

М.В. М Е Е Р О В

СИНТЕЗ СТРУКТУР  
СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ  
ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ

ФИЗМАТГИЗ • 1959

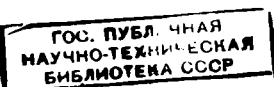


НА ДОМ НЕ ВЫДАЕТСЯ

М. В. МЕЕРОВ

СИНТЕЗ СТРУКТУР  
СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
РЕГУЛИРОВАНИЯ  
ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1959



4153  $\frac{12}{59}$

$\frac{21}{10021}$

1733  
~~51~~

*Мееро́в Михаил Владимирович.*

Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности.

Редактор *О. К. Соболев.*

Технический редактор *С. С. Газрилов.*

Корректор *Э. В. Моисеева.*

Слано в набор 6/X 1958 г. Подписано к печати 19/V 1959 г. Бумага 60×92 $\frac{1}{16}$ .  
Физ. печ. л. 17,75+1 вклейка. Условн. печ. л. 18,11. Уч.-изд. л. 18,01. Тираж 10 000 экз.  
Т-00999. Цена книги 11 р. Заказ № 3557.

Государственное издательство физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.



*Светлой памяти*  
*АЛЕКСАНДРА АЛЕКСАНДРОВИЧА АНДРОНОВА*  
*посвящается эта книга*



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
Введение . . . . .	11

### Глава I

#### Исходные сведения и некоторые свойства кривой *Д*-разбиения

§ 1.1. Постановка задачи и некоторые исходные положения . . . . .	15
§ 1.2. Операции с элементарными динамическими звеньями . . . . .	20
§ 1.3. Определение основных свойств системы автоматического регулирования из кривой <i>Д</i> -разбиения . . . . .	23
§ 1.4. Примеры . . . . .	33

### Глава II

#### Системы с одной регулируемой величиной

§ 2.1. Одноконтурные системы . . . . .	39
§ 2.2. Корректирующие обратные связи . . . . .	45
§ 2.3. Некоторые примеры систем с большими коэффициентами усиления . . . . .	51
§ 2.4. Структуры, допускающие неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости . . . . .	62
§ 2.5. Рассмотрение отдельных случаев . . . . .	66
§ 2.6. Пример системы, устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления. Автоматическое регулирование скорости электрического двигателя . . . . .	72

### Глава III

#### Системы с несколькими стабилизирующими устройствами

§ 3.1. Введение $n$ стабилизирующих устройств в одноконтурную систему. Вариант № 1 . . . . .	80
§ 3.2. Введение $n$ стабилизирующих устройств в одноконтурную систему. Вариант № 2 . . . . .	88
§ 3.3. Рассмотрение частных случаев . . . . .	90
§ 3.4. Стабилизация структурно неустойчивой системы . . . . .	101
§ 3.5. Одноконтурная система с запаздыванием . . . . .	107

§ 3.6. Система с запаздыванием при введении стабилизирующего устройства общего типа . . . . .	109
§ 3.7. Система, в которой элемент с запаздыванием охвачен стабилизирующим устройством . . . . .	112
§ 3.8. Примеры . . . . .	115

## Г л а в а IV

### Структурные условия качества

§ 4.1. Постановка и ограничение задачи . . . . .	123
§ 4.2. Структуры, допускающие неограниченное увеличение коэффициента усиления и обладающие любой областью положительности вещественной частотной характеристики . . . . .	125
§ 4.3. Определение качества систем автоматического регулирования по вырожденному уравнению и определение величины перерегулирования . . . . .	140
§ 4.4. Введение в систему стабилизирующих устройств . . . . .	144
§ 4.5. Связь общего коэффициента усиления с некоторыми оценками качества . . . . .	153
§ 4.6. Примеры . . . . .	158

## Г л а в а V

### Некоторые нелинейные задачи

§ 5.1. Учет влияния нелинейностей, которые не ограничивают величин переменных и их производных в процессе регулирования . . . . .	173
§ 5.2. О фильтрующих свойствах рассматриваемого класса структур . . . . .	178
§ 5.3. Нелинейности с положительным наклоном характеристик . . . . .	181
§ 5.4. Релейные системы . . . . .	185
§ 5.5. Структура систем оптимального регулирования . . . . .	197
§ 5.6. Примеры . . . . .	204

## Г л а в а VI

### Некоторые количественные соотношения

§ 6.1. Об учете влияния малых параметров . . . . .	208
§ 6.2. Определение величин коэффициентов усиления . . . . .	212
§ 6.3. Об учете влияния начальных условий . . . . .	219

## Г л а в а VII

### Системы с несколькими регулируемыми величинами

§ 7.1. Предварительные замечания . . . . .	221
§ 7.2. Структуры систем со многими регулируемыми величинами, допускающие неограниченное увеличение коэффициентов усиления . . . . .	226
§ 7.3. Второй путь решения поставленной задачи . . . . .	228
§ 7.4. Одно обобщение . . . . .	231

§ 7.5. Многосвязные системы, содержащие элементы с запаздыванием	232
§ 7.6. Многосвязные системы с запаздыванием, устойчивые при неограниченном увеличении коэффициентов усиления отдельных контуров регулирования . . . . .	234
§ 7.7. Автономность процессов регулирования в системах с несколькими регулируемыми величинами, связанными между собой через объект . . . . .	240
§ 7.8. Автономность многосвязных систем регулирования при наличии элементов с запаздыванием . . . . .	251
§ 7.9. Зависимость характера связи от структуры системы многосвязного регулирования . . . . .	255
§ 7.10. Примеры . . . . .	259
Л и т е р а т у р а . . . . .	282

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование структурных свойств систем автоматического регулирования имеет большое теоретическое и практическое значение. Когда говорят о структурных свойствах, то в большинстве случаев подразумевают, что эти свойства не связаны с какими-либо частными численными значениями параметров. С помощью структурного анализа выясняются общие свойства, присущие определенному классу систем, построенных по определенному закону. Представление системы автоматического регулирования структурным эквивалентом относит ее к определенному классу (одноконтурные, структурно-устойчивые и неустойчивые, устойчивые при больших коэффициентах усиления и т. д.) и этим самым определяет в некотором смысле ее основные свойства.

Хотя вопросы структурной устойчивости в данной работе частично и затрагиваются, однако основное содержание работы состоит в нахождении законов построения систем, устойчивых при любом сколь угодно большом коэффициенте усиления и обладающих, кроме того, другими весьма важными динамическими свойствами. Из постановки задачи и из всего дальнейшего изложения читателю будет ясно, почему именно эти системы являлись объектом исследования. Здесь отметим только, что решение задачи синтеза структур, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости, дает возможность построить высокоточные, быстродействующие системы регулирования. Кроме того, ряд полученных здесь принципиальных решений может оказаться весьма полезным для задач синтеза в смежных областях, как, например, построение усилителей с обратной связью с большими коэффициентами усиления, построение преобразующих устройств и решающих усилителей в моделирующих и счетных устройствах и т. д.

Поведение системы автоматического регулирования описывается дифференциальным уравнением. Для линейного приближения дифференциальное уравнение будет линейным.

Для удобства в работе будем широко пользоваться понятием передаточной функции системы, что в ряде случаев упростит как выкладки, так и исследования.

Мы также будем пользоваться часто применяемыми в теории регулирования терминами, как, например, оператор звена или группы звеньев (под которым подразумевают передаточную функцию звена или группы звеньев), собственный оператор звена (под которым подразумевают знаменатель передаточной функции этого звена) и т. д.

Книга состоит из семи глав. В первой главе наряду с постановкой задачи приведены необходимые сведения из теории автоматического регулирования, которые в дальнейшем используются. Для того чтобы не перегружать книгу известным из учебных пособий материалом, широко применены таблицы. Вместе с тем в этой главе имеется и оригинальный материал, который необходимо усвоить, перед тем как переходить к чтению дальнейших глав. Вторая и третья главы посвящены теории синтеза структур, устойчивых при сколь угодно большом коэффициенте усиления. Задача решается применительно к линейным системам с одной регулируемой величиной и к системам, содержащим элементы с запаздыванием. Четвертая глава посвящена некоторым структурным условиям качества. Следует подчеркнуть, что здесь наряду с определением структуры неизбежно приходится заниматься определением численных значений параметров. Для этой цели широко применяется оценка качества систем по характеру кривой *Д*-разбиения. Пятая глава посвящена рассмотрению возможного учета влияния нелинейностей в зависимости от характера структуры. Рассмотрены структуры, содержащие релейные элементы, и сделана попытка установления связи между рассматриваемым классом структур и структурными схемами систем оптимального регулирования. В частности, указано на то, что необходимым (но не достаточным) условием для создания любой системы оптимального регулирования является наличие в ее составе структуры, устойчивой при неограниченном увеличении ее коэффициента усиления. Следует иметь в виду, что эта часть работы не отличается математической строгостью и построена больше на физическом рассмотрении существа вопроса.

В шестой главе рассмотрены некоторые количественные соотношения, которые должны помочь практическому применению изложенной теории синтеза структур. Кроме того, в этой главе устанавливается, что рассматриваемые системы относятся к классу грубых (в смысле А. А. Андропова) систем.

Седьмая глава посвящена структурному синтезу систем с несколькими, связанными между собой через объект, регулируемыми величинами.

Наряду с вопросами, рассмотренными во всех предыдущих главах применительно к системам с одной регулируемой величиной, здесь рассмотрен вопрос об автономности как о структурном свойстве указанного класса структур, о характере связи в зависимости от структуры части схемы, которую можно было бы назвать

регулятором, и указаны случаи, когда автономность является необходимым условием оптимальности.

Все главы дополнены численными примерами, которые иллюстрируют основные выводы теории, а также метод выбора структуры и расчета основных параметров.

Имея в виду, что настоящая книга является первой попыткой систематического изложения ряда результатов в области синтеза структур систем регулирования, автор будет благодарен всем лицам, которые пришлют ему свои замечания, связанные как с содержанием, так и с формой изложения материала.

*М. Мееров*



## ВВЕДЕНИЕ

В современной литературе по автоматическому регулированию и смежным вопросам проблема синтеза рассматривается в узком и в широком смысле. Под синтезом в узком смысле подразумевают выбор параметров системы при заданной ее структуре. Синтез в широком смысле слова имеет в виду определение структуры, в рамках которой могут быть получены требуемые свойства системы.

Проблема синтеза в узком смысле представляет ограниченный интерес, особенно в связи с широким применением вычислительных устройств и механизацией процесса вычисления, что дает возможность без особого труда и при затрате небольшого времени выбрать наилучшие из возможных численных значений параметров. Имеется в виду, что указанные параметры можно менять в некоторых пределах.

Теория построения рациональных структур систем автоматического регулирования является значительно более сложной и важной задачей. Именно потому, что расчет параметров облегчается использованием машин, правильный выбор структуры системы приобретает первостепенное значение.

Структурный анализ и особенно структурный синтез систем регулирования принадлежит к наиболее молодой ветви теории автоматического регулирования. Представление систем регулирования структурными схемами впервые было предложено А. В. Михайловым в 1938 г. \*). В 1944 г. Принц опубликовал свою работу \*\*), где были введены элементарные звенья и структурные схемы систем регулирования. Ряд интересных результатов был получен в работе Д. И. Марьяновского \*\*\*). В работе И. И. Гальперина \*\*\*\*), относящейся к 1940 г., была сформулирована задача о структурной устойчивости систем регулирования. В последующих работах этого автора производится

---

\*) Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования, Автоматика и телемеханика, № 3, 1938.

\*\*) Prinz D. G., Contributions to the theory of automatic controllers and followers, Journ. Sci. Instr., v. 21, № 4, 1944.

\*\*\*) Марьяновский Д. И. 1) Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, Электричество, № 9, 1946. 2) Исследование устойчивости системы регулирования при введении внутренних связей, Электричество, № 3, 1950.

\*\*\*\*) Гальперин И. И., О возможных системах устойчивого регулирования с нулевой неравномерностью, Изв. ВТИ, № 6, 1940.

дальнейшее исследование задачи о нахождении структурных условий устойчивости.

Ряд весьма важных теорем по структурным условиям устойчивости доказан в работах М. А. Айзермана \*) и М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера \*\*).

Настоящая книга посвящена теоретическому обоснованию выбора рациональных структур одного класса систем автоматического регулирования. Прежде всего следует условиться о самом понятии — рациональная структура. Если речь идет о построении системы регулирования, которая удовлетворяла бы определенным конкретным техническим требованиям, то задача о выборе структуры для данного случая является неоднозначной. Можно найти много вариантов структур, а также значения параметров элементов, при которых полученные системы будут удовлетворять техническим требованиям. Поэтому сравнивать между собой структуры можно только в том случае, если их исходные, как правило, одноконтурные системы, образуемые из основных элементов, будут тождественны по динамическим и статическим свойствам. В этом случае наиболее рациональной структурой будет та, в которой количество элементов и характер их включения являются необходимыми и достаточными для обеспечения требуемых свойств системы.

К системам автоматического регулирования предъявляются самые различные требования, вытекающие из конкретных условий их работы. Поэтому при постановке задачи синтеза приходится выделить конечное число наиболее типичных требований, которые охватывают необходимые свойства возможно большего класса систем автоматического регулирования.

Системы автоматического регулирования должны быть устойчивыми, а также должны обладать некоторым минимальным быстродействием и точностью. Последнее требование относится к установившемуся режиму и к переходному процессу. В установившемся режиме точность определяется установившейся ошибкой, в переходном процессе точность определяется величиной отклонения действительного значения регулируемой величины от предписанного, а в некоторых случаях — величиной перерегулирования. Как известно \*\*), установив-

\*) Айзерман М. А. 1) О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 2, 1948. 2) Теория автоматического регулирования двигателей, Гостехиздат, 1952.

\*\*) Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р., 1) О структурных условиях устойчивости одноконтурных систем, Прикладная математика и механика, № 3, 1953. 2) О структурных условиях устойчивости при введении воздействия по производной, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. I, 1955.

\*\*\*) Марьяновский Д. И., Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, Электричество, № 9, 1946; Мееров М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956.

шаяся ошибка системы будет тем меньше, чем больше ее коэффициент усиления. Поэтому с точки зрения установившейся точности целесообразно иметь коэффициент усиления как можно большим. Известно также, что и динамические свойства системы существенно зависят от величины коэффициента усиления. С этой точки зрения целесообразно иметь возможность изменять коэффициент усиления в широких пределах, в том числе иметь значение его сколь угодно большим.

Однако в простейших одноконтурных системах увеличение коэффициента усиления неизбежно приводит к нарушению их устойчивости. В этой связи и возникла задача о разработке теории синтеза структур, в которых принципиально не существовало бы противоречия между точностью и устойчивостью. В ряде наших работ, посвященных этому вопросу\*), были получены результаты, которые с единой точки зрения излагаются в настоящей монографии.

Классическая теория автоматического регулирования уже знала примеры систем, устойчивых при сколь угодно большом коэффициенте усиления. Таковыми являются обычные системы изодромного регулирования, устойчивые при сколь угодно малой остаточной неравномерности.

В современной практике автоматического регулирования существует значительное количество систем с весьма высокими динамическими свойствами (точность, быстродействие), принадлежащих к классу систем, устойчивых при сколь угодно большом коэффициенте усиления. Однако до последнего десятилетия не существовало теории построения (синтеза) таких систем. Более того, на основании некоторых свойств амплитудно-фазовой характеристики разомкнутых систем рассматриваемого класса делались выводы об их ограниченной пригодности.

Для одноконтурных систем автоматического регулирования амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы имеет вполне определенный вид независимо от места размыкания. Если же система многоконтурная, то характер амплитудно-фазовой характеристики будет существенно зависеть от места размыкания системы.

В частности, существуют такие системы, что их амплитудно-фазовые характеристики в разомкнутом состоянии имеют ключообразную форму. На существование таких систем (усилителей с обратной связью)

---

\*) Меев М. В. 1) Системы автоматического регулирования, устойчивые при сколь угодно большом коэффициенте усиления, Автоматика и телемеханика, т. 8, № 4, 1947. 2) Принципы построения систем авторегулирования с малой установившейся ошибкой, Автоматика и телемеханика, т. 10, № 2, 1949. 3) Некоторые вопросы выбора структурной схемы автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 4, 1952. 4) О стабилизации систем, содержащих элементы с запаздыванием, Автоматика и телемеханика, т. 14, № 5, 1953. 5) Системы многосвязного регулирования, устойчивые при сколь угодно малой установившейся ошибке, Труды Второго Всесоюзного совещания при теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 1, 1955. 6) Об автономности многосвязных систем автоматического регулирования, устойчивых при сколь угодно больших коэффициентах усиления, Автоматика и телемеханика, т. 17, № 5, 1956.

было указано Найквистом\*). Усилитель с такой характеристикой был построен Персоном, Креером и Вером\*\*).

Боде\*\*\*) назвал такие системы с обратной связью условно устойчивыми. Как будет ясно из дальнейшего, системы с такими амплитудно-фазовыми характеристиками принадлежат к классу систем, устойчивых при неограниченном увеличении их коэффициентов усиления. Важно, однако, подчеркнуть здесь, что наличие клювообразной амплитудно-фазовой характеристики не дает основания для какой-либо классификации или отнесения систем с такими характеристиками к разряду второсортных. Одна и та же система может иметь или не иметь клювообразную амплитудно-фазовую характеристику в зависимости от того, в каком месте размыкается система для построения амплитудно-фазовой характеристики. Одним из свойств класса структур, теория которых рассматривается в настоящей книге, является то, что в этих структурах принципиально существует такое место, что при размыкании системы в этом месте амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы имеет клювообразную форму.

Как уже подчеркивалось выше, устойчивость является только одним из требований, которые предъявляются к системе регулирования. Поэтому устранение противоречия между установившейся точностью и устойчивостью хотя и очень важно, но этого еще недостаточно для того, чтобы считать полученную структуру рациональной. В связи с этим и возникла задача о некоторых структурных условиях качества, т. е. о синтезе таких структур, в рамках которых принципиально можно получить требуемое качество системы. Решение этой задачи еще далеко от своего завершения, однако в работе приведен ряд полезных результатов. Известно, что качество систем автоматического регулирования существенно связано с количественным значением параметров элементов, образующих систему. Формулировка структурных условий качества основана на том всегда имеющем место условии, что часть параметров системы изменять не представляется возможным. Трудности здесь еще усугубляются тем, что характеристики реальных элементов являются нелинейными, и неизбежно возникает вопрос, в какой мере структурные условия качества связаны с реальными свойствами получаемой системы. В этой связи в работе сделана попытка оценить для данного класса структур влияние наиболее типичных видов нелинейностей на динамику системы и найти связь между наиболее целесообразными линейными структурами и так называемыми оптимальными системами автоматического регулирования.

---

\*) Nyquist H., Regeneration theory. Bell system Technical Journ., v. 11, № 1, 1932.

\*\*) Peterson E., Kreer J. G. and Ware L. A., Regeneration theory and experiment. Bell Syst. Technical Journ., v. 13, № 4, 1934.

\*\*\*) Bode H. W., Network analysis and feedback amplifier design, N—Y., 1945. Имеется русский перевод: Бодэ Г., Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, 1948.

## ГЛАВА I

### ИСХОДНЫЕ СВЕДЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КРИВОЙ Д-РАЗБИЕНИЯ

#### § 1.1. Постановка задачи и некоторые исходные положения

Проектирование систем автоматического регулирования обычно начинается с выбора их структуры. Характер объекта регулирования и регулируемой величины в значительной степени определяет выбор измерительного (чувствительного) элемента и усилительных устройств. Однако, как хорошо известно, в систему регулирования вводятся дополнительные устройства, называемые стабилизирующими или корректирующими, которые вместе с исходными (основными) должны придать системе определенные статические и динамические свойства, соответствующие заранее поставленным техническим требованиям. Основные элементы, к которым относятся объект регулирования, измерительное устройство, регулирующие органы, усилители, вместе со стабилизирующими определяют структуру системы автоматического регулирования. Естественно, что динамические свойства системы автоматического регулирования существенно зависят от численного значения параметров элементов, ее составляющих. Вместе с тем, не все параметры элементов можно количественно изменять. Включением в систему усилительных устройств возможно в широких пределах изменять коэффициент усиления системы. Что касается постоянных времени, то практически их можно изменять в некоторых пределах только в контурах стабилизирующих устройств. Динамические свойства системы регулирования зависят от ее структуры, т. е. от того, какие элементы составляют систему регулирования и каким образом они между собой соединены. Существенно отметить, что во многих случаях решающим является именно характер включения стабилизирующих устройств. Как это будет показано ниже на целом ряде примеров, из одних и тех же элементов и корректирующих устройств можно получить различные по своим динамическим свойствам системы регулирования. Естественно, что возникает задача о наиболее целесообразном виде взаимного соединения заданных элементов систем регулирования. Поставленная задача требует некоторых

уточнений. Действительно, если сравниваются между собой различные виды соединений элементов, то, очевидно, нужно полагать количественные значения их параметров одинаковыми; при различном же характере включения элементов может оказаться, что лучшие динамические характеристики могут быть получены как раз при различном количественном значении их параметров. Постановка задачи получается недостаточно определенной. Правильная постановка задачи о выборе структуры, с нашей точки зрения, вытекает из следующего. Исходной для любой системы регулирования является одноконтурная структура, состоящая из основных элементов. Ее элементы выбираются так, чтобы удовлетворялись технические требования, предъявляемые к статическим свойствам. Какие простейшие корректирующие устройства нужны и каким образом их включить в исходную одноконтурную систему, чтобы при надлежащем количественном значении их параметров удовлетворялись бы также и динамические требования, предъявляемые к системе регулирования?

Технические требования, предъявляемые к системам регулирования, могут быть самыми разнообразными; наиболее типичными и часто встречающимися являются требования устойчивости, необходимой степени установившейся точности, некоторого минимального времени протекания процесса регулирования и допустимой величины перерегулирования. Эти основные требования и будут положены в основу выбора рациональной структуры. На основании сказанного мы будем считать наиболее рациональной такую структуру, которая является: а) структурно устойчивой, б) структурно допускает неограниченное увеличение общего коэффициента усиления без нарушения устойчивости, в) структурно дает возможность получить любую область положительности вещественной частотной характеристики замкнутой системы регулирования, г) структурно дает возможность уменьшить величины перерегулирования до требуемых пределов вплоть до монотонности протекания процесса. Слово «структурно» означает, что вышеуказанные характеристики могут быть получены при надлежащем выборе количественных значений параметров, однако существенно то, что такие значения параметров при данной структуре существуют, и никакие дополнительные элементы в систему вводить нет необходимости.

По своей физической природе системы автоматического регулирования отличаются большим разнообразием. Так, существуют системы «чисто» электрические, т. е. такие, в которых функции измерения, сравнения, усиления и воздействия осуществляются соответствующей коммутацией и изменением электрических величин — токов, напряжений, сопротивлений и т. д.; системы электромеханические, в которых в осуществлении функций регулирования, кроме электрических, принимают участие механические элементы — пружины, жидкостное трение, массы и т. д.; механические системы, пневматические, гидравлические и всевозможные комбинации указанных систем. Каждая из этих систем

в зависимости от физического существа имеет присущие ей особенности.

Различные по физическому существу системы регулирования могут иметь одинаковые структуры и соответственно одинаковые передаточные функции. Поэтому, изучая свойства систем по их передаточным функциям, можно определять их характеристики (с точки зрения устойчивости и качества) независимо от того, соответствует ли этой структуре электрическая, гидравлическая или какая-либо другая реальная система. Более того, для того чтобы установить общие структурные свойства и найти законы построения рациональных структур, целесообразно на первом этапе иметь дело не с конкретным случаем, где необходимо учитывать определенную специфику, а с эквивалентом реальной системы, где свойства отдельных элементов представлены определенными передаточными функциями. Имея в виду, что элементы систем автоматического регулирования и их передаточные функции могут быть самыми разнообразными, в теории автоматического регулирования вводят некоторое минимальное количество элементарных звеньев, комбинацией которых можно получить схемы, соответствующие по своим статическим и динамическим свойствам самым разнообразным элементам и системам автоматического регулирования.

Следуя известным из литературы источникам\*), мы рассмотрим здесь элементарные звенья, которые будут использованы в дальнейшем для исследования структурных свойств систем автоматического регулирования.

Примем в качестве основного структурного звена звено второго порядка, которое соответствует реальному элементу с массой, жидкостным трением и упругой силой, или — электрической цепи, состоящей из индуктивности, омического сопротивления и емкости.

Реально бывают элементы, в которых один из этих параметров настолько мал, что его влиянием на свойства элемента можно пренебречь. Поэтому целесообразно, кроме полного звена второго порядка, принять в качестве элементарных такие звенья, где один или два из входящих в звено второго порядка параметров отсутствуют. Таким образом, получим следующую группу элементарных звеньев.

Звено второго порядка с уравнением

$$(ap^2 + bp + 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

где  $x_{\text{вых}}$  — функция на выходе звена;  $x_{\text{вх}}$  — функция на входе звена;  $K$  — коэффициент усиления;  $a$  — постоянная, имеющая размерность  $\text{сек}^2$ ;

\*) Айзерман М. А., О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 2, 1948; Марьяновский Д. И., Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, Электричество, № 9, 1946; Prinz D. G., Contributions to the theory of automatic controllers and followers, Journ. Sci. Instr., v. 21, № 4, 1944.

$b$  — постоянная, имеющая размерность *сек*;  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования.

Звено первого порядка или аperiodическое звено

$$(bp + 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

Интегрирующее звено

$$bp x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

Консервативное звено

$$(ap^2 + 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

Усилительное звено

$$x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}}.$$

Сюда следует добавить группу элементарных звеньев, которые могут иметь место, когда отдельные элементы цепи регулирования сами по себе неустойчивы.

В общем виде эта группа может быть представлена следующими звеньями:

$$а) \quad (ap^2 + bp - 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

$$б) \quad (ap^2 - bp + 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

$$в) \quad (ap^2 - bp - 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

$$г) \quad (bp - 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}},$$

$$д) \quad (ap^2 - 1)x_{\text{вых}} = Kx_{\text{вх}}.$$

В дальнейшем из группы неустойчивых звеньев для нас будут представлять интерес звенья а), г) и д), которые будем соответственно называть:

а) — звено второго порядка с отрицательным статизмом,

г) — аperiodическое звено с отрицательным статизмом,

д) — консервативное звено с отрицательным статизмом.

Комбинируя приведенные элементарные звенья, можно составить схему, которая по своим динамическим свойствам эквивалентна любой реальной системе без дополнительных стабилизирующих устройств.

Для того чтобы структурно представить всевозможные комбинации стабилизирующих устройств, введем звено, операторное уравнение которого представляется дробно-рациональной функцией

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{a_1 p^{n_1} + a_2 p^{n_1-1} + \dots + a_{n_1} p + 1}{b_1 p^{n_2} + b_2 p^{n_2-1} + \dots + b_{n_2} p + 1}. \quad (1.1)$$

Частными случаями указанного звена являются:

а) — дифференцирующие звенья первого порядка, второго и т. д.;



б) — интегрирующее звено

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{1}{b_{n_2} p};$$


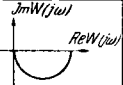
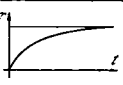

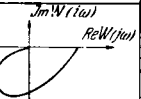
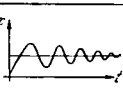

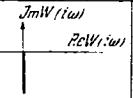
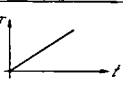


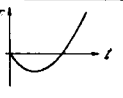


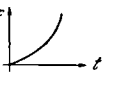

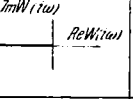
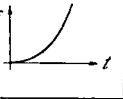

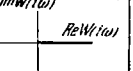
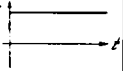
в) — изодромная или гибкая обратная связь

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{a_{n_1} p}{b_{n_2} p + 1}$$

и другие всевозможные звенья.

Кроме классификации элементарных звеньев по виду уравнения, весьма удобно классифицировать их по временной и частотной характеристикам.

Таблица 1

Наименование звена	Условные обозначения	Передаточная функция	Частотная характеристика	Временная характеристика
Апериодическое звено		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{1+Tp}$		
Колебательное звено		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{ap^2 + bp + 1}$		
Интегрирующее звено		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{Tp}$		
Звено второго порядка с отрицательным статизмом		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{ap^2 + bp - 1}$		
Апериодическое звено с отрицательным статизмом		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{bp - 1}$		
Консервативное звено с отрицательным статизмом		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = \frac{K}{ap^2 - 1}$		
Усилительное звено		$\frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}} = K$		

Мы не будем здесь детально рассматривать временные и частотные характеристики элементарных звеньев, так как этот вопрос достаточно подробно освещен в литературе \*). В таблице 1 приведены условные обозначения элементарных звеньев, их передаточные функции, временные и частотные характеристики.

## § 1.2. Операции с элементарными динамическими звеньями

Введение элементарных звеньев и структурных схем значительно упрощает нахождение передаточных функций систем и дает возможность в целом ряде случаев вести исследование их свойств в общем виде. Нахождение передаточной функции сложной системы, представленной структурной схемой из элементарных звеньев, упрощается благодаря тому, что по предположению элементарные звенья имеют однонаправленное действие, т. е. последующее звено в цепи оказывает исчезающе малое влияние на предыдущее, и этим обратным влиянием можно пренебречь. Благодаря этому свойству можно установить весьма простые правила нахождения передаточных функций сложных систем, состоящих из последовательно-параллельных соединений элементарных звеньев.

### 1. Последовательное соединение элементарных звеньев

Передаточной функцией называют отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению входной. Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с нулевыми начальными условиями, то вместо символа дифференцирования будем ставить просто оператор  $p$ .

**а) Разомкнутые системы.** Допустим, что рассматриваемая динамическая система в разомкнутом состоянии может быть представлена последовательной цепочкой элементарных звеньев с передаточными функциями  $K_1(p)$ ,  $K_2(p)$ , ...,  $K_n(p)$ .

Обозначив входные и выходные сигналы отдельных звеньев через  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , составим следующую систему уравнений (рис. 1):

```

graph LR
    x0((x_0)) --> B1[K_1(p)]
    B1 -- x_1 --> B2[K_2(p)]
    B2 -- x_2 --> B3[...]
    B3 -- x_{n-1} --> Bn[K_n(p)]
    Bn -- x_n --> out(( ))
            
```

$$\left. \begin{aligned} x_1(p) &= K_1(p) x_0(p), \\ x_2(p) &= K_2(p) x_1(p), \\ &\dots \dots \dots \\ x_n(p) &= K_n(p) x_{n-1}(p). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Рис. 1. Последовательное включение элементов (разомкнутая цепь).

Исключая все промежуточные переменные, найдем связь между  $x_n(p)$  и  $x_0(p)$  в следующей форме:

$$\frac{x_n(p)}{x_0(p)} = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p),$$

\*) См., например, Мее р о в М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956.

откуда вытекает, что передаточная функция разомкнутой последовательной цепочки звеньев с передаточными функциями  $K_i(p)$  равна произведению передаточных функций всех входящих в цепочку звеньев.

**б) Замкнутые системы.** Подадим выходной сигнал последнего звена с обратным знаком на вход первого звена (отрицательная обратная связь). Тогда, обозначив произведение всех передаточных функций через  $K(p)$ , можно составить следующую систему операторных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_n(p) &= K(p) \Delta x(p), \\ \Delta x(p) &= x_0(p) - x_n(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

или

$$x_n(p) = K(p) x_0(p) - K(p) x_n(p),$$

откуда

$$\frac{x_n(p)}{x_0(p)} = \frac{K(p)}{1 + K(p)}.$$

Допустим теперь, что в цепи обратной связи имеется еще звено с передаточной функцией  $Y(p)$  (рис. 2); тогда можно составить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_n(p) &= \\ &= K(p) [x_0(p) - x_{n+1}(p)], \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}(p) &= Y(p) x_n(p). \end{aligned} \quad (1.5)$$

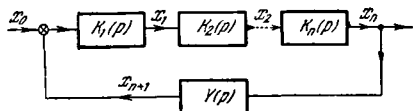


Рис. 2. Последовательное включение элементов (замкнутая цепь).

Подставляя в (1.4) вместо  $x_{n+1}(p)$  его значение из (1.5), получим:

$$x_n(p) = K(p) [x_0(p) - Y(p) x_n(p)],$$

откуда

$$[1 + K(p) Y(p)] x_n(p) = K(p) x_0(p),$$

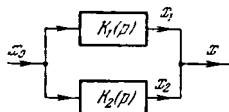
и передаточная функция имеет вид

$$\frac{x_n(p)}{x_0(p)} = \frac{K(p)}{1 + K(p) Y(p)}.$$

Таким образом, передаточная функция всей замкнутой системы получается как частное от деления передаточной функции звеньев, стоящих в прямой цепи (до  $x_n(p)$ , являющейся изображением выходной величины) на сумму из единицы и произведения передаточных функций всех звеньев, входящих в замкнутый контур.

## 2. Параллельное включение звеньев

**а) Разомкнутая цепь.** На рис. 3 представлена схема, состоящая из двух параллельно включенных звеньев с операторами  $K_1(p)$  и  $K_2(p)$ . Найдем передаточную функцию этой системы. Для этой цели напишем следующие уравнения:



$$x_1(p) = K_1(p) x_0(p), \quad (1.6)$$

$$x_2(p) = K_2(p) x_0(p), \quad (1.7)$$

$$x_1(p) + x_2(p) = x(p). \quad (1.8)$$

Рис. 3. Параллельное включение элементов (разомкнутая цепь).

Подставляя в (1.8) вместо  $x_1(p)$  и  $x_2(p)$  их значения из (1.6) и (1.7), получим:

$$x(p) = [K_1(p) + K_2(p)] x_0(p).$$

Передаточная функция будет:

$$\frac{x(p)}{x_0(p)} = K_1(p) + K_2(p).$$

Следовательно, при параллельном соединении звеньев их передаточные функции складываются.

**б) Замкнутая цепь.** Подадим теперь выходной сигнал  $x$  на вход со знаком минус (рис. 4). Получим:

$$x(p) = [K_1(p) + K_2(p)] [x_0(p) - x(p)],$$

откуда

$$\frac{x(p)}{x_0(p)} = \frac{K_1(p) + K_2(p)}{1 + K_1(p) + K_2(p)}. \quad (1.9)$$

**в) Наконец,** для случая, когда в цепи обратной связи имеется звено с оператором  $Y(p)$ , передаточная функция имеет следующий вид:

$$\frac{x(p)}{x_0(p)} = \frac{K_1(p) + K_2(p)}{1 + Y(p) [K_1(p) + K_2(p)]}. \quad (1.10)$$

Полученные правила написания передаточных функций для последовательно-параллельного соединения звеньев замкнутых и разомкнутых систем дают возможность весьма просто найти передаточную функцию системы любой сложности, если задана ее структурная схема.

В качестве примера напишем передаточную функцию структурной схемы, представленной на рис. 5. Имеем:

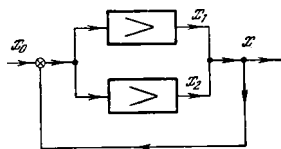


Рис. 4. Параллельное включение элементов (замкнутая цепь).

$$\frac{x(p)}{x_0(p)} = \frac{\frac{K_1(p) K_2(p)}{1 + Y_1(p) K_1(p) K_2(p)} [K_3(p) + K_4(p)]}{1 + \left[ Y_2(p) + \frac{K_1(p) K_2(p)}{1 + Y_1(p) K_1(p) K_2(p)} \right] [K_3(p) + K_4(p)]}. \quad (1.11)$$

Наименование системы	Схема системы регулирования	Структурная схема
Схема регулятора с двухкаскадным пневматическим усилением (сервомоторы - статические)		
Схема регулирования напряжения с электронно-пиратронным регулятором напряжения		
Схема регулирования температуры		
Система автоматического регулирования давления воздуха в резервуаре		
Следящая система		
Система регулирования скорости двигателя		
Схема системы регулирования напряжения		

Характеристическое уравнение замкнутой системы, необходимое для исследования устойчивости, получим, если приравняем нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы.

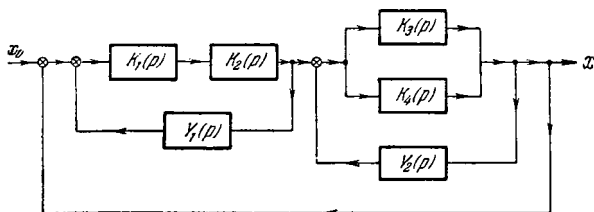


Рис. 5. Последовательно-параллельное включение элементов (замкнутая цепь).

В таблице 2 приведены примеры структурных схем некоторых систем автоматического регулирования.

### § 1.3. Определение основных свойств системы автоматического регулирования из кривой $\mathcal{D}$ -разбиения \*)

В этом параграфе мы приведем необходимые сведения, которые понадобятся нам при дальнейшем исследовании. Передаточные функции замкнутых систем автоматического регулирования мы разделим на две группы. К первой группе отнесем передаточные функции симметричного типа, которые имеют следующий вид:

$$K_c(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad (1.12)$$

где  $W(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы.

Ко второй группе отнесем передаточные функции несимметричные, которые имеют вид

$$K_n(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W(p)}. \quad (1.13)$$

Здесь  $W_1(p)$  учитывает внешние возмущения и место их приложения в схеме. В такой более общей записи могут быть учтены и начальные условия процесса регулирования.

Допустим, что передаточная функция разомкнутой системы выражается следующей дробно-рациональной функцией:

$$W(p) = \frac{R_1(p)}{Q_1(p)}. \quad (1.14)$$

\*) См. Мееров М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956.

Тогда характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению замкнутой системы, запишется как

$$1 + \frac{R_1(p)}{Q_1(p)} = 0$$

или

$$R_1(p) + Q_1(p) = 0. \quad (1.15)$$

Предположим, что нас интересует влияние на динамические свойства системы некоторого параметра  $\tau$ , линейно входящего в характеристическое уравнение

$$Q(p) + \tau R(p) = 0. \quad (1.16)$$

Уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по параметру  $\tau$  запишется:

$$\bar{\tau} = - \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}. \quad (1.17)$$

Построив кривую по уравнению (1.17), мы получим всю совокупность значений параметра  $\tau$ , при которых система остается устойчивой.

Амплитудно-фазовая характеристика замкнутой системы для случая (1.12) запишется в следующей форме:

$$K_c(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \quad (1.18)$$

или с учетом уравнений (1.16), (1.17):

$$K_c(j\omega) = \frac{\frac{R_1(j\omega)}{R(j\omega)}}{\tau + \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}}. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) связывает частотные свойства замкнутой системы регулирования с видом кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по параметру  $\tau$ .

Рассмотрим случай, когда в качестве параметра  $\tau$  взят общий коэффициент усиления системы  $K$ . Тогда уравнение амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы для случая (1.12) приводится к следующему виду:

$$K_c(j\omega) = \frac{K}{K + \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}}, \quad (1.20)$$

где  $-\frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}$  представляет собой уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по комплексному параметру  $\bar{K}$ .

На основании уравнения (1.20) из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $\bar{K}$  весьма просто находятся качественные показатели системы, вытекаю-

щие из свойств вещественных частотных характеристик \*); так же просто из этой кривой находятся запас устойчивости по фазе и модулю и степень колебательности, определяющая величину пика на амплитудно-частотной характеристике разомкнутой системы.

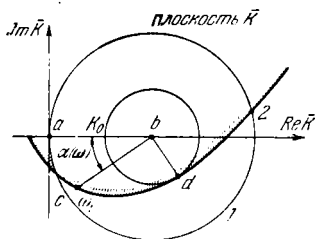


Рис. 6. К определению амплитудно-частотной характеристики по кривой  $D$ -разбиения.

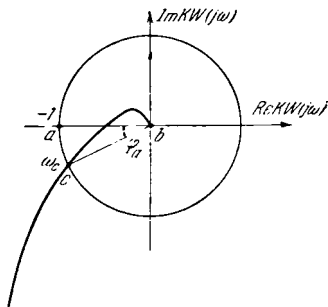


Рис. 7. К определению запаса по фазе по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы.

На рис. 6 представлена возможная форма кривой  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления  $K$ . Значение знаменателя уравнения (1.20) при некоторой частоте  $\omega_i$  и выбранном  $K_0$  \*\*) определяется вектором  $bc$ ; следовательно, амплитудное значение (1.20) при  $K_0$  и  $\omega_i$  определяется отношением отрезков  $\frac{ab}{bc}$ ; определив амплитудные значения для всего диапазона частот указанным образом, мы находим амплитудно-частотную характеристику. Выбрав  $K_0$ , нетрудно найти пик на амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы, не прибегая к построению всей этой характеристики. Действительно, проведем из точки  $b$ , как из центра, окружность, касающуюся кривой  $D$ -разбиения. Тогда отношение величины  $K_0$  к величине радиуса окружности, т. е. отношение  $\frac{ab}{bd}$ , и дает величину пика на амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы. Нетрудно также определить запас устойчивости по фазе и по модулю амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) разомкнутой системы. Как известно, запас устойчивости по фазе АФХ разомкнутой системы определяется следующим образом. Из начала координат плоскости АФХ разомкнутой системы (рис. 7), как из центра, проводится окружность с радиусом, равным единице. Частота в точке пересечения этой окружности

\*) Мееров М. В., Использование кривой  $D$ -разбиения для оценки качества систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 12, № 6 (1951); Солодовников В. В., Частотный метод анализа следящих и регулируемых систем, Диссертация, 1949.

\*\*)  $K_0$  — выбранное значение коэффициента усиления (при  $\omega = 0$ ).



с  $A\Phi X$  называется частотой среза, а угол, образованный отрицательной вещественной осью и отрезком, проведенным из начала координат в точку с частотой среза, и называют запасом устойчивости по фазе (угол  $\varphi_a$  на рис. 7). В обозначениях уравнения (1.20) амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы выражается соотношением

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{M(j\omega)}, \quad (1.21)$$

в то время как уравнение кривой  $D$ -разбиения по  $K$  имеет вид

$$\bar{K} = -\frac{M(j\omega)}{N(j\omega)}. \quad (1.22)$$

На основании уравнений (1.21) и (1.22) определение запаса устойчивости по фазе  $A\Phi X$  разомкнутой системы из кривой  $D$ -разбиения производится следующим образом. Из начала координат плоскости  $\bar{K}$ , как из центра, проводится окружность с радиусом  $K_0$ ; тогда угол  $\varphi_a$  и определяет запас устойчивости по фазе (рис. 8). Что касается

запаса устойчивости по модулю, то его определение не представляет никакого труда, ибо на плоскости  $\bar{K}$  выделена вся совокупность значений коэффициента усиления, при которых система остается устойчивой.

Найдем теперь из кривой  $D$ -разбиения некоторые показатели качества, вытекающие из свойств вещественной частотной характеристики замкнутой системы. Прежде всего выясним, как может быть

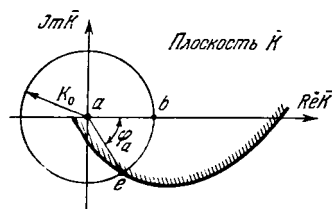


Рис. 8. К определению запаса по фазе по кривой  $D$ -разбиения.

построена вещественная частотная характеристика замкнутой системы, если построена кривая  $D$ -разбиения по  $K$  (здесь мы имеем в виду симметричный случай — уравнение (1.12)).

Выше мы установили, как из кривой  $D$ -разбиения по  $K$  может быть построена амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы. Построение вещественной частотной характеристики не представит особого труда, если, кроме амплитудной, удастся просто найти и фазовую частотную характеристику замкнутой системы из кривой  $D$ -разбиения.

Фаза  $K_0(j\omega)$  для некоторой частоты  $\omega_i$  определяется фазой его знаменателя для этой частоты (см. уравнение (1.20)). Но так как для заданной частоты  $\omega_i$  знаменатель (1.20) определяется отрезком  $bc$ , то фаза (1.20) для этой частоты равна  $\alpha(\omega_i)$  (см. рис. 6).

Аналогичным образом могут быть определены соответствующие фазы для всех частот  $\omega$ , следовательно, построена вся фазовая

характеристика замкнутой системы. Теперь уже нетрудно найти вещественную частотную характеристику. Обозначив ее через  $P(\omega)$ , можем написать для частоты  $\omega_i$ :

$$P(\omega_i) = \frac{ab}{bc} \cos \alpha(\omega_i). \quad (1.23)$$

Опустим из начала координат (рис. 9) перпендикуляр на отрезок  $bc$ ; тогда на основании (1.23) для  $\omega_i$  значение вещественной частотной характеристики определяется соотношением

$$P(\omega_i) = \frac{bd}{bc}. \quad (1.24)$$

Аналогичным образом может быть геометрически найдено значение  $P(\omega)$  для любой частоты и, следовательно, может быть построена вся вещественная частотная характеристика замкнутой системы.

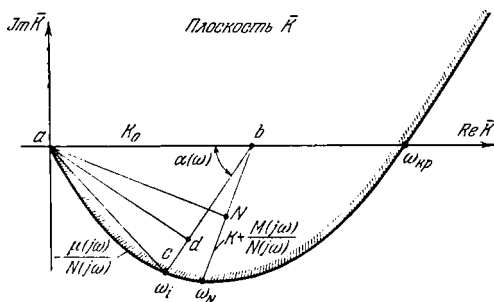


Рис. 9. К построению частотных характеристик замкнутой системы по кривой  $D$ -разбиения.

Заметим здесь же, что без труда находится и мнимая частотная характеристика замкнутой системы; для этой цели нужно брать отношение отрезков  $\frac{ad}{bc}$  (рис. 9).

На основании приведенного метода построения установлена связь между вещественной частотной характеристикой замкнутой системы и кривой  $D$ -разбиения. Сформулируем теперь некоторые показатели качества и укажем способ определения их непосредственно из кривой  $D$ -разбиения по  $K$ .

