассмотрим опять частицу массы m в одномерной потенциальной яме длиной L с бесконечно высокими стенками. Вдали от стенок, где потенциальная энергия равна нулю, частица должна двигаться с постоянным импульсом p_x , и поэтому она должна описываться волновой функцией $\Psi(x, t) \propto \sin(k_x x - \omega t + \varphi_0)$, где $k_x = p_x/\hbar$. С другой стороны, вероятность зарегистрировать частицу вне потенциальной ямы должна быть равна нулю. Поэтому естественно предположить, что должны быть выполнены соотношения $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(L) = 0$. Иными словами, свойства частицы будут подобны колебаниям струны, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = L$. При этом волновая функция, описывающая колебания такой струны, должна иметь узлы при $x = 0$ и $x = L$, т.е. иметь вид стоячей волны с волновыми векторами $k_n = n\pi/L$

$$\Psi_n(x, t) = \psi_0 \sin(n\pi x/L) \sin(\omega_n t + \varphi_0). \quad (85)$$

Здесь вновь частота $\omega_n = \mathcal{E}_n/\hbar$ выражается через энергию соответствующего уровня n . Энергия же \mathcal{E}_n легко может быть определена, если мы опять вспомним, что в промежутке между двумя стенками потенциальная энергия частицы равна нулю, так что энергия частиц полностью определяется кинетической энергией $p^2/2m = \hbar^2 k_n^2/2m$. В итоге, получаем

$$\mathcal{E}_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2. \quad (86)$$

Как мы видим, в этом примере дискретность энергии связана с т.н. граничными условиями — амплитуда волны должна обращаться в ноль на обоих концах.

С другой стороны, хорошо известно, что гармонические колебания $\psi(x) \propto \sin kx$ (или $\psi(x) \propto \cos kx$, или любая линейная комбинация синусов и косинусов) являются решением одного из самых известных уравнений математической физики — уравнения гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_x^2 \psi = 0. \quad (87)$$

Вспоминая теперь, что кинетическая энергия может быть выражена через импульс частицы $p_x = mv_x$ как $\mathcal{E} = p_x^2/2m$ (а $p_x = \hbar k_x$), мы можем переписать это уравнение в виде

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \mathcal{E}\psi = 0. \quad (88)$$

С учетом граничных условий

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (89)$$

уравнение (84), как мы видим, действительно имеет решение лишь для дискретного набора энергий (82).

Тогда естественно предположить, что в присутствии произвольного потенциала $U(x)$ уравнение на волновую функцию должно выглядеть как

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + [\mathcal{E} - U(x)]\psi = 0. \quad (90)$$

Это и есть знаменитое стационарное уравнение Шредингера, которое описывает состояния частицы массы m в произвольном потенциале $U(x)$. В классически разрешенной области $\mathcal{E} - U(x) > 0$ (и при условии медленного изменения потенциала $U(x)$) решение будет представлять почти гармонические колебания с волновым вектором

$$k_x \approx \frac{\sqrt{2m[\mathcal{E} - U(x)]}}{\hbar}, \quad (91)$$

что в точности соответствует импульсу частицы $p_x = \hbar k_x = \sqrt{2m(\mathcal{E} - U)}$. Иными словами, уравнение Шредингера подобно уравнению гармонического осциллятора, только

оно описывает не временные, а пространственные колебания волновой функции. В частности, для рассмотренного выше случая потенциальной ямы с бесконечными стенками, пространственная частота колебаний остается постоянной на всей длине $0 < x < L$. В случае же ненулевого потенциала $U(x)$ такие колебания соответствовали бы струне, у которой толщина зависит от координаты.

Еще раз подчеркнем, что важнейшим свойством подобных уравнений является то, что их решение существенно зависит от граничных условий. Как мы видели на примере бесконечно глубокой потенциальной ямы, именно условия (85), требующие, чтобы на длине L укладывалось целое число полувольт, и приводит к дискретному спектру энергий. Если же потенциальная яма не имеет бесконечных стенок, то для локализованных состояний необходимо поставить граничные условия

$$\psi(-\infty) = \psi(\infty) = 0. \quad (92)$$

В этом случае теория дифференциальных уравнений также приводит к необходимому свойству дискретности энергетических уровней. Иными словами, решение уравнения (86), удовлетворяющее граничным условиям (88), имеет место лишь для дискретного набора параметра \mathcal{E} . Если же условия (88) не выполнены (например, это имеет место для бегущей волны (45)), то здесь необходимо по другому поставить задачу. А именно, рассматривать не вопрос о вероятности нахождения частицы в данном интервале Δx , а о вероятности прохождения и отражения частицы от данного потенциального барьера, описываемого потенциалом $U(x)$.

Условие (88) приводит еще к одному важному свойству, вытекающему из уже отмеченного выше свойства линейности волн. Поскольку волновая функция $\psi(x)$ входит в уравнение (86) в первой степени, то решение определено с точностью до постоянного множителя. Это значит, что если какая-то функция $\psi(x)$ есть решение этого уравнения, то и функция $A\psi(x)$, где A — произвольная постоянная, также будет решением этого уравнения. Следовательно, коэффициент A может быть выбран таким образом, чтобы было выполнено соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (93)$$

В этом случае полная площадь под графиком $f(x) = |\psi(x)|^2$ будет равна единице. Это и будет вероятность того, что частица находится где-то в промежутке от $-\infty$ до ∞ . Вероятность же того, что частица находится, например, между координатами x_1 и x_2 будет задаваться выражением

$$\mathcal{P}(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx. \quad (94)$$

Обратите внимание — в выражениях (89) и (90) мы поставили модуль волновой функции. Дело в том, что в общем случае в уравнение Шредингера могут входить слагаемые, пропорциональные мнимой единице, так что и сама волновая функция как решение этого уравнения становится комплексной величиной. Выражения же (89) и (90) оказываются точными и в общем случае.

Заканчивая этот раздел, необходимо сказать хотя бы несколько слов о том важнейшем прорыве, который удалось сделать Шредингеру в области математической физики. Как мы видели, главным действующим лицом при описании квантовых систем оказалась волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Если переписать стационарное одномерное уравнение Шредингера в виде

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = \mathcal{E} \psi(x), \quad (95)$$

то мы видим, что и в правой, и в левой части этого уравнения перед волновой функцией $\psi(x)$ стоит энергия $\mathcal{E} = p^2/2m + U(x)$. Только в левой части была проведена замена

$$p^2 \rightarrow -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}. \quad (96)$$

Именно в такой замене и состоял прорыв в физику 20 века. Физические величины теперь могли быть связаны не только с такими понятными еще из курса средней школы объектами, какими являются функции координат и времени, но и с дифференциальными операторами.

Напомним, что в классической механике импульс частицы $\mathbf{p}(t)$ был обычной функцией времени. Для определения импульса частицы в момент времени $t = t_0$ нужно было сначала решить уравнение движения (т.е. найти функцию $\mathbf{p}(t)$ из второго закона Ньютона), а

затем вычислить ее в момент времени $t = t_0$. В квантовой же механике для определения импульса частицы, находящейся в точке $x = x_0$ нужно было сначала найти волновую функцию $\psi(x)$ (т.е. решить уравнение Шредингера), а затем вычислить производную $-\hbar^2 d^2\psi(x)/dx^2$. И если в результате дифференцирования ответ можно было записать в виде $p^2(x)\psi(x)$ (как мы видели, для свободно распространяющейся волны $\psi(x) \propto \cos kx$ это действительно так), то величина $p(x)$ и объявлялась импульсом частицы.

4.2.4 Примеры — гармонический осциллятор, мелкая яма, туннелирование

Для примера мы рассмотрим три вопроса, связанных с чисто квантовыми явлениями, принципиально невозможными в классической физике. При этом нам здесь будет важно показать, что для качественного определения их основных свойств будет достаточно лишь знания соотношения неопределенностей. Точные же решения (которые можно найти в любом вузовском учебнике или задачнике по квантовой механике) легко получаются с помощью уравнения Шредингера.

Первый пример связан с определением энергетических уровней гармонического осциллятора — наиболее простой, и поэтому очень часто встречающейся системы. Решая уравнение Шредингера (86) для одномерного гармонического осциллятора, для которого потенциал $U(x)$ имеет вид

$$U(x) = \frac{\kappa x^2}{2}, \quad (97)$$

где κ — некоторая постоянная, можно убедиться, что решение, удовлетворяющее граничным условиям (88), действительно имеет место лишь при дискретном наборе энергий

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (98)$$

Здесь $\omega^2 = m/\kappa$ есть частота колебаний. При любых других значениях энергии \mathcal{E} площадь под графиком $f(x) = |\psi^2(x)|$ оказывается бесконечной.

Этот результат, как мы увидим, имеет очень широкую область применимости, поскольку и груз на пружине, и колебания электромагнитных полей, и круговое движение заряженных частиц в магнитном поле описываются уравнением гармонического осцил-

лятора, т.е. системы, в которой частота колебаний ω не зависит от амплитуды. Поэтому мы сформулируем здесь основные свойства такого энергетического спектра.

1. Планк был прав — гармонический осциллятор действительно имеет эквидистантный набор энергетических уровней (для потенциальной ямы с вертикальными стенками, как мы видели, это не так).
2. Поскольку выражение (94) является универсальным, оно должно быть справедливо и для электронов, вращающихся в магнитном поле. Действительно, как легко проверить, частота кругового движения (т.н. циклотронная частота)

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e c} \quad (99)$$

вызываемого силой Лоренца, не зависит от скорости частицы. В результате, как было показано Л.Д. Ландау, энергия электрона в однородном магнитном поле \mathbf{B} , направленным вдоль оси z , имеет вид

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}. \quad (100)$$

Как мы видим, магнитное поле приводит к квантованию лишь поперечного движения (соответствующие уровни энергии называются уровнями Ландау); в направлении магнитного поля энергия частиц выражается стандартным образом.

3. В отличие от классического осциллятора, когда, например, шарик может покоиться в точке равновесия, энергия нижнего энергетического уровня в квантовой механике не равна нулю

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega. \quad (101)$$

Следовательно, не равной нулю должна быть и минимальная энергия для электромагнитных волн. Это значит, что "физический вакуум" (а так научно называется состояние с наименьшей энергией), фактически, не является пустотой. В Приложении 8.8 показано, что ненулевая энергия вакуума приводит к предсказаниям, которые могут быть (и были!) проверены на эксперименте.

4. Ненулевая энергия нижнего энергетического состояния для электромагнитных колебаний приводит к тому, что полная энергия вакуума электромагнитного поля становится бесконечной. Этот вывод связан с тем, что электромагнитное поле может быть представлено в виде бесконечного числа гармонических осцилляторов со всеми возможными частотами ω . Бесконечная сумма энергий $\hbar\omega$ оказывается бесконечной. В нерелятивистской теории это свойство можно легко обойти, поскольку на самом деле нас всегда интересует не сама энергия, а разность энергий двух состояний. В релятивистской же теории это не так, так что бесконечная энергия наименьшего состояния электромагнитного поля есть существенный недостаток теории. В частности, этот факт является одной из причин, почему до сих пор не построена теория квантовой гравитации (один из возможных выходов будет рассмотрен в разделе 5.4.3).

Кстати, тот факт, что энергия нижнего энергетического уровня не равна нулю, есть прямое следствие соотношения неопределенностей. В квантовой механике частица не может покоиться в точке минимума потенциальной энергии, поскольку для $\Delta x \rightarrow 0$ мы имели бы $\Delta p_x \rightarrow \infty$. При этом, как строго показано в Приложении 8.5, нижний уровень в точности соответствует соотношению $\Delta x \Delta p_x = \hbar/2$, если под Δx и Δp_x понимать их среднеквадратичные величины. Впрочем, это соотношение может быть получено и гораздо более простым, хотя, безусловно, не строгим образом.

Действительно, предположим, что частицу и на нижнем энергетическом уровне можно рассматривать как классическую. Тогда ее координата запишется как $x(t) = x_0 \sin \omega t$, а ее импульс $p_x(t) = mv_x(t)$ как $m\omega x_0 \cos \omega t$. Понятно, что средние квадраты координаты и импульса будут равны соответственно $x_0^2/2$ и $(m\omega x_0)^2/2$. С другой стороны, энергия колебаний $\mathcal{E} = m\omega^2 x_0^2/2$. Приравнивая теперь эту величину энергии нижнего состояния $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega/2$, мы немедленно приходим к соотношению $\Delta x \Delta p_x = \hbar/2$ (проверьте!).

Другим важным следствием соотношения неопределенностей будет то, что в квантовой механике уровни энергии существуют не в любой потенциальной яме. Если, как показано на Рис. 9, потенциальная яма размером L достаточно мелкая, то максимальный

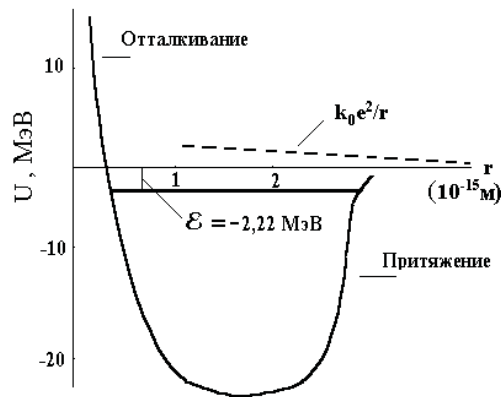


Рис. 9: Схематический профиль потенциала взаимодействия нуклонов в ядре дейтерия, в котором энергетический уровень -2.22 МэВ лежит гораздо выше дна потенциальной ямы. Мелкая потенциальная яма может вообще не иметь разрешенных уровней

классический импульс частицы $p_0 = \sqrt{2m|U_0|}$, совершающей колебательные движения в такой потенциальной яме, также будет достаточно мал. В результате, при выполнении условия $Lp_0 < \hbar$, т.е.

$$|U_0| < \frac{\hbar^2}{2mL^2}, \quad (102)$$

в такой мелкой потенциальной яме вообще не будет ни одного уровня. Иными словами, квантовая частица не может находиться в потенциальной яме, для которой выполнено условие (98). Здесь, правда, необходимо подчеркнуть, что приведенное выше утверждение не касается одномерных и двумерных задач, для которых уровень энергии существует в любой, сколь угодно мелкой потенциальной яме.

Примером такой мелкой потенциальной ямы является дейтерий — связанное состояние протона и нейтрона (см. Рис. 9). Если бы значение постоянной Планка было бы всего на 20% больше, то дейтерий вообще не мог бы существовать. А это значит, что в природе вообще не было бы никаких химических элементов кроме водорода, поскольку образование гелия (без которого невозможно образования и всех остальных ядер) как на ранней стадии эволюции Вселенной, так и при "горении" водорода в звездах, происходит только через образование дейтерия. Мы кратко обсудим этот процесс в последней Главе.

Наконец, еще одним важнейшим (и чисто квантовым) эффектом является т.н. тун-

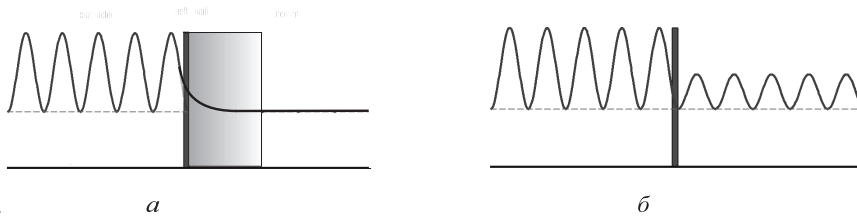


Рис. 10: Квантовое проникновение частицы в запрещенную область (слева) и туннелирование через потенциальный барьер (справа)

нелирование через потенциальный барьер (см. Рис. 10). Этот эффект тесно связан с возможностью проникновения частицы в классически запрещенную область, в которой потенциал $U(x)$ превышает полную энергию частицы \mathcal{E} . На этом примере особенно хорошо видно, что соотношение неопределенностей имеет статистический смысл, поскольку связывает между собой среднеквадратичные отклонения, определенные в результате многих экспериментов.

Действительно, если движение частицы (а точнее, как мы теперь знаем, волны-частицы) ограничено потенциальным барьером, то в этом случае она не может быть описана бесконечной плоской волной, раскинувшейся от минус до плюс бесконечности. Но тогда, благодаря соотношению неопределенностей, не будет точно определен и импульс частицы, а вместе с ним и ее энергия. Значит, с некоторой вероятностью энергия частицы может стать выше потенциального барьера, так что частицу можно будет зарегистрировать в области, где формально $\mathcal{E} < U$.

Для материальных тел такая ситуация, конечно же, совершенно непонятна. Однако для волновых процессов это вполне обычная ситуация. Например, электромагнитная волна может содержать многие, в том числе и очень высокие частоты. И даже если энергетический вклад высоких частот невелик, соответствующий детектор, настроенный на высокую частоту, без труда ее регистрирует. Так, например, роль гамма-излучения в космическом фоновом излучении исчезающе мала. Однако космические гамма-телескопы эти сверхжесткие фотоны уверенно регистрируют.

Но тогда частица-волна, падающая на препятствие, также может обладать энергией,

позволяющей ей находиться в классически запрещенной области. Как уже говорилось, проще всего это можно понять на языке статистики. Если наблюдать не за одной, а за многими частицами с одинаковыми (как мы неправильно думаем!) энергиями, то какая-то часть из них может быть зарегистрирована и при $\mathcal{E} < U$.

Покажем теперь, как можно оценить "глубину проникновения" частицы в классически запрещенную область. Как видно из Рис. 10б, для попадания в область $\mathcal{E} < U$ частица должна была бы иметь дополнительную энергию $\delta\mathcal{E} = U - \mathcal{E}$. Этой энергии соответствует дополнительный импульс $\delta p_x \sim \sqrt{2m\delta\mathcal{E}}$, и, следовательно, масштаб $\delta x \sim \hbar/\delta p_x$

$$\delta x \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2m|U - \mathcal{E}|}}. \quad (103)$$

Отметим, что, как видно из соотношения (87), в классически разрешенной области $\mathcal{E} > U$ величина (99) есть ни что иное как длина волны частицы. Как показывает точный расчет, такой же масштаб имеет и область проникновения частицы в толщу барьера. Только теперь эта длина характеризует не длину волны, а масштаб экспоненциального спада волновой функции

$$\psi \approx \psi_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta x}\right). \quad (104)$$

И, значит, масштаб, на котором происходит заметное уменьшение вероятности обнаружить частицу там, где с классической точки зрения ее вообще не могло быть. Как показывает точный расчет, для $U = \text{const}$ поток частиц, прошедший через барьер, может быть записан как

$$S_{\text{tun}} = S_0 \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m|U - \mathcal{E}|}L}{\hbar}\right), \quad (105)$$

где S_0 есть поток частиц, падающий на барьер. Эта формула, впрочем, может быть немедленно получена из соотношения (100), если мы вспомним, что вероятность есть квадрат волновой функции.

Таким образом, можно заключить, что если длина барьера мала по сравнению с длиной проникновения δx (99), то частица без проблем может его преодолеть. Однако такое, как говорят, "подбарьерное туннелирование" может иметь место и в случае, если длина барьера L хотя и больше, но ненамного превышает δx (см. Рис. 10б). С другой стороны,

если длина барьера L намного превышает длину проникновения, то поток прошедших сквозь барьер частиц будет экспоненциально мал.

4.3 Характерные длины и поля

4.3.1 Планковские величины

Прежде чем подводить первые итоги, полезно обсудить вопрос о том, какие характерные масштабы задает постоянная Планка \hbar . Как было показано, постоянная Планка, появившись сначала как простой коэффициент пропорциональности между частотой и энергией, в последствии стала возникать во многих других соотношениях, относящихся к различным областям физики. Стало ясно, что мы имеем дело с новой фундаментальной константой, описывающей свойства, характерные для всех физических взаимодействий. Конечно, в первую очередь она появилась в квантовой электродинамике, поскольку и строение атомов, и процессы излучения относятся к этой области физики. Однако универсальность квантовых свойств, которые были поняты при анализе явлений, происходящих в атомах, позволила в дальнейшем успешно использовать те же принципы для описания как сильных взаимодействий, ответственных за стабильность ядер, так и слабых взаимодействий, происходящих при участии нейтрино. Неудивительно поэтому, что вся современная физика фундаментальных взаимодействий (теория струн, бран, суперсимметрия) строится на фундаменте квантовой механики, в которой постоянная Планка \hbar играет определяющую роль.

Напомним, что к началу 20 века были известны лишь две подобные константы: скорость света c и гравитационная постоянная G . Скорость света

$$c = 29979245800 \text{ cm s}^{-1}. \quad (106)$$

хотя формально, по самому своему названию, и относится к электродинамике, в действительности не связана с какой-то отдельной дисциплиной, а отражает внутренние свойства самого пространства-времени. Это выражается, в частности, в том, что скорость света входит в преобразования Лоренца (инвариантность теории по отношению к

этим преобразованиям есть один из основных принципов современной физики). Поэтому, в частности, гравитационные волны также распространяются со скоростью света. Соответственно, гравитационная постоянная

$$G = 6.67428(67) \times 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ с}^{-2} \text{ г}^{-1} \quad (107)$$

также относится к универсальному свойству гравитационного взаимодействия, присущему всем видам материи, в том числе и к любым физическим полям. Остальные же известные всем постоянные ни имеют подобной универсальности. Так, элементарный заряд e относится лишь к электромагнитным процессам; он никак не проявляет себя в сильных взаимодействиях, например, при взаимодействии двух нейтронов.

Интересно, что трех мировых констант оказывается достаточно, чтобы сформировать комбинации, имеющие размерность длины, времени и массы. Сейчас такие величины называют планковскими. Так, планковская длина

$$l_{\text{Pl}} = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ см}. \quad (108)$$

Соответственно, планковская масса

$$m_{\text{Pl}} = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ г}, \quad (109)$$

а планковское время $t_{\text{Pl}} = l_{\text{Pl}}/c \sim 10^{-43} \text{ с}$.

Как показано на Рис. 11, все известные нам из повседневного опыта явления природы находятся в верхнем секторе. Именно с этим сектором связана и наша физическая интуиция. Справа от линии, соответствующей условию $r = r_g$, где

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (110)$$

— гравитационный радиус (попросту говоря, такой размер тела, при котором вторая космическая скорость равна скорости света), необходим учет эффектов общей теории относительности. Фактически, эта область соответствует внутренним областям черной дыры. Слева от линии, соответствующей условию $r = \hbar/mc$, становятся существенными квантовые эффекты. Мы обсудим эту область чуть позже. Наконец, при масштабах,

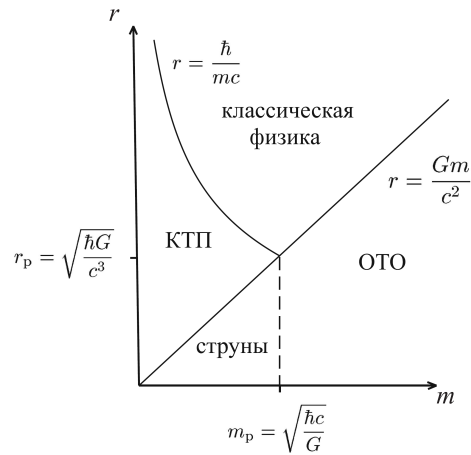


Рис. 11: Основные области физики на плоскости масса-длина (КТП — квантовая теория поля, ОТО — общая теория относительности). Все известные нам из повседневного опыта явления находятся в верхнем, классическом секторе

меньших планковских, мы вступаем в область квантовой гравитации, когда необходимо учитывать одновременно как квантовые эффекты, так и эффекты общей теории относительности. Эта область, несмотря на десятилетние усилия, до сих пор остается terra incognita — последовательная теория квантовой гравитации не создана до сих пор. Мы кратко обсудим причины такого положения в следующей Главе.

То, что планковские длины и времена исключительно малы, не вызывает сомнения. Что же касается планковской массы (которая, как легко проверить, может быть получена из условия равенства комптоновской длины волны и гравитационного радиуса), то на самом деле это очень большая величина, поскольку ее нужно сравнивать с характерными массами элементарных частиц. Соответствующая энергия $\mathcal{E}_\text{Pl} = m_\text{Pl}c^2 \sim 10^{28}$ эВ столь огромна, что она никогда не сможет быть достигнута в лаборатории (энергия сталкивающихся частиц в Большом Адронном Коллайдере — лишь 10^{13} эВ, а самые энергичные частицы, обнаруженные в космических лучах достигают 10^{20} эВ). Поэтому, наряду с чисто теоретическими трудностями, область квантовой гравитации лишена главной поддержки — эксперимента.

4.3.2 Классический радиус электрона

Итак, планковские масштабы длин и времен слишком малы, чтобы они могли быть непосредственно измерены. Однако, постоянная Планка задает целую лестницу гораздо больших длин и времен (а вместе с ними, как мы увидим, характерные электрические и магнитные поля), определяющие процессы, которые уже могут непосредственно измеряться. Ниже мы ограничимся примерами из атомной физики, когда под массой частиц будет подразумеваться масса электрона m_e . Однако нужно помнить, что приведенные ниже соотношения достаточно универсальны, так что соответствующие масштабы возникают и при рассмотрении процессов, в которых основную роль играют более тяжелые частицы.

Наименьшей из таких длин является т.н. классический радиус электрона

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.82 \times 10^{-13} \text{ см.} \quad (111)$$

Если бы электрон можно было считать шариком размера $r_0 < r_e$, то энергия электрического поля $E = e/r^2$ вне шарика превысила бы энергию покоя $m_e c^2$. Действительно, оценивая энергию электрического поля \mathcal{E}_E , заключенную в объеме $V \sim r_0^3$ как плотность энергии $w = E^2/8\pi \sim e^2/r_0^4$ умноженную на объем V , получаем $\mathcal{E}_E \sim e^2/r_0$. Точная формула дает

$$\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_0}, \quad (112)$$

однако численный коэффициент в определении (107) всегда опускают.

Обратите внимание: в определение (107) не входит постоянная Планка \hbar . Именно поэтому в название этой длины входит слово "классический". Фактически же, величина r_e задает точную оценку снизу на границу применимости классической электродинамики — при достаточно малых масштабах применение ее формул (например, соотношения $E = e/r^2$) становится невозможным.

С другой стороны, как мы увидим, во многих случаях использование величины r_e оказывается очень удобным. Как показано в Приложении 8.6, классический радиус электрона задает площадь поперечного сечения (так называемое Томсоновское сечение)

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (113)$$

которая возникает при описании взаимодействия электромагнитного излучения с плазмой. В частности, длина l_γ , на которой происходит затухание электромагнитной волны, определяется как

$$l_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e}, \quad (114)$$

где n_e — концентрация плазмы.

То, что классический радиус не может играть роль размера электрона, видно из того, что другая оценка характерной энергии дает величину, существенно превышающую энергию покоя электрона. Действительно, рассматривая величину r_0 как длину волны, мы можем определить соответствующую ей энергию как $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega = \hbar c/r_0$. В итоге, получаем

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar c}{e^2} m_e c^2, \quad (115)$$

что примерно в 137 раз превышает энергию $m_e c^2$.

Появившаяся в соотношении (111) безразмерная комбинация

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (116)$$

называется постоянной тонкой структуры. Такое название связано с тем, что впервые она была введена в 1916 г. немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом (1868-1951) при описании атомных спектральных линий в рамках модели атома Бора. Однако довольно скоро стало ясно, что она является фундаментальной физической постоянной, характеризующей силу электромагнитного взаимодействия. Неудивительно поэтому, что в дальнейшем эта малая постоянная будет часто возникать в нашем повествовании.

Наконец, отметим, что каждому размеру L (и, значит, частоте $\omega_L = c/L$) можно сопоставить напряженность магнитного (а, значит, и электрического) поля по формуле

$$\omega_c = \omega_L, \quad (117)$$

где ω_c — циклотронная частота (95). В результате, получаем

$$B_0 = \frac{m_e^2 c^4}{e^3} \approx 6.0 \times 10^{15} \text{ G}. \quad (118)$$

Это поле, на пятнадцать порядков большее, чем магнитное поле Земли, возможно, существует лишь на поверхности магнетаров — сверхсильно замагниченных нейтронных звезд. В таком поле излучение оказывается настолько эффективным, что электрон теряет вращательную энергию вокруг магнитного поля буквально за несколько оборотов.

4.3.3 Комптоновская длина волны

Следующей характерной длиной является комптоновская длина волны $\lambda = \hbar/m_e c$ (32). Как легко проверить, она в 137 раз больше классического радиуса электрона. Соответствующая ей энергия в точности равна энергии покоя электрона $m_e c^2$, а характерное магнитное (или электрическое) поле составляет

$$B_{\hbar} = \frac{m_e^2 c^3}{\hbar e} \approx 4.4 \times 10^{13} \text{ G}, \quad (119)$$

что в 137 раз меньше значения B_0 . Большинство нейтронных звезд — пульсаров имеют магнитные поля, лишь на порядок меньше, чем поле B_{\hbar} .

Масштабы и поля, соответствующие комптоновской длине волны, играют фундаментальную роль в физике высоких энергий. Начнем с того, что работа электрического поля $E_{\hbar} = B_{\hbar}$ на длине λ есть также в точности $m_e c^2$

$$e E_{\hbar} \lambda = m_e c^2. \quad (120)$$

А это означает, что в таком сильном электрическом поле начинают рождаться электронно-позитронные пары. Если бы мы встали на точку зрения, что вакуум — это пустая среда, то такой вывод был бы удивителен. Но мы видели, что квантовая механика однозначно требует ненулевой энергии нижнего энергетического состояния. В итоге, энергия нулевых колебаний и служит тем резервуаром, из которого возникают рождаемые частицы.

Действительно, приведенные выше многочисленные примеры показывают, что электромагнитное поле иногда удобно рассматривать как волну, а иногда — как набор фотонов. То же самое можно отнести и к электронно-позитронным парам. Тогда вакуум можно представить себе не как набор осцилляторов поля с энергиями $\hbar\omega/2$, а как среду, состоящую из электронов, позитронов и фотонов. При этом электроны и позитроны постоянно

аннигилируют, рождая энергичные фотоны, которые, в свою очередь, при столкновении рождают новые пары.

Конечно, тут же возникает вопрос, почему эти частицы никак себя не проявляют. Оказывается, здесь нас опять подводит наше классическое представление о мироустройстве. На самом деле, как мы не раз убедимся в дальнейшем, таких проявлений на самом деле очень много. Просто в достаточно слабых электрических полях $E \ll E_h$ эти частицы остаются виртуальными (это принятый научный термин), т.е. их нельзя непосредственно зарегистрировать. Это связано с тем, что время жизни виртуальных частиц $\tau \sim \lambda / c \sim 10^{-21}$ с слишком мало. Не успев разлететься достаточно далеко, виртуальные электрон и позитрон снова сближаются, что приводит к их аннигиляции и излучению других виртуальных фотонов. Можно сказать, что энергии виртуальных электронов и позитронов меньше $m_e c^2$ (т.е. они находятся в связанном состоянии), и поэтому они не могут существовать как отдельные частицы. Образно говоря, их скорости не превышают второй космической скорости, необходимой для того, чтобы частицы могли свободно разлететься. Поэтому расстояние между ними никогда не превышает λ . В случае же $E \sim E_h$ сильное электрическое поле совершает работу, достаточную, чтобы энергия частиц превысила $m_e c^2$.

Что же касается магнитного поля, то оно, как известно, не может совершать работы, и поэтому само поле B к рождению частиц привести не может. С другой стороны, в магнитном поле $B \sim B_h$ (когда, как легко проверить, расстояние между уровнями Ландау (96) сравнивается с $m_e c^2$) становится возможным процесс проворачивания гамма-кванта в электрон-позитронную пару

$$\gamma + (B) \rightarrow e^+ + e^- + (B). \quad (121)$$

Без магнитного поля этот процесс запрещен, так как для реакции $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ не может быть выполнен закон сохранения энергии и импульса. В частности, понятно, что этот процесс невозможен и при энергии фотона $\mathcal{E}_\gamma < 2m_e c^2$. В магнитном же поле $B \sim B_h$ рожденные электрон и позитрон начинают вращаться в разные стороны, поскольку сила Лоренца, действующая на них, пропорциональна их заряду. Для скоростей $v \sim c$ и

для магнитных полей $B \sim B_h$ сила Лоренца, ускоряющая электрон и позитрон в разные стороны, оказывается как раз порядка eE_h , которая действует на виртуальную пару в электрическом поле. Как будет показано ниже, однофотонный процесс рождения электронно-позитронной плазмы действительно играет ключевую роль в магнитосферах нейтронных звезд.

Таким образом, сверхсильные электрические и магнитные поля приводят к изменению свойств вакуума. В частности, это свойство должно проявляться и вблизи заряженных частиц, ограничивая тем самым область применимости классического закона Кулона $e = q/r^2$. И действительно, как показывают расчеты, выполненные в рамках квантовой электродинамики (по понятным причинам, изложение этой науки выходит за рамки нашего разговора), электрический потенциал точечного заряда q (при $r \gg \lambda$) в действительности должен выглядеть как

$$\Phi_e = -\frac{q}{r} \left[1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{2r}{\lambda}\right) + \dots \right]. \quad (122)$$

Как мы видим, отличие от закона Кулона начинает сказываться именно на масштабах комптоновской длины волны.

Напомним, что вакуум состоит не только из виртуальных электронов и позитронов, но и из виртуальных пар других частиц/античастиц. Однако электроны и позитроны обладают наименьшими массами, так что размер, на котором должны начать проявляться эффекты поляризации вакуума, должен определяться именно величиной λ . Таким образом, комптоновская длина электрона и есть тот масштаб, который следует рассматривать как "размер" элементарных частиц.

4.3.4 Радиус Бора

Следующей ступенькой в лестнице масштабов оказывается боровский радиус

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad (123)$$

т.е. радиус круговой орбиты в атоме Бора для главного квантового числа $n = 1$. Он, как легко видеть, в те же 137 раз больше, чем комптоновская длина волны. Постоянная

тонкой структуры $\alpha = 1/137$ появляется и во многих других соотношениях, связанных с атомом Бора. Например, скорость вращения электрона в атоме Бора на нижней орбите $n = 1$ есть $c/137$.

Легко проверить, что электрическое поле протона на радиусе Бора достаточно слабо, чтобы рождать частицы. Электрон будет чувствовать лишь малое отклонение от закона Кулона, даваемое соотношением (118). Это приводит лишь к небольшим возмущениям уровней энергии $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \sim \alpha^3$. За экспериментальное обнаружение этого возмущения (т.н. Лэмбовский сдвиг) Ю. Лэмб (1913-2008) в 1955 г был удостоен Нобелевской премии.

Однако если мы возьмем ядро с зарядом $Z \sim 137$ (так что радиус внутренней орбиты станет равным $r_0 = a_B/Z$), то ситуация существенно изменится. Прежде всего, скорость электрона приблизится к скорости света, так что при расчете необходимо будет учитывать эффекты специальной теории относительности. С другой стороны, для электронов, находящихся на нижнем уровне теперь будет выполнено еще и условие $eE(r_0)r_0 \approx m_e c^2$. А это, как мы знаем, означает, что вблизи ядра может начаться интенсивное рождение электронно-позитронных пар. В этом и состоит одна из важных (но далеко не единственная) причин отсутствия стабильных ядер уже при $Z > 100$.

4.3.5 Длина волны излучения

Полезно продолжить нашу лестницу еще на одну ступеньку вниз и обсудить масштаб, в 137 раз больший, чем радиус Бора a_B

$$\lambda_B = \frac{\hbar^3 c}{m_e e^4} \approx 7.14 \times 10^{-7} \text{ см.} \quad (124)$$

Эта масштаб соответствует длине волны излучения при переходе в атоме водорода с уровня $n = 2$ на уровень $n = 1$. Это связано с тем, что, как уже отмечалось, скорость движения электрона на нижнем энергетическом уровне близко к $c/137$. Поэтому за один оборот электрона излучаемая им волна удалится как раз на расстояние $137a_B$. Неудивительно, что и соответствующая энергия

$$\mathcal{E}_{\lambda_B} = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \approx 27.2 \text{ eV} \quad (125)$$

с точностью до константы совпадает с энергией нижнего терма T_1 (35) в атоме водорода.

Важное значение имеет и магнитное поле

$$B_{\lambda_B} = \frac{e^3 m_e^2 c}{\hbar^3} \approx 2.3 \times 10^9 \text{ Г}, \quad (126)$$

соответствующее длине λ_B . При магнитных полях, превышающих B_{λ_B} , должна существенно изменяться сама структура вещества, причем изменяться на атомном уровне. Действительно, оценивая магнитное поле, при котором сила e^2/a_B^2 , которая действует на электрон в атоме Бора, сравнивается с силой Лоренца $F_L = evB/c$, мы немедленно приходим к выражению (122). А это означает, что в внешних полях $B > B_{\lambda_B}$ электронное облако электрона на нижнем уровне $n = 1$ уже не будет сферически симметричным, а вытянется вдоль направления магнитного поля. При полях же $B \sim 10^{12}$ Гс, характерных для нейтронных звезд, атомы водорода будут выглядеть как тонкие иголки, вытянутые вдоль магнитного поля.

В приведенной здесь таблице мы собрали "лестницу" длин, энергий и электромагнитных полей, в которой некоторые клетки специально оставлены незаполненными. Читателю самому предлагается подумать, в каких случаях эти значения соответствуют масштабу реальных физических процессов.

Таблица 1: "Лестница" длин, энергий и электромагнитных полей

длина	формула	величина (см)	энергия	(эВ)	поле	(Гс)
r_e	$e^2/m_e c^2$	2.82×10^{-13}			$m_e^2 c^4/e^3$	6.0×10^{15}
λ	$\hbar/m_e c$	3.86×10^{-11}	$m_e c^2$	5.1×10^5	$m_e^2 c^3/e\hbar$	4.4×10^{13}
a_B	$\hbar^2/m_e e^2$	5.29×10^{-9}				
λ_B	$\hbar^3 c/m_e e^4$	7.14×10^{-7}			$e^3 m_e^2 c/\hbar^3$	2.3×10^9

4.4 Туман рассеивается

4.4.1 Квант действия

Прежде чем переходить к подведению первых итогов, полезно сделать еще одно историческое отступление. В частности, оно позволит глубже понять, почему в квантовом мире пришлось отказаться от понятия скорости (и связанной с ней понятия траектории), но не от понятия импульса, который, как мы видели, успешно использовался для объяснения чисто квантовых явлений.

За долгие годы, прошедшие после основополагающих работ Ньютона, в классической механике сформировались два основных направления. В одном из них, восходящем к Ж. Лагранжу (1736-1813), в качестве вторых (наряду с координатами x , y и z) переменных рассматривались координаты скорости частиц $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$ и $\dot{z} = dz/dt$. В другом, связанным с именем У. Гамильтона (1805-1865) — компоненты импульса $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$ и $p_z = m\dot{z}$.

Подчеркнем, что и лагранжев, и гамильтонов формализмы приводили в точности к тем же ответам, что давали решения уравнений ньютоновской динамики. Поэтому, на первый взгляд, они ничего не добавляли к теории Ньютона. Казалось, что это просто еще одна форма записи всем хорошо известных уравнений. Однако, это было, безусловно, не так. И в том, и в другом случае предпринималась попытка проникнуть более глубоко в самую суть физических процессов, а именно сформулировать более общие принципы природы. А путеводной звездой, которая всегда вела мыслителей по этой дороге, была идея внутреннего единства мира. Осознание же более глубинных связей, существующих в природе, как показала история физики, всегда позволяет потом делать новые предсказания и обобщения, которые невозможно было сделать в рамках более ограниченных теорий.

Неудивительно поэтому, что идея единства волновых и корпускулярных свойств возникла задолго до начала 20 века. Действительно, мы хорошо знаем, что, несмотря на волновую природу света, хорошим приближением при описании его распространения является приближение геометрической оптики. Оно хорошо работает в случае, когда

$\lambda \ll L$, где L — характерный размер. Иными словами, вместо волн удобно говорить о лучах света, т.е. о траектории движения.

Более того, оказалось, что и уравнения, описывающие распространение луча, оказались очень похожими на уравнения, описывающие движение частицы. Для этого частоту света нужно было рассматривать как функцию координат и волновых векторов

$$\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (127)$$

Тогда закон, описывающий распространение луча (т.е. уравнения, описывающие его движение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и изменение волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$) должны задаваться уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (128)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}. \quad (129)$$

Как мы видим, в таком приближении (которое и называется приближением геометрической оптики) луч движется вдоль направления групповой скорости (56). Что же касается соотношения (125), то после умножения на \hbar оно превращается в хорошо известное уравнение движения частицы $d\mathbf{p}/dt = -\partial U/\partial \mathbf{r}$. Действительно, энергия $E = \hbar\omega$ есть сумма кинетической энергии, зависящей лишь скорости частиц, и потенциальной энергии $U(\mathbf{r})$, зависящей от координат. А производная от потенциальной энергии $U(\mathbf{r})$, как известно, и есть сила, действующая на тело. Как мы видим, в некоторых случаях распространение волн может быть описано в точности так же, как и распространение частиц.

С другой стороны, еще в 17 веке П. Ферма (1601-1665) сформулировал принцип, согласно которому траектория распространения света между двумя пространственными точками соответствует минимальному времени распространения сигнала. В вакууме такими траекториями будут прямые линии, соединяющие начальную и конечную точки траектории. Если же луч света пересекает границу двух сред, в которых скорости распространения отличаются друг от друга, то происходит всем хорошо известное явление преломления света. При этом величина излома оказывается в точности такой, что, проигрывая на длине траектории, луч света проходит весь путь между начальной и конечной точками за кратчайшее время.

В дальнейшем идея о том, что на реальной траектории тел некоторая величина должна принимать наименьшее из возможных значений, была обобщена П.Л.М. де Мопертью (1698-1759), Л. Эйлером (1707-1783) и Ж.Л. Лагранжем на все остальные физические явления и стала одной из ключевых идей теоретической физики. Тем самым, был сформулирован общий рецепт построения теории, известный как принцип наименьшего действия. Для механики эта программа и была завершена Гамильтоном. В его подходе рассматривалась уже не траектория отдельной частицы, а целый пучок близких траекторий, вдоль которых двигались бы частицы, имеющие различные начальные условия. И подобно тому, как в волновой физике направление распространения волны связывалось с производной фазы $\Phi(x, t)$ (см. формулу 50), в теории Гамильтона была введена аналогичная функция — функция действия $S(\mathbf{r}, t)$. При этом импульс частиц должен был определяться из соотношения

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad (130)$$

т.е. из соотношения, которое по внешнему виду совпадает с волновым соотношением (51).

Следовательно, в подходе Гамильтона поверхности равной величины действия S оказывались полностью эквивалентными поверхностям равной "фазы" в волновых процессах. Т.е. в этом подходе движение частиц описывалось подобно распространению волн. Вспоминая теперь связь $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ между импульсом \mathbf{p} и волновым вектором \mathbf{k} , а также сравнивая выражения (51) и (126), мы приходим окончательно к соотношению

$$\Phi = \frac{S}{\hbar}. \quad (131)$$

которое и связывает классическую характеристику частицы, т.е. действие, с квантовой характеристикой, т.е. с фазой волны.

Что же касается принципа наименьшего действия, то согласно ему классическая частица будет двигаться по такой траектории, вдоль которой изменение величины S будет наименьшим. Из соотношения (126) видно, что для вычисления S нужно просуммировать вдоль траектории приращения $\delta S = \mathbf{p} d\mathbf{r}$. В частности, для случая движения по окружности имеем просто

$$S = 2\pi r p_\varphi. \quad (132)$$

В настоящее время принцип наименьшего действия представляет собой один из фундаментальных подходов, позволяющих описывать практически все явления, происходящие в природе. Напомним, что именно так случилось, например, и с законом сохранения энергии. Впервые он был сформулирован для механических процессов, но потом стало ясно, что это есть основополагающий принцип естествознания, справедливый для всех явлений природы и связанный с независимостью любых процессов от времени. Соответственно, А. Эйнштейн и Д. Гильберт (1862-1943) в ходе многолетних мучительных раздумий поняли, что гравитацию нельзя ввести, подобо электромагнетизму, как некоторое материальное поле, поскольку гравитация исчезает при переходе в свободно падающую систему отсчета. Принцип же наименьшего действия оказался более универсальным. Оказалось, что последовательная теория (которую мы теперь знаем как общая теория относительности) может быть построена, если в качестве полного действия, характеризующего систему, рассмотреть простую сумму действий вещества (выражение для него было уже хорошо известно) и действия гравитационного поля.

Как вы уже, наверное, догадались, размерность действия и постоянной Планка оказываются одинаковыми. Тогда становится ясно, что на самом деле глубинное значение постоянной Планка есть квант действия. Иными словами, в микромире возможны лишь процессы, для которых действие S есть целое кратное величины \hbar :

$$S = n\hbar = 2\pi\hbar n. \quad (133)$$

В итоге, в частном случае для круговых орбит мы вновь приходим к правилу квантования Бора (34). Как легко проверить, это условие в точности соответствует и рассмотренной выше задаче об уровнях энергии частицы в потенциальной яме с бесконечными стенками, когда $S = 2Lp$. В случае же гладкого потенциала $U(x)$ необходимо специальное рассмотрение, которое приводит к т.н. правилу квантования Бора-Зоммерфельда

$$S = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (134)$$

Действие же классических систем всегда настолько больше постоянной Планка, что обнаружить дискретность этой величины не представляется возможным.

4.4.2 Классический предел

Последнее обстоятельство наводит на мысль, что при $S \gg \hbar$ результаты квантовой механики должны приближаться к результатам, которые давала бы механика классическая. Этот принцип и был сформулирован Н. Бором как принцип соответствия. В действительности, это утверждение было частным случаем более общего принципа, согласно которому любая новая научная теория при наличии старой, хорошо проверенной теории должна находиться с ней не в противоречии, а давать те же следствия в некотором предельном приближении (частном случае). Так в специальной теории относительности в пределе малых скоростей $v \ll c$ получаются те же результаты, что и в классической механике. А общая теория относительности совпадает с классической теорией тяготения Ньютона при малых скоростях $v \ll c$ и при малых значениях гравитационного потенциала $\varphi_g/c^2 \ll 1$.

В квантовой же механике принципом соответствия называется утверждение о том, что поведение квантовомеханической системы становится классическим в пределе больших квантовых чисел n . В более же общей формулировке, как мы видели, условием перехода к классическому приближению будет большое значение действия $S \gg \hbar$.

В качестве иллюстрации, проверим выполнение принципа соответствия на примере атома водорода. Для этого определим частоту перехода $\omega = (T_{n+1} - T_n)/\hbar$ с уровня $n + 1$ на уровень n , когда энергии термов T_n даются соотношением (34). При больших n

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \approx \frac{2}{n^3}, \quad (135)$$

так что соответствующая частота может быть записана в виде

$$\omega \approx \frac{m_e e^4}{\hbar^3} \frac{1}{n^3}. \quad (136)$$

В результате, как легко проверить, в пределе $n \rightarrow \infty$ частота излученного фотона в точности равна классической частоте вращения электрона по круговой орбите радиуса

$$r_n = n^2 a_B. \quad (137)$$

Но именно на такой частоте и должно происходить излучение в классической теории электромагнетизма.

С другой стороны, рассмотренный выше пример потенциальной ямы с бесконечными стенками показывает, что число n соответствует количеству нулей волновой функции $\psi(x)$. Поэтому при очень больших n волновая функция становится все более и более похожей на гармоническую волну, в которой волновой вектор \mathbf{k} (а, значит, и импульс \mathbf{p}) слабо меняются в пространстве. А это и означает, что волновая функция ψ правильно описывает свободно распространяющуюся частицу.

4.4.3 Первые итоги

Подведем итоги. Разобранные выше примеры показывают, что свойства микромира (а критерием квантовых явлений, как мы видели, будет то, что произведение соответствующих масштабов и импульсов сравнимо по величине с постоянной Планка \hbar) кардинальным образом отличаются от привычных нам классических свойств. Волновая природа микроскопических явлений не позволяет говорить ни о траектории частиц, ни об однозначном предсказании результатов опыта. Напомним, что если бы задача была классической (например, в случае шарика в коробке с идеально упругими стенками), то речь бы шла о периодическом движении, при котором в каждые из половины периода частица движется с постоянной скоростью. В квантовой же механике, когда произведение размера потенциальной ямы L и импульса частицы p близко к \hbar , говорить о траектории уже невозможно. В частности, неопределенность в импульсе частицы будет такова, что вообще нельзя будет определить, в какую сторону она движется. Поэтому в таком случае действительно более естественно говорить о состоянии частицы с определенной энергией и обсуждать лишь вероятности перехода между этими состояниями.

Надо сказать, что несмотря на прекрасное согласие предсказаний теории с наблюдениями, вероятностные свойства квантовой механики были приняты не сразу и далеко не всеми. Эйнштейн до конца жизни был уверен, что "Бог не играет в кости". Действительно, квантовая механика прекрасно описывает статистические параметры, когда понятие вероятности хорошо определено благодаря наличию ансамбля, т.е. большого числа повторений эксперимента или же большого числа частиц, участвующих в процессе. Именно так

— статистически — легче всего понять и соотношение неопределенностей Гейзенберга. Для большого количества частиц, участвующих в эксперименте, их среднеквадратичные отклонения будут удовлетворять соотношению (60). Однако уравнения квантовой механики ничего не говорят, например, о том, как фотон, волновая функция которого ”размазана” в очень большом объеме, мгновенно поглощается атомом, размер которого исчезающе мал. Одним из выходов из положения могла дать, например, т.н. теория скрытых параметров. Мы подробно рассмотрим этот вопрос в следующей Главе.

Отметим, наконец, что малость постоянной Планка, благодаря чему квантовые эффекты в окружающем нас мире, казалось бы, всегда пренебрежимо малы, на самом деле обманчива. Конечно, сама величина действия S окружающих нас явлений всегда неизмеримо больше постоянной Планка \hbar . Вместе с тем, как мы видели, постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$ (112) содержит постоянную Планка в знаменателе. Если бы постоянная Планка была на два порядка меньше, то само существование атомов стало бы невозможным, хотя бы потому, что, как мы видели, скорость частиц на нижнем уровне в атоме водорода должна была бы превысить скорость света. Поэтому на атомных масштабах квантовые эффекты на самом деле являются сильными.

5 Квантовая истина

5.1 Спин

5.1.1 Внутренние степени свободы

Как уже говорилось, элементарные частицы обладают еще одним удивительным свойством. Обычно говорят, что оно связано с их собственным моментом импульса, т.е. с вращением. Действительно, во многих физических проявлениях так оно и есть, и поэтому это свойство получило название спина (по английски *spin* и есть вращение). Однако, как будет показано ниже, это свойство в действительности не связано с материальным вращением. Его природа оказывается гораздо глубже и, главное, не имеет аналога в классической физике.

Прежде всего, подобно другим квантовым свойствам, как момент импульса, так и магнитный момент частиц может принимать лишь дискретный набор значений. Это было убедительно показано О. Штерном (1888-1969, Нобелевская премия 1943 г.) и В. Герлахом (1889-1979) в 1921 году. Их опыт состоял в следующем. Пучок атомов серебра пропустили через область с сильным неоднородным магнитным полем, создаваемым мощным постоянным магнитом. Как уже отмечалось в разделе 3.3.3, магнитный момент μ в магнитном поле \mathbf{B} обладает дополнительной потенциальной энергией взаимодействия $U = -\mu\mathbf{B}$. Поэтому если частица обладает собственным магнитным моментом, то при прохождении через область, занятую сильным неоднородным магнитным полем, на нее должна действовать сила $F = \mu_z dB_z/dz$, направленная в сторону уменьшения величины U . Т.е. сила взаимодействия определяется как раз проекцией магнитного момента μ_z на направление магнитного поля (ось z).

Ясно, что для классических частиц, у которых проекция магнитного момента может быть произвольной, угол отклонения должен быть заключен в широких пределах. В частности, для частицы, у которой магнитный момент перпендикулярен магнитному полю, угол отклонения вообще будет близок к нулю. Поэтому если предположить, что магнитные моменты у падающих атомов были ориентированы случайно, то тогда на ре-

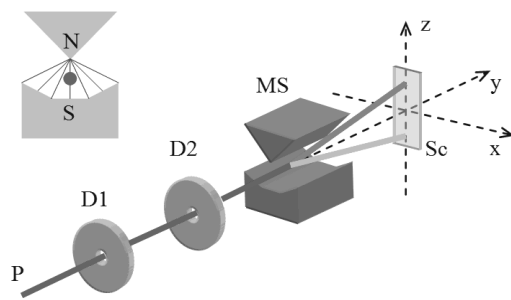


Рис. 12: Схема опыта Штерна и Герлаха

гистрирующей пластинке должна была проявиться размытая полоса.

С другой стороны, согласно квантовой механике, магнитное поле, отклоняющее частицы, нужно рассматривать как измерительный прибор, определяющий проекцию магнитного момента частиц. А эта проекция, как можно было предположить, имея уже достаточный опыт исследования квантовых систем, могла принимать лишь дискретный набор значений. И действительно, как показано на Рис. 12, на регистрирующей пластинке образовались две достаточно четкие узкие полосы, что свидетельствовало в пользу того, что магнитные моменты атомов вдоль выделенного направления принимали лишь два определенных значения $\pm\mu$. Позднее с аналогичными результатами были проделаны опыты для пучков атомов других металлов, а также пучков протонов и электронов.

Что же получается? При прохождении через магнитное поле неполяризованного пучка частиц (почему авторы были уверены в этом, нам сейчас неважно) магнитные моменты атомов удивительным образом выстраивались либо по, либо против поля. Причем проекция момента принимала лишь два значения, отличающиеся знаком. Осмысление этого свойства частиц заняло долгих четыре года. Наблюдаемую двузначность никак не удавалось понять с точки зрения классической физики. Лишь в 1925 году Д. Уленбек (1900-1988) и С. Гаудсмит (1902-1978) ввели в физику понятие спина, отражающего неизвестное до сих пор свойство элементарных частиц. При этом они основывались не только на результатах опыта Штерна-Герлаха, но и на анализе спектроскопических данных, где подобная двузначность (расщепление атомных уровней на два подуровня) также была известна. В итоге, они предложили рассматривать электрон как вращающийся волчок,

обладающий собственным механическим моментом, равным $\hbar/2$, и собственным магнитным моментом, равным магнетону Бора.

Надо сказать, что идея о том, что электрон может обладать собственным угловым моментом, стала обсуждаться сразу после того, как Резерфорд предложил свою планетарную модель атома. Раз планеты вращаются вокруг своей оси, то почему бы и электрону не приписать подобное свойство? Подобные идеи возникали постоянно, однако они не были сформулированы достаточно четко. Так, еще в 1921 году А. Комптон, пытаясь объяснить магнитные свойства вещества, высказал мысль об электроне, вращающемся подобно миниатюрному гироскопу. Позже В. Паули (1900-1958) также был вынужден приписать электрону двужначность, не описываемую классически. Схожие мысли высказывался не только для электрона, но и для фотона и атомного ядра. Поэтому определить приоритет в вопросе открытия спина оказалось невозможно. По-видимому, это и стало основной причиной того, что за открытие спина Нобелевской премии присуждено не было.

В начале 1925 года Р. Крониг (1904-1995) также предположил, что наблюдаемую двужначность можно объяснить вращением электрона вокруг оси, однако вскоре и он столкнулся с серьезными трудностями. Действительно, как мы видели, в качестве характерного размера элементарной частицы следует выбрать комптоновскую длину $\lambda = \hbar/mc$. Поэтому для того, чтобы собственный момент импульса такой частицы был равен \hbar , скорость на поверхности частицы (независимо от ее массы!) должна быть близка к скорости света. Уже отсюда можно было сделать вывод, что спин электрона — не только чисто квантовое, но и релятивистское свойство. Поэтому, в частности, уравнение Шредингера (86) никакой информации о спине не содержит. Однако расчет, выполненный на основе классической электродинамики, показывал, что скорость должна была быть даже больше скорости света. Поэтому Крониг был вынужден отказаться от своей идеи.

Уленбек и Гаудсмит также попытались связать наблюдаемую двужначность с вращением электрона вокруг своей оси, и естественно, столкнулись с теми же трудностями, что и Крониг. Тем не менее, они сообщили о своей гипотезе своему учителю П. Эренфесту

(1880-1933). Эренфесту эта идея понравилась, и он предложил им написать статью и показать ее Х. Лоренцу. Лоренц (в который уже раз!) пришел к тем же нелепым с точки зрения классической электродинамики выводам, так что Уленбек и Гаудсмит решили свою статью не публиковать. Однако было поздно: Эренфест уже отослал ее в печать. По этому поводу он заметил: "Вы оба достаточно молоды, чтобы позволить себе сделать одну глупость!"

Появление статьи Уленбека и Гаудсмита вызвало бурное обсуждение. Поначалу отношение к спину было весьма скептическим. Решающей оказалась позиция Н. Бора, который с воодушевлением воспринял появление этой гипотезы, открывавшей новые возможности для описания атома. Окончательно же правильность идеи о спине стала ясна лишь весной 1926 года, когда расчеты т.н. спин-орбитального взаимодействия⁷ с учетом релятивистских эффектов позволили количественно объяснить тонкую структуру спектров.

Тем не менее, нужно еще раз подчеркнуть, что спин, проявления которого во многом сходны со свойствами вращающегося волчка, на самом деле не связан ни с вращением, ни с каким либо другим собственным движением частиц. На примере спина человечество столкнулось с еще одним чисто квантовым свойством, не имеющим аналогов в классической физике. Теперь, по прошествии многих лет, это свойство связывают с существованием внутренних степеней свободы у элементарных частиц. Ниже мы постараемся понять, что означают эти слова. Здесь же отметим, что существование дополнительных степеней свободы приводит к тому, что в атомах более тяжелых элементов уровни энергии электронов устроены более сложно, чем в атоме водорода. Поэтому помимо главного квантового числа n , необходимо ввести еще три квантовых числа, определяющих их состояние. Однако подробный анализ подобных эффектов выходит за рамки нашего рассмотрения. Поэтому мы в дальнейшем в большинстве случаев будем рассматривать лишь атом водорода, который и будем называть атомом Бора.

⁷Так называют взаимодействие дайжущейся частицы со своим собственным магнитным моментом.

5.1.2 Угловой момент в квантовой механике

Итак, как прямые опыты, проведенные уже в двадцатых годах, так и теоретические соображения, которые были выдвинуты на основе уже известных фактов, однозначно свидетельствовали в пользу того, что у электрона действительно есть дополнительные степени свободы, которые можно было бы связать с его собственным моментом количества движения. Поэтому для прояснения природы спина удобно начать с общих свойств, которые связаны с моментом импульса частиц.

Напомним, что момент импульса — это один из трех основных интегралов движения. Полный момент импульса замкнутой системы должен сохраняться во времени. Другими хорошо известными интегралами являются полная энергия системы и ее импульс. При этом сохранение энергии, как было окончательно понято лишь в начале 20 века, связано просто с инвариантностью времени — все физические процессы должны происходить одинаково независимо от того, в какой момент времени мы за ними наблюдаем. Соответственно, закон сохранения импульса отражает тот факт, что законы физики не изменяются при параллельном переносе системы координат. Сохранение же момента импульса естественно связать с независимостью законов физики от поворота системы координат. Поэтому нашей первой задачей будет, хотя бы вкратце, понять основные свойства вращений в трехмерном пространстве. Как мы увидим, здесь нас ожидают самые неожиданные открытия.

Прежде всего, необходимо отметить, что согласно квантовой механике у частицы может быть определена лишь проекция момента импульса на одну из осей (а также квадрат длины вектора момента импульса, см. ниже). Действительно, если мы хотим определить проекцию момента импульса \mathbf{l} на ось z , то для этого нам нужно знать радиальную координату r и азимутальный импульс p_φ ⁸. Но согласно принципу неопределенности Гейзенберга, при этом мы теряем информацию о радиальном импульсе p_r и угловой координате φ . А это и означает, что проекции момента импульса частицы на оси x и y становятся неопределенными. Поэтому имеет смысл обсудить проекцию момента лишь на одну ось,

⁸На языке векторной алгебры следует записать $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

скажем, ось z . Здесь, правда, возникает вопрос, как происходит выбор того направления, вдоль которого момент импульса оказывается определенным. Ответ на него может быть получен лишь после того, как мы проясним для себя, что представляет собой процесс измерения в квантовой механике. Это будет сделано в разделе 5.3.

Итак, обсудим вопрос о том, как волновая функция электронов в атоме зависит от углов θ и φ в сферической системе координат, задаваемой направлением оси z (угол $0 < \theta < \pi$ отсчитывается от оси z , а угол $0 < \varphi < 2\pi$ — от оси x). Т.е. сначала обсудим не спиновые свойства электронов, а более понятные свойства, связанные с их собственным орбитальным моментом. Начнем с того, что, как показано в Приложении 8.7, в простейшем случае атома водорода решение стационарного уравнения Шредингера для волновой функции $\psi(r, \theta, \varphi)$ (квадрат которой, как мы помним, определяет вероятность найти электрон в данной точке пространства) может быть представлено в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_r(r)\psi(\theta, \varphi). \quad (138)$$

Наша задача состоит в том, чтобы понять, как должна быть определена угловая часть волновой функции, описывающей то же пространственное распределение электрона, но записанная в другой системе координат, в которой углы θ' и φ' отсчитываются относительно других осей x' , y' и z' .

Самый простой случай — это случай сферически симметричного распределения, когда волновая функция $\psi(\theta, \varphi) = \text{const}$. Т.е. волновая функция на любом расстоянии от начала координат вообще не зависит от углов θ и φ . При этом орбитальный момент импульса электрона, естественно, будет равен нулю (постоянная амплитуда волновой функции соответствует полному штилю на море, а, значит, и отсутствию движения), а полная волновая функция в новых координатах совпадает со старой

$$\Psi(\theta, \varphi) = \Psi(\theta', \varphi') = \mathcal{C}_0. \quad (139)$$

Иными словами, нам нужна всего одна величина — константа \mathcal{C}_0 — чтобы описывать угловые свойства частицы с орбитальным моментом равным нулю. Это и есть хорошо известная из школьного курса химии s -орбиталь. Поскольку же полная вероятность об-

наружить частицу (которая в нашем случае есть просто произведение квадрата волновой функции $|Y_0|^2$ на полную угловую площадь сферы 4π) должна быть равна единице, получаем окончательно

$$Y_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (140)$$

Пусть теперь волновая функция зависит от угла φ . Понятно, что самая простая зависимость — это зависимость $\psi(\theta, \varphi) \propto \cos \varphi$. Однако, как мы видели, такая функция будет описывать стоячую, а не бегущую волну. Вспомнивая теперь, что полная волновая функция должна зависеть еще и от времени t , получаем, что для волны, бегущей в направлении положительных углов φ , волновая функция будет иметь вид

$$\Psi_1^{(1)}(\theta, \varphi, t) = \Psi_0 \sin \theta \cos(\varphi - \omega t + \varphi_0). \quad (141)$$

Здесь Ψ_0 — некоторая константа, которую мы определим чуть позже, φ_0 — произвольная фаза, а частота ω пропорциональна энергии частицы (значение верхних и нижних индексов будет прояснена чуть ниже). Причина появления множителя $\sin \theta$ здесь вполне понятна. Если бы в выражении (137) этого множителя не было, то вблизи полюсов волновая функция имела бы особенность (иными словами, значение волновой функции на самом полюсе зависило бы от того, вдоль какого меридиана мы бы к нему приближались). Впрочем, выбор функции $\sin \theta \cos \varphi$ не случаен по другой простой причине: как показано в Приложении 8.7, она удовлетворяет уравнению Шредингера.

Теперь, внимание. Мы готовы ответить на вопрос, какой проекции момента импульса соответствуют волновая функция (137). Для этого определим волновой вектор k_φ , соответствующий функции $\Psi_1^{(1)}(\theta, \varphi, t)$. Поскольку длина волны λ на каждой широте θ есть просто длина окружности $2\pi r \sin \theta$, получаем немедленно

$$k_\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (142)$$

Переносим теперь множитель $r \sin \theta$ в левую часть⁹ и умножая обе части уравнения на \hbar , мы немедленно получаем, что проекция момента импульса $(r \sin \theta) \cdot p_\varphi = (r \sin \theta) \cdot \hbar k_\varphi$ на

⁹Именно для этого в (137) и был введен дополнительный фактор $\sin \theta$.

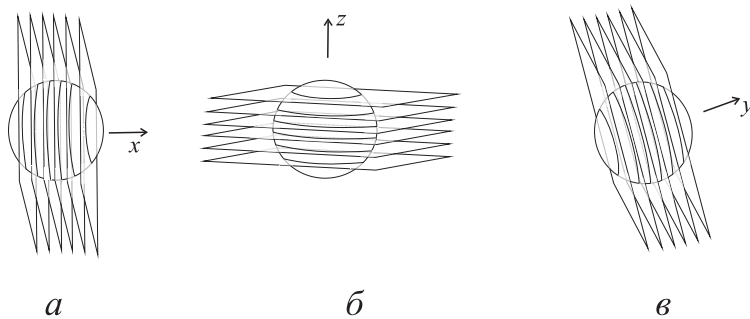


Рис. 13: Волновые функции, соответствующие различным проекциям момента импульса на ось z

ось z , соответствующая волновой функции $\Psi_1^{(1)}$, есть \hbar . Ясно, что для полноты картины, мы должны рассмотреть и волну, бегущую в противоположном направлении

$$\Psi_1^{(-1)}(\theta, \varphi, t) = \Psi_0 \sin \theta \cos(\varphi + \omega t + \varphi_0). \quad (143)$$

Для этой волновой функции проекция момента импульса на ось z будет равна $-\hbar$. Поэтому здесь и далее в наших обозначениях величин Ψ нижний индекс будет соответствовать полному моменту импульса (в единицах \hbar), а верхний — проекции момента импульса на ось z .

Чтобы сделать следующий шаг, воспользуемся принципом линейности волн и выделим лишь пространственную часть волновых функций (137) и (139). Поскольку

$$\cos(\varphi \pm \omega t) = \cos \varphi \cos \omega t \mp \sin \varphi \sin \omega t, \quad (144)$$

введем функции $\mathcal{Y}_1^{(c)} = \sin \theta \cos \varphi$ (Рис. 13а) и $\mathcal{Y}_1^{(s)} = \sin \theta \sin \varphi$ (Рис. 13б). Как легко проверить, различные значения функций $\mathcal{Y}_1^{(c)}$ и $\mathcal{Y}_1^{(s)}$ соответствуют просто различным линиям пересечения единичной сферы плоскостями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$. Это следует из того, что в полярных координатах $x = r \sin \theta \cos \varphi$ и $y = r \sin \theta \sin \varphi$.

Вспомним теперь, что наша основная задача — определить, как меняются волновые функции при поворотах системы координат. Уже из рассмотренного выше примера ясно, что функции $\mathcal{Y}_1^{(c)}$ и $\mathcal{Y}_1^{(s)}$ будут переходить друг в друга при повороте осей на 90° вокруг оси z . Кроме того, понятно, что для полного описания нам понадобится еще одна функция,

соответствующая линиям пересечения единичной сферы плоскостями $z = \text{const}$ (Рис. 136).

Поскольку $z = r \cos \theta$, получаем сразу

$$\mathcal{Y}_0^{(0)} = \cos \theta. \quad (145)$$

В эту функцию должны превратиться функции $\mathcal{Y}_1^{(c)}$ и $\mathcal{Y}_1^{(s)}$ после поворотов на 90° вокруг осей x и y . При этом волновая функция $\Psi_1^{(0)} = \Psi_0 \cos \theta$ будет соответствовать стоячей волне — она вообще не зависит от угла φ . Поэтому z -компонента момента импульса частицы, имеющего волновую функцию $\Psi_1^{(0)}$, будет равна нулю.

Таким образом, мы приходим к важнейшему выводу, что проекция момента импульса на ось z может принимать лишь дискретный набор значений. В рассмотренном здесь случае — лишь значения $l_z = -\hbar$, $l_z = 0$ и $l_z = \hbar$. Фактически, это происходит по той же причине, по которой возникает дискретность уровней энергии в атоме Бора: на круговой орбите должно укладываться целое число длин волн. При этом ”квантом” момента импульса вновь оказывается постоянная Планка \hbar .

Как станет ясно чуть позже, выбор трех функций

$$Y_1^{(c)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta \cos \varphi, \quad (146)$$

$$Y_1^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \cos \theta, \quad (147)$$

$$Y_1^{(s)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta \sin \varphi. \quad (148)$$

для описания частицы с моментом импульса \hbar конечно же, не был случайным. Дело в том, что это известные во многих областях физики и математики сферические функции. При этом нижний индекс $l = 1$ называется порядком сферической функции, а нормировка выбрана таким образом, чтобы интеграл по поверхности единичной сферы от их квадратов был бы равен единице

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |Y_1|^2 d\varphi = 1. \quad (149)$$

Действительно, имеем, например,

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_1^{(s)}|^2 = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = 1. \quad (150)$$

Как уже отмечалось (см. Приложение 8.7), именно такие зависимости от углов θ и φ возникают при решении уравнения Шредингера, описывающего состояние электрона с полным моментом импульса \hbar в поле ядра. Но для того, чтобы окончательно разобраться в том, почему эти функции описывают частицу с одной и той же величиной момента импульса, но с различной проекцией на ось z , нам, как уже говорилось, необходимо рассмотреть закон преобразования волновых функций при поворотах системы координат.

5.1.3 Вращения в трехмерном пространстве

Прежде всего, обсудим вопрос о том, как при повороте координатных осей будут преобразовываться три сферические функции Y_l (142)–(144). Т.е. сначала рассмотрим вопрос, который не имеет прямого отношения к квантовой механике, а связан лишь со свойствами нашего трехмерного пространства. Ответ на этот вопрос дает сферическая тригонометрия.

Сферическая тригонометрия — бедная родственница хорошо нам знакомой тригонометрии. На ее изучение в курсе обычной школы никогда не хватает времени. А ведь в ее рамках удастся сформулировать полный набор теорем, соответствующий обычным плоским фигурам. Например, теоремы синусов и косинусов для треугольников. Только в сферической тригонометрии не только углы, но и стороны треугольников измеряются в углах. Вместе с тем, сферическая тригонометрия широко применяется в астрономии, поскольку во многих случаях мы вынуждены ограничиться угловыми координатами наблюдаемых объектов. Поскольку же в астрономии удобно пользоваться различными системами отсчета, связанными с различным выбором экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ (плоскость земного экватора, плоскость эклиптики, галактическая плоскость), то постоянно встает вопрос о переводе координат объекта из одной системы в другую.

Мы в дальнейшем в качестве примера будем постоянно рассматривать преобразование $(\theta, \varphi) \rightarrow (\theta', \varphi')$ при повороте координатных осей против часовой стрелки на угол Θ вокруг оси x . В этом случае новые и старые координаты некоторой точки будут связаны

соотношениями

$$x' = x, \quad (151)$$

$$y' = y \cos \Theta + z \sin \Theta, \quad (152)$$

$$z' = -y \sin \Theta + z \cos \Theta. \quad (153)$$

Соответственно, полярные координаты (θ, φ) (и (θ', φ')) будут преобразовываться по формулам

$$\begin{aligned} \sin \theta' \cos \varphi' &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \cos \theta' &= \cos \theta \cos \Theta - \sin \theta \sin \varphi \sin \Theta, \\ \sin \theta' \sin \varphi' &= \cos \theta \sin \Theta + \sin \theta \sin \varphi \cos \Theta. \end{aligned} \quad (154)$$

Напомним, что при повороте осей координатной системы координаты векторных величин изменяются по вполне определенному закону. В частности, при повороте на угол Θ вокруг оси x координаты любого вектора A_x , A_y и A_z в одной системе координат и его координаты $A_{x'}$, $A_{y'}$ и $A_{z'}$ в другой системе должны быть связаны соотношениями

$$A_{x'} = A_x, \quad (155)$$

$$A_{y'} = A_y \cos \Theta + A_z \sin \Theta, \quad (156)$$

$$A_{z'} = -A_y \sin \Theta + A_z \cos \Theta. \quad (157)$$

Именно должны, так как в противном случае объект \mathbf{A} , задаваемый его тремя координатами, вообще нельзя считать вектором. Т.е. соотношения (151)–(153) есть определение, а не свойство вектора \mathbf{A} .

В дальнейшем нам будет удобно записывать линейные преобразования, подобные (151)–(153), в виде таблицы (матрицы) коэффициентов

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (158)$$

Иными словами, в данном случае нужно мысленно дописать ко всем коэффициентам, стоящим в первом столбце, сомножитель A_x , ко второму — сомножитель A_y , а к третьему

— сомножитель A_z . Тогда сумма произведений, стоящих в верхней строчке, определит нам величину $A_{x'}$ (151), во второй строчке — величину $A_{y'}$ (152), а в нижней строчке — величину $A_{z'}$ (153). Ниже мы постоянно будем использовать такую упрощенную форму записи.

Воспользовавшись теперь законом преобразования углов (150), а также определениями сферических функций $Y_1^{(c)} \propto \sin \theta \cos \varphi$, $Y_1^{(0)} \propto \cos \theta$ и $Y_1^{(s)} \propto \sin \theta \sin \varphi$, мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} (Y_1^{(c)})' &= Y_1^{(c)}, \\ (Y_1^{(0)})' &= Y_1^{(0)} \cos \Theta - Y_1^{(s)} \sin \Theta, \\ (Y_1^{(s)})' &= Y_1^{(0)} \sin \Theta + Y_1^{(s)} \cos \Theta, \end{aligned} \quad (159)$$

где штрих означает, что аргументом здесь будут полярные координаты θ' и φ' в "штрихованной" системе координат. Как мы видим, сферические функции в одной системе координат выражаются через те же самые сферические функции, но уже определенные для другой координатной системы. При этом матрица поворота для величин $Y_1^{(c)}$, $Y_1^{(0)}$ и $Y_1^{(s)}$ будет выглядеть как

$$(\Theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Таким образом, замечательным свойством трех функций $Y_1^{(c)}$, $Y_1^{(0)}$ и $Y_1^{(s)}$ является их полнота. Это означает, что если какая-нибудь функция $f(\theta, \varphi)$ может быть записана как их линейная комбинация

$$f(\theta, \varphi) = a_c Y_1^{(c)}(\theta, \varphi) + a_0 Y_1^{(0)}(\theta, \varphi) + a_s Y_1^{(s)}(\theta, \varphi) \quad (161)$$

с некоторыми коэффициентами a_c , a_0 и a_s , то в другой системе координат, в которой углы θ' и φ' отсчитываются уже от других осей, она по прежнему может быть представлена как сумма ТЕХ ЖЕ САМЫХ сферических функций, но уже новых углов θ' и φ'

$$f(\theta, \varphi) = a'_c Y_1^{(c)}(\theta', \varphi') + a'_0 Y_1^{(0)}(\theta', \varphi') + a'_s Y_1^{(s)}(\theta', \varphi') \quad (162)$$

с некоторыми другими коэффициентами a'_c , a'_0 и a'_s . Мы специально в качестве аргументов функции f оставили исходные углы θ и φ , чтобы подчеркнуть, что само распределение $f(\theta, \varphi)$ осталось неизменным.

Отметим, что сама возможность записать одно и то же угловое распределение $f(\theta, \varphi)$ через одинаковые функции $\sin \theta \cos \varphi$, $\cos \theta$ и $\sin \theta \sin \varphi$, в которых аргументы θ и φ , однако, могут отсчитываться от произвольно расположенных координатных осей, конечно же, совершенно неочевидна. Понятно, что далеко не любой набор функций будет удовлетворять этому условию. Замечательное же свойство сферических функций как раз и состоит в том, что они этому условию удовлетворяют.

Еще одно важнейшее свойство сферических функций состоит в их ортогональности. Для обычных векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} такое свойство件нятно: два вектора будут ортогональны друг другу, если их скалярное произведение

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (163)$$

равно нулю. Оказывается, что скалярное произведение можно ввести не только для векторов, но и для достаточно широкого класса функций. Например, для сферических функций их скалярное произведение по определению есть

$$(Y^{(a)} \cdot Y^{(b)}) = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(a)} Y^{(b)} d\varphi, \quad (164)$$

где $Y^{(a)}$ и $Y^{(b)}$ — две любые сферические функции. Как легко проверить, для любых разных сферических функций определенное таким образом скалярное произведение действительно равно нулю, а для одинаковых — единице. Фактически, такое свойство неявно используется и при определении скалярного произведения (159) обычных векторов

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (165)$$

и

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z, \quad (166)$$

поскольку все скалярные произведения различных ортов $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y)$, $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z)$ равны нулю, а одинаковых — единице.

В результате, мы приходим к важнейшему выводу, что сферические функции $Y_1^{(c)}$, $Y_1^{(0)}$ и $Y_1^{(s)}$ можно рассматривать как реальные базисные орты. Но тогда коэффициенты a_c , a_0 и a_s в выражениях (157) и (158) будут играть роль координат. Остается только понять, как они будут преобразовываться при поворотах координатной системы. Ответ же на этот вопрос может быть мгновенно получен, если сравнить соотношения (157) и (158) и воспользоваться законом преобразования (155) для сферических функций. В итоге, имеем

$$\begin{aligned} a'_c &= a_c, \\ a'_0 &= a_0 \cos \Theta + a_s \sin \Theta, \\ a'_s &= -a_0 \sin \Theta + a_s \cos \Theta. \end{aligned} \tag{167}$$

Таким образом, матрица поворота для коэффициентов a_c , a_0 и a_s в точности совпадает с матрицей (154), описывающей преобразования компонент векторов.

Внимательный читатель, наверное, уже догадался, что индекс $l = 1$ подразумевает, что существуют сферические функции и более высокого порядка. Для $l = 2$ таких функций оказывается пять

$$Y_2^{(2c)} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}} \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \tag{168}$$

$$Y_2^{(c)} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, \tag{169}$$

$$Y_2^{(0)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\pi}} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}, \tag{170}$$

$$Y_2^{(s)} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \tag{171}$$

$$Y_2^{(2s)} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}} \sin^2 \theta \sin 2\varphi. \tag{172}$$

Численные коэффициенты здесь вновь введены для того, чтобы скалярное произведение (160) одинаковых сферических функций, как и для $l = 1$, была равна единице. В общем же случае приходится вводить $2l + 1$ сферических функций порядка l . При этом для любого l они по-прежнему образуют полную ортогональную систему. Т.е. если в одной системе координат угловое распределение может быть представлено как линейная

комбинация $2l + 1$ сферических функций порядка l , то и в любой другой системе для описания того же самого углового распределения будет достаточно тех же $2l + 1$ сферических функций, определенных уже относительно повернутых координатных осей. На языке теории групп это означает, что наборы из трех функций Y_1 , пяти функций Y_2 и т.д. реализуют неприводимое представление группы всех вращений координатных осей в трехмерном пространстве.

5.1.4 Вращения и волновые функции

Вернемся теперь к вопросу о том, как будет зависеть волновая функция частицы при повороте координатных осей. Здесь необходимо отметить несколько важных моментов. Прежде всего, как мы уже поняли, волновая функция частицы, обладающая моментом импульса \hbar , должна быть представлена как сумма трех волн, соответствующих различным проекциям момента импульса. Лишь в этом случае мы сможем без потерь переходить от одной системы координат к другой, произвольным образом повернутой относительно первой. Поэтому если три введенные выше волновые функции $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_1^{(-1)}$, действительно описывают различные состояния частицы с моментом импульса \hbar , то ее полная волновая функция должна быть записана в виде¹⁰

$$\Psi_1(\theta, \varphi, t) = a_+ \Psi_1^{(1)}(\theta, \varphi, t) + a_0 \Psi_1^{(0)}(\theta, \varphi, t) + a_- \Psi_1^{(-1)}(\theta, \varphi, t). \quad (173)$$

Поскольку же, как уже много раз подчеркивалось, ключевым моментом здесь является независимость свойств от выбора системы координат, то при повороте осей волновая функция должна быть выражена через те же функции $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_1^{(-1)}$, в которых, однако, проекции момента импульса будут определяться уже относительно повернутой системы координат. Соответственно, будут другими и коэффициенты a :

$$\Psi_1(\theta', \varphi', t) = a'_+ \Psi_1^{(1)}(\theta', \varphi', t) + a'_0 \Psi_1^{(0)}(\theta', \varphi', t) + a'_- \Psi_1^{(-1)}(\theta', \varphi', t). \quad (174)$$

¹⁰На это соотношение можно посмотреть и с другой стороны. Поскольку уравнение Шредингера линейно, то любая линейная комбинация его решений также будет решением.

На первый взгляд, приведенные выше выражения не несут никакой новой информации по сравнению с соотношениями (157)–(158), выписанными для сферических функций. По прежнему ключевым моментом здесь является то, что волновые функции $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_1^{(-1)}$ образуют полную ортогональную систему. И подобно тому, как проекции вектора \mathbf{A} дают исчерпывающую информацию о самом векторе, для описания квантовой системы нам на самом деле достаточно знать лишь коэффициенты разложения a .

Однако здесь гораздо важнее подчеркнуть, что на этом примере может быть переброшен мостик к совершенно новому, квантовому языку описания, для которого главную роль играют уже не сами волновые функции, а коэффициенты a . Именно они будут определять вероятность того, что частица с моментом импульса \hbar будет зарегистрирована в состоянии с проекцией $+\hbar$, 0 или $-\hbar$ на некоторую выделенную ось. В итоге, как изначально и было сделано в матричной формулировке квантовой механики Гейзенберга, удастся полностью абстрагироваться от нашего трехмерного пространства и обсуждать лишь вероятности зарегистрировать частицу в данном состоянии. В рассматриваемом здесь примере — в состоянии с данной проекцией момента импульса.

Действительно, по своему смыслу волновые функции $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_1^{(-1)}$ описывают вероятность найти частицу в данной точке с угловыми координатами (θ, φ) , соответственно для состояния с проекцией момента импульса $+\hbar$, 0 или $-\hbar$. С другой стороны, для данного состояния полная вероятность обнаружить частицу равна единице. Поэтому квадраты каждой из волновых функций $|\Psi_1^{(1)}|^2$, $|\Psi_1^{(0)}|^2$ или $|\Psi_1^{(-1)}|^2$, проинтегрированные по всем углам (или, что то же самое, скалярное произведение двух одинаковых волновых функций) также должны быть равны единице. Но то же самое относится и к полной волновой функции $\Psi_1(\theta, \varphi, t)$, поскольку если известно, что момент импульса частицы есть \hbar , то при ее регистрации каким-либо измерительным прибором с вероятностью 100% выпадет одна из трех возможных проекций. Возводя теперь соотношение (169) в квадрат и вспоминая, что функции $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_1^{(-1)}$ образуют полную ортогональную систему (так что все перекрестные произведения дадут ноль, а квадраты — единицу), мы немедленно

приходим к соотношению

$$a_-^2 + a_0^2 + a_+^2 = 1, \quad (175)$$

и то же самое для штрихованных величин $(a'_-)^2$, $(a'_0)^2$ и $(a'_+)^2$. Следовательно, коэффициенты a с различными индексами (точнее, их квадраты) и будут описывать вероятность обнаружить частицу с данной проекцией момента импульса на ось z .

Таким образом, если нас не интересует форма электронного облака данного электрона, а лишь вопрос о том, в каком состоянии находится частица, то мы можем ограничиться обсуждением лишь величин a . Напомним, что в случае квантовой частицы одновременно определить все три проекции момента импульса мы не можем. Поэтому в квантовой механике вопрос ставится по другому: как при повороте осей изменятся амплитуды вероятностей a_- , a_0 и a_+ для того же состояния, но теперь уже в новой системе координат. Иными словами, каковы будут амплитуды a'_+ , a'_0 и a'_- , соответствующие уже повернутой системе координат. А на этот вопрос мы уже готовы ответить.

Рассмотрим прежде всего наиболее простой случай вращения системы координат вокруг оси z на угол Φ . Такой поворот соответствует преобразованию углов $\theta' \rightarrow \theta$ и $\varphi' \rightarrow \varphi + \Phi$. Понятно, что в этом случае волновая функция $\Psi_1^{(0)}$ вообще не изменится. Что же касается, например, функции $\Psi_1^{(1)}(\theta', \varphi', t) = \Psi_0 \sin \theta \cos(\varphi - \omega t + \Phi + \varphi_0)$, то, как мы видим, поворот вокруг оси z приводит лишь к фазовому сдвигу, не меняющему результат усреднения по времени. Поэтому усредненная по времени величина $[\Psi_1^{(1)}(\theta', \varphi', t)]^2$ будет в точности такой же, как и $[\Psi_1^{(1)}(\theta, \varphi, t)]^2$. Таким образом, поворот осей вокруг оси z не влияет на наблюдаемые свойства, и мы можем записать

$$(a_+)' = a_+; \quad (a_0)' = a_0; \quad (a_-)' = a_-. \quad (176)$$

Рассмотрим теперь преобразование $(\theta, \varphi) \rightarrow (\theta', \varphi')$ (150) при повороте координатных осей против часовой стрелки на угол Θ вокруг оси x . Как мы видели, в этом случае закон преобразования коэффициентов a_c , a_0 и a_s , стоящих перед сферическими функциями Y_1 , задается соотношениями (163). Такое преобразование, однако, есть еще только промежуточный результат, поскольку состояния с определенной проекцией момента импульса

описывают не сферические функции $Y_1^{(c)} \propto \sin \theta \cos \varphi$ и $Y_1^{(s)} \propto \sin \theta \sin \varphi$, а зависящие от времени функции $\Psi_1^{(1)} \propto \sin \theta \cos(\varphi - \omega t)$ и $\Psi_1^{(-1)} \propto \sin \theta \cos(\varphi + \omega t)$. Но поскольку эти функции есть линейные комбинации сферических функций

$$\Psi_1^{(1)} = Y_1^{(c)} \cos \omega t + Y_1^{(s)} \sin \omega t, \quad (177)$$

$$\Psi_1^{(-1)} = Y_1^{(c)} \cos \omega t - Y_1^{(s)} \sin \omega t, \quad (178)$$

задача решается достаточно просто. Вспоминая, что физический смысл имеют не сами волновые функции, а их квадраты, усредненные по времени, в соотношениях (173) и (174) можно заменить величины $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ на $1/\sqrt{2}$ (перекрестные же члены, как и раньше, при усреднении исчезают). А это, как легко проверить, приводит к следующим выражениям, связывающим стационарные волновые и сферические функции

$$\psi_1^{(1)} = \frac{Y_1^{(c)} + Y_1^{(s)}}{\sqrt{2}}, \quad (179)$$

$$\psi_1^{(-1)} = \frac{Y_1^{(c)} - Y_1^{(s)}}{\sqrt{2}}. \quad (180)$$

Соответственно, для коэффициентов разложения имеем

$$a_+ = \frac{a_c + a_s}{\sqrt{2}}, \quad (181)$$

$$a_- = \frac{a_c - a_s}{\sqrt{2}}. \quad (182)$$

В итоге, при повороте координатных осей на угол Θ вокруг оси x коэффициенты a'_+ , a'_0 и a'_- , определенные в новой системе, будут выражаться через коэффициенты a_+ , a_0 и a_- с помощью матрицы

$$(\Theta_{l=1}) = \begin{pmatrix} (1 + \cos \Theta)/2 & -\sin \Theta/\sqrt{2} & (1 - \cos \Theta)/2 \\ \sin \Theta/\sqrt{2} & \cos \Theta & -\sin \Theta/\sqrt{2} \\ (1 - \cos \Theta)/2 & \sin \Theta/\sqrt{2} & (1 + \cos \Theta)/2 \end{pmatrix}. \quad (183)$$

Например, как можно проверить прямой подстановкой,

$$a'_+ = \frac{(1 + \cos \Theta)}{2} a_+ - \frac{\sin \Theta}{\sqrt{2}} a_0 + \frac{(1 - \cos \Theta)}{2} a_-. \quad (184)$$

Напомним, что коэффициенты a с различными индексами (точнее, их квадраты) описывают вероятность обнаружить частицу в состоянии с данной проекцией момента импульса на ось z . Например, состояние с

$$\begin{aligned} a_+ &= 1, \\ a_0 &= 0, \\ a_- &= 0, \end{aligned} \tag{185}$$

т.е. состояние с проекцией момента импульса на ось z равным \hbar , в повернутой системе координат будет соответствовать состоянию со значениями

$$\begin{aligned} a'_+ &= \frac{1 + \cos \Theta}{2}, \\ a'_0 &= \frac{\sin \Theta}{\sqrt{2}}, \\ a'_- &= \frac{1 - \cos \Theta}{2}. \end{aligned} \tag{186}$$

В частности, при $\Theta = 90^\circ$ это состояние НЕ ЕСТЬ состояние с моментом импульса, повернутым на 90° по отношению к новой оси z' . При измерении проекции момента импульса на эту ось вероятность получить ноль есть лишь $(a'_0)^2 = 1/2$. С вероятностью $(a'_+)^2 = 1/4$ измеренная проекция по-прежнему будет равна $+\hbar$, а с вероятностью $1/4$ проекция будет равна $-\hbar$. Полная же вероятность, естественно, будет равна единице. Поскольку это условие должно быть выполнено для любого угла Θ , то, как легко проверить, единице будет равна сумма квадратов величин, стоящих в каждой строчке и в каждом столбце матрицы (179).