Как известно, областью положительности вещественной частотной характеристики называют область частот от  $\omega = 0$  до частоты, при которой вещественная характеристика первый раз пересекает ось

частот (рис. 10). Если эту частоту обозначить через  $\omega_c$ , то для времени регулирования  $t$  можно получить следующее неравенство:

$$t > \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (1.25)$$

Область положительности определяется следующим образом из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения. Восстановим в точке  $K_0$  перпендикуляр до пересечения с кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения. Частота  $\omega_c$  в точке пересечения и будет верхней границей области положительности (рис. 11)\*).

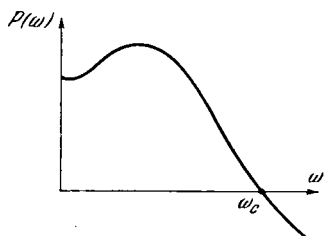


Рис. 10. Определение области положительности.

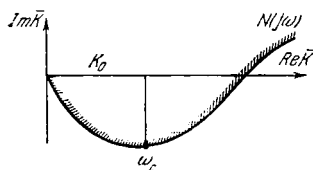


Рис. 11. Определение области положительности из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$ .

Аналогично могут быть определены и другие показатели качества, вытекающие из свойств вещественной частотной характеристики замкнутой системы, а именно:

а) Для того чтобы временная функция  $x(t)$  монотонно стремилась к установившемуся значению  $x(\infty)$ , необходимо (но не достаточно), чтобы кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$  не пересекала окружности с радиусом  $\frac{K_0 + 1}{2}$  и с центром, расположенным в точке  $\frac{K_0 - 1}{2}$  (рис. 12).

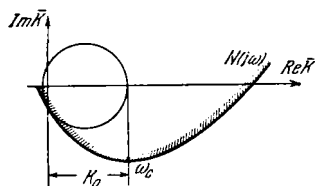


Рис. 12. Определение необходимых условий отсутствия перерегулирования из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения.

б) Для того чтобы перерегулирование не превышало 18%, достаточно, чтобы:

1) При возрастании частоты от 0 до  $\infty$  абсолютное значение вектора, проведенного из начала координат в точку на границе  $\mathcal{D}$ -разбиения, непрерывно увеличивалось (рис. 13).

2) При заданном значении  $K_0$  окружность с центром в точке  $\frac{K_0 - 1}{2}$  и радиусом  $\frac{K_0 + 1}{2}$  не пересекала кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения.

\*) На рис. 11  $K_0$  — выбранное значение коэффициента усиления, а  $N(j\omega)$  — кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения.

3) Проекция вектора  $a\omega_i$  (рис. 13) на ось  $\text{Re } \bar{K}$  при  $\omega \rightarrow \infty$  не превышает  $K_0$ .

в) Если в начальной своей части кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения достаточно хорошо совпадает с дугой окружности с центром, расположенным в  $\frac{K_0-1}{2}$ , и радиусом  $\frac{K_0+1}{2}$  и в дальнейшем расстояние между окружностью и кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения непрерывно растет (рис. 14), то время переходного процесса заключено в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t < \frac{4\pi}{\omega_c}, \quad (1.26)$$

где  $\omega_c$  — область положительности.

Существенной особенностью сформулированных свойств кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения является то, что эти свойства непосредственно связаны с количественным значением общего коэффициента усиления системы. Более того, на основании этих свойств можно сделать и ряд выводов.

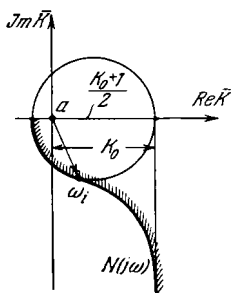


Рис. 13. Определение условий, при которых перерегулирование не превышает 180%.

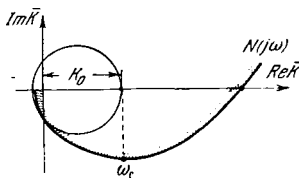


Рис. 14. Определение условий, при которых длительность процесса регулирования лежит в пределах  $\frac{\pi}{\omega_c}$  и  $\frac{4\pi}{\omega_c}$ .

Так из свойства а) вытекает следствие: если по условиям точности величина общего коэффициента усиления больше величины диаметра окружности  $(K_0+1)$ , то переходный процесс не может быть монотонным. Из свойства б) вытекают два следствия: 1) для того чтобы выполнить достаточные условия отсутствия перерегулирования, превышающего 180%, величина коэффициента усиления системы не должна превышать величины диаметра  $K_0+1$  (рис. 12); 2) перерегулирование не будет превышать 180% при любом коэффициенте усиления, если кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения совпадает с мнимой осью плоскости  $\bar{K}$ , а вся положительная вещественная ось этой плоскости принадлежит к области устойчивости.

Весьма существенным для оценки структуры системы регулирования является следствие, вытекающее из способа определения области

положительности. Нетрудно понять, что верхняя граница области положительности вещественной частотной характеристики всегда меньше частоты  $\omega_{кр}$ , где  $\omega_{кр}$  равно частоте в точке пересечения кривой  $D$ -разбиения с осью  $\operatorname{Re} \bar{K}$  (рис. 9) и где  $K = K_{кр}$  — критический коэффициент усиления. На основании этого следствия будут в дальнейшем получены весьма важные выводы относительно рациональности структуры систем автоматического регулирования.

Мы уже подчеркивали, что полученные свойства кривой  $D$ -разбиения относятся к случаю, когда передаточная функция замкнутой системы имеет симметричный вид. Рассмотрим теперь определение некоторых показателей качества для случая, когда передаточная функция замкнутой системы несимметрична (уравнение (1.13)). Прежде всего выясним, как в этом случае построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы.

Так как учет внешних возмущений и место их приложения, а также характер начальных условий не влияют на характеристическое уравнение, то в общем случае обобщенная амплитудно-фазовая характеристика ( $A\Phi X$ ), учитывающая и внешние возмущения и начальные условия, может быть представлена в следующем виде:

$$K(j\omega) = \frac{W_1(j\omega) \frac{Q_1(j\omega)}{R(j\omega)}}{\tau + \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}}. \quad (1.27)$$

Числитель (1.27) будем в дальнейшем называть уравнением вспомогательной кривой. Таким образом, в этом более общем случае для определения свойств системы необходимо, кроме кривой  $D$ -разбиения, построить вспомогательную кривую. Как это следует из уравнения (1.20), и для симметричного случая, когда в качестве параметра выбирается не коэффициент усиления, а некоторый другой параметр, также приходится строить вспомогательную кривую. Из кривой  $D$ -разбиения по любому параметру  $\tau$  и вспомогательной кривой можно также весьма просто построить все частотные характеристики, в том числе и вещественную. На рис. 15 приведена возможная форма кривой  $D$ -разбиения по параметру  $\tau$ . Как это ясно из предыдущего, а также непосредственно из рисунка, отрезок  $bc$  равен амплитудному значению знаменателя (1.27) для частоты  $\omega_i$ :

$$bc = \left| \tau + \frac{Q(j\omega_i)}{R(j\omega_i)} \right|.$$

Фаза знаменателя (1.27) для частоты  $\omega_i$  равна углу  $\alpha(\omega_i)$ . Допустим, что числитель (1.27) не зависит от  $\tau$  и кривая, построенная по этому уравнению, имеет вид, представленный на рис. 15.

Допустим, что для  $\omega_i$  числитель выражается вектором  $\overline{ad}$ . Фаза числителя для этой частоты равна  $\beta(\omega_i)$ . Амплитудное значение (1.27)

для частоты  $\omega_i$  определяется отношением отрезков

$$\frac{\left| W_1(j\omega) \frac{R_1(j\omega)}{R(j\omega)} \right|}{\left| \tau + \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \right|} = \frac{ad}{bc}.$$

Аналогичным образом находятся амплитудные значения (1.27) для любой частоты  $\omega$ , следовательно, вся амплитудно-частотная характеристика (1.27).

Фаза (1.27) находится как разность фаз числителя и знаменателя. Для нахождения значения вещественной частотной характеристики при  $\omega_i$  поступаем следующим образом. Перенесем вектор  $ad$  из точки  $a$  в точку  $c$  (рис. 15) и продолжим вектор  $bc$  пунктиром так, как это показано на рисунке. Тогда для частоты  $\omega_i$  фаза (1.27) равна  $\gamma(\omega_i)$ , ибо

$$\gamma(\omega_i) = \beta(\omega_i) - \alpha(\omega_i).$$

Значение вещественной частотной характеристики для частоты  $\omega_i$  определяется, как

$$\frac{cd'}{bc} \cos \gamma(\omega_i).$$

Опустим перпендикуляр с конца вектора  $cd'$  на пунктирную прямую; тогда значение вещественной частотной характеристики при  $\omega_i$  определяется отношением отрезков

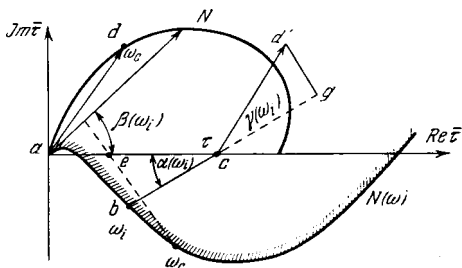


Рис. 15. К построению частотных характеристик замкнутой системы по кривой  $D$ -разбиения и вспомогательной кривой (вспомогательная кривая не зависит от  $\tau$ ).

$$P(\omega_i) = \frac{cg}{bc}.$$

Аналогично могут быть найдены значения вещественной частотной характеристики для любой частоты  $\omega$ , следовательно, вся вещественная частотная характеристика.

Если вспомогательная кривая зависит от выбранного параметра  $\tau$ , то построение производится следующим образом.

Числитель (1.27) разбивается на одну часть, которая зависит от  $\tau$ , и на другую, которая от  $\tau$  не зависит. Уравнение (1.27) представляется следующим образом:

$$K(j\omega) = \frac{\tau W_2(j\omega) + W_3(j\omega)}{\tau + \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}}. \quad (1.28)$$

На рис. 16 приведены граница  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $\tau$  и кривая  $W_3(j\omega)$ . Выбираем какое-либо значение  $\tau$ , например  $\tau = 1$ . Тогда для каждой частоты  $\omega_i$  можно найти вектор  $\tau W_2(j\omega)$ . Отложим эти последние векторы так, как это показано на рис. 16.

Изменяя значение  $\tau$ , будем менять масштаб вектора  $\tau W_2(j\omega)$ . Для заданного значения  $\tau$  амплитудное значение и фаза числителя (1.28) определяются вектором, проведенным из начала координат в конец вектора  $\tau W_2(j\omega)$  для соответствующей частоты. Дальнейшее построение частотных характеристик такое же, как и для случая, когда числитель (1.27) от  $\tau$  не зависит.

На основании метода построения вещественной частотной характеристики можно сформулировать свойства границы  $\mathcal{D}$ -разбиения и вспомогательной кривой, по которым можно производить предварительную оценку процесса автоматического регулирования, а именно:

а) Область положительности вещественной частотной характеристики определяется частотой  $\omega_c$ , при которой векторы числителя и знаменателя становятся впервые взаимно перпендикулярными. Время переходного режима в такой системе, как уже указывалось, будет:

$$t > \frac{\pi}{\omega_c}.$$

Если задана частота  $\omega_c$ , то значение  $\tau$ , при котором  $\omega_c$  будет определять область положительности, находится следующим образом. Проведем вектор  $a\bar{N}$  числителя для частоты  $\omega_c$  (рис. 15). Из точки  $\omega_c$  границы  $\mathcal{D}$ -разбиения опускаем перпендикуляр на вектор  $a\bar{N}$ . Тогда отрезок  $ae$  будет искомым значением  $\tau$ .

б) Если для некоторого начального интервала частот отношение абсолютных значений векторов числителя и знаменателя и угол между ними  $\gamma(\omega)$  практически постоянны, а в дальнейшем отношение их уменьшается при условии, что  $\gamma(\omega)$  не уменьшается, то время регулирования лежит в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_c} < t < \frac{4\pi}{\omega_c},$$

где  $\omega_c$  — область положительности.

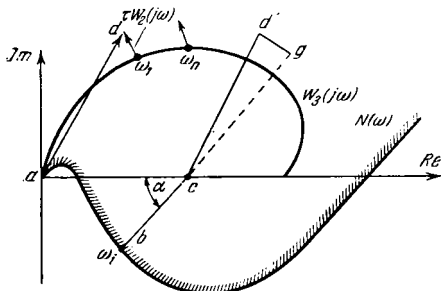


Рис. 16. К построению частотных характеристик замкнутой системы по кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения и вспомогательной кривой (вспомогательная кривая зависит от  $\tau$ ).

в) Достаточные условия отсутствия перерегулирования, превышающего 18%, будут выполняться, если выполняются условия пункта б) и, кроме того, векторы числителя и знаменателя ни при какой частоте не становятся взаимно перпендикулярными.

г) Необходимые условия отсутствия перерегулирования будут выполняться, если при соответственно одинаковом распределении частот вдоль кривой числителя и знаменателя абсолютные значения вектора числителя будут убывать относительно быстрее, чем абсолютные значения вектора знаменателя для соответствующих частот.

Сформулированными свойствами кривой  $D$ -разбиения (в случае симметричной передаточной функции замкнутой системы) и свойствами кривой  $D$ -разбиения и вспомогательной кривой (для общего случая несимметричной передаточной функции замкнутой системы) мы воспользуемся в дальнейшем при оценке различных структур.

### § 1.4. Примеры

Рассмотрим несколько примеров, на которых проиллюстрируем влияние структуры на динамические свойства систем регулирования.

**Пример 1.** На рис. 17 представлена структурная схема системы автоматического регулирования, основные элементы которой представляются тремя последовательно включенными апериодическими звеньями. Данные отдельных звеньев следующие:

$$T_1 = 0,01, \quad K_1 = 40,$$

$$T_2 = 0,34, \quad K_2 = 1,$$

$$T_3 = 0,1; \quad K_3 = 15.$$

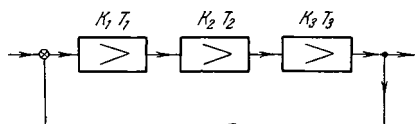


Рис. 17. Структурная схема из трех апериодических звеньев.

Передаточная функция замкнутой системы запишется в виде:

$$K(p) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3}. \quad (1.29)$$

Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю знаменатель (1.29):

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 = 0.$$

Подставляя численные значения коэффициентов, получаем:

$$0,00034p^3 + 0,038p^2 + 0,45p + 601 = 0. \quad (1.30)$$

Составим условия Раута — Гурвица из коэффициентов уравнения (1.30):

$$0,038 \cdot 0,45 - 601 \cdot 0,00034 < 0,$$

т. е. система неустойчива.



Для стабилизации введем в систему цепь гибкой отрицательной обратной связи с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ . Включим обратную связь по двум вариантам\*):

а) когда стабилизирующей обратной связью охватываются первые два звена (рис. 18),

б) когда стабилизирующей обратной связью охватывается только одно первое звено (рис. 19).

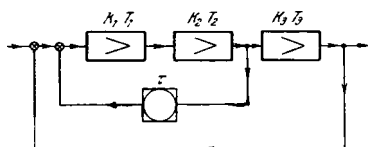


Рис. 18. Первый способ включения стабилизирующего устройства в схему рис. 17.

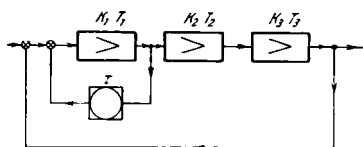


Рис. 19. Второй способ включения стабилизирующего устройства в схему рис. 17.

Исследуем устойчивость рассматриваемых вариантов структур а) и б).

Передаточная функция замкнутой системы для случая а) будет

$$K(p) = \frac{K_1 K_2 K_3 (1 + \tau p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + \tau p) + K_1 K_2 \tau p (1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 (1 + \tau p)}, \quad (1.31)$$

откуда характеристическое уравнение, соответствующее рассматриваемому случаю, запишется как

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + \tau p) + K_1 K_2 \tau p (1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 (1 + \tau p) = 0. \quad (1.32)$$

Построим кривую  $D$ -разбиения по параметру  $\tau$ .

Воспользовавшись уравнением (1.32), найдем уравнение кривой  $D$ -разбиения по параметру  $\tau$  в следующей форме:

$$\bar{\tau} = - \frac{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega) + K_1 K_2 K_3}{j\omega [(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega) + K_1 K_2 (1 + T_3 j\omega) + K_1 K_2 K_3]}. \quad (1.33)$$

На рис. 20 приведена кривая  $D$ -разбиения по  $\tau$  для принятых выше численных значений параметров. Единственным претендентом на область устойчивости является отрезок  $ab$ . Выберем какое-либо одно значение  $\tau$  из области  $ab$  и проверим, является ли  $ab$  областью устойчивости.

Производя элементарные вычисления при  $\tau = 0,5$ , мы убеждаемся, что  $ab$  не является областью устойчивости. Следовательно, при при-

\*) Для звена с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  принято условное обозначение  $\square$ .

нятых ранее значениях постоянных времени и коэффициентов усиления аperiodических звеньев для структуры варианта а) (рис. 18) нет такого значения  $\tau$ , при котором система была бы устойчива.

Рассмотрим теперь структурную схему, показанную на рис. 19. Для этого случая передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$K(p) = \frac{K_1 K_2 K_3 (1 + \tau p)}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + \tau p) + K_1 \tau p (1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 (1 + \tau p)}. \quad (1.34)$$

Характеристическое уравнение в данном случае запишется как

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + \tau p) + K_1 \tau p (1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K_1 K_2 K_3 (1 + \tau p) = 0. \quad (1.35)$$

Проверим на устойчивость характеристическое уравнение (1.35) для случая, когда  $\tau = 0,5$ .

Раскрывая скобки в уравнении (1.35) и группируя члены с одинаковой степенью  $p$ , получаем:

$$T_1 T_2 T_3 \tau p^4 + (T_1 T_2 T_3 + T_1 T_2 \tau + T_1 T_3 \tau + T_2 T_3 \tau + K_1 \tau T_2 T_3) p^3 + \\ + [T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 + T_1 \tau + T_2 \tau + T_3 \tau + K_1 \tau (T_2 + T_3)] p^2 + \\ + (T_1 + T_2 + T_3 + \tau + K_1 \tau + K_1 K_2 K_3 \tau) p + 1 + K_1 K_2 K_3 = 0.$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$0,000170 p^4 + 0,700 p^3 + 9,06 p^2 + 321 p + 601 = 0.$$

Условия Гурвица запишутся:

$$0,700 \cdot 9,63 \cdot 321 - 0,7^2 \cdot 600 - 321^2 \cdot 0,000170 = 1720 > 0,$$

т. е. система устойчива.

Этот пример показывает, что только за счет изменения структуры при тех же элементах и численных значениях их параметров система из неустойчивой при всех значениях  $\tau$  делается устойчивой. При этом  $\tau$  можно выбрать так, чтобы получить и надлежащее качество процесса регулирования.

**Пример 2.** Рассмотрим случай, когда две структуры, состоящие из одних и тех же звеньев, при заданных значениях параметров устойчивы, и выясним, как влияет структура на качество процесса регулирования.

На рис. 21 и 22 представлены две структуры. Основные элементы системы представляются четырьмя аperiodическими звеньями. Для обеспечения устойчивости вводится стабилизирующее устройство

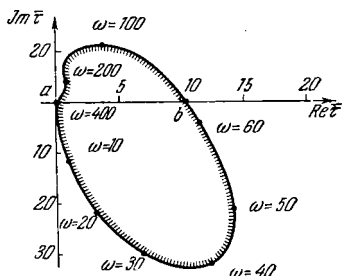


Рис. 20. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $\tau$ .

типа  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ ; при этом в схеме рис. 21 стабилизирующее устройство охватывает первое звено, а в схеме рис. 22 — два первых звена.

Выбираем следующие данные отдельных звеньев:

$$T_1 = 0,01, \quad T_2 = 0,5, \quad T_3 = 0,5, \quad T_4 = 1, \\ K_1 = 100, \quad K_2 = 1, \quad \tau = 0,2.$$

Коэффициенты  $K_3$  и  $K_4$  выбираются в области устойчивости после построения кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K = K_1 K_2 K_3 K_4$ .

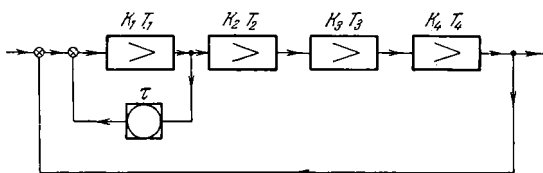


Рис. 21. Включение стабилизирующего устройства вокруг одного звена в четырехзвенной схеме.

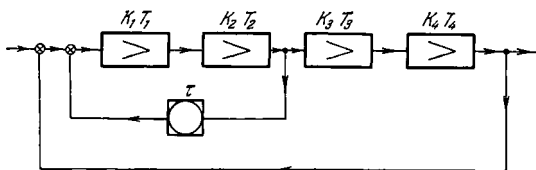


Рис. 22. Включение стабилизирующего устройства вокруг двух звеньев в четырехзвенной схеме.

Для суждения о качестве процесса регулирования построим кривые  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления для первой и второй структур.

Характеристическое уравнение, соответствующее структуре рис. 21, имеет вид

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + \tau p) + \\ + K_1 \tau p (1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 (1 + \tau p) = 0,$$

откуда уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления запишется:

$$\bar{K} = \overline{K_1 K_2 K_3 K_4} = - \frac{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega)(1 + T_4 j\omega)(1 + \tau j\omega)}{1 + \tau j\omega} + \\ + \frac{K_1 \tau j\omega (1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega)(1 + T_4 j\omega)}{1 + \tau j\omega}.$$

На рис. 23 представлена кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения.

Характеристическое уравнение, соответствующее структуре рис. 22, имеет вид

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + \tau p) + \\ + K_1 K_2 \tau p (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 (1 + \tau p) = 0,$$

откуда уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления будет:

$$\bar{K} = \overline{K_1 K_2 K_3 K_4} = \\ = - \frac{(1 + T_1 j\omega)}{1 + \tau j\omega} - \\ - (1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega)(1 + T_4 j\omega) - \\ - \frac{K_1 K_2 \tau j\omega (1 + T_3 j\omega)(1 + T_4 j\omega)}{1 + \tau j\omega}.$$

На рис. 24 представлена соответствующая кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения.

Сравним кривые  $\mathcal{D}$ -разбиения для рассматриваемых двух структур с точки зрения возможности получения лучшего качества процесса регулирования. Выберем на рис. 23 и 24 в устойчивой области  $K_1 K_2 K_3 K_4 = K$  одинаковые коэффициенты усиления. Сравнивая показатели качества по кривым рис. 23 и 24, мы видим, что в по-

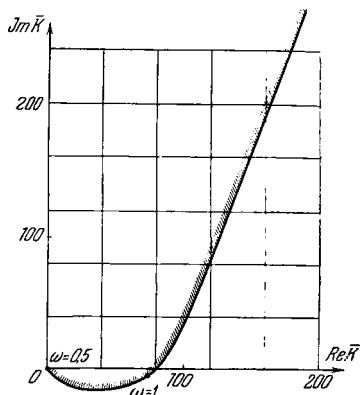


Рис. 23.  $\mathcal{D}$ -разбиение по общему коэффициенту усиления схемы рис. 21.

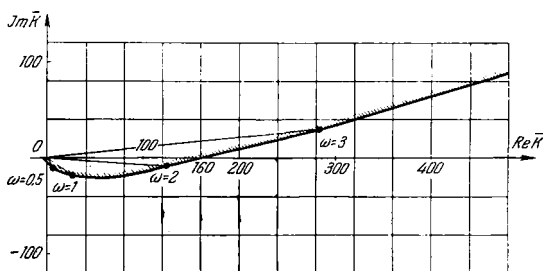


Рис. 24.  $\mathcal{D}$ -разбиение по общему коэффициенту усиления схемы рис. 22.

следнем случае система имеет большую область положительности, т. е. большее быстродействие при меньшем перерегулировании.

Более того, сравнивая эти две кривые  $D$ -разбиения, можно сделать заключение, что кривая рис. 24, построенная для структуры рис. 22, соответствует системе с более высокими динамическими и статическими свойствами.

Приведенные здесь примеры достаточно хорошо иллюстрируют ранее высказанное соображение о важности правильного выбора структуры и о существенном влиянии структуры на динамические свойства систем.

---

## ГЛАВА II

### СИСТЕМЫ С ОДНОЙ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

#### § 2.1. Одноконтурные системы

В этой главе будут рассмотрены системы автоматического регулирования с одной регулируемой величиной.

Будем называть одноконтурными системы, которые структурно представляются одним контуром, состоящим из последовательно включенных элементарных звеньев. Одноконтурная цепь является основой любой системы автоматического регулирования. Поэтому аналогично тому, как изучение свойств отдельных звеньев необходимо для того, чтобы установить свойства одноконтурной системы, изучение последней необходимо для того, чтобы положить ее свойства в основу построения сложных многоконтурных систем.

#### 1. Одноконтурная система, состоящая из $N$ апериодических звеньев

Передаточная функция замкнутой одноконтурной цепи, состоящей из  $N$  апериодических звеньев, имеет вид:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^N \frac{K_i}{1 + T_i p}}{1 + \prod_{i=1}^N \frac{K_i}{1 + T_i p}} = \frac{K}{\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) + K}, \quad (2.1)$$

где  $K = \prod_{i=1}^N K_i$  — общий коэффициент усиления системы,  $T_i$  — постоянная времени  $i$ -го звена.

Уравнение кривой  $D$ -разбиения по  $K$  запишется как

$$\bar{K} = - \prod_{i=1}^N (1 + T_i j\omega). \quad (2.2)$$

Модуль вектора  $\bar{K}$  равен произведению модулей сомножителей (2.2), а аргумент его равен сумме аргументов отдельных составляющих.

Из (2.2) видно, что с изменением частоты аргумент  $\bar{K}$  будет монотонно нарастать и кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения будет иметь вид, представленный на рис. 25. Из этого рисунка видно, что критический коэффициент усиления такой системы (имеется в виду, что количество звеньев больше двух) будет конечной величиной. В литературе \*) был приведен ряд исследований о влиянии соотношения между численными значениями отдельных постоянных времени на величину критического коэффициента усиления. Из этих исследований вытекает, что критический коэффициент усиления будет минимальным тогда, когда

все постоянные времени равны между собой. Численное значение критического коэффициента усиления для этого случая может быть определено из следующего соотношения:

$$K_{кр} = \frac{1}{\cos \frac{N\pi}{N}}, \quad (2.3)$$

где  $N$  — количество аperiodических звеньев. Как видно из (2.3),  $K_{кр}$  не зависит от абсолютного значения постоянных времени.

Рис. 25. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения.

Установим еще некоторые важные свойства одноконтурной системы, состоящей из аperiodических звеньев. Важным показателем качества системы регулирования является область положительности  $\omega_c$  вещественной частотной характеристики замкнутой системы. Как указано в первой главе, время регулирования будет:

$$t > \frac{\pi}{\omega_c}.$$

Из кривой рис. 25 видно, что область положительности для одноконтурных систем будет ограничена критической частотой  $\omega_{кр}$ . Следовательно, время регулирования будет всегда больше времени, определяемого отношением  $\frac{\pi}{\omega_{кр}}$ . Имея в виду, что  $\omega_{кр}$  соответствует нахо-

ждению системы на границе устойчивости, можно считать, что рабочая частота всегда будет меньше критической. Этим определяется граница быстрогодействия одноконтурной системы.

На плоскости  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$  можно для рассматриваемого случая выделить область, где выполняются необходимые условия

\*) Марьяновский Д. И., Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, Электричество, № 9, 1946; Prinz D. G., Contributions to the theory of automatic controllers and followers, Journ. Sci. Instr., v. 21, № 4, 1944.

отсутствия перерегулирования. Построим окружность с радиусом  $r = \frac{K+1}{2}$  и центром, расположенным на расстоянии  $\frac{K-1}{2}$  от начала координат. Тогда максимальное значение  $K$ , при котором указанная окружность не пересекает кривую  $D$ -разбиения, ограничивает область значений  $K$ , для которых выполняются необходимые условия отсутствия перерегулирования.

На рис. 26, 27 и 28 представлены кривые  $D$ -разбиения по  $K$  для случаев: а) когда постоянные времени одинаковы, б) когда они меняются по арифметическому закону и в) — по геометрическому закону.

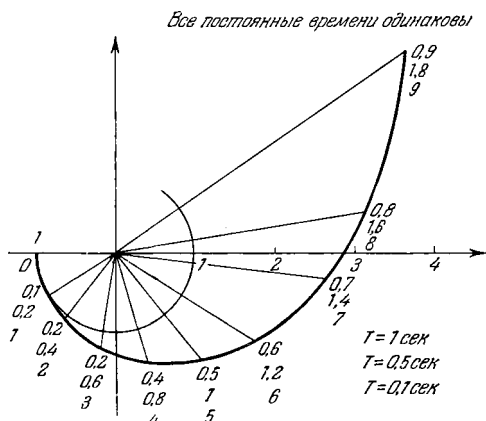


Рис. 26. Кривая  $D$ -разбиения для случая одинаковых постоянных времени.

Исходная постоянная времени взята равной единице. Для того чтобы получить представление, как меняются выделенные области в зависимости от абсолютного значения постоянных времени, на этих рисунках представлены те же области для случаев, когда исходная постоянная времени равна 0,5 и 0,1.

Сравнивая между собой соответствующие области отдельных рисунков, можно сделать следующие выводы:

а) Критическое значение коэффициента усиления для данного закона изменения величины постоянных времени не зависит от их абсолютного значения;

б) критические частоты существенно зависят от абсолютных значений постоянных времени и от закона распределения их величин;

в) область значений  $K$ , где выполняются необходимые условия апериодичности, не зависит от абсолютного значения постоянных времени, а зависит от соотношения между ними.



Общим, кроме ограниченного критического коэффициента усиления, для всех одноконтурных систем является: а) ограниченная область положительности вещественно-частотной характеристики — ограничен-

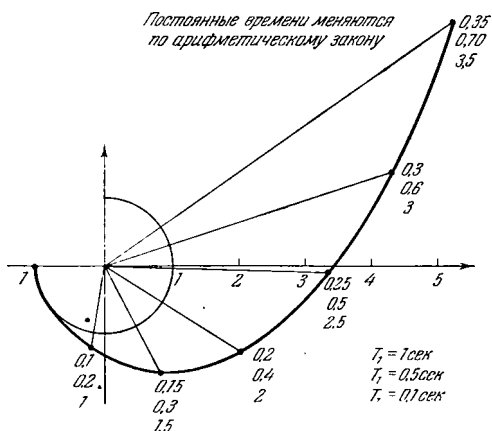


Рис. 27. Д-разбиение, когда постоянные времени меняются по арифметическому закону.

ное быстродействие, б) ограниченная область значений  $K$ , при которых выполняются необходимые условия отсутствия перерегулирования.

## 2. Одноконтурная цепь, состоящая из $N$ колебательных звеньев

Допустим, что систему автоматического регулирования, состоящую из основных звеньев, можно представить последовательной цепочкой колебательных звеньев. Передаточная функция такой замкнутой системы представится в следующем виде:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^N K_i}{1 + \frac{\prod_{i=1}^N K_i}{\prod_{i=1}^N \left( p^2 + \frac{1}{\tau_i} p + \omega_{0i}^2 \right)}} = \frac{K}{\prod_{i=1}^N \left( p^2 + \frac{1}{\tau_i} p + \omega_{0i}^2 \right) + K}. \quad (2.4)$$

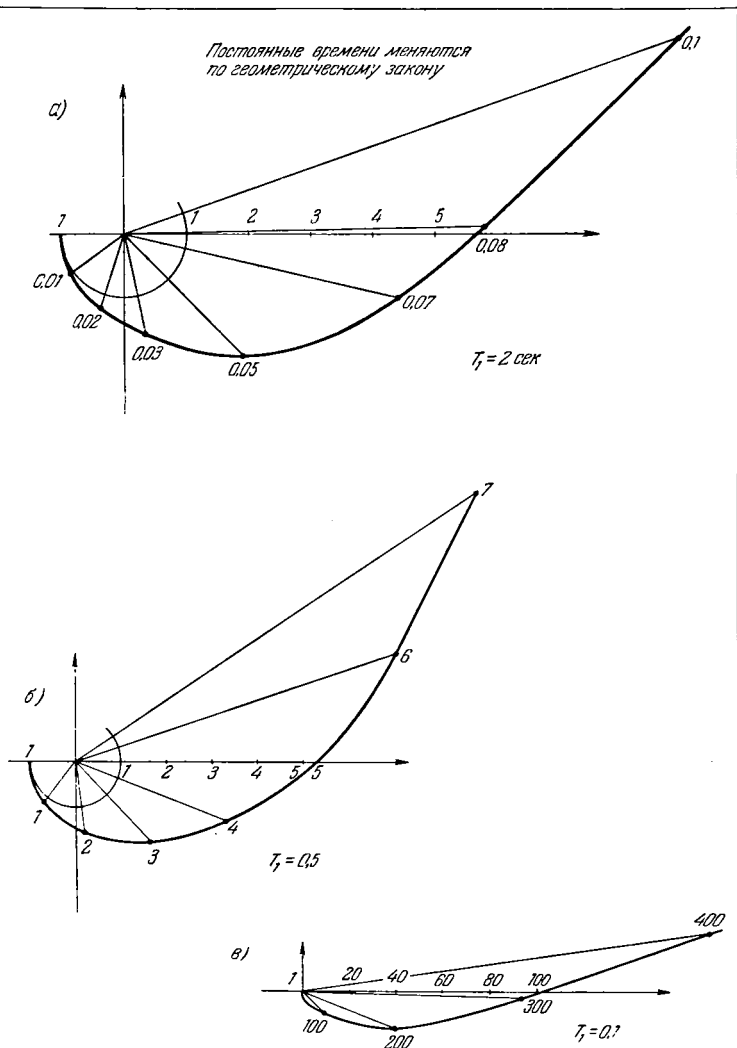


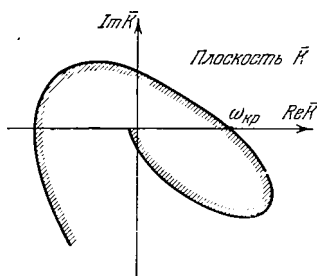
Рис. 28. Д-разбиение, когда постоянные времени меняются по геометрическому закону.

Здесь  $\omega_{0i}$ ,  $\tau_i$  и  $K_i$  — параметры колебательных звеньев и  $K = \prod_{i=1}^N K_i$  — общий коэффициент усиления.

Уравнение кривой  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления запишется:

$$\bar{K} = - \prod_{i=1}^N \left[ (j\omega)^2 + \frac{1}{\tau_i} j\omega + \omega_{0i}^2 \right]. \quad (2.5)$$

На рис. 29 представлен качественно вид кривой  $D$ -разбиения по  $K$ . Как и для случая, когда система представляется одноконтурной цепочкой из аperiodических звеньев, здесь критическое значение коэффициента усиления и область положительности будут конечными величинами. Значения их зависят как от абсолютных, так и от относительных значений параметров колебательных звеньев.



### 3. Одноконтурная цепь из аperiodических и колебательных звеньев

Рис. 29.  $D$ -разбиение системы с колебательными звеньями.

Нетрудно понять, что свойства одноконтурных систем, состоящих из аperiodических или колебательных звеньев,

в полной мере присущи системам, которые могут быть структурно представлены контуром, одновременно содержащим и аperiodические и колебательные звенья. Это непосредственно вытекает из выражения для передаточной функции, которая в данном случае может быть представлена в следующем виде:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^{N_1} K_i \prod_{j=1}^{N_2} K_j}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 + T_i p) \prod_{j=1}^{N_2} \left( p^2 + \frac{1}{\tau_j} p + \omega_{0j}^2 \right) + \prod_{i=1}^{N_1} K_i \prod_{j=1}^{N_2} K_j}, \quad (2.6)$$

и уравнения для кривой  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления, которое может быть записано следующим образом:

$$\bar{K} = - \prod_{i=1}^{N_1} (1 + T_i j\omega) \prod_{j=1}^{N_2} \left[ (j\omega)^2 + \frac{1}{\tau_j} j\omega + \omega_{0j}^2 \right]. \quad (2.7)$$

Обычно передаточные функции типа (2.6) имеют статические системы автоматического регулирования, не содержащие стабилизирующих устройств (т. е. состоящие только из основных элементов).

#### 4. Системы, состоящие из любой комбинации звеньев, типы которых приведены в таблице 1

Мы приведем здесь без доказательства условия структурной устойчивости одноконтурной цепи, состоящей из комбинации звеньев, приведенных в таблице 1. Добавим также, что такие структурные схемы будут иметь ограниченный критический коэффициент усиления и ограниченную область положительности вещественной частотной характеристики, если общее количество звеньев, составляющих структурно устойчивую систему, больше двух.

Для того чтобы одноконтурная система была структурно устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы:

а) система не содержала звеньев с операторами

$$\frac{K}{p^2}, \quad \frac{K}{p^2-1}, \quad \frac{K}{p^2-hp}, \quad \frac{K}{p^2-hp-1};$$

б) чтобы система не содержала более одного звена с операторами

$$\frac{K}{p}, \quad \frac{K}{p^2+hp-1}, \quad \frac{K}{p-1};$$

в) чтобы у системы, содержащей  $r$  звеньев из группы с операторами

$$\frac{K}{p^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{K}{p^2-hp+1},$$

порядок характеристического уравнения был больше  $4r$  \*).

Таким образом, в настоящем параграфе были рассмотрены свойства одноконтурных систем как с точки зрения их устойчивости, так и с точки зрения основных показателей качества.

## § 2.2. Корректирующие обратные связи

Корректирующие обратные связи вводятся в систему автоматического регулирования для придания ей требуемых статических и динамических свойств. В практике автоматического регулирования встречаются корректирующие устройства различного вида. Часто, в зависимости от вида корректирующего устройства, говорят о том или ином законе регулирования, например, о регулировании с воздействием по производной, изодермном регулировании и т. д. Различают также параллельные и последовательные корректирующие связи. Как будет показано ниже, все типы корректирующих связей могут быть сведены к определенным образом включенной корректирующей обратной связи.

---

\*) Указанные условия структурной устойчивости были сформулированы в работе: Айзерман М. А., О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 2, 1948.

При этом такое рассмотрение оказывается не только удобным с формальной точки зрения, но весьма плодотворным по существу, так как дает возможность единым образом выбирать корректирующие обратные связи и определять наиболее рациональный вид их в каждом конкретном случае.

Целесообразно разделить все корректирующие связи на гибкие, жесткие и смешанные. Рассмотрим некоторые типы корректирующих устройств, нашедших широкое применение в практике автоматического регулирования. На рис. 30 представлена схема цепочки,

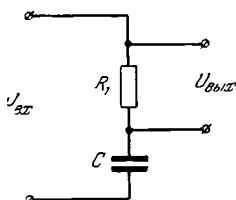


Рис. 30. Схема стабилизирующего устройства — цепочки  $R_1, C$  (гибкая связь).

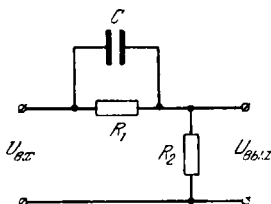


Рис. 31. Схема стабилизирующего устройства — цепочки  $R_1, R_2, C$  (смешанная связь).

состоящей из омического сопротивления  $R_1$  и емкости  $C$ . Передаточная функция  $\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}$  для этого случая запишется:

$$\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{\tau p}{1 + \tau p}, \quad \text{где } \tau = R_1 C. \quad (2.8)$$

Сигнал на выходе данного корректирующего устройства будет равен нулю, если входной сигнал остается неизменным во времени. Такие связи называют гибкими.

На рис. 31 представлена схема корректирующего устройства, в котором выходной сигнал отличен от нуля и при

$$U_{\text{вх}}(t) = \text{const.}$$

Передаточная функция для схемы рис. 31 запишется следующим образом:

$$\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{\tau p + i}{\tau p + 1}, \quad (2.9)$$

где

$$i = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{а } \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.$$

Такие связи будем называть связями смешанного типа.

Наконец, на рис. 32 приведена схема устройства, где между входным и выходным сигналами существует однозначная, пропорциональная, не зависящая от времени связь, которая может быть записана следующим образом:

$$\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = K. \quad (2.10)$$

Эта связь не зависит от времени и ее обычно называют жесткой обратной связью.

Передаточная функция корректирующего устройства самого общего типа может быть записана в следующей форме:

$$\frac{x_{\text{ВЫХ}}(p)}{x_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}. \quad (2.11)$$

Как показано в главе I, частными случаями (2.11) являются передаточные функции рассмотренных выше корректирующих устройств (рис. 30, 31, 32) и следующих звеньев:

а) дифференцирующее звено

$$\frac{x_{\text{ВЫХ}}}{x_{\text{ВХ}}} = \frac{a_{n-1} p}{1}, \quad (2.12)$$

б) интегрирующее звено

$$\frac{x_{\text{ВЫХ}}}{x_{\text{ВХ}}} = \frac{a_n}{b_{m-1} p} \quad (2.13)$$

и т. д.

Рассмотрим теперь методы включения корректирующих устройств в схемах автоматического регулирования. Для общности введем следующие обозначения:

$\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$  — передаточная функция корректирующего устройства,

$\frac{K_1(p)}{D_1(p)}$  — передаточная функция первой части одноконтурной цепи (рис. 33),

$\frac{K_2(p)}{D_2(p)}$  — передаточная функция второй части одноконтурной цепи.

Рис. 33. Структурная схема со стабилизирующим устройством общего вида, включенным гибкой отрицательной связью.

В качестве первой или второй части могут быть любые составляющие одноконтурной цепи. В принятых обозначениях передаточная функция одноконтурной цепи запишется:

$$K(p) = \frac{\frac{K_1(p)}{D_1(p)} \cdot \frac{K_2(p)}{D_2(p)}}{1 + \frac{K_1(p)}{D_1(p)} \cdot \frac{K_2(p)}{D_2(p)}}. \quad (2.14)$$

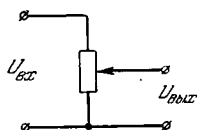
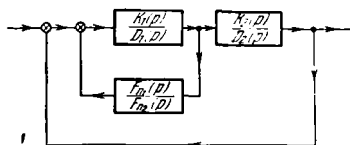


Рис. 32. Схема жесткой связи.



Включим корректирующее устройство так, как это показано на рис. 33. Такой вид включения называют местной обратной связью.

Передаточная функция замкнутой системы в рассматриваемом случае запишется:

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) F_{n_2}(p)}{D_1(p) D_2(p) F_{n_2}(p) + K_1(p) F_{n_1}(p) D_2(p) + K_1(p) K_2(p) F_{n_2}(p)}. \quad (2.15)$$

Изменим направление включения корректирующего устройства (рис. 34). Такой вид включения называют параллельным включением корректирующего устройства. Передаточная функция соответственно запишется:

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) F_{n_2}(p)}{D_1(p) D_2(p) F_{n_2}(p) + K_2(p) F_{n_1}(p) D_1(p) + K_1(p) K_2(p) F_{n_2}(p)}. \quad (2.16)$$

Как видно непосредственно из рис. 33 и 34 и из уравнений (2.15) и (2.16), обратная связь по отношению к первому участку одноконтурной цепи эквивалентна параллельному включению корректирующего устройства относительно второго участка одноконтурной цепи, и наоборот, обратная связь по отношению ко второму участку одноконтурной цепи эквивалентна параллельному включению корректирующего устройства относительно первого участка.

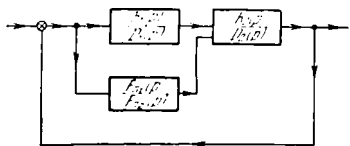


Рис. 34. Структурная схема со стабилизирующим устройством, включенным предупреждающей связью.

По этой причине мы в дальнейшем будем пользоваться только термином «корректирующая обратная связь», рассматривая ее относительно того участка одноконтурной цепи, с которым она образует замкнутый в направлении стрелок контур.

Рассмотрим теперь последовательное включение корректирующего устройства. Так как системы автоматического регулирования всегда имеют замыкающую жесткую отрицательную обратную связь (системы замкнутого типа), то при последовательном введении в контур регулирования корректирующего устройства последний должен быть смешанного типа; если же включается корректирующее устройство гибкого типа, т. е. такое, что сигнал на его выходе существует, только когда входная величина его меняется во времени, то параллельно с корректирующим устройством должна быть и жесткая связь. Введение воздействия по производной является частным случаем рассматриваемого корректирующего устройства. При этом, кроме сигнала от производной регулируемой величины, измерительный элемент

системы регулирования обязательно воспринимает сигнал и от самой регулируемой величины. Убедимся, что введение воздействия по производной эквивалентно охвату всего контура регулирования гибкой обратной связью с оператором типа

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \beta p. \quad (2.17)$$

На рис. 35 представлена схема с включением воздействия по производной; кроме того, на рисунке показана замыкающая жесткая

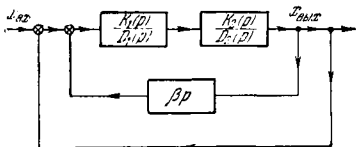


Рис. 35. Введение воздействия по производной от выходной величины.

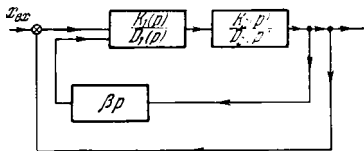


Рис. 36. Охват всей системы стабилизирующим устройством.