Посмотрим теперь, какие волновые функции нужно использовать, чтобы описать орбитальный момент импульса частицы $2\hbar$. Естественно предположить, что для этого нам понадобятся сферические функции порядка $l = 2$ (164)–(168). Появление сферических функций, пропорциональных $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$ здесь вполне понятно. Вычисляя вновь волновой вектор k_φ как $2\pi/\lambda$, где теперь на окружности $2\pi r$ укладывается две волны, мы немедленно получаем $r \cdot p_\varphi = r \cdot \hbar k_\varphi = 2\hbar$. Однако, как мы видели, при повороте координатных осей для определения волновой функции в новых координатах нам неизбежно

потребуется полный набор сферических функций.

В итоге, для описания частицы с моментом импульса $2\hbar$ необходимо ввести не три, а пять базисных функций. Они будут описывать состояния, соответствующие проекции момента импульса равные $2\hbar$, \hbar , 0 , $-\hbar$ и $-2\hbar$. Следовательно, близкая аналогия между векторами и компонентами разложения a имеет место лишь для момента импульса \hbar . В окончательном виде стационарные волновые функции, соответствующие различным проекциям момента импульса (верхний индекс) запишутся как

$$\psi_2^{(2)} = \frac{Y_2^{(2c)} + Y_2^{(2s)}}{\sqrt{2}}, \quad (187)$$

$$\psi_2^{(1)} = \frac{Y_2^{(c)} + Y_2^{(s)}}{\sqrt{2}}, \quad (188)$$

$$\psi_2^{(0)} = Y_2^{(0)}, \quad (189)$$

$$\psi_2^{(-1)} = \frac{Y_2^{(c)} - Y_2^{(s)}}{\sqrt{2}}, \quad (190)$$

$$\psi_2^{(-2)} = \frac{Y_2^{(2c)} - Y_2^{(2s)}}{\sqrt{2}}, \quad (191)$$

а матрица поворота, определяющая закон преобразования для коэффициентов a_{2+} , a_+ , a_0 , a_- и a_{2-} при повороте вокруг оси x на угол Θ , будет имеет вид

$$(\Theta_{l=2}) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\cos\Theta)^2}{4} & \frac{\sin\Theta(1-\cos\Theta)}{2} & -\frac{\sqrt{3}\sin^2\Theta}{2\sqrt{2}} & \frac{\sin\Theta(1+\cos\Theta)}{2} & \frac{(1-\cos\Theta)^2}{4} \\ -\frac{\sin\Theta(1-\cos\Theta)}{2} & \frac{2\cos^2\Theta+\cos\Theta-1}{2} & \frac{\sqrt{3}\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{2}} & -\frac{2\cos^2\Theta-\cos\Theta-1}{2} & \frac{\sin\Theta(1+\cos\Theta)}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}\sin^2\Theta}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{2}} & \frac{3\cos^2\Theta-1}{2} & \frac{\sqrt{3}\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}\sin^2\Theta}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin\Theta(1+\cos\Theta)}{2} & -\frac{2\cos^2\Theta-\cos\Theta-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{2}} & \frac{2\cos^2\Theta+\cos\Theta-1}{2} & \frac{\sin\Theta(1-\cos\Theta)}{2} \\ \frac{(1-\cos\Theta)^2}{4} & -\frac{\sin\Theta(1+\cos\Theta)}{2} & -\frac{\sqrt{3}\sin^2\Theta}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sin\Theta(1-\cos\Theta)}{2} & \frac{(1+\cos\Theta)^2}{4} \end{pmatrix} \quad (192)$$

Рассмотрим, например, состояние с проекцией момента импульса на ось z равным $2\hbar$. Для него следует положить $a_{2+} = 1$ и $a_+ = a_0 = a_- = a_{2-} = 0$. Но тогда, согласно (188), в повернутой системе координат этому состоянию будут соответствовать значения

$$\begin{aligned} a'_{2+} &= \frac{(1+\cos\Theta)^2}{4}, \\ a'_+ &= \frac{\sin\Theta(1-\cos\Theta)}{2}, \\ a'_0 &= -\frac{\sqrt{3}\sin^2\Theta}{2\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} a'_- &= \frac{\sin \Theta (1 + \cos \Theta)}{2}, \\ a'_{2-} &= \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{4}. \end{aligned}$$

В частности, при повороте на угол $\Theta = 90^\circ$ это состояние вновь НЕ БУДЕТ состоянием с моментом импульса, повернутым на 90° по отношению к новой оси z' . При измерении проекции момента импульса на эту ось вероятность получить ноль будет равна лишь $(a'_0)^2 = 3/8$. С вероятностью $(a'_{2+})^2 = 1/16$ измеренная проекция будет равна $2\hbar$ (и $-2\hbar$), а с вероятностью $1/4$ проекция будет равна \hbar или $-\hbar$.

Чтобы понять такой необычный результат, нам нужно сделать еще один шаг. Оказывается, что несмотря на то, что проекции момента импульса l_y и l_z на оси y и z оказываются неопределенными, квадрат полного момента импульса $\mathbf{l}^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$ будет иметь вполне определенную величину

$$\mathbf{l}^2 = l(l+1)\hbar^2. \quad (194)$$

В Приложении 8.7 эта формула выводится кватново-механически точно. Здесь же мы приведем другой, также строгий, но более элементарный вывод.

Прежде всего, как мы видели, $(2l+1)$ волновые функции, описывающиеся сферическими функциями порядка l , соответствуют $(2l+1)$ различным проекциям $m\hbar$ на ось z , где

$$m = -l, -(l-1), \dots, (l-1), l. \quad (195)$$

В частности, мы имеем три проекции для момента импульса \hbar и пять для момента импульса $2\hbar$. Воспользуемся теперь замечательным свойством, который следует из соотношений (182) и (189) — при случайном расположении в пространстве момента импульса \mathbf{l} при измерении его проекции l_z на ось z все значения $m\hbar$ оказываются равновероятными¹¹ (проверьте!). Значит, вероятность каждой из проекций будет равна $1/(2l+1)$. Поскольку же

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + l^2 = \frac{1}{6}l(l+1)(2l+1) \quad (196)$$

¹¹Усреднение по углам любой функции $f(\theta)$ производится по формуле $\langle f(\theta) \rangle = 1/2 \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta$.

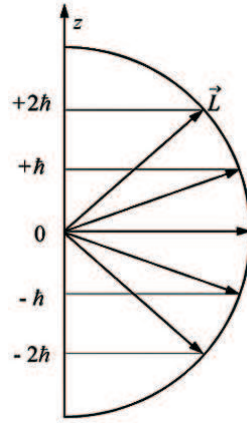


Рис. 14: "Прецессия" момента импульса \mathbf{l} вокруг оси z .

(доказывается по индукции), то среднее значение величины l_z^2 будет равно

$$\langle l_z^2 \rangle = 2 \frac{1}{2l+1} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + l^2) = \frac{1}{3} l(l+1). \quad (197)$$

Предполагая теперь, что при усреднении (а не при единичном измерении!) средние значения квадратов проекций $\langle l_x^2 \rangle$ и $\langle l_y^2 \rangle$ не должны отличаться от $\langle l_z^2 \rangle$, мы возвращаемся к соотношению $\mathbf{l}^2 = l(l+1)\hbar^2$.

Значит, на самом деле длина вектора момента импульса у всех состояний, описываемых сферическими функциями любого порядка l , оказывается больше, чем ее максимальная проекция на ось z (или на любую другую ось). В частности, на самом деле полный орбитальный момент импульса электрона для $l = 1$ есть $\sqrt{2}\hbar$, а не \hbar . Тем не менее, на это всегда намеренно закрывают глаза и считают, что полный момент импульса совпадает с максимально возможной проекцией момента импульса.

Состояние с определенным значением проекции l_z можно, как это обычно и делают (см. Рис. 14), изобразить как прецессию вектора момента импульса \mathbf{l} длины $|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ вокруг оси z . При этом ориентация вектора \mathbf{l} по отношению к оси z должна быть совершенно случайной, так что его проекции на оси x и y не будут точно определены. В результате, при повороте координатных осей вокруг оси x на угол $\Theta = 90^\circ$ вектор \mathbf{l} не будет направлен в точности перпендикулярно новой оси z' . Однако на таком языке не очень понятно, как может появиться ненулевая вероятность проекции, скажем, $m = -l$

на ось z' в штрихованной системе координат при повороте на малый угол $\Theta \ll 1$, если проекция на ось z была $m = l$. Это чисто квантовый эффект, который трудно изобразить на бумаге. Дело в том, что, как мы видели, вектор \mathbf{l} должен быть разложен не по трем координатным ортам, а по собственным волновым функциям, которые образуют базис, "размазанный" по всему диапазону углов θ и φ .

5.1.5 Квантовый волчок

Итак, выше было показано, что для описания частицы с орбитальным моментом импульса $l\hbar$ необходимо ввести $2l + 1$ волновых функций. Они имеют вполне наглядную интерпретацию и описывают, в частности, пространственную форму электронных орбиталей. Однако гораздо важнее было подчеркнуть то, что в квантовой механике в роли базисных ортов выступают волновые функции, описывающие различные состояния. Поэтому для описания квантовой системы нам на самом деле достаточно знать лишь коэффициенты разложения a . В частности, соотношения (179) и (188) определяют закон, по которому, зная коэффициенты разложения в одной системе координат, мы можем определить их в другой системе, повернутой относительно первой на угол Θ вокруг оси x . Таким образом, о величине момента импульса можно судить по количеству состояний, которое необходимо для того, чтобы полностью описать систему при повороте координатных осей, и по закону преобразования коэффициентов a , определяющим вероятность обнаружить систему в данном состоянии.

Теперь мы, наконец-то, можем вернуться к основной теме этого раздела, а именно к вопросу о спине частиц. Оказалось (и это, как мы уже отмечали, есть экспериментальный факт), что элементарные частицы обладают еще одной степенью свободы, которую можно описать почти также, как нам удалось описать свойства, связанные с орбитальным моментом импульса. Иными словами, частице можно приписать свой собственный момент импульса, не связанный с его пространственным движением. Тот же факт, что это свойство подобно моменту импульса, будет определяться тем, что при повороте координатных осей вероятности обнаружить частицу в данном состоянии изменяются в

точности по такому же закону, что и коэффициенты a , описывающие обычный орбитальный момент импульса частицы.

Например, если частица обладает собственным моментом импульса (т.е. спином) \hbar , то для ее описания нужно предположить, что при измерении проекции спина на некоторую ось могут быть получены лишь значения \hbar , 0 и $-\hbar$ с вероятностями a_+ , a_0 и a_- . Причем здесь величины a_+ , a_0 и a_- уже не являются коэффициентами разложения при каких-то волновых функциях, зависящих от координат. Они описывают теперь только вероятности, и ничего больше. При этом для другой системы отсчета соответствующие вероятности должны преобразовываться в соответствии с матрицей (179), которая была получена для совершенно другой задачи, а именно для задачи об орбитальном моменте импульса, когда волновые функции зависили от координат. В этом месте во всей мощи и проявляется новый язык квантовой механики. Он позволяет описывать явления, которые не имеют аналогов в классической физике. В данном случае "состояние" с данной проекцией спина не связана ни с каким пространственным распределением вероятностей.

Здесь мы, правда, сразу сталкиваемся с одной новой проблемой. До сих пор мы обсуждали системы, у которых величина l была целой величиной. Соответственно, момент импульса был равен целому числу \hbar , а число состояний $2l + 1$ было нечетным. С другой стороны, как уже отмечалось, наблюдаемые свойства большинства элементарных частиц требуют двух степеней свободы. Но тогда следовало бы предположить, что величина l , описывающая подобные свойства, должна быть равна $1/2$ (в общем случае — полуцелой величиной). А соответствующий спин частиц должен быть равен $\hbar/2$ (а на самом деле, как мы помним, $\sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{3/4}\hbar$).

Однако легко сказать — полуцелый спин. Конечно, если формально положить $l = 1/2$, то тогда для описания системы нам потребуются лишь две величины $a_{1/2}$ и $a_{-1/2}$, квадраты которых будут определять вероятности зарегистрировать частицу с проекцией спина $\hbar/2$ или $-\hbar/2$. Однако, как мы видели, волновые функции с орбитальным моментом импульса $l\hbar$ (и проекциями $\pm l\hbar$) зависят от угла φ как $\sin l\varphi$ и $\cos l\varphi$. Поэтому для $l = 1/2$ нам следовало бы записать закон преобразования через функции $\sin(\varphi/2)$ и $\cos(\varphi/2)$.

Соответственно (и здесь это более важно), выражения $\sin(\Theta/2)$ и $\cos(\Theta/2)$ будут входить и в коэффициенты матриц (179) и (188), определяющие закон преобразования величин a . При этом закон преобразования должен иметь вид

$$\begin{aligned}(a_{1/2})' &= a_{1/2} \cos(\Theta/2) + a_{-1/2} \sin(\Theta/2), \\ (a_{-1/2})' &= -a_{1/2} \sin(\Theta/2) + a_{-1/2} \cos(\Theta/2).\end{aligned}\tag{198}$$

Это единственный линейный закон преобразования двух величин, сохраняющий их сумму квадратов и содержащий в качестве параметра поворота угол $\Theta/2$. В итоге, при изменении угла Θ на 360° (т.е. при тождественном преобразовании!) величины a , пропорциональные $\cos(\Theta/2)$, будут менять знак. Поэтому нам, казалось бы, неизбежно придется пойти на то, что волновая функция должна стать двузначной. Т.е., по существу, неопределенной в данной точке. Т.е. нам пришлось бы согласиться с тем, что поворот на 360° не является тождественным преобразованием.

В классической механике такая ситуация была бы невозможна. Действительно, как можно представить себе, что, например, скорость воды в реке в данной точке принимает два различных значения. Однако в квантовой механике, как оказалось, подобное свойство все же может быть реализовано. Дело в том, что, как уже подчеркивалось, физический смысл имеют не сами величины a , а их квадраты. Поэтому при повороте на 360° физический ответ (т.е. вероятность наблюдать состояние с данной проекцией спина) не изменится!

На первый взгляд может показаться, что нам крупно повезло, и удача, которая нам улыбнулась, была чисто случайной. На самом же деле, здесь мы сталкиваемся с удивительным глубинным свойством нашего трехмерного пространства. Более точно — с его свойствами по отношению к вращениям. Действительно, рассмотрим повороты в двумерном пространстве, например, повороты карандаша, лежащего на поверхности стола. Ясно, что любой поворот будет описываться лишь одной величиной — углом вращения вокруг вертикальной оси. Но как только мы разрешим карандашу вращаться в трехмерном пространстве (т.е. увеличим размерность пространства на единицу), то для описания поворота будет необходимо ввести не две, а уже три величины, поскольку теперь нам

нужно задать не только два параметра, определяющие ориентацию оси вращения, но и еще третий параметр — угол поворота вокруг этой оси. Появление дополнительной степени свободы и приводит к совершенно новым свойствам, которые, к сожалению, очень редко обсуждается в популярной литературе. Поэтому будет полезно обсудить их более подробно.

5.1.6 Ремни и стаканы

Итак, мы видели, что понятие полуцелого спина связано с двужначностью, возникающей при поворотах в трехмерном пространстве. Есть два простых примера, когда подобное свойство удавалось изобразить наглядно. Первое из них принадлежит П. Дираку (1902-1984, Нобелевская премия 1933 г.), второе — Р. Фейнману (1918-1988, Нобелевская премия 1965 г.). Дирак предложил в качестве иллюстрации воспользоваться обычным ремнем, а Фейнман — стаканом.

Прежде всего, постараемся сформулировать вопрос, на который нам нужно получить ответ, или, во всяком случае, проиллюстрировать связанное с этим вопросом свойство. Мы видели, что наблюдаемая двужначность при попытке описать частицы со спином $\hbar/2$ привели к тому, что мы были вынуждены признать, что в трехмерном пространстве в некоторых случаях полная тождественность возникает лишь при двойном повороте, т.е. при повороте не на 360° , а на 720° . Именно это свойство, как оказалось, и может быть продемонстрировано с помощью простых подручных средств.

Рассмотрим прежде всего опыт с ремнем¹². Возьмем его двумя руками за концы и вытянем в виде плоской ленты. В этом положении ориентация пряжки совпадает с ориентацией другого конца. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что все повороты пряжки вокруг любой из осей на 360° эквивалентны друг другу, но при этом мы, перемещая концы ремня без дополнительного вращения, никогда не восстановим начальное состояние, т.е. состояние плоской ленты. С другой стороны, поворот ремня на 720° , после определенного перемещения его концов, полностью распутывается и ремень

¹²Матерчатая лента здесь не очень удобна — она слишком гибкая.

становится в точности таким же, как и до поворота. Отметим сразу, что здесь для нас будет важно не только положение концов ремня, но и история перехода из начального в конечное состояние. В этом смысле ремень — очень удобный предмет, поскольку, двигаясь вдоль ремня, мы можем проследить, как менялась ориентация пряжки с течением времени.

Рассмотрим сначала повороты на 360° . Повернем, например, пряжку вокруг оси, параллельной оси ремня. После того, как поворот закончен, мы, как и договорились, можем перемещать концы ремня произвольным образом, следя лишь за тем, чтобы они не совершали дополнительного вращения (т.е. оставались параллельными сами себе). Ясно, что соединив концы, мы получим замкнутую петлю, т.е. то самое нормальное состояние, в котором ремень обычно и используется. Но такое состояние получается и в том случае, если мы повернем пряжку на 360° относительно горизонтальной оси, перпендикулярной оси ремня! В итоге, как легко проверить, вокруг какой бы оси мы не повернули бы пряжку на 360° , после соответствующего движения мы всегда сможем привести ремень в нормальное состояние, т.е. в состояние петли. Попытка же растянуть ремень в ленту всегда приведет к тому, что ремень окажется перекрученным на 360° .

Казалось бы, что поворот пряжки на 720° приведет к еще большей скрученности. Однако, при ближайшем рассмотрении можно убедиться, что это не так! Действительно, давайте повернем пряжку на 720° вокруг оси ремня, а затем постараемся соединить его концы. В этом случае ремень примет форму двойной петли, которую удобно не замыкать, а оставить в виде двойной спирали. Так вот, если теперь продеть пряжку между двумя витками спирали и вновь вытянуть ремень в ленту, то мы с удивлением обнаружим, что ремень полностью распрямился. Иными словами, трехмерность пространства позволяет полностью развязать двойную петлю, а одиночную — нет.

Пример Фейнмана еще более прост. Возьмите стакан и поставьте его на вытянутую ладонь правой руки. Затем поверните его на 360° против часовой стрелки, но только так, чтобы вода (если она была бы в стакане) не выливалась из него. Как вы видите, для этого рука должна сильно перекрутиться. Однако если продолжить вращение (для



Рис. 15: Примеры односвязанных и многосвязанных поверхностей. На поверхности шара любой контур может быть стянут в точку, а на поверхности тора — нет.

чего приходится занести руку над головой), то после второго оборота система "приходит в исходное положение". Таким образом, полный цикл вновь содержит два поворота на 360° .

Так в чем же дело? Почему казалось бы тождественное преобразование, а именно поворот на 360° , в трехмерном пространстве не обладает всеми свойствами тождественности? Как оказалось, это есть отражение очень глубокого топологического свойства трехмерного пространства, которое состоит в том, что пространство поворотов на 360° не является односвязанным. Поясним это свойство на простом примере двумерных поверхностей. Двухмерная поверхность называется односвязанной, если любой замкнутый контур, нарисованный на этой поверхности, может быть стянут в точку. Поэтому, как показано на Рис. 15, сфера есть односвязанная поверхность, а поверхность тора (бублика) или чашки с ручкой — нет, поскольку существуют контуры, которые в точку стянуты быть не могут. Свойство односвязанности, естественно, может быть перенесено и пространства большей размерности. Так, шар есть односвязанная область, а тор — опять нет.

Теперь мы должны показать, что пространство поворотов на 360° не является односвязанным. При этом для наглядности обычно поступают следующим образом. Как уже говорилось, вращение в трехмерном пространстве описывается тремя параметрами, т.е. таким же количеством параметров, которое необходимо для определения положения точки в трехмерном пространстве. Поэтому удобно изображать повороты тоже точками в трехмерном пространстве. При этом каждому повороту вокруг некоторой оси на угол Θ мы будем сопоставлять точку, лежащую в направлении оси вращения на расстоянии Θ

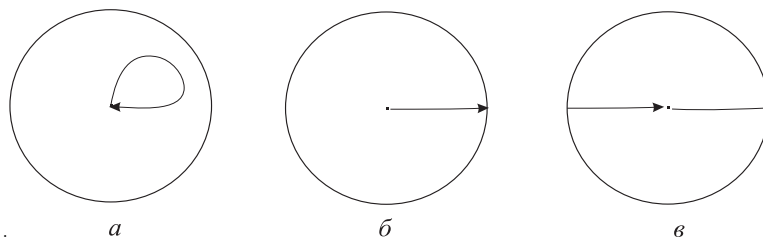


Рис. 16: Пространство поворотов на произвольный угол. Показан случай одинаковой ориентации концов ремня (*а*), а также повороты пряжки ремня вокруг горизонтальной оси на 180° (*б*) и 360° (*в*).

от начала координат. Поскольку же поворот на 180° вокруг некоторой оси тождественен повороту на те же 180° , но вокруг противоположно направленной оси, то естественно ограничить область параметров шаром радиуса π . При этом следует отождествить попарно все противоположные точки на его поверхности. Это и есть ключевой момент, который делает пространство поворотов на 360° неодносвязным.

Посмотрим теперь, как будут выглядеть в пространстве поворотов различные вращения пряжки ремня. Прежде всего, очевидно, что ремню, имеющему форму плоской ленты, будет соответствовать точка в центре шара, поскольку все точки ремня имеют одну и ту же ориентацию. Если середина ремня будет несколько перекручена, то этому случаю будет соответствовать замкнутый контур, начинающийся и заканчивающийся в центре шара (см. Рис. 16*а*). Это и есть эквивалент контура, который может быть стянут в точку. Если же мы теперь повернем пряжку на 180° вокруг оси ремня, то такому повороту, как показано на Рис. 16*б*, будет соответствовать линия, выходящая из начала координат и заканчивающаяся на границе шара. В этот момент мы должны перескочить на диаметрально противоположную точку, и при дальнейшем повороте на следующие 180° кривая должна полностью замкнуться (см. Рис. 16*в*). Соответственно, при вращении пряжки на 360° вокруг любой другой оси контур в пространстве поворотов будет устроен точно таким же образом, но только он будет расположен вдоль соответствующей оси вращения.

Теперь становится понятным, почему вращения пряжки на 360° никак не могут быть

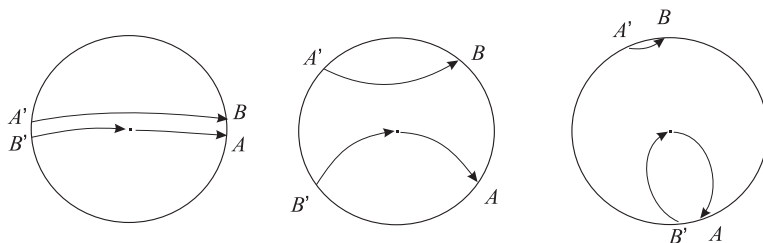


Рис. 17: Непрерывная деформация контура, соответствующего повороту на 720° .

сведены к тождественному преобразованию, Т.е. почему соответствующий контур в пространстве поворотов не может быть непрерывно деформирован в точку. Дело в том, что для всех подобных вращений контуры обязательно проходят через диаметрально противоположные точки шара в пространстве поворотов, приблизить которые друг к другу невозможно. Невозможно принципиально, поскольку эти точки по построению всегда находятся на противоположных сторонах шара. С другой стороны, любой контур, соответствующий вращению пряжки вокруг одной из осей, без труда может быть деформирован в другой контур, соответствующий вращению вокруг любой другой оси. Это свойство мы и наблюдали экспериментально.

Перейдем теперь к ключевому моменту нашего рассмотрения и постараемся понять, почему вращения на 720° являются односвязанными, и поэтому могут быть сведены к тождественному преобразованию. Ответ на этот вопрос может легко быть получен, глядя на Рис. 17. Действительно, любой поворот на 720° будет соответствовать кривой, которая дважды, в точках $A = A'$ и $B = B'$, пересекает поверхность шара вращений. А в этом случае появляется возможность провести такую непрерывную деформацию контура, при которой точки A и B' приблизятся друг к другу. В результате, образно говоря, произойдет аннигиляция двух особых точек, в результате чего контур уже без труда может быть стянут в точку начала координат. Именно такая манипуляция и была проведена нами с ремнем.

Таким образом, нам действительно удалось на простых примерах показать новое удивительное свойство нашего мира. Свойство, о котором большинство людей, несмотря на наш многолетний повседневный опыт, и не подозревали. Оказалось, что вращения в трех-

мерном пространстве обладают как бы дополнительной степенью свободы: внутри сферы радиуса π в пространстве вращений одновременно существуют два шара, и мы можем перейти из одного в другой лишь на их поверхности. Пространство поворотов, подобно Сезаму, открывается, и мы видим, что у него на самом деле есть не только внешняя, но и внутренняя поверхность. Древнекитайские символы Инь и Ян удивительно точно передают такое переплетение. В результате, отсюда и возникает двужначность при описании тех свойств объектов, которые связаны с вращениями в трехмерном пространстве и, как следствие, необходимость двойного поворота на 360° для тождественного преобразования для объектов, обладающих спином $\hbar/2$.

5.1.7 Спин фотона

Заглянув в любой справочник, можно найти, что спин фотона равен \hbar . Такая величина, кстати, легко может быть получена в квазиклассическом приближении. Действительно, рассмотрим электрон, находящийся в атоме на одном из высоких энергетических уровней $n \gg 1$. Как мы видели, в этом случае можно считать, что частота его вращения совпадает с частотой излученного фотона, а энергия излученного фотона $\varepsilon = \hbar\omega$ много меньше энергии самого электрона \mathcal{E} . В этом приближении, как легко проверить¹³, изменение энергии электрона $\Delta\mathcal{E}$ будет связана с изменением его момента импульса Δl соотношением $\Delta\mathcal{E} = \omega\Delta l$. Поскольку полная энергия и полный момент импульса при излучении фотона должен сохраняться (и поэтому, в частности, можно записать $\delta\mathcal{E} = \hbar\omega$), мы немедленно приходим к заключению, что собственный момент импульса фотона должен быть равен \hbar .

Здесь, однако, необходимо сделать одно важное замечание. Дело в том, что, как мы видели, ключевым моментом в определении спина частиц были их свойства при повороте координатных осей. При этом неявно предполагалось, что поворот осей осуществляется в системе покоя частицы. Понятно, что для фотона такой подход невозможен, поскольку

¹³При движении по окружности радиуса r энергия частицы массы m есть $m\omega^2 r^2/2$, а момент импульса есть $m\omega r^2$. Поэтому изменение энергии есть $mr^2\omega\delta\omega$, а изменение момента импульса $mr^2\delta\omega$.

ку не существует системы отсчета, в которой фотон находился бы в покое. К счастью, оказалось, что для фотона все же можно определить величину, соответствующую спину обычных частиц. Этой величиной оказалась проекция спина на направление движения фотона — т.н. спиральность.

Удобство введения понятия спиральности состоит, например, в следующем. Спиральность, как и спин, описывают момент импульса, полная величина которого должна сохраняться. Поэтому если спиральность фотона равна \hbar , то разность моментов импульса начального и конечного состояний излучающего фотон атома не может превышать \hbar . А это сразу накладывает существенные ограничения (их называют правилами отбора) на возможные переходы электронов с одного энергетического уровня на другой: возможными оказываются лишь переходы между состояниями атомов, вектор полного момента импульса которого отличается на $\pm\hbar$. С другой стороны, в отличие от нерелятивистских частиц с собственным моментом импульса \hbar , спиральность фотона (т.е. проекция его спина на направление движения) может принимать лишь два значения, а именно $-\hbar$ и \hbar ¹⁴.

5.1.8 Так что же такое спин?

Теперь мы, наконец, можем постараться ответить на вопрос, что же такое есть спин. Как мы поняли, спин частицы есть ее внутренняя характеристика, которая, однако, проявляется при поворотах координат подобно обычному моменту импульса. Иными словами, мы вновь сталкиваемся с двуединостью микромира. С одной стороны, спин совершенно не связан с каким-то собственным вращением частицы — его вращение, как говорят, виртуально. С другой же, он проявляет себя как реальный волчок, обладающий вполне материальным моментом импульса. Поэтому, в частности, полный момент импульса электрона в атоме может быть представлен как векторная сумма его орбитального момента \mathbf{l} и вектора спина \mathbf{s} . При этом фундаментальной причиной, приводящей к возможности для частицы иметь полуцелый спин, является замечательное свойство нашего трехмер-

¹⁴Естественно связать эти состояния с положительной и отрицательной круговой поляризацией

ного пространства — неоднозначность пространства поворотов — которое приводит к тому, что истинным полным поворотом системы координат есть поворот на 720° .

Введение понятия спина стало первым (и очень удачным) применением совершенно новой физической идеи, впоследствии ставшей одной из основных идей, лежащих в основании всех современных теорий фундаментальных взаимодействий. Стало ясно, что при исследовании свойств частиц можно ввести пространство состояний, никак не связанных с их перемещением в обычном пространстве. Обобщение этой идеи в ядерной физике привело к понятию изотопического спина, который действует в особом изоспиновом пространстве; протон и нейтрон при этом будут одной и той же частицей, только с разным значением изоспинового числа. В дальнейшем, при описании сильных взаимодействий были введены внутреннее цветовое пространство и квантовое число "цвет" — более сложный аналог спина.

Существование спина вносит значительное разнообразие в наблюдаемые свойства атомов и молекул. Если бы у электронов не было бы этой дополнительной свободы, связанной со спином, то были бы невозможны многие переходы (а, значит, и излучаемые линии), которые повсеместно используются в астрономии. Мы, конечно же, обсудим некоторые из них в следующей Главе. Кроме того, поскольку энергия электрона в атоме может зависеть от ориентации спина, например, благодаря взаимодействию электрона с внешними и внутренними электромагнитными полями, существование спина, как говорят, снимает вырождение уровней. Иными словами, при учете спина вместо одного уровня энергии, который могли занимать два электрона (их состояния отличались бы ориентацией спина) получается два близко расположенных уровня энергии. Как мы помним, наблюдение таких дублетов сыграло большую роль в понимании спиновых свойств.

5.2 Квантовая статистика

5.2.1 Тождественность частиц

Еще одним замечательным свойством, характерным только для квантовой механики, является принцип тождественности частиц. Это вновь есть прежде всего эксперименталь-

ный факт. Действительно, все электроны обладают в точности одной и той же массой m_e и одним и тем же электрическим зарядом $-e$. Это свойство относится и ко всем остальным элементарным частицам. Однако, такое свойство есть только вершина айсберга. В классической механике тоже можно рассмотреть динамику одинаковых шаров, или, например, газ, состоящий из одинаковых молекул. Однако при классическом описании мы всегда, образно выражаясь, можем раскрасить частицы в разные цвета и следить за траекторией каждой отдельной частицы. В квантовой механике этот принцип нарушается. Поэтому при столкновении двух одинаковых частиц 1 и 2 после столкновения нельзя сказать, какой из двух разлетающихся частиц 1' и 2' они соответствовали.

Для дальнейшего нам будет нужно понять, как тождественность частиц проявляет себя на языке волновой функции. Поэтому здесь нам также придется рассмотреть этот вопрос более подробно. В качестве примера вновь рассмотрим одномерную задачу о частице в потенциальной яме с бесконечными стенками, для которой, как было показано, волновая функция одной частицы имеет вид $\psi_n(x) = \psi_0 \sin(n\pi x/L)$ (81). Здесь величина n , напомним, есть номер соответствующего энергетического уровня, а константа $\psi_0 = \sqrt{2/L}$ выбирается из того условия, что полная вероятность найти частицу в потенциальной яме должна быть равна единице.

Прежде всего, нам необходимо получить ответ на вопрос, как должна выглядеть волновая функция, описывающая ДВЕ частицы, одновременно находящиеся в такой потенциальной яме на уровнях n и m . Здесь мы для простоты предположим, что частицы не взаимодействуют друг с другом. Кроме того, мы будем до поры до времени считать, что $m \neq n$. После некоторого раздумья можно понять, что такая волновая функция, описывающая вероятность найти первую частицу в точке x_1 а вторую частицу в точке x_2 должна выглядеть как

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_0^2 \sin(n\pi x_1/L) \sin(m\pi x_2/L). \quad (199)$$

Иными словами, функция распределения двух частиц должна складываться из произведений двух одночастичных функций, т.е. $\psi(x_1, x_2) = \psi_n(x_1) \psi_m(x_2)$. Важно подчеркнуть, что здесь и далее координата x_1 будет относиться к первой частице, а координата x_2 — ко

второй, хотя это и есть одна и та же координата x . В результате, вероятность того, что первая частица находится в интервале от $x = x_1$ до $x = x_2$, а вторая — в интервале от $x = x_3$ до $x = x_4$, должна быть записана как

$$\mathcal{P} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_3}^{x_4} |\psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2, \quad (200)$$

т.е. в виде т.н. двойного интеграла.

Покажем теперь, что наш выбор правилен, и произведение одночастичных функций обладает всеми необходимыми свойствами, которыми должна обладать полная волновая функция. Например, что ее квадрат соответствует вероятности интересующего нас события. Для этого попробуем посчитать, например, вероятность того, что первая частица находится между точками x_1 и x_2 , не интересуясь при этом положением второй частицы. Тогда воспользовавшись тем, что волновая функция распадается на произведение одночастичных функций, а двойной интеграл от такого произведения есть произведение интегралов, получаем, используя соотношение (89)

$$\mathcal{P} = \int_{x_1}^{x_2} dx_1 |\psi(x_1)|^2 \cdot \int_0^L |\psi(x_2)|^2 dx_2 = \int_{x_1}^{x_2} dx_1 |\psi(x_1)|^2. \quad (201)$$

Соотношение (195), однако, не учитывает основное свойство, которое мы обсуждаем в этом разделе, а именно свойство тождественности частиц. Поскольку мы не можем сказать, какая их частиц является первой, а какая — второй, то, помимо волновой функции $\psi_n(x_1) \psi_m(x_2)$, мы с тем же успехом могли бы воспользоваться функцией $\psi_n(x_2) \psi_m(x_1)$. Теперь, несмотря на то, что на уровне n находится не частица 1, а частица 2, это будет в точности такое же распределение, поскольку частицы 1 и 2 не отличимы друг от друга. В результате, оказывается, что волновую функцию следует записать в виде

$$\psi_s(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_n(x_1) \psi_m(x_2) + \psi_n(x_2) \psi_m(x_1)]. \quad (202)$$

Появление множителя $1/\sqrt{2}$, как легко проверить, связана с нормировкой волновой функции — полная вероятность всегда должна быть равна единице.

Остановимся здесь на минуту и еще раз порадуемся красоте математического аппарата, которая, правда, связана все с тем же свойством линейности волн. Амплитуды волн

различных состояний (или различные части одного и того же состояния) можно просто складывать. Это никак не скажется на основном свойстве — вероятность, связанная с перекрестными членами, должна быть равна нулю. Действительно, при возведении в квадрат выражения (198) все перекрестные члены благодаря условию ортогональности

$$\int_0^L \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad (203)$$

при $n \neq m$ автоматически выпадают (проверьте!).

Однако, здесь возникает другой вопрос. Дело в том, что если перекрестные произведения выпадают, то мы с тем же успехом можем написать не плюс, а минус

$$\psi_a(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_n(x_1) \psi_m(x_2) - \psi_n(x_2) \psi_m(x_1)]. \quad (204)$$

И эта волновая функция также будет удовлетворять всем необходимым свойствам. Но при этом, конечно же, она будет описывать совсем другое распределение частиц.

Действительно, посмотрим, что будет происходить с волновыми функциями, если переставить частицы местами, т.е. поменять в них x_1 и x_2 . Раз это частицы тождественны, то физический результат измениться не может. И действительно, симметричная функция (198) при такой замене вообще не изменится, а "антисимметричная" функция (200) лишь поменяет знак. Поскольку, как мы видели, вероятность не зависит от знака волновой функции, то и вторая функция будет описывать то же состояние, что и до перестановки частиц. Например, если положить в волновой функции (200) $n = m$, то мы получим тождественно $\psi(x_1, x_2) = 0$. А это значит, что две частицы, описываемые антисимметричной волновой функцией (200), вообще не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии.

5.2.2 Связь спина и статистики

Итак, мы приходим к удивительному выводу, что в микромире должны существовать два принципиально различных сорта частиц. У одних частиц, описываемых симметричными комбинациями произведений одночастичных состояний, волновая функция не меняет

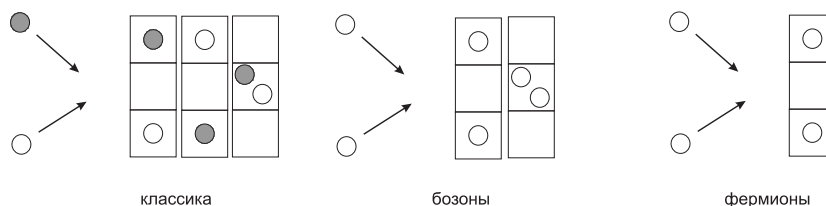


Рис. 18: Различие в статистических свойствах обычных частиц, бозонов и фермионов.

знак при перестановке частиц. Они получили названия бозонов в честь Ш. Бозе (1894-1974), который вместе с А. Эйнштейном впервые описал статистические свойства таких частиц. Другие частицы, волновая функция которых является антисимметричной, называются фермионами в честь Э. Ферми (1901-1954, Нобелевская премия 1938 г.), а их статистика – статистикой Ферми-Дирака.

Появление слова "статистика", здесь, безусловно, не случайно. Как мы уже не раз видели, вероятностный язык квантовой механики сразу переводит разговор в область статистической физики. Однако здесь мы сталкиваемся с еще одним фундаментальным свойством квантовых объектов. Оказывается, выбор статистики полностью определяется величиной спина частиц. Так, частицы с целым спином (π и K -мезоны, фотоны, знаменитый бозон Хиггса) должны быть бозонами, а частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны, кварки, нейтрино) — фермионами. Этот фундаментальный результат, не имеющий, к сожалению, простого объяснения "на пальцах", был окончательно сформулирован В. Паули (1900-1958, Нобелевская премия 1945 г.) в 1940 году. Именно поэтому невозможность двум фермионам занимать одно и то же квантовое состояние носит имя запрета Паули.

Чтобы продемонстрировать различие в свойствах классических частиц, фермионов и бозонов рассмотрим в качестве простейшего примера процесс столкновения двух одинаковых частиц (см. Рис. 18). После столкновения они попадают в детектор, который мы для простоты смоделируем как ящик с тремя ячейками. Поскольку суммарный поперечный импульс должен сохраняться, то частицы после взаимодействия либо будут находиться в крайних ячейках, либо обе в центральной. Для простоты будем считать, что в первом случае мы имеем дело с упругим взаимодействием, а во втором — с неупругим. Кроме

того, положим (хотя в действительности это, конечно же, не так), что вероятности всех возможных событий будут одинаковы.

В итоге, как мы видим, результат взаимодействия существенно зависит от того, с какими частицами мы имеем дело. Для обычных частиц вероятность неупругого столкновения будет равна $1/3$, для бозонов — $1/2$, тогда как для фермионов такой процесс оказывается вообще невозможным. Иными словами, между квантовыми частицами действуют дополнительные силы, связанные с возможностью заменить их друг на друга. Поэтому их и называют обменными. При этом для бозонов обменные силы являются силами притяжения (они увеличивают вероятность неупругого взаимодействия по сравнению с классическим результатом), а для фермионов — силами отталкивания.

Теперь окончательно становится понятным, как происходит заполнение электронных орбиталей в периодической системе. В каждом следующем химическом элементе заряд ядра увеличивается на единицу, и, значит, на внешние орбитали нужно добавить еще один электрон. Но каждый следующий электрон может занять лишь свободное место, не занятое другими электронами, поскольку электроны — это фермионы, и она должны подчиняться статистике Ферми-Дирака. Поэтому все многообразие электронных оболочек является прямым следствием запрета Паули.

5.3 Измерение

5.3.1 Роль регистрирующего прибора

Обсудим теперь, хотя бы вкратце, один из самых проклятых вопросов квантовой механики, а именно вопрос об измерении и роли измерительного прибора. Фактически, нашей целью будет не столько попытка прояснить этот круг вопросов, сколько продемонстрировать, насколько ключевые основы квантовой механики противоречат нашему повседневному опыту. Как будет показано ниже, при обсуждении этого вопроса мы неизбежно столкнемся с еще одним фундаментальным чисто квантовым свойством, а именно со свойством нелокальности.

Итак, мы уже говорили о том, что дискретность, свойственная квантовым системам,

качественно изменяет сам процесс измерения. Воздействие на систему нельзя сделать сколь угодно малым. Так, например, фотон очень малой энергии никак не изменит распределение электронов по уровням энергии; его взаимодействия с атомом вообще не произойдет. Кстати, подобный эффект — аномально слабое рассеяние медленных электронов атомами нейтральных газов (т.н. эффект Рамзауэра), впервые наблюдавшийся в 1921 году — сыграл важную роль при становлении квантовой механики. Поэтому неизбежно процесс измерения должен быть включен в общую схему квантовых вычислений.

Выше уже обсуждалось несколько примеров, в которых в процессе измерения наблюдаемый объект существенно менял свои свойства. Например при прохождении линейно поляризованного света через поляризатор (а это и был момент измерения), ось которого наклонена под 45° к направлению поляризации падающего излучения, фотон с вероятностью 50% менял свою линейную поляризацию на 45° и проходил через поляризатор. Соответственно, случайно поляризованные частицы, проходящие через неоднородное магнитное поле в опыте Штерна-Герлаха, регистрировались лишь в двух конечных состояниях. Поэтому мы вынуждены сделать вывод, что до измерения однозначно сказать, в каком состоянии находится объект, невозможно. Лишь в процессе измерения, когда мы неизбежно активно воздействуем на наблюдаемую систему, она переходит в одно из возможных состояний. При этом квантовая механика может сказать лишь о вероятности такого перехода (т.е. о вероятности наблюдать объект в данном состоянии), но ничего не может сказать, каков будет результат данного конкретного измерения.

Другой наглядный пример — дифракция электронов, когда достоверно известно, что электроны одновременно проходят через обе щели. Лишь в этом случае на экране возникает характерная для волновых явлений диффракционная картина. Следовательно, при распространении каждый из электронов "размазан" в пространстве по крайней мере на масштабе порядка расстояния между щелями. Но в момент регистрации происходит поглощение электрона отдельным атомом, размер которого на многие порядки меньше расстояния между щелями. А это означает, что волновая функция, пространственный масштаб модуляции которой также порядка расстояния между щелями, не может опи-

сывать процесса поглощения. А, значит, и процесса взаимодействия частицы с измерительным прибором, поскольку поглощение электрона атомом и есть процесс регистрации электрона.

Уже этих двух примеров достаточно, чтобы почувствовать, насколько нетривиальным является окружающий нас микромир. Ответив на первые, лежащие на поверхности, вопросы, человечество столкнулось с еще более сложными вопросами фундаментального характера, ответы на многие из которых не найдены до сих пор. В следующих разделах мы постараемся рассмотреть некоторые из них.

5.3.2 Аргумент Эйнштейна-Подольского-Розена

Как мы уже отмечали, А. Эйнштейну (получившему, напомним, Нобелевскую премию именно за квантовое объяснение фотоэффекта) категорически не нравились основания построенной впоследствии квантовой механики. Поэтому на протяжении всей жизни он, как истинный исследователь, пытался сформулировать тестовый эксперимент, который позволил бы показать внутреннюю противоречивость квантового языка. Надо сразу сказать, что никаких внутренних изъянов в итоге найдено не было. Более того, дискуссия, инициированная Эйнштейном, позволила существенно расширить наше понимание квантового мира. И это при том, что в то время речь могла идти лишь о мысленных экспериментах. Сейчас же, когда технологический прогресс позволил перевести спор в область прямого эксперимента, мы получили возможность прояснить многие моменты, которые не удавалось до конца понять до сих пор. Неудивительно поэтому, что это направление стало одним из магистральных в современной физике.

Начнем с т.н. парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР-парадокс) — попытки указания на неполноту квантовой механики. Мысленный эксперимент состоял в измерении параметров микрообъекта косвенным образом, не оказывая на этот объект непосредственного воздействия. При этом основной вопрос состоял в том, можно ли каким-либо способом извлечь больше информации о состоянии микрообъекта, чем это дает квантовомеханическое описание. Иными словами, следует ли считать физической реальностью

лишь результаты опытов, или определенную роль будут играть и принципиально ненаблюдаемые параметры.

Действительно, согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга одновременно (и точно) измерить координату частицы и ее импульс невозможно. Предполагая, что причиной такой неопределенности являются принципиально неустранимые возмущения, которые процесс измерения одной величины вносит в состояние объекта и тем самым изменяет значение другой величины, Эйнштейн, Подольский и Розен предложили гипотетический способ, с помощью которого соотношение неопределенностей можно было бы обойти.

Допустим, что две одинаковые частицы образовались в результате распада третьей частицы; для простоты будем считать, что она до распада покоилась. В этом случае суммарный импульс разлетающихся частиц должен быть равен нулю (соответственно, если исходная частица обладала нулевым спином, т.е. являлась бозоном, а рожденные ею частицы были фермионами, то спины разлетающихся частиц обязаны были быть противоположными). В результате, классическое свойство сохранения полного импульса (и момента импульса) системы, казалось бы, давала возможность измерить импульс одной частицы и, по закону сохранения импульса, рассчитать импульс второй частицы, не внося в ее движение никаких возмущений. Теперь, измерив координату второй частицы, можно было получить для этой частицы значения двух неизмеримых одновременно величин, что по законам квантовой механики невозможно. Исходя из этого, Эйнштейн, Подольский и Розен сделали вывод, что соотношение неопределенностей не является абсолютным, а законы квантовой механики являются неполными и должны быть в будущем уточнены.

Однако, как оказалось после долгой и продолжительной дискуссии, ЭПР-эксперимент не противоречит квантовой механике. Прежде всего, кажущееся противоречие возникает потому, что термин "измерение" имеет различный смысл в классической и квантовой теории. Действительно, как мы видели, в квантовой механике в результате измерения неизбежно происходит изменение состояния системы. Например, если у частицы измеряется импульс, то в процессе измерения она перейдет в состояние, описываемое волновой

функцией, соответствующей именно этому значению импульса. Повторные же измерения импульса в этом состоянии всегда будут приводить к одному и тому же результату.

Далее, необходимо подчеркнуть еще одно очень важное обстоятельство. ЭПР-эксперимент по своему смыслу обсуждает однократное событие. Поэтому он не может противоречить соотношению неопределенностей. Дело в том, что вычислить на одном эксперименте среднеквадратичное (т.е. среднестатистическое) отклонение невозможно. Если же ЭПР-эксперимент повторять многократно для ансамбля распадающихся систем, находящихся в одном и том же состоянии, то усреднение результатов измерений будет удовлетворять соотношению неопределенностей. В этом отношении противоречия с квантовой механикой также не возникает.

Однако самая глубинная причина противоречия состояла в том, что согласно законам квантовой механики необходимо было признать возможность мгновенного воздействия первой частицы на вторую в противоречии с классическим принципом причинности, согласно которому никакое возмущение не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Попросту говоря, классическая физика запрещает создание "машины времени", с помощью которой было бы возможно вернуться в прошлое, и, следовательно, иметь возможность изменить уже произошедшие события.

В этом пункте, собственно, и заключалась основная некорректность исходной посылки ЭПР-эксперимента. Эйнштейн, Подольский и Розен, следуя классическому принципу причинности, полагали, что как бы мы не возмущали состояние первой частицы, состояние второй частицы уже никак измениться не может, поскольку они находятся слишком далеко друг от друга. Однако согласно квантовой механике волновая функция — это нелокальная величина, и большое расстояние между частицами существенной роли не играет. В этом и проявляется своеобразный характер квантовой теории, согласно которой система, состоящая из двух частиц, состояние которых описывается единой волновой функцией, не является простой суммой этих частиц, даже если между ними нет взаимодействия.

Например, рассмотрим два ЭПР-фотона, которые были излучены, скажем, в центре

нашей Галактики, так что один из них распространяется в сторону Солнца, а другой — в противоположном направлении. Тогда мы должны согласиться с тем, что в тот самый момент, когда в земной лаборатории произойдет регистрация одного из фотонов (и, тем самым, фотон приобретет определенную поляризацию), в противоположной части Галактики другой фотон также изменит свои свойства.

Удивительный вывод! Поверить в него, обладая лишь нашей повседневной классической интуицией, было совершенно невозможно. Тем не менее, в настоящее время это экспериментально установленный факт. За последние десятилетия многочисленные прямые эксперименты, проверяющие нелокальность волновой функции (в том числе эксперименты по квантовой телепортации), позволили проверить это чисто квантовое свойство на расстояниях, достигающих до десятков, и даже сотен километров. При этом предсказания квантовой механики были полностью подтверждены.

Ниже, на примере экспериментов, связанных с нарушением т.н. неравенств Белла, мы рассмотрим это свойство более подробно. Здесь же мы обсудим первый, самый простой пример экспериментальной проверки нелокальности квантового мира, а именно опыты, которые были выполнены французским физиком А. Аспе. Этот эксперимент стал возможным благодаря появившейся в середине восьмидесятых годов технической возможности создания пар частиц (или фотонов), состояние каждой из которых не определено, но которые, тем не менее, связаны друг с другом. По понятным причинам такие объекты стали называть ЭПР-парами.

Чтобы понять, что мы понимаем под ЭПР-парой, следует начать опять с самого начала. Как уже отмечалось, уравнения квантовой механики линейны. Это значит, что если две волновые функции ψ_1 и ψ_2 будут решением уравнения Шредингера, то и любая их линейная комбинация

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 \quad (205)$$

также будет решением этого уравнения. Но тогда, как мы видели, в микромире возможны смешанные (или, как теперь говорят, запутанные) состояния. Например, если волновая функция ψ_1 соответствует ориентации спина вверх (проекция на ось z есть $+\hbar/2$), а ψ_2

— ориентации спина вниз (проекция на ось z есть $-\hbar/2$), то возможно и любое промежуточное состояние, никакой определенной проекции на ось z не соответствующее. Именно такие частицы и должны были обсуждаться Эйнштейном, Подольским и Розеном в их мысленном эксперименте. При этом каждая из двух частиц находилась бы в смешанном состоянии, но их суммарный импульс (или, соответственно, спин) должен был быть равным нулю.

В опытах Аспе использовалась ЭПР-пара фотонов, источником которых служил специально приготовленный кристалл, на который направлялся лазерный пучок. Благодаря особым оптическим свойствам этого кристалла на его выходе образовывались пары фотонов, каждый из которых был линейной комбинацией вертикально $\psi(\uparrow)$ и горизонтально $\psi(\rightarrow)$ поляризованных волн, причем полная волновая функция двух фотонов имела вид

$$\psi(1, 2) = \frac{\psi_1(\uparrow)\psi_2(\uparrow) + \psi_1(\rightarrow)\psi_2(\rightarrow)}{\sqrt{2}}. \quad (206)$$

Такая запись означает, что фотоны представляют собой смесь двух состояний, в одном из которых они оба поляризованы вертикально, а во втором — оба горизонтально.

Поэтому если направить такие запутанные фотоны на два поляризатора, пропускающие, например, лишь фотоны с вертикальной линейной поляризацией, для каждого из поляризаторов фотоны будут проходить через них с вероятностью $1/2$. Нетривиальность же здесь состояла в том, что согласно квантовому соотношению (202) либо оба фотона пройдут через поляризатор, либо оба поглотятся. При этом поляризаторы можно разнести настолько далеко друг от друга, что результат измерения одного поляризатора для данной пары фотонов никак не мог повлиять на результат измерения второго.

Тем не менее, опыты Аспе со всей определенностью показали, что для пары фотонов, описываемых волновой функцией (202), регистрировались лишь события, когда либо оба фотона проходили через свои поляризаторы, либо нет. С классической точки зрения это было совершенно непонятно. Действительно, если на взаимодействие фотона и поляризатора другой фотон никакого влияния оказать не мог, то с тем же успехом должны были бы регистрироваться события, когда один фотон проходил через свой поляризатор, а другой — нет. Отсутствие таких событий и стало прямым доказательством существования

связи между фотонами, разнесенными на большое расстояние.

Здесь очень важно отметить и то, что как в опытах Аспе, так и в экспериментах по квантовой телепортации не возникает противоречия и с принципом причинности. Дело в том, что принцип причинности не запрещает движение со скоростью, большей скорости света, если при этом не происходит передачи информации. Так, например, в плазме фазовая скорость электромагнитных волн может превышать скорость света. Однако, как мы видели, сигнал, несущий информацию, распространяется с групповой скоростью, которая всегда меньше c . Так и в экспериментах по квантовой телепортации удастся показать лишь то, что в момент измерения параметров первой частицы вторая частица также меняет свое состояние. Однако в какое состояние она при этом переходит, можно определить лишь после того, как обычный сигнал, несущий информацию о результатах регистрации первой частицы, дойдет до места регистрации второй частицы и будет там "прочитан".

5.3.3 Кошка Шредингера

Следующий парадокс, основанный на еще одной фундаментальной особенности квантовой механики, был сформулирован ни кем иным, как одним из ее отцов-основателей Э. Шредингером. Он предложил мысленный эксперимент, в котором также хотел показать неполноту квантовой механики. На этот раз ее неполноту при переходе от субатомных систем к макроскопическим.

Действительно, если в квантовом мире возможны смешанные состояния, то тоже самое мы можем сказать и про одно радиоактивное ядро. Согласно квантовой механике, если над ядром не производится наблюдение, то его состояние описывается суперпозицией (смешением) двух состояний — распавшегося ядра и нераспавшегося ядра. Чтобы заострить это чисто квантовое свойство, Шредингер и предложил эксперимент, в котором распавшееся ядро приводит в действие уже макроскопическое устройство, которое убивает кошку. При этом важнейший момент эксперимента состоит в том, что кошка должна находиться в закрытой коробке, так что результат опыта (жива кошка или нет) становится ясным, лишь если коробка будет открыта.

В итоге, с точки зрения классической физики получается совершенно нелепая ситуация. Кошка, сидящая в ящике, может быть и жива, и мертва одновременно. Однако совершенно очевидно, что если ящик открыть, то экспериментатор увидит только какое-нибудь одно состояние: либо "ядро распалось, кошка мертва", либо "ядро не распалось, кошка жива". Поэтому вопрос может быть поставлен так: в какой момент система перестает существовать как смешение двух состояний и выбирает одно из "чистых" состояний? Цель эксперимента в том и заключалась, чтобы показать, что квантовая механика неполна без некоторых дополнительных правил, которые указывают, при каких условиях происходит, как говорят, "коллапс волновой функции", и кошка либо становится мертвой, либо остается живой (в природе не существует состояния, промежуточного между жизнью и смертью), и перестает быть смешением того и другого.

5.3.4 Неравенства Белла

Отложим на время вопрос о "шредингеровской кошке" и напомним еще одно чисто квантовое свойство. Как мы видели, согласно квантовой механике для индивидуального события (одного радиоактивного атома, одного электрона, проходящего через две щели) результат эксперимента однозначно предсказан быть не может. Это вызывало законное беспокойство тех, кто пытался остаться в рамках классического миропонимания. В результате, была сформулирована т.н. "теория скрытых параметров", согласно которой неопределенность была связана просто с тем, что в действительности квантовый объект обладает еще каким-то одним или несколькими параметрами, которые и определяли эволюцию системы.

Действительно, представим себе, что перед нами несколько совершенно одинаковых стиральных машин. Однако даже если их программы также одинаковы, они могут отличаться временем τ , прошедшим с момента начала работы. Если по каким-то причинам показания таймера невозможно регистрировать, то величина τ может быть хорошим примером скрытого параметра, который, естественно, и будет однозначно определять моменты переключения и завершения работы.

Заслуга же английского физика Д. Белла (1928-1990) как раз и состояла в том, что он показал, как можно поставить прямой эксперимент, чтобы проверить, верна или нет теория локальных скрытых параметров. Т.е. можно ли приписать отдельной квантовой частице такие дополнительные свойства, которые при "измерении" проявлялись бы как значения некоторых ранее неизвестных величин, характеризующих квантовую систему. Покажем здесь на очень простом примере одну из форм знаменитых неравенств Белла, которые и позволяют количественно ответить на поставленный выше вопрос. Отметим, что эти неравенства были сформулированы лишь в 1964 году, т.е. спустя многие годы после того, как сама проблема была поставлена. Экспериментальная же проверка была выполнена лишь совсем недавно.

Прежде чем описывать схему эксперимента, сделаем два важных замечания. Во-первых, эксперимент стал возможен благодаря тому, что к концу двадцатого века в лаборатории научились готовить ЭПР-пары, т.е. двухчастичные системы, находящиеся в смешанном состоянии. Ниже мы рассмотрим случай, когда ЭПР-пара представляет собой два протона, описываемых волновой функцией

$$\psi = \frac{\psi_1(+)\psi_2(-) - \psi_1(-)\psi_2(+)}{\sqrt{2}}. \quad (207)$$

Здесь нижние индексы нумеруют первую и вторую частицы, а знаки $+$ и $-$ соответствуют состояниям со спином вверх и вниз. Конечно, частицы приобретут определенные значения проекции спина лишь после того, как будет проведено "измерение", т.е. каждая из этих частиц взаимодействует с измерительным прибором. Например, с таким, какой был использован в опытах Штерна-Герлаха. Эксперименты проводились и для пары ЭПР-фотонов, описываемых волновой функцией (202).

Во-вторых, по самому свойству ЭПР-пары можно быть уверенным, что если два анализатора, A_1 и A_2 , детектирующих частицы, одинаково ориентированы в пространстве (в этом случае мы будем обозначать их одинаковыми заглавными буквами), то для волновой функции (203) эти приемники зарегистрируют разные знаки проекции спина. Мы будем обозначать их как A_1^+ и A_2^- (или A_1^- и A_2^+). Поэтому если, как это предполагается в модели со скрытыми параметрами, результаты эксперимента заранее определены,

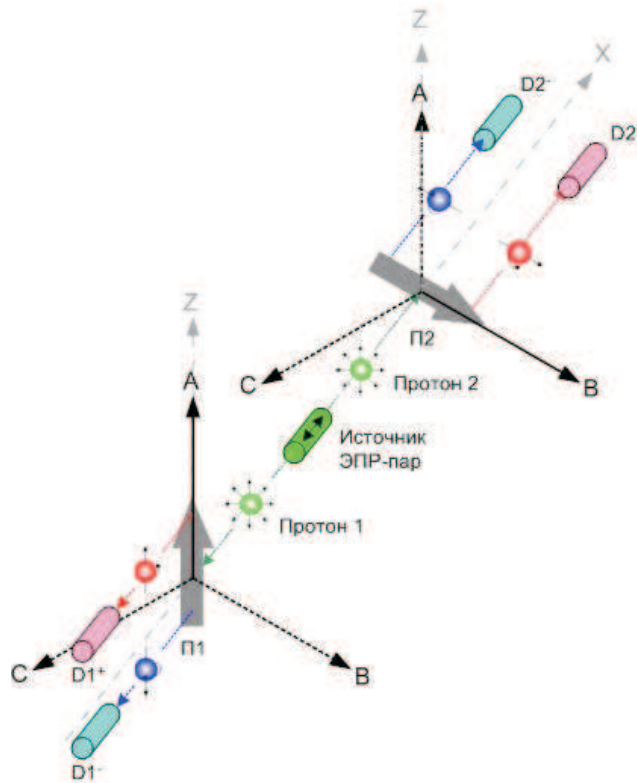


Рис. 19: Схема эксперимента по проверке неравенств Белла

то при вычислении соответствующих вероятностей можно ограничиться рассмотрением внутренних свойств лишь одной частицы. Результаты измерения второй частицы будут в точности противоположны.

Действительно, после взаимодействия в начальный момент ЭПР-частицы разлетаются, и, согласно классической физике (а, значит, и в рамках теории скрытых параметров), их локальное состояние уже никак не может зависеть от состояния другой. Однако законы сохранения никто не отменял, и поэтому если частицы возникают в результате распада другой частицы с нулевым спином (например, это могут быть фотоны, рождаемые π^0 -мезоном), то суммарный спин (или спиральность) двух частиц также должен быть равен нулю. Значит, если одна частица из ЭПР-пары при измерении будет иметь положительную проекцию спина на какую-либо ось, то измеренная проекция спина другой частицы на эту же ось непременно должна быть отрицательной.

Итак, пусть у нас имеется источник разлетающихся ЭПР-пар и два детектора, каж-

дый из которых, как показано на Рис. 19, может находиться в трех положениях A , B и C . В нашем случае они будут измерять проекции спина частиц (для фотонной пары — факт их прохождения или непрохождения через соответствующий поляризатор)¹⁵. Для простоты во время нашего эксперимента для каждой ЭПР-пары будем выбирать ориентацию детекторов A , B и C случайным образом. Тогда с вероятностью $1/3$ ориентация детекторов будет одинаковой¹⁶. В этом случае, полностью эквивалентном опыту Аспе, показания детекторов должны быть противоположными. Т.е. должны отсутствовать события $A_1^+ A_2^+$, $A_1^- A_2^-$, $B_1^+ B_2^+$, $B_1^- B_2^-$, $C_1^+ C_2^+$ и $C_1^- C_2^-$. Что же касается событий $A_1^+ A_2^-$, $A_1^- A_2^+$, $B_1^+ B_2^-$, $B_1^- B_2^+$, $C_1^+ C_2^-$ и $C_1^- C_2^+$, то вероятности выпадения каждого из них должны быть одинаковыми. Проверка последнего условия становится важным тестом, показывающим, насколько хорошо налажена аппаратура. Если же ориентации двух детекторов будут различаться, то тогда, естественно, будут регистрироваться все возможные комбинации.

Здесь мы и подошли к ключевому месту в рассуждениях Белла. Если предположить, что результаты эксперимента определяются скрытыми параметрами, то тогда для каждой частицы должна существовать "программа", определяющая вероятности выпадений того или иного события. Например, величина $\mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^-)$ определяет вероятность того, что в случае, если при полете к детектору он будет находиться в положении A , то измеренная этим детектором проекция спина будет положительной, а при ориентациях B и C — отрицательной. Всего таких комбинаций будет $2^3 = 8$, по два варианта проекции спина для каждой из трех возможных ориентаций детекторов. Суммарная же вероятность всех возможных событий будет, естественно, равна единице.

Поскольку же в рамках теории скрытых параметров все события должны считаться независимыми, то, например, вероятность того, что как первый детектор в положении A , так и второй детектор в положении B зафиксируют протоны в состояниях со спином

¹⁵Здесь мы воспользовались изложением, приведенным в <http://eslitak.livejournal.com/221098.html>.

¹⁶По $1/9$ на каждую из ориентаций $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ и $C_1 C_2$.

вверх, следует записать в виде

$$\mathcal{P}(A_1^+ B_2^+) = \mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^+) + \mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^-). \quad (208)$$

Т.е. вероятность события $A_1^+ B_2^+$ есть сумма вероятностей всех возможных событий, совместимых с $A_1^+ B_2^+$. Обратите внимание, что все ориентации детекторов в правой части этого уравнения относятся не ко второй, а к первой частице. Поэтому, как уже подчеркивалось, знак для детектора B_1 справа должен быть противоположен знаку для детектора B_2 слева.

Соответственно, можно записать, что

$$\mathcal{P}(B_1^- C_2^-) = \mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^+) + \mathcal{P}(A_1^- B_1^- C_1^+), \quad (209)$$

$$\mathcal{P}(A_1^+ C_2^+) = \mathcal{P}(A_1^+ B_1^+ C_1^-) + \mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^-). \quad (210)$$

Сложив теперь соотношения (205) и (206), получаем

$$\mathcal{P}(B_1^- C_2^-) + \mathcal{P}(A_1^+ C_2^+) = [\mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^+) + \mathcal{P}(A_1^+ B_1^- C_1^-)] + \mathcal{P}(A_1^- B_1^- C_1^+) + \mathcal{P}(A_1^+ B_1^+ C_1^-). \quad (211)$$

Поскольку выражение в квадратных скобках (при условии независимости событий, которое здесь неявно предполагается!) равно $\mathcal{P}(A_1^+ B_2^+)$, а все вероятности \mathcal{P} есть величины неотрицательные, получаем в итоге

$$\mathcal{P}(A_1^+ B_2^+) \leq \mathcal{P}(B_1^- C_2^-) + \mathcal{P}(A_1^+ C_2^+). \quad (212)$$

Это и есть одно из неравенств Белла. Поскольку же ориентация детекторов по условию наших опытов случайна, то неравенство (208) можно переписать в виде

$$N(A_1^+ B_2^+) \leq N(B_1^- C_2^-) + N(A_1^+ C_2^+), \quad (213)$$

где N есть полное число событий с данными свойствами.

Покажем теперь, что в рамках квантовой механики неравенство Белла (209) может быть нарушено. Действительно, пусть детекторы в положении A повернуты относительно детекторов в положении C на угол Θ в одну сторону, а детекторы в положении B — на угол Θ относительно C в противоположном направлении. По аналогии с формулой

(44) для фотонов легко сообразить, что для каждой ЭПР-пары вероятность того, что и детектор A , и детектор C зарегистрируют протоны с положительной проекцией спина, следует записать в виде

$$\mathcal{P}(A_1^+ C_2^+) = \frac{1}{2} \sin^2(\Theta/2). \quad (214)$$

Действительно, вероятность этого события должна быть равна $1/2$ при $\Theta = 180^\circ$, т.е. для противоположно ориентированных детекторов. Вторая половина будет соответствовать событию $A_1^- C_2^-$. Аналогично, получаем

$$\mathcal{P}(B_1^- C_2^-) = \frac{1}{2} \sin^2(\Theta/2). \quad (215)$$

А вот для вероятности $\mathcal{P}(A_1^+ B_2^+)$ мы должны записать

$$\mathcal{P}(A_1^+ B_2^+) = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta, \quad (216)$$

поскольку угол между поляризаторами A и B равен 2Θ . В результате, неравенство (209) приобретает следующий вид

$$\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \leq \frac{1}{2} \sin^2(\Theta/2) + \frac{1}{2} \sin^2(\Theta/2), \quad (217)$$

или, после сокращений,

$$\frac{1}{2} \sin^2 \Theta \leq \sin^2(\Theta/2). \quad (218)$$

Но, как хорошо известно из тригонометрии, $\sin \Theta = 2 \sin(\Theta/2) \cos(\Theta/2)$. В итоге, получаем

$$\cos^2(\Theta/2) \leq 1/2, \quad (219)$$

что, очевидно, выполняется не для всех углов. Итак, мы видим, что предположение о независимости свойств разлетающейся ЭПР-пары приводит нас к противоречию.

Что же произошло? Где, в каком звене в достаточно прозрачном выводе соотношения (209), основанном на классической теории вероятности, была допущена неточность? Ну конечно же, в предположениях (204)–(206), когда мы неявно предположили, что в момент регистрации разнесенных на большое расстояние частиц ЭПР-пары их можно рассматривать независимо друг от друга. Т.е. мы на самом деле не имели права предполагать,

что частицы уже приобрели какую-то определенную поляризацию до взаимодействия с детектором. Нарушение неравенств Белла как раз и означает справедливость этой интерпретации.

Впервые нарушение неравенств Белла было подтверждено в лаборатории Сакле (Франция) в 1976 году. При этом эксперимент проводился по описанной выше схеме, т.е. измерялись проекции спина протонов на три различных направления. В 2008 году в экспериментах, проведенных на Канарских островах Ла-Пальма и Тенерифе (Испания) измерялись уже поляризации 19 917 фотонных пар, причем расстояние между детекторами достигало 144 км (при этом неравенство Белла было нарушено с уровнем достоверности, превышающим 16 среднеквадратических отклонений). А осенью 2013 года пришло сообщение, что японской корпорации NTT удалось разнести запутанные фотоны на расстояние уже в 300 км.

Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что теория скрытых параметров, по крайней мере в ее простейшей версии, противоречит эксперименту. И мы должны признать, что в микромире действительно могут реализовываться смешанные состояния, невозможные с точки зрения классической физики. С другой стороны, спор ни в коей мере нельзя считать завершенным, поскольку приверженцы теории скрытых параметров продолжают находить на все новые детали и возможности для построения полной квантово-механической теории. Пока же ясно только то, что самые простые виды теорий скрытых параметров не соответствуют действительности.

5.3.5 Копенгаген или иные миры?

Вновь подведем итоги. Мы должны признать, что свойства микромира принципиально отличаются от привычных нам свойств, известных из повседневного опыта. Поэтому при анализе процессов, происходящих на малых масштабах, наша интуиция перестает работать, и мы оказываемся совершенно беспомощными перед лицом многочисленных наблюдательных фактов. Суммируя такие чисто квантовые свойства микромира, которые мы здесь обсуждали, можно сказать, что:

1. Элементарные частицы обладают внутренними степенями свободы. Примером является спин частицы, который не связан с собственным вращением частиц, однако проявляет себя как их собственный момент импульса.
2. Неразличимость частиц существенно меняет статистические свойства квантовых систем. Для бозонов (частиц с целым спином) они проявляются как дополнительные силы притяжения, а фермионов (частиц с полуцелым спином) — как силы отталкивания.
3. Линейность квантовой механики предсказывает существование смешанных состояний. Лишь в процессе измерения квантовая система переходит в одно из состояний с определенными значениями физических параметров. При этом волновая функция, описывающая несколько частиц, нелокальна. Это означает, что квантово-механическая связь между частицами не прерывается даже в том случае, если они находятся на очень больших расстояниях.

Первые два пункта мы уже достаточно подробно обсудили выше. Здесь же пришло время сделать заключительные замечания об особенностях квантового описания одиночных событий, которые в конечном счете и связаны с существованием смешанных состояний, невозможных с классической точки зрения.

Как уже говорилось, первый рецепт, возникшей как результат многолетних мучительных раздумий лучших физиков начала 20 века, был сформулирован Н.Бором и В.Гейзенбергом и носит название копенгагенской интерпретации. Ее основные положения можно сформулировать следующим образом. Все события в мире квантовой механики носят вероятностный характер. При этом, как мы видели, очень удобным объектом, описывающим квантовую систему, является волновая функция, квадрат модуля которой задает распределение вероятности обнаружения этой самой частицы в той или иной точке пространства. Например, электронные облака, изучаемые в школьном курсе химии — это и есть распределение в трехмерном пространстве квадрата волновой функции, соответствующей электрону.

Однако главная особенность копенгагенской интерпретации заключается не в вероятностной природе объектов, которыми оперирует квантовая механика, а в понятии наблюдения. С точки зрения этой интерпретации всякое измерение неотвратимым образом воздействует на систему. Поэтому в рамках копенгагенской интерпретации в случае со шредингерской кошкой (которая, кстати, и была придумана для иллюстрации коллапса волновой функции) неоднозначность нарушается в тот момент, когда продукты распада ядра взаимодействуют с классическим детектором. Вследствие этого система теряет свои квантовые свойства и становится классической. Вместо размазанной волновой функции у наблюдателя оказывается обычная частица, локализованная в точке регистрации. Этот процесс получил название редукции фон Неймана, или коллапса волновой функции (соответствующая работа была опубликована в 1932 году). Вопрос же о том, насколько подобный процесс реален, остается за рамками данной интерпретации. Например, если коллапс осуществляется мгновенно, то это противоречит принципу причинности, согласно которому всякое взаимодействие не может распространяться быстрее скорости света.

Как мы видим, копенгагенскую интерпретацию нельзя назвать во всем последовательной, по крайней мере с точки зрения нашего повседневного опыта. Поэтому предпринимались неоднократные попытки сформулировать другой подход, в котором замеченные под ковер неудобные вопросы все же были в какой-то степени объяснены. И здесь наиболее популярной альтернативой стала т.н. многомировая интерпретация, первую версию которой в своей кандидатской диссертации в 1957 году предложил Х. Эверетт¹⁷.

Многомировая интерпретация (англ. Many-worlds interpretation) — это такая интерпретация квантовой механики, в которой предполагается существование параллельных Вселенных, в каждой из которых действуют одни и те же законы природы и которым свойственны одни и те же мировые постоянные. Поэтому в рамках этого подхода предполагается, что уравнению Шредингера удовлетворяет некоторая единая функция состояния для всех Вселенных, которая никогда не испытывает недетерминированного кол-

¹⁷Поскольку Эверетт перестал заниматься теоретической физикой после окончания аспирантуры, дальнейшее развитие его идей проводили другие исследователи, среди которых можно выделить Брайса Девитта.

лапса. Однако при этом же считается, что все эти Вселенные находятся в различных квантовых состояниях. Поэтому в рамках многомировой интерпретации вместо коллапса волновой функции, который сопутствует измерению в копенгагенской интерпретации, предполагается, что в действительности процесс измерения состоит в нарушении квантовой суперпозиции нескольких (а возможно, и бесконечного числа) состояний одинаковых невзаимодействующих между собой параллельных Вселенных.

В результате, в рамках многомировой интерпретации опыта со шредингеровской кошкой мы должны согласиться с тем, что одновременно существуют две совершенно одинаковые Вселенные, отличающиеся лишь тем, что в одной из них атом распался (и кошка мертва), а в другой атом еще не распался (и кошка жива). Т.е. оба состояния атома (а также живая и мертвая кошка) существуют одновременно. Когда же наблюдатель открывает ящик, то он взаимодействует с таким необычным с точки зрения классической физики раздвоенным объектом, в результате чего образуются два состояния наблюдателя, соответствующие живой и мертвой кошке, которые с этого момента уже не могут взаимодействовать друг с другом. Иными словами, когда ящик открывается, Вселенная расщепляется на две разные Вселенные, в одной из которых наблюдатель видит мертвую кошку, а в другой — живую.

Предложив читателю самому судить, насколько многомировая интерпретация лучше копенгагенской, стоит однако подчеркнуть следующее важное обстоятельство. Согласно критериям научности, любая теория должна быть проверяема. Однако многомировая интерпретация предполагает, что параллельные миры не взаимодействуют друг с другом. Значит, их существование проверено быть не может. Поэтому согласно современным критериям научности данную гипотезу можно относить к ненаучным. С другой стороны, отметим, что полезность интерпретации может обсуждаться лишь в связи с возможностью ее успешного использования. Так, например, анализ некоторых вопросов в многомировой интерпретации хотя и приводит к тем же результатам, что и в других случаях, но является более простым с логической точки зрения. Это и объясняет ее популярность в некоторых областях науки, особенно в квантовой космологии.

Итак, вопрос об интерпретации квантовой механики, по существу, до сих пор остается открытым. Ни копенгагенская, ни многомировая интерпертация не могут претендовать на последовательное объяснение всех явлений, связанных с квантовыми процессами. Поэтому очень многие исследователи придерживаются "никакой" интерпретации. Она состоит в том, что квантовая механика принципиально не может претендовать на описание индивидуального события, а может определить лишь его вероятность. "Замолчи и вычисляй" (shut up and calculate) — вот девиз этой точки зрения. И действительно, если не задавать себе неудобных вопросов, то аппарат квантовой механики совершенно достаточен для описания наблюдаемых статистических явлений микромира. По крайней мере, до сих пор никаких противоречий между теоретическими предсказаниями и наблюдениями обнаружено не было. Нетривиальность же, как бы видели, возникает лишь при анализе индивидуальных событий.

Таким образом, приходится честно признаться, что квантовая механика еще не открыла нам всех своих тайн. Однако постепенно, шаг за шагом, наше понимание законов микромира продолжает расширяться. При этом сейчас надежда на существенное продвижение связана с технологическим прогрессом, достигнутым в последнее время, который позволяет проводить эксперименты, невозможные еще 10-20 лет назад. Об этом говорит и сам факт присуждения Нобелевской премии по физике за 2012 год Сержу Арошу (Франция) и Дэвиду Уайнленду (США), которые в своих работах показали, что запрет на неразрушающие наблюдения (когда мы не можем определить свойства квантовых систем, не изменяя их состояние) все же не является фундаментальным и в некоторых случаях его можно обойти.

5.4 В неведомый мир

5.4.1 Квантовая гравитация

В заключение этого раздела хотелось бы сказать еще несколько слов относительно следующих шагов, которые были предприняты в попытке продвинуться дальше в понимании основ квантового мира. Прекрасно понимая, что это тема для отдельного большого

разговора¹⁸, мы сделаем здесь лишь два замечания, касающихся квантовой гравитации. Точнее, мы поговорим о причинах, почему она до сих пор не построена.

Как было показано еще на Рис. 11, эта теория должна описывать процессы, происходящие на масштабах, сравнимых или даже меньших, чем планковская длина. Поэтому вряд ли такая теория сможет иметь какое-нибудь практическое применение. Однако вся история развития физики свидетельствует о том, что осознание границ применимости каждой теории давали энергичный импульс к развитию не только этой конкретной теории, но и всей физики в целом. Здесь же речь идет об одной из фундаментальных проблем естествознания.

Основная трудность в построении квантовой гравитации заключается в том, что две физические теории, которые она пытается связать воедино, а именно квантовая механика и общая теория относительности, опираются на совершенно разные наборы принципов. Так, квантовая механика описывает временную эволюцию физических систем (например атомов или элементарных частиц) на фоне внешнего пространства-времени. В ОТО же внешнего пространства-времени нет — его свойства сами заранее неизвестны и должны определяться как решение поставленной задачи. Ситуация усугубляется еще и тем, что прямые эксперименты в области квантовой гравитации, из-за слабости самих гравитационных взаимодействий, в настоящее время невозможны. Поэтому, в отличие от самой квантовой механики, в поиске правильной формулировки квантовой гравитации приходится опираться только на общие теоретические принципы.

Ниже мы постараемся прокомментировать два ключевых момента, которые возникают на пути построения квантовой гравитации. Первая из них связана с необходимостью рассматривать пространство-время как дискретную среду. Действительно, как мы видели, одним из краеугольных камней, лежащих в основании квантового микромира, является принцип дискретности. И атомные уровни энергии, и массы элементарных частиц могут принимать лишь вполне определенный набор значений. Необходимость же

¹⁸Интересующемуся читателю можно посоветовать замечательную книгу Б. Грина "Элегантная Вселенная", М.: УРСС, 2004

описания на едином языке и материи, и пространства-времени (которое в общей теории относительности как раз и определяется свойствами материи), неизбежно требует какого-то квантования самого пространства-времени. При этом физический смысл такого квантования до сих пор абсолютно неясен, и сколь-либо разумного продвижения в этом вопросе до сих пор нет.

Вторая проблема — это проблема нулевых колебаний. Как мы видели, ключевой принцип квантовой механики, а именно соотношение неопределенностей, неизбежно приводит к тому, что основное состояние любого осциллятора имеет ненулевую энергию. Поэтому мы вынуждены приписать ненулевую энергию и физическому вакууму, который по своему определению и есть состояние с наименьшей энергией. В результате, поскольку само число различных колебаний физических полей (электромагнитных, нейтринных, волн, связанных с различными частицами материи) бесконечно, бесконечной оказывается и энергия вакуума.

К счастью, поскольку нас обычно интересует не сама энергия, а ее изменение в результате какого-нибудь процесса, то вне рамок общей теории относительности с такими бесконечностями удалось справиться¹⁹. В Приложении 8.8 рассмотрен т.н. эффект Казимира, состоящий в притяжении очень близко расположенных хорошо проводящих пластин. При этом сила притяжения связана с тем, что пластины изменяют спектр нулевых колебаний вакуума, в результате чего разность (бесконечных!) энергий нулевых колебаний электромагнитного поля в присутствии и отсутствии пластин оказывается конечной величиной, зависящей от расстояния между пластинами.

Однако в рамках общей теории относительности такая процедура становится невозможной, поскольку любая форма материи (частицы, поля), обладающая энергией, должна приводить к искривлению пространства. А бесконечная энергия — к бесконечно сильному искривлению. Поскольку кривизна нашего мира, безусловно, конечна, то мы вынуждены признать, что (по крайней мере на первый взгляд) в этом вопросе квантовая

¹⁹За изобретение соответствующей процедуры в 1965 году Р. Фейнман, С. Томонага и Дж. Швингер получили Нобелевскую премию.

механика и общая теория относительности также несовместимы. Однако, как уже говорилось, был найден очень изящный способ избежать бесконечной энергии вакуума, так что эта трудность была преодолена.

5.4.2 Прорыв М.П. Бронштейна — квантовый предел разрешения

Впервые принципиальную невозможность описывать пространство-время как непрерывную среду на масштабах, меньших планковского масштаба $\Delta x < l_{\text{Pl}}$, еще в середине тридцатых годов 20 века осознал наш выдающийся физик-теоретик Матвей Петрович Бронштейн (1906-1938). На десятилетия опередив свое время, эта работа сформулировала проблему, которая до сих пор не нашла разумного решения. Удивительно, но рассуждения М.П. Бронштейна могут быть изложены на прозрачном языке, позволяющем сразу получить планковский масштаб как наименьший размер, при котором пространство-время еще можно рассматривать как непрерывную субстанцию. Ниже все оценки делаются по порядку величины. Еще раз подчеркнем, что сами рассуждения будут совершенно аналогичны тем, которые проводил М.П. Бронштейн.

Итак, предположим, что мы хотим измерять расстояния с помощью зонда массы M . Понятно, что у нас возникнут трудности, связанные с эффектами кривизны пространства-времени, если размер детектора будет сравним с радиусом горизонта событий

$$r_g \sim \frac{GM}{c^2}, \quad (220)$$

поскольку на масштабах порядка r_g возникают причинно несвязанные области. Например, свет не может выйти за пределы черной дыры, радиус которой как раз и задается соотношением (216).

Сформулируем это условие несколько иначе: проблема горизонта (и, значит, проблема непрерывности пространства-времени) возникнет в том случае, если напряженность гравитационного поля $g \sim GM/r^2$, т.е. ускорение пробных тел, вблизи тела массы M приблизится к критическому значению

$$g_{\text{cr}} \sim \frac{c^4}{GM}. \quad (221)$$

Или, что то же самое, что сила, действующая на зонд, будет по порядку величины равна

$$F \sim \frac{c^4}{G}. \quad (222)$$

Эта сила, которая, как мы видим, есть универсальная физическая постоянная, равная приблизительно 10^{49} эрг/см, настолько велика (она на многие порядки превышает силу притяжения между Землей и Солнцем), что ее трудно сравнить с каким либо реальным процессом. Поэтому соответствующая часть у самого Бронштейна так и называлась: "Давайте мысленно поэкспериментируем".

С другой стороны, благодаря соотношению неопределенностей стремление измерить малый масштаб Δx за счет уменьшения размера тела немедленно приведет к появлению достаточно большого импульса $M\Delta v \sim \hbar/\Delta x$. Но, как известно, в общей теории относительности источником гравитационных полей, как и в электромагнетизме, являются не только массы, но и потоки масс. При этом для оценки их воздействия на пробные тела удобно воспользоваться известной аналогией уравнений Эйнштейна с уравнениями Максвелла, согласно которой в слабых стационарных полях на тело массы M действует сила

$$\mathbf{F} = M \left(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right), \quad (223)$$

полностью аналогичная силе Лоренца. Здесь \mathbf{H} — т.н. гравитомагнитное поле, источником которого и являются потоки масс. При этом, как оказалось, закон, по которому определяется поле \mathbf{H} , оказывается полностью эквивалентным закону Био-Савара-Лапласа для магнитного поля \mathbf{B} . Например, как хорошо известно, магнитное поле прямого тока $I = \rho_e v S$ ($\rho_e = Q/V$ — плотность заряда, v — скорость частиц, S — поперечное сечение провода) можно записать в виде

$$B_\varphi = \frac{2I}{cr_\perp}, \quad (224)$$

где r_\perp есть расстояние от оси провода. Соответственно, массивный стержень с плотностью массы ρ_m и движущийся со скоростью V вдоль своей оси будет создавать гравитомагнитное поле

$$H_\varphi = -\frac{8GI_m}{cr_\perp}, \quad (225)$$

где $I_m = \rho_m V S$. Отличие, как мы видим, состоит лишь в знаке (одноименные заряды в гравитации притягиваются) и в численном коэффициенте.