обратная связь. Передаточная функция для этого случая запишется:

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p)}{D_1(p) D_2(p) + K_1(p) K_2(p) [1 + \beta p]}. \quad (2.18)$$

Найдем теперь передаточную функцию системы, представленной на рис. 36. Получаем:

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p)}{D_1(p) D_2(p) + K_1(p) K_2(p) [1 + \beta p]}, \quad (2.19)$$

т. е. точно такое же уравнение, как и (2.18). Несколько другой вид имеет передаточная функция, когда воздействие по производной берется

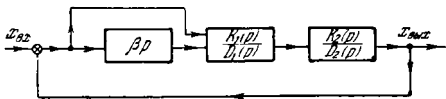


Рис. 37. Введение производной от отклонения.

не от  $x_{\text{вых}}$ , а от разности  $x_{\text{вх}} - x_{\text{вых}}$ . На рис. 37 представлена соответствующая схема. В этом случае передаточная функция будет иметь вид

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) (1 + \beta p)}{D_1(p) D_2(p) + K_1(p) K_2(p) (1 + \beta p)}. \quad (2.20)$$

Знаменатель (2.20) точно такой же, как и в уравнениях (2.18) и (2.19); таким образом, с точки зрения устойчивости, влияние воздействия



по производной от разности  $x_{\text{вх}} - x_{\text{вых}} = \Delta x$  и гибкая обратная связь вокруг контура регулирования тождественны. Что касается общих динамических свойств системы при включении гибкой обратной связи вокруг контура и в случае введения воздействия по производной от  $\Delta x$ , то они будут проанализированы в разделе, где будут сравниваться различные виды корректирующих устройств. Случай введения воздействия по производной от  $\Delta x$  также может быть представлен как гибкая обратная связь; соответствующая схема представлена на рис. 38.

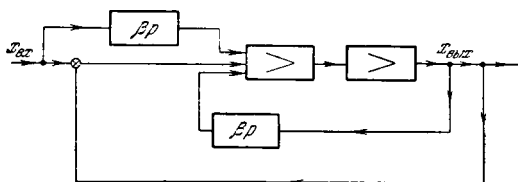


Рис. 38. Схема, эквивалентная схеме рис. 37.

Если вместо дифференцирующего звена ввести корректирующее устройство общего вида, то передаточные функции (2.19) и (2.20) запишутся соответственно в следующей форме:

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p)}{D_1(p) D_2(p) + K_1(p) K_2(p) \left[ \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} + 1 \right]} \quad (2.21)$$

и

$$K(p) = \frac{K_1(p) K_2(p) \left[ 1 + \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} \right]}{D_1(p) D_2(p) + K_1(p) K_2(p) \left[ 1 + \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} \right]}, \quad (2.22)$$

где  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$  — передаточная функция корректирующего устройства.

Мы рассмотрели случай, когда в систему регулирования вводится только одно корректирующее устройство, хотя и общего типа.

В системах автоматического регулирования весьма часто применяется не одно, а несколько корректирующих устройств, при этом различного типа. Вопрос о количестве корректирующих устройств, их передаточных функциях и характере включения будет рассмотрен в главе IV.

### § 2.3. Некоторые примеры систем с большими коэффициентами усиления

Величина коэффициента усиления системы существенно влияет на ее статические и динамические свойства. Что касается зависимости статических свойств системы, ее установившейся точности, то, как это хорошо известно, чем больше коэффициент усиления, тем больше установившаяся точность. Само понятие установившейся точности имеет различный физический смысл для статических систем регулирования и для следящих систем с различной степенью астатизма. В последнем случае под коэффициентом усиления понимается отношение установившейся скорости слежения к углу рассогласования, установившегося значения ускорения к углу рассогласования и т. д. Коэффициент усиления в этих случаях имеет размерность  $1/\text{сек}$ ,  $1/\text{сек}^2$  и т. д., и когда для следящих систем говорится об установившейся точности, то

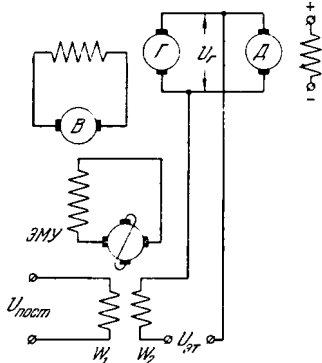


Рис. 39. Принципиальная схема регулирования двигателя постоянного тока.

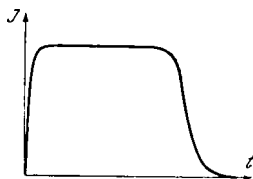


Рис. 40. К определению коэффициента заполнения токовой диаграммы.

имеется в виду точность слежения системы за воздействием, имеющим постоянную скорость, постоянное ускорение и т. д. Когда говорят об установившейся ошибке, то в это понятие вкладывают именно этот смысл. Чем больше коэффициент усиления, тем больше точность слежения.

Рассмотрим несколько примеров, где необходимые динамические свойства системы достигаются за счет возможности неограниченного увеличения коэффициента усиления системы.

**Пример 1.** На рис. 39 представлена принципиальная схема управления и регулирования двигателя главного привода прокатного стана. В такого рода системах максимальное использование двигателя определяется коэффициентом заполнения токовой диаграммы за период пуска (рис. 40).

Чем ближе к единице коэффициент заполнения, тем совершеннее система управления и тем больше производительность стана.

Двигатель управляется по схеме генератор-двигатель. Цепь возбуждения генератора питается от возбудителя, а последний возбуждается от электромашинного усилителя. Электромашинный усилитель снабжен двумя обмотками управления. Первая  $W_1$  питается от постороннего источника  $U_{\text{пост}}$ , вторая  $W_2$  питается от разности  $U_{\text{ат}} - U_r$  и служит замыкающей обратной связи.

Для получения максимально возможного коэффициента заполнения токовой диаграммы, ток  $I$  генератора в процессе пуска должен оставаться постоянным. Для этой цели необходимо, чтобы напряжение генератора  $U_r$  и обороты двигателя  $n$  менялись по линейному закону с одинаковыми скоростями, но со смещением во времени (рис. 41). Действительно, уравнение разгона двигателя имеет вид \*)

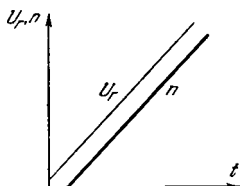


Рис. 41. Изменение напряжения генератора и скорости вращения двигателя, обеспечивающие наибольший коэффициент заполнения токовой диаграммы.

$$\frac{GD^2}{375} \cdot \frac{dn}{dt} = C\Phi I,$$

где  $GD^2$  — маховой момент, приведенный к валу двигателя;  $n$  — число оборотов;  $\Phi$  — поток возбуждения двигателя;  $I$  — ток нагрузки генератора;  $C$  — постоянная, определяемая данными машины.

При неизменном потоке возбуждения  $\Phi$  двигателя условие постоянства тока  $I$  нагрузки генератора сводится к требованию постоянства ускорения

$$\frac{dn}{dt} = \frac{375}{GD^2} \cdot C\Phi I.$$

Отсюда получаем линейный закон изменения скорости вращения во времени в следующем виде:

$$n = \text{const} \cdot t. \quad (2.23)$$

С другой стороны, если пренебречь индуктивностью якорных цепей генератор-двигателя, нагрузочный ток может быть определен из следующего соотношения:

$$I = \frac{U_r - K_1 n}{R} = \text{const}. \quad (2.24)$$

Подставляя в (2.24) вместо  $n$  его значение из (2.23), получим:

$$I = \frac{U_r - K_1 \cdot \text{const} \cdot t}{R}. \quad (2.25)$$

\*) Имеется в виду только динамическая нагрузка.

Постоянство тока будет соблюдено в процессе пуска, если

$$\frac{U_r - K_1 \cdot \text{const} \cdot t}{R} = \text{const}.$$

Это означает, что и напряжение генератора должно меняться так же по линейному закону, как и обороты (см. рис. 41).

Допустим, что к обмотке возбуждения генератора скачкообразно подключается напряжение  $U_B$ . Тогда ток возбуждения генератора будет меняться во времени по следующему закону:

$$i_B = \frac{U_B}{R_B} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad (2.26)$$

где  $T = \frac{L_B}{R_B}$  — постоянная времени цепи возбуждения генератора.

Полагая характеристику намагничивания генератора линейной, получим напряжение генератора также меняющимся по экспоненциальному закону

$$U_r = \frac{K U_B}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (2.27)$$

Следовательно, линейный закон изменения напряжения генератора может быть получен только на небольшом промежутке времени.

Действительно, разлагая (2.27) в ряд Тейлора, получим:

$$U_r = \frac{K U_B}{R} \cdot \frac{t}{T} - \frac{K U_B}{R} \cdot \frac{t^2}{2! T^2} + \dots \quad (2.28)$$

При достаточно малых значениях  $\frac{t}{T}$  можно отбросить все члены ряда (2.28) со степенями  $\frac{t}{T}$  выше первой. Однако, для того чтобы в течение малого времени  $t$  напряжение  $U_r$  выросло до нужного значения, необходимо выбрать как можно большее значение коэффициента усиления  $K$ . В действительных условиях напряжение возбуждения меняется не скачкообразно, а определяется постоянными времени возбудителя и электромашинного усилителя. При этих условиях коэффициент усиления, обеспечивающий надлежащий характер изменения напряжения, должен быть весьма большим — теоретически сколь угодно большим. Большой коэффициент усиления достигается значительной форсировкой ЭМУ. Однако по окончании процесса регулирования для обеспечения нормальной работы форсировка должна быть снята. Как только напряжение генератора достигает заданного значения, дальнейшее его изменение должно иметь вид, представленный на рис. 42. Для того чтобы получить закон изменения напряжения



Рис. 42. Изменение напряжения во времени.

близким к идеальному, вводят так называемую отсечку по напряжению, действие которой состоит в том (см. схему рис. 43), что при достижении напряжением генератора  $U_r$  заданного значения включается сброс управления ЭМУ  $W_2$ , ампер-витки которой действуют навстречу форсировочным ампер-виткам. С момента включения управляющей обмотки  $W_2$  система замыкается. Следовательно, с этого момента

необходимо обеспечить ее устойчивость. Коэффициент усиления остается после замыкания системы практически таким же, каким он был до включения, что ясно из

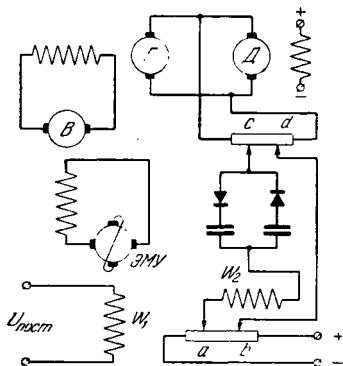


Рис. 43. Схема регулирования двигателя постоянного тока с отсечкой по напряжению генератора.

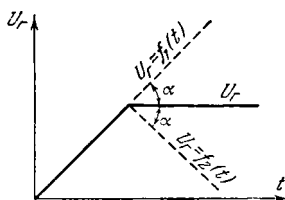


Рис. 44. К определению коэффициентов усиления замкнутой и разомкнутой систем регулирования двигателя.

рис. 44, ибо наклон кривой  $U_r = f_1(t)$ , определяемый форсировкой и наклон кривой  $U_r = f_2(t)$ , определяемый дефорсировкой, должны быть одинаковыми и разными по знаку. Только при этом условии результирующая кривая  $U_r = f(t)$  будет иметь нужный закон изменения.

Из этого примера ясно, что необходимый характер процесса достигается соответствующим выбором величины коэффициента усиления. Остается только обеспечить устойчивость системы. Рассматриваемый прием получил весьма широкое распространение в схемах автоматического управления и регулирования электродвигателями (в схемах автоматизированного электропривода в металлургии и других областях) и представляет самостоятельный интерес. Поэтому принципы построения систем, устойчивых при больших коэффициентах усиления, здесь имеют первостепенное значение.

**Пример 2.** Рассмотрим другой пример системы, схема которой представлена на рис. 45, а структурная схема — на рис. 46. Передаточная функция имеет следующий вид:

$$K(p) = \frac{K_{общ} (1 + T_5 p)}{\prod_{i=1}^5 (1 + T_i p) + K_1 K_2 T_5 p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_{общ} (1 + T_5 p)}, \quad (2.29)$$

где

$$K_{\text{общ}} = K_1 K_2 K_3 K_4.$$

Поделим числитель и знаменатель на  $K_1 K_2$  и предположим, что  $m = \frac{1}{K_1 K_2}$  достаточно мало, т. е. что коэффициенты усиления  $K_1$  и  $K_2$  достаточно велики. Тогда получим:

$$K(p) = \frac{K_3 K_4 (1 + T_5 p)}{m \prod_{i=1}^5 (1 + T_i p) + T_5 p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + T_5 p)}.$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$m \prod_{i=1}^5 (1 + T_i p) + T_5 p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + T_5 p) = 0. \quad (2.30)$$

Если  $m \rightarrow 0$ , то характеристическое уравнение вырождается в уравнение

$$T_5 p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + T_5 p) = 0. \quad (2.31)$$

На основании теоремы о непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от его коэффициентов можно утверждать, что при  $m \rightarrow 0$  три корня уравнения (2.30) будут стремиться к трем корням уравнения (2.31). Остальные два корня уравнения (2.30) будут уходить в бесконечность.

Предположим, что уходящие в бесконечность корни при  $m \rightarrow 0$  располагаются слева от мнимой оси. Тогда устойчивость будет определяться вырожденным уравне-

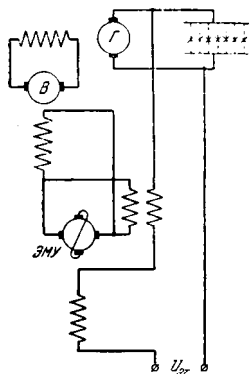


Рис. 45. Схема регулирования напряжения генератора.

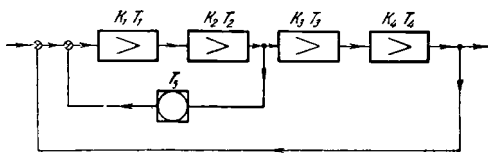


Рис. 46. Структурная схема системы рис. 45.

нием. Выясним пределы изменения постоянной времени  $T_5$  стабилизирующего устройства и коэффициентов усиления  $K_3 K_4$ , при которых система остается устойчивой. Запишем условия устойчивости по Рауту — Гурвицу:

$$T_5 (1 + K_3 K_4) (T_3 + T_4) - T_3 T_4 K_3 K_4 > 0. \quad (2.32)$$

Допустим, что  $T_5$  выбрано таким, что

$$T_5 > \frac{T_4 T_3}{T_3 + T_4}. \quad (2.33)$$

При этом условии (2.32) выполняется при любых  $K_3, K_4$ . Следовательно, при выполнении условия (2.33) параметры  $K_3, K_4$  и  $T_5$  можно менять в широких пределах и выбирать их так, чтобы получать необходимое качество процесса регулирования.

Остается только доказать, что при  $m \rightarrow 0$  система будет устойчивой, и процесс, определяемый передаточной функцией (2.29), будет достаточно близким к процессу, определяемому передаточной функцией

$$K_{\text{выр}}(p) = \frac{K_3 K_4 (1 + T_5 p)}{T_5 p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + T_5 p)}. \quad (2.34)$$

**Пример 3.** Допустим, что на вход некоторой системы с передаточной функцией  $K(p)$  подается сигнал  $x(t)$ , а на выходе системы необходимо получить (в некотором масштабе) этот сигнал с большой степенью точности. Запишем уравнение в следующем виде:

$$x_{\text{вых}}(p) = K(p) x_{\text{вх}}(p) = \frac{K}{D(p)}. \quad (2.35)$$

Предположим, что структурно система может быть представлена состоящей из простейших устойчивых звеньев, для простоты апериодических. Тогда в замкнутом состоянии ее передаточную функцию можно представить следующим образом:

$$x_{\text{вых}}(p) = \frac{K}{K + D(p)} x_{\text{вх}}(p). \quad (2.36)$$

Поделим числитель и знаменатель на  $K$  и допустим, что  $K \rightarrow \infty$  и соответственно  $\frac{1}{K} = m \rightarrow 0$ . Тогда уравнение (2.36) примет вид

$$x_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{1 + mD(p)} \cdot x_{\text{вх}}(p). \quad (2.37)$$

Если система остается устойчивой при  $m \rightarrow 0$ , то

$$x_{\text{вых}}(p) \rightarrow x_{\text{вх}}(p) \quad \text{и соответственно} \quad x_{\text{вых}}(t) \rightarrow x_{\text{вх}}(t).$$

Возможность осуществления такой системы полностью определяется ее устойчивостью. Следовательно, и здесь мы можем добиться идеального воспроизведения, если сумеем обеспечить устойчивость при  $m \rightarrow 0$ , т. е. при достаточно больших коэффициентах усиления.

**Пример 4.** Допустим, что нам необходимо получить сигнал, пропорциональный величине и первой производной некоторой функции  $x_{\text{вх}}(t)$ . На рис. 47 представлена схема, которая может выполнить

настоящие требования. Действительно, передаточная функция схемы рис. 47 запишется, как

$$\frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{K}{1 + \frac{K_1 K}{1 + Tp}} = \frac{K(1 + Tp)}{(1 + Tp) + KK_1}. \quad (2.38)$$

Поделим числитель и знаменатель на  $K$  и предположим, что  $K \rightarrow \infty$  или  $m = \frac{1}{K} \rightarrow 0$ . Тогда (2.38) запишется, как

$$x_{\text{вых}}(p) = \frac{1 + Tp}{m(1 + Tp) + K_1} x_{\text{вх}}(p)$$

и при  $m \rightarrow 0$

$$x_{\text{вых}}(p) \rightarrow \frac{1}{K_1} (1 + Tp) x_{\text{вх}}(p). \quad (2.39)$$

Следовательно, в этом случае сигнал на выходе пропорционален сигналу и производной от сигнала на входе.

Если усложнить оператор звена, включенного в обратной связи, то в общем случае можно получить схему, где выходной сигнал будет некоторой интегро-дифференциальной функцией от входного сигнала. В общем случае это можно представить в следующей форме:

$$x_{\text{вых}} = \frac{D(p) x_{\text{вх}}(p)}{mD(p) + 1}, \quad (2.40)$$

где  $D(p)$  является некоторой функцией оператора дифференцирования  $p$ . Очевидно, что такая схема может быть реализована, если при  $m \rightarrow 0$  система останется устойчивой. Подчеркнем, что рассмотренный здесь пример звена является основой современных вос-

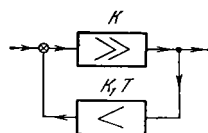


Рис. 47. К использованию больших коэффициентов усиления для получения производной.

производящих устройств и так называемых интеграторов или моделирующих устройств. Рассмотрим подробнее этот весьма важный вопрос. Как известно\*), решающими называют такие усилители, которые могут быть использованы для выполнения отдельных математических действий — сложения, интегрирования, дифференцирования или их комбинации.

Основное уравнение решающего усилителя можно вывести на основании рис. 48.

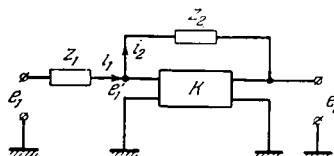


Рис. 48. Принцип действия решающего усилителя с большим коэффициентом усиления.

\*) Трапезников В. А., Коган Б. Я., Принципы построения моделирующих устройств для исследования процессов автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 6, 1952.



Допустим, что усилитель  $K$  практически не потребляет энергии, так как его входом является сетка электронной лампы. Тогда  $i_1 = i_2$  или

$$\frac{e_1 - e_1'}{Z_1(p)} = \frac{e_1' - e_2}{Z_2(p)} \quad (2.41)$$

и

$$e_2 = K e_1', \quad (2.42)$$

где  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  — операторные импедансы,  $K$  — коэффициент усиления, а  $e_1$ ,  $e_1'$  и  $e_2$  — изображения соответствующих напряжений.

Исключим из (2.41) и (2.42)  $e_1'$  и найдем связь между  $e_1$  и  $e_2$ :

$$\frac{e_1 - \frac{e_2}{K}}{Z_1(p)} = \frac{\frac{e_2}{K} - e_2}{Z_2(p)}.$$

После упрощений получаем:

$$e_2 = \frac{K Z_2(p)}{Z_2(p) + Z_1(p) - K Z_1(p)} e_1. \quad (2.43)$$

Поделим числитель и знаменатель на  $K$  и положим  $K$  равным достаточно большому числу. Обозначив  $\frac{1}{K} = m$ , получим:

$$e_2 = \frac{Z_2(p) e_1}{m [Z_2(p) + Z_1(p)] - Z_1(p)} \approx -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} e_1. \quad (2.44)$$

Уравнение (2.44) является основным для решающих усилителей с обратной связью и большим коэффициентом усиления. С их помощью можно получить нужные сигналы на выходе, т. е. производить нужные действия. Так, например, если  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  — омические сопротивления, равные по величине, то усилитель выполняет операцию изменения знака; если сопротивления не одинаковы, то, кроме перемены знака, будет меняться масштаб. Допустим, что

$Z_2(p) = \frac{1}{Cp}$ , а  $Z_1(p) = R$ ; тогда

$$e_2 = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p} \cdot e_1,$$

т. е. операторный усилитель в данном случае выполняет функции интегрирования. Соответствующим выбором операторных импедансов  $Z_1(p)$  и  $Z_2(p)$  можно обеспечить нужные действия над входным сигналом. Все это достигается благодаря наличию достаточно большого коэффициента усиления  $K$ . Однако результат будет обеспечен только в том случае, если полученная таким образом система будет устойчивой. Следовательно, и здесь проблема сводится к получению методов построения систем, допускающих большой коэффициент усиления без нарушения устойчивости.

**Пример 5.** Рассмотрим пример системы, представляющей существенный интерес, так как она относится к классу так называемых оптимальных систем автоматического регулирования \*).

В реальных устройствах некоторые координаты или их  $i$ -е производные, например, скорость вращения электрического двигателя, момент двигателя, пропорциональный току, и т. д. по условиям прочности, коммутации или других факторов имеют ограниченные значения. При этих условиях максимально возможное быстродействие не может превысить некоторого определенного значения, которое

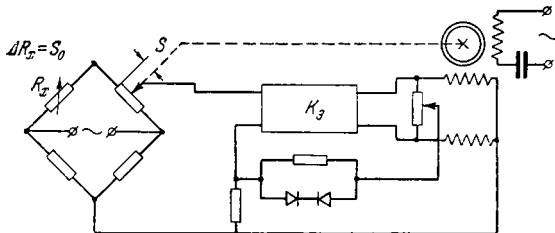


Рис. 49. Принципиальная схема автоматического компенсатора.

лимитируется предельными значениями координат и производных от этих координат. Как показано в работах А. Я. Лернера, А. А. Фельдбаума и др. \*\*), максимальное быстродействие или отработка с предельно возможной скоростью могут быть достигнуты введением в систему нелинейных преобразователей с определенной характеристикой. Мы не будем здесь касаться методов получения этих преобразователей, а на примере автоматического компенсатора убедимся, что нелинейная система будет тем ближе к оптимальной, чем больше ее коэффициент усиления. В дальнейшем будет показано, что рассматриваемый здесь пример не составляет исключения и что огромное большинство оптимальных систем целесообразно построить так, чтобы их структура в линейном приближении принадлежала к рассматриваемому в настоящей книге классу.

\*) Приводимый пример заимствован из работы: Лернер А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 2 и № 4, 1952.

\*\*) Фельдбаум А. А. 1). К вопросу о синтезе оптимальных систем автоматического регулирования, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 1, 1955. 2) Простейшие релейные системы автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 10, № 4 (1949). 3) Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 14, № 6 (1953); Лернер А. Я., Построение быстродействующих систем автоматического регулирования при ограничении значений координат регулируемого объекта, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 1, 1955.

На рис. 49 представлена принципиальная схема автоматического компенсатора, а на рис. 50 — его структурная схема.

Измерительная система автоматического компенсатора приводится в движение двухфазным асинхронным короткозамкнутым двигателем. Двигатель имеет ограниченный по величине момент и ограниченную скорость вращения. Ограничение момента эквивалентно ограничению ускорения. Таким образом, в рассматриваемом случае речь идет

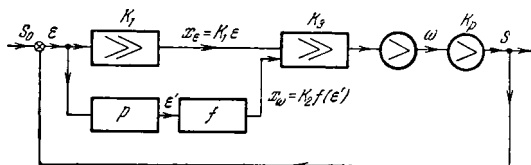


Рис. 50. Блок-схема автоматического компенсатора рис. 49.

о системе, обладающей ограниченной скоростью и ограниченным ускорением. Как видно из рис. 49, в цепь обратной связи поданы отклонение и его первая производная. Имея в виду обозначения, приведенные на рис. 50, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_\varepsilon &= K_1 \varepsilon, \\ x_\omega &= K_2 f(\varepsilon') = K_2 \omega^2 \operatorname{sign} \omega, \\ x &= x_\varepsilon - x_\omega, \\ M &= K_3 x, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{I} \cdot M, \\ \frac{ds}{dt} &= K_p \omega, \\ \varepsilon &= s_0 - s, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -K_p \omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Уравнение движения относительно переменной  $\varepsilon$  запишется в следующей форме:

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{K_2 K_3}{I K_p} \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \operatorname{sign} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{K_p K_1 K_3}{I} \varepsilon = 0. \quad (2.46)$$

Заменяя  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  через  $K_p \omega$ , будем иметь:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{K_2 K_3}{I} \omega^2 \operatorname{sign} \omega - \frac{K_1 K_3}{I} \varepsilon = 0.$$

Исключая время с помощью подстановки  $dt = -\frac{d\varepsilon}{\omega K_p}$ , получим:

$$\omega \frac{d\omega}{d\varepsilon} - \frac{K_2 K_3}{IK_p} \omega^2 \operatorname{sign} \omega + \frac{K_1 K_3}{IK_p} \varepsilon = 0. \quad (2.47)$$

Решение уравнения (2.47) дает следующее выражение для фазовых траекторий:

для  $\omega > 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{r} - a\varepsilon + \left(\omega_0^2 - \frac{a}{r} + a\varepsilon_0\right) e^{r(\varepsilon - \varepsilon_0)}}, \quad (2.48)$$

где

$$a = -\frac{K_1}{K_2}, \quad r = -2 \frac{K_2 K_3}{IK_p},$$

и для  $\omega < 0$

$$\omega = -\sqrt{\frac{a}{r} + a\varepsilon + \left(\omega_0^2 - \frac{a}{r} - a\varepsilon_0\right) e^{r(\varepsilon - \varepsilon_0)}}, \quad (2.49)$$

где  $\omega_0$  и  $\varepsilon_0$  — начальные значения  $\omega$  и  $\varepsilon$ .

На рис. 51 построены фазовые траектории. С течением времени изображающие точки приближаются к изоклине с нулевым наклоном,

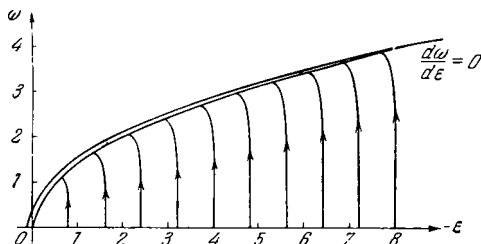


Рис. 51. Семейство фазовых траекторий.

а затем устремляются к началу координат, т. е. к положению равновесия. Как показано в работах А. А. Фельдбаума и А. Я. Лернера, изоклина с нулевым наклоном в данном случае совпадает с фазовой траекторией оптимального процесса замедления системы. Чем больше коэффициент усиления системы, в частности  $K_3$ , тем больше процесс приближается к оптимальному. При  $K_3 = \infty$  процесс замедления в точности совпадает с оптимальным. Таким образом, получение процесса, близкого к оптимальному, при использовании нелинейных связей также сопряжено с необходимостью значительного увеличения коэффициента усиления системы.

## § 2.4. Структуры, допускающие неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости

В предыдущем параграфе мы установили, какое существенное значение имеет возможность получения систем автоматического регулирования с большими коэффициентами усиления для решения ряда технических проблем. Ранее мы также установили, что одноконтурные системы обладают ограниченным критическим коэффициентом усиления.

Поставим и решим следующую задачу: как нужно изменить одноконтурную систему, чтобы во вновь полученной, уже не одноконтурной цепи можно было бы принципиально получить возможность неограниченно увеличивать коэффициент усиления, не нарушая устойчивости.

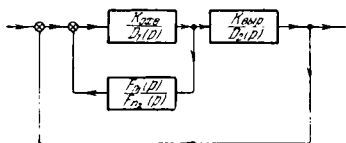


Рис. 52. Структурная схема со стабилизирующим устройством общего типа.

На рис. 52 представлена структурная схема системы автоматического регулирования. Часть схемы охватывается стабилизирующим устройством общего типа. Выясним, каким требованиям должно удо-

влетворять операторное уравнение стабилизирующего устройства и как его включить, чтобы система принципиально допускала неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости.

Обозначим оператор части системы, которая охватывается стабилизирующим устройством, через  $\frac{K_{\text{оxb}}}{D_1(p)}$ , части, не охваченной стабилизирующим устройством, через  $\frac{K_{\text{выр}}}{D_2(p)}$  и оператор стабилизирующего устройства через  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$ .

Передаточная функция замкнутой системы запишется:

$$K(p) = \frac{\frac{K_{\text{оxb}}}{D_1(p)} \cdot \frac{K_{\text{выр}}}{D_2(p)}}{1 + \frac{K_{\text{оxb}}}{D_1(p)} \cdot \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}} \cdot \frac{K_{\text{выр}}}{D_2(p)} \quad (2.50)$$

$$1 + \frac{\frac{K_{\text{оxb}}}{D_1(p)}}{1 + \frac{K_{\text{оxb}}}{D_1(p)} \cdot \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}} \cdot \frac{K_{\text{выр}}}{D_2(p)}$$

Коэффициенты полиномов  $D_1(p)$ ,  $D_2(p)$ ,  $F_{n_1}(p)$  и  $F_{n_2}(p)$  не зависят от  $K_{\text{выр}}$  и  $K_{\text{оxb}}$ .

Характеристическое уравнение получим, приравнявая знаменатель (2.50) нулю:

$$D_1(p) D_2(p) F_{n_2}(p) + K_{\text{охв}} F_{n_1}(p) D_2(p) + K_{\text{охв}} K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.51)$$

Здесь  $K_{\text{охв}}$  — коэффициент усиления звеньев, охваченных стабилизирующим устройством,  $K_{\text{выр}}$  — коэффициент усиления звеньев, не охваченных стабилизирующим устройством.

Общий коэффициент усиления получается как произведение коэффициентов  $K_{\text{охв}}$  и  $K_{\text{выр}}$ :

$$K_{\text{общ}} = K_{\text{охв}} \cdot K_{\text{выр}}.$$

Если  $K_{\text{охв}}$  сделать достаточно большим, то тем самым и общий коэффициент усиления будет сделан достаточно большим.

Поделим уравнение (2.51) на  $K_{\text{охв}}$  и обозначим  $\frac{1}{K_{\text{охв}}} = m$ . Тогда уравнение (2.51) запишется:

$$m D_1(p) D_2(p) F_{n_2}(p) + F_{n_1}(p) D_2(p) + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.52)$$

Система будет устойчивой при сколь угодно большом коэффициенте усиления, если уравнение (2.52) удовлетворяет условиям устойчивости при  $m \rightarrow 0$ .

Обозначим степень полинома  $D_1(p)$  через  $n$ , степень полинома  $D_2(p)$  — через  $\nu$ , а степени полиномов  $F_{n_1}(p)$  и  $F_{n_2}(p)$  — соответственно через  $n_1$  и  $n_2$ . Тогда, раскрывая полиномы, можно уравнение (2.52) представить в следующем виде:

$$m [B_0 p^{\nu+n+n_2} + B_1 p^{\nu+n+n_2-1} + \dots] + \\ + [A'_0 p^{n_1+\nu} + A'_1 p^{n_1+\nu-1} + \dots] + K_{\text{выр}} [C_0 p^{n_2} + C_1 p^{n_2-1} + \dots] = 0,$$

Обозначив  $\nu + n + n_2 = N_2$  и  $n_1 + \nu = N_1$ , получим:

$$m [B_0 p^{N_2} + B_1 p^{N_2-1} + \dots + B_{N_2}] + \\ + [A_0 p^{N_1} + A_1 p^{N_1-1} + \dots + A_{N_1}] = 0, \quad (2.53)$$

где

$$A_i = A'_i + K_{\text{выр}} \cdot C_{i-\nu-n_1-n_2}.$$

Интерес представляет случай, когда  $N_2 > N_1$ . При  $m \rightarrow 0$  уравнение (2.53) вырождается в уравнение

$$A_0 p^{N_1} + A_1 p^{N_1-1} + \dots + A_{N_1} = 0; \quad (2.54)$$

в дальнейшем будем называть его вырожденным уравнением.

Допустим, что коэффициенты вырожденного уравнения удовлетворяют условиям устойчивости; тогда при  $m \rightarrow 0$   $N_1$  корней уравнения (2.53) будут стремиться к  $N_1$  корням вырожденного уравнения и будут расположены слева от мнимой оси на плоскости корней. Оставшиеся  $N_2 - N_1$  корней будут при  $m \rightarrow 0$  стремиться к бесконечности. Найдем условия, при выполнении которых  $N_2 - N_1$  корней будут уходить в бесконечность слева от мнимой оси на плоскости корней.

В дополнение к требованиям устойчивости для вырожденного уравнения выполнение требований, при которых  $N_2 - N_1$  корней будут уходить в бесконечность слева от мнимой оси, обеспечит устойчивость системы при сколь угодно большом коэффициенте усиления.

Произведем в (2.53) следующую замену переменных:

$$p = \frac{q}{m^{\frac{1}{N_2 - N_1}}}. \quad (2.55)$$

Поделив уравнение (2.53) на  $m$  и подставив вместо  $p$  его значение из (2.55), получим:

$$B_0 \frac{q^{N_2}}{m^{\frac{N_2}{N_2 - N_1}}} + B_1 \frac{q^{N_2 - 1}}{m^{\frac{N_2 - 1}{N_2 - N_1}}} + B_2 \frac{q^{N_2 - 2}}{m^{\frac{N_2 - 2}{N_2 - N_1}}} + \dots \\ \dots + A_0 \frac{q^{N_1}}{m^{\frac{N_1}{N_2 - N_1}}} + A_1 \frac{q^{N_1 - 1}}{m^{\frac{N_1 - 1}{N_2 - N_1}}} + \dots = 0. \quad (2.56)$$

Умножая (2.56) на  $m^{\frac{N_2}{N_2 - N_1}}$  и полагая  $m \rightarrow 0$ , получим:

$$B_0 q^{N_2 - N_1} + A_0 = 0, \quad (2.57)$$

откуда

$$q = \sqrt[N_2 - N_1]{-\frac{A_0}{B_0}}.$$

а. Допустим, что  $N_2 - N_1 = 1$ . Тогда  $q = -\frac{A_0}{B_0}$ . Единственный корень, уходящий в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ , будет расположен слева от мнимой оси на плоскости корней, если

$$\frac{A_0}{B_0} > 0. \quad (2.58)$$

Таким образом, если вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости и дополнительно выполняется условие (2.58), то система будет оставаться устойчивой при любом сколь угодно большом коэффициенте усиления.

б. Допустим теперь, что  $N_2 - N_1 = 2$ . Тогда согласно (2.57) получим:

$$q = \sqrt{-\frac{A_0}{B_0}}.$$

Прежде всего ясно, что должно выполняться условие  $\frac{A_0}{B_0} > 0$ , ибо в противном случае один из корней уйдет при  $m \rightarrow 0$  в бесконечность справа от мнимой оси, и система будет неустойчивой. Но при  $\frac{A_0}{B_0} > 0$  получаем:

$$q = \sqrt{-\frac{A_0}{B_0}} = j \sqrt{\frac{A_0}{B_0}}.$$

т. е. два чисто мнимых корня, что соответствует условию, при котором система будет на границе устойчивости. Устойчивость или неустойчивость системы будет зависеть от того, с какой стороны от мнимой оси плоскости корней движутся корни к мнимой оси при  $m \rightarrow 0$ . Для того чтобы это установить и найти условия, при которых подход корней к мнимой оси происходит слева, учтем первое приближение от малой величины  $m$ .

Умножив (2.56) на  $m^{\frac{N_2}{N_2-N_1}}$  и положив равным нулю величины, начиная с  $m^2$ , получим:

$$B_0 q^{N_2} + B_1 m^{\frac{1}{2}} q^{N_2-1} + A_0 q^{N_1} + A_1 m^{\frac{1}{2}} q^{N_1-1} = 0. \quad (2.59)$$

Поделим уравнение (2.59) на  $q^{N_1-1}$ . Тогда, учитывая, что  $N_2 - N_1 = 2$ , получим:

$$B_0 q^3 + B_1 m^{\frac{1}{2}} q^2 + A_0 q + A_1 m^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.60)$$

Для того чтобы  $N_2 - N_1$  корней подходили к мнимой оси слева при  $m \rightarrow 0$ , необходимо, чтобы коэффициенты (2.60) удовлетворяли условиям устойчивости. Условия устойчивости для уравнения (2.60) имеют вид

$$B_1 m^{\frac{1}{2}} A_0 - A_1 m^{\frac{1}{2}} B_0 > 0$$

или

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0. \quad (2.61)$$

Таким образом, если вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости и дополнительно при  $N_2 - N_1 = 2$  выполняется условие (2.61), то система будет оставаться устойчивой при сколь угодно большом коэффициенте усиления.

**в.** Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$N_2 - N_1 \geq 3. \quad (2.62)$$

Из (2.57) имеем для случая  $N_2 - N_1 = 3$ :

$$q = \sqrt[3]{-\frac{A_0}{A_0}}.$$

На основании свойств двучленных уравнений ясно, что в этом случае хотя бы один корень будет расположен справа от мнимой оси, т. е. в этом случае хотя бы один из корней будет уходить в бесконечность справа от мнимой оси, и система будет неустойчивой.

Таким образом, первым условием устойчивости систем, допускающих большие коэффициенты усиления, является:

$$N_2 - N_1 \leq 2. \quad (2.63)$$



Подставляя вместо  $N_2$  и  $N_1$  их значения, получаем:

$$\nu + n + n_2 - \nu - n_1 \leq 2$$

или

$$n \leq 2 + n_1 - n_2. \quad (2.64)$$

Условие (2.64) определяет вид оператора стабилизирующего устройства в зависимости от динамических свойств части контура, которая им охватывается. Действительно, из условия (2.64) вытекает, что порядок уравнения, описывающего часть контура, охватываемую стабилизирующим устройством, не должен превышать больше чем на два разность порядков числителя и знаменателя оператора стабилизирующего устройства. Так, если контур охватывается стабилизирующим устройством с оператором  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , то порядок описывающего его уравнения должен быть не больше двух; для чистой производной  $\tau p$  — соответственно не больше трех и т. д.

Таким образом, доказано, что существуют структуры, которые допускают неограниченное повышение коэффициента усиления без нарушения их устойчивости. Для построения таких систем нужно, чтобы их структуры удовлетворяли полученным выше условиям.

## § 2.5. Рассмотрение отдельных случаев

### 1. Одноконтурная система, состоящая из апериодических звеньев, включенных последовательно

Включим стабилизирующее устройство общего типа вокруг  $n$  апериодических звеньев в схеме, состоящей из  $N$  таких звеньев,

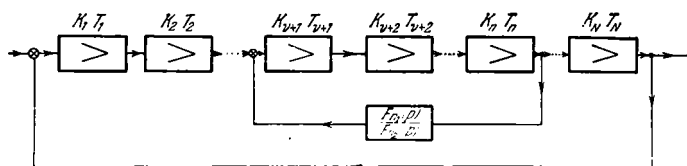


Рис. 53. Структурная схема системы из апериодических звеньев и стабилизирующего устройства общего типа.

включенных последовательно (рис. 53). Характеристическое уравнение в этом случае запишется:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) F_{n_2}(p) + K_{\text{о.с.в}} F_{n_1}(p) \prod_{i=1}^n (1 + T_i p) \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + K_{\text{о.с.в}} K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.65)$$

Поделив (2.65) на  $K_{\text{охв}}$  и полагая  $m = \frac{1}{K_{\text{охв}}}$  достаточно малым числом, получим:

$$m \prod_{i=1}^N (1 + T_i p) F_{n_2}(p) + F_{n_1}(p) \prod_{i=1}^{\nu} (1 + T_i p) \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.66)$$

Вырожденным уравнением здесь является:

$$F_{n_1}(p) \prod_{i=1}^{\nu} (1 + T_i p) \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.67)$$

Допустим, что параметры  $F_{n_1}(p)$ ,  $F_{n_2}(p)$  и  $K_{\text{выр}}$  выбраны так, что уравнение (2.67) удовлетворяет условиям устойчивости. Тогда согласно условию (2.63) имеем:

$$N_2 - N_1 = n_2 - n_1 + n - \nu \leq 2,$$

где

$$N_2 = N + n_2, \quad N_1 = N - n + n_1.$$

В данном случае максимальное количество аperiodических звеньев, которое может быть охвачено стабилизирующим устройством, определяется как

$$n - \nu = 2 + n_1 - n_2. \quad (2.68)$$

Нетрудно видеть, что в данном случае дополнительное условие  $\frac{A_0}{B_0} > 0$  всегда выполняется, а условие  $\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0$  может быть выполнено соответствующим выбором параметров системы.

## 2. Одноконтурная система, состоящая из $N$ последовательно включенных колебательных звеньев

Включим стабилизирующее устройство общего типа вокруг  $n$  колебательных звеньев. Полагая, что вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости, получим на основании (2.64) следующее дополнительное условие для рассматриваемого случая: максимальное количество колебательных устройств, которое может быть охвачено стабилизирующим звеном, равно

$$n = \frac{n_1 - n_2 + 2}{2}.$$

Деление на два обусловлено здесь тем, что каждое колебательное звено описывается уравнением второго порядка. Дополнительные условия (2.58) и (2.61) здесь всегда могут быть удовлетворены соответствующим выбором численных значений параметров.

### 3. Одноконтурная цепь, содержащая аperiодические, колебательные и $\nu$ интегрирующих звеньев

Рассмотрим два случая: а) когда для оператора стабилизирующего устройства  $n_1 = n_2$  и б) когда  $n_1 > n_2$ . В обоих случаях будем предполагать, что полином числителя оператора стабилизирующего устройства не имеет свободного члена, т. е.  $a_n = 0$ .

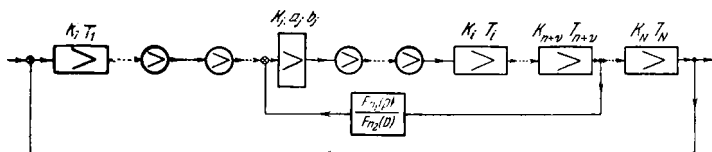


Рис. 54. Структурная схема системы из аperiодических, колебательных интегрирующих звеньев и стабилизирующего устройства общего типа.

а. Случай, когда  $n_1 = n_2$ . Включим стабилизирующее устройство так, чтобы, кроме некоторого числа аperiодических и колебательных звеньев, оно охватывало  $(\nu - \beta)$  интегрирующих звеньев. Характеристическое уравнение в этом случае (см. схему рис. 54) запишется в следующем виде:

$$D_1(p) D_2(p) p^\nu F_{n_2}(p) + K_{\text{оув}} [F_{n_1}(p) D_2(p) p^\beta + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p)]. \quad (2.69)$$

Здесь  $D_1(p)$  — собственный оператор аperiодических и колебательных звеньев, охваченных стабилизирующим устройством;  $D_2(p)$  — то же для звеньев, не охваченных стабилизирующим устройством. Если обозначить степени полиномов  $D_1(p)$  и  $D_2(p)$  соответственно через  $d_1$  и  $d_2$ , то в рассматриваемом случае будем иметь:

$$N_2 = d_1 + d_2 + \nu + n_2,$$

$$N_1 = d_2 + n_1 + \beta.$$

Рассмотрим прежде всего выполнение условия (2.63):

$$N_2 - N_1 \leq 2.$$

Следовательно,

$$d_1 + d_2 + \nu + n_2 - d_2 - n_1 - \beta \leq 2;$$

или, учитывая, что  $n_1 = n_2$ :

$$d_1 + \nu - \beta \leq 2. \quad (2.70)$$

Из условия (2.70) видно, что наличие в охватываемой части контура только одного колебательного звена делает систему неустойчивой при больших коэффициентах усиления. Условие (2.70) может быть выполнено, если в охватываемой части имеется только одно

апериодическое и одно интегрирующее звенья, либо только два интегрирующих звена при общем количестве интегрирующих звеньев, равном двум ( $\nu = 2$ ).

Для того чтобы получить окончательный ответ на вопрос о характере структуры системы при наличии в схеме интегрирующих звеньев, рассмотрим еще вырожденное уравнение.

Из (2.69) при  $\frac{1}{K_{\text{охв}}} = m \rightarrow 0$  получаем вырожденное уравнение в следующем виде:

$$F_{n_1}(p) D_2(p) p^3 + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.71)$$

Представим уравнение (2.71) в развернутом виде:

$$(c_0 p^{d_1} + c_1 p^{d_1-1} + \dots + c_{d_1})(a_0 p^{n_1} + a_1 p^{n_1-1} + \dots + a_{n_1-1} p) p^3 + K_{\text{выр}}(b_0 p^{n_2} + b_1 p^{n_2-1} + \dots + b_{n_2}) = 0. \quad (2.72)$$

Уравнение (2.72) будет соответствовать структурно устойчивой системе, если в нем не будет пропуска членов, т. е. если

$$\beta + 1 - n_2 \leq 1. \quad (2.73)$$

Из (2.73) определяется максимальное количество интегрирующих звеньев, которое может быть в неохваченной части системы, а именно

$$\beta \leq n_2. \quad (2.74)$$

Из проведенного исследования можно сделать следующие выводы о виде оператора стабилизирующего устройства и способе его включения в зависимости от количества интегрирующих звеньев системы при  $n_1 = n_2$ :

а) максимально допустимое количество интегрирующих звеньев, охватываемых стабилизирующим звеном, равно двум (при этом  $d_1 = 0$ );

б) максимальное количество интегрирующих звеньев в неохваченной части равно  $n_2 = n_1$ ;

в) общее допустимое количество интегрирующих звеньев в структуре с стабилизирующим устройством с передаточной функцией  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$  (где  $n_1 = n_2$ ), при котором система может оставаться устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления, равно  $n_2 + 2$ . Для стабилизирующего устройства с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  максимально допустимое количество интегрирующих звеньев, при котором можно получить структуру, допускающую неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости, равно трем.