В результате, попытка измерить малые масштабы зондом массы M , вследствие соотношения неопределенностей, неизбежно приводит к движению зонда и, как следствие, к дополнительному силовому воздействию на пробные тела в его окрестности. Подставляя теперь в правую часть уравнения (221) "ток" массы $I_m \sim \rho_m \Delta v (\Delta x)^2$, где

$$\rho_m \sim \frac{M}{(\Delta x)^3}, \quad (226)$$

получаем для гравитомагнитного поля вблизи тела $H \sim G \rho_m v \Delta x / c$

$$H \sim \frac{GM \Delta v}{c(\Delta x)^2} \sim \frac{G\hbar}{c(\Delta x)^3}. \quad (227)$$

Соответственно, дополнительная сила $\Delta F \sim HM \Delta v / c$ принимает вид

$$\Delta F \sim \frac{G\hbar^2}{c^2(\Delta x)^4}. \quad (228)$$

Сравнивая теперь соотношения (218) и (224), легко видеть, что ускорение пробных тел вблизи зонда будет меньше опасного предела лишь при $\Delta x > l_{Pl}$, где $l_{Pl} = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ (104) — планковская длина.

Таким образом, мы действительно приходим к выводу, что попытка измерения длин на масштабах, меньших l_{Pl} , заранее обречена на неудачу: любой зонд, сжатый до планковских масштабов, так возмутит пространство-время, что в нем возникнут области, разделенные горизонтом событий. Иными словами, на планковских масштабах объединение общей теории относительности и квантовой механики в рамках стандартных представлений о непрерывности пространства-времени невозможно.

5.4.3 Суперсимметрия — объединение фермионов и бозонов

Как уже говорилось, вторым труднопреодолимым препятствием, вставшим на пути построения квантовой гравитации, стала бесконечная энергия нулевых колебаний, которая, как мы видели, неизбежно возникает в квантовой механике. В этом вопросе продвижение было достигнуто благодаря нетривиальному объединению фермионов и бозонов, которое прлучило название суперсимметрии.

Прежде чем совсем вкратце обсудить основную идею, лежащую в основе суперсимметричных теорий, рассмотрим уже обсуждавшийся выше вопрос об уровнях энергии электрона во внешнем однородном магнитном поле. Оказывается, приведенная выше формула (96) требует существенного уточнения. Дело в том, что на самом деле мы не учитывали спин электрона. Точнее — его собственный магнитный момент, природа которого тесно связана со спином. Как мы видели, магнитный момент квантовых частиц с массой m_p удобно выражать в единицах магнетона Бора $\mu_B = e\hbar/2m_p c$ (39). Замечательным же свойством электронов (которое следует из релятивистской теории и, которое, к сожалению, также нельзя объяснить "на пальцах") состоит в том, что, как уже говорилось, магнитный момент электрона в точности равен магнетону Бора

$$\mu_e = \mu_B. \quad (229)$$

В результате, для точного определения энергии электрона в магнитном поле достаточно добавить к энергии электрона (96) дополнительную величину $\delta\mathcal{E} = -\mu\mathbf{B}$ (??), соответствующую энергии взаимодействия любого магнитного момента μ с магнитным полем \mathbf{B} . Правда, здесь есть одно существенное отличие — как и спин, проекция магнитного момента на магнитное поле (а только эта величина и входит в ответ!) может принимать лишь два значения $\pm\mu_B$. В итоге, полная энергия может быть записана в виде

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma\right) \hbar\omega_c + \frac{p_z^2}{2m_e}, \quad (230)$$

где $\sigma = \pm 1/2$ — это как раз два возможных значения проекции спина на направление магнитного поля.

Здесь прежде всего следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Как показано на Рис. 20, без учета спина электрона все уровни энергии, соответствующие поперечному движению, были двукратно вырождены, а энергия нижнего состояния не была равна нулю. Учет же взаимодействия магнитного момента электрона с внешним магнитным полем приводит к тому, что энергия нижнего уровня оказывается в точности равной нулю. На этом уровне снимается и вырождение; все же остальные уровни по

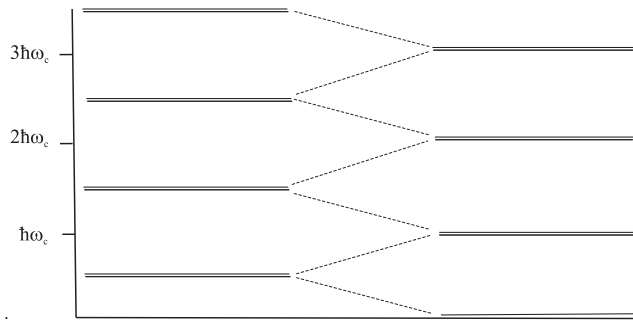


Рис. 20: Уровни Ландау без учета (слева) и с учетом (справа) спина электрона

прежнему остаются двукратно вырожденными. В итоге, можно сделать вывод, что учет фермионной природы электронов позволяет снять одно из основных препятствий на пути построения квантовой гравитации.

Как оказалось, такая ”тонкая подгонка” не случайна. В этом сегменте нерелятивистская квантовая механика обладает дополнительной внутренней симметрией, подобной той, которая и лежит в основе современной теории суперсимметрии. Впервые суперсимметрию предложили в 1973 году австрийский физик Ю. Весс и итальянский физик Б. Зумино для описания ядерных частиц. Математический аппарат теории был открыт ещё раньше, в конце 1960-х годов, советскими физиками Ю. А. Гольфандом и Е. П. Лихтманом. Суперсимметрия же впервые возникла в контексте версии теории струн, однако алгебра суперсимметрии позднее стала успешно использоваться и в других областях физики.

Напомним, что в существующей сейчас Стандартной модели элементарных частиц есть четкое противопоставление между частицами материи и частицами, которые переносят взаимодействие между ними. Фундаментальные частицы материи — кварки и лептоны — являются фермионами, т.е. частицами с полуцелым спином, в то время как переносчики сил (фотон, глюоны, W - и Z -частицы) являются бозонами, т.е. частицами с целым спином. Фермионы и бозоны ведут себя настолько по-разному, что, казалось бы, не было никакой возможности объединить их в одно семейство.

Однако именно это удалось сделать в рамках математических теорий, опирающихся на идею суперсимметрии, т.е. на идею единой природы фермионов и бозонов. Как

оказалось, и фермионы, и бозоны можно рассматривать как части некоторого единого семейства, получившего название супермультиплета. Однако для этого пришлось предположить, что все эти частицы "живут" не в обычном пространстве, а в суперпространстве — расширении обычного четырехмерного пространства-времени, к которому добавляются совершенно необычные измерения. Оказывается, если супермультиплет повернуть в этом суперпространстве, то бозоны могут превратиться в фермионы и наоборот. Иными словами, можно представить себе бозоны и фермионы как разные проекции на наш обычный мир единого объекта, живущего в суперпространстве.

Конечно, подобная математическая процедура не может остаться безнаказанной. В рамках теории суперсимметрии предходится предположить, что у каждой из известных нам частиц должен существовать "суперпартнер". При этом сейчас совершенно точно установлено, что наш мир не является суперсимметричным в смысле точной симметрии, так как в любой суперсимметричной модели фермионы и бозоны, связанные суперсимметричным преобразованием, должны обладать одинаковыми массой и зарядом. Ясно, что это требование не выполняется для известных в природе частиц. Предполагается, тем не менее, что это может иметь место при достаточно больших энергиях. В таком случае частицы-суперпартнеры обычных частиц должны быть более тяжелыми по сравнению с обычными частицами.

Понятно, что поиск суперпартнеров обычных частиц стал одной из основных задач современной физики высоких энергий. В частности, ожидалось, что суперсимметричные частицы могут быть открыты на современных ускорителях. Однако серия экспериментов, проведенных в 2011 году на Большом адронном коллайдере, показала, что основные положения теории не находят своего подтверждения, по крайней мере ее в самой упрощенной версии. При этом, однако, полученные результаты не опровергают более сложный вариант теории. С другой стороны, независимо от существования суперсимметрии в природе, математический аппарат суперсимметричных теорий оказывается очень полезным в самых различных областях физики. В частности, суперсимметричная квантовая механика позволяет находить точные решения весьма нетривиальных уравнений Шре-

дингера. Суперсимметрия оказывается полезной и в некоторых задачах статистической физики.

6 Астрофизические приложения

6.1 Радиоастрономия — простейшие примеры

Мы начнем обсуждение квантовых явлений, которые проявляются в различных астрофизических объектах, с радиодиапазона. Дело том, что в настоящее время методами радиоастрономии в спектре многих космических источников обнаружено большое количество спектральных линий различных атомов и молекул, изучение которых по разным причинам невозможно в земных лабораториях. Например, это связано с чрезвычайной разреженностью вещества. Поэтому радиоастрономия дает нам уникальную возможность для анализа элементарных процессов, и, следовательно, для получения дополнительной информации, столь необходимой подчас для полного понимания рассматриваемых явлений.

6.1.1 Радиационные переходы при больших n

Рассмотрим прежде всего спектральные линии, возникающие при переходах между высоковозбужденными уровнями атомов с различными главными квантовыми числами n . Такие атомы образуются в космической среде в основном в результате рекомбинации, т.е. в результате захвата ионом свободного электрона. Как было показано в разделе 4.4.2, при $n > 1$ "радиус орбиты" электрона в n^2 раз превышает радиус Бора, а частота излучения, соответствующая двум соседним уровням n и $n - 1$ в n^3 раз меньше, чем для линий серии Лаймана, в которых переход осуществляется на уровень $n = 1$. Поэтому при больших n размер атома должен быть гораздо больше, а излучаемая частота — гораздо меньше, чем для обычных атомов с $n \sim 1$.

Подумаем теперь, чем может быть ограничена величина n . Для этого нам понадобится соотношение неопределенностей энергия-время. Действительно, как мы уже отмечали в разделе 4.1.3, если время жизни электрона Δt , находящегося на некотором уровне, не бесконечно велико, то это должно привести к уширению уровня на величину $\Delta \mathcal{E} \sim \hbar / \Delta t$. Понятно, что если расстояние между энергетическими уровнями окажется меньше $\Delta \mathcal{E}$,

то дискретные уровни энергии вообще перестанут существовать.

Как оказалось, причиной, препятствующей существованию еще более высоковозбужденных атомов, оказалось фоновое реликтовое радиоизлучение. Дело в том, что с увеличением n , когда частоты соответствующих переходов смещаются из оптической области в сторону радиодиапазона, яркостная температура фона растет с уменьшением частоты. По этой причине с увеличением уровня возбуждения атома n растет плотность квантов, способных ионизировать атом²⁰. Одновременно с ростом n увеличиваются и сечения таких переходов. Следовательно, при больших n время жизни атома на данном уровне становится столь малым (а ширина уровней столь большой), что происходит перекрытие соседних энергетических уровней. Поэтому при достаточно больших n никаких отдельных уровней энергии уже просто не будет. В итоге, было показано, что отдельные энергетические уровни могут существовать лишь до $n \sim 1000$. При таких n размер атома, как легко проверить, будет составлять уже доли миллиметра, так что атом становится вполне макроскопическим объектом.

Возможность наблюдения высоковозбужденных атомов с $n \sim 100$ были теоретически предсказаны Н.С. Кардашевым в 1959 году и в том же году переход между уровнями 91 и 90 был обнаружен на радиоастрономической станции ФИАН в Пущино — будущей пушинской радиоастрономической обсерватории (ПРАО) ФИАН. Практически одновременно с наблюдениями в ФИАНе поиск радиолиний возбужденного водорода проводили радиоастрономы главной астрономической обсерватории (ГАО) в Пулково. В мае 1964 года им удалось обнаружить еще более длинноволновую линию, излучаемую водородом при переходах $105 \rightarrow 104$. Частота линии в соответствии с расчетами равнялась 5763 МГц (5.2 см). В августе 1964 года результаты обеих групп были доложены на XII Генеральной Ассамблее Международного Астрономического Союза в Гамбурге и явились полной неожиданностью для зарубежных радиоастрономов, которые поначалу скептически относились к самой возможности существования таких высоковозбужденных атомов. Од-

²⁰Это значит, что электрон, поглотивший фотон, приобретет достаточную энергию, чтобы потерять связь с ядром.

нако уже в 1965 году в Национальной радиоастрономической обсерватории в Грин-Бэнк (НРАО, США) в диапазоне 6 см была зарегистрирована линия водорода при переходах между уровнями 110 и 109, а в Гарвардском университете наблюдались еще две линии $157 \rightarrow 156$ и $159 \rightarrow 158$ (18 см). Затем к исследованиям радиолиний высоковозбужденных атомов — рекомбинационных радиолиний — подключились радиоастрономические группы из других стран. В Таблице 2 показаны самые высоковозбужденные атомы, которые были зарегистрированы к настоящему времени.

Таблица 2: Наблюдаемые высоковозбужденные атомы

переход	длина волны	размер атома	место обнаружения
$767 \rightarrow 766$	20.5 м	0.031 мм	Харьков, 1990
$749 \rightarrow 747$	9.54 м	0.030 мм	Пушино, 1989
$733 \rightarrow 732$	18 м	0.028 мм	Харьков, 1983
$632 \rightarrow 631$	11.5 м	0.021 мм	Харьков, 1980
$566 \rightarrow 565$	8.8 м	0.017 мм	НРАО, 1989
$539 \rightarrow 538$	7.12 м	0.015 мм	Пушино, 1983
$428 \rightarrow 427$	3.56 м	0.010 мм	Пушино, 1983
$301 \rightarrow 300$	1.24 м	4.8 мкм	Джодрел Бэнк, 1978
$254 \rightarrow 253$	74.3 см	3.4 мкм	НРАО, 1967
$159 \rightarrow 158$	18.2 см	1.3 мкм	Гарвард, 1966
$110 \rightarrow 109$	5.99 см	0.64 мкм	НРАО, 1965
$105 \rightarrow 104$	5.21 см	0.58 мкм	Пулково, 1964
$91 \rightarrow 90$	3.38 мм	0.43 мкм	Пушино, 1964

Рекомбинационные (или, как их еще называют, ридбергские) радиолинии оказались весьма эффективным средством в проведении астрофизических исследований. Эти линии уникальны как по количеству переходов, так и по ширине диапазона, в котором могут наблюдаться. В шкале электромагнитных волн они занимают около 5 порядков, что позволяет исследовать астрономические объекты, существенно отличающиеся по своим

физическим свойствам. Наиболее обильную информацию они дают о межзвездной среде, главным образом — об областях ионизованного газа. Наблюдаются также линии He, C (вплоть до перехода $732 \rightarrow 731$) и других элементов. Частоты их линий мало отличаются от частот водородных переходов. Это объясняется тем, что в высоковозбужденном атоме один из электронов расположен далеко от атомного остатка и воспринимает его как точечный элементарный заряд, равный заряду протона. Спектр такой системы также водородоподобный, т.е. имеет те же ридберговские уровни энергии и переходы, что и атом водорода. Разница состоит лишь в массе атомного остатка.

6.1.2 Линия 21 см

Линия 21 см (частота 1420,40575 МГц) обусловлена взаимодействием спинов электрона и протона в атоме водорода. При этом сама энергия излучения может быть легко оценена. Действительно, как уже отмечалось, и электрон, и протон обладают собственными магнитными моментами, причем магнитный момент электрона в точности равен магнетону Бора $\mu_e = e\hbar/(2m_e c)$, а магнитный момент протона $\mu_p = 2.79 e\hbar/(2m_p c)$. Следовательно, энергия взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем $B \approx \mu_p/a_B^3$, создаваемым протоном, может быть вновь оценена как $\delta\mathcal{E} = -\mu_e \mathbf{B}$. В результате, энергия атома водорода при параллельном расположении спинов электрона и протона будет несколько больше, чем при антипараллельном. Поэтому при изменении ориентации спина электрона на противоположную атом должен излучить фотон с энергией

$$\delta\mathcal{E} \approx 2 \times 2.79 \frac{\mu_e^2}{a_B^3} \frac{m_e}{m_p}. \quad (231)$$

Конечно, приведенный выше расчет (он дает для длины волны 12 см) не более чем грубая оценка. В частности, формула (227) не учитывает того, что электрон в атоме не имеет определенной орбиты, и поэтому как магнитное поле протона, так и расстояние между частицами требует аккуратного усреднения. Тем не менее, по порядку величины наша оценка оказалась близка к действительности.

В результате, наблюдение линии нейтрального водорода позволило получить уникальную информацию о структуре нашей Галактики. В частности, именно исследования этой

линии показали, что более половины массы межзвёздного вещества составляет нейтральный водород. До этого никто не подозревал, что межзвездная среда, помимо разреженной горячей (и, следовательно, практически полностью ионизированной) компоненты состоит также и из холодных плотных облаков нейтрального водорода. Обнаружение таких облаков, масса которых порой достигает $10^5 M_{\odot}$, стало возможным лишь благодаря радиоастрономии, поскольку эту компоненту можно зарегистрировать только по излучению в линии 21 см. При этом оказалось, что большая часть нейтрального водорода сосредоточена в очень тонком слое толщиной около 220 парсек в плоскости Галактики. Кроме того, анализ доплеровского смещения линии 21 см в различных частях Галактики позволил измерить скорость облаков нейтрального водорода относительно Земли и, тем самым, точно определить скорость вращения нашей Галактики. Наконец, с помощью этой линии было точно измерено и красное смещение других галактик.

Этот раздел хотелось бы закончить еще одним историческим замечанием. Впервые на возможность наблюдать космическую линию 21 см указал в 1944 году никому не известный тогда голландский студент Х. ван де Холст на руководимом Я. Оортом семинаре в Лейдене. У нас в стране эти расчеты были опубликованы в 1949 г., после чего И.С. Шкловский, внимательно проверивший все выкладки, приложил немало усилий для того, чтобы линия 21 см была открыта экспериментально. В итоге, ему удалось убедить будущего директора Пушинской обсерватории В.В. Виткевича (теперь обсерватория заслужено носит его имя). Поначалу Виткевич горячо взялся за реализацию "проекта 21 см", однако неожиданно все работы были прекращены. Это произошло в начале 1950 года, а уже весной 1951 года линия 21 см была обнаружена в радиоспектре Галактики сперва в США (Х. Юэном и Э. Парселлом), а через несколько недель независимо в Австралии и Голландии. Оорт же потом, как уже отмечалось, использовал эту линию для определения скорости вращения Галактики.

Что же в действительности произошло? Вот как описывает эту историю в своих воспоминаниях сам И.С. Шкловский²¹: *Во время банкета по случаю защиты некоей доктор-*

²¹И. Шкловский. Разум, жизнь, Вселенная. М.: Янус, 1996.

ской диссертации, где мы с В.В.Виткевичем были оппонентами, Виктор Витольдович усадил меня рядом с собой на диван и сказал: "Помнишь это дело с 21 см? Хочешь знать правду, почему я прекратил тогда работу?" И он поведал мне поразительную историю. Дело в том, что изредка Виктор Витольдович бывал на квартире Л.Д. Ландау. В этом высокоинтеллектуальном доме Виктор Витольдович обычно скромно помалкивал. Но однажды он рассказал авторитетнейшему академику про "проект 21 см" и спросил мнение Л.Д.Ландау. Академик сказал тогда В.В.Виткевичу буквально следующее: "Подумаешь — вычислить вероятность магнито-дипольного излучения! Соответствующие формулы есть в моей книге, и такие вычисления может выполнить любой студент. Но откуда Шкловский взял плотность водорода в межзвездной среде? Это же чистая патология". Такой "рецензии" для В.В. Виткевича оказалось вполне достаточно. Все работы по "проекту 21 см" были немедленно прекращены — велик был авторитет Ландау...

В заключение отметим, что линия 21 см представляет собой пример т.н. запрещенной линии. Это значит, что в достаточно плотной среде электрон за счет взаимодействия с другими частицами или фотонами с гораздо большей вероятностью будет переброшен на вышележащие уровни. Поэтому в лабораторных условиях наблюдать линию 21 см практически невозможно. Однако в межзвездной (а, значит, крайне разреженной) среде этот переход становится возможным. В результате, несмотря на то, что в каждом отдельном атоме он происходит крайне редко — в среднем один раз за 11 миллионов лет — в масштабах галактики мощность излучения нейтрального водорода становится заметной.

6.1.3 Вращательные уровни молекул

Еще одним важным объектом радиоастрономических исследований стали молекулы. Само их существование в космическом пространстве, безусловно, стало важнейшим открытием современной астрофизики. Можно сказать, что с открытием молекул возникла новая отрасль астрономии — химия межзвездной среды. Впрочем, простейшие из них — двухатомные молекулы CH , CH^+ , CN — были отождествлены в межзвездном газе еще

в 1930-х годах по межзвездным линиям поглощения в спектрах звезд в видимой и УФ-области. Однако эти линии представляют собой переходы между различными электронными состояниями молекул. С развитием же радиоастрономии появилась возможность наблюдать другие типы молекулярных переходов, которые связаны с вращательными уровнями энергии.

Действительно, в простейшем случае двухатомной (или линейной) молекулы массы \mathcal{M} и размера d энергия вращения может быть записана в виде

$$\mathcal{E}_{\text{rot}} = \frac{J_{\text{r}}^2}{2I_{\text{r}}}. \quad (232)$$

Здесь $J_{\text{r}} = \Omega I_{\text{r}}$ есть момент импульса молекулы, а $I_{\text{r}} \sim \mathcal{M}d^2$ — ее момент инерции. В частности, для двухатомной молекулы $I_{\text{r}} = \mu d^2$, где $\mu = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2/(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)$ — приведенная масса.

С другой стороны, как и у любой квантовой системы, момент импульса J_{r} может принимать лишь дискретный набор значений

$$J_{\text{r}} = \sqrt{J(J+1)}\hbar, \quad (233)$$

где $J = 0, 1, 2, \dots$. При этом для вращательных, как и для обычных электронных переходов, правила отбора разрешают лишь переходы $\Delta J = \pm 1$. Поэтому в случае сферического волчка, у которого все три момента инерции одинаковы (пример — молекула метана CH_4), вращательные переходы с $\Delta J = 0$ будут сильно подавлены.

В итоге, благодаря относительно большой массе в знаменателе (228), энергии соответствующих переходов переходят в радиодиапазон. Так, у молекулы CH переход $J = 1 \rightarrow 0$ имеет длину волны $\lambda = 559$ мкм. У более тяжелой молекулы CO для того же перехода $\lambda = 2.6$ мм. У линейных же молекул типа цианоацетиленов переход $J = 1 \rightarrow 0$ попадает уже в диапазон метровых волн.

Возможность наблюдения межзвездных радиолиний простейших двухатомных молекул OH , CH была предсказана И.С. Шкловским в 1949 году, а их открытие произошло в 1963 году в поглощении на фоне радиоисточника Cas A (остаток взрыва сверхновой в созвездии Кассиопеи). При этом лучевые скорости и профили линий были в согласии

с теми же параметрами линии 21 см. Таким образом, было показано, что молекулы ОН ($\lambda = 18$ см) локализованы в тех же облаках, что и нейтральный водород. Затем в 1968 году последовали открытия вращательных радиолний еще сразу трех молекул: H_2O , NH_3 и H_2CO . Всего с конца 1960-х годов до настоящего времени обнаружено несколько сотен молекул, наблюдалось десятки тысяч спектральных линий от них в широком диапазоне частот, от дециметровых до субмиллиметровых волн. Многие из обнаруженных молекул относительно редки, так что их излучение наблюдается в одном-двух объектах. Однако некоторые молекулы, включая упомянутые ОН, H_2O , NH_3 и H_2CO , а также CO , CS и HCN , HCO^+ и др. очень распространены, легко наблюдаются (как в нашей Галактике, так и в других галактиках) и представляют собой полезный инструмент для исследования физических условий в межзвездном газе.

Отметим, что большое разнообразие молекул, найденных в межзвездных облаках, также было неожиданностью. Ранее предполагалось, что многоатомные молекулы не могут образоваться и существовать длительное время в межзвездной среде, т.к. будут быстро разрушены УФ-излучением. Открытие многочисленных сложных молекул показало, что в межзвездной среде существуют области, где молекулы сохраняются довольно долго, и что есть эффективные механизмы их образования.

6.1.4 Космические мазеры

С молекулами, найденными в космосе, связаны еще одни удивительные (и, безусловно, квантовые) объекты. Это космические мазерные источники. Как уже говорилось, линии гидроксила ОН на длине волны 18 см впервые были зарегистрированы в 1965 году. При этом свойства излучения оказались столь необычными, что по началу их так и называли — "мистериум". На самом же деле природа их излучения, фактически, ничем не отличалась от оптических лазеров. Разница была лишь в букве "м" — в английском сокращении использовалось слово "микроволновой". Затем в 1968 г. были открыты первые мазеры во вращательной линии H_2O (длина волны 1.35 см). В отличие от молекулы ОН, где мазерный эффект имеет место в основном вращательном состоянии, в молекуле H_2O

мазерные уровни расположены высоко над основным состоянием, для которого энергия возбуждения соответствует температуре 644 К. В дальнейшем мазерное излучение воды было найдено в оболочках звезд поздних классов. При этом излучение H_2O -мазеров испытывает сильную переменность, причем яркостная температура (см. Приложение 8.2) у наиболее мощных источников в областях звездообразования достигает 10^{15} К. Всего же сейчас в нашей Галактике и соседних галактиках открыты многие сотни космических мазеров. При этом мощность излучения в радиолинии H_2O составляет обычно 10^{27} – 10^{33} эрг/с, в линиях OH — 10^{27} – 10^{33} эрг/с, в линии SiO — порядка 10^{29} эрг/с, а линии CH_3OH — вплоть до 10^{27} эрг/с.

Напомним, что в 50-60 годы прошлого века, на заре развития радиоастрономии предполагалось, что основными объектами исследования будут обычные звезды, т.е. источники теплового излучения. Поэтому основной характеристикой излучения была выбрана яркостная температура T_b . Удобство здесь заключалось в том, что, как мы видели, в области низких частот с хорошей точностью можно пользоваться простой и удобной асимптотикой Релея-Джинса $\mathcal{P}(\omega) = (\omega^2/4\pi^2c^2)T$ (16), которая позволяет по одному измерению плотности потока \mathcal{P} на частоте ω определить температуру теплового излучения. Впоследствии, правда, стало ясно, что тепловое излучение не играет никакой роли в большинстве космических источников, однако менять прижившийся к тому времени язык было уже поздно.

В итоге, наблюдения показали, что яркостная температура некоторых мазерных конденсаций может достигать до 10^{17} К. При этом ширина линии была очень мала — всего 0.6-3 кГц, т.е. в миллионы раз меньше, чем сама несущая частота. Подобное излучение могло быть связано только с каким-то когерентным механизмом. Примером такого когерентного излучения может служить т.н. антенный механизм, при котором в объеме порядка длины волны находится много излучающих частиц. В этом случае все частицы будут излучать в одной и той же фазе, и поэтому электрическое поле излучения N частиц будет в N раз больше, чем излучение одной частицы (при некогерентном механизме, ко-

гда фаза излучаемых волн случайна, суммарная амплитуда волны растёт как $N^{1/2}$)²². В результате, интенсивность излучения, пропорциональное квадрату электрического поля, будет в N^2 раз превышать интенсивность излучения одной частицы.

Другим когерентным механизмом, где также частицы излучают в одной и той же фазе, является мазерный механизм; он реализуется благодаря избыточной (по сравнению с распределением Гиббса, см. Приложение 8.3) заселенностью верхних уровней энергии. Проходящая через такую среду волна, частота которой совпадает с частотой перехода между верхним (перенаселенным) и каким-нибудь другим нижним уровнем энергии, будет сбрасывать частицы вниз по лестнице энергий, приобретая тем самым все новые и новые фотоны той же частоты и фазы и, значит, когерентно усиливаясь. Здесь, кстати, как раз и проявляется бозонная природа фотонов — они могут находиться в одном и том же квантовом состоянии.

Таким образом, главная задача для объяснения возможности существования мазерных источников в космосе состояла в том, чтобы объяснить перенаселенность некоторых уровней энергии в молекулярных облаках. Это действительно становится возможным за счёт мощного инфракрасного излучения рождающихся массивных звёзд в областях звездообразования.

6.2 Квантовые эффекты в звездах

6.2.1 Звезды главной последовательности — Гамовский пик

Как теперь все хорошо знают, источником активности звезд является ядерная энергия. При этом один из основных каналов связан со следующей цепочкой реакций, в которой в итоге четыре протона превращаются в одно ядро гелия



²²Совпадение с формулой (9) здесь не случайно. При больших N биномиальное распределение (6) (а значит, и распределение Гаусса) можно рассматривать как результат случайного блуждания.



Скажем сразу, что процессы, связанные с ядерной физикой, выходят за рамки нашего разговора. Однако в теории строения звезд есть много деталей, которые прекрасно иллюстрируют вопросы, которые мы обсуждали выше.

Прежде всего, необходимо сказать несколько слов, касающихся астрономической части проблемы. На Рис. 21 показана знаменитая диаграмма Герцшпрунга-Рассела, или т.н. диаграмма цвет-светимость. На ней по вертикальной оси в логарифмическом масштабе отложена светимость L звезд, а по горизонтальной — их поверхностная температура; исторически температура растет не влево направо, а справа налево. Как мы видим, на диаграмме четко выделяются три основные группы. Это т.н. главная последовательность, а также область гигантов и белых карликов, про которые речь пойдет в следующем разделе. Здесь же мы обсудим свойства звезд, находящихся на главной последовательности. При этом главным вопросом, на который мы постараемся ответить, будет вопрос о том, почему светимость звезд главной последовательности остается неизменной на протяжении практически всей жизни звезды.

Вспомним для начала, что по определению звезда (масса M , радиус R , характерная внутренняя температура T) есть газовый шар, находящийся в состоянии гидродинамического равновесия. Это значит, что силы гравитации $F_g \approx GM^2/R^2$ уравниваются силами газового давления $F_g \approx PR^2$. Здесь $P = n_p T$ есть давление, а n_p — концентрация частиц. Иногда для оценки бывает удобнее сравнить не силы, а гравитационную и тепловую энергии. Впрочем, и в том и в другом случае можно записать

$$\frac{GM^2}{R} \approx NT, \quad (237)$$

где $N \approx M/m_p$ — полное количество частиц в звезде (здесь мы учли, что звезды главной последовательности состоят в основном из водорода).

На первый взгляд, к уравнению (233) можно было бы добавить уравнение (22)

$$L = 4\pi R^2 \sigma_{\text{SB}} T_{\text{b}}^4. \quad (238)$$

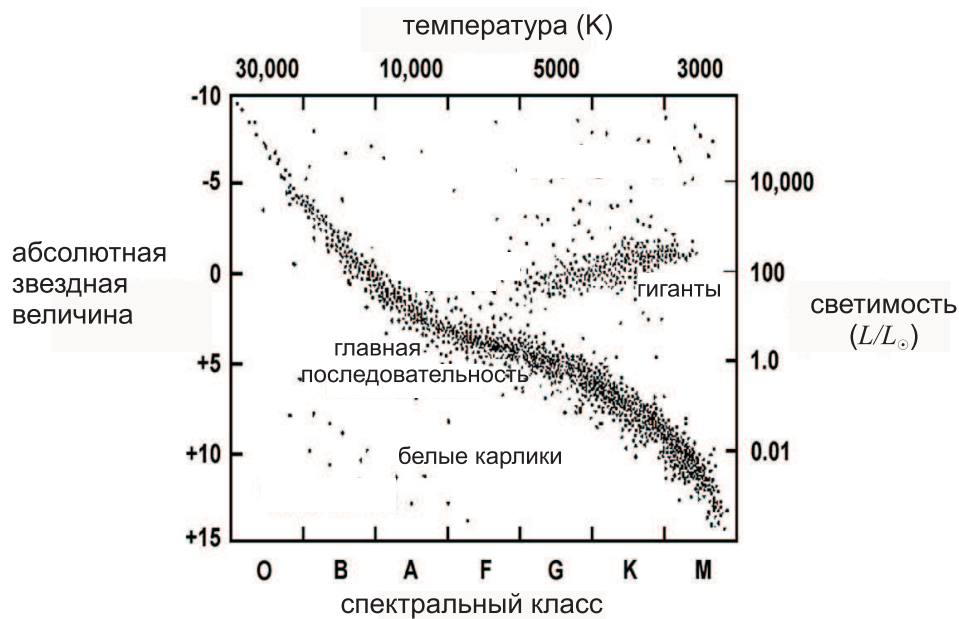


Рис. 21: Диаграмма Герцшпрунга-Рассела.

Однако в этом уравнении наблюдаемая яркостная температура звезды T_b (для Солнца это примерно 6 000 K) есть поверхностная температура, которая всегда много меньше характерной для внутренних областей звезд температуры $T \sim 10^7$ K. Именно эта последняя величина по смыслу и должна стоять в уравнении (234). Поэтому температура T_b в действительности сама подстраивается таким образом, чтобы светимость L соответствовала полному энерговыделению звезды.

Казалось бы, энерговыделение L должно определяться скоростью протекания ядерных реакций. Тем не менее, это совершенно не так! Как оказалось, светимость звезд главной последовательности определяется прозрачностью их недр. Лишь в этом случае скорость реакций (231) также может подстроиться таким образом, чтобы светимость звезд главной последовательности оставалась практически постоянной.

Чтобы показать это, вновь воспользуемся соотношением (22), однако не для поверхности звезды, а для некоторой сферы радиуса r внутри нее. Если радиус этой сферы больше примерно $0.1 R$ — радиуса области, где собственно и происходят ядерные реакции, то поток L через эту сферу будет одинаков для всех r . Однако если бы наблюдатель

мог оказаться внутри звезды, он бы, конечно же, обнаружил, что излучение идет практически изотропно со всех сторон. Поэтому в отличие от поверхности звезды, внутри звезды поток L будет разницей двух потоков L_{up} и L_{d} , идущих из внутренних областей наружу и из внешних областей по направлению к центру.

Воспользовавшись теперь соотношением (22), можно записать

$$L = 4\pi r^2 \sigma_{\text{SB}} (T_2^4 - T_1^4), \quad (239)$$

где $T_2 = T(r - \delta r)$ и $T_1 = T(r + \delta r)$ есть температуры двух слоев чуть ниже и чуть выше сферы радиуса r . При этом слова "чуть выше" и "чуть ниже" будут определяться характерной длиной пробега фотона δr , которая может быть оценена из простого соотношения

$$\delta r \approx \frac{1}{\sigma_{\text{T}} n_{\text{e}}}, \quad (240)$$

где $\sigma_{\text{T}} = (8\pi/3)r_{\text{e}}^2 \approx 6.65 \times 10^{-25}$ см есть томсоновское сечение (см. Приложение 8.6). Для горячих звезд главной последовательности это приближение оказывается достаточно хорошим.

Оценивая теперь разность $T_2^4 - T_1^4$ как $4T^3(dT/dr)\delta r$ и заменяя (в качестве, безусловно, очень грубой оценки) производную dT/dr на отношение T/R , получаем

$$L \sim \frac{32\pi^2}{3} \frac{\sigma_{\text{SB}} m_{\text{p}}}{\sigma_{\text{T}}} \frac{R^4 T^4}{M}. \quad (241)$$

Здесь мы вновь учли, что звезда в основном состоит из водорода, и поэтому концентрация электронов совпадает с концентрацией протонов. Поскольку же согласно (233), произведение RT зависит лишь от массы звезды M , получаем в итоге

$$L \sim \frac{64\pi^2}{3} \frac{\sigma_{\text{SB}} G^4 m_{\text{p}}^5}{\sigma_{\text{T}}} M^3. \quad (242)$$

Таким образом, мы приходим к замечательному выводу, что для звезд главной последовательности их светимость определяется лишь их массой. Конечно, для количественных оценок формулой (238) пользоваться нельзя — слишком грубыми были приближения, которые мы сделали по дороге. Однако, как показано на Рис. 22, закон $L \propto M^3$, который можно записать в виде

$$L \sim L_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3, \quad (243)$$

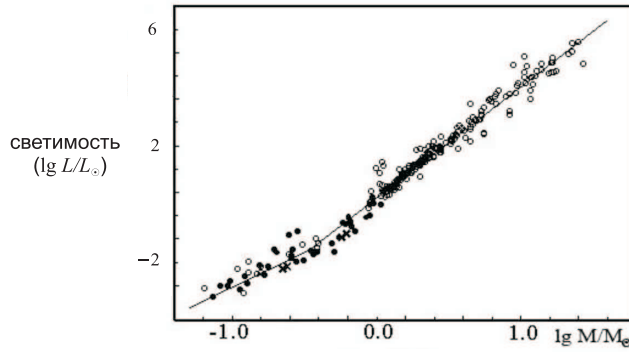


Рис. 22: Зависимость светимости звезды L от массы звезды M .

качественно достаточно хорошо выполняется.

Перейдем теперь к главной теме этого раздела и постараемся понять, почему скорость протекания ядерных реакций в звездах оказывается в точности такой, чтобы светимость звезды удовлетворяла соотношению (239). Ниже мы для простоты рассмотрим лишь первую реакцию (230), а именно реакцию слияния двух протонов. Для более тяжелых ядер в формулы нужно будут добавить лишь дополнительные факторы $Z_1 Z_2$, связанные с зарядом ядер, а также заменить массы протонов на приведенные массы.

Итак, рассмотрим один из ключевых процессов в недрах звезд — процесс слияния двух протонов в одно ядро дейтерия. Потенциал взаимодействия двух протонов показан на Рис. 23. На расстояниях, много больших радиуса действия ядерных сил $r < r_N \sim 10^{-13}$ см на частицы действуют лишь силы электростатического отталкивания, так что потенциал их взаимодействия с хорошей точностью может быть записан как $U(r) = e^2/r$. При меньших радиусах $r < r_N$ вступают в действие ядерные силы, и сила отталкивания резко сменяется на силу притяжения. Фактически, попав в область $r < r_N$, протоны уже не чувствуют электрическое поле соседа и свободно сливаются в ядро дейтерия.

Таким образом, с классической точки зрения для преодоления потенциального кулоновского барьера суммарная энергия двух протонов должна была бы превышать величину

$$\mathcal{E}_N \approx \frac{e^2}{r_N} \sim 1000 \text{ keV}. \quad (244)$$

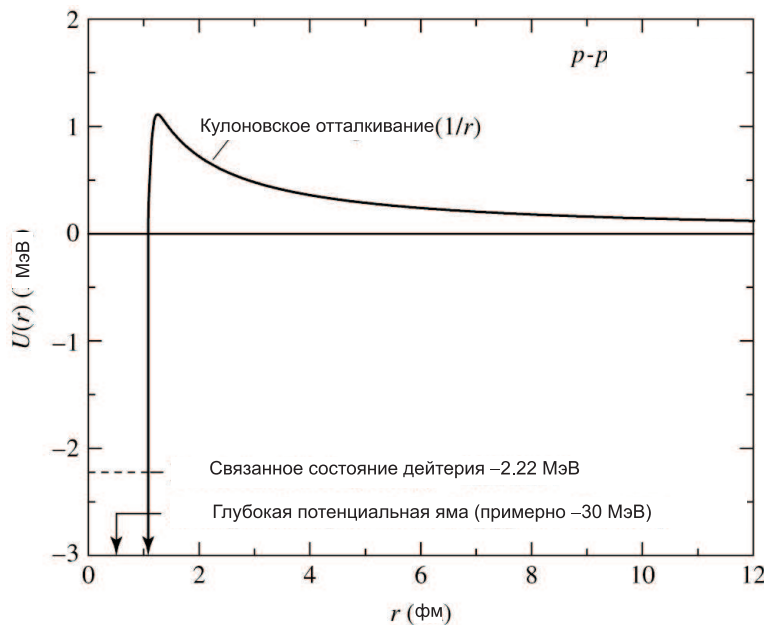


Рис. 23: Потенциал взаимодействия двух протонов. Расстояние по горизонтальной оси выражено в фемтометрах (10^{-15} м)

Однако эта энергия значительно превышает среднюю энергию частиц порядка 1 кэВ, характерную для внутренних областей звезд с температурой $T \sim 10^7$ К. Для теплового (Максвелловского) распределения число частиц N_r , имеющих энергию $\mathcal{E} > T$, может быть записано в виде

$$N_r \approx N \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{T}\right), \quad (245)$$

где N — полное число частиц. Поскольку $\exp(-500) \sim 10^{-217}$, то частиц с такими энергиями будет пренебрежимо мало (точнее, их не будет вообще). Поэтому с классической точки зрения процесс слияния двух протонов в ядро дейтерия при температурах $T \sim 10^7$ К запрещен. Однако, как было показано во второй Главе, в квантовой механике возможно туннелирование квантовых частиц сквозь потенциальный барьер. Это процесс и позволяет двум протонам сливаться с достаточно большой вероятностью.

К сожалению, для количественного определения вероятности прохождения w_{tun} выражение (101) не годится, поскольку оно было получено для постоянной высоты потенциального барьера U . Для точного же расчета нужно выполнить интегрирование

$\int_{r_N}^L \sqrt{2m[U(r) - \mathcal{E}]} dr$. Тем не менее, если оценить длину потенциального барьера L в выражении (101) как

$$L \sim \frac{e^2}{\mathcal{E}} \quad (246)$$

(т.е. пренебречь малой областью $r_N \ll L$ вблизи малых r), а вместо величины $\sqrt{2m(U - \mathcal{E})}$ положить ее значение в точке $r = L/2$ (что дает по порядку величины $\sqrt{m\mathcal{E}}$), можно получить в итоге

$$w_{\text{tun}} = A_1 \exp \left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{\mathcal{E}}} \right). \quad (247)$$

Здесь $\mathcal{E}_G \approx (e^2/\hbar c)^2 m_p c^2$ а A_1 — некоторая величина, зависимостью которой от энергии \mathcal{E} можно пренебречь. Точный же расчет дает

$$\mathcal{E}_G = \pi^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 m_p c^2. \quad (248)$$

Как мы видим, энергия $\mathcal{E}_G \approx 490$ кэВ практически совпадает с энергией $\mathcal{E}_N/2 \approx 500$ кэВ (240), которую нужно иметь каждой частице, чтобы преодолеть потенциальный барьер. Однако теперь, как показано на Рис. 23, чтобы проникнуть в область $r < r_N$, протонам совсем не обязательно иметь энергию порядка 500 кэВ. Ядерные реакции будут происходить и при гораздо меньших энергиях. При этом важнейшее свойство процесса туннелирования состоит в том, что скорость реакции слияния оказывается чрезвычайно чувствительной к температуре звездных недр.

Действительно, формула (243) определяет зависимость вероятности туннелирования w_{tun} от энергии \mathcal{E} лишь для одной частицы. Скорость же реакции S (т.е. количество слияний в единицу времени) будет зависеть еще и от количества частиц, обладающих этой энергией. Поскольку же для максвелловского распределения число частиц с энергиями $\mathcal{E} \gg T$ пропорционально $\exp(-\mathcal{E}/T)$, то скорость реакции S может быть записана в виде

$$S = A_2 \exp \left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{\mathcal{E}}} \right) \exp \left(-\frac{\mathcal{E}}{T} \right), \quad (249)$$

где первая экспонента описывает вероятность тунеллирования, а вторая — количество частиц на хвосте функции распределения. Что же касается предэкспоненциального множителя A_2 , то для $\mathcal{E} \gg T$ ее также можно считать независимой от энергии (проверьте!).

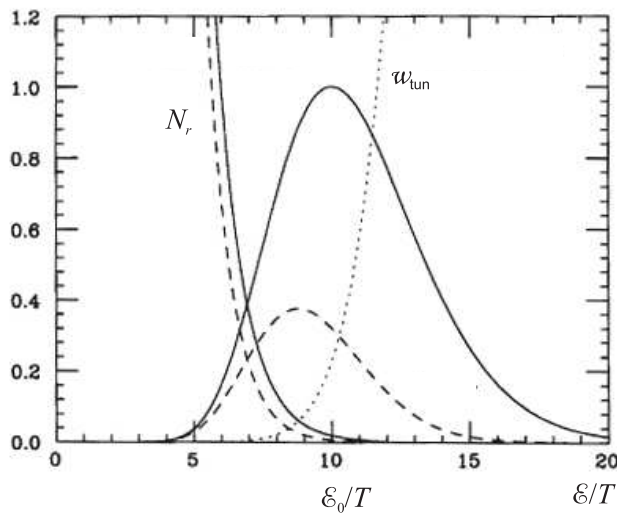


Рис. 24: Гамовский пик — узкая область вблизи энергии \mathcal{E}_0 , определяющая скорость реакции слияния протонов $S(\mathcal{E})$ (245). Отдельно показаны максвелловское распределение N_r (241) (левая кривая) и вероятность туннелирования w_{tun} (243). При малом изменении максвелловского распределения (штриховая линия) происходит сильное изменение скорости реакции.

В результате, как показано на Рис. 24, скорость реакции слияния протонов будут определять лишь те частицы, энергии которых находятся в узкой области вблизи энергии \mathcal{E}_0 . Это и есть знаменитый гамовский пик, определяющий область энергий, при которых происходит звездный нуклеосинтез. Он назван в честь нашего замечательного соотечественника Г.А.Гамова (1904-1968), американского физика, чья блестящая научная карьера начиналась в России вместе с Л.Д.Ландау.

В итоге, как легко видеть, при больших энергиях $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ число частиц на хвосте максвелловского распределения будет слишком мало, а для частиц с меньшими энергиями потенциальный барьер будет слишком высок. При этом сама энергия максимума (ее также обычно называют энергией Гамова, хотя первоначально этим термином обозначалась величина \mathcal{E}_G^{23}) может быть легко определена как задача на нахождение максимума

²³Злые языки говорят, что сам Гамов не смог вычислить этот интеграл и обратился за консультацией к знакомым.

функции $S = S(\mathcal{E})$, что дает

$$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{\mathcal{E}_G T^2}{4} \right)^{1/3}. \quad (250)$$

Соответственно, скорость реакции может быть записана в виде

$$S(\mathcal{E}_0) = S_0 \exp \left[-\frac{3}{4^{1/3}} \left(\frac{\mathcal{E}_G}{T} \right)^{1/3} \right], \quad (251)$$

где S_0 — некоторая постоянная.

Как мы видим, простейший вариант расчета (при котором мы, например, не учитывали зависимость предэкспоненциального множителя от энергии) достаточно элементарен. Тем не менее, он позволяет правильно описать основные характеристики процесса слияния протонов. Прежде всего, отметим, что для характерных условий в центрах звезд энергия \mathcal{E}_0 (246) заметно больше средней энергии частиц T . Так, для внутренних областей Солнца ($T \approx 1.5$ кэВ) оказывается, что $\mathcal{E}_0 \approx 4.3 T$. Как было показано первой Главе, для гауссовых распределений такое превышение уже можно считать очень большим. Поэтому, как мы и предполагали, основную роль в процессе слияния будут играть лишь очень небольшая часть протонов, чьи энергии находятся на хвосте максвелловского распределения. Именно поэтому ядерные реакции в звездах не имеют взрывного характера.

С другой стороны, количество частиц в этой области энергий, как мы уже видели на примере распределения Гаусса, очень чувствительно к параметру σ , определяющему ширину распределения. В данном случае — к температуре. Иными словами, малое изменение температуры (штриховая линия на Рис. 24) будет приводить к большому изменению числа взаимодействующих частиц. С этим эффектом, фактически, и связана возможность тонкой подстройки скоростей реакции. Действительно, при небольшом увеличении температуры во внутренних областях звезды, которая может быть связана, например, с ее сжатием, скорость реакции должна заметно увеличиться. Это, в свою очередь, приведет к увеличению силы газового и радиационного давления, и, как следствие, к увеличению размеров звезды. Но тогда температура, напротив, должна уменьшиться, что в итоге вернет звезду к изначальному размеру.

Таким образом, звезды, у которых энерговыделение связано с ядерными реакциями

частиц, находящимися на хвостах максвелловских распределений по энергиям, будут находиться в устойчивом равновесии относительно малых возмущений. С этим эффектом, в конечном счете, и связано их замечательное свойство: звезды, находящиеся на главной последовательности на диаграмме Герцшпрунга-Рассела, практически не изменяют свою светимость.

6.2.2 Белые карлики — Чандрасекаровский предел

Запасы ядерной энергии, безусловно, ограничены. Рано или поздно, они заканчиваются. Отметим, что, благодаря формуле (239), словам "рано или поздно" можно придать вполне количественный смысл. Быстрее всего будут терять энергию звезды большой массы. Интересно, что время жизни звезды на главной последовательности сравнивается со временем жизни Вселенной (а, значит, и самих галактик) как раз для звезд с массой порядка солнечной. Поэтому если мы наблюдаем звездное скопление или какую-нибудь другую область, где много очень массивных звезд, то с уверенностью можно сказать, что по галактическим меркам эти звезды родились совсем недавно. И наоборот, маломассивные звезды могли родиться очень давно, и поэтому они могут нести на себе отпечаток тех условий (например, по химическому составу), которые существовали на самых ранних стадиях эволюции галактик.

Так или иначе, после истощения внутренних запасов энергии газовое давление уже не может противостоять гравитационным силам. Центральные части звезды начинают сжиматься и, казалось бы, уже ничто не сможет этому помешать. Однако оказалось, что все же существует следующий рубеж, на котором равновесие вновь становится возможным. Более того, такой режим реализуется у хорошо известных еще с позапрошлого века белых карликов, названных так за их относительно малые размеры (их радиусы примерно в десять раз меньше радиуса Солнца). Поэтому, как показано на диаграмме Герцшпрунга-Рассела (см. Рис. 21), они находятся существенно ниже звезд главной последовательности; это связано просто с их относительно малыми радиусами, и, следовательно, с малой площадью излучения. При этом совершенно удивительный факт

состоит в том, что, как мы сейчас покажем, само существование таких звезд связано с чисто квантовым эффектом, а именно с давлением электронов, которое не исчезает даже при нулевой температуре.

Действительно, мы уже говорили о том, что электроны являются фермионами, и поэтому они не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Поэтому даже при нулевой температуре электроны будут вынуждены занимать состояния с ненулевыми импульсами и, следовательно, с достаточно большой энергией. А это и значит, что давление такой системы (которое, как мы помним из курса средней школы, связана с передачей импульса частиц стенкам сосуда) также не будет равно нулю. Давление электронов (их в таком случае называют вырожденными), которое не зависит от температуры звезды, как оказалось, и может остановить сжатие центральных областей звезды после прекращения ядерных реакций. При этом, однако, такое равновесие может иметь место лишь при достаточно малой массе звезды. Первым это понял С. Чандрасекар (1910-1995, Нобелевская премия по физике 1983 года), и поэтому предельная масса белых карликов носит его имя.

Оказывается, что качественно оценить массу Чандрасекаровского предела M_{Ch} не составляет особого труда! Прежде всего, для определения условия равновесия такой звезды соотношение (233) удобно переписать в виде выражения для полной энергии системы \mathcal{E}_{tot}

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = N \langle \mathcal{E} \rangle - \frac{GM^2}{R}, \quad (252)$$

где первое слагаемое соответствует положительной кинетической энергии (где теперь вместо температуры T стоит средняя энергия электронов $\langle \mathcal{E} \rangle$), а второе — отрицательной гравитационной.

Для определения же характерной энергии электронов нам нужно вспомнить, что, как и для любых других квантовых частиц, число состояний ΔN в любом элементе объема ΔV и в любом интервале импульсов $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ будет равно

$$\Delta N = 2 \frac{\Delta V \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (253)$$

Здесь мы для порядка не забыли про то, что у электронов есть дополнительная степень

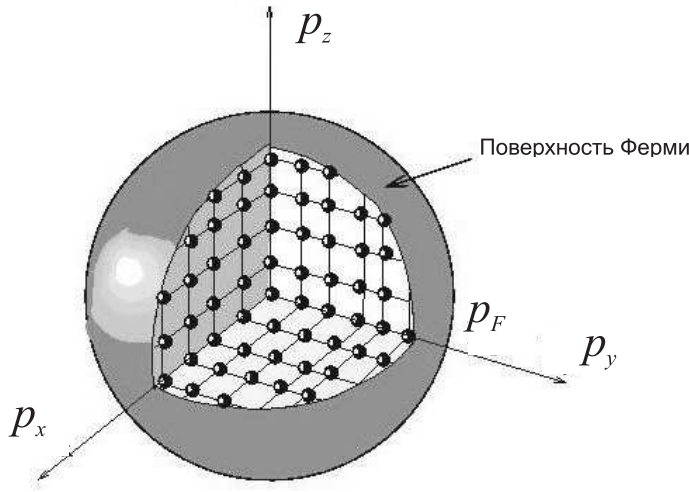


Рис. 25: Пространство импульсов, заполненное электронами с температурой T , много меньшей энергии Ферми \mathcal{E}_F .

свободы, связанная с его спином. Поскольку же электроны являются фермионами, то это означает, что в каждом состоянии может находиться лишь один электрон. При этом в качестве оценки размера элементарной ячейки в пространстве импульсов можно взять величину $p_c = \pi\hbar/R$, поскольку именно волновой вектор $k_c = \pi/R$ будет соответствовать длине волны порядка диаметра звезды $2R$.

В итоге, как показано на Рис. 25, электроны будут вынуждены заполнять не только низшие состояния с импульсом $p \sim \pi\hbar/R$, но и состояния с большими значениями импульса. При достаточно малой температуре T электроны плотно заполняют сферу, "радиус" которой p_F будет определяться лишь полным количеством частиц N . Действительно, поскольку объем элементарной ячейки в трехмерном пространстве импульсов порядка $(\pi\hbar/R)^3$, получаем просто

$$N \sim \frac{p_F^3 R^3}{\hbar^3}. \quad (254)$$

Воспользовавшись теперь оценкой для полной массы звезды $M \approx m_p N$, где m_p есть масса

протона, получаем окончательно²⁴

$$p_F \sim \frac{\hbar M^{1/3}}{m_p^{1/3} R}. \quad (255)$$

Максимальный импульс p_F и соответствующая ему энергия \mathcal{E}_F (см. ниже) носят имя Э. Ферми.

Сделаем теперь заключительный шаг и предположим на время, что электроны в белом карлике ультрарелятивистские, т.е. их энергия \mathcal{E} связана с импульсом p соотношением $\mathcal{E} = cp$ и, следовательно, $\mathcal{E}_F = cp_F$. В этом случае средняя энергия частиц будет также порядка cp_F (напомним, что численными коэффициентами мы пренебрегаем). В результате, уравнение (248) переписется в виде

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{R} \left(\frac{c\hbar M^{4/3}}{m_p^{4/3}} - GM^2 \right). \quad (256)$$

Таким образом, полная энергия системы зависит, фактически, лишь от двух параметров, а именно от радиуса звезды R и от ее массы M , причем зависимость от радиуса звезды у обоих слагаемых оказывается одинаковой. Поэтому знак энергии \mathcal{E}_{tot} будет определяться лишь знаком выражения, стоящего в скобках. А этот знак, как мы видим, зависит лишь от того, превышает или нет масса звезды M критическое значение

$$M_{\text{Ch}} \sim \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{c\hbar}{G} \right)^{3/2}, \quad (257)$$

когда оба слагаемых сравниваются друг с другом. При этом для $M > M_{\text{Ch}}$ энергия звезды будет отрицательной, и, поскольку любая система стремится к состоянию с минимальной энергией, то, следовательно, радиус звезды R будет неограниченно уменьшаться. Это и означает, что существование белых карликов с достаточно большими массами оказывается невозможным.

Если же масса звезды меньше M_{Ch} (и, значит, полная энергия звезды будет положительна), то это, казалось бы, должно было бы привести к полному разлету системы. Однако, как видно из соотношения (251), при увеличении радиуса R импульс Ферми p_F

²⁴Здесь мы для простоты предполагаем, что белые карлики состоят в основном из водорода, так что число электронов приблизительно равно числу протонов.

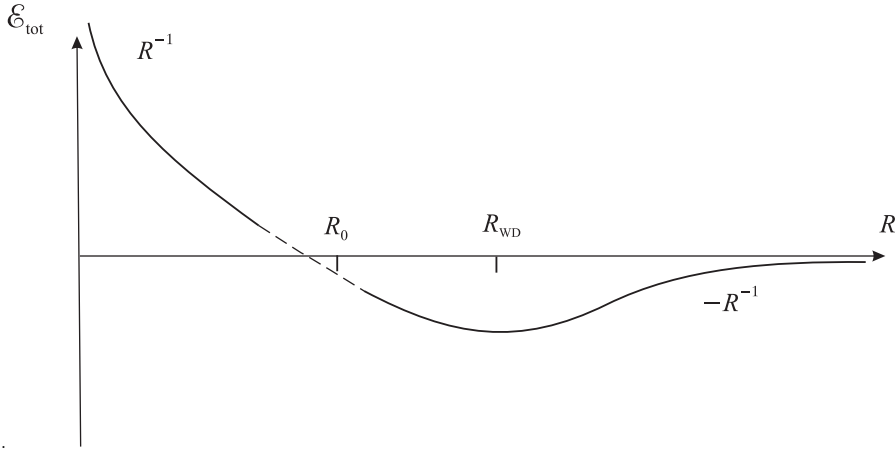


Рис. 26: Зависимость полной энергии белого карлика \mathcal{E}_{tot} от радиуса R

должен уменьшаться, так что при $p_F \approx m_e c$ наше предположение об ультрарелятивизме электронов будет нарушено. Поэтому при $R > R_0$, где

$$R_0 \sim \frac{\hbar M^{1/3}}{m_p^{1/3} m_e c}, \quad (258)$$

вместо релятивистского соотношения $\mathcal{E} = cp$ следует использовать всем хорошо известное нерелятивистское выражение $\mathcal{E} = p^2/2m_e$. В результате, подставив теперь в выражение (248) среднюю энергию частиц $p_F^2/2m_e$, получаем для $R > R_0$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{\hbar^2 M^{5/3}}{2m_p^{5/3} m_e R^2} - \frac{GM^2}{R}, \quad (259)$$

График зависимости полной энергии белого карлика \mathcal{E}_{tot} от его радиуса R показан на Рис. 26. Как мы видим, при достаточно больших радиусах эта энергия становится отрицательной, как это и должно быть для гравитационно-связанных систем. При этом простейший анализ дает для радиуса R_{wd} , соответствующего минимуму полной энергии

$$R_{\text{wd}} \sim \frac{\hbar^2}{G m_p^{5/3} m_e M^{1/3}}. \quad (260)$$

Эта величина и должна нами рассматриваться как теоретическое предсказание для радиуса белого карлика.

Здесь необходимо отметить, что сама предельная масса белого карлика M_{Ch} чрезвычайно сильно зависит от химического состава звезды. Кто внимательно следил за нашим расчетом, должен был заметить, что силы гравитационного сжатия определяются

не электронами, а тяжелыми частицами — протонами и нейтронами (их для простоты называют нуклонами, т.е. частицами, участвующими в ядерных взаимодействиях). Количество же электронов и нуклонов будет одинаково лишь для чисто водородной звезды, что для таких старых звезд, как белые карлики, заведомо несправедливо. Точный расчет показывает, что для водородной звезды предельная масса белого карлика должна была бы составлять $5.73 M_{\odot}$, тогда как для солнечного обилия — лишь

$$M_{\text{Ch}} = 1.46 M_{\odot}. \quad (261)$$

Последнюю величину обычно и называют чандрасекаровским пределом.

Конечно, приведенный выше расчет (в котором мы, например, совершенно не учитывали зависимость всех параметров от радиуса звезды) не может претендовать на точность. Тем не менее, он дает правильное буквенное выражение как для критической массы белого карлика, так и для его радиуса (256), который можно записать в виде

$$R_{\text{wd}} \approx 10^9 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/3} \text{ см}. \quad (262)$$

При этом, как показано на Рис. 27, обратная зависимость радиуса от массы, несмотря на уже упоминавшуюся неопределенность, связанную с химическим составом, прослеживается достаточно хорошо.

В заключение полезно сказать несколько слов про историю этого замечательного открытия. В 1930 году С. Чандрасекар, тогда еще совсем молодой человек, только что окончивший Мадраасский университет, отправился на корабле из Индии в Англию, чтобы продолжить свое обучение в Кембридже. Во время этого путешествия, располагавшего к спокойному размышлению, ему и пришла в голову идея о том, что массы белых карликов не могут существенно превышать массу Солнца, тогда как обычные звезды могут иметь массы, в десятки раз большие.

Конечно, эта идея родилась не на пустом месте. Незадолго до этого Чандрасекар прослушал у себя в университете курс лекций по квантовой механике знаменитого немецкого теоретика Арнольда Зоммерфельда (1868-1951). В частности, Зоммерфельд упомянул и о том, что применение квантовой статистики к белым карликам может помочь объяснить

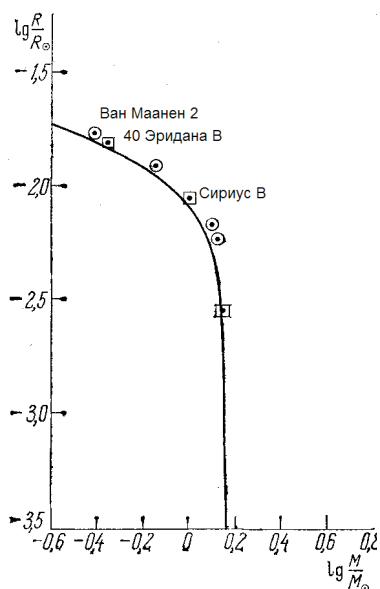


Рис. 27: Диаграмма масса-радиус для белых карликов.

их удивительные свойства. Поэтому сам факт, что квантовые эффекты могут быть существенны и для макроскопических тел, в те годы уже активно обсуждались. Тем не менее, результат Чандрасекара, безусловно, произвел революцию в нашем понимании звездной эволюции (об этом говорит хотя бы то, что Резерфорд поначалу принял результат Чандрасекара в штыки), а двухстраничную статью в *The Astrophysical Journal* по праву можно считать одной из главных астрофизических статей двадцатого века.

6.2.3 Нейтронные звезды

Итак, мы поняли, что равновесие центральных областей звезд на последнем этапе их эволюции может быть достигнуто лишь в том случае, если их масса не превышает чандрасекаровский предел, равный примерно $1.4 M_\odot$. Для звезд больших масс²⁵ равновесие на стадии белого карлика становится невозможным. Поэтому для таких звезд сжатие неизбежно будет продолжаться. Однако, как оказалось, существует еще один, последний рубеж, на котором сжатие может быть остановлено. Таким рубежом становятся нейтрон-

²⁵Более точно, для звезд, у которых масса центрального сжимающегося ядра превышает $1.4 M_\odot$.

ные звезды, т.е. звезды, сжатые до ядерных плотностей $\rho \approx \rho_N$, где

$$\rho_N \approx 10^{14} \text{ g cm}^{-3}. \quad (263)$$

Отметим, что из формулы (259) сразу можно было заключить, что радиус нейтронной звезды солнечной массы должен быть порядка

$$R_{\text{NS}} \sim \left(\frac{M_{\odot}}{\rho_N} \right)^{-1/3} \sim 10 \text{ km}. \quad (264)$$

Фактически, такие оценки и были сделаны уже в середине тридцатых годов. При этом обычно ссылаются на работы Л.Д. Ландау (1932) и В. Бааде и Ф. Цвикки (1934). Однако надо помнить, что работа Ландау была написана еще до открытия нейтрона — в ней говорилось лишь о звезде с ядерной плотностью (259), величина которой к тому времени, конечно же, была уже известна. В работе же Бааде и Цвикки идея о существовании нейтронных звезд была высказана вполне осознанно. Более того, с начала шестидесятых годов активно обсуждалась возможность сверхтекучести и сверхпроводимости во внутренних областях нейтронных звезд. Тем не менее, считалось, что из-за малого размера (и, значит, малого энергосвечения) обнаружить нейтронные звезды практически невозможно.

Про историю открытия нейтронных звезд мы расскажем в следующем разделе, а сейчас покажем, что нейтронные звезды также не могут иметь массы, существенно превышающие массу Солнца. Для этого заметим, что формулы (255) и (256) для энергии \mathcal{E}_{tot} и массы M_{Ch} белого карлика не содержат массу электрона m_e . Это связано с тем, что, как мы уже отмечали, в соответствующей области параметров электроны являются релятивистскими, т.е. их энергия связана с импульсом универсальным соотношением $\mathcal{E} = cp$. А это значит, что совершенно такая же оценка может быть сделана и для нейтронов в нейтронной звезде.

Казалось бы, считать, что нейтроны в сильно сжатой нейтронной звезде являются свободно движущимися частицами, по меньшей мере наивно. Тем не менее, формула (256) дает правильную оценку для предельной массы нейтронной звезды. Более того,

заменяя в формуле (256) массу электрона на массу протона, мы получаем

$$R_{\text{NS}} \sim \frac{\hbar^2}{G m_p^{5/3} m_p M^{1/3}} \sim \frac{m_e}{m_p} R_{\text{WD}}, \quad (265)$$

что дает все те же 10 км, которые мы только что получили, оценивая радиус нейтронной звезды по ядерной плотности. Поэтому наше предположение об относительной свободе нейтронов следует признать недалеким от истины.

Кроме того, необходимо сделать еще три существенных замечания. Прежде всего, отметим, что образование нейтронной звезды связано с тем, что при больших плотностях электроны "вдавливаются" в ядра, в результате чего становится возможной реакция

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e. \quad (266)$$

При этом нейтринное излучение должно уносить до 99% высвобождаемой энергии. К сожалению, существующие в настоящее время нейтринные телескопы не позволяют уверенно регистрировать подобные события. Это связано с тем, что в последние годы сверхновые регистрировались лишь в далеких галактиках, так что поток излучения на Земле был слишком мал. На сегодняшний день нейтринный импульс был зарегистрирован лишь от одной достаточно близко вспыхнувшей сверхновой 1987а в Большом Магеллановом Облаке. Первые 5 (!) событий зарегистрировал советско-итальянский нейтринный телескоп под горой Монблан, а приблизительно за 3 часа перед видимой в оптическом диапазоне вспышкой импульс, длившийся менее 13 секунд, зарегистрировали нейтринные обсерватории Kamiokande II, IMB и российская обсерватория Баксан. При этом по данным Kamiokande II было даже определено направление, с точностью около 20 градусов совпавшее с направлением на Большое Магелланово Облако. Хотя за это время были зарегистрированы всего 24 нейтрино и антинейтрино, их потоки существенно превысили космический фон.

Далее, не нужно забывать про существенное отличие нейтронов от электронов, которое состоит в том, что нейтроны, как хорошо известно, не являются стабильными частицами. В свободном состоянии их период полураспада составляет лишь 611 сек, после

чего нейтрон распадается на протон, электрон и антинейтрино

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (267)$$

Однако в сильно сжатом веществе такой процесс будет сильно подавлен. Здесь опять в полной мере работают законы квантовой механики, запрещающие протонам и электронам занимать уже занятые квантовые состояния. В результате, баланс прямой (262) и обратной (263) реакций устанавливается на уровне, при котором во внутренних областях нейтронных звезд количество электронов и протонов составляет лишь порядка одного процента от количества нейтронов.

Наконец, нужно всегда помнить, что самые поверхностные, хотя и сильно сжатые слои нейтронных звезд состоят из обычных ядер железа, так что плотность здесь не должна превышать 10^6 г см⁻³. С другой стороны, как было показано во второй Главе, при магнитных полях, превышающих 10^9 Гс (а магнитные поля нейтронных звезд могут достигать 10^{12} и даже 10^{14} Гс), атомные оболочки ядер будут существенно отличаться от обычных атомных оболочек.

Понятно, что выполненная нами оценка максимальной массы нейтронной звезды не учитывает многие важные эффекты. Прежде всего, для нейтронных звезд необходимо принимать во внимание эффекты общей теории относительности. Дело в том, что для солнечной массы радиус нейтронной звезды R_{NS} (порядка 10–15 км) всего в несколько раз больше радиуса черной дыры $r_g = 2GM/c^2$ (3 км). Поэтому эффекты ОТО должны учитываться в любых расчетах, претендующих на точность, превышающую $r_g/R_{\text{NS}} \sim 20\%$. Кроме того, большая неопределенность связана с тем, что в сверхплотном веществе, характерном для центральных областей нейтронных звезд, могут существовать разные экзотические частицы (например, гипероны) или даже кварк-глюонная плазма, возникающая при "слипании" нуклонов в единую ядерную каплю. Поэтому, как показано на Рис. 28, в настоящее время существуют многочисленные модели внутренних областей нейтронных звезд, в той или иной степени учитывающие весь спектр возможных уравнений состояния сильно сжатого нейтронного вещества. Однако неопределенность в определении радиусов нейтронных звезд до сих пор не позволяет сделать выбор между этими

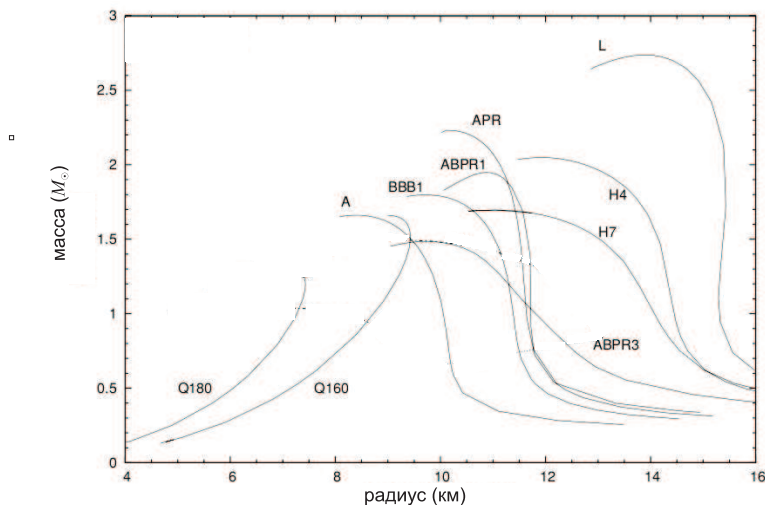


Рис. 28: Диаграмма масса-радиус для нейтронных звезд. Различные кривые соответствуют различным уравнениям состояния.

моделями.

6.2.4 Радиопульсары

Итак, по современным представлениям нейтронные звезды должны образовываться в результате катастрофического сжатия (коллапса) обычных массивных звезд на поздней стадии их эволюции или, например, белых карликов, превысивших в результате аккреции чандрасекаровский предел массы $1.4M_{\odot}$. Именно на таком механизме образования основывается простейшее объяснение как малых периодов вращения нейтронных звезд (наименьший известный период вращения $P = 1.39$ мс), так и сверхсильных магнитных полей $B_0 \sim 10^{12}$ Гаусс. Действительно, если предположить, что нейтронная звезда образовалась из нормальной звезды (радиус $R_s \sim 10^{12}$ см, период вращения $P_{\text{in}} \sim (10 - 100)$ лет) с магнитным полем $B_{\text{in}} \sim 1$ Гаусс, то из законов сохранения углового момента и магнитного потока

$$MR_s^2\Omega_{\text{in}} = MR^2\Omega, \quad R_s^2B_{\text{in}} = R^2B_0 \quad (268)$$

следует, что после сжатия до размеров R нейтронная звезда будет иметь период вращения P и магнитное поле B_0 порядка

$$P \sim \left(\frac{R}{R_s} \right)^2 P_{\text{in}} \sim (0.01 - 1) \text{ s} \quad (269)$$

и

$$B_0 \sim \left(\frac{R_s}{R} \right)^2 B_{\text{in}} \sim 10^{12} \text{ G}. \quad (270)$$

Исторически первыми нейтронные звезды были открыты в конце шестидесятых годов как радиопульсары — источники импульсного космического радиоизлучения с характерным периодом $P \sim 1$ с. Это событие без преувеличения можно назвать одним из важнейших в астрофизике 20 века. Действительно, впервые был обнаружен новый класс космических источников, существование которых было предсказано еще в тридцатые годы. Открытые впоследствии многие другие компактные объекты (рентгеновские пульсары, рентгеновские новые) показали, что нейтронные звезды действительно являются если не одними из самых богатых, то во всяком случае одними из самых активных населений в Галактике. Неудивительно поэтому, что за это открытие А. Хьюишу в 1974 году была присуждена Нобелевская премия.

С другой стороны, до открытия радиопульсаров не было понято, что нейтронные звезды должны вращаться настолько быстро, что основным источником излучаемой энергии будет их кинетическая энергия вращения. В результате, не было предпринято и целенаправленных попыток обнаружить пульсирующее излучение у известных объектов. И это несмотря на то, что в центре Крабовидной туманности к тому времени уже была зарегистрирована необычная оптическая звезда, совпадающая с также необычным радиоисточником. Именно с активностью этой звезды связывалось энерговыделение $W_{\text{tot}} \approx 5 \cdot 10^{38}$ эрг/с, необходимое для подпитки Крабовидной туманности релятивистскими электронами. В противном случае, свечение Крабовидной туманности давно бы прекратилось.

Большинство радиопульсаров — одиночные нейтронные звезды. Из известных к середине 2014 года более 2000 пульсаров лишь примерно 150 входят в состав двойных систем. Однако во всех этих случаях достоверно известно, что в этих двойных системах отсутствует сколь-либо существенное перетекание вещества со звезды-компаньона

на нейтронную звезду. Поскольку, как уже подчеркивалось, радиосветимости пульсаров невелики, современный уровень приемной аппаратуры позволяет наблюдать пульсары лишь до расстояний порядка 3–5 кпк, что меньше расстояния до центра Галактики. Поэтому мы имеем возможность наблюдать лишь малую часть всех ”действующих” радиопулсаров. Полное же число нейтронных звезд в нашей Галактике должно составлять 10^8 – 10^9 . Такое большое количество потухших нейтронных звезд естественным образом связано с малой продолжительностью их активной жизни, о которой говорилось выше.

После же открытия радиопулсаров практически сразу стало ясно, что чрезвычайно регулярные пульсации наблюдаемого радиоизлучения связаны с вращением нейтронной звезды. У некоторых пульсаров стабильность частоты на масштабах нескольких лет даже превышает стабильность атомных стандартов, так что в настоящее время ведутся работы по построению новой пульсарной шкалы времени. Далее, энергетический источник радиопулсаров обусловлен энергией вращения, а механизм энерговыделения связан с их сверхсильным магнитным полем $B_0 \sim 10^{12}$ Гс. Действительно, оцениваемые по простой магнитодипольной формуле энергетические потери²⁶

$$W_{\text{tot}} = -I_r \Omega \dot{\Omega} \approx \frac{1}{6} \frac{B_0^2 \Omega^4 R^6}{c^3} \sin^2 \chi, \quad (271)$$

где $I_r \sim MR^2$ — момент инерции звезды, χ — угол наклона оси магнитного диполя к оси вращения, а $\Omega = 2\pi/P$ — угловая скорость вращения, составляют для большинства пульсаров 10^{31} – 10^{34} эрг/с. Такое энерговыделение как раз приводит к наблюдаемой скорости замедления $dP/dt \sim 10^{-15}$, что соответствует времени торможения $\tau_D = P/\dot{P} \sim (1\text{--}10)$ млн. лет. Радиопулсары, таким образом, являются единственными космическими объектами, чья эволюция полностью определяется электродинамическими силами. Напомним, что само радиоизлучение составляет лишь 10^{-4} – 10^{-6} от полных потерь энергии. Для большинства пульсаров это соответствует 10^{26} – 10^{28} эрг/с, что на 5–7 порядков меньше светимости Солнца.

Казалось бы, хорошее согласие простейшей вакуумной модели (267) с наблюдениями должно было бы быстро привести и к пониманию строения магнитосферы нейтронных

²⁶Вывод этой формулы ”на пальцах” также можно найти в книге Гравитация и астрофизика.

звезд. Однако, как оказалось, вакуумное приближение не имеет никакого отношения к действительности. А причина этого вновь связана с чисто квантовыми эффектами.

Дело в том, что сверхсильное магнитное поле приводит к ряду важных следствий. Прежде всего, за счет вращения замагниченной нейтронной звезды возникает сильное электрическое поле, величину которого легко оценить, вспоминая, что благодаря хорошей проводимости во внутренних областях звезды должно быть выполнено условие вмерзности $\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c = 0$. Подставляя в это выражение $v = \Omega R$, получаем

$$E \sim \frac{\Omega R}{c} B. \quad (272)$$

При этом за пределами нейтронной звезды, где в случае вакуумной магнитосферы условие вмерзности выполнено быть не может, электрическое поле будет иметь и компоненту, параллельную магнитному полю. А это приводит к эффективному ускорению частиц, попавших в магнитосферу радиопульсара.

Далее, время синхротронного высвечивания (см. Приложение 8.4)

$$\tau_s \approx \frac{1}{\omega_B} \left(\frac{c}{\omega_B r_e} \right) \sim 10^{-15} \text{с} \quad (273)$$

($\omega_B = eB/m_e c$, $r_e = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона) оказывается существенно меньше времени ухода частицы за пределы магнитосферы. Следовательно, заряженные частицы в окрестности нейтронной звезды смогут двигаться лишь вдоль магнитных силовых линий. Поскольку же силовые линии дипольного магнитного поля искривлены, движение релятивистских частиц будет происходить с ускорением и, следовательно, приводить к излучению жестких гамма-квантов за счет т.н. изгибных потерь. Этот процесс вполне аналогичен обычному синхротронному излучению²⁷, поскольку природа ускоренного движения несущественна. Поэтому все формулы для синхротронного излучения могут быть использованы и для описания изгибного излучения с единственным изменением: радиус ларморовской окружности $r_B = m_e c^2 \gamma / eB$, по которой электроны движутся в магнитном поле, должен быть заменен на радиус кривизны магнитной силовой линии

²⁷Синхротронным называется излучение, связанное со спиральным движением релятивистских частиц в магнитном поле.

R_c . В частности, частота, соответствующая максимуму излучения, будет выглядеть теперь как

$$\omega_{\text{cur}} = 0.44 \frac{c}{R_c} \gamma^3. \quad (274)$$

Здесь дополнительная степень γ по сравнению со случаем синхротронного излучения $\omega_{\text{syn}} = 0.44 \omega_B \gamma^2$ связана с тем фактом, что для синхротронных потерь радиус ларморовской окружности r_B сам пропорционален энергии частиц.

В результате, была понята важность процесса квантового рождения фотонами электрон-позитронных пар в сверхсильном магнитном поле

$$\gamma + B \rightarrow e^+ + e^- + B, \quad (275)$$

имеющего место в случае, когда фотоны при своем движении пересекают магнитные силовые линии. Действительно, вероятность однофотонной конверсии фотона с энергией \mathcal{E}_{ph} , распространяющегося под углом θ к магнитному полю B , вдали от порога $\mathcal{E}_{\text{ph}} = 2m_e c^2$ имеет вид

$$w = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \frac{e^3 B \sin \theta}{\hbar m_e c^3} \exp \left(-\frac{8}{3} \frac{B_{\hbar}}{B \sin \theta} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_{\text{ph}}} \right). \quad (276)$$

Здесь вновь величина $B_{\hbar} = m_e^2 c^3 / e \hbar \approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гс соответствует критическому магнитному полю, при котором энергетическая щель между двумя ближайшими уровнями Ландау достигает энергии покоя электрона: $\hbar \omega_B = m_e c^2$. Напомним, что в отличие от электрического поля, само магнитное поле не может рождать частицы. Однако, как мы видим, оно может играть роль катализатора, позволяющего выполнить законы сохранения энергии и импульса для рассматриваемого здесь процесса.

Таким образом, поскольку характерные магнитные поля нейтронных звезд не намного меньше критического магнитного поля, то магнитосфера нейтронной звезды оказывается непрозрачной уже для достаточно малоэнергичных фотонов с энергией $\mathcal{E}_{\text{ph}} \sim 2\text{--}3$ МэВ, т.е. вблизи самого порога рождения частиц. При этом, как показано на Рис. 29, возникает следующая цепочка процессов.

1. Ускорение первичных частиц продольным электрическим полем, существующим, как было показано, в вакуумном приближении.

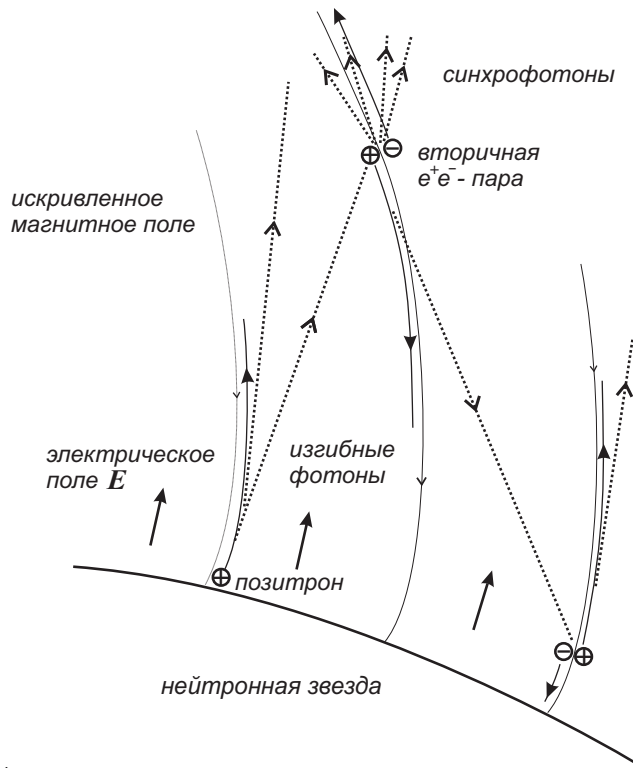


Рис. 29: Рождение частиц в магнитосфере нейтронной звезды. Первичные частицы, попавшие в область ненулевого продольного электрического поля, ускоряются вдоль искривленных магнитных силовых линий и начинают излучать жесткие гамма-кванты. Эти фотоны, распространяясь в искривленном магнитном поле, достигают порога рождения частиц и превращаются в электронно-позитронные пары.

2. Излучение изгибных фотонов с характерными частотами ω , близкими к $\omega_{\text{сир}}$ (270).
3. Распространение фотонов в искривленном магнитном поле вплоть до рождения вторичных электронно-позитронных пар.
4. Ускорение вторичных частиц, излучение ими изгибных фотонов, которые, в свою очередь, дают начало все новым и новым поколениям вторичных частиц.
5. Экранировка продольного электрического поля вторичной плазмой.

Сделаем несколько замечаний, уточняющих сформулированную выше картину. Прежде всего, отметим, что несмотря на то, что излучение изгибных фотонов происходит практически параллельно магнитной силовой линии, вследствие все той же искривленности силовых линий, гамма-квант при распространении начинает двигаться под все большим и большим углом θ к магнитному полю. С другой стороны, при малых по сравнению с радиусом кривизны длинах пробега фотонов l_γ можно положить $\sin \theta \approx l_\gamma/R_c$. Поэтому длина пробега гамма-кванта может быть оценена как

$$l_\gamma = \frac{8}{3\Lambda} R_c \frac{B_{\text{ср}}}{B} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_{\text{ph}}}, \quad (277)$$

где $\Lambda \approx 20$ — логарифмический фактор.

Далее, для не слишком сильных магнитных полей $B < 10^{13}$ Гс рождение вторичных частиц происходит на ненулевые уровни Ландау. Благодаря малому времени синхротронного высвечивания τ_s (269), практически мгновенно вся "поперечная" энергия будет высвечена за счет излучения синхротронных фотонов. Оказывается, энергия таких синхрофотонов достаточно велика, чтобы и эти фотоны могли поглотиться в сильном магнитном поле и родить вторичные частицы. Что же касается первичных частиц, то они вполне могут быть объяснены космическим фоновым излучением. Как показал подробный анализ, космический гамма-фон приводит к генерации 10^5 первичных частиц в секунду. Этого вполне достаточно, чтобы магнитосфера нейтронной звезды эффективно заполнялась электронно-позитронной плазмой.

Таким образом, мы приходим к важнейшему выводу, что вакуумная магнитосфера нейтронной звезды с сильным магнитным полем оказывается неустойчивой относительно квантового рождения заряженных частиц, которое будет продолжаться до тех пор, пока вторичные частицы не заэкранируют продольное электрическое поле. При этом, как оказалось, плазма, заполняющая магнитосферу радиопульсара, полностью заэкранирует магнитодипольное излучение нейтронной звезды. Поэтому сейчас уже мало кто сомневается, что энергетические потери должны быть связаны с электрическими токами, текущими в магнитосфере и замыкающимися на поверхности нейтронной звезды. Это, однако, уже совсем другая история²⁸.

6.2.5 Черные дыры — эффект Хокинга

В заключение этого раздела, нельзя не сказать хотя бы несколько слов про эффект Хокинга, т.е. о квантовом "испарении" черных дыр. Конечно же, черные дыры — это чисто классические объекты, и, согласно общей теорией относительности, никакие частицы и даже свет выйти за ее пределы не может. Тем не менее, как мы увидим, при определенных условиях в них также могут быть существенными квантовые процессы, приводящие к излучению частиц. Необходимо, правда, отметить, что существование излучения Хокинга предсказывается не всеми квантовыми теориями и, более того, оспаривается рядом исследователей.

В настоящее время мало кто сомневается в существовании черных дыр, хотя на самом деле прямых доказательств до сих пор получено не было. Дело в том, что практически во всех случаях наблюдения говорят лишь о наличии очень компактных объектов, которые никак не получается объяснить по иному. При этом в популяции кандидатов в черные дыры выделяются два основных семейства, а именно т.н. галактические черные дыры с массами $5\text{--}15 M_{\odot}$, а также сверхмассивные черные дыры с массами $10^6\text{--}10^9 M_{\odot}$, находящиеся в центрах галактик. Все галактические кандидаты входят в состав двойных систем, и поэтому, анализируя движение звезды-компаньона, можно с уверенностью

²⁸Подробнее об этом говорить в книге "Гравитация и астрофизика".

утверждать, что масса релятивистского объекта превышает три солнечных массы. Следовательно, нейтронной звездой этот объект быть не может, а другие компактные объекты, которые смогли бы поместиться внутри достаточно тесной орбиты звезды-компаньона, нам неизвестны. Кроме того, о существовании чрезвычайно компактного объекта говорят и свойства излучения вещества, перетекающего со звезды-компаньона. Во втором же случае масса черной дыры оценивается по кеплеровскому движению звезд и газа в центральных областях галактик. Например, для черной дыры в центре нашей Галактики (ее масса составляет лишь $4 \cdot 10^6 M_\odot$) удалось проследить движение нескольких звезд, чьи периоды не превышают несколько лет.