б. Рассмотрим теперь случай, когда в операторе стабилизирующего звена  $n_1 > n_2$ . Характеристическое уравнение имеет такой же

вид, как и в случае а, а именно

$$D_1(p) D_2(p) p^\beta F_{n_2}(p) + K_{\text{охв}} [F_{n_1}(p) D_2(p) p^\beta + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p)] = 0. \quad (2.75)$$

Условие (2.64) будет выполняться при охвате любого числа звеньев, в том числе и интегрирующих. Необходимо только соответствующим образом выбрать соотношение степеней  $n_1$  и  $n_2$ . Рассмотрим теперь вырожденное уравнение при  $n_1 > n_2$ . Для того чтобы не было пропуска членов в вырожденном уравнении, необходимо, чтобы выполнялось то же условие, что и для случая а, а именно  $\beta + 1 - n_2 \leq 1$ , т. е. количество интегрирующих звеньев в неохваченной части и в этом случае не должно быть больше  $n_2$ . Так, для случая введения чистой производной в неохваченной части не должно быть ни одного интегрирующего звена; для стабилизирующего устройства с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  в неохваченной части может быть только одно интегрирующее звено (случай а) и т. д.

#### 4. Одноконтурная цепь, состоящая из всех типов элементарных звеньев

Кроме рассмотренных выше, представляет интерес случай, когда, кроме апериодических, колебательных и интегрирующих, в системе имеются неустойчивые звенья с собственными операторами  $(Tp - 1)$  и  $(ap^2 + bp - 1)$ .

Для удобства обозначим оператор части контура, охватываемой стабилизирующим устройством, через  $D_1(p)$  и неохватываемой части — через  $D_2(p)$ ; при этом будем считать, что операторы неустойчивых звеньев входят как в  $D_1(p)$ , так и в  $D_2(p)$ . При введении в одноконтурную схему стабилизирующего устройства с оператором  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$ , охватывающим часть контура с оператором  $D_1(p)$ , характеристическое уравнение запишется в следующей форме:

$$D_1(p) D_2(p) F_{n_2}(p) + K_{\text{охв}} [F_{n_1}(p) D_2(p) + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p)] = 0. \quad (2.76)$$

Рассмотрим вырожденное уравнение и выясним, чем ограничивается устойчивость соответствующей ему системы.

Полагая  $K_{\text{охв}} \rightarrow \infty$ , получим вырожденное уравнение в следующем виде:

$$F_{n_1}(p) D_2(p) + K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (2.77)$$

Так как  $D_2(p)$  содержит операторы неустойчивых звеньев, то прежде всего необходимо установить условия структурной устойчивости. Для этой цели может быть использована теорема, доказанная

М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером \*), которая состоит в следующем.

Теорема. Для того чтобы система с характеристическим уравнением

$$D(p) + Ap^2 + Bp + C = 0. \quad (2.78)$$

где  $C > 0$ , а полином  $D(p)$  не содержит множителей вида  $ap^2 + bp + c$ , у которых одновременно  $a > 0$ ,  $b \leq 0$ ,  $c < 0$ , была структурно устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из равенств

$$\left. \begin{array}{l} \sigma + \tau \quad B > 0 \quad B = 0 \quad B < 0 \\ A > 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad n_1 > 4\rho_1 - 3, \\ 1 \quad n_1 > 4\rho_1 - 2, \\ 2 \quad n_1 > 4\rho_1 - 3, \\ 3 \quad n_1 > 4\rho_1 - 2, \end{array} \right. \\ A = 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad n_1 > 4\rho_1 - 3, \quad n_1 > 4\rho_1, \quad n_1 > 4\rho_1 - 1, \\ 1 \quad n_1 > 4\rho_1, \quad n_1 > 4\rho_1, \quad n_1 > 4\rho_1 - 1, \\ 2 \quad n_1 > 4\rho_1 - 3, \end{array} \right. \\ A < 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad n_1 > 4\rho_1 - 4, \quad n_1 > 4\rho_1, \quad n_1 > 4\rho_1 - 1, \\ 1 \quad n_1 > 4\rho_1, \quad n_1 > 4\rho_1, \quad n_1 > 4\rho_1 - 1, \\ 2 \quad n_1 > 4\rho_1 - 4 \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (2.79)$$

и чтобы сумма  $\sigma + \tau_1$  имела лишь те значения, для которых в (2.79) указаны неравенства.

Здесь  $n_1$  — степень полинома  $D(p)$ ,  $\tau$  — число нулевых корней полинома  $D(p)$ ,  $\tau_1$  — минимально возможное число положительных действительных корней  $D(p)$ ,  $\rho_1$  — количество неустойчивых звеньев.

Уравнение (2.77) может быть приведено к уравнению (2.78), если  $F_{n_1}(p)$  будет полиномом Гурвица. Как указывалось выше,

$$F_{n_1}(p) = a_0 p^{n_1} + a_1 p^{n_1-1} + \dots + a_{n_1-1} p$$

и

$$F_{n_2}(p) = b_0 p^{n_2} + b_1 p^{n_2-1} + \dots + b_{n_2-1} p + b_{n_2}.$$

Мы потребуем, чтобы уравнение  $F_{n_1}(p) = 0$  удовлетворяло условиям Гурвица и чтобы  $n_2 \leq 2$ .

При этих условиях  $F_{n_1}(p) \cdot D_2(p) = D(p)$  и  $K_{\text{выр}} F_{n_2}(p) = Ap^2 + Bp + C$ . Нулевой корень  $F_{n_1}(p) = 0$  полагаем корнем  $D(p) = 0$ . В зависимости от вида знаменателя оператора стабилизирующего устройства используем соответствующий столбик из соотношения

\*) Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., О структурных условиях устойчивости при введении воздействия по производной, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. II, 1955.

(2.79). Таким образом решается вопрос об устойчивости вырожденного уравнения.

В качестве примера структурно устойчивой системы, соответствующей вырожденному уравнению, может служить следующий случай:

$$\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} = \frac{p^2(b_1p + c_1)}{ap^2 + bp + c},$$

$$D_2 = (b_2p + c_2)(b_3p - c_3)(a_4p^2 - b_4p + c_4),$$

$$K_{\text{выр}}(ap^2 + bp + c) = Ap^2 + Bp + C.$$

Вырожденное уравнение в этом случае запишется:

$$(b_2p + c_2)(b_3p - c_3)(a_4p^2 - b_4p + c_4)p^2(b_1p + c_1) + Ap^2 + Bp + C = 0$$

или

$$D(p) + Ap^2 + Bp + C = 0.$$

Степень  $D(p)$  в данном случае равна  $n_1 = 7$ , а  $\rho_1 = 2$ . Так как  $A > 0$ ,  $B > 0$  и  $\tau_1 + \sigma = 3$ , то  $n_1 > 4\rho_1 - 2 = 8 - 2 = 6$ , что удовлетворяет условиям теоремы.

Вернемся теперь к полному характеристическому уравнению (2.76) и установим количество допустимых неустойчивых звеньев в охватываемой части контура.

Прежде всего должно выполняться условие (2.64).

Количество звеньев, которое может охватываться стабилизирующим устройством, зависит от разности степеней операторов числителя и знаменателя передаточной функции стабилизирующего устройства.

С точки зрения выполнения условий (2.64) максимальное количество неустойчивых звеньев в охватываемой части контура будет в том случае, если все охватываемые звенья будут неустойчивыми. При этом, если  $N_2 - N_1 = 1$ , то дополнительное условие  $\frac{A_0}{B_0} > 0$  будет всегда выполняться, так как старшие члены полиномов  $F_{n_1}(p)D_1(p)D_2(p)$  и  $F_{n_1}(p)D_2(p) + K_{\text{выр}}F_{n_2}(p)$  всегда будут положительными. Если  $N_2 - N_1 = 2$ , то выполнение дополнительного условия  $\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0$  существенно зависит от численных значений коэффициентов, входящих в уравнения неустойчивых звеньев. Как правило, эти условия могут быть выполнены, и в этом случае система может быть устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления.

## § 2.6. Пример системы, устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления. Автоматическое регулирование скорости электрического двигателя

В качестве объекта регулирования рассматривается двигатель постоянного тока с независимым возбуждением мощностью 1,5 кВт и напряжением 120 в. Нагрузка двигателя не зависит от скорости вращения. По условиям работы скорость двигателя должна поддержи-

ваться постоянной с точностью, не меньшей  $0,12\%$ . Кроме того, необходимо предусмотреть возможность изменения заданного значения скорости вращения в широких пределах.

### 1. Выбор основных элементов системы регулирования

Для того чтобы обеспечить возможность изменения заданного значения скорости двигателя в широких пределах, регулирование двигателя осуществляем воздействием на напряжение якоря при постоянном потоке возбуждения.

Источником регулируемого напряжения для питания двигателя выбираем электромашинный усилитель (ЭМУ). Измерительным элементом системы служит тахогенератор, электродвижущая сила которого сравнивается с эталонным напряжением. Для того чтобы иметь возможность менять коэффициент усиления в широких пределах, в том числе и осуществлять коэффициенты усиления значительной величины, между измерительным элементом и ЭМУ включается электронный усилитель  $У$ .

Получаем систему регулирования, состоящую из основных элементов (рис. 55), которая работает следующим образом. Разность между э. д. с.  $e_T$  тахогенератора и эталонным напряжением  $U_{эТ}$  подается на вход электронного усилителя. Обмотка возбуждения ЭМУ питается от выходного напряжения усилителя.

В установившемся режиме разность  $U_{эТ} - e_T$  создает такое напряжение на входе ЭМУ, которое обеспечивает заданное значение скорости вращения двигателя.

Допустим, что в результате изменения нагрузки скорость вращения двигателя изменилась; тогда меняются  $e_T$  тахогенератора и соответственно разность  $U_{эТ} - e_T$ . Последнее вызовет необходимое изменение напряжения на ЭМУ, что обеспечивает надлежащее изменение скорости вращения двигателя.

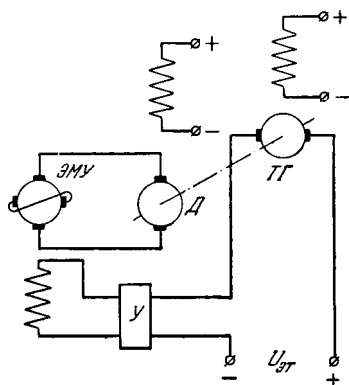


Рис. 55. Принципиальная схема регулирования скорости вращения двигателя.

### 2. Уравнения отдельных элементов и структурная схема системы регулирования

а. Электронный усилитель полагаем безинерционным. Уравнение его имеет вид

$$U_y = K_y U_{вх.у}. \quad (2.80)$$



На структурной схеме (рис. 56) электронный усилитель обозначен пропорциональным звеном с коэффициентом усиления  $K_y$ .

6. Рассмотрим уравнение и структурную схему электромашинного усилителя. На рис. 57 представлена схема электромашинного усилителя с одной обмоткой возбуждения (управления), обозначенной буквой  $W_1$  (подробно о принципе действия ЭМУ читатель может прочесть в соответствующей специальной литературе \*).

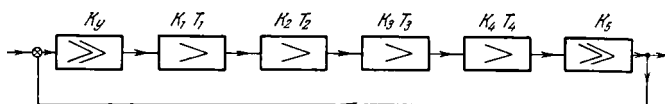


Рис. 56. Структурная схема системы рис. 55.

Обозначим омические сопротивления и индуктивности обмотки  $W_1$  и короткозамкнутой цепи ЭМУ соответственно через  $R_1$ ,  $L_1$  и  $R_2$ ,  $L_2$ . Полагая, что ЭМУ работает на линейной части характеристики намагничивания, получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее цепь ЭМУ:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = U_y. \quad (2.81)$$

Поделив уравнение (2.81) на  $R_1$  и обозначив через  $T_1 = \frac{L_1}{R_1}$  постоянную времени обмотки возбуждения, получаем:

$$T_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{1}{R_1} U_y. \quad (2.82)$$

Рис. 57. К выяснению принципов действия электромашинного усилителя.

Электродвижущая сила  $\mathcal{E}_2$  в короткозамкнутой цепи будет прямо пропорциональной току  $i_1$ :

$$\mathcal{E}_2 = K'_1 i_1. \quad (2.83)$$

Уравнение электрического равновесия в короткозамкнутой цепи запишется:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = \mathcal{E}_2$$

или

$$T_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 = \frac{1}{R_2} \mathcal{E}_2, \quad (2.84)$$

где  $T_2 = \frac{L_2}{R_2}$  — постоянная времени короткозамкнутой цепи.

\*) См., например, Мееров М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956.

Выходное напряжение ЭМУ  $U_{ЭМУ}$  будет прямо пропорционально току  $i_2$  короткозамкнутой цепи

$$U_{ЭМУ} = K'_2 i_2. \quad (2.85)$$

Исключая из (2.82) — (2.85)  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $\mathcal{E}_2$  и обозначая операцию дифференцирования оператором  $p$ , получим операторное выражение уравнения ЭМУ в следующем виде:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) U_{ЭМУ} = \frac{K'_1 K'_2}{R_1 R_2} U_{\gamma}. \quad (2.86)$$

Обозначив через  $K_1 = \frac{K'_1}{R_1}$  и  $K_2 = \frac{K'_2}{R_2}$  коэффициенты усиления двух каскадов ЭМУ, получим:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) U_{ЭМУ} = K_1 K_2 U_{\gamma} \quad (2.87)$$

или

$$\frac{U_{ЭМУ}}{U_{\gamma}} = \frac{K_1 K_2}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

что выражает передаточную функцию двух последовательно включенных апериодических звеньев.

**в.** Найдем уравнение двигателя постоянного тока с независимым возбуждением при регулировании его скорости воздействием на напряжение якоря при постоянном токе возбуждения.

Уравнение механического равновесия запишется:

$$\frac{GD^2}{375} \cdot \frac{dn}{dt} = C_m \cdot \Phi \cdot I, \quad (2.88)$$

где  $GD^2$  — маховой момент двигателя,  $\Phi$  — поток возбуждения,  $C_m$  — постоянная двигателя,  $I$  — ток якоря двигателя,  $n$  — число оборотов. Уравнение электрического равновесия в цепи якоря запишется:

$$U_{ЭМУ} = L_{\gamma} \frac{dI}{dt} + R_{\gamma} I + C_e \Phi n, \quad (2.89)$$

где  $C_e \Phi n$  — противо-э. д. с. двигателя. Введем следующие обозначения:

$$\frac{GD^2}{375} \cdot \frac{R_{\gamma}}{C_e C_m \Phi^2} = T_m \text{ — электромеханическая постоянная времени двигателя,}$$

$$\frac{L_{\gamma}}{R_{\gamma}} = T_{\gamma} \text{ — постоянная времени якоря,}$$

$$\frac{1}{C_e \Phi} = K \text{ — коэффициент усиления двигателя.}$$

Исключая из (2.88) и (2.89)  $I$  и учитывая введенные обозначения, получим после элементарных выкладок следующее уравнение двигателя в операторной форме:

$$[T_m T_{\gamma} p^2 + T_m p + 1] n = K U_{ЭМУ}. \quad (2.90)$$

В зависимости от значений постоянных времени  $T_m$  и  $T_y$  двигатель можно представить на структурной схеме одним колебательным звеном или двумя аperiodическими звеньями.

Для рассматриваемого типа двигателя  $T_m = 0,5 \text{ сек}$ ,  $T_y = 0,01 \text{ сек}$ ,  $K = 1$ . Легко понять, что в данном случае двигатель представляется двумя последовательно включенными аperiodическими звеньями. Действительно, корнями левой части уравнения (2.90) будут:

$$\alpha_1 \cong -2 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \cong -98.$$

Обозначим через  $T_3$  и  $T_4$  постоянные времени аperiodических звеньев, заменяющих на структурной схеме регулируемый двигатель. Тогда найдем:

$$T_3 = -\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ сек}, \quad T_4 = -\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{98} \cong 0,01 \text{ сек}.$$

Передаточная функция двигателя запишется:

$$\frac{n}{U_{\text{ЭМУ}}} = \frac{K}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)} = \frac{K_3 K_4}{(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)}. \quad (2.91)$$

Связь между скоростью и  $e_T$  тахогенератора имеет вид

$$e_T = K_5 n.$$

На рис. 56 представлена структурная схема системы из основных элементов для рассматриваемого случая.

Передаточная функция замкнутой системы (см. рис. 56) запишется как

$$\frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_y}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_y}, \quad (2.92)$$

и характеристическое уравнение будет иметь вид

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_y = 0. \quad (2.93)$$

По условиям точности общий коэффициент усиления системы должен иметь следующую величину:

$$K_{\text{общ}} \cong \frac{1}{0,0012} \cong 800.$$

Параметры ЭМУ имеют значения

$$T_1 = 0,1 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,1 \text{ сек}, \quad K_1 K_2 = 10.$$

Подставляя в уравнение (2.93) значения постоянных времени и полагая общий коэффициент усиления  $K_{\text{общ}} = 800$ , имеем:

$$0,00005 p^4 + 0,0061 p^3 + 0,117 p^2 + 0,71 p + 801 = 0. \quad (2.94)$$

По условиям Раута — Гурвица должно быть

$$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0.$$

Подставляя значения коэффициентов из (2.94), получаем:

$$0,0061 \cdot 0,117 \cdot 0,71 - (0,0061)^2 800 - 0,00005 (0,71)^2 = -0,02938.$$

Следовательно, система при таком значении коэффициента усиления неустойчива.

Введем в систему стабилизирующее устройство с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  таким образом, чтобы полученная система допускала неограниченное увеличение коэффициента усиления.

Согласно ранее полученным результатам стабилизирующее устройство рассматриваемого типа ( $n_1 = n_2$ ) можно включить так, чтобы оно охватывало одно или два аperiодических звена. Практически стабилизирующее устройство, которое в данном случае технически осуществляется как цепочка  $RC$ , введено в систему так, как это показано на рис. 58 и на структурной схеме рис. 59.

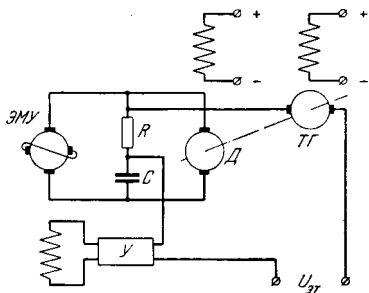


Рис. 58. Система рис. 55 с введенным стабилизирующим устройством.

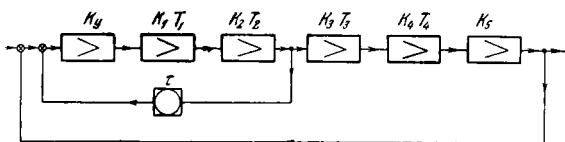


Рис. 59. Структурная схема системы рис. 58.

Передаточная функция замкнутой системы согласно рис. 59 запишется, как

$$K(p) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_Y (1 + \tau p)}{\prod_{i=1}^4 (1 + T_i p) (1 + \tau p) + K_1 K_2 K_Y \tau p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_Y (1 + \tau p)}. \quad (2.95)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_{i=1}^4 (1 + T_i p) (1 + \tau p) + K_1 K_2 K_Y [\tau p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_3 K_4 K_5 (1 + \tau p)] = 0. \quad (2.96)$$

Увеличение общего коэффициента усиления будем осуществлять за счет увеличения коэффициента усиления электронного усилителя.

Поделим (2.96) на  $K_1 K_2 K_y$  и обозначим:

$$m = \frac{1}{K_1 K_2 K_y}.$$

Тогда (2.96) запишется как

$$m \prod_{i=1}^4 (1 + T_i p)(1 + \tau p) + \tau p(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + \\ + K_3 K_4 K_5 (1 + \tau p) = 0. \quad (2.97)$$

Увеличение  $K_1 K_2 K_y$  до бесконечности эквивалентно уменьшению  $m$  до нуля. Следовательно, устойчивость рассматриваемой системы при неограниченном увеличении коэффициента усиления эквивалентна устойчивости системы с характеристическим уравнением (2.97) при  $m \rightarrow 0$ .

Как это видно из уравнения (2.97),  $N_2 = 5$  и  $N_1 = 3$ . Следовательно,  $N_2 - N_1 = 2$ .

В этом случае для устойчивости при  $m \rightarrow 0$  необходимо и достаточно, чтобы вырожденное уравнение удовлетворяло условиям устойчивости, и, кроме того, должно выполняться условие

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0. \quad (2.98)$$

Вырожденное уравнение запишется, как

$$\tau p(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + K_3 K_4 K_5 (1 + \tau p) = 0. \quad (2.99)$$

Выберем постоянную времени стабилизирующего устройства так, чтобы уравнение (2.98) удовлетворяло условиям Раута — Гурвица при любых  $K_3 K_4 K_5$ . Это будет иметь место, если

$$\tau > \frac{T_3 T_4}{T_3 + T_4} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,5 + 0,01} = \frac{0,005}{0,51} \cong 0,01 \text{ сек}, \quad (2.100)$$

в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой (2.100) в (2.99) и исследованием полученного уравнения на условия Раута — Гурвица.

Таким образом, вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости.

Условия (2.98) также выполняются. Действительно,

$$B_0 = T_1 T_2 T_3 T_4 \tau,$$

$$B_1 = T_1 T_2 T_3 T_4 + T_1 T_2 T_4 \tau + T_1 T_3 T_4 \tau + T_2 T_3 T_4 \tau + T_1 T_2 T_3 \tau,$$

$$A_0 = T_3 T_4 \tau,$$

$$A_1 = \tau(T_3 + T_4);$$

следовательно,

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{\tau} > 0.$$

Остается выбрать коэффициенты усиления  $K_3K_4K_5$  и  $K_1K_2K_7$ . Известно, что  $K_7$  может быть выбран сколь угодно большим, и система останется устойчивой. Поэтому  $K_7$  и  $K_5$  выбирают так, чтобы наряду с устойчивостью удовлетворялись и необходимые условия качества. Выберем  $K_7 = 20$ . Тогда  $K_1K_2K_7 = 20 \cdot 10 = 200$ . Общий коэффициент усиления будет  $K_{общ} = 200K_3K_4K_5$ .

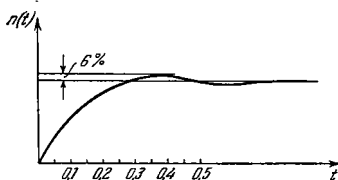
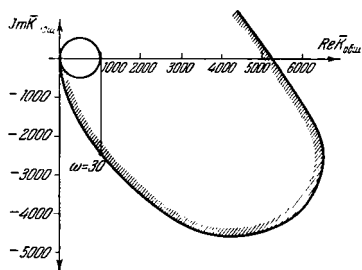
Рис. 60. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{общ}$ .

Рис. 61. Переходный процесс в системе рис. 59.

Построим кривую  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления. Из (2.96) можно найти уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения в следующем виде:

$$\bar{K}_{общ} = - \frac{\prod_{i=1}^4 (1 + T_i j\omega) (1 + \tau j\omega) + 200\tau j\omega (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega)}{1 + \tau j\omega}. \quad (2.101)$$

Учитывая ранее приведенные данные постоянных времени  $T_i$  и выбирая  $\tau = 0,2$  сек, строим кривую, которая приведена на рис. 60.

Если по условиям работы недопустимы большие перерегулирования и требуется достаточно большое быстродействие, то, как это видно из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения, наилучший процесс получается при общем коэффициенте усиления  $K_{общ} = 1000$ . Время регулирования не будет превышать  $\approx 0,5$  сек.

На рис. 61 приведена кривая переходного режима. Из этого рисунка видно, что процесс регулирования заканчивается через 0,4 сек и перерегулирование не превышает 6%.

# ГЛАВА III

## СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ

### § 3.1. Введение $n$ стабилизирующих устройств в одноконтурную систему. Вариант № 1

Рассмотрим систему автоматического регулирования, блок-схема которой представлена на рис. 62. В этой схеме  $n$  элементов с соб-

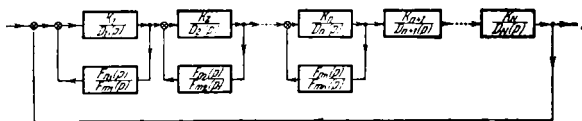


Рис. 62. Система со стабилизирующими устройствами общего типа; вариант включения № 1.

ственными операторами  $D_1(p)$ ,  $D_2(p)$  ...  $D_n(p)$  охватываются стабилизирующими устройствами с операторами

$$\frac{F_{n_1}(p)}{F_{m_1}(p)}, \quad \frac{F_{n_2}(p)}{F_{m_2}(p)}, \quad \dots, \quad \frac{F_{n_n}(p)}{F_{m_n}(p)}.$$

Уравнение отдельного участка, состоящего из элемента с передаточной функцией  $\frac{K_i}{D_i(p)}$  и охватывающей его цепи обратной связи с передаточной функцией  $\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}$ , находится следующим образом:

$$D_i(p) x_i = K_i \left[ x_{i-1} - \frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)} x_i \right]$$

или

$$[D_i(p) F_{m_i}(p) + K_i F_{n_i}(p)] x_i = K_i F_{m_i}(p) x_{i-1}. \quad (3.1)$$

Характеристическое уравнение для рассматриваемой системы запишется в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n [D_i(p) F_{m_i}(p) + K_i F_{n_i}(p)] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{\rho=1}^N K_{\rho} \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p) = 0, \quad (3.2)$$

где  $D_j(p)$  — собственные операторы элементов, не охваченных стабилизирующими устройствами.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты усиления участков, охватываемых стабилизирующими устройствами, можно менять в широких пределах, в том числе и неограниченно увеличивать. Для общности будем считать, что между коэффициентами  $K_i$  отдельных участков, охваченных стабилизирующими устройствами, существует (или может быть обеспечено) следующее соотношение:

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= \eta_2 K_1, \\ K_3 &= \eta_3 K_1, \\ &\dots \dots \dots \\ K_n &= \eta_n K_1, \\ K_1 &= K, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где  $\eta_i$  — постоянные числа.

Учитывая (3.3) и произведя умножение в уравнении (3.2), представим после элементарных выкладок характеристическое уравнение в следующем виде (для случая  $\eta_i = 1$ ):

$$F_{N_0}(p) + K F_{N_1}(p) + K^2 F_{N_2}(p) + K^3 F_{N_3}(p) + \dots + K^n F_{N_n}(p) = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{N_0}(p) &= \prod_{i=1}^N D_i(p) \prod_{j=1}^n F_{m_j}(p), \\ F_{N_1}(p) &= \sum_{i=1}^n F_{n_i}(p) \prod_{j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N} D_j(p) \cdot \prod_{j=2}^n F_{m_j}(p), \\ F_{N_2}(p) &= \sum_{i, j=1}^n F_{n_i}(p) F_{n_j}(p) \times \\ &\times \prod_{\rho=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, N} D_{\rho}(p) \prod_{\epsilon=1, 3, \dots, n} F_{m_{\epsilon}}(p) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

и т. д.

Индексы  $N_0, N_1, \dots, N_n$  при  $F$  обозначают степени соответствующих полиномов.



Поделим (3.4) на  $K^n$  и обозначим  $\frac{1}{K^i} = m^i$ ; тогда уравнение (3.4) примет вид

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots + m F_{N_{n-1}}(p) + F_{N_n}(p) = 0. \quad (3.5)$$

Система с характеристическим уравнением (3.5) будет устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления, если уравнение (3.5) удовлетворяет условиям устойчивости при  $m \rightarrow 0$ . Обозначим степень полинома  $F_{N_n}(p)$  через  $N_n$ , а общее количество корней уравнения (3.5) — через  $N_0$ .

Предположим, что в уравнении (3.5)  $m \rightarrow 0$ ; тогда  $N_n$  корней его из общего количества  $N_0$  будут стремиться к корням уравнения

$$F_{N_n}(p) = 0, \quad (3.6)$$

которое будем называть вырожденным уравнением. Остальные  $N_0 - N_n$  корней при  $m \rightarrow 0$  будут уходить в бесконечность.

Если вырожденное уравнение (3.6) удовлетворяет условиям устойчивости, то устойчивость полного уравнения (3.5) будет зависеть от расположения  $N_0 - N_n$  корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ .

Рассмотрим следующие случаи.

а. Допустим, что степени рядом стоящих полиномов удовлетворяют условию

$$N_1 = N_0 - 1, \quad N_2 = N_0 - 2, \quad \dots, \quad N_n = N_0 - n. \quad (3.7)$$

Такое убывание степеней полиномов будет иметь место при условии, что степени операторов стабилизирующих устройств и собственных операторов элементов, охватываемых этими стабилизирующими устройствами, будут удовлетворять следующему требованию:

$$i + m_i - n_i = 1, \quad (3.8)$$

где  $i$  — степень собственного оператора  $D_i(p)$ ,  $n_i$  — степень числителя, а  $m_i$  — степень знаменателя оператора  $\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}$ .

Записав уравнение (3.5) в развернутом виде и поделив его на  $m^n$ , получаем:

$$\begin{aligned} a_{00}p^{N_0} + a_{01}p^{N_0-1} + a_{02}p^{N_0-2} + \dots + \frac{1}{m} [a_{10}p^{N_0-1} + a_{11}p^{N_0-2} + \dots] + \\ + \frac{1}{m^2} [a_{20}p^{N_0-2} + a_{21}p^{N_0-3} + \dots] + \dots \\ \dots + \frac{1}{m^n} [a_{n0}p^{N_0-n} + a_{n1}p^{N_0-n-1} + \dots + a_{n, N_0-n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Вырожденное уравнение в данном случае имеет вид

$$a_{n0}p^{N_0-n} + a_{n1}p^{N_0-n-1} + \dots + a_{n, N_0-n} = 0. \quad (3.10)$$

Предположим, что (3.10) удовлетворяет условиям устойчивости; тогда  $N_0$  —  $n$  корней уравнения (3.9) при  $m \rightarrow 0$  стремятся к  $N_0$  —  $n$  корням (3.10), расположенным по принятому условию слева от мнимой оси.

Найдем уравнение, определяющее расположение  $n$  корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ . Для этой цели введем следующее преобразование. Пусть

$$p = \frac{q}{m}. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.9), умножая затем полученное уравнение на  $m^{N_0}$  и переходя к пределу (устремляя  $m \rightarrow 0$ ), получим после деления на  $q^{N_0-n}$  следующее уравнение:

$$a_{00}q^n + a_{10}q^{n-1} + a_{20}q^{n-2} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (3.12)$$

Будем в дальнейшем называть уравнение (3.12) вспомогательным уравнением первого рода. Оно составляется из коэффициентов старших членов полиномов уравнения (3.9) и определяет расположение  $n$  корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ . Эти корни будут расположены слева от мнимой оси на плоскости корней, если коэффициенты уравнения (3.12) удовлетворяют условиям устойчивости.

Таким образом, для того чтобы система с  $n$  стабилизирующими устройствами, включенными так, что удовлетворяется условие (3.8), оставалась устойчивой при любом сколь угодно большом коэффициенте усиления, нужно, чтобы вырожденное и вспомогательное уравнения первого рода, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости.

6. Допустим теперь, что

$$N_1 = N_0 - 2, \quad N_2 = N_0 - 4, \quad N_3 = N_0 - 6, \quad \dots, \quad N_n = N_0 - 2n. \quad (3.13)$$

Такое убывание степеней полиномов будет иметь место при условии, когда операторы стабилизирующих устройств и собственные операторы элементов, ими охватываемых, будут удовлетворять условию

$$i + m_i - n_i = 2. \quad (3.14)$$

При этом условии уравнение (3.9) запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} & a_{00}p^{N_0} + a_{01}p^{N_0-1} + \dots + \frac{1}{m} [a_{10}p^{N_0-2} + a_{11}p^{N_0-3} + \dots] + \\ & + \frac{1}{m^2} [a_{20}p^{N_0-4} + a_{21}p^{N_0-5} + \dots] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{m^n} [a_{n0}p^{N_0-2n} + a_{n1}p^{N_0-2n-1} + \dots + a_{nn}p^{N_0-2n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Вырожденное уравнение в данном случае имеет вид

$$a_{n0}p^{N_0-2n} + a_{n1}p^{N_0-2n-1} + a_{n2}p^{N_0-2n-2} + \dots + a_{nn} = 0. \quad (3.16)$$

Полагая, что вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости, выясним расположение  $2n$  корней уравнения (3.15), уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ .

Произведем следующую замену переменных. Пусть

$$p = \frac{q}{m^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.15), умножая затем полученное уравнение на  $m^{\frac{N_0}{2}}$  и переходя к пределу (устремляя  $m \rightarrow 0$ ), получим после деления на  $q^{N_0-2n}$  вспомогательное уравнение в следующей форме:

$$a_{00}q^{2n} + a_{10}q^{2n-2} + a_{20}q^{2n-4} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (3.18)$$

Произведем в (3.18) замену переменных. Пусть  $x = q^2$ . Тогда, подставляя вместо  $q^2$  его значение, выраженное через  $x$ , получим:

$$a_{00}x^n + a_{10}x^{n-1} + a_{20}x^{n-2} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (3.19)$$

С точки зрения решаемой задачи об устойчивости для вспомогательного уравнения (3.18) представляет интерес случай, когда корни уравнения (3.19) будут вещественными и отрицательными, ибо другие возможные случаи соответствуют неустойчивой системе. Если потребовать, чтобы корни уравнения (3.19) были вещественными и отрицательными, то корни уравнения (3.18) будут чисто мнимыми. Устойчивость или неустойчивость будет зависеть от того, где расположены корни (3.18), когда  $m$  мало, но не равно нулю. Если отбросить  $m$  в степени выше первой, то с помощью преобразования (3.17) и простых выкладок можно привести вспомогательное уравнение к следующему виду:

$$a_{00}q^{2n} + a_{01}mq^{2n-1} + a_{10}q^{2n-2} + a_{11}mq^{2n-3} + \dots + a_{n0} + \frac{a_{n1}}{q}m = 0.$$

Умножив это уравнение на  $q$ , получим:

$$a_{00}q^{2n+1} + ma_{01}q^{2n} + a_{10}q^{2n-1} + ma_{11}q^{2n-2} + \dots + ma_{n1} = 0. \quad (3.20)$$

В отличие от вспомогательного уравнения, рассмотренного в пункте а в данном случае вспомогательное уравнение строится из первых двух старших членов полиномов уравнения (3.15).

Для того чтобы отличать его от вспомогательного уравнения, рассмотренного в пункте а, будем называть его вспомогательным уравнением второго рода.

Корни, уходящие в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ , будут расположены слева от мнимой оси, если вспомогательное уравнение второго рода будет удовлетворять условиям устойчивости. Составим определитель Гурвица и убедимся, что условия устойчивости не зависят от величины  $m$ .

Действительно, определитель Гурвица имеет вид

$$\begin{vmatrix} ma_{01} & ma_{11} & ma_{21} & \dots & ma_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{n0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ma_{01} & ma_{11} & \dots & \dots & ma_{n1} & \dots & 0 \\ 0 & a_{00} & a_{10} & \dots & \dots & a_{n0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & ma_{n1} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.21)$$

Из (3.21) видно, что  $m$  можно вынести за знак определителя. Следовательно,  $m$  будет менять масштаб неравенства, но не будет менять его знака. Таким образом, доказано следующее положение.

Если учет каждой последующей степени  $m$  повышает порядок уравнения на два, то система будет устойчивой, если вырожденное уравнение, получаемое из общего уравнения приравниванием в нем  $m = 0$ , удовлетворяет условиям устойчивости и этим условиям удовлетворяет вспомогательное уравнение второго рода.

в. Рассмотрим, наконец, случай, когда учет малого параметра повышает порядок общего уравнения на три и больше.

Такое убывание степеней полиномов будет иметь место при условии, когда степени операторов стабилизирующих устройств и степени собственных операторов участков, ими охватываемых, будут удовлетворять условию

$$i + m_i - n_i \geq 3. \quad (3.22)$$

Для определенности будем считать:

$$i + m_i - n_i = 3.$$

По аналогии с тем, что было сделано в пункте б, воспользовавшись преобразованием

$$p = \frac{q}{m^{\frac{1}{3}}},$$

получим вспомогательное уравнение в следующей форме:

$$a_{00}q^{3n} + a_{10}q^{3n-3} + a_{20}q^{3n-6} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (3.23)$$

Если ввести замену

$$y = q^3, \quad (3.24)$$

то уравнение (3.23) запишется:

$$a_{00}y^n + a_{10}y^{n-1} + a_{20}y^{n-2} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) будет всегда иметь корни справа от мнимой оси на плоскости корней, т. е. система будет неустойчивой. Действительно, единственным случаем, который требует проверки, является тот, когда корни уравнения (3.25) будут вещественными и отрицательными, ибо во всех других случаях система будет неустойчивой.

Допустим, что коэффициенты уравнения (3.25) удовлетворяют условиям аперидической устойчивости \*). Тогда все его корни будут вещественными и отрицательными.

Для того чтобы найти корни уравнения (3.23), нужно воспользоваться соотношением (3.24), а именно

$$q = \sqrt[n]{y}.$$

На основании свойств двучленных уравнений можно заключить, что хотя бы один из трех корней этого уравнения будет расположен справа от мнимой оси на плоскости корней.

Действительно, корни двучленного уравнения  $n$ -й степени находятся из следующего соотношения

$$q = \sqrt[n]{|y|} \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + j \sin \frac{2\pi k}{n} \right),$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$ .

В нашем случае  $n = 3$ , и три корня находятся по формуле

$$q_{1, 2, 3} = \sqrt[3]{|y|} \left( \cos \frac{2\pi k}{3} + j \sin \frac{2\pi k}{3} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

или

$$q_1 = \sqrt[3]{|y|} \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$q_2 = \sqrt[3]{|y|} \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$q_3 = \sqrt[3]{|y|} \cdot 1.$$

Мы получили один положительный корень, равный  $\sqrt[3]{|y|}$ . Так как уравнение (3.25) имеет  $n$  корней, то во вспомогательном уравнении (3.23) хотя бы  $n$  корней из общего числа  $3n$  будут расположены справа от мнимой оси и система будет неустойчивой.

Таким образом, в рассматриваемом варианте включения стабилизирующих устройств система будет устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления, если

$$i + m_i - n_i \leq 2$$

и при этом вырожденное уравнение и вспомогательное уравнение первого или второго рода удовлетворяют условиям устойчивости.

г. Рассмотрим в заключение этого параграфа случай, когда разность степеней рядом стоящих полиномов неодинакова.

Случай, когда разность степеней каких-либо из рядом стоящих полиномов равна или больше трех, мы рассматривать не будем, так как в этом случае система при малом  $m$  будет неустойчивой. Поэтому

---

\*) Мееров М. В., Критерий аперидичности регулирования, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1945.

представляет интерес случай, когда степени рядом стоящих полиномов отличаются на единицу и на два. Запишем для этого случая уравнение в следующем виде:

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_0-1}(p) + m^{n-2} F_{N_0-2}(p) + \\ + m^{n-3} F_{N_0-3}(p) + \dots + F_{N_0-n}(p) = 0. \quad (3.26)$$

Другая комбинация порядка следования степеней полиномов не изменит методики составления вспомогательного уравнения.

Применим здесь подстановку

$$p = \frac{q}{m^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.27)$$

Расчет произведем для случая, когда в систему входят два малых параметра, один из которых повышает порядок уравнения на два, а второй — на единицу. Уравнение (3.26) для этого частного случая запишется:

$$m^2 F_{N_0}(p) + m F_{N_0-1}(p) + F_{N_0-3}(p) = 0. \quad (3.28)$$

Запишем уравнение (3.28) в развернутом виде и подставим вместо  $p$  его значение из (3.27). После деления на  $m^2$  получаем

$$a_{00} \frac{q^{N_0}}{m^{\frac{N_0}{2}}} + a_{01} \frac{q^{N_0-1}}{m^{\frac{N_0-1}{2}}} + a_{02} \frac{q^{N_0-2}}{m^{\frac{N_0-2}{2}}} + \dots \\ \dots + a_{10} \frac{q^{N_0-1}}{m^{\frac{N_0+1}{2}}} + a_{11} \frac{q^{N_0-2}}{m^{\frac{N_0}{2}}} + a_{12} \frac{q^{N_0-3}}{m^{\frac{N_0-1}{2}}} + \dots \\ \dots + a_{30} \frac{q^{N_0-3}}{m^{\frac{N_0+1}{2}}} + a_{31} \frac{q^{N_0-4}}{m^{\frac{N_0}{2}}} + a_{32} \frac{q^{N_0-5}}{m^{\frac{N_0-1}{2}}} + \dots = 0. \quad (3.29)$$

Умножая (3.29) на  $m^{\frac{N_0+1}{2}}$  и пренебрегая составляющими с  $m^{\frac{1}{2}}$  в степени выше первой, получаем:

$$a_{00} m^{\frac{1}{2}} q^{N_0} + a_{10} q^{N_0-1} + a_{11} m^{\frac{1}{2}} q^{N_0-2} + a_{30} q^{N_0-3} + a_{31} m^{\frac{1}{2}} q^{N_0-4} = 0. \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) и будет в данном случае вспомогательным уравнением. Назовем его для отличия вспомогательным уравнением третьего рода.

Пусть вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости. Тогда для устойчивости системы необходимо, чтобы уравнение (3.30) также удовлетворяло этим условиям. Поделив (3.30) на  $q^{N_0-4}$ , получаем:

$$a_{00} m^{\frac{1}{2}} q^4 + a_{10} q^3 + a_{11} m^{\frac{1}{2}} q^2 + a_{30} q + a_{31} m^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.31)$$

Из (3.31) видно, что условия устойчивости не зависят от  $m$ , так как  $m$  входит только в коэффициенты с четными индексами—0, 2, 4.

Условие устойчивости для уравнения (3.31) запишется:

$$a_{10}a_{11}a_{30} - a_{10}^2a_{21} - a_{20}^2a_{00} > 0. \quad (3.32)$$

Аналогично могут быть составлены вспомогательные уравнения третьего рода в каждом конкретном случае; при этом степень  $m$ , которую надо учитывать, будет зависеть от количества малых  $m$  и от характера убывания степеней рядом стоящих полиномов (убывание степени на единицу или на два).

### § 3.2. Введение $n$ стабилизирующих устройств в одноконтурную систему. Вариант № 2

На рис. 63 представлена структурная схема рассматриваемого варианта включения  $n$  стабилизирующих устройств общего типа. Особенности этого варианта состоят в том, что выходы всех ста-

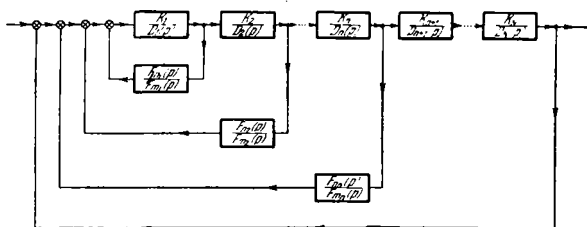


Рис. 63. Система со стабилизирующими устройствами общего типа; вариант включения № 2.

лизирующих устройств подаются на один и тот же вход. Так как звено, на вход которого подаются выходные сигналы всех стабилизирующих устройств, может быть весьма маломощным, то при таком включении и стабилизирующие устройства могут быть маломощными.

Характеристическое уравнение для рассматриваемого случая запишется в следующем виде (см. рис. 63):

$$\begin{aligned} & \{D_1(p)F_{m_1}(p) + K_1F_{n_1}(p)\}D_2(p)F_{m_2}(p) + K_1K_2F_{n_2}(p)F_{m_1}(p) \times \\ & \times D_3(p)F_{m_3}(p) + K_1K_2K_3F_{n_3}(p)F_{m_2}(p)F_{m_1}(p) \dots n-2 \} D_n(p)F_{n_n}(p) + \\ & + \prod_{i=1}^n K_i F_{n_i}(p) \prod_{j=1}^{n-1} F_{m_j}(p) \dots \left. \dots \right\} \prod_{\tau=n+1}^N D_{\tau}(p) + \\ & + \prod_{i=1}^N K_i \prod_{j=1}^n F_{m_j}(p) = 0. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Как и ранее, будем полагать, что коэффициенты усиления участков цепи, которые охватываются стабилизирующими устройствами, достаточно велики и что между ними существуют соотношения, определяемые системой равенств (3.3). При этих условиях уравнение (3.33) может быть представлено в следующем виде:

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + \dots + F_{N_n}(p) = 0, \quad (3.34)$$

где  $m^i = \frac{1}{K^i}$ .

Если положить, что из  $N$  участков  $n$  охватываются стабилизирующими звеньями, то полиномы  $F_{N_i}$  строятся по следующему закону:

$$\left. \begin{aligned} F_{N_0} &= \prod_{i=1}^N D_i(p) \prod_{j=1}^n F_{m_i}(p), \\ F_{N_1} &= F_{n_1}(p) \prod_{i=2}^n F_{m_i}(p) \prod_{i=2}^n D_i(p), \\ F_{N_2} &= F_{n_2}(p) \prod_{i=1, 3, \dots, n} F_{m_i}(p) \prod_{i=3}^n D_i(p), \\ F_{N_i} &= F_{n_i}(p) \prod_{j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n} F_{m_j}(p) \prod_{j=i}^n D_j(p). \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Вырожденное уравнение запишется в следующем виде:

$$F_{N_n}(p) = \prod_{i=1}^{n-1} F_{m_i}(p) \left[ F_{n_n}(p) \prod_{\eta=n+1}^N D_\eta(p) + K_{\text{выр}} F_{m_n}(p) \right] = 0, \quad (3.36)$$

где  $K_{\text{выр}}$  — произведение коэффициентов усиления звеньев, не охваченных стабилизирующими устройствами.