Для дальнейшего нам будет достаточно знать лишь то, что черные дыры — это объекты с радиусом $r_g = 2GM/c^2$ (106). Выражение для гравитационного радиуса r_g , т.е. такого размера тела, при котором его поверхность не может покинуть даже луч света, было получено еще в 1783 году английским священником и геологом, одним из основателей научной сейсмологии Дж. Мичелом (и лишь спустя 8 лет П.С. Лапласом) на основе ньютоновской теории тяготения. Действительно, выражение (106) получается сразу, если приравнять вторую космическую скорость $v_2 = \sqrt{2GM/R}$ к скорости света c . Удивительно, но это выражение остается справедливым и в общей теории относительности.

Итак, черные дыры — предсказание классической теории, согласно которой никакие частицы и поля не могут покинуть области внутри гравитационного радиуса; поэтому то поверхность $r = r_g$ получило название горизонта событий. Тем не менее, как показал английский астрофизик С. Хокинг, в рамках квантовой механики ситуация может существенно измениться. Дело в том, что испарение черной дыры по Хокингу — это чисто квантовый процесс. В квантовой же механике, благодаря явлению туннелирования, появляется возможность проникать сквозь потенциальный барьер, слишком высокий с точки зрения классической системы.

В случае черной дыры рождение частиц можно себе представить следующим образом. Как мы видели, в квантовой механике физический вакуум не означает пустоту — в наинизшем энергетическом состоянии электромагнитные поля не равны нулю. Помимо

уже используемой нами выше наглядной картины (вакуум состоит из бегущих во всех направлениях волн, обладающих ненулевой энергией), возможна и другая интерпретация. Можно сказать, что вакуум наполнен постоянно рождающимися и исчезающими флуктуациями различных полей, в том числе — и виртуальными частицами. В поле внешних сил динамика этих флуктуаций меняется, и если внешние силы достаточно велики, то становится возможным процесс прямого рождения из вакуума пар частица-античастица. Именно такой процесс и начинает происходить в электрических полях, близких к критическому значению $E_h = m_e^2 c^3 / \hbar e$ (115).

Специфика же рождения частиц вблизи черной дыры связана с тем, что энергетические уровни любого квантового состояния зависят от координат, импульсов и времени. Поэтому и понятие вакуума зависит от системы отсчета. В обычном плоском пространстве из-за его высокой симметрии для всех инерциальных систем отсчета вакуум будет одним и тем же состоянием. Однако уже для неинерциальных систем, а тем более для произвольно искривленных пространств, возникающих в общей теории относительности, ситуация будет совершенно иная.

В результате, как показал Хокинг, рождение пары частица-античастица может происходить и вблизи горизонта событий черной дыры. При этом возможен случай, когда одна частица рождается под горизонтом (ее полная релятивистская энергия при этом оказывается отрицательной), а другая, обладающая положительной энергией — вне горизонта. Падая в черную дыру, античастица уменьшает полную энергию черной дыры, а значит, и ее массу, в то время как частица оказывается способной улететь в бесконечность. Для удаленного наблюдателя это выглядит как излучение черной дыры. Поэтому утверждение, что конечное состояние черной дыры стационарно, верно лишь в рамках обычной, не квантовой теории тяготения. Квантовые эффекты должны привести к тому, что черная дыра будет излучать частицы, теряя при этом свою энергию.

Более того, важнейшим результатом оказался не столько сам факт излучения, а то, что для безмассовых частиц излучение черной дыры должно иметь тепловой спектр. А это значит, что такому излучению можно сопоставить определенную температуру $T_{\text{ВН}}$.

Более того, величина $T_{\text{ВН}}$ может быть оценена из следующих простых соображений. Как и в случае эффекта Казимира (см. Приложение 8.8), черная дыра не будет изменять свойства вакуума для тех колебаний, длина волны которых много меньше размера горизонта r_g . То же самое будет и в случае больших длин волн, для которых маленькая черная дыра будет просто незаметна. Поэтому естественно предположить, что спектр излучения черной дыры должно иметь максимум на частотах $\omega \sim c/r_g$. Вспоминая, что каждой частоте ω должна соответствовать энергия $\hbar\omega$, получаем сразу (в энергетических единицах) $T_{\text{ВН}} \sim \hbar c^3/GM$. Точная же формула выглядит как

$$T_{\text{ВН}} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} \approx 0.5 \cdot 10^{-7} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} \text{ К.} \quad (278)$$

Конечно же, такая оценка ни в коем случае не доказывает тепловой спектр излучения Хокинга.

Еще раз подчеркнем, что в общем случае состав излучаемых частиц и полей зависит от массы черной дыры. Для массивных черных дыр будут излучаться в основном безмассовые фотоны и нейтрино. В спектре же легких черных дыр начинают присутствовать и более массивные частицы. При этом спектр хокинговского излучения совпадает с излучением абсолютно черного тела лишь для безмассовых полей.

Как мы видим, для реальных кандидатов в черные дыры температура $T_{\text{ВН}}$ оказывается настолько малой, что тепловыми квантовыми эффектами заведомо можно пренебречь. Более того, достаточно массивные черные дыры, температура которых ниже температуры реликтового излучения Вселенной (2,7 К), в настоящее время могут только расти, так как испускаемое ими излучение имеет меньшую энергию, чем поглощаемое. С другой стороны, на раннем этапе эволюции Вселенной в принципе могли существовать и черные дыры достаточно малых масс. Поэтому представляет интерес обсудить их эволюцию, которая описывается очень простыми уравнениями.

Действительно, воспользовавшись формулой $L = 4\pi R^2 \sigma_{\text{SB}} T^4$, получаем для светимости черной дыры

$$L = \frac{1}{15360\pi} \frac{\hbar c^6}{G^2 M^2}. \quad (279)$$

Это приводит к потере массы со скоростью

$$\dot{M} = -\frac{1}{15360\pi} \frac{\hbar c^4}{G^2 M^2}. \quad (280)$$

В результате, как легко проверить, время полного испарения $\tau = M/\dot{M}$ составит

$$\tau = 1520\pi \frac{G^2 M^3}{\hbar c^6} \approx 10^{72} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{ s}. \quad (281)$$

Сравнивая это время с временем жизни Вселенной, можно сделать вывод, что все черные дыры с массами, меньшими 10^{15} г, если они и могли образовавшиеся во время "Большого взрыва", должны были к настоящему времени полностью испариться. Поэтому в нашу эпоху могли бы взрываться лишь первичные черные дыры с массой около 10^{15} г.

Интересно, что последние мгновения перед исчезновением для всех черных дыр должны протекать совершенно одинаково. Действительно, воспользовавшись формулами (275)–(277), получаем

$$L \approx 0.1 \frac{m_{\text{Pl}} c^2}{t_{\text{Pl}}^{1/3}} (t_0 - t)^{-2/3}, \quad (282)$$

где момент t_0 соответствует времени полного испарения²⁹. Таким образом, последний этап испарения черных дыр должен представлять собой мощный взрыв. При этом за последнюю секунду должна выделяться энергия порядка 10^{28} эрг, и, следовательно, такие явления можно было бы наблюдать и на достаточно большом расстоянии от Земли. Однако подобные события до сих пор не наблюдались. Это позволило существенно ограничить число первичных черных дыр во Вселенной.

6.3 Еще несколько примеров

6.3.1 Эддингтоновский предел

Томсоновское сечение σ_{T} (см. Приложение 8.6) определяет еще одну величину, повсеместно используемую в астрофизике. Это т.н. эддингтоновский предел L_{Edd} , задающий

²⁹На самом деле, до сих пор неизвестно, происходит ли полное испарение черных дыр, или оно заканчивается при массе черной дыры $m \sim m_{\text{Pl}}$ ($\delta t \sim t_{\text{Pl}}$), когда необходимо учитывать эффекты квантовой гравитации.

максимально возможную светимость компактного объекта, связанную с аккрецией на него окружающего вещества. Дело в том, что выделение гравитационной энергии со светимостью $L_g = GM\dot{M}/R$, где M и R есть масса и радиус компактного объекта, а \dot{M} — темп аккреции, должно играть ключевую роль в тесных двойных системах с высоким темпом аккреции. Например — в рентгеновских пульсарах и других рентгеновских источниках, в которых идет аккреция вещества со звезды-компаньона на нейтронную звезду. Как мы сейчас покажем, при достаточно большой светимости компактного объекта сила лучистого давления будет препятствовать падению вещества, и поэтому объекты с достаточно большой светимостью не могут быть реализованы.

Действительно, как видно из Рис. 4, для оптического и даже рентгеновского диапазона ($\mathcal{E}_{\text{ph}} \ll m_e c^2$), т.е. практически для всех астрофизически интересных случаев, импульсы рассеянных фотонов будут направлены изотропно. Следовательно, значительная часть импульса падающих фотонов должен быть полностью передан электронам среды. Т.к. в среднем импульс фотона $\hbar\omega/c$ передается электронам среды за время l_r/c , где $l_r = 1/\sigma_T n_e$ — длина затухания (n_e — концентрация электронов), то сила отдачи $F_{\text{rad}} = \delta p/\delta t$ запишется как

$$F_{\text{rad}} = \hbar\omega\sigma_T n_e. \quad (283)$$

Нам в дальнейшем будет удобно говорить не о силе отдачи при одном акте взаимодействия фотона с электроном, а об объемной плотности силы \mathcal{F}_{rad} , т.е. о силе, действующей на единичный объем. Для этой силы можно записать

$$\mathcal{F}_{\text{rad}} = w\sigma_T n_e. \quad (284)$$

Здесь w есть плотность энергии фотонов, которая может быть напрямую выражена через полную светимость компактного объекта

$$w = \frac{L}{4\pi r^2 c}. \quad (285)$$

Благодаря такой замене, энергия отдельных фотонов в ответ не входит.

С другой стороны, на тот же единичный объем со стороны центральной звезды будет

действовать гравитационная сила

$$\mathcal{F}_g = \frac{GMn_em_p}{r^2}. \quad (286)$$

Здесь мы воспользовались предположением о том, что падающее вещество представляет собой простую электронно-протонную плазму, и поэтому плотность аккрецирующего вещества может быть записана как n_em_p , где m_p — масса протона. Необходимо подчеркнуть, что радиационная сила действует на легкие частицы — электроны, а сила гравитации — на протоны. Однако баланс сил может быть достигнут при наличии небольшой поляризации плазмы, приводящей к появлению электрического поля, не позволяющего протонам и электронам плазмы разойтись на большое расстояние.

В итоге, как мы видим, обе объемные силы зависят от расстояния r как r^{-2} . Поэтому, независимо от радиуса r , сила гравитационного притяжения будет сильнее силы радиационного отталкивания лишь при $L < L_{\text{Edd}}$, где

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c G m_p}{\sigma_T} M. \quad (287)$$

Предельная светимость, таким образом, зависит только от массы компактного объекта. Обычно ее записывают в виде

$$L_{\text{Edd}} = 1.38 \cdot 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{erg/s}. \quad (288)$$

Конечно, надо сразу сказать, что величина L_{Edd} определяет максимально возможную светимость лишь по порядку величины, хотя бы потому, что она была получена для случая сферически симметричного течения. Тем не менее, простейшая формула (284) для эддингтоновской светимости не раз позволяла качественно понять основные свойства наблюдаемых источников. Так, после того, как стало ясно, что энерговыделение радиогалактик и квазаров может достигать 10^{45} – 10^{47} эрг/с, формула (284) мгновенно показала, что природа их активности может быть связана с объектами, масса которых составляет 10^7 – 10^9 солнечных масс. Черные дыры с такими массами, как теперь считается, и являются "центральной машиной", приводящей к такой гигантской светимости.

Другим примером могут служить галактические рентгеновские источники — тесные двойные системы, состоящие из обычной звезды и компактного объекта (нейтронной звезды или черной дыры), на которую происходит активное перетекание вещества со звезды-компаньона. Как видно из Таблицы 3, в которой мы собрали несколько наиболее известных галактических источников, их рентгеновская светимость L_X действительно не превышает несколько единиц на 10^{38} эрг/с. Отметим, что если для нейтронных звезд этот результат не вызывает сомнения (их максимальная масса, как мы видели, не может превышать двух масс Солнца), то отсутствие черных дыр с массами в диапазоне (10–1000) M_\odot до сих пор является одной из нерешенных задач современной астрофизики.

Таблица 3: Галактические рентгеновские источники

источник	тип	период P (с)	M_X (M_\odot)	L_X (10^{38} эрг/с)
LMC X-4	пульсар	13.5	1.5 ± 0.1	4.0
Cen X-3	пульсар	4.8	1.1 ± 0.1	0.9
SMC X-1	пульсар	0.7	1.2 ± 0.1	6.3
Vela X-1	пульсар	283.	1.9 ± 0.2	0.1
Her X-1		1.24	0.85 ± 0.15	0.2
4U 0115+63		3.6	1.4 ± 0.15	0.5-2.0
X0331+53		4.4	1.4 ± 0.15	0.02-3.5

6.3.2 Обратный Комптон-эффект

Обратный Комптон-эффект, т.е. увеличение энергии фотона при его столкновении с релятивистскими частицами, о котором мы уже упомянули в разделе 3.2.4, является одним из ключевых процессов в астрофизике, про который нужно постоянно помнить, анализируя те или иные процессы во Вселенной. Если воспользоваться соотношением $\Delta\lambda = h/(m_e c)(1 - \cos\theta)$ (31), полученным для случая, когда электрон до столкновения покоился, то, переходя в систему отсчета, в которой электрон до взаимодействия двигался

со скоростью V , можно получить следующее соотношение для лобового столкновения

$$\omega' = \frac{1 + V/c}{1 - V/c} \omega \left[1 + \frac{2\hbar\omega}{m_e c^2} \left(\frac{1 - V/c}{1 + V/c} \right)^{1/2} \right]^{-1}, \quad (289)$$

которое связывает начальную и конечную частоту фотона. В частности, для ультрарелятивистских электронов (и для случая, когда можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках), получаем просто (33)

$$\omega' \approx 4\gamma_e^2 \omega, \quad (290)$$

где $\gamma_e = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ — лоренц-фактор электрона. Понятно, что формула (286) дает наибольшие частоты, которые могут быть при этом достигнуты; для произвольных углов рассеяния эффект оказывается значительно меньше. В частности, если направление скоростей начальных фотонов изотропно, то средняя частота рассеянных фотонов определяется соотношением

$$\langle \omega' \rangle = \frac{4}{3} \gamma_e \omega. \quad (291)$$

Как мы видим, при достаточно большой энергии электронов становится возможным значительное увеличение энергии фотонов, участвующих в этом процессе. Поэтому в тех случаях, когда в космических источниках имеются электроны или иные частицы, энергии которых превосходят энергии фотонов, то должно происходить существенное искажение первичного спектра излучения. Ниже мы рассмотрим два наиболее известных примера, а именно знаменитый эффект Зельдовича-Сюняева (SZ-эффект) и процесс возникновения сверхжестких гамма-квантов тэвных энергий (1 ТэВ равен 10^{12} эВ) в компактных астрофизических источниках.

Природа эффекта Зельдовича-Сюняева очень проста. Она связана с рассеянием фотонов теплового реликтового излучения горячим электронным газом³⁰, находящимся в богатых скоплениях галактик. Такие богатые скопления содержат сотни и тысячи галактик, а их полные массы доходят иногда до $10^{15} M_\odot$. При этом размеры скоплений D могут

³⁰Термин 'газ' здесь используется по историческим причинам. На самом деле это полностью ионизованная плазма.

составлять несколько десятков мегапарсек, т.е. в десятки раз превышать расстояния от нас до ближайших галактик. Таким образом, скопления галактик (а их в настоящее время обнаружено уже несколько тысяч) представляют собой самые большие гравитационно связанные системы во Вселенной.

Очень важно, что уже первые наблюдения, проведенные на искусственных спутниках Земли, зарегистрировали рентгеновское излучение от скоплений, которое легко могло быть объяснено т.н. тормозным излучением межгалактического газа, т.е. излучением оптически тонких областей плазмы, связанным со столкновениями заряженных частиц с температурой T_e порядка 10^8 К. При этом электронная концентрация газа n_e , определяемая по мощности излучения, оказалась порядка 10^2 – 10^3 см $^{-3}$. А это означает, что масса газа должна составлять десятки процентов от полной массы скопления. В некоторых скоплениях масса газа даже превосходит массу галактик.

Иными словами, галактики, входящие в скопления, покоятся в горячем (многие миллионы градусов) газе, излучение которого как раз и наблюдается в рентгеновском диапазоне. Такая интерпретация подтверждается еще и тем, что температура газа может быть оценена по гравитационному потенциалу, с которым газ находится в гидростатическом равновесии, так что средняя кинетическая (тепловая) энергия частицы T_e равна ее гравитационной энергии GMm_e/D . Следовательно, даже средние скорости электронов в скоплениях будут составлять 10% от скорости света, а количество субрелятивистских частиц с лоренц-факторами $\gamma_e \approx 2$ будет при этом достаточно велико. Следовательно, как видно из соотношения (287), при взаимодействии с межгалактическим газом частота реликтового излучения действительно может существенно измениться.

Напомним, что интенсивность реликтового излучения (в англоязычной литературе используется сокращение СМВ — cosmic microwave background, т.е. космический микроволновой фон) с очень большой точностью подчиняется закону Планка³¹ с температурой 2.7 К и имеет максимум на волне 1.3 мм. Но и в соседнем субмиллиметровом диапазоне

³¹За открытие реликтового излучения А. Пензиас и Р. Вильсон в 1984 году получили Нобелевскую премию; в 2006 году еще одна Нобелевская премия была присуждена Дж. Смуту и Дж. Мазуру за обнаружение флуктуаций реликтового фона на уровне $\delta T/T \sim 10^{-5}$.

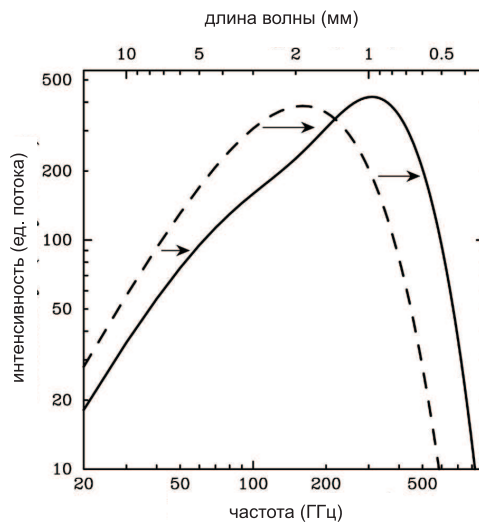


Рис. 30: SZ-эффект, состоящий в перераспределении фотонов реликтового излучения за счет взаимодействия с энергичными электронами. SZ-эффект представлен здесь сильно преувеличенным

она еще достаточно велика, и поэтому SZ-эффект здесь должен наблюдаться достаточно отчетливо. В итоге, как показано на Рис. 30, в сантиметровом и миллиметровом диапазоне длин волн он проявляется в ослаблении реликтового излучения, а в субмиллиметровом — в его усилении. При этом все фотоны получают от электронов дополнительную энергию, так что вся планковская кривая сдвигается в сторону больших частот. Поэтому до максимума кривая понижается, а после максимума — повышается.

В результате, мы приходим к выводу, что если смотреть в направлении на скопления галактик на субмиллиметровых частотах, то интенсивность реликтового фона здесь окажется больше, чем вне скоплений, где фон не изменен. С другой стороны, в сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн в направлении на скопления будут наблюдаться "отрицательные" источники излучения, в которых температура будет меньше окружающего их фона. Граница же между подъемом и спадом интенсивности должна лежать на частоте 217 ГГц, соответствующей длине волны 1.38 мм.

В настоящее время наблюдение SZ-эффекта представляет собой один из ключевых методов исследования дальней Вселенной. С помощью этого эффекта можно получать

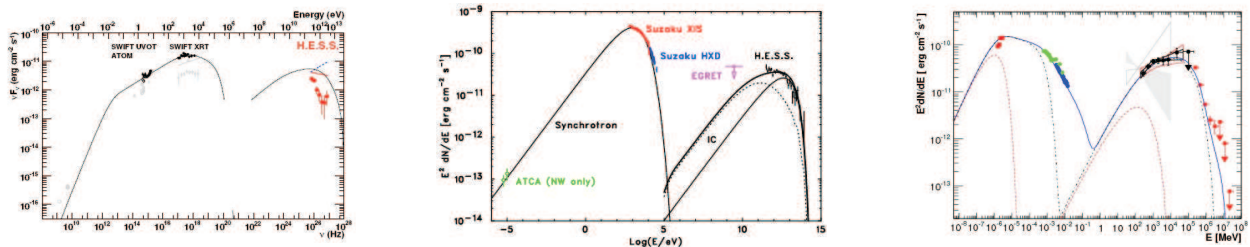


Рис. 31: Космические источники с двумя характерными максимумами в спектре. Слева направо: блазар (активное галактическое ядро без линий поглощения) 1ES 0347–121, остаток взрыва сверхновой RX J1713.7–3946 и квазар PKS 215–304

важнейшую информацию о массах скоплений и давлении горячего межгалактического газа, о скорости скопления вдоль луча зрения. Именно SZ-эффект позволил обнаружить тысячи новых скоплений галактик, в том числе на больших красных смещениях. Наконец, наблюдения SZ-эффекта предоставляют независимый способ определения постоянной Хаббла (а, следовательно, и общей плотности вещества во Вселенной). При этом основное преимущество этого метода состоит в том, что в его основе лежит достаточно элементарный процесс, характеристики которого зависят лишь от небольшого количества параметров.

Обратный Комптон-эффект, по-видимому, играет определяющую роль и во многих других процессах, происходящих в космосе. На Рис. 31 в качестве примера показаны несколько характерных спектров совершенно различных космических источников. Как мы видим, во всех случаях в спектрах этих объектов наблюдаются два характерных максимума, разнесенных по энергиям на 8-10 порядков.

В настоящее время для объяснения подобных спектров большинством исследователей также привлекается обратный Комптон-эффект. Иными словами, предполагается, что менее энергичный пик, расположенный в рентгеновском диапазоне, связан с синхротронным излучением, тогда как более энергичный максимум обусловлен обратным комптоновским рассеянием синхротронных фотонов. При этом, согласно соотношению (286), необходимо предположить, что в этих источниках существуют релятивистские электроны (или позитроны) с энергиями, соответствующими лоренц-факторам $\gamma_e \sim 10^4$ – 10^5 (энергия

фотона увеличивается в γ^2 раз). Механизм же ускорения частиц до таких ультрарелятивистских энергий до сих пор до конца не понят.

6.3.3 Квантовый предел в детекторах гравитационных волн

В заключение этой книги, расскажем еще об одном случае, когда квантовые эффекты дают о себе знать в связи с астрофизическими исследованиями. Речь идет о детекторах гравитационных волн, т.е. о вполне макроскопических объектах, в которых, казалось бы, эффекты микромира проявляться никак не должны. Тем не менее, как мы увидим, квантовые эффекты необходимо учитывать и в этой области исследований.

Напомним, что существование гравитационных волн следует из общей теории относительности Эйнштейна, сформулированной еще в 1916 году. Считается, что гравитационные волны могут генерироваться в двойных системах за счет столкновения нейтронных звезд и черных дыр, а также при взрывах сверхновых звезд. Кроме того, интенсивное фоновое гравитационное излучение могло возникнуть на ранней стадии эволюции Вселенной во время Большого взрыва. Однако из-за слабости гравитационного взаимодействия до последнего времени сами гравитационные волны зарегистрировать не удавалось. Косвенно же существование гравитационных волн было подтверждено Р. Халсом и Дж. Тейлором³² по обнаруженному ими вековому уменьшению размеров орбиты двойной системы, содержащей радиопульсар PSR B1913+16.

В настоящее время построено уже несколько приемников гравитационного излучения. Их главная задача как раз и состоит в экспериментальном обнаружении гравитационных волн космического происхождения. Это японский проект TAMA-300, немецкий GEO600, итальянский VIRGO, а также два гигантских приемника гравитационных волн, объединенные американским проектом ЛИГО (LIGO — Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Иными словами, LIGO состоит из двух обсерваторий, находящихся в Ливингстоне (штат Луизиана) и в Ричланде (штат Вашингтон), удаленных друг от друга на три тысячи километров. Поскольку согласно ОТО скорость распространения гравита-

³²За это открытие в 1993 году они получили Нобелевскую премию по физике.

ционных волн равна скорости света c , то значительное расстояние между приемниками будет давать временную задержку, достигающую (в зависимости от направления на источник) до 10 миллисекунд. Это должно позволить определить направление на источник гравитационного излучения. При этом все обсерватории представляют собой Г-образную систему, что позволяет принимать излучение из любого направления.

Основным рабочим инструментом в большинстве приемников являются массивные (до 40 кг) специально выращенные монокристаллические цилиндры, обладающие высокой добротностью, т.е. способные откликнуться на колебания в диапазоне $1\text{--}10^4$ Гц. Как показано в Приложении 8.9, Именно такие частоты должны иметь гравитационные волны, образующиеся на конечной стадии эволюции двойной системы, состоящей из двух нейтронных звезд. При прохождении гравитационного импульса с длиной волны λ меньшей или порядка расстояния L между двумя принимающими цилиндрами, напряженность гравитационного поля волны у двух детекторов (а, значит, и их ускорение) будет различным. Поэтому, измеряя изменение расстояния δL между двумя приемниками, можно судить и об интенсивности гравитационного импульса.

Для ожидаемых источников относительное смещение детекторов $h = \delta L/L$ должно составлять лишь $10^{-20}\text{--}10^{-22}$. Чтобы измерить столь малые смещения, используют интерферометр Майкельсона, в каждом из плеч которого благодаря установленным на детекторах зеркалам образуются резонаторы Фабри-Перо. За счет многократного прохождения света между зеркалами ожидаемая задержка (или опережение) во времени $\delta t = \delta L/c$ увеличивается, что и дает возможность зарегистрировать гравитационный сигнал. Ясно, однако, что для уверенной регистрации желательно иметь как можно большее расстояние между зеркалами, а качество оптической системы должно быть исключительно высоко. Поэтому в многокилометровых туннелях необходимо поддерживать вакуум.

Казалось бы, все рассказанное выше не имеет никакого отношения к квантовому миру. Однако при ближайшем рассмотрении мы обнаруживаем, что и здесь квантовые эффекты могут играть заметную роль. Действительно, даже при расстоянии между детекторами L порядка нескольких километров, следует ожидать их относительное смещение

$\delta L \sim hL \sim (10^{-15}-10^{-17})$ см. При этом столь малая величина (которая меньше комптоновской длины протона!) должна быть измерена на масштабе времени τ , не превышающей периода самой гравитационной волны. Характерные же времена колебаний в гравитационной волне, как уже говорилось, составляют лишь $10^{-3}-10^{-4}$ с.

С другой стороны, согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, любая попытка измерить координату тела массы M с точностью δL приведет к тому, что само это тело приобретет скорость $\delta V \approx \hbar/(M\delta L)$. В результате, за время измерения τ смещение детектора $\delta' L = \delta V \tau$ должно быть не меньше

$$\delta' L \sim \frac{\hbar \tau}{M \delta L}. \quad (292)$$

Поэтому, любая попытка измерить координату тела δL с точностью, лучшей чем $(\delta L)_{\min}$, где

$$(\delta L)_{\min} = \left(\frac{\hbar \tau}{M} \right)^{1/2}, \quad (293)$$

приведет к тому, что квантовое смещение $\delta' L$ (288) станет больше, чем δL .

Простейший расчет показывает, что для массы M порядка 10 кг и времени наблюдения τ порядка 10^{-3} с величина $(\delta L)_{\min}$ будет как раз примерно равна 10^{-17} см, т.е. смещению, ожидаемому от самых слабых источников. Таким образом, мы приходим к совершенно замечательному выводу, что современные детекторы гравитационного излучения достигли квантового предела разрешения. Поэтому эффекты квантовой механики неизбежно должны будут учитываться как при анализе данных, полученных на уже существующих приемниках, так и при проектировании гравитационных обсерваторий нового поколения.

7 Заключение

На рубеже 20-21 веков квантовая механика, безусловно, переживает вторую молодость. Бурное развитие технологии позволило проводить эксперименты, невозможные еще несколько десятилетий назад. Сюда можно отнести прямые эксперименты по проверке неравенств Белла, квантовой телепортации, работы по созданию квантовых компьютеров. Одним из главных достижений в физике за 2011 год стала экспериментальная работа по динамическому эффекту Казимира, в которой фотоны рождались из вакуумных флуктуаций электромагнитного поля за счет быстрых колебаний специально приготовленных зеркал. Неудивительно поэтому, что примерно одна треть Нобелевских премий, присужденных за последние четверть века (за квантовый эффект Холла, за высокотемпературную и обычную сверхпроводимость, за графен) связаны с ключевыми вопросами квантового мира.

Квантовая механика изменила мир вокруг нас. Пользуясь современными средствами связи, мы уже давно не задумываемся, что все они работают в квантовом режиме. Даже электроны, проводящие ток в обычном проводе, представляют собой чисто квантовую систему, а не отдельные частицы, к которым без ограничений могли бы быть применены законы классической механики.

Квантовая механика нас очень многому научила. Например, что значит правильно поставленный вопрос. Насколько далеко можно идти в отрицании казалось бы незыблемых истин. Волна или частица — на первый взгляд, точная формулировка вопроса, но в такой постановке задача, как мы видели, найти решение невозможно. На примере задач, связанных с квантовой механикой, удалось вплотную подойти к реальным, как мы теперь понимаем, границам классического подхода к описанию природы: классические законы логики отказывают, сталкиваясь с вероятностным описанием единичных событий.

Закончить же эту книгу хочется еще одним историческим замечанием. Как уже говорилось, среди отцов-основателей квантовой механики не было российских ученых. Тем не менее, три имени не могли не быть упомянуты. Это М.П. Бронштейн, Л.Д. Ландау и Г.А. Гамов. Три закадычных друга, внутренне свободные и раскрепощенные, не призна-

вавшие никаких авторитетов, они ворвались в науку в двадцатых годах прошлого века. Уже тогда, несмотря на молодость, было понятно, насколько высок их потенциал.

А вот судьба развела их. Неизбежно столкнувшись с тоталитарным режимом, они выбрали разные пути. М.П. Бронштейн, не пойдя на компромисс (ему предложили написать историю физики, в которой основные заслуги приписывались бы российским ученым), был репрессирован и расстрелян 1938 году. Г.А. Гамов эмигрировал в США, и долгие годы его имя находилось под запретом. Тогда этот поступок действительно во многом выглядел как предательство, и многие друзья отвернулись от него. Л.Д. Ландау открыто выступил против режима, провел один год в тюрьме, и лишь личное вмешательство П.Л. Капицы, поручившегося, что Ландау больше никогда не будет заниматься политикой, спасло ему жизнь. Но было одно, что их объединяло. Они отдали свои жизни науке, и в этом служении были последовательны до конца.

8 Приложения

В Приложениях мы рассмотрим ряд задач, которые требуют несколько большей математики, чем в основном тексте. Впрочем, и здесь расчеты ограничиваются в основном достаточно элементарными выкладками.

8.1 Принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы

В этом разделе на простом примере будет показано, как принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы позволяет получить классические результаты статистической физики. А именно, как и в разделе 3.1.1, мы рассмотрим вероятность, с которой N частиц могут быть распределены по двум ячейкам (например, в правой и левой частях комнаты). Отметим сразу, что в нашем случае реализуется наиболее простой случай принципа равномерного распределения, в котором все состояния имеют одну и ту же энергию. Более общий случай понадобится нам в Приложении 8.3.

Прежде всего, рассмотрим вопрос о том, сколько различных состояний существует при размещении N частиц по двум ячейкам. Т.е. какое количество вариантов того, что в первой ячейке будет находиться K частиц, а во второй — $(N - K)$ частиц. Это есть классическая задача комбинаторики — ”школьной” (т.е. элементарной) области теории вероятности.

Для решения этой задачи нам, фактически, достаточно знать лишь про бином Ньютона, а именно про коэффициенты разложения в соотношениях

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 b^0 + 2 \cdot a^1 b^1 + 1 \cdot a^0 b^2, \quad (294)$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3, \quad (295)$$

$$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 b^0 + 4 \cdot a^3 b^1 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^1 b^3 + 1 \cdot a^0 b^4, \quad (296)$$

...

которые мы специально записали в чуть более формальном виде. Коэффициенты при произведениях $a^K b^{N-K}$ и дают нам ответ на поставленный вопрос. Действительно, коэффициент 3 при $a^2 b$ есть в точности количество вариантов, в которых в произведении

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$ два раза выпадет a , и один раз b . Выпадение a будет соответствовать событию, в котором частица попадает в левую половину комнаты, а выпадение b — в правую. При этом сами коэффициенты задаются следующей формулой (доказывается по индукции)

$$C_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!}, \quad (297)$$

где по определению факториала $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, но и $0! = 1$. Эту величину еще называют статистическим весом и обозначают буквой G . Полное же число событий есть сумма коэффициентов при произведениях $a^K b^{N-K}$. Положив $a = b = 1$, получаем $(1 + 1)^N = 2^N$.

Для определения же собственно вероятности нам потребуется еще одна гипотеза. А именно гипотеза о том, что выпадение всех 2^N возможных состояний имеют одну и ту же вероятность. Именно в этом и состоит основная аксиома статистической физики. Как уже отмечалось, она является в значительной степени эвристической. Однако ее справедливось (т.е. справедливость выводов и следствий, основанных на этой гипотезе) была многократно проверена. Поэтому, как и для закона сохранения энергии, принцип равномерного распределения был возведен в ранг универсального закона.

Если же все варианты действительно одинаковы, то тогда мы можем написать для вероятности события, в котором в левой части находится K частиц, а в правой — $(N - K)$ частиц

$$\mathcal{P}_N^K = \frac{N!}{2^N K!(N-K)!}. \quad (298)$$

Обсудим вкратце свойства этого распределения. Поскольку нас прежде всего интересуют большие значения K и N , то можно воспользоваться соотношением Муавра-Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (299)$$

Для дальнейшего нам будет удобнее использовать другую форму

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \ln(2\pi n)/2. \quad (300)$$

Эти соотношения, как мы видим, справедливы не только для целых, но и для любых значений n .

Далее, как видно уже из биномиальных коэффициентов, наибольшие значения вероятности должны достигаться при $K = N/2$. Если теперь ввести новую переменную $\delta = K - N/2$ и воспользоваться соотношением $\ln(1 + \delta) \approx \delta - \delta^2/2$, то можно получить после несложных преобразований

$$\mathcal{P}(\delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{2\delta^2}{N}\right). \quad (301)$$

Это соотношение и было использовано нами в разделе 3.1.1.

8.2 Закон Релея-Джинса

Прежде чем переходить к вычислениям, необходимо точно определить все используемые величины. Закон Рэлея-Джинса — это закон для равновесной плотности излучения т.н. "абсолютно чёрного тела" $\mathcal{P}(\omega)$. При этом спектральная плотность излучения $\mathcal{P}(\omega)$ определяется так, чтобы поток энергии (измеряется в эрг см⁻² с⁻¹ Гц⁻¹) в диапазоне частот от ω до $\omega + \delta\omega$ был равен $\mathcal{P}(\omega)\delta\omega$. Далее, понятно, что абсолютно чёрных тел в природе не существует. "Абсолютно чёрное тело" есть удобная модель, которая обычно используется для анализа экспериментов. Обычно ее изображают как замкнутую полость с небольшим отверстием. Но на самом деле отверстие для этой модели вообще не важно, поскольку оно нужно лишь для того, чтобы подчеркнуть принципиальную возможность наблюдать излучение, находящегося внутри полости. В результате свет, попадающий внутрь сквозь отверстие, после многократных отражений будет полностью поглощён, и отверстие снаружи будет выглядеть совершенно чёрным.

При этом, однако, важно, что при нагревании этой полости у неё должно появиться собственное излучение. Разумно предположить, что излучение, испущенное внутренними стенками полости, прежде, чем оно сможет выйти за пределы полости, должно неизбежно претерпеть большое количество новых поглощений и излучений. Поэтому излучение внутри полости будет находиться в термодинамическом равновесии со стенками. Это и есть основное свойство "абсолютно чёрного тела", которое и приводит к его, как мы сейчас увидим, достаточно универсальным свойствам.

Еще одним важнейшим элементом, лежащим в основе вывода закона Релея-Джинса, стала вновь идея о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Напомним, что как было показано в разделе 3.2.2, количество различных волн в малом объеме $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ в диапазоне волновых векторов между k_x и $k_x + \delta k_x$, k_y и $k_y + \delta k_y$, k_z и $k_z + \delta k_z$ есть (71)³³

$$\delta N = 2 \frac{\delta V \delta k_x \delta k_y \delta k_z}{(2\pi)^3}. \quad (302)$$

Иными словами, число δN определяет число степеней свободы для электромагнитного поля в элементе объема δV и в диапазоне волновых векторов $\delta k_x \delta k_y \delta k_z$. Согласно же принципу равномерного распределения, все они являются равновероятными.

Вспомним теперь, что мы обсуждаем излучение "абсолютно черного тела", для которого мы в качестве модели выбрали излучение в замкнутой полости. Понятно, что для такого излучения естественно предположить, что оно будет изотропным, т.е. что поток излучения через небольшую поверхность не будет зависеть от ориентации этой поверхности. В этом случае будет иметь смысл лишь зависимость излучения от величины волнового вектора \mathbf{k} , а не от его направления. Поэтому элемент "объема" в трехмерном пространстве волновых векторов $\delta k_x \delta k_y \delta k_z$ удобно, как и в нашем обычном пространстве, заменить на $4\pi k^2 \delta k$. Вспоминая теперь, что частота ω и волновой вектор \mathbf{k} для фотонов связаны соотношением $\omega = ck$, получаем окончательно для числа волн в объеме δV в интервале частот от ω до $\omega + \delta\omega$

$$\delta N = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \delta V \delta\omega. \quad (303)$$

Предположим теперь, как это сделали Релей и Джинс, что каждому колебанию можно приписать энергию

$$\varepsilon = T \quad (304)$$

(напоминаем, что мы везде измеряем температуру в энергетических единицах). Помножив теперь плотность вероятности δN (299) на T , и поделив на объем δV , мы получим

³³Здесь дополнительный фактор 2 появился за счет того, что электромагнитные волны (в отличие, например, от звуковых) описываются векторными величинами — напряженностями полей. В результате, электромагнитная волна имеет две независимые поляризации.

энергию $\delta\epsilon$, заключенную в единице объема в диапазоне частот между ω и $\omega + \delta\omega$. Определяя теперь эту энергию как $\delta\epsilon = w(\omega, T)\delta\omega$, получаем окончательно для плотности энергии $w(\omega, T)$, которая приходится на интервал частот $\delta\omega$:

$$w(\omega, T) = \frac{\omega^2 T}{\pi^2 c^3}. \quad (305)$$

Зная же плотность излучения $w(\omega, T)$ (размерность эрг см⁻³ Гц⁻¹), нетрудно определить и спектральную плотность потока \mathcal{P} (размерность эрг см⁻² с⁻¹ Гц⁻¹). Если бы все фотоны распространялись перпендикулярно элементу площади δS , то тогда можно было бы записать просто $\mathcal{P} = cw$. Действительно, через площадку δS за время δt прошла бы вся энергия, заключенная в объеме $\delta S c \delta t$ (фотоны распространяются со скоростью света). В случае же изотропного излучения мы должны учесть то, что фотоны, распространяющийся под углом θ к поверхности δS , будут фактически приходить из объема $\delta S c \delta t \cos \theta$ и, кроме того, половина фотонов вообще будет распространяться в противоположную сторону. Поэтому в этом случае (проверьте!) $\mathcal{P} = (1/4)cw$. В итоге, получаем

$$\mathcal{P}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} T. \quad (306)$$

Как уже отмечалось, это соотношение с хорошей точностью описывает излучение абсолютно черного тела при $\hbar\omega \ll T$.

Формула (302) является одной из основных расчетных формул в наблюдательной радиоастрономии. Действительно, если из наблюдений известна величина $\mathcal{P}(\omega)$, то тогда мы можем определить величину

$$T_b = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega^2} \mathcal{P}(\omega), \quad (307)$$

которая называется яркостной температурой источника на частоте ω . Понятно, что величина T_b будет совпадать с реальной температурой излучающей среды лишь в том случае, если излучение имеет тепловую природу и если частота наблюдения достаточно мала, так что мы можем пользоваться приближением Релея-Джинса. Для источников же, у которых T_b составляет 10^{15} – 10^{20} К, можно с уверенностью сказать, что их излучение не связано с тепловыми процессами.

8.3 Формула Планка

Для вывода формулы Планка (20) нам потребуется результат, основанный на полной версии принципа равнораспределения энергии по степеням свободы. А именно распределение Гиббса — одно из ключевых соотношений статистической физики. Как мы уже отмечали выше, в Приложении 8.1 был рассмотрен случай, когда все состояния имеют одинаковую энергию. Если же различные состояния имеют разную энергию, то уже интуитивно ясно, что частицам будет выгодно занимать нижние энергетические уровни. Тем не менее, принцип равнораспределения может быть сформулирован и этом случае.

Дело в том, что физически правильной постановкой задачи будет вопрос о том, каким будет распределение N частиц по уровням энергии ε_n *при заданной величине полной энергии*

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^K N_n \varepsilon_n. \quad (308)$$

Здесь N_n — число частиц, занимающих энергетический уровень ε_n , а K — количество различных уровней энергии. При этом заданным должно быть еще и полное число частиц

$$N = \sum_{n=1}^K N_n. \quad (309)$$

Прежде всего, для ответа на поставленный вопрос нам потребуется формула

$$G = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_K!}, \quad (310)$$

обобщающая соотношение (293). При этом величина G (т.н. статистический вес) показывает, сколькими способами можно разместить N_1 частиц в первой ячейке, N_2 частиц во второй, и т.д. при выполнении условия (305). Здесь уже используется фундаментальное предположение о том, что все состояния с данной энергией равновероятны.

На Рис. 32 для иллюстрации показано, как можно разместить шесть одинаковых молекул в трех ячейках, имеющих энергии 0, ε и 2ε , так, чтобы полная энергия системы составляла 4ε . Таких комбинаций, как мы видим, всего три. Но количество вариантов, которыми можно расположить молекулы, т.е. статистические веса соответствующих состояний, при этом различны. Понятно, что при $N \rightarrow \infty$ (и, вообще говоря, и при каждом

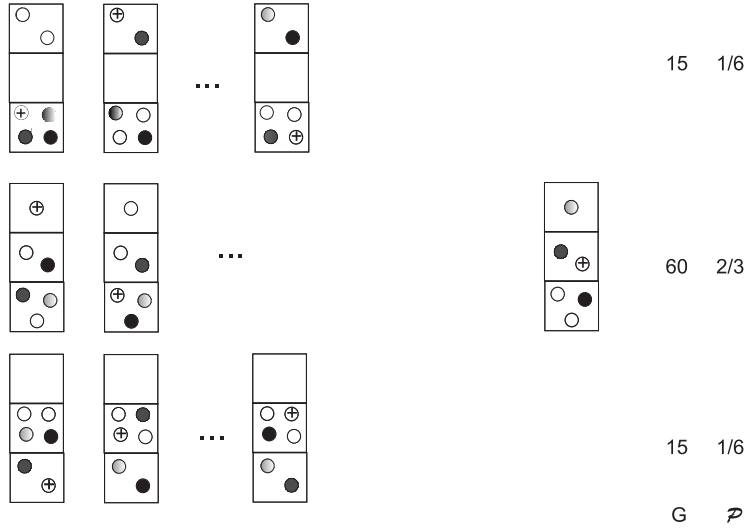


Рис. 32: Различные варианты размещения шести одинаковых молекул в трех ячейках, имеющих энергии 0 , ε и 2ε , так, чтобы полная энергия системы составляла 4ε . Показаны также статистические веса G и вероятности выпадения соответственных состояний

$N_n \rightarrow \infty$) будет реализован наиболее вероятный вариант, при котором величина G имеет максимум. Оказывается, этого условия достаточно, чтобы определить сам вид распределения частиц по энергетическим уровням.