Что касается вырожденного уравнения, то будем полагать, что соответствующим выбором постоянных времени стабилизирующих устройств и коэффициентов усиления оно может быть сделано устойчивым.

Для устойчивости всей системы нужно установить расположение корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ .

Из выражений для отдельных полиномов уравнения (3.34) видно, что структурное условие, допускающее неограниченное увеличение коэффициентов усиления участков, охваченных стабилизирующими устройствами, будет выполняться, если между степенью оператора каждого последующего участка, охватываемого стабилизирующим устройством, обозначаемой через  $\beta$ , и степенями числителя и знаменателя оператора соответствующего стабилизирующего устройства  $n_i$



и  $m_i$  сохраняется условие

$$3 + m_i - n_i \leq 2. \quad (3.37)$$

Если условие (3.37) выполняется, то для устойчивости системы при неограниченном увеличении коэффициентов усиления участков, охваченных стабилизирующими устройствами, необходимо и достаточно, чтобы вырожденное уравнение и вспомогательное уравнение первого, второго или третьего рода, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости.

### § 3.3. Рассмотрение частных случаев

В этом параграфе мы рассмотрим ряд частных случаев, на примере которых попытаемся выяснить некоторые общие свойства вспомогательных уравнений в зависимости от характера звеньев, которые охватываются стабилизирующими устройствами, и от способа включения последних.

а. Рассмотрим одноконтурную цепочку, состоящую из  $N$  апериодических звеньев. Пусть вокруг первых  $n$  звеньев включены стабилизирующие устройства с операторами  $\frac{\tau_i p}{1 + \tau_i p}$  по схеме варианта № 1.

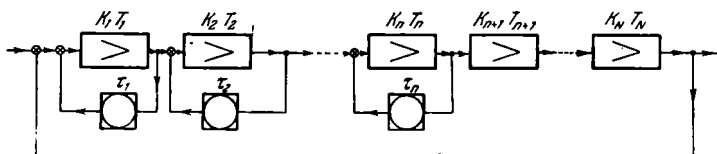


Рис. 64. Структурная схема системы, состоящей из  $N$  апериодических звеньев и  $n$  стабилизирующих, каждое из которых охватывает одно звено. Вариант включения № 1.

На рис. 64 представлена соответствующая структурная схема. Предположим, что коэффициенты усиления звеньев, охватываемых стабилизирующими устройствами, могут быть сделаны достаточно большими; кроме того, будем считать, что между коэффициентами усиления отдельных звеньев могут быть обеспечены соотношения, вытекающие из (3.3).

В данном случае

$$D_i(p) = (1 + T_i p),$$

$$F_{n_i}(p) = \tau_i p,$$

$$F_{m_i}(p) = (1 + \tau_i p).$$

На основании (3.2) характеристическое уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n [(1 + T_i p)(1 + \tau_i p) + K_i \tau_i p] \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{p=1}^N K_p \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p) = 0, \quad (3.38)$$

где  $T_i$  — постоянные времени аperiodических звеньев,  $K_i$  — коэффициенты усиления этих звеньев,  $\tau_i$  — постоянные времени стабилизирующих устройств.

Рассмотрим прежде всего вырожденное уравнение. Оно получится из (3.38), если в нем  $m_i = \frac{1}{K_i}$  положить равным нулю. Производя необходимые преобразования, получим вырожденное уравнение в следующей форме:

$$\prod_{i=1}^n \tau_i p^n \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{p=n+1}^N K_p \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p) = 0. \quad (3.39)$$

В уравнении (3.39) заданными неизменными величинами являются постоянные времени аperiodических звеньев. Что касается постоянных времени стабилизирующих устройств и коэффициентов усиления аperiodических звеньев, то они могут выбираться при проектировании и практически могут в некоторых разумных пределах меняться. Поэтому будем полагать, что вырожденное уравнение при соответствующем выборе параметров удовлетворяет условиям устойчивости.

Рассмотрим вспомогательное уравнение. Прежде всего нетрудно определить, что в данном случае вспомогательное уравнение будет первого рода. Действительно,  $\beta = 1$ ,  $n_i = 1$ ,  $m_i = 1$ . Следовательно,

$$m_i + \beta - n_i = 2 - 1 = 1$$

и степени рядом стоящих полиномов в полном характеристическом уравнении отличаются на единицу.

Для того чтобы найти вспомогательное уравнение, необходимо произвести умножение в (3.38) и привести его к виду уравнения (3.5). Вспомогательное уравнение получим из старших членов полиномов, образующих характеристическое уравнение.

Произведя необходимые преобразования, получим вспомогательное уравнение для данного случая в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n T_i q^n + \sum C_n^{n-1} T_i q^{n-1} + \sum C_n^{n-2} T_i q^{n-2} + \dots + 1 = 0, \quad (3.40)$$

где  $C_n^{n-j} T_i$  — сочетание из  $n$  по  $n-j$  постоянных времени  $T_i$  аperiodических звеньев, охватываемых стабилизирующими устройствами.

Иначе говоря, коэффициенты вспомогательного уравнения (3.40) представляют собой симметрические функции постоянных времени звеньев, охватываемых стабилизирующими устройствами. Уравнение (3.40) может быть, очевидно, записано в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n (1 + T_i q) = 0. \quad (3.41)$$

Оно всегда удовлетворяет условиям устойчивости (корнями этого уравнения будут:  $q_i = -\frac{1}{T_i}$ ).

Следовательно, условия устойчивости всей системы с характеристическим уравнением (3.38) при достаточно больших коэффициентах усиления  $K_i$  будут удовлетворяться, если только вырожденное уравнение (3.39) удовлетворяет условиям устойчивости.

Рассмотрим теперь случай, когда в схеме рис. 64 все аperiodические звенья охватываются стабилизирующими устройствами и все коэффициенты усиления могут быть сделаны достаточно большими.

Проведя вычисления, аналогичные ранее проведенным, получим вырожденное уравнение в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^N (1 + \tau_i p) = 0. \quad (3.42)$$

Оно всегда удовлетворяет условиям устойчивости, так как имеет корни  $p_i = -\frac{1}{\tau_i}$ .

Найдем вспомогательное уравнение. После соответствующих преобразований оно приводится к следующему виду:

$$\prod_{i=1}^N T_i q^N + \sum C_N^{N-1} T_i q^{N-1} + \dots + 2 = 0. \quad (3.43)$$

В данном случае свободный член равен двум, и уравнение (3.43) не может быть приведено к виду (3.41). Для устойчивости всей системы при больших коэффициентах усиления коэффициенты вспомогательного уравнения (3.43) должны удовлетворять условиям устойчивости.

Проведенное исследование позволяет высказать некоторые соображения относительно общего количества стабилизирующих устройств, которые нужно ввести в систему в рассматриваемом случае. Действительно, для случая, когда  $N > n$ , т. е. когда не все аperiodические звенья охватываются стабилизирующими устройствами, вспомогательное уравнение, коэффициенты которого полностью определяются постоянными времени аperiodических звеньев и не зависят от постоянных

времени стабилизирующих устройств, всегда удовлетворяет условиям устойчивости.

Выполнение условий устойчивости для вырожденного уравнения всегда может быть обеспечено соответствующим выбором постоянных времени стабилизирующих устройств. В случае же  $N = n$ , т. е. когда все апериодические звенья охватываются стабилизирующими устройствами, вырожденное уравнение, коэффициенты которого зависят исключительно от постоянных времени стабилизирующих устройств, всегда удовлетворяет условиям устойчивости, в то время как вспомогательное уравнение, коэффициенты которого зависят исключительно от постоянных времени апериодических звеньев, может этим условиям не удовлетворять. Так, невыполнение условий устойчивости

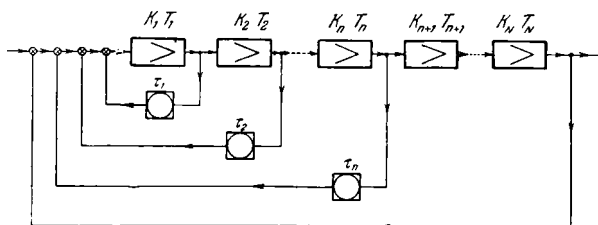


Рис. 65. Включение по варианту № 2; каждое стабилизирующее устройство охватывает дополнительно одно звено.

для вспомогательного уравнения будет иметь место, например, в том случае, когда общее количество апериодических звеньев  $N > 8$  и все их постоянные времени равны между собой. Таким образом, случай, когда не все апериодические звенья охватываются стабилизирующими устройствами, является с точки зрения получения устойчивости системы более благоприятным.

Вопрос о наиболее целесообразном количестве стабилизирующих устройств для данного варианта их включения нельзя решать только на основании рассмотрения устойчивости. Окончательная структура может быть выбрана только при учете как требований устойчивости, так и некоторых показателей качества. Эти вопросы будут рассмотрены в следующих главах.

б. Рассмотрим ту же систему, что и в пункте а, но со включением стабилизирующих устройств по схеме варианта № 2.

На рис. 65 представлена структурная схема для рассматриваемого случая.

В данном случае  $D_i(p) = (1 + T_i p)$ , а  $\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)} = \frac{\tau_i p}{1 + \tau_i p}$ . Тогда на основании уравнения (3.33) характеристическое уравнение системы

запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \{_{n-1} \dots \{[(1 + T_1 p)(1 + \tau_1 p) + K_1 \tau_1 p](1 + T_2 p)(1 + \tau_2 p) + \\ & \quad + K_1 K_2 \tau_2 p(1 + \tau_1 p)\}(1 + T_3 p)(1 + \tau_3 p) + \\ & \quad + K_1 K_2 K_3 \tau_3 p(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_1 p)\} \dots \}(1 + T_n p)(1 + \tau_n p) + \\ & \quad + \prod_{i=1}^n K_i \tau_i p \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \tau_j p) \dots \}_{n-1} \dots \}_{p=n+1}^N \prod_{p=n+1}^N (1 + T_p p) + \\ & \quad + \prod_{i=1}^N K_i \prod_{j=1}^n (1 + \tau_j p) = 0. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Как и ранее, полагаем, что коэффициенты усиления звеньев, охваченных стабилизирующими устройствами, достаточно велики, и для коэффициентов усиления этих звеньев выполняется условие (3.3). Полагая  $m_i = \frac{1}{K_i}$  достаточно малыми величинами, получим после преобразований вырожденное уравнение в следующей форме:

$$\tau_n p \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \tau_j p) \prod_{p=n+1}^N (1 + T_p p) + \prod_{i=n+1}^N K_i \prod_{j=1}^n (1 + \tau_j p) = 0.$$

Сокращая на  $\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i p)$ , получаем:

$$\tau_n p \prod_{p=n+1}^N (1 + T_p p) + \prod_{i=n+1}^N K_i (1 + \tau_n p) = 0.$$

В данном случае коэффициенты вырожденного уравнения зависят от параметров неохваченных апериодических звеньев и параметров последнего  $n$ -го стабилизирующего устройства. Выбором постоянных  $\tau_n$  и  $K_i$  можно обеспечить выполнение условий устойчивости для вырожденного уравнения. Предположим, что мы выбрали эти параметры такими, что коэффициенты вырожденного уравнения удовлетворяют условиям устойчивости. При этих условиях устойчивость всей системы зависит от выполнения условий устойчивости для вспомогательного уравнения.

На основании уравнения (3.44) и закона построения вспомогательного уравнения, после соответствующих вычислений вспомогательное уравнение для данного случая запишется в следующей форме:

$$\prod_{i=1}^n T_i q^n + \prod_{i=2}^n T_i q^{n-1} + \dots + 1 = 0. \quad (3.45)$$

Как видно из (3.45), для устойчивости должно быть совершенно определенное соотношение между постоянными времени апериодических звеньев, которые охватываются стабилизирующими устройствами.

Так, при  $n = 3$  уравнение (3.45) получит вид

$$T_1 T_2 T_3 q^3 + T_2 T_3 q^2 + T_3 q + 1 = 0.$$

Условием Гурвица будет:

$$\frac{T_2 T_3^2}{T_1 T_2 T_3} - 1 > 0$$

или

$$T_3 > T_1. \quad (3.46)$$

Для  $n = 4$  получаем условие устойчивости

$$T_4 > \frac{T_2 T_3}{T_3 - T_1}. \quad (3.47)$$

В последнем случае для  $T_3$ , близкого по значению с  $T_1$ , устойчивость может быть получена только при весьма больших  $T_4$ . Указанными условиями ограничивается возможность использования второго варианта включения стабилизирующих устройств для получения систем, устойчивых при больших коэффициентах усиления.

Рассмотрим еще случай, когда  $n = N$ . Здесь вырожденное уравнение запишется:

$$\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i p) (1 + 2\tau_n p) = 0. \quad (3.48)$$

Оно всегда удовлетворяет условиям Раута — Гурвица. Проверим, выполняются ли условия Раута — Гурвица для вспомогательного уравнения.

В рассматриваемом случае оно запишется в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n T_i q^n + \prod_{i=2}^n T_i q^{n-1} + \prod_{i=3}^n T_i q^{n-2} + \dots + 2 = 0. \quad (3.49)$$

Сравнивая полученное уравнение (3.49) с уравнением (3.45), мы убеждаемся, что с точки зрения устойчивости охват всех элементов стабилизирующими устройствами менее благоприятен. Так, при  $n = 3$  для устойчивости должно обеспечиваться следующее соотношение между численными значениями постоянных времени:

$$T_3 > 2T_1, \quad (3.50)$$

а при  $n = 4$

$$T_4 > \frac{2T_2 T_3}{T_3 - T_1}. \quad (3.51)$$

Таким образом, и здесь, как и в пункте а, случай  $n = N$  менее благоприятный, нежели случай, когда  $n < N$ . Как и для случая а, наиболее благоприятное число звеньев, которое необходимо охватывать стабилизирующими устройствами, может быть определено при учете требований качества и вопрос об этом будет рассмотрен в следующей главе.

Сравнивая случаи а и б, можно сделать заключение, что первый случай является более благоприятным в том смысле, что устойчивость вспомогательного уравнения (при  $n < N$ ) не зависит от численных значений постоянных времени звеньев, охватываемых стабилизирующими устройствами.

в. Рассмотрим вариант включения № 1, но при условии, когда каждое стабилизирующее устройство охватывает два аperiodических звена.

Структурная схема этого случая представлена на рис. 66.

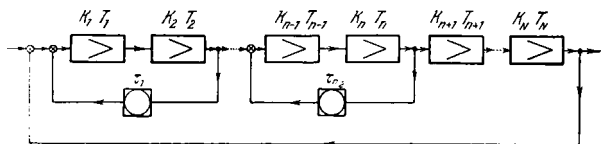


Рис. 66. Стабилизирующие устройства, включенные по варианту № 1, охватывают по два аperiodических звена.

Передаточная функция двух аperiodических звеньев вместе с охватывающим их стабилизирующим устройством запишется:

$$\frac{x_{i+2}}{x_i} = \frac{K_i K_{i+1} (1 + \tau_i p)}{(1 + \tau_i p) (1 + T_{i+1} p) (1 + T_i p) + K_i K_{i+1} \tau_i p}. \quad (3.52)$$

Полагая, что из общего числа  $N$  аperiodических звеньев  $n$  охватываются  $\frac{n}{2}$  стабилизирующими устройствами ( $n$  — четное число), получим передаточную функцию системы в следующей форме:

$$K(p) = \frac{\prod_{i, j=i+1}^n \frac{K_i K_j (1 + \tau_i p)}{(1 + T_i p) (1 + T_j p) (1 + \tau_i p) + K_i K_j \tau_i p} \cdot \prod_{p=n+1}^N \frac{K_p}{1 + T_p p}}{1 + \prod_{i, j=i+1}^n \frac{K_i K_j (1 + \tau_i p)}{(1 + T_i p) (1 + T_j p) (1 + \tau_i p) + K_i K_j \tau_i p} \cdot \prod_{p=n+1}^N \frac{K_p}{1 + T_p p}}. \quad (3.53)$$

Здесь и в дальнейшем в этом пункте индексы  $i$  и  $j$  принимают значения соответственно нечетных и четных чисел от единицы до  $n$ .

Характеристическое уравнение получим, приравняв знаменатель (3.53) нулю:

$$\prod_{i, j=i+1}^n [(1 + T_i p) (1 + T_j p) (1 + \tau_i p) + K_i K_j \tau_i p] \prod_{p=n+1}^N (1 + T_p p) + \prod_{p=n+1}^N K_p \prod_{i, j=i+1}^n K_i K_j (1 + \tau_i p) = 0. \quad (3.54)$$

Обозначим  $\frac{1}{K_i K_j} = m$ . Тогда, поделив уравнение (3.54) на  $(K_1 K_2)^{\frac{n}{2}}$  и полагая, что между коэффициентами усиления отдельных охваты-

ваемых участков существует соотношение

$$K_i K_j = \tau_i K_1 K_2, \quad (3.55)$$

сведем уравнение к следующему виду:

$$m^{\frac{n}{2}} F_N(p) + m^{\frac{n-2}{2}} F_{N_1}(p) + m^{\frac{n-4}{2}} F_{N_2}(p) + \dots + F_{N_{\frac{n}{2}}}(p) = 0, \quad (3.56)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_N(p) &= \prod_{i,j=i+1}^n (1+T_i p)(1+T_j p)(1+\tau_i p) \prod_{\tau=n+1}^N (1+T_{\tau} p), \\ F_{N_1}(p) &= \\ &= \sum \tau_i \tau_i p \prod_{i,j=i+1}^{n'} (1+T_i p)(1+T_j p)(1+\tau_i p) \prod_{\tau=n+1}^N (1+T_{\tau} p), \\ F_{N_2}(p) &= \\ &= \sum \tau_i \tau_{i+1} \tau_{i+1} p^2 \prod_{i,j=i+1}^{n'} (1+T_i p)(1+T_j p)(1+\tau_i p) \prod_{\tau=n+1}^N (1+T_{\tau} p), \\ &\dots \dots \dots \\ F_{N_{\frac{n}{2}}}(p) &= \\ &= \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i p^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i \prod_{\tau=n+1}^N (1+T_{\tau} p) + \prod_{\tau=n+1}^N K_{\tau} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1+\tau_i p) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Степени рядом стоящих полиномов в уравнении (3.56) отличаются на двойку, а степени малых параметров отличаются на единицу. Согласно полученным ранее выводам соответствующая система будет устойчивой при неограниченном увеличении ее коэффициента усиления, если уравнение (3.56) будет удовлетворять условиям устойчивости при  $m \rightarrow 0$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы вырожденное уравнение и вспомогательное уравнение второго рода, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости. Вырожденное уравнение получим из (3.56), полагая  $m = 0$ . Согласно (3.57) имеем:

$$F_{N_{\frac{n}{2}}}(p) = \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i p^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i \prod_{\tau=n+1}^N (1+T_{\tau} p) + \prod_{\tau=n+1}^N K_{\tau} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1+\tau_i p) = 0. \quad (3.58)$$

Соответствующим выбором постоянных времени стабилизирующих устройств  $\tau_i$  и коэффициентов усиления неохваченных апериодических звеньев  $K_{\tau}$  можно всегда добиться удовлетворения условий устойчивости для уравнения (3.58). При этих условиях устойчивость всей



системы будет зависеть от характера расположения корней вспомогательного уравнения второго рода. Как было показано выше, вспомогательное уравнение второго рода образуется из первых двух членов каждого из полиномов (3.56).

Произведя соответствующие вычисления, получим вспомогательное уравнение второго рода для данного случая в следующей форме:

$$\prod_{j=1}^N T_j \prod_{i=1}^n \tau_i q^n + \sum C_{N+n}^{N+n-1} T_j \tau_i q^{n-1} + \dots = 0. \quad (3.59)$$

Как видно из уравнения (3.59), условия устойчивости для вспомогательного уравнения второго рода в рассматриваемом случае будут зависеть как от численных значений постоянных времени аperiodических звеньев, так и от численных значений постоянных времени

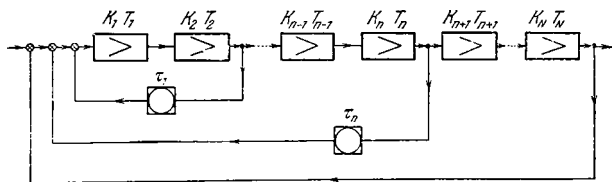


Рис. 67. Стабилизирующие устройства, включенные по варианту № 2, охватывают по два аperiodических звена.

стабилизирующих устройств. Ясно, что в данном случае при выборе значений постоянных времени стабилизирующих устройств необходимо иметь в виду обеспечение устойчивости для вырожденного и для вспомогательного уравнений. (Выбор параметров стабилизирующих устройств для подобного случая будет проиллюстрирован на конкретном примере в конце настоящей главы.)

Аналогичные результаты получаются и для случая, когда исходная одноконтурная система состоит из  $N$  колебательных звеньев, из которых  $n$  охватываются стабилизирующими устройствами с операторами вида  $\frac{\tau_i p}{1 + \tau_i p}$ . Условия устойчивости для вырожденного и вспомогательного уравнений будут зависеть как от параметров колебательных звеньев, так и от параметров стабилизирующих устройств. Условия устойчивости для вырожденного уравнения будут зависеть от параметров неохваченных колебательных звеньев и параметров стабилизирующих устройств, в то время как эти условия для вспомогательного уравнения будут зависеть от параметров всех звеньев цепи.

г. Предположим, что стабилизирующие устройства включаются по варианту № 2 и каждое последующее стабилизирующее устройство охватывает дополнительно два аperiodических звена.

На рис. 67 представлена структурная схема для рассматриваемого случая.

Напишем систему уравнений, описывающую поведение схемы рис. 67:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)x_2 = \\ = K_1 K_2 \left[ x_0 - x_N - \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} x_2 - \frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p} x_4 - \dots - \frac{\tau_{\frac{n}{2}} p}{1 + \tau_{\frac{n}{2}} p} x_n \right]$$

или

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) x_2 = \\ = K_1 K_2 \left[ x_0 \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) - \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) x_N - \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) \tau_1 p x_2 - \right. \\ \left. - \tau_2 p \prod_{i=1, 3, \dots, \frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) x_4 - \dots + \tau_{\frac{n}{2}} p \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (1 + \tau_i p) x_n \right]. \quad (3.60)$$

Далее получим:

$$(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) x_4 = K_3 K_4 x_2 \dots, \quad (3.61)$$

$$(1 + T_5 p)(1 + T_6 p) x_6 = K_5 K_6 x_4 \dots, \quad (3.62)$$

$$\dots \dots \dots (1 + T_{n-1} p)(1 + T_n p) x_n = K_{n-1} K_n x_{n-2} \dots, \quad (3.63)$$

$$\prod_{i=n+1}^N (1 + T_i p) x_N = \prod_{i=n+1}^N K_i x_n \dots \quad (3.64)$$

Исключая в системе уравнений (3.60)–(3.64) переменные  $x_1, \dots, x_{N-1}$ , найдем характеристическое уравнение, которое после необходимых выкладок приводится к следующему виду:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) + K_1 K_2 \tau_1 p \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) \prod_{i=3}^N (1 + T_i p) + \\ + K_1 K_2 K_3 K_4 \tau_2 p (1 + \tau_1 p) \prod_{i=3}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) \prod_{i=5}^N (1 + T_i p) + \dots \\ \dots + \prod_{i=1}^n K_i \tau_{\frac{n}{2}} p \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (1 + \tau_i p) \prod_{i=n+1}^N (1 + T_i p) + \dots \\ \dots + \prod_{i=1}^N K_i \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) = 0. \quad (3.65)$$

В данном случае, как и ранее, в качестве коэффициентов усиления, которые могут быть сделаны достаточно большими, выберем коэффициенты усиления тех элементов, которые охватываются стабилизирующими устройствами. Полагая, что между каждой парой коэффициентов усиления выполняется соотношение (3.55), получим после деления (3.65) на  $K_1 K_2^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$  следующее уравнение:

$$m^{\frac{n}{2}} F_{N_0}(p) + m^{\frac{n}{2}-1} F_{N_1}(p) + m^{\frac{n}{2}-2} F_{N_2}(p) + \dots + F_{N_{\frac{n}{2}}}(p) = 0, \quad (3.66)$$

где

$$m = \frac{1}{K_1 K_2};$$

$$\left. \begin{aligned} F_{N_0}(p) &= \prod_{i=1}^N (1 + T_i p) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p), \\ F_{N_1}(p) &= \tau_1 p \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) \prod_{i=3}^N (1 + T_i p), \\ F_{N_2}(p) &= \tau_1 \tau_2 p (1 + \tau_i p) \prod_{i=3}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) \prod_{i=5}^N (1 + T_i p), \\ &\dots \dots \dots \\ F_{N_j}(p) &= \prod_{i=2}^j \tau_i \tau_i p \prod_{i=1}^j (1 + \tau_i p) \prod_{i=j+1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p) \prod_{i=2j+1}^N (1 + T_i p), \\ F_{N_{\frac{n}{2}}}(p) &= \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} \tau_i \tau_{\frac{n}{2}} p \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (1 + \tau_i p) \prod_{i=n+1}^N (1 + T_i p) + \\ &\quad + \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} \tau_i \prod_{n+1}^N K_i \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (1 + \tau_i p). \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

При  $m \rightarrow 0$  получаем вырожденное уравнение

$$F_{N_{\frac{n}{2}}}(p) = 0. \quad (3.68)$$

Для того чтобы обеспечить выполнение условий устойчивости для вырожденного уравнения, мы располагаем достаточной свободой

выбора значений параметров стабилизирующих устройств и значений коэффициентов усиления элементов, не охваченных стабилизирующими устройствами. Поэтому будем полагать, что вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости.

Как это ясно из (3.67) и из структуры системы, представленной на рис. 67,

$$N_0 - N_1 = 2, \quad N_0 - N_2 = 4, \dots, N_0 - N_{\frac{n}{2}} = 2n.$$

Иначе говоря, мы имеем в данном случае вспомогательное уравнение второго рода; оно образуется из первых двух старших коэффициентов полиномов (3.67).

Нетрудно видеть, что в данном случае удовлетворение условий устойчивости вспомогательного уравнения второго рода будет зависеть как от численных значений постоянных времени  $T_i$ , так и от значений постоянных времени стабилизирующих устройств и коэффициентов  $\eta_i$ . Это обстоятельство весьма существенно, так как в данном случае даже при весьма малом  $m$  недопустимо исследовать устойчивость системы по вырожденному уравнению.

### § 3.4. Стабилизация структурно неустойчивой системы

Рассмотрим систему автоматического регулирования, исходная одноконтурная цепь которой структурно неустойчива. Положим, что структурная неустойчивость обусловлена наличием в одноконтурной цепи соответствующего количества звеньев из групп таблицы 1 (стр. 19).

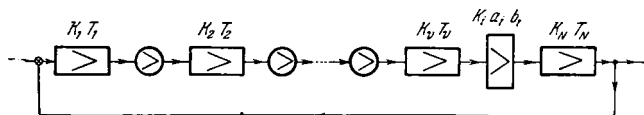


Рис. 68. Схема структурно неустойчивой системы.

Так как в данном случае мы не ограничиваем количество стабилизирующих устройств, которое может быть введено в систему, то необходимо установить минимальное их количество, при котором система становится структурно устойчивой и достигается возможность получать неограниченную величину коэффициента усиления при сохранении устойчивости. Рассмотрим отдельные случаи.

а. На рис. 68 представлена одноконтурная структурно неустойчивая система. Структурная неустойчивость обусловлена наличием более чем двух интегрирующих звеньев. В § 2.5 было установлено, что в вырожденной части схемы (часть схемы, которая не охватывается стабилизирующими устройствами) не должно быть больше одного интегрирующего звена. Этот вывод справедлив и здесь, если

в качестве стабилизирующих устройств используются такие устройства, в которых  $n_i = m_i$ .

Так как такие стабилизирующие устройства технически наиболее легко осуществимы, мы их в первую очередь и будем иметь в виду.

Итак, из общего числа  $n$  интегрирующих звеньев одно звено остается в не охваченной стабилизирующими устройствами части; задача состоит в том, чтобы ввести такое количество стабилизирующих устройств с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , чтобы вся система оставалась устойчивой при неограниченном увеличении общего коэффициента усиления.

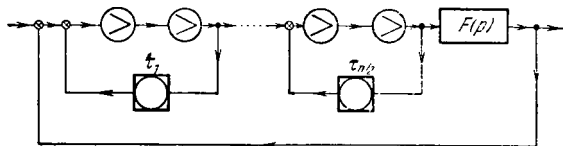


Рис. 69. Стабилизация структурно неустойчивых систем.

Наибольшее количество интегрирующих звеньев, которое может быть охвачено стабилизирующим устройством с оператором рассматриваемого типа, равно двум; если в охватываемой части, кроме интегрирующих, имеются другие устойчивые элементы, то необходимое количество стабилизирующих устройств для обеспечения устойчивости при больших коэффициентах усиления определяется так, как это было сделано выше. Поэтому наличие только  $n - 1$  интегрирующих звеньев в охватываемой части схемы требует  $\frac{n-1}{2}$  стабилизирующих устройств; при этом, если  $n$  — четное число, то количество стабилизирующих устройств следует принять равным  $\frac{n}{2}$ . Выясним, как будет строиться вспомогательное уравнение второго рода, если охватываемая часть состоит только из интегрирующих звеньев. На рис. 69 представлена схема для рассматриваемого случая. Через  $F(p)$  обозначена передаточная функция части системы, не охваченной стабилизирующими устройствами и состоящей из аperiодических звеньев.

Характеристическое уравнение запишется в следующей форме:

$$\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} [(1 + \tau_i p) T_i p^2 + K_i K_{i+1} \tau_i p] \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} K_i K_{i+1} (1 + \tau_i p) \prod_{j=n+1}^N K_j = 0. \quad (3.69)$$

Уравнение (3.69) приводится к виду

$$F_{N_0+\frac{n}{2}}(p) + K_1 K_2 F_{N_0+\frac{n}{2}-2}(p) + \eta_1 (K_1 K_2)^2 F_{N_0+\frac{n}{2}-4}(p) + \dots \\ \dots + \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} \eta_i (K_1 K_2)^{\frac{n}{2}} F_{N_0-\frac{n}{2}}(p) + \prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} \eta_i (K_1 K_2)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=n+1}^N K_i F_{\frac{n}{2}}(p) = 0, \quad (3.70)$$

где степени полиномов определяются индексами при  $F$ . Кроме того, мы предполагаем, что между коэффициентами усиления охватываемых участков соблюдается соотношение (3.55).

Для того чтобы найти вспомогательное уравнение второго рода, нужно выписать функции  $F_{N_0+i}$  и определить в этих функциях два первых старших коэффициента.

На основании (3.69) и (3.70) получаем вспомогательное уравнение второго рода в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \tau_i \prod_{j=1}^N T_j q^N + \sum C_N^{N-i} T_j \tau_i q^{N-1} + \dots = 0, \quad (3.71)$$

где  $C_N^{N-1} T_j \tau_i$  — сочетания из  $N$  по  $N-i$  постоянных времени стабилизирующих устройств  $\tau_i$  и аperiodических звеньев системы  $T_j$ . Устойчивость может быть здесь обеспечена при неограниченном увеличении коэффициентов усиления охваченных звеньев. Необходимо только, чтобы вырожденное и вспомогательное уравнения, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости. Как это видно из (3.71), удовлетворение условий устойчивости для вспомогательного уравнения будет зависеть от численных значений постоянных времени всех элементов, входящих в систему.

Рассмотрим теперь второй вариант. С точки зрения структурных условий (3.37) стабилизирующим устройством типа  $\left(\frac{\tau p}{1+\tau p}\right)$  можно охватывать и одно интегрирующее звено. При этих условиях нужное количество стабилизирующих устройств будет равно  $n-1$ . Структурная схема для данного случая представлена на рис. 70. Характеристическое уравнение запишется в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^{n-1} [T_i p (1 + \tau_i p) + K_i \tau_i p] \prod_{j=n}^N (1 + T_j p) + \prod_{j=1}^N K_j \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i p) = 0, \quad (3.72)$$

причем  $\prod_{j=n}^N \frac{K_j}{1+T_j p} = F(p)$ . Как и ранее, приведем (3.72) к следующему виду:

$$F_{N_0+n-1}(p) + K_1 F_{N_0+n-2}(p) + \eta_1 K_1^2 F_{N_0+n-3}(p) + \dots \\ \dots + \prod_{i=1}^{n-2} \eta_i K_1^{n-1} F_{N_0}(p) + \prod_{i=1}^N K_i F_{N_0}(p) = 0. \quad (3.73)$$

Здесь индексами при  $F$  обозначены степени полиномов; при этом  $n < N$ .

Как это ясно из структуры рис. 70 и уравнения (3.73), в данном случае вспомогательное уравнение будет первого рода. Выясним, от значения каких параметров будет зависеть удовлетворение условий устойчивости для этого уравнения.

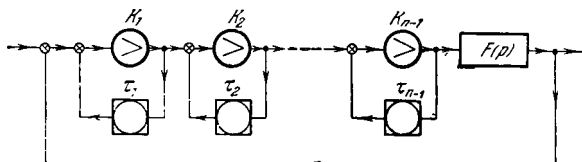


Рис. 70. Стабилизация структурно неустойчивых систем.

Построим на основании (3.72) и (3.73) вспомогательное уравнение, имея в виду, что оно строится из старших членов полиномов, составляющих уравнение (3.73), предварительно поделенных на  $K^{n-1}$ . После соответствующих вычислений получаем следующий вид вспомогательного уравнения:

$$\prod_{i=1}^{n-1} T_i \prod_{i=1}^{n-1} \tau_i q^{n-1} + \sum C_{n-1}^{n-j} T_j \prod_{i=1}^{n-1} \tau_i q^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^{n-1} \tau_i \prod_{i=1}^{n-2} \eta_i = 0,$$

где  $j = 2, 3, \dots, n-1$ . Сокращая на  $\prod_{i=1}^{n-1} \tau_i$ , получаем:

$$\prod_{i=1}^{n-1} T_i q^{n-1} + \sum C_{n-1}^{n-j} T_j q^{n-j} + \dots + \prod_{i=1}^{n-2} \eta_i = 0. \quad (3.74)$$

Как видно из уравнения (3.74), вспомогательное уравнение в данном случае не зависит от постоянных времени и других параметров неохваченных звеньев, не зависит от постоянных времени стабилизирующих устройств и существенно зависит от соотношения между величинами коэффициентов усиления звеньев, охваченных стабилизирующими устройствами. В частном случае, когда все указанные коэффициенты усиления равны между собой ( $\eta_i = 1$ ), то уравнение (3.74) приводится к виду

$$\prod_{i=1}^n (T_i q + 1) = 0. \quad (3.75)$$

В этом случае оно, естественно, удовлетворяет условиям устойчивости, а устойчивость всей системы при достаточно больших коэффициентах уравнения будет определяться выполнением условий устойчивости вырожденного уравнения.

Исследования показывают, что включение стабилизирующих устройств по схеме варианта № 2 дает следующие результаты.

а) При охвате каждым последующим стабилизирующим устройством одного интегрирующего звена получаем вспомогательное уравнение первого рода, устойчивость которого существенно зависит как от значения постоянных времени стабилизирующих звеньев, так и от  $\eta_i$  и постоянных времени интегрирующих звеньев, но не зависит от постоянных времени тех звеньев, которые не охвачены стабилизирующими устройствами.

б) При охвате каждым последующим стабилизирующим устройством двух интегрирующих звеньев получаем вспомогательное уравнение второго рода, устойчивость которого зависит от численных значений постоянных времени стабилизирующих устройств и постоянных времени всей одноконтурной системы.

б. Рассмотрим случай, когда одноконтурная система содержит  $\nu$  неустойчивых элементов с передаточной функцией  $\frac{K_i}{T_i p - 1}$ .

Включим вокруг  $n$  звеньев стабилизирующие устройства с передаточной функцией типа  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  по варианту включения № 1. Включение произведем так, чтобы в число  $n$  входили все  $\nu$  неустойчивых звеньев. Полагая, что  $n - \nu$  охватываемых звена — апериодические, получим следующее выражение для характеристического уравнения:

$$\prod_{i=1}^{\nu} [(T_i p - 1)(1 + \tau_i p) + K_i \tau_i p] \prod_{j=\nu+1}^n [(T_j p + 1)(1 + \tau_j p) + K_j \tau_j p] \prod_{\eta=n+1}^N D_{\eta}(p) + \prod_{i=1}^N K_i \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p) = 0, \quad (3.76)$$

где  $D_{\eta}(p)$  — собственный оператор звеньев, не охваченных обратными связями. Уравнение (3.76) может быть приведено к следующему виду:

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + \dots + F_{N_n}(p) = 0. \quad (3.77)$$

При этом, как это ясно из предыдущего, для рассматриваемого вида включения степени полиномов уравнения (3.77) будут отличаться на единицу, т. е.

$$N_1 = N_0 - 1, \quad N_2 = N_0 - 2, \dots, N_{N_n} = N_0 - n.$$

Врожденное уравнение

$$F_{N_n}(p) = 0$$

здесь, как и во всех других случаях, не зависит от параметров звеньев, охватываемых стабилизирующими звеньями. Оно зависит от параметров звеньев, не охваченных стабилизацией, и параметров стабилизирующих устройств.



Предположим, что соответствующим выбором параметров нам удалось обеспечить выполнение условий устойчивости для вырожденного уравнения. Нетрудно видеть, что и вспомогательное уравнение в рассматриваемом случае будет всегда удовлетворять условиям устойчивости. Действительно, в данном случае будет иметь место вспомогательное уравнение первого рода, коэффициентами которого будут коэффициенты старших членов полиномов уравнения (3.77). Как было показано в пункте а, при  $\eta_i = 1$  коэффициенты вспомогательного уравнения строятся как симметрические функции постоянных времени звеньев, охваченных стабилизирующими устройствами. Поэтому и в данном случае, несмотря на то, что  $\gamma$  из охваченных звеньев являются неустойчивыми, вспомогательное уравнение будет иметь вид

$$\prod_{i=1}^n (T_i p + 1) = 0 \quad (3.78)$$

и всегда удовлетворяет условиям устойчивости.

Не повторяя элементарных вычислений, можно сделать заключение и для случая, когда стабилизирующими устройствами с передаточной функцией типа  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  охватываются сразу два звена. В этом случае вспомогательное уравнение будет второго рода. Количество стабилизирующих устройств для того же  $n$  будет в два раза меньше. Однако условия устойчивости для вспомогательного уравнения будут существенно зависеть как от численных значений постоянных времени апериодических и неустойчивых звеньев, охватываемых стабилизирующими устройствами, так и от численных значений параметров этих устройств. Если  $\eta_i \neq 1$ , то для устойчивости необходимо, чтобы вспомогательные уравнения как первого, так и второго рода удовлетворяли условиям Раута — Гурвица.

Включение стабилизирующих устройств по схеме варианта № 2 при наличии  $\gamma$  неустойчивых элементов с оператором типа  $\frac{K_i}{T_i p - 1}$  приводит к следующим результатам (если положить, что вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости).

а) Если каждое последующее стабилизирующее устройство охватывает одно апериодическое или одно неустойчивое звено указанного типа, то вспомогательное уравнение будет первого рода. Условия устойчивости для этого уравнения будут существенно зависеть от количественных соотношений между постоянными времени звеньев, охватываемых стабилизирующими устройствами, и не зависеть от постоянных времени этих устройств.

б) Если каждое последующее стабилизирующее устройство охватывает два неустойчивых звена рассматриваемого типа, то вспомогательное уравнение будет второго рода. Условия устойчивости для этого уравнения будут существенно зависеть как от численных значений

постоянных времени тех звеньев, которые охватываются стабилизирующими устройствами, так и от численных значений постоянных времени неохваченных звеньев, и от постоянных времени стабилизирующих устройств.

### § 3.5. Одноконтурная система с запаздыванием

Возможность получения систем, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления при наличии в исходной одноконтурной цепи элементов с запаздыванием, имеет существенное практическое значение. Известно, что существующие статические

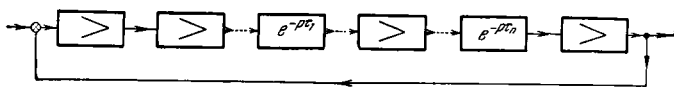


Рис. 71. Одноконтурная система с запаздыванием.

системы автоматического регулирования, содержащие элементы с запаздыванием, обладают весьма низким критическим коэффициентом усиления. Попытки увеличить значение критического коэффициента усиления введением воздействия по производной обычно не приводили к желательным результатам. Как будет видно из дальнейшего, неудачи этих попыток кроются в структурных свойствах этих систем. Для того чтобы выяснить эти свойства, рассмотрим исходную одноконтурную систему, содержащую элементы с запаздыванием.

Для простоты будем полагать, что элементы систем автоматического регулирования, не содержащие запаздывания, могут быть представлены  $N$  последовательно включенными аperiodическими звеньями. Это ограничение в данном случае не существенно, и выводы можно без труда распространить на случай, когда, кроме аperiodических, система содержит колебательные и интегрирующие звенья.

Допустим, далее, что система содержит  $n$  элементов с запаздыванием. На рис. 71 приведена структурная схема указанной системы автоматического регулирования.

Обозначим постоянные времени и коэффициенты усиления аperiodических звеньев через  $T_i$ ,  $K_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , и запаздывание через  $\tau_j$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Для  $i$ -го аperiodического звена передаточная функция имеет следующий вид:

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{K_i}{T_i p + 1}. \quad (3.79)$$

Для  $j$ -го элемента с запаздыванием имеем:

$$\frac{x_{j+1}}{x_j} = e^{-\tau_j p}. \quad (3.80)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению рассматриваемой системы, запишется:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) e^{\sum_{j=1}^n \tau_j p} + \prod_{i=1}^N K_i = 0.$$

Если обозначить  $\sum_{j=1}^n \tau_j = \tau$  и  $\prod_{i=1}^N K_i = K$ , то получим уравнение в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) e^{\tau p} + K = 0. \quad (3.81)$$

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики предельной системы (системы без запаздывания) запишется:

$$W(j\omega) = -\frac{K}{\prod_{i=1}^N (1 + T_i j\omega)}. \quad (3.82)$$

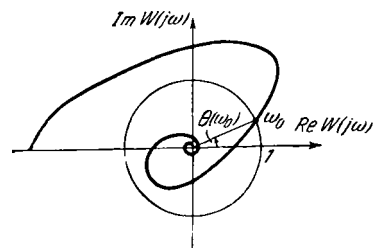


Рис. 72. К определению предельного значения величины запаздывания.

Допустим, что система без учета запаздывания (предельная система) устойчива. Тогда амплитудно-фазовая характеристика, построенная по уравнению (3.82), будет иметь вид, представленный на рис. 72.

Проведем на рис. 72 окружность с радиусом, равным единице, и центром, расположенным в начале координат. Тогда  $\tau_0$  — граничное значение запаздывания (т. е. значение  $\tau = \tau_0$ , при котором система находится на границе устойчивости) — определится из соотношения

$$\tau_0 = \frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}. \quad (3.83)$$

Если действительное значение  $\tau < \tau_0$ , то система устойчива; в противном случае она неустойчива.

Так как предельная система принципиально имеет ограниченный критический коэффициент усиления, то и при наличии запаздывания система будет иметь ограниченный критический коэффициент усиления. Необходимо подчеркнуть, что наличие запаздывания существенно меняет структурные свойства однокон-

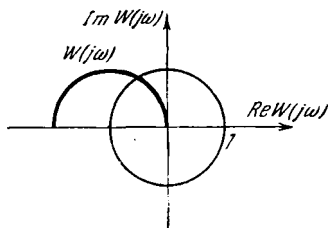


Рис. 73. Амплитудно-фазовая характеристика аperiodического звена и вспомогательная окружность для анализа устойчивости при наличии запаздывания.

турной системы. Так, при наличии запаздывания критический коэффициент усиления будет конечным, даже если, кроме элементов с запаздыванием, в системе имеется только одно апериодическое звено (рис. 73).

### § 3.6. Система с запаздыванием при введении стабилизирующего устройства общего типа

Введем в одноконтурную цепь с запаздыванием стабилизирующее устройство общего типа (с оператором  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$ ) так, чтобы оно охватило  $\nu$  апериодических звеньев и ни одного элемента с запаздыванием (рис. 74).

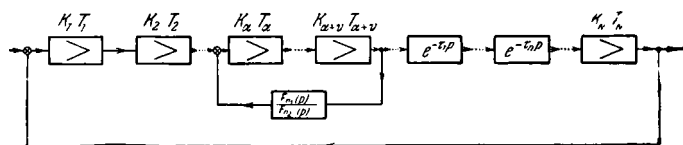


Рис. 74. Стабилизация систем с запаздыванием.

Характеристическое уравнение в данном случае запишется в следующей форме:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) F_{n_2}(p) e^{\tau p} + K_{\text{о.х.в.}} F_{n_1}(p) \prod_{i=1}^{\alpha-1} (1 + T_j p) \prod_{\eta=\alpha+\nu+1}^N (1 + T_\eta p) e^{\tau p} + K_{\text{о.х.в.}} K_{\text{выр.}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (3.84)$$

Здесь  $K_{\text{о.х.в.}}$  — произведение коэффициентов усиления звеньев, охваченных обратной связью;  $K_{\text{выр.}}$  — произведение коэффициентов усиления звеньев, не охваченных обратной связью, а  $\tau = \sum_1^n \tau_i$ .

Поделим уравнение (3.84) на  $K_{\text{о.х.в.}} e^{\tau p}$  и обозначим  $\frac{1}{K_{\text{о.х.в.}}} = m$ .

Кроме того, развернем уравнение (3.84) по степеням  $p_j$ . Тогда получим:

$$m [B_0 p^{N+n_2} + B_1 p^{N+n_2-1} + \dots + B_{N+n_2}] + A_0 p^{N-\nu+n_1-1} + A_1 p^{N-\nu+n_1-2} + \dots + A_{N-\nu+n_1-1} + K_{\text{выр.}} (C_0 p^{n_2} + C_1 p^{n_2-1} + \dots + C_{n_2}) e^{-\tau p} = 0. \quad (3.85)$$

Система будет оставаться устойчивой при неограниченном повышении коэффициента усиления, если (3.85) будет удовлетворять условиям устойчивости при  $m \rightarrow 0$ .

Уравнение (3.85) является трансцендентным и, следовательно, имеет бесчисленное множество корней.

Согласно теоремам Л. С. Понтрягина и Ю. И. Неймарка, если уравнение содержит главный член \*), то при некоторых дополнительных условиях \*\*) в нем существует непрерывная зависимость изменения корней от изменения коэффициентов уравнения и справа от мнимой оси может быть только ограниченное количество корней \*\*\*).

Для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (3.85) лежали слева от мнимой оси на плоскости корней.

Запишем (3.85) следующим образом:

$$mF_{N_2}(p) + [F_{N_1}(p) + F_N(p)e^{-\tau p}] = 0. \quad (3.86)$$

Часть уравнения (3.86), взятую в квадратные скобки, будем, как и прежде, называть вырожденной.

Полином  $F_{N_2}(p)$  имеет более высокую степень, чем  $F_{N_1}(p)$  и  $F_N(p)$ , и, следовательно, (3.86) содержит главный член.

Предположим, что выбором соответствующих значений параметров стабилизирующего устройства и коэффициента усиления  $K_{\text{выр}}$  достигается выполнение условий устойчивости для вырожденного уравнения при заданном значении запаздывания  $\tau$ .

При достаточно малом  $m$  устойчивость всей системы будет зависеть от дополнительных корней, определяемых  $F_{N_2}(p)$ . При  $m \rightarrow 0$  некоторое количество корней стремится в бесконечность.

Определим количество корней, стремящихся к бесконечности при  $m \rightarrow 0$ , и найдем условия, при которых они будут расположены слева от мнимой оси.

Введем следующую замену переменных. Пусть

$$p = \frac{q}{m \frac{1}{N_2 - N_1}}, \quad (3.87)$$

где  $N_2 = N + n_2$  — общий порядок уравнения (3.85) ( $N_2$  одновременно является порядком той части уравнения, у которой  $m$  является множителем), а  $N_1 = N + n_1 - 1$  — порядок уравнения, ранее названного вырожденным.

\*) Л. С. Понтрягин назвал главным членом уравнения  $a_1 p^{n_1} e^{\tau_1 p} + a_2 p^{n_2} + a_3 p^{n_3} e^{\tau_3 p} + \dots + a_n = 0$  слагаемое  $a_1 p^{n_1} e^{\tau_1 p}$  при условии  $n_1 > n_3$  и  $\tau_1 > \tau_3$ . В том случае, когда эти два условия одновременно не выполняются, главного члена нет. Следовательно, главный член образуется от произведения наивысшей степени  $p$  и  $e$  с наибольшим  $\tau$ .

\*\*) Кроме условия о наличии главного члена, уравнение будет иметь ограниченное количество корней справа от мнимой оси, если  $|W(j\omega)| \leq 1$  при достаточно больших  $\omega$ . В нашем случае это условие выполняется.

\*\*\*)) Понтрягин Л. С., О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, Изв. АН СССР, серия матем., т. 6, № 3; Неймарк Ю. И., Д-разбиение некоторых трансцендентных функций, ДАН, № 3, 1951.

Подставим в (3.85) вместо  $p$  его значение из (3.87). После деления на  $m$  получим:

$$B_0 \frac{q^{N_2}}{m^{\frac{N_2}{N_2-N_1}}} + B_1 \frac{q^{N_2-1}}{m^{\frac{N_2-1}{N_2-N_1}}} + \dots + A_0 \frac{q^{N_1}}{m^{\frac{N_1}{N_2-N_1}}} + A_1 \frac{q^{N_1-1}}{m^{\frac{N_1-1}{N_2-N_1}}} + \dots$$

$$\dots + \left[ C_0 \frac{q^{n_2}}{m^{\frac{n_2}{N_2-N_1}+1}} + C_1 \frac{q^{n_2-1}}{m^{\frac{n_2-1}{N_2-N_1}+1}} + \dots \right] e^{-\tau \frac{q}{m^{\frac{1}{N_2-N_1}}}} = 0. \quad (3.88)$$

Помножив (3.88) на  $m^{\frac{N_2}{N_2-N_1}}$ , получим:

$$B_0 q^{N_2} + B_1 n q^{N_2-1} + \dots + A_0 q^{N_1} + A_1 n q^{N_1-1} + \dots$$

$$\dots + \left[ C_0 m^{\frac{N_1-n_2}{N_2-N_1}} q^{n_2} + C_1 m^{\frac{N_1-n_1+1}{N_2-N_1}} q^{n_2-1} + \dots \right] e^{-\tau \frac{q}{m^{\frac{1}{N_2-N_1}}}} = 0, \quad (3.89)$$

где  $n = m^{\frac{1}{N_2-N_1}}$ . При  $m \rightarrow 0$  получаем:

$$B_0 q^{N_2} + A_0 q^{N_1} = 0$$

или

$$B_0 q^{N_2-N_1} + A_0 = 0. \quad (3.90)$$

Таким образом, при убывании  $m$  общее количество корней, которые удаляются в бесконечность, равняется  $N_2 - N_1$ .

Уравнение, подобное (3.90), мы получили при рассмотрении структур, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости, но без запаздывания, и, следовательно, нет необходимости повторять выкладки, аналогичные проведенным ранее. Приведем только выводы из уравнения (3.90) и материалов главы II.

а) Существуют структуры систем с запаздыванием, допускающие неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости.

б) Общее количество аперiodических звеньев  $\nu$ , которое может охватываться стабилизирующим устройством, или порядок уравнения  $\nu$ , которым описывается часть контура, охватываемая стабилизирующим устройством, должно подчиняться следующему соотношению:

$$\nu - 2 \leq n_1 - n_2, \quad (3.91)$$

где  $n_1$  — степень числителя, а  $n_2$  — степень знаменателя оператора стабилизирующего устройства.

Кроме этого, необходимо, чтобы вырожденное уравнение удовлетворяло условиям устойчивости и удовлетворялись дополнительные

условия в зависимости от значения  $N_2 - N_1$ , а именно  $\frac{B_0}{A_0} > 0$  при  $N_2 - N_1 = 1$  и соответственно  $\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0$  при  $N_2 - N_1 = 2$ .

Полученные здесь результаты полностью совпадают с результатами, полученными для систем без запаздывания, и, следовательно, законы построения систем автоматического регулирования, в которых принципиально не существует противоречия между точностью и устойчивостью, полученные для систем без запаздывания, в полной мере пригодны для систем с несколькими элементами с запаздыванием, если ни один из этих элементов не охвачен стабилизирующим устройством.

### § 3.7. Система, в которой элемент с запаздыванием охвачен стабилизирующим устройством

Рассмотрим ту же исходную систему, что и в предыдущем параграфе. Все элементы с запаздыванием заменим одним и включим стабилизирующее устройство так, чтобы вместе с апериодическими охватывалось и эквивалентное звено с запаздыванием (рис. 75).

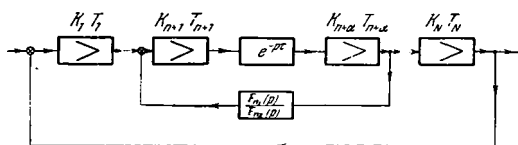


Рис. 75. Структурная схема, где стабилизирующим устройством охвачен элемент с запаздыванием.

Характеристическое уравнение в данном случае запишется:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) F_{n_2}(p) e^{\tau p} + K_{\text{о.х.в.}} F_{n_1}(p) \prod_{j=1}^n (1 + T_j p) \prod_{\eta=n+\alpha+1}^N (1 + T_\eta p) + K_{\text{о.х.в.}} K_{\text{выр.}} F_{n_2}(p) = 0. \quad (3.92)$$

Обозначения здесь те же, что и в § 3.6.

Если (3.92) поделить на  $K_{\text{о.х.в.}}$  и обозначить  $\frac{1}{K_{\text{о.х.в.}}} = m$ , то получим:

$$m F_{N_2}(p) e^{\tau p} + F_{N_1}(p) = 0. \quad (3.93)$$

Мы предполагаем, что в операторе стабилизирующего устройства

$$n_1 \leq n_2.$$

Это обстоятельство следует всегда иметь в виду, когда выбирается стабилизирующее устройство для систем с запаздыванием.

Так, если степень  $F_{N_1}(p)$  больше степени  $F_{N_2}(p)$  (что может получиться при соответствующем выборе оператора стабилизирующего устройства), то система будет структурно неустойчивой, так как в (3.93) не будет главного члена.

Запишем уравнение границы  $D$ -разбиения по  $m$ . Имеем:

$$\overline{m} = - \frac{F_{N_1}(j\omega)}{F_{N_2}(j\omega) e^{j\omega}}. \quad (3.94)$$

На рис. 76 представлена (качественно) кривая  $D$ -разбиения по обратной величине коэффициентов усиления звеньев, охваченных обратной связью.

То, что вид этой кривой будет именно таким, нетрудно понять, ибо степень полинома числителя ниже степени полинома знаменателя, а  $e^{j\omega}$  содержится только в знаменателе. Поэтому для частот  $\omega_i$ , больших некоторой  $\omega_j$ , характер кривой будет полностью определяться знаменателем, и кривая будет монотонно накручиваться на начало координат. Из рис. 76 видно, что для  $m = m_i$  система станет неустойчивой и ни для какого  $m < m_i$  при данных параметрах система устойчивой стать не может. Отсюда следует, что если стабилизирующее устройство охватывает наряду с другими звеньями или без них элемент с запаздыванием, то систему нельзя сделать устойчивой при достаточно больших коэффициентах усиления. Здесь можно сделать и более общий вывод, состоящий в том, что если, кроме охваченного стабилизирующим устройством элемента с запаздыванием, в системе имеются еще элементы с запаздыванием, то сделать ее устойчивой при больших коэффициентах усиления невозможно.

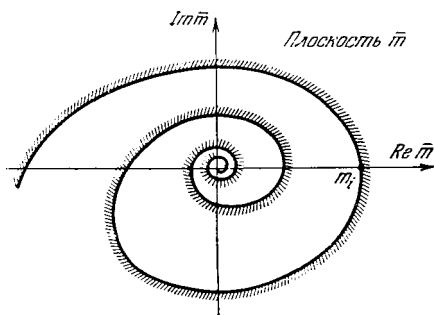


Рис. 76.  $D$ -разбиение по  $\frac{1}{K_{\text{охв}}} = m$  для системы с запаздыванием.

На основании проведенных исследований и результатов, приведенных выше, легко выяснить причины неудач при попытках получить большие коэффициенты усиления в системах с запаздыванием введением воздействия по производной.

Рассмотрим систему автоматического регулирования, содержащую элемент с запаздыванием, которая структурно может быть представлена одноконтурной цепочкой. Допустим, далее, что измерительный элемент, кроме регулируемой величины, замеряет скорость ее изменения. Таким образом, на вход системы подаются как сама регулируемая величина, так и ее первая производная.



Если обозначить собственный оператор системы без запаздывания через  $D(p)$ , запаздывание через  $\tau$  и общий коэффициент усиления через  $K$ , то характеристическое уравнение для рассматриваемого случая запишется:

$$D(p)e^{\tau p} + KTp + K = 0, \quad (3.95)$$

где  $T_p$  — передаточная функция дифференцирующего звена. Поделив (3.95) на  $K$  и обозначив  $\frac{1}{K} = m$ , получим:

$$mD(p)e^{\tau p} + Tp + 1 = 0. \quad (3.96)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (3.93), для которого была установлена невозможность получения устойчивости при больших коэффициентах усиления.

Такое введение воздействия по производной эквивалентно охвату всего контура регулирования, включая и элемент с запаздыванием, стабилизирующим устройством с оператором

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = Tp. \quad (3.97)$$

Характеристическое уравнение в этом случае будет такое же, как и уравнение (3.95), и, следовательно, получить устойчивость при больших коэффициентах усиления здесь невозможно.

Нетрудно показать, что и в рассматриваемом случае можно получить устойчивую систему при любом, в том числе и достаточно большом, коэффициенте усиления, используя только первую производную. Для этой цели необходимо, чтобы элемент, дающий на выходе производную, не охватывал весь контур регулирования, а только часть его. При этом, так как оператор стабилизирующего устройства имеет вид (3.97), количество охватываемых им звеньев на основании (3.91) не должно превышать трех. Приведенное здесь рассмотрение показывает, что простым переключением места введения производной без изменения аппаратуры, входящей в систему, можно существенно улучшить динамические свойства системы.

Для повышения устойчивости иногда стремятся использовать не только первую, но и вторую производную. В некоторых случаях это может привести к улучшению динамических свойств системы. Однако могут быть и такие случаи, когда полученная с большим трудом вторая производная не только не улучшает свойства системы, а делает ее непригодной. Последний случай мы проиллюстрируем на примере системы с двумя запаздываниями.

Допустим, что система без запаздывания может быть структурно представлена некоторым количеством аperiodических звеньев (число этих звеньев в данном случае не имеет значения), и введем стабилизирующее звено с оператором

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = ap^2 + bp, \quad (3.98)$$

охватывающее только одно апериодическое звено (рис. 77) и одно звено с запаздыванием.

Характеристическое уравнение в этом случае запишется:

$$\prod_{i=1}^N (1 + T_i p) e^{(\tau_1 + \tau_2) p} + K (ap^2 + bp) \prod_{j=2}^N (1 + T_j p) e^{\tau_2 p} + \prod_{i=1}^N K_i = 0. \quad (3.99)$$

Такая система структурно неустойчива, так как уравнение (3.99) не содержит главного члена. Устранение второй производной ( $a = 0$ )

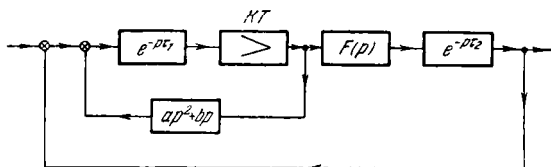


Рис. 77. К выяснению влияния способа введения стабилизирующих устройств на устойчивость системы с запаздыванием.

делает систему структурно устойчивой, а переключение первой производной так, чтобы она не охватывала элемента с запаздыванием, делает систему устойчивой для любого коэффициента усиления при соответствующем выборе параметров.

### § 3.8. Примеры

#### 1. Пример исследования устойчивости системы с несколькими стабилизирующими устройствами

В качестве иллюстрации исследования устойчивости при введении нескольких стабилизирующих устройств рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 78. Основные элементы

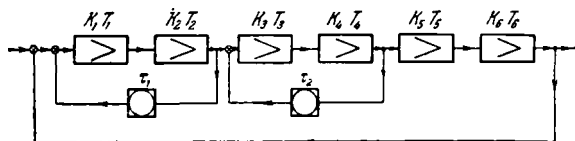


Рис. 78. К расчету параметров стабилизирующих устройств.

системы представляются шестью апериодическими звеньями. Для стабилизации вводятся два стабилизирующих устройства с передаточными функциями  $\frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}$  и  $\frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p}$ , которые охватывают соответственно первые два и последующие два звена. Полагаем, что коэффициенты

усиления звеньев, охваченных стабилизирующими устройствами, можно менять в широких пределах.

Передаточная функция для системы, показанной на рис. 78, запишется:

$$K(p) = \frac{\frac{K_1}{1+T_1p} \cdot \frac{K_2}{1+T_2p} \cdot \frac{K_3}{1+T_3p} \cdot \frac{K_4}{1+T_4p} \cdot \frac{K_5}{1+T_5p} \cdot \frac{K_6}{1+T_6p}}{1 + \frac{K_1}{1+T_1p} \cdot \frac{K_2}{1+T_2p} \cdot \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p} + \frac{K_1}{1+T_1p} \cdot \frac{K_2}{1+T_2p} \cdot \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p} \cdot \frac{K_3}{1+T_3p} \cdot \frac{K_4}{1+T_4p} \cdot \frac{\tau_2 p}{1+\tau_2 p} + \frac{K_1}{1+T_1p} \cdot \frac{K_2}{1+T_2p} \cdot \frac{\tau_1 p}{1+\tau_1 p} \cdot \frac{K_3}{1+T_3p} \cdot \frac{K_4}{1+T_4p} \cdot \frac{\tau_2 p}{1+\tau_2 p} \cdot \frac{K_5}{1+T_5p} \cdot \frac{K_6}{1+T_6p}}. \quad (3.100)$$

Характеристическое уравнение, получаемое приравниванием нулю знаменателя (3.100), после элементарных преобразований запишется:

$$\prod_{i=1}^6 (1 + T_i p) (1 + \tau_i p) (1 + \tau_2 p) + K_1 K_2 \left[ \tau_1 p \prod_{i=3}^6 (1 + T_i p) (1 + \tau_2 p) + \right. \\ \left. + \tau_{11} \tau_2 p \prod_{i=1, 2, 5, 6} (1 + T_i p) (1 + \tau_1 p) \right] + \\ + (K_1 K_2)^2 \tau_1 \tau_1 \tau_2 p^2 (1 + T_5 p) (1 + T_6 p) + \\ + (K_1 K_2)^2 \tau_{11} K_5 K_6 (1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p) = 0, \quad (3.101)$$

где

$$\tau_{11} = \frac{K_3 K_4}{K_1 K_2}.$$

Поделим (3.101) на  $(K_1 K_2)^2$  и обозначим  $\frac{1}{K_1 K_2} = m$ . Получаем:

$$m^2 \prod_{i=1}^6 (1 + T_i p) (1 + \tau_i p) (1 + \tau_2 p) + \\ + m \left[ \tau_1 p \prod_{i=3}^6 (1 + T_i p) (1 + \tau_2 p) + \tau_{11} \tau_2 p \prod_{i=1, 2, 5, 6} (1 + T_i p) (1 + \tau_1 p) \right] + \\ + \tau_{11} \tau_1 \tau_2 p^2 (1 + T_5 p) (1 + T_6 p) + \\ + \tau_{11} K_5 K_6 (1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p) = 0. \quad (3.102)$$

Вырожденное уравнение получим из (3.102), полагая в нем  $m=0$ :

$$\tau_1 \tau_2 p^2 (1 + T_5 p) (1 + T_6 p) + K_5 K_6 (1 + \tau_1 p) (1 + \tau_2 p) = 0. \quad (3.103)$$

Раскрывая скобки в (3.103), получаем:

$$T_5 T_6 \tau_1 \tau_2 p^4 + \tau_1 \tau_2 (T_5 + T_6) p^3 + \tau_1 \tau_2 (1 + K_5 K_6) p^2 + \\ + (\tau_1 + \tau_2) K_5 K_6 p + K_5 K_6 = 0. \quad (3.104)$$

Условия Раута — Гурвица запишутся:

$$\tau_1^2 \tau_2^2 (T_5 + T_6) (1 + K_5 K_6) (\tau_1 + \tau_2) K_5 K_6 - \tau_1^2 \tau_2^2 (T_5 + T_6)^2 K_5 K_6 - \\ - (\tau_1 + \tau_2)^2 K_5^2 K_6^2 T_5 T_6 \tau_1 \tau_2 > 0. \quad (3.105)$$

Условию (3.105) всегда можно удовлетворить соответствующим выбором  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $K_5$ ,  $K_6$ , если заданы значения  $T_5$  и  $T_6$ .

Рассмотрим вспомогательное уравнение. Как это ясно из уравнения (3.102), в данном случае вспомогательное уравнение будет второго рода, так как степени рядом стоящих полиномов в (3.102) убывают на два. Пользуясь ранее полученным законом составления вспомогательных уравнений, имеем для данного случая следующее вспомогательное уравнение:

$$\begin{aligned} & T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 \tau_1 \tau_2 q^5 + \\ & + (T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 \tau_1 + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 \tau_2 + T_1 T_2 T_4 T_5 T_6 \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_3 T_4 T_5 T_6 \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_5 T_6 \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4 T_6 \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \tau_1 \tau_2 + T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 \tau_1 \tau_2) q^4 + [(T_1 T_2 T_3 T_4 + T_3 T_4) \tau_1 \tau_2 T_5 T_6] q^3 + \\ & + [T_5 T_6 (T_3 T_4 \tau_1 + T_1 T_2 \tau_2 \tau_1) + \tau_1 \tau_2 T_5 (T_5 T_6 + T_1 T_2 \tau_1) + \\ & + \tau_1 \tau_2 T_6 (T_3 T_4 + T_1 T_2 \tau_1) + \tau_1 \tau_2 T_5 (T_1 T_4 + \tau_1 T_2 T_6) + \\ & + \tau_1 \tau_2 T_6 (T_4 T_5 + T_1 T_5 \tau_1)] q^2 + \tau_1 \tau_2 T_5 T_6 q + \tau_1 \tau_2 (T_5 + T_6) = 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Коэффициенты вспомогательного уравнения зависят как от постоянных времени звеньев, охваченных стабилизирующими устройствами, так и от постоянных времени стабилизирующих устройств. Если первые известны, то устойчивость обеспечивается соответствующим выбором постоянных времени стабилизирующих устройств.

## 2. Пример исследования устойчивости системы с запаздыванием

Рассмотрим систему автоматического регулирования толщины полосы при холодном прокате металла.

На рис. 79 представлена принципиальная схема такой системы регулирования.

Измерительным элементом служит индуктивный датчик толщины. При отклонении толщины полосы металла от заданного калибра на выходе измерителя толщины возникает напряжение, которое подается на вход усилителя  $У$ . Выход усилителя питает управляющую обмотку электромашиного усилителя ЭМУ. Выходное напряжение ЭМУ подано на якорь приводного двигателя нажимных винтов. Таким образом, усиленное выходное напряжение измерителя толщины, поданное на якорь приводного двигателя, вызывает его вращение, что соответствующим образом меняет раствор валков. Особенностью

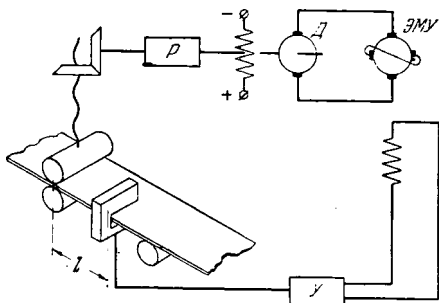


Рис. 79. Принципиальная схема системы регулирования толщины проката.

этой системы является то, что толщина полосы измеряется не в том месте, где находятся валки, а на некотором расстоянии  $l$  от валков. Поэтому сигнал об изменении калибра система регулирования получает через некоторое время  $\tau$ , которое при скорости прокатки  $v$  определяется из соотношения

$$\tau = \frac{l}{v}. \quad (3.107)$$

Напишем уравнение рассматриваемой системы. Полагая, что измеритель толщины может быть представлен апериодическим звеном, и обозначая отклонение толщины от калибра через  $\varphi$ , а напряжение на выходе измерителя через  $U_T$ , получим:

$$\left(1 + T_1 \frac{d}{dt}\right) U_T = K_1 \varphi, \quad (3.108)$$

где  $T_1$  — постоянная времени, а  $K_1$  — коэффициент усиления измерителя толщины.

Уравнение усилителя запишется:

$$U_Y = K_Y U_T. \quad (3.109)$$

Уравнение электромашинного усилителя имеет вид (вывод уравнения ЭМУ и двигателя дан в примере в конце второй главы, см. стр. 74)

$$\left(1 + T_2 \frac{d}{dt}\right) \left(1 + T_3 \frac{d}{dt}\right) U_\Phi = K_2 K_3 U_Y. \quad (3.110)$$

Уравнение двигателя запишется:

$$\left(T_4 T_5 \frac{d^2}{dt^2} + T_4 \frac{d}{dt} + 1\right) \frac{d}{dt} \varphi_1 = K_4 U_\Phi, \quad (3.111)$$

где  $T_4$  — электромеханическая постоянная времени,  $T_5$  — постоянная времени якорей ЭМУ и двигателя,  $K_4$  — коэффициент усиления двигателя. Уравнение звена с запаздыванием имеет вид

$$\varphi = \varphi_1(t - \tau). \quad (3.112)$$

Преобразуя по Лапласу уравнения (3.108) — (3.112) и считая начальные условия нулевыми, получим соответственно:

$$\frac{U_T(p)}{\varphi(p)} = \frac{K_1}{1 + T_1 p}, \quad (3.113)$$

$$\frac{U_Y(p)}{U_T(p)} = K_Y, \quad (3.114)$$

$$\frac{U_\Phi(p)}{U_Y(p)} = \frac{K_2 K_3}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}, \quad (3.115)$$

$$\frac{\varphi_1(p)}{U_\Phi(p)} = \frac{K_4}{(T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1)p}, \quad (3.116)$$

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi_1(p)} = e^{-\tau p}. \quad (3.117)$$

Из (3.113) — (3.117) получаем характеристическое уравнение в следующей форме:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1)p + K_1 K_2 K_3 K_4 K_y e^{-\tau p} = 0. \quad (3.118)$$

Численные значения отдельных параметров примем следующие:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,01 \text{ сек}, & T_2 &= 0,05 \text{ сек}, & T_3 &= 0,1 \text{ сек}, \\ T_4 &= 0,2 \text{ сек}, & T_5 &= 0,05 \text{ сек}, & K_1 K_4 &= 0,1, \\ K_2 K_3 K_y &= 1000, & \tau &= 0,1 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Если подставить в уравнение (3.118) численные значения коэффициентов, то легко убедиться, что система будет неустойчивой. Для получения системы, устойчивой при любом сколь угодно большом коэффициенте усиления, введем стабилизирующее устройство и включим его так, как это показано на структурной схеме рис. 80.

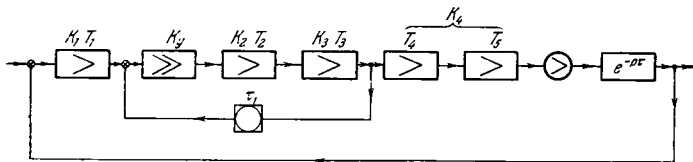


Рис. 80. Структурная схема.

В качестве стабилизирующего устройства в данной схеме применяется трансформатор, работающий в режиме холостого хода (выходной сигнал трансформатора подан на вход электронного усилителя). Запишем уравнения трансформатора (рис. 81)

$$U_{вх} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = (L_1 p + R_1) i_1.$$

$$U_{вых} = M \frac{di_1}{dt} = M p i_1, \quad \text{где } p = \frac{d}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{M p}{L_1 p + R_1} = \frac{\frac{M}{R_1} p}{\frac{L_1}{R_1} p + 1} \approx \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} \quad (3.119)$$

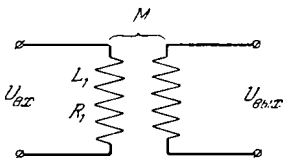


Рис. 81. Схема стабилизирующего трансформатора.

при условии, что  $M \approx L_1$ . Характеристическое уравнение при включенном стабилизирующем устройстве запишется:

$$\begin{aligned} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1)p(1 + \tau_1 p)e^{\tau p} + \\ + K_y K_2 K_3 [\tau_1 p(1 + T_1 p)(T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1)p e^{\tau p} + \\ + K_1 K_4 (1 + \tau_1 p)] = 0. \end{aligned} \quad (3.120)$$



На рис. 83 представлена кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения, построенная по уравнению (3.124). Из рисунка видно, что область устойчивости

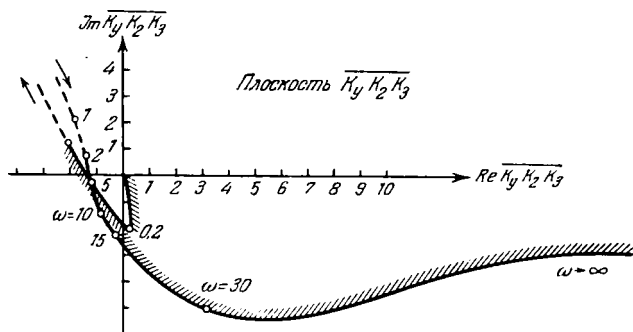


Рис. 83.  $\mathcal{D}$ -разбиение по коэффициенту усиления элементов, охватываемых стабилизирующим устройством.

является вся вещественная полуось плоскости

$$\overline{K_y K_2 K_3}.$$

Таким образом, система будет оставаться устойчивой при любом значении коэффициентов усиления  $K_y K_2 K_3$ , в том числе при  $K_y K_2 K_3 \rightarrow \infty$ .

### 3. Пример разомкнутой системы, имеющей характеристику с клювом

Рассмотрим систему автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 84.

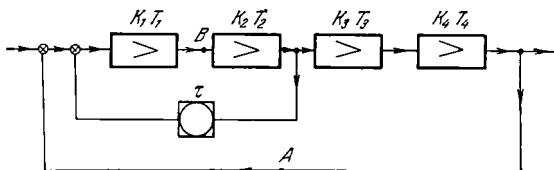


Рис. 84. Структурная схема.

Эта система представляет интерес с точки зрения зависимости характера расположения амплитудно-фазовой характеристики от места размыкания системы.



Разомкнем систему в точке  $A$ ; тогда выражение для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы запишется:

$$W_A(j\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 (1 + \tau j\omega)}{\prod_{i=1}^4 (1 + T_i j\omega) (1 + \tau j\omega) + K_1 K_2 \tau j\omega (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega)}. \quad (3.125)$$

Разомкнем теперь систему в точке  $B$ . Выражение для амплитудно-фазовой характеристики в этом случае запишется:

$$W_B(j\omega) = \frac{K_1 K_2 \tau j\omega (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) + K_3 K_4 (1 + \tau j\omega)}{\prod_{i=1}^4 (1 + T_i j\omega) (1 + \tau j\omega)}. \quad (3.126)$$

На рис. 85 представлены соответственно для уравнения (3.126) кривая  $a$  и для (3.125) кривая  $b$ . При построении кривых были приняты следующие данные:

$$T_1 = 0,01 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,1 \text{ сек},$$

$$T_3 = 0,34 \text{ сек},$$

$$T_4 = 0,1 \text{ сек}; \quad K_1 K_2 = 40, \quad K_3 K_4 = 15,$$

$$\tau = 0,5 \text{ сек}.$$

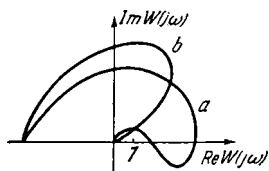


Рис. 85. Амплитудно-фазовые характеристики:  $a$  — с клювом,  $b$  — без клюва.

Как видно из рис. 85, кривая  $a$  имеет клювообразную форму, в то время как кривая  $b$  не имеет клюва. Отсюда видно, что делать какие-либо заключения о системе в целом по тому, имеет ли амплитудно-фазовая характеристика клювообразную форму или не имеет, лишено всякого основания. Существенно, однако, то, что если структура принадлежит к классу устойчивых при неограниченном увеличении их коэффициента усиления, то существует такое место размыкания системы, для которого амплитудно-фазовая характеристика имеет клювообразную форму. Найти это место не представляет труда. Размыкать нужно в том месте, где находятся элементы с коэффициентами усиления, увеличение которых не приводит к нарушению устойчивости системы.

## ГЛАВА IV

### СТРУКТУРНЫЕ УСЛОВИЯ КАЧЕСТВА

#### § 4.1. Постановка и ограничение задачи

Качество систем автоматического регулирования существенным образом связано с количественным значением параметров отдельных звеньев, составляющих систему автоматического регулирования. Однако проблема качества может быть поставлена и в несколько другом плане, а именно — способна ли данная схема при данной ее структуре обеспечить требуемое качество (быстродействие, ограниченное перерегулирование и т. д.), если параметры схемы имеют оптимальные значения. Иначе говоря, речь идет о выделении таких структур, для которых обеспечение требуемого качества сводится к соответствующему выбору параметров без изменения самой структуры, и таких структур, в рамках которых требуемое качество принципиально не может быть получено. При такой постановке задачи необходимо внести ряд разъяснений и соответствующих ограничений:

а) Если бы можно было все без исключения параметры системы менять в широких пределах, то вообще не было бы никаких проблем качества, а в некоторых случаях и проблемы устойчивости. Действительно, достаточно в одноконтурной цепи одну или две постоянных времени оставить конечными, а остальные сделать достаточно малыми (или сколь угодно малыми), и система будет устойчивой при больших коэффициентах усиления. При этом можно также получить необходимое качество процесса. Однако практически такая возможность изменения параметров в широких пределах исключена. В каждой системе регулирования можно без труда выделить параметры, которые изменять нельзя. Поэтому в дальнейшем, когда речь идет об изменении или выборе параметров, то это относится к таким параметрам, которые в реальной системе можно менять.

б) Известно, что характер переходного процесса (качество регулирования) существенно зависит от начальных условий, при которых этот процесс возникает. Вместе с тем начальные условия могут быть весьма разнообразными, так что трудно указать, какие начальные условия следует считать наиболее вероятными. Кроме того, начальные

условия не являются какими-либо внутренними структурными свойствами системы. Поэтому для определенности будем в дальнейшем полагать, что переходный процесс (процесс регулирования) возникает при нулевых начальных условиях.

в) Существенное влияние на характер процесса регулирования оказывают вид внешнего возмущения и место его приложения. Более того, в ряде случаев так называемых комбинированных систем дополнительное воздействие на систему от нагрузки используется для улучшения качества системы. В настоящей книге эти вопросы не рассматриваются. Основная цель, которая здесь ставилась, состоит в выяснении внутренних возможностей данной структуры. Поэтому будем в дальнейшем придерживаться весьма распространенного в теории и практике регулирования условия, что переходный процесс вызывается возмущением, имеющим форму единичного скачка, приложенного ко входу системы. Это условие, однако, не может быть препятствием для нахождения общих структурных свойств системы как таковой.

При отступлении от принятых здесь условий будут сделаны соответствующая оговорка и необходимые разъяснения. На некоторых примерах нами будет показано, как учитывать внешнее возмущение, место его приложения и начальные условия.

г) Из всех факторов, определяющих качество процесса в системах автоматического регулирования, наиболее существенными, кроме устойчивости, являются:

1) достаточная установившаяся точность,

2) достаточное быстродействие и

3) величина перерегулирования, которая не должна превышать некоторого заранее заданного значения.

Сформулируем некоторые условия качества и попытаемся связать их со структурой системы.

Исходя из сказанного выше, в основу оценки качества положим следующее. Структура должна принципиально допускать неограниченную область положительности вещественной частотной характеристики замкнутой системы регулирования и оставаться устойчивой при неограниченном коэффициенте усиления. Эти два условия выбраны из следующих соображений. Как известно (см. главу I), время регулирования может быть выражено следующим неравенством:

$$t > \frac{\pi}{\omega_0},$$

где  $\omega_0$  — частота, определяющая область частот, в которой вещественная частотная характеристика замкнутой системы имеет положительное значение. При частоте  $\omega_0$  эта частотная характеристика впервые пересекает ось частот. Будем в дальнейшем называть эту область частот областью положительности. Если удастся установить, какой предельной областью положительности обладает данная структура, то тем самым можно будет установить ее максимально воз-

можное быстрое действие и отбросить в каждом конкретном случае структуры, не подходящие по условиям быстрого действия. В связи с этим целесообразно поставить задачу о синтезе таких структур, для которых область положительности равна бесконечности.

Что касается величины перерегулирования, то задача состоит в том, чтобы связать необходимые условия апериодичности с некоторыми параметрами, которые можно в определенных пределах менять (например, с величиной коэффициента усиления и с расположением кривой  $D$ -разбиения по этому параметру). По характеру кривой  $D$ -разбиения, построенной качественно, можно будет отбирать структуры, которые не удовлетворяют необходимым условиям апериодичности, и структуры, которые этим условиям удовлетворяют.

д) Как правило, характеристики элементов систем автоматического регулирования являются нелинейными. Уместно поэтому поставить вопрос — имеет ли вообще смысл говорить о качестве линейных систем, когда в действительности эти системы нелинейны? В настоящей работе мы попытаемся определить для рассматриваемого класса систем, в какой мере рассмотрение структурных свойств линейных систем с точки зрения качества является первым приближением к действительным показателям качества реальных нелинейных систем, и установить связь между наиболее рациональными с рассматриваемой здесь точки зрения структурами и так называемыми оптимальными нелинейными системами. Поэтому в настоящей главе будем полагать системы и их элементы линейными. Вопросы, связанные с учетом нелинейности, и другие вопросы, указанные выше, будут рассмотрены в следующей главе.

#### **§ 4.2. Структуры, допускающие неограниченное увеличение коэффициента усиления и обладающие любой областью положительности вещественной частотной характеристики**

Во второй главе были рассмотрены основные свойства одноконтурной системы регулирования. Было установлено, что одноконтурная система имеет ограниченный по величине критический коэффициент усиления и ограниченную область положительности вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

Для увеличения критического коэффициента усиления и расширения области положительности в систему вводят стабилизирующие устройства. Конечной целью проводимых ниже исследований является нахождение таких структур, в которых величина коэффициента усиления и область положительности вещественной частотной характеристики принципиально могут иметь неограниченно большие значения при сохранении устойчивости системы. Для этой цели мы рассмотрим влияние вводимых стабилизирующих устройств на основные свойства системы.

Рассмотрим простейший случай.

1. Охват всего контура регулирования стабилизирующим устройством с передаточной

функцией  $\rho \frac{\tau p}{1 + \tau p}$ .

На рис. 86 представлена рассматриваемая структурная схема системы автоматического регулирования. Одноконтурная цепь с передаточной функцией  $\frac{K}{D(p)}$  охватывается стабилизирующим устройством с передаточной функцией  $\frac{\rho \tau p}{1 + \tau p}$ .

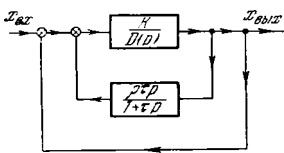
Передаточная функция замкнутой системы запишется следующим образом:

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = \frac{\frac{\frac{K}{D(p)}}{1 + \frac{K}{D(p)} \rho \frac{\tau p}{1 + \tau p}}}{1 + \frac{\frac{K}{D(p)}}{1 + \frac{K}{D(p)} \rho \frac{\tau p}{1 + \tau p}}} = \frac{K(1 + \tau p)}{D(p)(1 + \tau p) + K\rho\tau p + K(1 + \tau p)}. \quad (4.1)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$D(p)(1 + \tau p) + K\rho\tau p + K(1 + \tau p) = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления имеет следующий вид:



$$\bar{K} = -\frac{D(j\omega)(1 + \tau j\omega)}{\rho\tau j\omega + 1 + \tau j\omega} = -\frac{D(j\omega)}{1 + \rho \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}}. \quad (4.3)$$

Рис. 86. Структурная схема, где стабилизирующее устройство охватывает всю систему.

Уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения для случаев, когда система не имеет стабилизирующего устройства, получим из (4.3), если положить в нем  $\tau = 0$ :

$$\bar{K} = -D(j\omega). \quad (4.4)$$

Обозначим кривую  $\mathcal{D}$ -разбиения системы без стабилизирующего устройства через  $D_K(j\omega)$ . Тогда (4.3) переписывается в виде

$$\bar{K} = \frac{D_K(j\omega)}{1 + \rho \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}}. \quad (4.5)$$

Рассмотрим вначале случай, когда в операторе стабилизирующего звена  $\rho = 1$ . При этих условиях (4.5) запишется:

$$\bar{K} = - \frac{D_k(j\omega)}{1 + \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}}. \quad (4.6)$$

Допустим, что кривая  $D_k(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до  $\infty$  имеет вид, представленный на рис. 87. Вторая часть знаменателя (4.6) при изменении частоты  $\omega$  от нуля до бесконечности изображается полуокружностью с радиусом  $r = 0,5$  и центром, расположенным на расстоянии 1,5 от начала координат (кривая 2 рис. 87).

Проведем вспомогательную окружность с радиусом, равным  $0,5K_{кр}$ , и центром, расположенным на расстоянии  $1,5K_{кр}$ , где  $K_{кр}$  — критический коэффициент усиления системы без стабилизирующего устройства. На основании простых геометрических построений ясно, что эта вспомогательная окружность, пересекающая ось  $Re \bar{K}$  в точке с критической частотой, будет касаться прямой, являющейся касательной к кривой 2 (рис. 87) и проходящей через начало координат (прямая  $ab$  на рис. 87).

Если мы проведем прямые, пересекающие обе окружности, то отношение отрезков

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ad}{ae} = \dots = \text{const} = K_{кр}. \quad (4.7)$$

На основании (4.7) можно сделать следующие выводы:

а) Если вспомогательная окружность не пересекает границы  $D$ -разбиения  $D_k(j\omega)$ , то введение стабилизирующего звена рассматриваемого типа, охватывающего всю систему, уменьшает критическое значение коэффициента усиления системы. Действительно, согласно уравнению (4.6) учет влияния стабилизирующего звена сводится к тому, что для каждой частоты необходимо поделить абсолютные значения числителя и знаменателя и вычесть их фазы. Так как по условию вспомогательная окружность не пересекает границу  $D_k(j\omega)$ ,

а может лишь касаться ее на оси  $Re \bar{K}$ , то отношение  $\frac{ab}{ac}$  для любой частоты (рис. 88) будет всегда меньше  $K_{кр}$ , и, следовательно, если выбрать  $\tau$  так, что точка, соответствующая  $\omega_1$ , попадает на ось  $Re \bar{K}$ , то критическое значение коэффициента усиления при этом

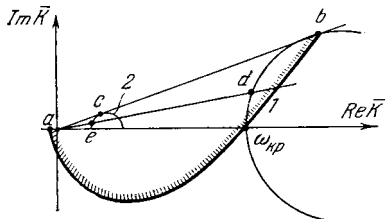


Рис. 87. К выяснению влияния стабилизирующего устройства на величину критического коэффициента усиления.

будет меньше критического значения коэффициента усиления  $K_{кр}$  системы без стабилизирующего звена.

б) Если вспомогательная окружность пересекает границу  $\mathcal{D}$ -разбиения  $D_k(j\omega)$  (рис. 89), то введением стабилизирующего устройства рассматриваемого типа критическое значение коэффициента усиления  $K_{кр}$  системы без стабилизации может быть повышено. Выясним, как выбрать параметры стабилизирующего устройства, чтобы получить максимально возможный критический коэффициент усиления. На основании (4.7) ясно, что для частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  критический коэффициент

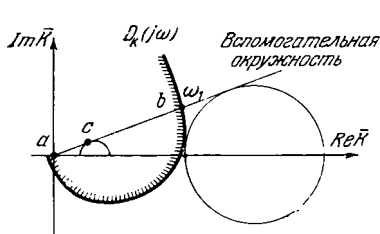


Рис. 88. Случай, когда введение стабилизирующего устройства уменьшает критические значения коэффициента усиления.

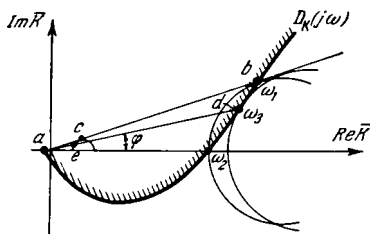


Рис. 89. Определение максимально возможного значения коэффициента усиления.

усиления один и тот же и равен критическому коэффициенту усиления  $K_{кр}$  системы без стабилизирующих устройств. Максимальный критический коэффициент усиления будет иметь место при частоте, лежащей между частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Для того чтобы определить частоту, при которой получается максимально возможный критический коэффициент усиления, нужно провести вторую вспомогательную окружность, касающуюся границы  $\mathcal{D}$ -разбиения  $D_k(j\omega)$  и прямой  $ab$  с центром, расположенным на оси  $\text{Re } \bar{K}$ . На рис. 89 вторая вспомогательная окружность касается кривой  $D_k(j\omega)$  в точке с частотой  $\omega_3$ . Численно максимальный критический коэффициент усиления определяется отношением отрезков

$$\frac{ad}{ae} = K_{кр \max}.$$

Для того чтобы реально осуществить такой критический коэффициент усиления, необходимо выбрать постоянную  $\tau$  стабилизирующего устройства так, чтобы фаза знаменателя (4.6) при  $\omega = \omega_3$  равнялась  $\varphi$ . Тогда вектор  $ad$  повернется на угол  $\varphi$  и попадет на ось частот. Указанное обстоятельство будет иметь место при

$$\tau = \frac{1}{4\omega_3 \operatorname{tg} \varphi} [1 - \sqrt{1 - 8 \operatorname{tg}^2 \varphi}]. \quad (4.8)$$

Максимальный критический коэффициент будет величиной конечной, если порядок оператора  $D(p)$  выше второго.

в) При включении стабилизирующего устройства указанного типа отрицательной обратной связью максимально возможная область положительности всегда увеличивается, но остается конечной, если порядок  $D(p)$  выше второго. Если же это стабилизирующее устройство включается как положительная обратная связь, то область положительности уменьшается.

г) Если  $D_K(j\omega)$  имеет вид, представленный на рис. 90, то при включении стабилизирующего устройства рассматриваемого типа отрицательной связью критическое значение коэффициента усиления системы уменьшается. В случае такой кривой  $D_K(j\omega)$  увеличение критического значения коэффициента усиления может быть достигнуто, если изменить знак выходного сигнала стабилизирующего звена. Расположение кривых в этом случае будет иметь вид, представленный на рис. 90. В отличие от ранее рассмотренного способа включения стабилизирующего звена, называемого иногда гибкой отрицательной обратной связью, способ включения, рассматриваемый в данном случае, можно назвать гибкой положительной обратной связью.