Для простоты, рассмотрим случай эквидистантных энергетических уровней с расстояниями между ними $\Delta\varepsilon \ll \mathcal{E}$. Пусть при этом наиболее вероятное распределение реализуется при количестве N_1 частиц на нижнем уровне, N_2 частиц на втором уровне, и т.д. При этом величина $G(N_1, \dots, N_K)$ должна иметь максимум при этих значениях N_n . Возьмем теперь две частицы из уровня m и перенесем одну из них на уровень $m - 1$, а другую на уровень $m + 1$, так что ни полное число частиц, ни полная энергия системы не изменится. Естественно предположить, что в районе максимума величина G должна остаться неизменной, так что мы можем записать, что

$$\frac{N!}{N_1! \dots N_{m-1}! N_m! N_{m+1}! \dots N_K!} = \frac{N!}{N_1! \dots (N_{m-1} + 1)! (N_m - 2)! (N_{m+1} + 1)! \dots N_K!}. \quad (311)$$

Сравнивая эти выражения, получаем

$$N_m(N_m - 1) = (N_{m-1} + 1)(N_{m+1} + 1), \quad (312)$$

так что при $N_n \gg 1$

$$N_m^2 \approx N_{m-1}N_{m+1}. \quad (313)$$

Предположим теперь, что количество частиц на уровне m определяется лишь энергией этого уровня, т.е. что мы можем записать

$$N_m = f(\varepsilon_m). \quad (314)$$

Тогда соотношение (309) перепишется в виде

$$f^2(\varepsilon_m) = \left[f(\varepsilon_m) - \frac{df}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{d\varepsilon^2} (\Delta\varepsilon)^2 \right] \left[f(\varepsilon_m) + \frac{df}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{d\varepsilon^2} (\Delta\varepsilon)^2 \right].$$

Как и следовало ожидать, линейные члены по величине $\Delta\varepsilon$ исчезают, а квадратичные приводят к соотношению

$$f(\varepsilon) \frac{d^2f}{d\varepsilon^2} - \left(\frac{df}{d\varepsilon} \right)^2 = 0. \quad (315)$$

Решение этого уравнения второго порядка, соответствующее пределу $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$, имеет вид

$$N(\varepsilon) = N_0 \exp \left(-\frac{\varepsilon}{T} \right). \quad (316)$$

где N_0 и T — некоторые постоянные. Это и есть соотношение, найденное Дж. Гиббсом (1839-1903) и носящее его имя. Соответственно, для дискретного эквидистантного энергетического спектра получаем

$$N_m = N_0 \exp \left(-\frac{m\Delta\varepsilon}{T} \right). \quad (317)$$

Еще раз подчеркнем, что как и в случае распределения Гаусса (8), распределение Гиббса (312) получается в пределе очень больших значений N . Действительно, при малых N , как показано на Рис. 32, вероятности различных состояний хотя и отличаются друг от друга, но все же могут совпадать по порядку величины. При больших же N , как и для распределения Гаусса, практически реализуется лишь наиболее вероятное состояние. Впрочем, и на нашем, чрезвычайно упрощенном примере видно, что наиболее

вероятным является состояние, при котором числа заполнения энергетических уровней плавно уменьшаются с увеличением их энергий.

Здесь, правда, необходимо отметить еще одно обстоятельство. На первый взгляд, непонятно, в каком месте в наших рассуждениях могла возникнуть температура T . Действительно, как было только что показано, величина T в распределении Гиббса возникает лишь как некоторая константа, природа которой может быть понята лишь при рассмотрении различных приложений. Простейшим примером здесь может служить распределение концентрации изотермической атмосферы $n(h)$ в однородном гравитационном поле в зависимости от высоты h .

Действительно, рассмотрим силы, действующие на элемент объема $\delta S \delta h$, где δS — элемент площади, а δh — высота. Вниз будет действовать сила гравитации $Mg = (n_g m_p \delta S \delta h)g$, где m_p и n_p — масса и концентрация частиц газа, а вверх — сила давления газа, связанная с разностью давлений на верхнюю и нижнюю границы объема $[-P(h + \delta h) + P(h)]\delta S$, где $P = n_g T$ — давление газа. Поскольку для изотермической атмосферы $P(h + \delta h) - P(h) = (\delta n_g / \delta h) T \delta h$, имеем после сокращения на $\delta S \delta h$

$$\frac{dn_g}{dh} = -\frac{m_p g}{T} n_g. \quad (318)$$

Решение этого дифференциального уравнения есть

$$n_g(h) = n_0 \exp\left(-\frac{m_p g h}{T}\right). \quad (319)$$

Как мы видим, форма уравнения (314) совершенно аналогична распределению Гиббса, причем в числителе стоит как раз потенциальная энергия $m_p g h$, а в знаменателе — температура T .

Теперь, наконец, мы можем вернуться к идее Планка. Как мы помним, она основывалась на предположении, согласно которому энергия осциллятора может принимать лишь значения, кратные кванту энергии ε_q , где $\varepsilon_q = \hbar\omega$. В этом случае величины N_m (313) образуют геометрическую прогрессию, сумма которой можно легко определить. Напомним, что сам Планк говорил лишь о квантовании энергии осцилляторов, составляющих

вещество стенок полости, в котором находится излучение; при этом, конечно же, предполагалось, что излучение и вещество находятся в термодинамическом равновесии³⁴. Нам же будет удобно воспользоваться тем, что квантование можно ввести и для фотонов. С другой стороны, мы, следуя Планку, рассмотрим упрощенную ситуацию, когда энергия m фотонов может быть записана в виде $m\hbar\omega$. Как легко проверить, точная формула (94), содержащая фактор $(m + 1/2)$, приводит к тем же результатам.

Итак, нам осталось посчитать среднюю энергию m фотонов. При этом, как и в пределе Релея-Джинса, число состояний в элементе объема $\delta V \delta \omega$ будет задаваться формулой $\delta N = (\omega^2/\pi^2 c^3) \delta V \delta \omega$ (299). Отличие будет состоять лишь в том, что средняя энергия фотонов будет отличаться от T .

Действительно, давайте применим общий принцип, найденный Гиббсом, для фотонов, имеющих одинаковую энергию $\hbar\omega$. Поскольку при эквидистантности уровней осцилляторов энергии излученных фотонов могут принимать лишь значения $m\hbar\omega$, где m — целое число, получаем с учетом общего соотношения (313) для вероятности фотону иметь энергию $m\hbar\omega$

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_0 \exp\left(-\frac{m\hbar\omega}{T}\right), \quad (320)$$

где \mathcal{P}_0 — некоторая константа. При этом сумма бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m$ легко вычисляется, и мы получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right]^{-1}. \quad (321)$$

Поскольку же сумма всех вероятностей должна быть равна единице, получаем окончательно

$$\mathcal{P}_m = \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right)\right] \exp\left(-\frac{m\hbar\omega}{T}\right). \quad (322)$$

Для дальнейшего нам будет удобно записать это выражение в виде

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta m\hbar\omega). \quad (323)$$

Здесь по определению $\beta = 1/T$, а

$$Z(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_m) \quad (324)$$

³⁴Излучение в комнате, в которой Вы находитесь, этому свойству не удовлетворяет!

есть т.н. статистическая сумма, играющая ключевую роль в статистической физике. В нашем случае, когда $\varepsilon_m = m\hbar\omega$, получаем

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - \exp(-\beta\hbar\omega)}. \quad (325)$$

Теперь нам остается сделать заключительный шаг — определить среднюю энергию фотонов \mathcal{E}_ω , соответствующей энергии $\hbar\omega$. Зная вероятность \mathcal{P}_m (319), с которой реализуется каждое состояние с полной энергией $m\hbar\omega$, имеем в результате

$$\mathcal{E}_\omega = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\hbar\omega \exp(-\beta m\hbar\omega)}{Z(\beta)}. \quad (326)$$

Здесь и становится понятным удобство введения статистической суммы $Z(\beta)$ (320). Действительно, прямым вычислением можно показать, что

$$\mathcal{E}_\omega = -\frac{1}{Z(\beta)} \frac{dZ(\beta)}{d\beta}, \quad (327)$$

так что

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}. \quad (328)$$

Как мы видим, при малых энергиях фотонов $\hbar\omega \ll T$ мы возвращаемся к классической формуле $\mathcal{E}_\omega = T$. Для больших же энергий $\hbar\omega \gg T$ средняя энергия фотонов оказывается экспоненциально малой. В итоге, умножая энергию \mathcal{E}_ω на число состояний δN и деля его на объем δV , получем для спектральной плотности энергии

$$w(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}, \quad (329)$$

которая и соответствует планковскому распределению (20).

8.4 Атом Бора против теории Максвелла

На примере определения времени жизни электрона в атоме Бора, которое следует из классической теории электромагнетизма, мы заодно покажем, как удобно проводить вычисления ”по порядку величины”, т.е. не обращая внимание на численные коэффициенты порядка единицы. Иногда подобный расчет совершенно достаточен, чтобы сказать, например, нужно или нет учитывать тот или иной эффект.

Итак, согласно теории Максвелла, любой заряд e , движущийся с ускорением \ddot{r} , будет терять свою энергию \mathcal{E} со скоростью³⁵

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta t} \sim \frac{e^2 \ddot{r}^2}{c^3}. \quad (330)$$

Поскольку в атоме Бора кинетическая энергия по порядку величины совпадает с потенциальной, то мы можем записать $\mathcal{E} \sim e^2/a_B$, где a_B (119) — радиус Бора. С другой стороны, ускорение электрона можно записать как $\ddot{r} = e^2/a_B^2 m_e$. В результате, имеем для оценки времени жизни τ

$$\tau \sim \frac{\mathcal{E}}{(\delta \mathcal{E}/\delta t)} \sim \frac{m_e^2 c^3 a_B^3}{e^4}. \quad (331)$$

Конечно, для количественной оценки величины τ можно было бы сразу подставить числовые значения заряда и массы электрона, радиуса Бора и скорости света. Однако иногда бывает удобнее несколько перегруппировать члены, объединив их в известные комбинации. Действительно, воспользовавшись определением радиуса Бора a_B (119), получаем

$$\tau \sim \alpha^{-4} \frac{a_B}{c}. \quad (332)$$

Как мы видим, для оценки времени жизни нам нужно знать лишь значения постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$, радиуса Бора a_B и скорости света c . Имеем в итоге

$$\tau \sim 10^{-11} \text{ s}. \quad (333)$$

Формула (328) может быть переписана и в другой удобной форме

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \left(\frac{c}{\omega_c r_e} \right), \quad (334)$$

где ω_c есть частота вращения, а r_e — классический радиус электрона. Эта формула оказывается более универсальной, поскольку она справедлива для любого кругового движения с частотой ω_c .

³⁵Эта формула выводится в книге "Гравитация и астрофизика".

8.5 Соотношение неопределенностей — точная формулировка

Внимательный читатель должен был бы обратить внимание на то, что соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ (60) (и, соответственно, соотношение для волн $\Delta x \Delta k_x \geq 1/2$ (59)) безусловно, требуют уточнения. Действительно, справа стоит четкая граница $\hbar/2$ (или $1/2$). Следовательно, и стоящие слева величины Δx и Δk_x требуют точного определения.

Как уже говорилось, значения Δx и Δk_x должны быть определены как среднеквадратичные отклонения от их средних значений x_0 и k_0 . Формальное определение Δx для произвольной волны $A = A(x)$, достаточно быстро спадающей при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$, имеет вид

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |A(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |A(x)|^2 dx}, \quad (335)$$

где среднее значение x_0 есть

$$x_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |A(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |A(x)|^2 dx}. \quad (336)$$

Эти соотношения на самом деле суть просто обобщения определения среднего арифметического для непрерывно распределенных величин.

Здесь нужно отметить два обстоятельства. Прежде всего, как мы уже отмечали, ”мерой” распределения должен быть именно квадрат амплитуды волны. В противном случае для знакопеременного сигнала можно получить совершенно неверный результат. В частности, для любого сигнала, описываемого нечетной функцией $A(-x) = -A(x)$, вообще невозможно определить величины, которые должны были стоять в знаменателях (331)–(332). Появление же модуля функции $A(x)$ позволяет использовать это соотношение и для комплексных сигналов. При этом, как мы видим, в определениях (331)–(332) вместо $A(x)$ может быть использована и волновая функция $\psi(x)$.

Что же касается величин Δk_x и Δp_x , то для них определение среднеквадратичных отклонений на первый взгляд должно проводиться по совершенно различным формулам. Если говорить о волновых векторах, то для определения характерного разброса Δk_x

нужно прежде всего сделать преобразование Фурье

$$\hat{A}(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{-ik_x x} dx, \quad (337)$$

(величина $\hat{A}(k_x)$ и определяет область и относительную роль волновых векторов, задающих сигнал $A(x)$), а затем выполнить операцию, аналогичную (331)

$$(\Delta k_x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (k_x - k_0)^2 |\hat{A}(k_x)|^2 dk_x}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{A}(k_x)|^2 dk_x}. \quad (338)$$

Здесь k_0 — среднее значение k_x , определяемое по аналогии с (332). С другой стороны, по канонам квантовой механики квадрат импульса, благодаря соотношению (92), следует определять как³⁶

$$p_x^2 = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx. \quad (339)$$

Однако, как можно показать, оба этих определения будут приводить к одному и тому же значению $\Delta p_x = \hbar \Delta k_x$.

В качестве примера рассмотрим пространственную волну $A(x)$, задаваемую уже знакомой нам функцией Гаусса

$$A(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right). \quad (340)$$

Коэффициент перед экспонентой выбран таким образом, чтобы знаменатели в соотношениях (331)–(332) были равны единице. Поскольку же ”весом” в интеграле (331) будет квадрат амплитуды волны $A(x)$, т.е. величина e^{-x^2/x_0^2} , не содержащая двойку в знаменателе экспоненты, то, как легко проверить,

$$(\Delta x)^2 = \frac{x_0^2}{2}. \quad (341)$$

С другой стороны, замечательное свойство функции Гаусса $g(x) \propto e^{-x^2/2}$ состоит в том, что она совпадает по форме со своим преобразованием Фурье (333): $\hat{g}(k) \propto e^{-k^2/2}$. Поэтому

$$\hat{A}(k_x) = \frac{\sqrt{x_0}}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{x_0^2 k_x^2}{2}\right). \quad (342)$$

³⁶Мы для порядка поставили звездочку, которая означает, что для комплексных волновых функций здесь должна стоять величина, комплексно сопряженная к $\psi(x)$.

Отсюда уже нетрудно получить, что

$$(\Delta k_x)^2 = \frac{1}{2x_0^2}, \quad (343)$$

и, следовательно, $\Delta x \Delta p_x = 1/2$. Читателю самому предоставляется возможность убедиться, что формула (335) приводит к тому же результату. Таким образом, можно сделать вывод, что для гауссова профиля реализуется наименьшее из значений, разрешенных соотношением неопределенностей Гейзенберга.

В заключение отметим, что, как можно проверить прямой подстановкой, волновая функция (336)

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right), \quad (344)$$

где

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (345)$$

является решением уравнения Шредингера (86) для $\mathcal{E} = \hbar\omega/2$. Таким образом, в случае гармонического осциллятора для нижнего энергетического уровня реализуется минимальное значение произведения $\Delta x \Delta p_x$.

8.6 Томсоновское сечение

Томсоновское сечение $\sigma_T = 1/(n_e l)$ (109) (n_e — концентрация электронов, l — характерная длина поглощения) не имеет прямого отношения к квантовой механике. Оно описывает классическое сечение рассеяния электромагнитной волны на свободных электронах. Тем не менее, полезно привести здесь качественный вывод величины σ_T , поскольку она выражается через классический радиус электрона r_e (109).

Итак, рассмотрим плоскую электромагнитную волну, падающую на область с поперечным сечением δS (см. Рис. 33). Наша задача состоит в том, чтобы определить характерную длину l , на которой волна существенно затухнет за счет взаимодействия с электронами, заполняющими эту область. Для этого мы приравняем энергию волны \mathcal{E}_{in} , проходящую за время δt через сечение δS с энергией \mathcal{E}_{out} , излучаемую электронами.

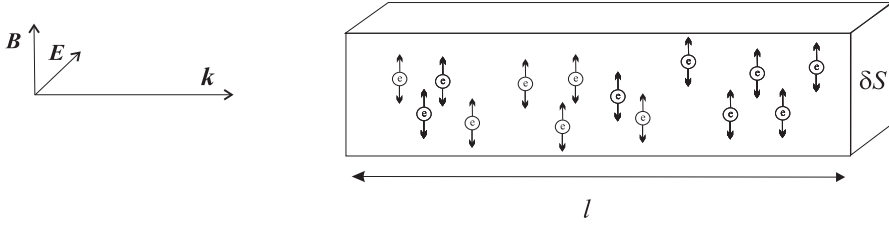


Рис. 33: Плоская электромагнитная волна, падающая на область с поперечным сечением δS и длиной l . Томсоновское сечение описывает затухание волны на длине l за счет переизлучения электронов, заполняющих объем $(l \cdot \delta S)$

Т.к. электромагнитная волна распространяется со скоростью света c , то приходящая энергия может быть записана в виде $\mathcal{E}_{\text{in}} = w(c\delta t \cdot \delta S)$, где

$$w = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \quad (346)$$

есть плотность энергии электромагнитной волны. Поскольку (в системе СГС!) в плоской волне электрическое поле $|\mathbf{E}|$ равно магнитному полю $|\mathbf{B}|$, а само электрическое поле может быть записано в виде $|\mathbf{E}| = E_A \sin \omega t$, то после усреднения по времени имеем просто

$$w = \frac{E_A^2}{8\pi}. \quad (347)$$

С другой стороны, рассеиваемая энергия может быть записана в виде $\mathcal{E}_{\text{out}} = N\dot{\epsilon}\delta t$, где $N = n_e(l \cdot \delta S)$ есть полное число электронов в рассматриваемом нами объеме, а

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{(e\ddot{r})^2}{c^3} \quad (348)$$

есть точное выражение для мощности излучения (326) одного электрона, движущегося с ускорением \ddot{r} . Воспользовавшись теперь уравнением движения $m_e\ddot{r} = eE_A \sin \omega t$ и вновь используя усреднение по времени, получаем

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3} \frac{e^4 E_A^2}{m_e^2 c^3}. \quad (349)$$

Следовательно, и \mathcal{E}_{in} и \mathcal{E}_{out} оказываются пропорциональны произведению E_A^2 и $\delta t \delta S$. В итоге, получаем окончательно для Томсоновского сечения $\sigma_T = 1/n_e l$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m_e^2 c^4}, \quad (350)$$

что совпадает с (109).

8.7 Оператор момента импульса

Для точного квантомеханического определения момента импульса частиц $l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = r p_{\perp}$, где p_{\perp} есть компонента импульса частицы, перпендикулярная радиус-вектору \mathbf{r} , нужно, как и в случае самого импульса, определить соответствующий оператор. Проще всего это сделать для квадрата момента импульса $l^2 = r^2 p_{\perp}^2$. Прежде всего, вспомним, что для одномерного движения оператор квадрата импульса имеет вид $\hat{p}_x^2 = -\hbar^2 d^2/dx^2$ (92). В трехмерном же случае, согласно правилам дисциплины, которая называется уравнения математической физики, нужно заменить оператор d^2/dx^2 на

$$\hat{L}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (351)$$

Этот оператор носит имя П.-С. Лапласа (1749-1827) и является одним из основных операторов, используемых в физике. В частности, именно он и должен стоять в уравнении Шредингера, описывающего трехмерное движение частиц.

Понятно, что для описания трехмерного движения электрона в атоме более удобными будут сферические координаты r , θ и φ . В этих координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (352)$$

Удобство такого выбора очевидно, например, из того, что доказательство известного соотношения $\hat{L}^2 f(r) = 0$, где $f(r) = 1/r = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в сферических координатах производится фактически устно. Как уже говорилось, удобным способом решения уравнения Шредингера, содержащего оператор Лапласа \hat{L}^2 , является представление волновой функции в виде $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\psi(\theta, \varphi)$ (134).

Вернемся теперь к квадрату углового момента l^2 . Согласно правилам квантовой механики, мы должны этой величине сопоставить оператор

$$\hat{l}^2 = r^2 \hat{p}_{\perp}^2. \quad (353)$$

Легко понять, что оператор квадрата поперечного импульса \hat{p}_\perp^2 может быть получен из оператора Лапласа просто отбрасыванием первого слагаемого, содержащего производные по радиальной координате r . Действительно, радиальные производные волновой функции должны были бы соответствовать радиальному импульсу, который не входит в определение углового момента $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. В итоге, получаем

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (354)$$

Зная же явное выражение для оператора квадрата момента импульса (381), можно применить стандартную процедуру квантовой механики, согласно которой значения любой физической величины A , соответствующей состоянию с волновой функцией ψ , определяются из соотношения

$$\hat{A}\psi = A\psi, \quad (355)$$

где \hat{A} есть оператор, соответствующий физической величине A . Значит, квадрат момента импульса частицы l^2 , угловая часть волновой функции которой задается сферическими функциями $Y_l(\theta, \varphi)$, должна определяться из условия

$$\hat{l}^2 Y_l(\theta, \varphi) = L^2 Y_l(\theta, \varphi), \quad (356)$$

причем получаемые в результате значения L^2 и дадут нам значения квадрата углового момента.

Поэтому, как легко проверить прямой подстановкой, при воздействии оператора \hat{l}^2 (381) на любую из использовавшихся выше стационарных волновых функций $Y_1^{(c)} \propto \sin \theta \cos \varphi$, $Y_1^{(0)} \propto \cos \theta$ или $Y_1^{(s)} \propto \sin \theta \sin \varphi$ в ответе получается все та же функция Y_1 , умноженная на $2\hbar^2$. Эту величину, согласно канонам квантовой механики, и следует считать квадратом длины момента импульса для этих состояний. Соответственно, для всех пяти волновых функций Y_2 (164)–(168) получаем $|\mathbf{l}|^2 = 6\hbar^2$. В общем же случае получаем

$$|\mathbf{l}|^2 = l(l+1)\hbar^2. \quad (357)$$

В итоге, несмотря на то, что проекции момента импульса на оси x и y неопределены, длина $|\mathbf{l}|$ есть вполне определенная величина

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar. \quad (358)$$

8.8 Эффект Казимира

В качестве еще одного примера необычных свойств микромира рассмотрим т.н. эффект Казимира. В простейшей реализации он заключается во взаимном притяжении двух параллельных хорошо проводящих пластин. Причиной же эффекта Казимира являются уже хорошо нам знакомые нулевые колебания вакуума. Суть же этого эффекта заключается в том, что проводящие пластины должны будут погасить те нулевые колебания, для которых на поверхности пластин электрическое поле, параллельное пластинам, было бы не равно нулю. В противном случае в пластине наводились бы электрические токи, которые невозможны, если проводимость достаточно велика. Поэтому, несмотря на то, что сами энергии нулевых колебаний без пластин и при их наличии бесконечны, их разность, тем не менее, оказывается конечной величиной, причем зависящей от расстояния между пластинами.

Подобное притяжение пластин было предсказано голландским физиком Х. Казимиром (1909-2000) в 1948 году, а позднее обнаружено и экспериментально. Мы выбрали этот пример из ряда других явлений, подтвердивших существование нулевых колебаний из-за наглядности и относительной простоты: как мы сейчас покажем, для его количественного описания нужно знать, фактически, лишь выражение (71) для плотности состояний. При этом для нас также будет очень важно показать, что буквенное выражение для силы Казимира может быть получено "на пальцах".

Итак, рассмотрим две параллельные пластины площадью S и расстоянием между ними d и подсчитаем энергию нулевых колебаний \mathcal{E} , заключенных в объеме $V = Sd$ между ними. Если бы пластин не было, то такую энергию следовало бы записать как

$$\mathcal{E}_1 = 2 \left(S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \right) \left(d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{(2\pi)} \right) \frac{\hbar ck}{2}. \quad (359)$$

Это выражение есть просто число состояний (которое, в свою очередь, есть плотность состояний $n^{(3)} = 1/(2\pi)^3$, умноженная на объем физического пространства Sd и объем в пространстве волновых векторов) умноженная на энергию нулевого уровня $\hbar\omega/2$. Интегрирование, естественно, распространяется и на последний множитель, который следует

записать как $\hbar c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}/2$. Двойка же связана с тем, что электромагнитные волны имеют две различные поляризации.

В присутствии же проводящих пластин первая скобка, соответствующая компоненте волновых векторов, параллельных пластинам, меняться не будет. Что же касается компонент волновых векторов k_z , ортогональных пластинам, то здесь вместо интегрирования следует провести лишь суммирование по значениям $k_z = n\pi/L$, $n = 1, 2, \dots$, для которых амплитуда электрического поля будет равна нулю как на нижней ($z = 0$), так и на верхней ($z = L$) поверхности. Кроме того, для $k_z = 0$, т.е. для волны, у которой волновой вектор параллелен пластинам, необходимо оставить лишь одну поляризацию, а именно ту, для которой электрическое поле волны перпендикулярно поверхности. В итоге, получаем

$$\mathcal{E}_2 = \left(S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \right) \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}} \right) \frac{\hbar c}{2}. \quad (360)$$

В результате, оказывается, что хотя оба выражения для энергий \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 оказываются бесконечными, их разность

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3} S \quad (361)$$

будет конечной величиной. Соответственно, сила, действующая между пластинами (которая есть по определению производная энергии по координате) будет равна

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4} S. \quad (362)$$

Покажем теперь, как выражение (357), естественно без численного коэффициента, может быть получено "на пальцах". Для этого запишем полную энергию нулевых колебаний в объеме $V = dS$ и в диапазоне волновых векторов от нуля до некоторого значения k_{\max} в виде произведения средней энергии нулевого колебания (для которой мы выберем просто значение $\hbar k_{\max} c$) на полное число волн N . Полное же число волн, как мы помним, можно оценить как произведение плотности состояний $n^{(3)} = 1/(2\pi)^3$ на физический объем V и на объем в пространстве волновых векторов k_{\max}^3 . В итоге, опуская все численные коэффициенты (а, значит, и положив $n^{(3)} \sim 1$), получаем,

$$\mathcal{E} \sim (\hbar k_{\max} c) \cdot (k_{\max}^3) \cdot (Sd). \quad (363)$$

Понятно, что как оценка по порядку величины выражение (359) будет справедливо как для свободного вакуума, так и для вакуума, ограниченного проводящими пластинами. Однако (внимание!) отличие этих энергий должно быть заметно лишь при волновых векторах k_{\max} , сравнимых с $1/d$. Действительно, при $k \gg 1/d$ длина волны нулевых колебаний будет уже существенно меньше расстояния между пластинами, и поэтому естественно предположить, что сами пластины никакого ограничения на такие волны оказать не смогут. Возможность рассмотреть не бесконечную область значений в пространстве волновых векторов, а ограничить ее лишь значениями $k < k_{\max}$, где

$$k_{\max} \sim \frac{1}{d}, \quad (364)$$

и есть основной момент нашей оценки. В итоге, считая, что разность энергий нулевых колебаний для свободного вакуума и для вакуума, ограниченного пластинами, будет порядка самой величины (359), мы тут же возвращаемся к выражению

$$\mathcal{E} \sim \frac{\hbar c}{d^3} S. \quad (365)$$

Любопытно, что после того, как существование силы Казимира было теоретически предсказано, возникла идея объяснить с помощью этого эффекта и устойчивость элементарных частиц с ненулевым зарядом. Дело в том, что если бы элементарные частицы имели вид заряженной сферы, то при их малом размере силы электростатического отталкивания оказались бы слишком сильны для их устойчивого существования. Однако надежды на силу Казимира не оправдались. Решение подобной задачи для двух концентрических сфер привел к обратному результату — учет вакуумных колебаний приводит не к притяжению, а к отталкиванию. Этот пример еще раз показывает, как нужно быть осторожным при общении с бесконечностями! В частности, наша оценка по порядку величины знак эффекта определить не может.

В заключение отметим, что явление, близкое к эффекту Казимира, было давно известно в кораблевождении. Если два корабля становятся достаточно близко (и параллельно) друг к другу, то они тоже будут гасить волны между собой, и поэтому сила давления

волн на внешние части кораблей будет стремиться их сблизить. Поэтому по морскому канону во избежание столкновений располагать так корабли не рекомендуется.

8.9 Гравитационное излучение от двойных систем

Покажем наконец, как можно оценить интенсивность гравитационной волны, которую могли бы зарегистрировать детекторы гравитационных волн, работающие сейчас на Земле. Прежде всего, оценим полное энергосвечение, возникающее при столкновении двух нейтронных звезд (или нейтронной звезды и черной дыры, или даже двух черных дыр) на последнем этапе эволюции двойной системы. Сейчас известно уже несколько систем, содержащих две нейтронные звезды, чье время жизни за счет излучения гравитационных волн значительно меньше возраста жизни Вселенной. Поэтому нет сомнения, что процессы слияния двух компактных звезд действительно имеют место. Правда, такие слияния все же чрезвычайно редки, и поэтому есть надежда обнаружить их лишь в очень далеких галактиках.

Мы начнем наши вычисления с формулы Эйнштейна для мощности гравитационного излучения двойной системы, состоящей из звезд одинаковой массы M и расстоянием a между ними. Поскольку нашей задачей будет опять лишь оценка по порядку величины, мы сразу приведем здесь соответствующее выражение без численного коэффициента и поправок на эллиптичность орбиты

$$W_{\text{tot}} \sim \frac{G^4 M^5}{a^5 c^5}. \quad (366)$$

Интересующихся же деталями расчета мы отсылаем к Приложению 5 в уже упомянутом учебнике "Гравитация и астрофизика", где показано, как эта оценка может быть получена на уровне школьной физики.

Как мы видим, мощность излучения гравитационных волн очень сильно зависит от расстояния a между компонентами двойной системы. Поэтому основное излучение будет происходить лишь на самом последнем этапе ее эволюции, когда величина a будет уже близка к радиусу самих нейтронных звезд. Поскольку, как было показано в разделе 6.2.3,

радиусы нейтронных звезд ненамного превышают радиус черной дыры соответствующей массы $r_g = 2GM/c^2$ (и поэтому скорость вращения будет порядка скорости света), то продолжительность импульса можно оценить как

$$\tau \sim \frac{r_g}{c} \sim (10^{-3} - 10^{-4}) \text{ s}. \quad (367)$$

Иными словами, гравитационный сигнал должен иметь форму короткого импульса, длительность которого будет не сильно отличаться от периода вращения двух практически соприкасающихся нейтронных звезд. При этом максимальное излучение следует ожидать на частотах 10^3 – 10^4 Гц.

Кстати, отметим здесь еще одно очень интересное обстоятельство. Заменяя в выражении (362) размер орбиты a на гравитационный радиус r_g , можно получить следующее выражение для мощности излучения (численный коэффициент мы вновь опускаем)

$$W_{\text{Pl}} = \frac{c^5}{G} \approx 3.5 \times 10^{59} \text{ erg/s}. \quad (368)$$

Как мы видим, величина W_{Pl} вообще не зависит от массы системы, т.е. представляет собой универсальную константу³⁷. Это и есть планковская мощность излучения, которая, как и планковская сила (218), не зависит однако от постоянной Планка. Поскольку же радиусы нейтронных звезд, как мы знаем, лишь в 3–10 раз превышают радиус черной дыры той же массы, мощность излучения гравитационных волн в районе максимума импульса должна составлять

$$W_{\text{tot}} \sim 10^{53} - 10^{55} \text{ erg/s}. \quad (369)$$

Далее, нам понадобится выражение для плотности энергии гравитационного поля

$$w_g = \frac{g_w^2}{8\pi G}, \quad (370)$$

где g_w есть хорошо известное всем "ускорение свободного падения", или, что здесь будет более уместно, напряженность гравитационного поля. Как показано в учебнике "Гравитация и астрофизика", это выражение легко получается по аналогии с определением

³⁷Проще всего ее получить, подсчитав выделение энергии Mc^2 за время $\tau = r_g/c$.

плотности энергии электрического поля $w = E^2/8\pi$, если рассмотреть работу, необходимую для увеличения расстояния между двумя массивными пластинами. Приравняв теперь мощность выделения энергии W_{tot} (362) потоку энергии с плотностью w_g через поверхность удаленной сферы $4\pi D^2$,

$$W_{\text{tot}} \sim 4\pi D^2 \cdot w_g \cdot c, \quad (371)$$

получаем

$$g_w \sim \left(\frac{GW_{\text{tot}}}{cD^2} \right)^{1/2}. \quad (372)$$

Понятно, что одним из ключевых параметров в этой оценке будет расстояние D до двойной системы. Далекие объекты слишком слабы, а близкие происходят слишком редко, и мы сможем увидеть их, только если очень повезет. В результате, ожидаемое расстояние до источников, которые есть надежда обнаружить в течение разумного времени наблюдений (в пределах одного года) оказывается порядка 100 мегапарсек (3×10^{26} см).

Поэтому ожидаемая величина g_w составляет

$$g_w = 10^{-8} \left(\frac{W_{\text{tot}}}{10^{54} \text{ erg/s}} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{100 \text{ Мпс}} \right)^{-1} \text{ см/с}^2, \quad (373)$$

что на одиннадцать порядков меньше ускорения свободного падения на Земле.

Понятно, что сравнение величины g_w с ускорением свободного падения на Земле g не универсально. Поэтому при анализе интенсивности гравитационной волны обычно пользуются другой, более осмысленной безразмерной величиной h , показывающей степень искажения пространства-времени³⁸. На простом языке ее можно получить следующим образом. Определим максимальную скорость $v = g_w \tau$, которую может приобрести тело в гравитационной волне. Понятно, что в качестве времени ускорения τ нужно взять период гравитационной волны $\tau = 1/\nu$. Поэтому удобным безразмерным параметром будет просто отношение возмущенной скорости $g_w \tau$ к скорости света c

$$h = \frac{g_w}{\nu c}. \quad (374)$$

³⁸ Например, для одной из поляризаций гравитационной волны $ds^2 = (1+h)c^2 dt^2 - (1-h)dx^2$.

В частности, при $h \sim 1$ гравитационную волну уже нельзя считать слабой, и тогда само приближение, в рамках которого мы ввели, например, и плотность энергии гравитационного поля w_g (366), становится неприменимым. Однако, поскольку наша простейшая оценка дает

$$h = 10^{-22} \left(\frac{W_{\text{tot}}}{10^{54} \text{ erg/s}} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{100 \text{ Mpc}} \right)^{-1} \left(\frac{\nu}{10^3 \text{ Hz}} \right)^{-1}, \quad (375)$$

то совершенно ясно, что вблизи Земли интенсивность гравитационной волны будет очень мала.

Безразмерная величина h действительно оказывается очень удобной при анализе работы детекторов гравитационного излучения. Чтобы показать это, рассмотрим два тела, находящиеся на расстоянии L друг от друга. Если это расстояние меньше длины гравитационной волны, то их относительное ускорение может достигать величин

$$\delta g = \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) g_w. \quad (376)$$

Поскольку же смещение детекторов δL может быть теперь записано в виде $\delta L = \delta g \tau^2 / 2$, то мы имеем

$$\frac{\delta L}{L} \sim h, \quad (377)$$

и, значит, относительное смещение детекторов также должно составлять лишь 10^{-20} – 10^{-22} .

9 Упражнения

1. Используя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, покажите, что при $N \gg 1$ и $K \gg 1$ вероятность биномиального распределения

$$\mathcal{P}_N^K = \frac{N!}{2^N K! (N-K)!} \quad (378)$$

стремится к распределению Гаусса

$$\mathcal{P}_G(K) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp \left[-\frac{2(K - N/2)^2}{N} \right]. \quad (379)$$

2. Найдите наиболее вероятное распределение 10 шариков в 4 ячейках с энергиями 0, ε , 2ε и 3ε и т.д. и с полной энергией 5ε и оцените температуру, соответствующую этому распределению.
3. То же для суммарной энергии 10ε .
4. Получите коэффициент 2.821439 в формуле (21).
5. Найдите спектральную плотность излучения $\mathcal{P}(\lambda)$, так, чтобы поток энергии через единичную площадку в интервале длин волн между λ и $\lambda + \delta\lambda$ был равен $\mathcal{P}(\lambda)\delta\lambda$. Оцените коэффициент k в выражении для максимума в спектре

$$\lambda_{\max} = k \frac{\hbar c}{T}. \quad (380)$$

6. Покажите, что наличие постоянной добавки $1/2$ в выражении для энергии гармонического осциллятора (94) не изменяет выражение (20) для спектральной плотности излучения абсолютно черного тела.
7. Получите уравнение (311) в случае, если из ячейки на уровне m забираются три частицы, две из них переносятся на уровень $m+1$, а еще одна — на уровень $m-2$.
8. Наиболее вероятное распределение 7 шариков в ячейках с энергиями 0, ε , 2ε , 3ε , etc. и с полной энергией 4ε есть 4, 2, 1, 0, ... Будет ли также наиболее вероятным распределение $7n$ шариков с полной энергией $4n$ выглядеть как $4n$, $2n$, n , 0, ... ? Если нет, найдите его и оцените, как изменится "температура" этого распределения.

9. Покажите, что для изотропного излучения плотность энергии w [эрг/см³] и плотность потока \mathcal{P} [эрг/(см² с)] связаны соотношением

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}cw. \quad (381)$$

10. В полости находится N термализованных фотонов (т.е. фотонов, распределенных по Планку с температурой T). Как изменится (и изменится ли вообще) температура фотонного газа, если в полость добавить еще N фотонов, распределенных по Планку с той же температурой T . Считать число фотонов неизменным, т.е. равным $2N$.

11. Воспользовавшись соотношениями $\mathcal{E} = \hbar\omega$ и $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ для энергии и импульса фотона, получите выражение

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \quad (382)$$

для изменения длины волны фотона в зависимости от угла рассеяния θ на покоящемся электроном (эффект Комптона).

12. Нет ли ошибки на Рис. 4? В каком случае штриховая линия действительно будет соответствовать той же энергии налетающего фотона?
13. При $\mathcal{E}_\gamma \gg m_e c^2$ фотоны, рассеянные при комптоновском рассеянии, будут заключены в узком конусе, направленном в направлении движения (см. Рис. 4). Оцените угол раствора этого конуса.
14. Как изменится энергия фотона при лобовом соударении, если налетающий электрон имеет энергию $\mathcal{E}_e = \gamma_e m_e c^2$ ($\gamma_e \gg 1$)?
15. Получите закон квантования Бора $m_e v r = n\hbar$ из идеи Де Бройля, согласно которой на орбите укладывается целое число длин волн $\lambda = h/(m_e v)$.
16. Волны, оставляемые движущимся по поверхности воды телом, имеют закон дисперсии

$$\omega(k) = \sqrt{gk}, \quad (383)$$

где g — ускорение свободного падения. Воспользовавшись формулами для фазовой ($V_{\text{ph}} = \omega/k$) и групповой ($V_{\text{gr}} = d\omega/dk$) скоростей, найти угол раствора следовой дорожки и показать, что он не зависит от скорости тела.

17. По сфере бежит волна

$$A(\theta, \varphi, t) = A_0 \sin \theta \sin(\varphi - \omega t). \quad (384)$$

Какие волны регистрирует наблюдатель, если он выбрал систему отсчета, повернутую относительно оси x на угол Θ ?

18. Найдите произведение среднеквадратичных отклонений Δx и Δk для бегущей волны (53).

19. Оцените, сколько оборотов сделает электрон в магнитном поле B_h (115), прежде чем он потеряет значительную часть своей энергии.

20. Покажите, что оператор проекции момента импульса $l_z = y\partial/\partial z - z\partial/\partial y$ может быть записан просто как $\partial/\partial\varphi$.

21. Проверьте, что функция $\mathcal{Y}(\theta, \varphi) = \sin^{11} \theta \sin(11\varphi)$ является собственной функцией оператора \hat{l}^2

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (385)$$

с собственным числом $132\hbar^2$ и найдите коэффициент a такой, чтобы сферическая функция $Y_{11}^{11}(\theta, \varphi) = a \mathcal{Y}(\theta, \varphi)$ удовлетворяла условию нормировки

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |Y_{11}^{11}|^2 d\varphi = 1. \quad (386)$$

22. Покажите, что если $2l + 1$ "ортов" $Y_l^m(\theta, \varphi)$ при повороте вокруг оси x на угол Θ преобразуются с помощью матрицы поворотов A , то $2l + 1$ "координат" a_m в разложении $\Psi = \sum_{m=1}^{2l+1} a_m Y_l^m(\theta, \varphi)$ преобразуются с помощью матрицы A^T .

23. Воспользовавшись явным видом сферических функций второго порядка (164)–(168), получите матрицу поворотов на угол Θ вокруг оси x для коэффициентов $a_{2+} = a_1$,

$a_+ = a_2$, $a_0 = a_3$, $a_- = a_4$ и $a_{2-} = a_5$ в разложении $\Psi = \sum_{m=1}^5 a_m \psi_2^m(\theta, \varphi)$, где "волновые функции" $\psi_2^m(\theta, \varphi)$ соответствующие проекциям углового момента $2\hbar$, \hbar , 0 , $-\hbar$ и $-2\hbar$.

24. Покажите, что все усредненные по сфере квадраты величин, входящие в матрицу поворота $(\Theta_{l=1})$ (179), равны $1/3$ (это означает, что при случайном выборе оси z три проекции \hbar , 0 и $-\hbar$ будут появляться равновероятно).

25. Покажите, что характерная ширина гамовского пика Δ дается соотношением

$$\Delta \approx \mathcal{E}_G^{1/6} T^{5/6}. \quad (387)$$

26. Покажите, что если фотон энергии $\mathcal{E}_{ph} \gg m_e c^2$ рождает пару, двигаясь под углом θ к магнитному полю, то после того, как вторичные частицы опустятся на нижний уровень Ландау, их лоренц-факторы будут равны

$$\gamma \approx \frac{1}{\theta} \approx \frac{R_c}{l_\gamma}. \quad (388)$$

27. Воспользовавшись законом движения релятивистской частицы

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dl} = eE_{\parallel} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{R_c^2} \gamma^4, \quad (389)$$

где первое слагаемое в правой части соответствует ускоряющему электрическому полю, а второе — реакции излучения, покажите, что для стандартного радиопулсара ($B_0 = 10^{12}$ Гс, $P = 1$ с) энергия первичных электронов (как и позитронов) может достигать 10^9 МэВ, а энергия изгибных фотонов — 10^8 МэВ.