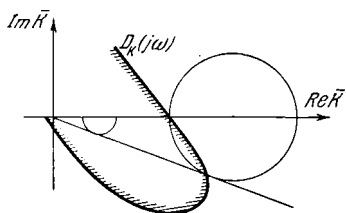


Рис. 90. К определению характера влияния положительной обратной связи.

Для случая, когда  $\rho \neq 1$ , центр полуокружности, соответствующей знаменателю (4.6), будет расположен на оси  $\text{Re } \bar{K}$  на расстоянии  $1 + 0,5\rho$  от начала координат; радиус этой полуокружности будет равен  $0,5\rho$ . Чтобы построить вспомогательную окружность, здесь необходимо из начала координат провести прямую, которая касается полуокружности  $\rho \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}$ , и затем провести окружность, проходящую через критическую частоту и касающуюся указанной прямой. Дальнейшие оценки влияния стабилизирующего звена и нахождение критического коэффициента усиления при заданном  $\rho$  производятся так, как это было сделано для случая  $\rho = 1$ .

Проведенное исследование показывает, что для получения неограниченных по величине критических значений коэффициентов усиления и областей положительности вещественной частотной характеристики при условии, что исходная одноконтурная система описывается уравнением выше второго порядка, нужно идти на усложнение стабилизирующего устройства или на изменение структуры системы, т. е. на изменение характера включения стабилизирующего устройства.



## 2. Введение последовательно в цепь регулирования дифференцирующего устройства первого порядка

Выберем в данном случае стабилизирующее устройство, передаточная функция которого определяется соотношением

$$\frac{x_{\text{вых}}}{x_{\text{вх}}} = Tp. \quad (4.9)$$

Если по-прежнему обозначить передаточную функцию разомкнутой системы без стабилизации через  $\frac{K}{D(p)}$ , то характеристическое уравнение замкнутой системы при учете стабилизирующего звена с передаточной функцией (4.9), включенного последовательно в цепь, получит вид

$$D(p) + K(Tp + 1) = 0. \quad (4.10)$$

Отсюда уравнение кривой  $D$ -разбегания по общему коэффициенту усиления  $K$  запишется:

$$\bar{K} = -\frac{D(j\omega)}{1 + Tj\omega}. \quad (4.11)$$

Из ранее полученных результатов ясно, что величина критического коэффициента усиления будет величиной конечной, если порядок уравнения, описывающего систему без стабилизации, будет выше

Рис. 91. К определению влияния воздействия по производной на критический коэффициент усиления.

третьего (в данном случае  $n_1=1$  и  $n_2=0$ ; следовательно,  $n_1-n_2+2=3$ ). При этом конечной будет также область положительности вещественной частотной характеристики. Рассмотрим практический прием, дающий возможность оценить влияние введения воздействия по производной \*) на критический коэффициент усиления и на область положительности.

Допустим, что кривая  $D$ -разбегания по  $K$  без учета стабилизации имеет вид, представленный на рис 91. Учет влияния воздействия по производной, как это видно из (4.11), сводится к тому, что для каждой частоты  $\omega_i$  нужно вектор  $D(j\omega)$  поделить на вектор  $1 + Tj\omega$ .

На плоскости  $\bar{K}$  выражение  $1 + Tj\omega$  дает прямую, параллельную мнимой оси и сдвинутую от этой оси вправо на расстояние, равное единице.

\*) Эту задачу применительно к нахождению критического коэффициента усиления несколько другим путем решил М. А. Айзерман. См. Айзерман М. А., Об увеличении критического коэффициента усиления за счет воздействия по производной, Автоматика и телемеханика, т. 12, № 2, 1951.

На рис. 91, кроме кривой  $D$ -разбиения, приведена и прямая  $1 + Tj\omega$ . Проведем прямую, соединяющую начало координат с точкой на кривой  $D$ -разбиения, где  $\omega = \omega_1$ . Отрезок  $ab$  определяет величину вектора  $\bar{K}$  для  $\omega = \omega_1$ , а угол  $\varphi$  определяет его фазу.

Абсолютное значение вектора, определяемого знаменателем (4.11), задается для разных частот отрезками  $\bar{ac}$ ,  $\bar{ad}$  и т. д. Выберем величину  $T$  так, чтобы для частоты  $\omega_i$  фаза знаменателя (4.11) также была равна  $\varphi$ . Это будет иметь место, если  $T$  определить по формуле

$$T = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\omega_i}. \quad (4.12)$$

Величина критического коэффициента усиления при учете воздействия по производной с коэффициентом  $T$  определится, как отношение отрезков

$$K_{\text{кр}} = \frac{ab}{ac}.$$

Опустим из точки  $b$  перпендикуляр на ось  $\operatorname{Re} \bar{K}$ . Нетрудно видеть, что отрезок  $af$  равен критическому коэффициенту усиления при указанных выше условиях. Действительно, из треугольников  $abf$  и  $acg$  имеем:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{af}{ag},$$

но так как  $ag = 1$ , то  $af = \frac{ab}{ac} = K_{\text{кр}}$ .

Таким образом, если задана кривая  $D$ -разбиения системы без учета воздействия по производной, то учет изменения критического коэффициента усиления и выбор величины коэффициента воздействия по производной можно производить так, как это указывалось выше.

Для этой цели опустим перпендикуляр на ось  $\operatorname{Re} \bar{K}$  из точки на кривой  $D$ -разбиения, лежащей в первом квадранте. Отрезок, отсекаемый перпендикуляром на оси  $\operatorname{Re} \bar{K}$ , и есть критический коэффициент усиления. Частота в точке кривой  $D$ -разбиения, из которой опускается перпендикуляр, определяет предельную область положительности.

Если кривая  $D$ -разбиения имеет вид, представленный на рис. 92 (порядок уравнения системы без стабилизации выше третьего), то максимально возможный коэффициент усиления может быть получен, как отрезок, отсекаемый на оси  $\operatorname{Re} \bar{K}$  перпендикуляром, касательным к кривой  $D$ -разбиения.

На рис. 91 была представлена кривая  $D$ -разбиения для случая, когда система без стабилизации описывается уравнением третьего

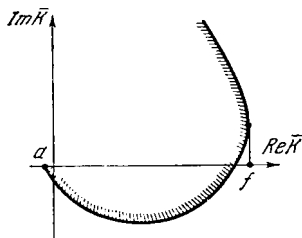


Рис. 92. Случай уравнения выше третьего порядка.

порядка. Из этого рисунка видно, что как критический коэффициент усиления, так и область положительности могут быть любыми; для этой цели нужно выбрать только соответствующую величину коэффициента воздействия по производной. Такое же решение принципиально можно было бы получить и для систем, описываемых уравнениями более высокого порядка, если одновременно повысить порядок производной, вводимой в качестве стабилизирующего сигнала. Так, для системы, описываемой уравнением четвертого порядка, нужно было бы ввести воздействие по первой и второй производным, а для системы  $n$ -й степени соответственно производные от первой до  $(n-2)$ -й включительно. В таких системах принципиально можно получить любое значение критического коэффициента усиления при любой области положительности. Такое решение, однако, связано с большими техническими трудностями, вытекающими из необходимости получения идеальных производных высоких порядков. Как будет проиллюстрировано на примере в конце настоящей главы, даже весьма малые искажения производной могут привести к резкому понижению критического коэффициента усиления, и системы, устойчивые при условии идеальности производных, фактически будут неустойчивыми. Если исходить из реально осуществимых стабилизирующих устройств, то такое простейшее введение их в схему (последовательное включение) не может обеспечить устойчивость при увеличении коэффициента усиления, а также не может обеспечить существенное увеличение области положительности вещественной частотной характеристики.

### 3. Включение стабилизирующего устройства с оператором $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ вокруг части одноконтурной системы

Включим стабилизирующее звено так, чтобы им охватывалась только часть звеньев одноконтурной системы. Указанный вариант включения представлен на рис. 93.

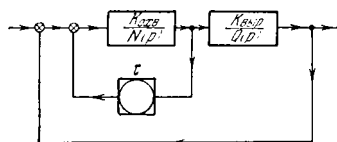


Рис. 93. Охват стабилизирующим устройством части контура.

В этом случае характеристическое уравнение системы представится следующим образом:

$$P(p)(1 + \tau p) + K_{\text{овх}} \tau p Q(p) + K(1 + \tau p) = 0, \quad (4.13)$$

где  $P(p)$  — произведение собственных операторов всех звеньев, входящих в одноконтурную цепь;  $Q(p)$  — произведение собственных операторов звеньев, не охваченных стабилизацией;  $K$  — общий коэффициент усиления;  $K_{\text{овх}}$  — коэффициент усиления звеньев, охваченных стабилизирующим звеном.

Найдем выражение для границы  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления. Из (4.13) имеем:

$$\bar{K} = -P(j\omega) - \frac{K_{\text{охв}}\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} Q(j\omega). \quad (4.14)$$

Обозначив через  $N(p)$  собственный оператор части системы, охваченной стабилизирующим звеном, можно записать:

$$P(p) = N(p)Q(p). \quad (4.15)$$

Уравнение границы  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$  запишется:

$$\bar{K} = -Q(j\omega) \left[ N(j\omega) + \frac{K_{\text{охв}}\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \right]. \quad (4.16)$$

Комплексный коэффициент усиления согласно (4.16) находится для заданной частоты  $\omega_i$ , как произведение вектора  $-Q(j\omega_i)$  на вектор  $\left[ N(j\omega_i) + \frac{K_{\text{охв}}\tau j\omega_i}{1 + \tau j\omega_i} \right]$ .

Вектор  $\bar{K}$  будет иметь чисто вещественное значение, если фаза вектора  $-Q(j\omega_i)$  равна и обратна по знаку фазе вектора  $\left[ N(j\omega_i) + \frac{K_{\text{охв}}\tau j\omega_i}{1 + \tau j\omega_i} \right]$  для соответствующей частоты  $\omega_i$ .

Выясним некоторые свойства систем, где в качестве стабилизирующего звена применяется звено с оператором  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ . Предположим, что основная цепочка состоит из устойчивых (апериодических

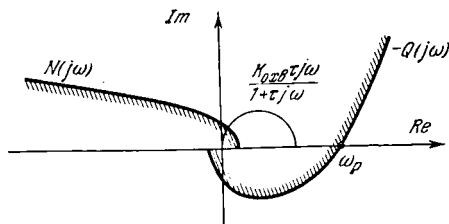


Рис. 94. Расположение составляющих кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$ .

и колебательных звеньев) и включает не более чем одно интегрирующее звено.

В этом случае при изменении частоты от нуля до бесконечности кривые  $-Q(j\omega)$  и  $N(j\omega)$  будут располагаться так, как это показано на рис. 94. Что касается выражения  $\frac{K_{\text{охв}}\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}$ , то для частоты, меняющейся от нуля до бесконечности, оно представляет собой уравнение

полуокружности с радиусом  $\frac{1}{2}K_{\text{охв}}$ , проходящей через начало координат, и центром, расположенным на оси  $\text{Re } \bar{K}$ .

Как было принято ранее, критической частотой  $\omega_{\text{кр}}$  будет частота, при которой кривая (4.16) пересекает положительную ось  $\text{Re } \bar{K}$ . Отсекаемый ею отрезок на действительной оси есть критический коэффициент усиления.

Кривая, соответствующая уравнению (4.16), обладает следующими свойствами.

а) Критическая частота  $\omega_{\text{кр}}$  будет всегда меньше частоты  $\omega_p$ , при которой кривая —  $Q(j\omega)$  первый раз пересекает положительную ось  $\text{Re } \bar{K}$  (рис. 94). Действительно, так как для  $\omega > \omega_p$  фаза —  $Q(j\omega)$  будет положительной, а фаза  $\left[ N(j\omega) + \frac{K_{\text{охв}} \tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \right]$  всегда положительна, то сумма этих фаз не может быть равной нулю, и, следовательно, частоты  $\omega > \omega_p$  не могут быть критическими.

б) Если количество звеньев, не охваченных обратной связью, больше двух или если  $Q(p)$  представляет собой оператор порядка выше второго, то предельная критическая частота есть величина конечная и не зависит от параметров стабилизирующего устройства и звеньев, им охваченных. Этот вывод вытекает непосредственно из пункта 1.

Общий вывод, вытекающий из свойств границы  $D$ -разбиения, состоит в том, что предельная область положительности вещественной частотной характеристики всей замкнутой системы определяется критической частотой звеньев, не охваченных стабилизацией, и не зависит от параметров стабилизирующего устройства и звеньев, им охваченных.

в) Критическая частота, а следовательно, и максимально возможная область положительности для системы без стабилизирующего устройства рассматриваемого типа, включенного гибкой отрицательной обратной связью, всегда меньше критической частоты элементов, не охваченных стабилизацией.

На основании проведенного исследования можно сделать следующее заключение.

а) Введение стабилизирующего звена с оператором  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  в качестве гибкой отрицательной обратной связи всегда повышает критическую частоту.

б) Если общий порядок уравнения одноконтурной цепи не выше четвертого, то введением стабилизирующего устройства рассматриваемого типа можно получить систему, которая допускает любой по величине критический коэффициент усиления при любой критической частоте. В таких системах можно принципиально получить любую область положительности вещественной частотной характеристики всей замкнутой системы.

в) Если порядок уравнения, описывающего одноконтурную систему, выше четвертого, то в случае использования для стабилизации звена с оператором  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  можно получить системы двоякого рода, а именно:

если система будет оставаться устойчивой при неограниченном коэффициенте усиления, то она будет иметь ограниченную область положительности; если же область положительности будет неограниченной, то ограниченным будет критический коэффициент усиления.

Таким образом, уже для системы, которая без стабилизации описывается дифференциальным уравнением выше четвертого порядка, получить структуру, с помощью включения одного стабилизирующего устройства типа  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  допускающую одновременно неограниченное увеличение критического коэффициента усиления при сохранении устойчивости и неограниченную область положительности, не представляется возможным. В этих случаях приходится менять структуру системы усложнением стабилизирующего устройства или увеличением количества стабилизирующих устройств простейшего типа. Решению этой задачи посвящен следующий пункт.

#### 4. Общие методы получения структур, допускающих любой коэффициент усиления при любой критической частоте

Методы получения систем, устойчивых при больших коэффициентах усиления, были рассмотрены выше. Как было установлено, если одноконтурная система состоит из большого числа элементов, то введением стабилизирующего устройства общего типа или введением нескольких звеньев более простого типа по первому или второму варианту включения можно обеспечить устойчивость системы практически при неограниченном коэффициенте усиления. Остается решить вторую часть поставленной задачи, а именно, сохранив устойчивость при любом коэффициенте усиления, обеспечить принципиальную возможность получения любой области положительности вещественной частотной характеристики.

На рис. 95 представлена структурная схема системы регулирования, в которой для обеспечения устойчивости при неограниченном коэффициенте усиления введено стабилизирующее устройство общего типа с передаточной функцией  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$ .

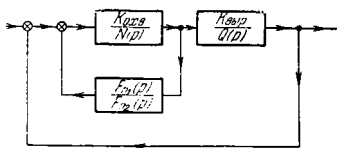


Рис. 95. Охват части контура стабилизирующим устройством общего вида.

типа с передаточной функцией  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}$ .

Воспользовавшись обозначениями, введенными в пункте 3 настоящего параграфа (см. также рис. 95), запишем характеристическое уравнение для рассматриваемого случая в следующем виде:

$$P(p)F_{n_2}(p) + K_{\text{охв}}F_{n_1}(p)Q(p) + KF_{n_2}(p) = 0. \quad (4.17)$$

Отсюда  $D$ -разбиение по общему коэффициенту усиления запишется:

$$\bar{K} = -P(j\omega) - K_{\text{охв}} \frac{F_{n_1}(j\omega)}{F_{n_2}(j\omega)} Q(j\omega).$$

Учитывая (4.15), получим:

$$\bar{K} = -Q(j\omega) \left[ N(j\omega) + K_{\text{охв}} \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} \right]. \quad (4.18)$$

Рассмотрим следующие варианты.

а. Пусть  $n_1 = n_2$  (частным случаем этого варианта является простейшая изодромная обратная связь с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ ).

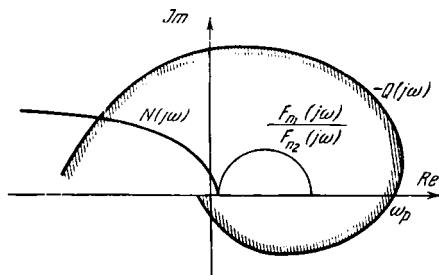


Рис. 96. Расположение составляющих кривой  $D$ -разбиения.

Прежде всего ясно, что степень  $N(p)$  должна быть не больше двух, ибо в противном случае система не будет устойчивой при больших коэффициентах усиления. На рис. 96 приведено расположение кривых, построенных качественно, для отдельных составляющих уравнения (4.18) при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности. Если  $n_1 = n_2 \leq 2$ , то результирующий вектор  $\left[ N(j\omega) + \frac{F_{n_1}(j\omega)}{F_{n_2}(j\omega)} \right]$  будет для всех частот расположен в первом или в первом и во втором квадранте и, следовательно, предельная критическая частота не может быть больше  $\omega_p$  (частоты пересечения  $-Q(j\omega)$  с положительной осью плоскости кривой  $D$ -разбиения). При  $n_1 = n_2 > 2$  характер расположения вектора  $\frac{F_{n_1}(j\omega)}{F_{n_2}(j\omega)}$  будет существенно зависеть от числен-

ных значений коэффициентов  $F_{n_1}(p)$  и  $F_{n_2}(p)$ . Соответствующим выбором коэффициентов  $F_{n_1}(p)$  и  $F_{n_2}(p)$  можно увеличить критическую частоту, хотя и в данном случае эта частота будет конечной.

б. Допустим, что  $n_1 < n_2$ . Здесь интерес представляет только один случай, когда  $n_2 - n_1 \leq 1$ , ибо для всех других вариантов с увеличением коэффициента усиления система станет неустойчивой. Для  $n_2 - n_1 = 1$  стабилизирующим устройством можно охватить только одно апериодическое звено или участок цепи, который описывается уравнением первого порядка. Для случая, когда схватывается одно

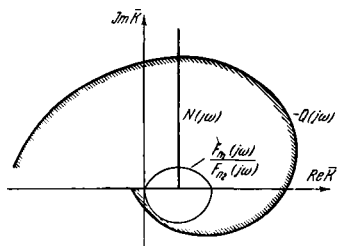


Рис. 97. Расположение составляющих кривой  $D$ -разбиения.

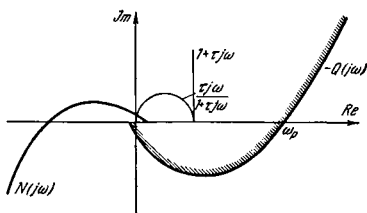


Рис. 98. Расположение составляющих кривой  $D$ -разбиения.

апериодическое звено, характер расположения кривых —  $Q(j\omega)$  и  $\left[ N(j\omega) + K_{\text{охв}} \frac{F_{n_1}(j\omega)}{F_{n_2}(j\omega)} \right]$  показан на рис. 97. С точки зрения устойчивости этот случай менее благоприятен, чем случай, рассмотренный в варианте а. Что касается критической частоты, то для  $Q(p)$ , имеющего степень выше второй, она будет конечной, хотя в некоторых случаях ее можно сделать большей, чем  $\omega_p$ .

в. Рассмотрим случай, когда  $n_1 > n_2$ . Нетрудно видеть, что и в данном случае получить неограниченную область положительности для систем, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициента усиления, не представляется возможным. В качестве примера на рис. 98 приведены кривые —  $Q(j\omega)$  и  $\left[ N(j\omega) + K_{\text{охв}} \frac{F_{n_1}(j\omega)}{F_{n_2}(j\omega)} \right]$  для случая, когда  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ ,  $Q(p)$  — полином третьего порядка и  $N(p)$  — полином третьего порядка. Из расположения кривых на рис. 98 видно, что критическая частота не может быть больше, чем частота  $\omega_p$ , при которой кривая —  $Q(j\omega)$  пересекается с осью  $\text{Re}$ .

г. Рассмотрим, наконец, случай, когда в систему вводится  $n$  стабилизирующих устройств с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , и определим условия получения максимальной области положительности вещественной



частотной характеристики. Для этого случая характеристическое уравнение (рис. 99) представится в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n [D_i(p)(1 + \tau_i p) + K_i \tau_i p] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{\rho=1}^N K_\rho \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p) = 0. \quad (4.19)$$

Запишем уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления системы:

$$\bar{K} = \prod_{\rho=1}^N K_\rho = - \frac{\prod_{i=1}^n [D_i(j\omega)(1 + \tau_i j\omega) + K_i \tau_i j\omega] \prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i j\omega)}$$

или

$$\bar{K} = - \left\{ \prod_{i=1}^n \left[ D_i(j\omega) + K_i \frac{\tau_i j\omega}{1 + \tau_i j\omega} \right] \right\} \prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega). \quad (4.20)$$

Для того чтобы система была устойчивой при неограниченном увеличении коэффициентов  $K_i$  (где  $i = 1, 2, \dots, n$ ), все операторы  $D_i(p)$  (где  $i = 1, \dots, n$ ) должны быть не выше второго порядка.

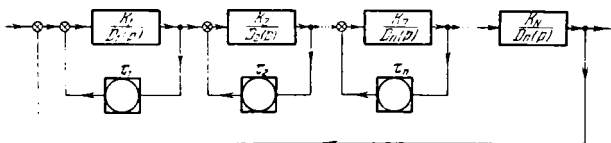


Рис. 99. Структурная схема.

Качественное построение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по уравнению (4.20), приведенное на рис. 100, показывает, что верхняя граница области положительности не может превысить величины критической частоты, которая определяется точкой пересечения кривой  $-\prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega)$  с вещественной осью  $\text{Re } \bar{K}$ .

Более строгое доказательство данного заключения будет дано в следующем параграфе.

Таким образом, ни один из видов стабилизирующих устройств, охватывающих часть одноконтурной цепи и обеспечивающих устойчивость при неограниченном увеличении коэффициента усиления, не может обеспечить неограниченную область положительности, если часть контура, которая остается не охваченной стабилизирующим устройством, описывается дифференциальным уравнением третьего или более высокого порядка.

Предположим, что структура системы регулирования принадлежит к классу устойчивых при неограниченном увеличении коэффициента усиления и порядок  $n$  полинома  $Q(p)$  выше или равен трем ( $n \geq 3$ ).

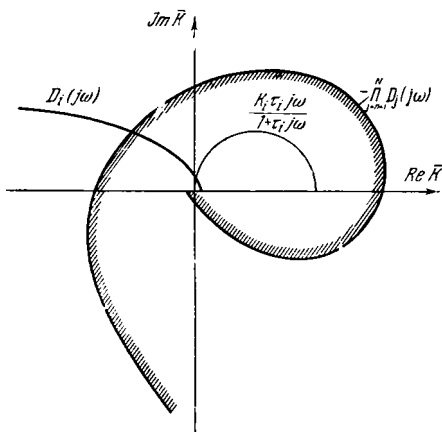


Рис. 100. Расположение составляющих кривой  $D$ -разбиения.

Охватим дополнительно всю систему стабилизирующим устройством с передаточной функцией  $\frac{F_{01}(p)}{F_{02}(p)}$ . Характеристическое уравнение в этом случае запишется в следующей форме:

$$\prod_{i=1}^n \left[ D_i(p) + K_i \frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)} \right] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{i=1}^N K_i \left[ 1 + \frac{F_{01}(p)}{F_{02}(p)} \right],$$

где  $\frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)}$  — передаточная функция стабилизирующего устройства, включенного вокруг  $i$ -го звена, откуда кривая  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления запишется:

$$\bar{K} = - \frac{\prod_{i=1}^n \left[ D_i(j\omega) + K_i \frac{F_{ni}(j\omega)}{F_{mi}(j\omega)} \right] \prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega)}{1 + \frac{F_{01}(j\omega)}{F_{02}(j\omega)}}. \quad (4.21)$$

Сравнивая (4.20) и (4.21), мы видим, что такое введение обратной связи приводит к повороту всей кривой; при этом область положительности будет возрастать тем больше, чем выше степень  $F_{01}(p)$  по сравнению со степенью  $F_{02}(p)$ . В частности, если вводить чистые

производные ( $F_{02}(p) = 1$ ), то можно получить любую область положительности.

Если степень полинома  $D_i(p)$  обозначить через  $d$ , то необходимый порядок идеальной производной (или значение  $n_1 - n_2$  для оператора  $\frac{F_{01}(p)}{F_{02}(p)}$ ), которую нужно ввести для получения неограниченной области положительности, будет определяться из соотношения

$$n_1 - n_2 = d - 2.$$

Это положение будет строго доказано в следующем параграфе.

### § 4.3. Определение качества систем автоматического регулирования по вырожденному уравнению и определение величины перерегулирования

Ранее мы установили такой класс структур и методы его синтеза, который допускает неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости и неограниченную область положительности вещественной частотной характеристики замкнутой системы. Полагая, что система устойчива, выясним, какими параметрами определяется переходный процесс, если коэффициенты усиления участков цепи, охваченных стабилизирующими связями, достаточно велики.

На рис. 62 была представлена структурная схема системы со стабилизирующими звеньями общего типа, включенными по варианту включения № 1.

Передаточная функция такой структурной схемы запишется в следующем виде:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{K_i}{1 + \frac{K_i}{D_i(p)} \frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}} \cdot \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{Q_j(p)}}{1 + \prod_{i=1}^n \frac{K_i}{1 + \frac{K_i}{D_i(p)} \frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}} \cdot \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{Q_j(p)}}. \quad (4.22)$$

Положим, что все  $K_i$  одинаковы, и обозначим их все через  $K_1$ , тогда, преобразуя уравнение (4.22), приведем его к следующему виду:

$$K(p) = \frac{K_1^n \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{\prod_{i=1}^n D_i(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p) + K_1 F_{N_2}(p) + K_1^2 F_{N_3} + \dots + K_1^n \prod_{j=n+1}^N K_j F_{\text{выр}}}. \quad (4.23)$$

Поделив числитель и знаменатель на  $K_1^n$  и обозначая  $\frac{1}{K^i} = m^i$ , получаем:

$$K(p) = \frac{\prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{m^n F_{N_1}(p) + m^{n-1} F_{N_2}(p) + \dots + F_{\text{выр}}(p)}, \quad (4.24)$$

где

$$F_{N_1} = \prod_{i=1}^n D_i(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p).$$

По условию система при  $m \rightarrow 0$  остается устойчивой; поэтому с достаточной степенью точности (тем большей, чем большее значение имеет  $K_1$ ) процесс регулирования будет определяться вырожденным уравнением, которое получается из (4.24), если в нем положить  $m = 0$ :

$$K_{\text{выр}}(p) = \frac{\prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{\prod_{j=n+1}^N Q_j(p) \cdot \prod_{i=1}^n F_{n_i}(p) + \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}. \quad (4.25)$$

Знаменатель (4.25) представляет собой характеристическое уравнение эквивалентной замкнутой вырожденной системы. По ранее полученным условиям устойчивость для вырожденного уравнения является одним из условий устойчивости всей системы в целом при больших коэффициентах усиления.

Качество системы при малых  $m$  будет определяться передаточной функцией (4.25).

Амплитудно-фазовую характеристику вырожденной системы получим, если в (4.25) поставим  $j\omega$  вместо  $p$ :

$$K_{\text{выр}}(j\omega) = \frac{K_{\text{выр}} \prod_{i=1}^n F_{m_i}(j\omega)}{\prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega) \prod_{i=1}^n F_{n_i}(j\omega) + K_{\text{выр}} \prod_{i=1}^n F_{m_i}(j\omega)}, \quad (4.26)$$

где  $K_{\text{выр}} = \prod_{i=n+1}^N K_i$  — общий коэффициент усиления элементов, не охваченных стабилизирующими устройствами. Поделив числитель и знаменатель на  $\prod_{i=1}^n F_{m_i}(j\omega)$ , получаем:

$$K(j\omega) = \frac{K_{\text{выр}}}{\prod_{i=1}^n \frac{F_{n_i}(j\omega)}{F_{m_i}(j\omega)} \cdot \prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega) + K_{\text{выр}}}. \quad (4.27)$$

Как следует из (4.27), амплитудно-фазовая характеристика вырожденной системы определяется дробью, в которой числитель есть коэффициент усиления вырожденной части системы, а знаменатель состоит из сумм коэффициента усиления вырожденной части системы и уравнения границы  $\mathcal{D}$ -разбиения по этому коэффициенту усиления с обратным знаком.

Действительно, из (4.25) следует, что характеристическое уравнение вырожденной части системы имеет вид

$$\prod_{j=n+1}^N Q_j(p) \prod_{i=1}^n F_{n_i}(p) + K_{\text{выр}} \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p) = 0,$$

откуда

$$\bar{K}_{\text{выр}} = - \prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega) \frac{\prod_{i=1}^n F_{n_i}(j\omega)}{\prod_{i=1}^n F_{m_i}(j\omega)}. \quad (4.28)$$

Все показатели качества могут быть определены из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$ , построенной по уравнению (4.28).

Как следует из уравнения (4.28), качество системы при достаточно малых  $m_i$  не зависит от  $m_i$  и от постоянных времени, а также от других параметров звеньев, охваченных стабилизирующим устройством, а полностью определяется параметрами неохваченной части контура и стабилизирующих устройств.

Из уравнения для кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$  вытекает, что для случая, когда

$$\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)} = \frac{\tau_i p}{1 + \tau_i p},$$

верхняя граница области положительности будет всегда меньше критической частоты, определяемой пересечением кривой  $-\prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega)$  с осью  $\text{Re } \bar{K}_{\text{выр}}$ . При этом увеличение области положительности может быть осуществлено так, как это достигалось в предыдущем параграфе. В этом случае учитывается только вырожденное уравнение.

Если же кривая  $\prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности не пересекает  $\text{Re } \bar{K}_{\text{выр}}$ , что возможно, если степень  $\prod_{j=n+1}^N Q_j(p)$  не выше второго порядка, то соответствующим выбором параметров  $\tau_i$  можно увеличивать область положительности беспрдельно.

Рассмотрим связь между величиной коэффициента усиления  $K_{\text{выр}}$  и перерегулированием. На рис. 101 представлена кривая  $D$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$ , когда стабилизирующих средств нет. Как это ясно из уравнения (4.28), наличие стабилизирующих устройств уменьшает не только критическую частоту  $\omega_p$ , но и критическое значение коэффициента усиления вырожденной части системы.

На основании свойств кривой  $D$ -разбиения (см. гл. I), проведя окружность с радиусом  $\frac{K+1}{2}$  и центром, расположенным в точке с координатой  $\frac{K-1}{2}$  на оси  $\text{Re } \bar{K}_{\text{выр}}$ , можно определить значение  $K_{\text{выр}}$ , при котором могут выполняться необходимые условия отсутствия перерегулирования или условия, при которых перерегулирование не будет превышать 18%. Таким способом можно выбирать параметры вырожденной части системы для обеспечения необходимого качества регулирования.

Остается рассмотреть последний вопрос, относящийся к выбору структуры. Допустим, что наилучшие параметры, полученные из анализа вырожденной части системы, не могут удовлетворить требованиям, предъявляемым к системе в целом. Рассмотрим вопрос о том, как изменить структуру системы, чтобы получить нужные характе-

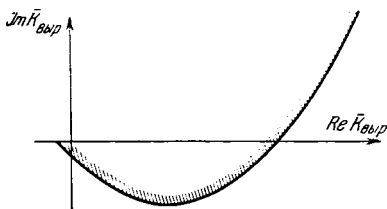


Рис. 101. Кривая  $D$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$ .

ристики. Из рис. 101, где качественно построена кривая —  $\prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega) \times$

$\times \prod_{i=1}^n \frac{F_{n_i}(j\omega)}{F_{m_i}(j\omega)}$ , видно, что качественные показатели структуры могут быть улучшены поворотом всей результирующей кривой по часовой стрелке.

Как было показано в предыдущем параграфе, такой поворот может быть осуществлен охватом всей системы стабилизирующим устройством определенного типа. В частности, охват всей системы стабилизирующим устройством типа идеальной производной может повернуть всю кривую на угол  $90^\circ$ . Усложнением стабилизирующего устройства можно достигнуть необходимого поворота кривой вырожденной части системы. На конкретном примере, который будет рассмотрен в конце этой главы, будут проиллюстрированы выбор структуры и расчет параметров следящей системы, при которых получаются весьма высокие динамические и статические показатели.

### § 4.4. Введение в систему стабилизирующих устройств

Выясним возможность использования в качестве стабилизирующих устройств элементов с передаточными функциями  $\frac{\mu}{F(p)}$ , где  $\mu$  — постоянная величина. Примерами таких устройств могут служить апериодическое, интегрирующее, колебательное и другие простейшие звенья. Ясно, что техническое осуществление таких простейших звеньев не представляет трудностей. Тем более важно установить стати-

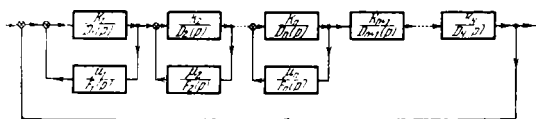


Рис. 102. Структурная схема.

ческие и динамические свойства, которые может получить система регулирования при введении таких элементов в качестве стабилизирующих устройств.

На рис. 102 представлена структурная схема системы автоматического регулирования. Одноконтурная схема состоит из  $N$  элементов с передаточными функциями  $\frac{K_i}{D_i(p)}$ , из которых  $n$  охватываются стабилизирующими устройствами с передаточными функциями  $\frac{\mu_i}{F_i(p)}$ . При этом предполагается, что коэффициенты усиления элементов, которые охватываются стабилизирующими устройствами, можно изменить в широких пределах, в частности сколь угодно увеличивать.

Найдем передаточную функцию рассматриваемой системы. На основании рис. 102 и правил составления передаточных функций, приведенных в первой главе, можем записать:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{K_i}{D_i(p)} \cdot \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{D_j(p)}}{1 + \frac{\prod_{i=1}^n \frac{K_i}{D_i(p)} \cdot \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{D_j(p)}}{\prod_{i=1}^n \left[ 1 + \frac{K_i}{D_i(p)} \cdot \frac{\mu_i}{F_i(p)} \right]}}$$

После упрощений передаточная функция принимает вид

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_i(p)}{\prod_{i=1}^n [D_i(p) F_i(p) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_i(p)}. \quad (4.29)$$

Характеристическое уравнение запишется:

$$\prod_{i=1}^n [D_i(p) F_i(p) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_i(p) = 0. \quad (4.30)$$

Прежде всего выясним свойства системы в установившемся режиме. Для этой цели, положив в (4.29)  $p = 0$ , получим:

$$K(0) = \frac{K \prod_{i=1}^n F_i(0)}{\prod_{i=1}^n [D_i(0) F_i(0) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N D_j(0) + K \prod_{i=1}^n F_i(0)}, \quad (4.31)$$

где  $K = \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j$  — общий коэффициент усиления системы. Для статических систем  $\prod_{i=1}^N D_i(0) = 1$ .

Полагая, что  $\prod_{i=1}^n F_i(0) = 1$ , получаем:

$$K(0) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n [1 + K_i \mu_i] + K}. \quad (4.32)$$

Из (4.32) видно, что установившаяся ошибка будет тем больше, чем больше  $\mu_i$ . Однако и в данном случае, выбирая  $\mu_i < 1$  (а если нужно, то  $\mu_i \ll 1$ ), можно получить необходимую степень установившейся точности.

Допустим, что  $K_i$  неограниченно увеличивается. Система будет при этом оставаться устойчивой при выполнении следующих условий.

Обозначив степень  $D_i(p)$  через  $d_i$ , степень  $F_i(p)$  через  $\nu_i$ , на основании полученного ранее соотношения (2.63) имеем:

$$d_i \leq 2 + 0 - \nu_i,$$

ибо степень числителя оператора стабилизирующего устройства в данном случае равна нулю.



Отсюда вытекает следующее структурное свойство систем исследуемого типа, являющееся необходимым условием устойчивости:

$$d_i + v_i \leq 2. \quad (4.33)$$

Здесь возможны три случая:

- а)  $v_i = 0$ . Это — случай жесткой обратной связи. При этом  $d_i \leq 2$ .
- б)  $v_i = 1$ . Стабилизирующим устройством является интегрирующее или апериодическое звено; при этом охватываться может звено первого порядка. Здесь  $d_i = 1$ .
- в)  $v_i = 2$ . Стабилизирующим звеном является звено второго порядка и охватываться может только безинерционное усилительное звено. При этом  $d_i = 0$ .

Исследуем подробнее все три случая.

а. Рассмотрим случай, когда в качестве стабилизирующего устройства используется жесткая обратная связь.

В этом случае полиномы  $D_i(p)$  могут быть нулевой, первой или второй степени. Полагая в (4.29)  $F_i(p) = 1$ , получим передаточную функцию для рассматриваемого случая:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j}{\prod_{i=1}^n [D_i(p) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j}. \quad (4.34)$$

Характеристическое уравнение запишется:

$$\prod_{i=1}^n [D_i(p) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j = 0. \quad (4.35)$$

Отсюда кривая  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления запишется:

$$\bar{K} = - \prod_{i=1}^n [D_i(j\omega) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega). \quad (4.36)$$

Передаточная функция (4.34) относится к симметричному случаю (см. гл. I) и качество системы полностью определяется свойствами кривой  $D$ -разбиения. Вырожденным уравнением при  $m = \frac{1}{K_i} \rightarrow 0$  в данном случае будет:

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{j=n+1}^N K_j = 0. \quad (4.37)$$

Из этого уравнения видно, что устойчивость системы при  $K_i \rightarrow \infty$  будет существенно зависеть от величины  $\mu_i$  и от параметров части контура, которая не охватывается стабилизирующими устройствами. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы вспомогательное урав-

нение первого, второго или третьего рода (что зависит от степени  $D_i(p)$ ) также удовлетворяло условиям устойчивости.

Допустим, что параметры выбраны так, что система остается устойчивой при  $K_i \rightarrow \infty$ .

Тогда согласно выводам, полученным в предыдущем параграфе, и как это непосредственно видно из выражения (4.34), качество процесса полностью определяется вырожденной передаточной функцией

$$\frac{\prod_{j=n+1}^N K_j}{\prod_{i=1}^N \mu_i \prod_{j=n+1}^N D_j(p) + \prod_{j=n+1}^N K_j} \quad (4.38)$$

или при выбранном  $\prod_{j=n+1}^N K_j$ , расположением кривой  $D$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$ :

$$\bar{K}_{\text{выр}} = - \prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega).$$

Таким образом, можно сделать следующие заключения о свойствах полученной системы.

а) Установившаяся точность зависит от общего коэффициента усиления  $\mu_i$ ; при этом установившаяся точность будет тем большей, чем больше  $K_i$  и чем меньше  $\mu_i$ .

б) Область положительности лимитируется критической частотой для  $D$ -разбиения по коэффициенту усиления  $K_{\text{выр}}$ , и никакими средствами в пределах данной структуры увеличить область положительности не представляется возможным.

в) Величина перерегулирования определяется характером кривой  $\prod_{j=n+1}^N D_j(j\omega) \prod_{i=1}^n \mu_i$  и выбранным (в области устойчивости) значением коэффициента усиления вырожденного уравнения.

Однако даже в этом простейшем случае динамические свойства системы существенно улучшаются по сравнению с исходной одно-контурной системой без жестких обратных связей.

б. Допустим, что в качестве стабилизирующих устройств используются аperiodические звенья с передаточными функциями

$$\frac{\mu_i}{1 + \tau_i p}.$$

В этом случае для того, чтобы система оставалась устойчивой, при неограниченном увеличении коэффициентов усиления  $K_i$  степень  $D_i(p)$  должна быть не выше первой.

Допустим для простоты, что  $D_i(p)$  — также аperiodические звенья с передаточными функциями  $\frac{K_i}{1 + T_i p}$ .

Согласно (4.29) передаточная функция для данного случая запишется:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p)}{\prod_{i=1}^n [(1 + T_i p)(1 + \tau_i p) + K_i \mu_i] \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p)}, \quad (4.39)$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_{i=1}^n [(1 + T_i p)(1 + \tau_i p) + \mu_i K_i] \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p) = 0. \quad (4.40)$$

Кривая  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления  $K = \prod_{i=1}^N K_i$  запишется:

$$\bar{K}(j\omega) = - \frac{\prod_{i=1}^n [(1 + T_i j\omega)(1 + \tau_i j\omega) + \mu_i K_i] \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j j\omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i j\omega)}. \quad (4.41)$$

Поделив числитель и знаменатель выражения (4.39) на  $\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p)$  и подставив  $j\omega$  вместо  $p$ , получим:

$$K(j\omega) = \frac{K}{K + \frac{\prod_{i=1}^n [(1 + T_i j\omega)(1 + \tau_i j\omega) + \mu_i K_i] \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j j\omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i j\omega)}}. \quad (4.42)$$

Отсюда видно, что динамические и статические свойства системы полностью определяются характером кривой  $D$ -разбиения по общему коэффициенту усиления (симметричный случай передаточной функции, см. главу I).

Мы не будем здесь рассматривать вопросы устойчивости при неограниченном увеличении коэффициентов усиления  $K_i$ , так как исследование устойчивости может быть без труда проведено точно так же, как это было сделано в предыдущих главах. Отметим только, что основное структурное условие

$$d_i + v_i \leq 2$$

в данном случае выполняется ( $d_i = 1$  и  $\nu_i = 1$ ), и для устойчивости при  $K_i \rightarrow \infty$  необходимо выбрать параметры стабилизирующих устройств так, чтобы вырожденное уравнение и вспомогательное уравнение второго рода, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости. При  $K_i \rightarrow \infty$  динамические свойства системы будут полностью определяться вырожденной передаточной функцией, которая получается из (4.39), если положить в ней  $K_i = \infty$ :

$$K_{\text{выр}}(p) = \frac{\prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p)}{\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p)}. \quad (4.43)$$

Динамические свойства вырожденной системы полностью определяются характером кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{\text{выр}} = \prod_{j=n+1}^N K_j$ . Действительно, поделив (4.43) на  $\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i p)$  и положив  $p = j\omega$ , получим:

$$K_{\text{выр}}(j\omega) = \frac{K_{\text{выр}}}{K_{\text{выр}} + \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j j\omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i j\omega)}}. \quad (4.44)$$

Знаменатель (4.44) состоит из  $K_{\text{выр}}$  и выражения для кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$ , в числителе стоит величина  $K_{\text{выр}}$  (симметричный случай).

Нетрудно теперь оценить общие структурные свойства системы. Кроме необходимой конечной установившейся точности, которая может быть получена соответствующим выбором  $\mu_i$ , здесь можно получить любую область положительности и необходимое ограничение пере-регулирования. При этом область положительности в данном случае принципиально не лимитируется частотой  $\omega_p$  (критическая частота кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по коэффициенту усиления для элементов, не охваченных стабилизацией).

Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по коэффициенту усиления элементов, не охваченных стабилизирующими устройствами, запишется:

$$\bar{K} = - \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j j\omega) = D_k(j\omega). \quad (4.45)$$

Кривая  $D$ -разбегания по коэффициенту усиления вырожденного уравнения запишется:

$$\bar{K}_{\text{выр}} = - \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j j\omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i j\omega)} = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i D_K(j\omega)}{\prod_{i=1}^n (1 + \tau_i j\omega)}. \quad (4.46)$$

Из (4.46) видно, что введение в качестве стабилизирующих устройств аperiodических звеньев увеличивает область положительности. Уже при разности степеней  $\omega$  в числителе и знаменателе (4.46), равной двум, область положительности может быть принципиально увеличена до бесконечности, ибо разность фаз при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности не может превысить угла  $\pi$ . Количество аperiodических звеньев, которое необходимо ввести в систему, определяется из следующего соотношения:

$$N - 2n = 2 \quad (4.47)$$

или

$$n = \frac{N - 2}{2},$$

где  $N$  — общее количество аperiodических звеньев в исходной одноконтурной цепи.

Таким образом, использование аperiodических звеньев в качестве стабилизирующих устройств дает при указанных выше условиях возможность неограниченно увеличивать область положительности вещественной частотной характеристики.

Нетрудно также видеть, что указанный тип стабилизирующих устройств уменьшает величину перерегулирования. Действительно, как это следует из (4.46), при введении стабилизирующих устройств кривая  $D_K(j\omega)$  поворачивается по направлению часовой стрелки и меняется в масштабе.

Если скомпенсировать изменение масштаба соответствующим выбором  $K_{\text{выр}}$ , то тем самым будут достигнуты и необходимая область положительности и необходимое ограничение перерегулирования. Следует иметь в виду, что здесь в отличие от случая введения гибких стабилизирующих устройств, величина постоянной времени  $\tau_i$  стабилизирующего устройства более сильно влияет на характер процесса регулирования. Мы не станем рассматривать другие комбинации, которые здесь возможны, а именно, когда в качестве стабилизирующих устройств служат интегрирующие звенья или когда одноконтурная цепь содержит  $n$  интегрирующих звеньев, которые охватываются стабилизирующими устройствами с передаточной функцией  $\frac{\mu_i}{1 + \tau_i p}$ .

Качественно результаты подобны полученным выше, и в каждом отдельном случае, пользуясь вышеизложенной методикой, нетрудно получить и необходимые количественные соотношения.

в. Рассмотрим случай, когда в качестве стабилизирующего устройства используется звено второго порядка с передаточной функцией

$$\frac{\mu_i}{a_i p^2 + b_i p + 1}.$$

Для того чтобы система оставалась устойчивой при неограниченном увеличении коэффициентов усиления, стабилизирующее устройство данного типа может охватывать только безинерционное усилительное звено. Использование такого рода стабилизирующих устройств целесообразно в том случае, когда определяющим является быстрое действие, а установившаяся точность не имеет существенного значения.

Как уже было показано во второй главе, охватывая усилитель звеном второго порядка и устремляя коэффициент усиления к бесконечности, мы по сути дела получаем первую и вторую производные от входной величины.

Рассмотрим систему регулирования, состоящую из  $N - n$  аperiodических звеньев и содержащую  $n$  усилителей, коэффициенты усиления которых можно неограниченно увеличивать. Охватим каждый из усилителей стабилизирующим устройством с передаточной функцией  $\frac{\mu_i}{a_i p^2 + b_i p + 1}$ .

Передаточная функция такой системы в замкнутом состоянии запишется:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{K_i}{1 + \frac{K_i \mu_i}{a_i p^2 + b_i p + 1}} \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{1 + T_j p}}{1 + \prod_{i=1}^n \frac{K_i}{1 + \frac{K_i \mu_i}{a_i p^2 + b_i p + 1}} \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{1 + T_j p}}, \quad (4.48)$$

где  $K_i$  — коэффициенты усиления усилителей,  $\mu_i$  — коэффициенты усиления стабилизирующих устройств,  $K_j$  — коэффициенты усиления аperiodических звеньев,  $T_j$  — постоянные времени аperiodических звеньев. Упрощая выражение (4.48), приводим его к виду

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n K_i (a_i p^2 + b_i p + 1) \prod_{j=n+1}^N K_j}{\prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1 + K_i \mu_i) \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1)}. \quad (4.49)$$

Поделим числитель и знаменатель (4.49) на  $\prod_{i=1}^n K_i$  и положим  $K_i \rightarrow \infty$ .

Тогда после перехода к пределу получим вырожденную передаточную функцию, которая запишется в виде

$$\begin{aligned}
 K_{\text{выр}}(p) &= \frac{\prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1) \prod_{j=n+1}^N K_j}{\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1)} = \\
 &= \frac{\prod_{j=n+1}^N K_j}{\frac{\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p)}{\prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1)} + \prod_{j=n+1}^N K_j}. \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Из выражения (4.50) видно, что свойства системы полностью определяются характером кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $\prod_{j=n+1}^N K_j$  (соответственно — вырожденной передаточной функцией).

Рассмотрим характеристическое уравнение полученной системы. Из (4.50) имеем:

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j p) + \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n (a_i p^2 + b_i p + 1) = 0. \quad (4.51)$$

Пусть  $a_i, b_i$  выбраны так, что вспомогательное уравнение второго рода и вырожденное уравнение (4.51), каждое в отдельности, удовлетворяют условиям устойчивости. Имея в виду, что система устойчива при  $K_i \rightarrow \infty$ , можно заключить, что полученная вырожденная система эквивалентна исходной, на вход которой подано  $2n$  идеальных производных. При этом степень близости производных к идеальности будет тем большей, чем больше коэффициенты усиления  $K_i$  усилителей. В такой системе можно получить неограниченную область положительности. Для этой цели количество усилителей и соответственно количество стабилизирующих устройств может быть определено из соотношения

$$N - 2n = 2 \quad \text{или} \quad n = \frac{N-2}{2}. \quad (4.52)$$

Если исходная система состоит из  $N$  звеньев с передаточными функциями  $\frac{K_i}{D_i(p)}$ , то можно доказать, что неограниченная область положительности может быть обеспечена, если количество безиннер-

ционных усилителей и соответственно стабилизирующих устройств определяется из следующего соотношения:

$$\sum_{i=1}^N d_i - 2n = 2,$$

откуда

$$n = \frac{\sum_{i=1}^N d_i - 2}{2}, \quad (4.53)$$

где  $d_i$  — степень полинома  $D_i(p)$ .

Степень перерегулирования может быть ограничена надлежащим выбором параметров  $a_i$ ,  $b_i$ , что непосредственно вытекает из выражения для кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K = \prod_{j=n+1}^N K_j$ , так как

$$\bar{K} = - \frac{\prod_{i=1}^n \mu_i \prod_{j=n+1}^N (1 + T_j j\omega)}{\prod_{i=1}^n [a_i (j\omega)^2 + b_i j\omega + 1]}. \quad (4.54)$$

Рассмотренный здесь метод улучшения динамических свойств систем регулирования может быть реализован искусственным введением в систему усилителей с большими коэффициентами усиления, охваченных стабилизирующим устройством указанного типа, или использованием усилителей с большими коэффициентами усиления, которые в системе имеются.

Полученные структуры по сути дела дают возможность обеспечить достаточно большой коэффициент усиления не на нулевой частоте, как это имело место при введении в систему стабилизирующих устройств гибкого типа, а на целой области частот достаточно больших пределов.

#### § 4.5. Связь общего коэффициента усиления с некоторыми оценками качества

Возможность получения большого коэффициента усиления позволяет получить доброкачественные системы по всем показателям. С этой точки зрения представляет интерес установление прямой связи между величиной коэффициента усиления и некоторыми показателями качества.

##### 1. Коэффициент усиления и интегральная оценка

Прежде всего рассмотрим связь между коэффициентом усиления системы и интегральной оценкой  $I_1 = \int_0^{\infty} \vartheta(t) dt$ , где  $\vartheta(t)$  — разность



между заданным значением регулируемой величины и ее действительным значением, или то, что называют ошибкой регулирования или отклонением.

Как известно, изображение по Лапласу ошибки регулирования  $\delta(t)$  может быть представлено в следующем виде:

$$\delta(p) = \frac{1}{1 + \frac{K \cdot R(p)}{Q(p)}} \quad (4.55)$$

или

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{1 + K \frac{R(p)}{Q(p)}}. \quad (4.56)$$

Полагая в (4.56)  $p=0$ , получаем:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = I_1 = \frac{1}{1 + K \frac{R(0)}{Q(0)}}. \quad (4.57)$$

Из (4.57) видно, что интегральная ошибка будет обратно пропорциональной коэффициенту усиления. Чем больше коэффициент усиления, тем меньше интегральная ошибка. Здесь, однако, следует иметь в виду, что оценка по интегралу дает хорошие результаты, когда система неколебательная.

## 2. Коэффициент усиления и коэффициенты ошибки

Иногда о качестве систем судят по так называемым коэффициентам ошибок, которые дают установившуюся ошибку и коэффициенты при ее производных, если на вход системы подается возмущение, меняющееся по определенному закону. Хотя указанные оценки относятся к установившемуся режиму, они сами по себе представляют существенный практический интерес и, кроме того, косвенно (как это следует из результатов пункта 1 настоящего параграфа) характеризуют динамические свойства систем. С точки зрения установившегося состояния системы, подвергающейся непрерывному возмущению, наиболее целесообразной является структура, в которой простейшими средствами достигается равенство нулю большого количества коэффициентов ошибок. Рассмотрим структуру, представленную на рис. 95. Уравнение изображения ошибки выходной величины запишется:

$$\begin{aligned} \delta(p) &= \frac{1}{1 + KW(p)} = \\ &= \frac{N(p) Q(p) F_{n_2}(p) + K_{охв} F_{n_1}(p) Q(p)}{N(p) Q(p) F_{n_2}(p) + K_{охв} F_{n_1}(p) Q(p) + K_{охв} K_{выр} F_{n_2}(p)}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Разложив уравнение ошибки в ряд в окрестности малых значений  $p$ , получаем:

$$\delta(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n. \quad (4.59)$$

Представим входящие в уравнение (4.58) полиномы в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} N(p) Q(p) F_{n_2}(p) = \\ = A_0 p^N + A_1 p^{N-1} + \dots + A_{N-2} p^2 + A_{N-1} p + A_N, \\ Q(p) = B_0 p^Q + B_1 p^{Q-1} + \dots + B_{Q-2} p^2 + B_{Q-1} p + B_Q, \\ F_{n_1}(p) = C_0 p^{n_1} + C_1 p^{n_1-1} + \dots + C_{n_1-2} p^2 + C_{n_1-1} p, \\ F_{n_2}(p) = D_0 p^{n_2} + D_1 p^{n_2-1} + \dots + D_{n_2-2} p^2 + D_{n_2-1} p + 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

Для малых значений  $p$  на основании уравнений (4.58), (4.59) и (4.60) можно составить следующее уравнение для определения коэффициентов ошибок:

$$\begin{aligned} [a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots] [A_0 p^N + A_1 p^{N-1} + \dots \\ + A_{N-2} p^2 + A_{N-1} p + A_N + K_{\text{охв}} (B_0 p^Q + B_1 p^{Q-1} + \dots \\ + B_{Q-2} p^2 + B_{Q-1} p + B_Q) (C_0 p^{n_1} + C_1 p^{n_1-1} + \dots + C_{n_1-2} p^2 + C_{n_1-1} p) + \\ + K_{\text{охв}} K_{\text{выр}} (D_0 p^{n_2} + D_1 p^{n_2-1} + \dots + D_{n_2-2} p^2 + D_{n_2-1} p + 1)] = \\ = A_0 p^N + A_1 p^{N-1} + \dots + A_{N-2} p^2 + A_{N-1} p + A_N + \\ + K_{\text{охв}} (B_0 p^Q + B_1 p^{Q-1} + \dots + B_{Q-2} p^2 + B_{Q-1} p + B_Q) \times \\ \times (C_0 p^{n_1} + C_1 p^{n_1-1} + \dots + C_{n_1-2} p^2 + C_{n_1-1} p). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$  справа и слева, получаем следующие выражения для коэффициентов ошибок:

$$a_0 = \frac{A_N}{A_N + K_{\text{общ}}}, \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{A_{N-1} + K_{\text{охв}} B_Q C_{n_1-1}}{A_N + K_{\text{общ}}} - \\ - \frac{\frac{A_N}{A_N + K_{\text{общ}}} [A_{N-1} + K_{\text{охв}} B_Q C_{n_1-1} + K_{\text{общ}} D_{n_2-1}]}{A_N + K_{\text{общ}}}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{A_{N-2} + K_{\text{охв}} B_Q C_{n_1-2} + K_{\text{охв}} B_{Q-1} C_{n_1-1}}{A_N + K_{\text{общ}}} - \\ - \frac{\frac{A_N}{A_N + K_{\text{общ}}} [A_{N-2} + K_{\text{охв}} B_Q C_{n_1-2} + K_{\text{охв}} B_{Q-1} C_{n_1-1} + K_{\text{общ}} D_{n_2-2}]}{A_N + K_{\text{общ}}} - \\ - \frac{\frac{A_N}{A_N + K_{\text{общ}}} [A_{N-1} + K_{\text{охв}} B_Q C_{n_1-1} + K_{\text{общ}} D_{n_2-1}]}{A_N + K_{\text{общ}}} \times \\ \times \frac{[A_{N-1} + K_{\text{охв}} B_Q C_{n_1-1} + K_{\text{общ}} D_{n_2-1}]}{A_N + K_{\text{общ}}}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

где  $K_{\text{общ}} = K_{\text{охв}} K_{\text{выр}}$ .

В рассматриваемом случае мы предполагаем, что одноконтурная система не содержит интегрирующих звеньев.

Рассмотрим влияние коэффициента усиления на коэффициенты ошибок. Предположим, что структура удовлетворяет условиям, при которых общий коэффициент усиления может быть неограниченно увеличен без нарушения устойчивости; при этом увеличение общего коэффициента усиления осуществляется за счет увеличения  $K_{охв}$ .

Из уравнения (4.62) видно, что коэффициент ошибки нулевого порядка обратно пропорционален общему коэффициенту усиления. Увеличение общего коэффициента усиления до бесконечности уменьшает коэффициент ошибки нулевого порядка до нуля.

Рассмотрим коэффициент ошибки первого порядка  $a_1$ .

Предположим вначале, что  $K_{общ}$  — величина небольшая, и отбрасывать величины, деленные на  $K_{общ}$ , нельзя. Уравнение (4.63) можно представить в следующем виде:

$$a_1 = \frac{K_{общ}}{(1 + K_{общ})^2} (A_{N-1} + K_{охв} C_{n-1} - D_{n-1}) \quad (4.65)$$

при условии  $B_Q = 1$  и  $A_N = 1$ .

Коэффициент  $A_{N-1}$  равен сумме всех коэффициентов при первых степенях  $p$  полиномов  $N(p)$ ,  $Q(p)$  и  $F_{n_2}(p)$ ; так как  $D_{n-1}$  представляет собой коэффициент при первой производной полинома  $F_{n_2}(p)$ , то ни при каких практически разумных значениях  $D_{n-1}$  ошибка  $a_1$  не может быть сделана равной нулю или даже малой величиной. Минимальное значение ошибки  $a_1$  будет иметь место при минимальном значении  $C_{n-1}$ . При этом, если даже  $C_{n-1} = 0$ , то  $a_1$  будет иметь определенное значение, зависящее от параметров одноконтурной системы, на которые воздействовать обычно не представляется возможным.

Допустим теперь, что  $K_{общ}$  — достаточно большое число. При этом увеличение  $K_{общ}$ , как этого требуют структуры, устойчивые при неограниченном коэффициенте усиления, осуществляется за счет  $K_{охв}$ . Тогда, отбрасывая в (4.65) весьма малые величины, получающиеся от деления конечных величин на  $K_{общ}$ , получаем следующее выражение для коэффициента ошибки первого рода:

$$a_1 = \frac{C_{n-1}}{K_{выр}}. \quad (4.66)$$

Здесь ошибка в полной мере зависит от параметров стабилизирующего устройства и коэффициента усиления вырожденного уравнения, которые могут меняться в широких пределах. При этом можно выбрать  $C_{n-1}$  и  $K_{выр}$  так, чтобы  $a_1$  было достаточно малым числом. Следует иметь в виду, что в последнем случае уменьшение коэффициента ошибки первого порядка, не приводит к увеличению коэффициента ошибки нулевого порядка, как это имеет место при небольших значениях  $K_{общ}$ .

Рассмотрим теперь выражение для  $a_2$ .

Если потребовать, чтобы  $a_0$  и  $a_1$  были величинами малыми, что проще всего и наиболее целесообразно с практической точки зрения осуществляется в схемах, допускающих большие коэффициенты усиления, то выражение для  $a_2$  при достаточно больших  $K_{\text{общ}}$  примет вид

$$a_2 \cong \frac{C_{n-2} + B_{Q-1}C_{n-1}}{K_{\text{выр}}} \quad (4.67)$$

(при  $B_Q = 1$ ). И здесь коэффициент ошибки зависит от параметров стабилизирующего устройства и коэффициента усиления вырожденной системы; при малых  $C_{n-1}$  и  $C_{n-2}$  коэффициент ошибки также может быть сделан достаточно малым. Простыми математическими вычислениями можно доказать, что при небольших  $K_{\text{общ}}$  коэффициент ошибки  $a_2$  будет зависеть от параметров всей системы и будет больше по абсолютному значению, чем для случая, когда  $K_{\text{общ}}$  — большое число. Проведенное рассмотрение показывает, что с точки зрения коэффициентов ошибки большие коэффициенты усиления весьма целесообразны и, следовательно, целесообразна структура, допускающая большие коэффициенты усиления. Из проведенного исследования также видно, что коэффициенты ошибок не зависят от параметров звеньев, охваченных стабилизирующим устройством. Оценка структуры по коэффициентам ошибок весьма важна для следящих систем. Поэтому перед тем, как рассматривать некоторые примеры, найдем связь между коэффициентами ошибок и коэффициентом усиления для случая, когда одноконтурная система содержит интегрирующее звено, которое остается в вырожденной части системы.

Указанное условие сводится к тому, что в полиноме  $Q(p)$  не будет свободного члена; также не будет свободного члена в полиномах  $N(p)$  и  $F_{n_2}(p)$ . Иначе говоря,  $A_N = 0$  и  $B_Q = 0$ . При этих условиях

$$a_0 = \frac{0}{K_{\text{общ}}} = 0. \quad (4.68)$$

Коэффициент

$$a_1 = \frac{A_{N-1}}{K_{\text{общ}}} \rightarrow 0. \quad (4.69)$$

Коэффициент

$$a_2 \rightarrow \frac{B_{Q-1}C_{n-1}}{K_{\text{выр}}}. \quad (4.70)$$

Коэффициент ошибки  $a_2$  может быть сделан весьма малым соответствующим выбором  $C_{n-1}$  и  $K_{\text{выр}}$ . Следует обратить внимание на то, что при конечных и тем более малых значениях  $K_{\text{общ}}$  получить нулевое значение для коэффициента  $a_1$  невозможно, так как для этого нужно было бы обеспечить отрицательные значения коэффициентов стабилизации.

## § 4.6. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим систему автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока воздействием на напряжение, приложенное к его якорю при постоянном потоке возбуждения.

На рис. 103 представлена принципиальная схема системы, состоящая из основных элементов.

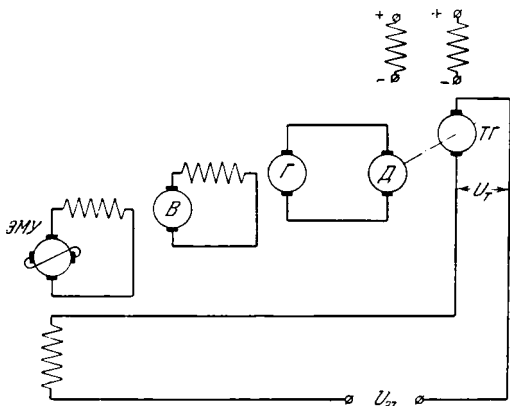


Рис. 103. Схема регулирования скорости вращения двигателя.

Электродвижущая сила тахогенератора  $U_t$ , пропорциональная скорости вращения двигателя, сравнивается с напряжением постороннего источника  $U_{ст}$ . Разность  $U_{ст} - U_t = \Delta U$  подается на управляющую обмотку электромашинного усилителя. С якоря ЭМУ напряжение подается на обмотку возбуждения возбудителя, а последний питает возбуждение генератора. В установившемся режиме  $\Delta U$  обеспечивает с заданной степенью точности предписанное значение скорости вращения двигателя. Принцип работы такой схемы уже рассматривался выше (см. главу II).

Не повторяя выводов уравнений отдельных элементов схемы, запишем

а) Уравнение двигателя вместе с тахогенератором

$$(T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1) U_t = K_1 K_2 U_r, \quad (4.71)$$

где  $T_1 = \frac{GD^2}{375 C_m C_e \Phi^2} = 0,8 \text{ сек}$  — электромеханическая постоянная времени двигателя,  $T_2 = \frac{L_a}{R_a} = 0,25 \text{ сек}$  — постоянная времени цепи якорей генератора и двигателя,  $K_1$  — коэффициент усиления двигателя,

$K_2$  — коэффициент усиления тахогенератора с учетом передаточного отношения редуктора от двигателя к тахогенератору.

б) Уравнение генератора

$$(T_3 p + 1) U_r = K_3 U_{вг}. \quad (4.72)$$

в) Уравнение возбудителя

$$(T_4 p + 1) U_{вг} = K_4 U_9. \quad (4.73)$$

г) Уравнение ЭМУ

$$(T_5 p + 1)(T_6 p + 1) U_9 = K_5 \Delta U, \quad (4.74)$$

где  $T_3 = \frac{L_r}{R_r}$  — постоянная времени цепи возбуждения генератора

тока,  $T_4 = \frac{L_v}{R_v}$  — постоянная времени цепи возбуждения возбудителя,

$T_5 = \frac{L_k}{R_k}$  — постоянная времени короткозамкнутой цепи ЭМУ,

$T_6 = \frac{L_y}{R_y}$  — постоянная времени цепи управления ЭМУ,  $K_3, K_4, K_5$  —

соответственно коэффициенты усиления. В данном примере постоянной времени  $T_6$  пренебрежем.

Из (4.71) — (4.74) найдем характеристическое уравнение системы, которое запишется в следующей форме:

$$(T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)(T_5 p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 = 0. \quad (4.75)$$

К системе предъявляются следующие технические требования.

а) Статизм системы не должен превышать  $S = 0,002$ , т. е. общий коэффициент усиления должен иметь следующий порядок величины:

$$K_{\text{общ}} = \frac{1}{0,002} = 500.$$

б) Время регулирования, вызванное скачкообразным изменением нагрузки, не должно превышать 1,5 сек.

Проверка на устойчивость системы с коэффициентом усиления  $K_{\text{общ}} = 500$  показывает, что она неустойчива.

Выберем в качестве стабилизирующего устройства трансформатор с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , который включим так, как это показано на рис. 104 сплошными линиями. Для определения предельного быстродействия на основании ранее полученных результатов построим кривую Д-разбиения для элементов, не охваченных стабилизирующим устройством. В данном случае неохваченная часть описывается уравнением третьего порядка. Как это следует из результатов теории, независимо от значений параметров стабилизирующего устройства область положительности вещественной частотной

характеристики будет ограничена сверху критической частотой кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения относительно коэффициента усиления неохваченных звеньев.

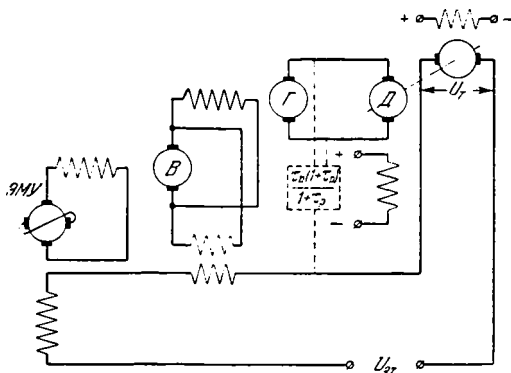


Рис. 104. Схема рис. 102 со стабилизирующим устройством.

Уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$  не охваченных стабилизирующим устройством звеньев запишется:

$$\bar{K} = -[T_1 T_2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1](1 + T_3 j\omega). \quad (4.76)$$

На рис. 105 приведена кривая, построенная по уравнению (4.76). Критическая частота  $\omega_p = 2,5$ . Имея в виду, что время переходного

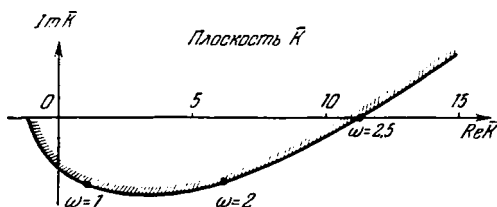


Рис. 105. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$  неохваченных элементов.

режима  $t > \frac{\pi}{\omega_c}$  (где  $\omega_c$  определяет область положительности), и учитывая, что  $\omega_c < \omega_p$ , приходим к выводу, что ни при каких значениях  $\tau$  стабилизирующего устройства невозможно получить требуемое быстродействие.

Для того чтобы обеспечить нужное быстродействие, необходимо согласно полученным в теории результатам изменить передаточную функцию стабилизирующего устройства и характер его включения.

Для того чтобы система структурно допускала любой коэффициент усиления при любой полосе положительности, выбираем в рассматриваемом случае стабилизирующее устройство с передаточной функцией

$$\frac{\tau p (1 + T p)}{1 + \tau p}, \quad (4.77)$$

которое включаем в систему вместо упомянутого выше трансформатора так, как это показано на рис. 104 пунктиром. Передаточная функция замкнутой системы запишется:

$$K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 (1 + \tau p) \{ (T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1) (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) (1 + T_5 p) (1 + \tau p) + K_3 K_4 K_5 \tau p (1 + T p) (T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 (1 + \tau p) \}^{-1}. \quad (4.78)$$

Знаменатель (4.78), приравненный нулю, есть характеристическое уравнение системы. Из характеристического уравнения находим уравнение кривой  $D$ -разбиения по  $T$ , которое имеет вид

$$\bar{T} = - [1 + T_1 j\omega + T_1 T_2 (j\omega)^2] \times \\ \times [(1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) (1 + T_5 j\omega) (1 + \tau j\omega) + K_3 K_4 K_5 \tau j\omega] + \\ + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 (1 + \tau j\omega) \{ K_3 K_4 K_5 \tau j\omega [T_1 T_2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1] \}^{-1}. \quad (4.79)$$

Поделив числитель и знаменатель (4.78) на

$$K_3 K_4 K_5 \tau p [T_1 T_2 p^2 + T_1 p + 1],$$

получим после подстановки  $p = j\omega$ :

$$\frac{\frac{K_1 K_2 (1 + \tau j\omega)}{\tau j\omega [T_1 T_2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1] j\omega}}{T + \frac{\Omega}{K_3 K_4 K_5 \tau j\omega [T_1 T_2 (j\omega)^2 + T_1 j\omega + 1] j\omega}}, \quad (4.80)$$

где

$$\Omega = [1 + T_1 j\omega + T_1 T_2 (j\omega)^2] [(1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) (1 + T_5 j\omega) (1 + \tau j\omega) + K_3 K_4 K_5 \tau j\omega] + K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 (1 + \tau j\omega).$$

Знаменатель (4.80) состоит из суммы постоянной  $T$  и выражения для кривой  $D$ -разбиения по  $T$ . Числитель (4.80) представляет собой выражение для вспомогательной кривой.

Примем следующие значения параметров:  $K_3 K_4 K_5 = 20$ ,  $K_1 K_2 = 2,5$  и  $\tau = 0,2$  сек.

На рис. 106 приведены кривая  $D$ -разбиения по  $T$  и вспомогательная кривая. Из этих кривых на основании свойств, приведенных в главе I, видно, что наиболее благоприятным будет значение  $T$ , лежащее в окрестности  $T = 0,3$  сек. На рис. 107 приведена кривая переходного процесса при  $T = 0,3$  сек, из которой видно, что время регулирования равно 1,2 сек, что удовлетворяет техническим требованиям. Если ввести в систему дополнительное возмущение,



то это приведет только к усложнению вспомогательной кривой. Порядок и метод расчета не изменяются.

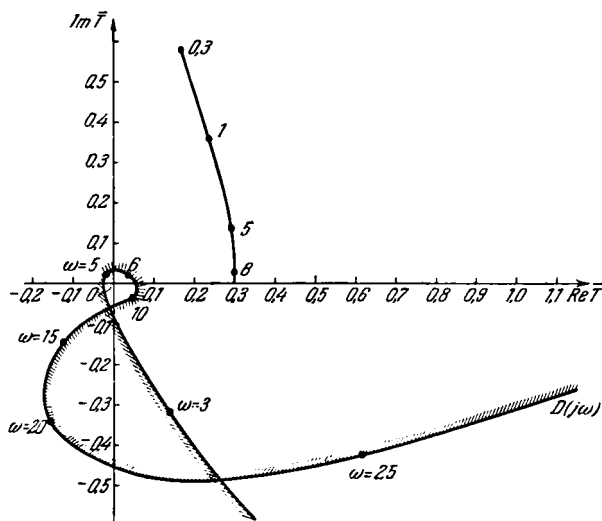


Рис. 106. Кривая  $D$ -разбиения по  $T$ .

**Пример 2.** Рассмотрим систему, состоящую из основных элементов, структурная схема которой представлена на рис. 108. Сравним величину критического коэффициента усиления системы рис. 108 при введении идеальной производной и при введении реальной производной. Для этой цели мы воспользуемся методом, рассмотренным

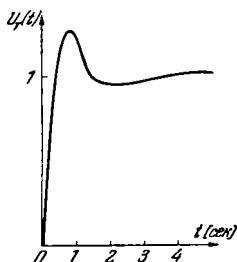


Рис. 107. Кривая переходного процесса.

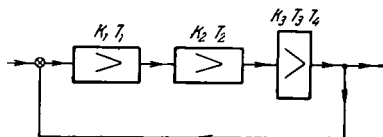


Рис. 108. Схема регулирования скорости двигателя.

в начале настоящей главы. Характеристическое уравнение системы из основных элементов запишется:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(T_3 T_4 p^2 + T_3 p + 1) + K_1 K_2 K_3 = 0. \quad (4.81)$$

Отсюда уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по общему коэффициенту усиления будет иметь вид

$$\bar{K} = \bar{K}_1 \bar{K}_2 \bar{K}_3 = -(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)[1 + T_3 j\omega + T_3 T_4 (j\omega)^2]. \quad (4.82)$$

На рис. 109 представлена кривая, построенная по уравнению (4.82). Критический коэффициент усиления здесь равен  $K = 500$ .

Восставим перпендикуляр к оси  $\text{Re } \bar{K}$  так, чтобы он касался кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения (рис. 109). Максимальный критический коэффициент усиления, который может быть получен при введении воздействия по производной, определится отрезком  $af$ . В данном случае  $af = 2000$ . Величина коэффициента воздействия по производной определится из соотношения

$$T = \frac{\text{tg } \varphi}{\omega}.$$

Определим теперь максимальную величину критического коэффициента усиления для рассматриваемой системы, если вместо идеальной будет реальная производная (т. е. введем передаточную функцию  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ ). В результате анали-

за, приведенного для этого случая, получено, что  $K_{\text{кр}} = 600$ .

Из приведенного расчета видно, что замена реальной производной идеальной может привести к ошибочным результатам и что такая замена всегда нуждается в дополнительной проверке.

**Пример 3.** В третьем примере рассмотрим подробно последовательность выбора структуры и расчет параметров следящей системы.

а) Система из основных элементов. На рис. 110 представлена принципиальная схема следящей системы, состоящей из основных элементов. В качестве измерительного устройства системы служат сельсины, работающие в трансформаторном режиме. Подвижная однофазная обмотка сельсина-датчика  $\text{ССД}$  связана с прибором, задающим необходимый угол или характер его изменения. Подвижная однофазная обмотка сельсина-приемника  $\text{ССП}$  механически, через редуктор, связана с валом исполнительного двигателя. Однофазная обмотка  $\text{ССД}$  питается от источника переменного тока. Если

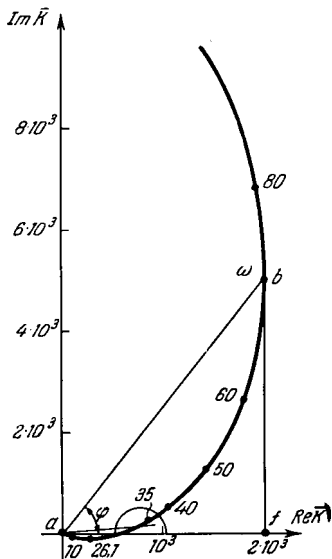


Рис. 109. К определению влияния искаженной производной на величину критического коэффициента усиления.



и на структурной схеме также представляется усилительным звеном. Уравнения электромашинного усилителя и двигателя приводились ранее, а уравнение генератора будет иметь такой же вид, как и для ЭМУ, если считать одну из его постоянных времени равной нулю. Поэтому запишем:

Уравнение ЭМУ

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) U_s = K_1 K_2 U_y. \quad (4.85)$$

На структурной схеме ЭМУ представляется двумя последовательно включенными аperiodическими звеньями.

Уравнение генератора

$$(T_3 p + 1) U_r = K_3 U_s. \quad (4.86)$$

На структурной схеме генератор представляется одним аperiodическим звеном. Уравнение двигателя имеет вид

$$(T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p \varphi = K_4 K_5 U_r. \quad (4.87)$$

Двигатель на структурной схеме представляется последовательным включением звена второго порядка и интегрирующего звена. Наконец, связь между углом поворота вала двигателя и углом оси однофазной обмотки ССП, связанных через редуктор, имеет вид

$$\theta_2 = K_6 \varphi \quad (4.88)$$

и структурно представляется усилительным звеном.

На рис. 111 представлена структурная схема рассматриваемой системы.

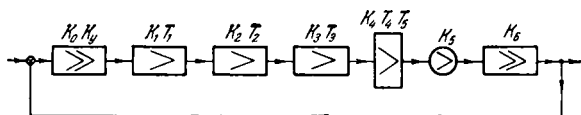


Рис. 111. Структурная схема системы рис. 110.

Полагаем, что все параметры схемы заданы. Менять в некоторых пределах можно коэффициент усиления электронного усилителя и передаточное отношение редуктора. Такого рода следящая система (в своей основе) является типовой для большого круга технических устройств. В частности, рассмотренные элементы входят в качестве основных элементов следящих систем для нажимных винтов блюмингов и целого ряда других промышленных следящих систем. От такого рода следящих систем требуются большое быстродействие, высокая точность и отсутствие сколько-нибудь существенного переуправления.

В настоящем примере будет определена наиболее целесообразная структура и выбраны ее основные параметры при условии, что характеристики всех элементов — линейные. Числовые параметры соответствуют одной следящей системе, применяемой в нажимном устройстве прокатного стана типа блюминга, и имеют следующие значения:

$$T_1 = 0,005 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,12 \text{ сек}, \quad T_3 = 0,77 \text{ сек}, \quad T_4 = 0,064 \text{ сек}, \\ T_5 = 0,085 \text{ сек}; \quad K_1 K_2 = 1,2, \quad K_3 = 2,36.$$

Что касается других коэффициентов усиления, то они будут определены в процессе расчета.

Без подробного исследования можно заключить, что динамические свойства рассматриваемой одноконтурной системы недостаточны для получения большой точности и быстродействия. Критический коэффициент усиления такой системы не превышает 30.

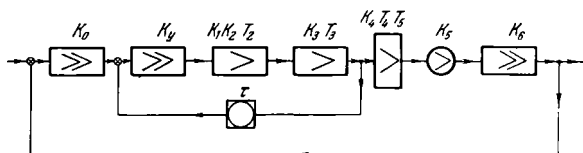


Рис. 112. Структурная схема системы рис. 110 с введенным стабилизирующим устройством.

б) Система с введенными стабилизирующими устройствами. Постоянная времени  $T_1$  цепи уравнения ЭМУ — в данном случае относительно малая величина. Поэтому вначале мы пренебрежем ею, а затем произведем оценку влияния этой постоянной времени. При этих условиях устойчивость в неограниченном увеличении коэффициента усиления может быть достигнута введением одного стабилизирующего устройства простейшего вида с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ . Включим его так, как это показано на структурной схеме рис. 112. Передаточная функция для этого случая запишется:

$$K_0 K_5 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) \times \\ \times \{ (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p (1 + T_3 p) (1 + T_2 p) (1 + \tau p) + \\ + K_1 K_2 K_3 K_5 \tau p (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) + K_0 K_y K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) \}^{-1}. \quad (4.89)$$

Поделив числитель и знаменатель на  $K_1 K_2 K_3 K_5 K_y$  и обозначив  $\frac{1}{K_1 K_2 K_3 K_5 K_y} = m$ , получаем:

$$K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) \times \\ \times \{ m (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p (1 + T_2 p) (1 + T_3 p) (1 + \tau p) + \\ + \tau p (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p + K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) \}^{-1}. \quad (4.90)$$

При достаточно больших коэффициентах усиления  $m \rightarrow 0$ . Система будет устойчивой, если выполняются условия (2.63) (так как  $N_2 - N_1 = 2$ ) и если вырожденное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости.

Что касается первого условия, то оно выполняется. Устойчивость для вырожденного уравнения может быть достигнута соответствующим выбором  $\tau$ .

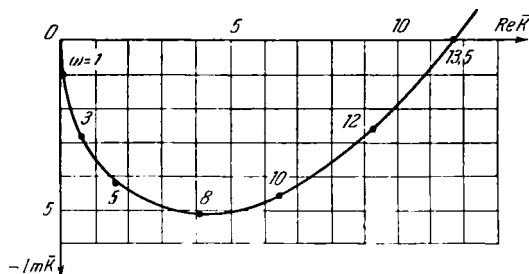


Рис. 113. Кривая  $D$ -разбиения по  $K$  неохваченных элементов.

При достаточно малых  $m$  переходный процесс будет в полной мере определяться вырожденной передаточной функцией, которая имеет вид

$$\frac{K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p)}{\tau p (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p + K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p)}. \quad (4.91)$$

Поделив числитель и знаменатель (4.91) на  $(1 + \tau p)$ , получаем:

$$\frac{K_0 K_4 K_5 K_6}{\frac{\tau p}{1 + \tau p} (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p + K_0 K_4 K_5 K_6}. \quad (4.92)$$

Из (4.92) видно, что переходный процесс полностью определяется кривой  $D$ -разбиения по  $K_0 K_4 K_5 K_6$ . Как это было выяснено ранее, область положительности вещественной частотной характеристики ограничена сверху значением критической частоты кривой  $D$ -разбиения по коэффициенту усиления элементов, не охваченных стабилизирующим устройством. Уравнение этой кривой имеет вид

$$\bar{K} = -[T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_4 j\omega + 1] j\omega. \quad (4.93)$$

На рис. 113 представлена кривая, построенная по уравнению (4.93) при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности. Критическая частота  $\omega_{кр} = 13,5$  и, следовательно,

$$\omega_0 < 13,5.$$

Действительная кривая  $D$ -разбиения вырожденной системы, исходя из (4.92), запишется:

$$\overline{K_0 K_4 K_5 K_6} = -\frac{\tau j\omega [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_4 j\omega + 1] j\omega}{1 + \tau j\omega}. \quad (4.94)$$

Для того чтобы построить кривую (4.94), необходимо выбрать величину  $\tau$ . Это может быть сделано, исходя из необходимости обеспечения устойчивости вырожденного уравнения.

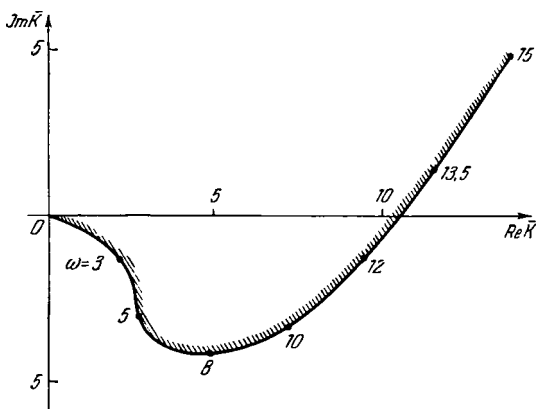


Рис. 114. Кривая  $D$ -разбиения по  $K$  при учете влияния стабилизирующего устройства.

Характеристическое уравнение вырожденной системы имеет вид

$$\tau p [T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1] p + K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) = 0. \quad (4.95)$$

Выберем такое значение  $\tau$ , при котором система устойчива при любом значении  $K_0 K_4 K_5 K_6$ . При данном значении  $T_5$  это будет иметь место при  $\tau > T_5$ . Выбираем  $\tau = 0,6$  сек.

На рис. 114 представлена кривая, построенная по уравнению (4.95) при  $\tau = 0,6$ . Как это видно из рис. 114, для малых значений  $K_0 K_4 K_5 K_6$  вплоть до  $K_0 K_4 K_5 K_6 = 1,5$  процесс будет практически аperiодическим, но быстродействие будет недостаточным. Так, при  $K_0 K_4 K_5 K_6 = 1,5$  время переходного процесса

$$t > \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ сек},$$

что нельзя считать удовлетворительным.

Увеличение быстродействия воздействием на величину  $\tau$  не может дать необходимого эффекта, что ясно из следующих рассуждений.

На рис. 115 представлено качественное построение кривой (4.94).

При этом кривая  $\frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}$  построена отдельно. Кривая, соответствующая  $\frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega}$ , представляет собой полуокружность с радиусом, равным единице, и проходящую через начало координат. Изменением  $\tau$  можно менять только характер распределения частот вдоль полуокружности, что может несколько изменить характер кривой вблизи начала координат. Поэтому воздействовать на быстродействие системы изменением  $\tau$  оказывается неэффективным.

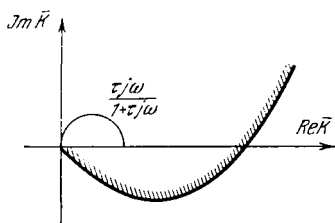


Рис. 115. К выяснению влияния изменения на качество процесса регулирования.

Для увеличения быстродействия нужно так изменить структуру, чтобы кривая (4.93) существенно повернулась по часовой стрелке. Такой поворот кривой будет осуществлен при введении на вход системы воздействия, пропорционального первой производной.

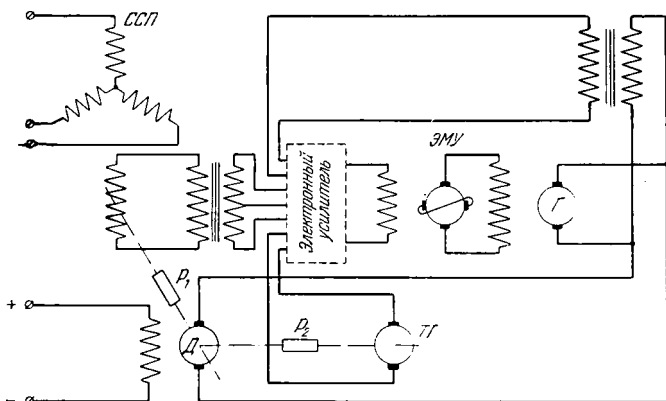


Рис. 116. Принципиальная схема следящей системы.

Практически это осуществляется следующим образом. Вал двигателя через редуктор соединяется с тахогенератором. Тогда напряжение на тахогенераторе будет пропорционально скорости вращения двигателя или, что все равно, первой производной от угла поворота вала двигателя. На рис. 116 представлена полная принципиальная схема полученной системы, а на рис. 117 — ее структурная схема.



Уравнение вырожденной части системы при введении воздействия по производной и в предположении, что  $K_1 K_2 K_3 K_y$  достаточно велико, имеет вид

$$[\tau p (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p + K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) (1 + T p)] \theta_2 = K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) \theta_1$$

или

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p)}{\tau p (T_4 T_5 p^2 + T_4 p + 1) p + K_0 K_4 K_5 K_6 (1 + \tau p) (1 + T p)}. \quad (4.96)$$

Здесь  $T$  — коэффициент воздействия по производной.

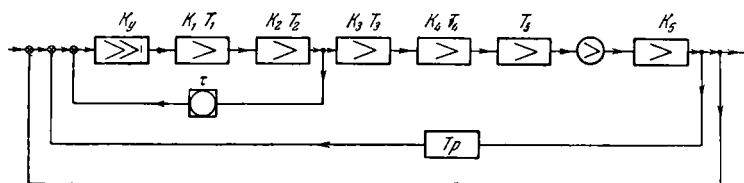


Рис. 117. Структурная схема для рис. 115.

Выражение для кривой  $D$ -разбиения по  $K_0 K_4 K_5 K_6$  имеет вид

$$\overline{K_0 K_4 K_5 K_6} = - \frac{\tau j \omega [T_4 T_5 (j \omega)^2 + T_4 j \omega + 1] j \omega}{(1 + \tau j \omega) (1 + T j \omega)}. \quad (4.97)$$

Если учесть выражение для  $K_6 K_4 K_5 K_6$  для случая, когда нет воздействия по производной (уравнение (4.94)), и обозначить его через  $D_k$ , то уравнение (4.97) запишется:

$$\overline{K_0 K_4 K_5 K_6} = \frac{D_k}{1 + T j \omega}. \quad (4.93)$$

На рис. 118 представлены кривая  $D_k$  и прямая  $1 + T j \omega$ , построенные качественно. Из рис. 118 видно, что соответствующим выбором коэффициента воздействия по производной  $T$  можно повернуть кривую по часовой

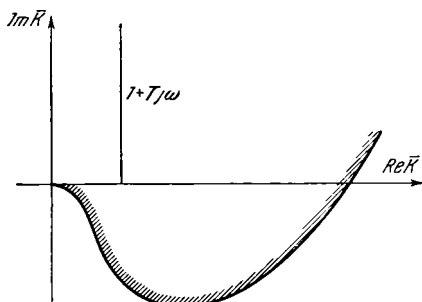


Рис. 118. К определению влияния воздействия по производной.

стрелке настолько, насколько это необходимо для обеспечения надлежащего качества.

На рис. 119 представлена кривая переходного процесса для  $\tau = 0,6$  сек и  $T = 0,3$  сек; время регулирования равно 0,8 сек и перерегулирование отсутствует.

Полученная система обладает весьма высокими динамическими свойствами. Более того, в линейном рассмотрении полученная структура является лучшей, так как здесь соответствующим выбором  $K_y$  и  $K_1 K_2 K_3$  можно получить любую степень установившейся точности при любой сколь угодно большой области положительности; при этом отсутствует перерегулирование. При практическом использовании этих результатов следует иметь в виду следующее. В линейном рассмотрении не учитываются мощности машин. По этой причине при попытке осуществления процесса, представленного на

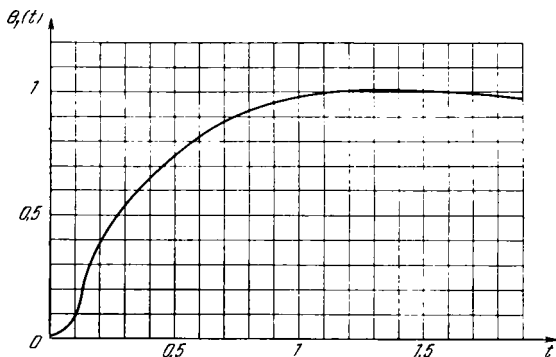


Рис. 119. Кривая переходного процесса.

рис. 119, броски тока в двигателе могут оказаться недопустимыми. Это, естественно, ограничивает возможности использования структурных свойств системы. Однако улучшение свойств системы и максимальное использование двигателя в пределах линейной системы не представляются возможными. В этих случаях необходимо строить нелинейную оптимальную систему.

Некоторые соображения о построении структур систем оптимального регулирования рассмотрены в следующей главе. При исследовании системы мы пренебрегли постоянной времени  $T_1$  цепи управления ЭМУ. Учет этой постоянной времени ограничит значение коэффициента усиления  $K_1 K_2 K_3 K_y$  сверху. Для того чтобы оценить влияние  $T_1$ , построим кривую  $D$ -разбиения по  $K_1 K_2 K_3 K_y$  при учете  $T_1$ . Уравнение кривой  $D$ -разбиения по  $K_1 K_2 K_3 K_y$  имеет вид

$$\overline{K_1 K_2 K_3 K_y} = - \frac{\prod_{i=1}^3 (1 + T_i j\omega) [T_i T_s (j\omega)^2 + T_i j\omega + 1] j\omega (1 + \tau j\omega)}{\tau j\omega [T_4 T_s (j\omega)^2 + T_4 j\omega + 1] j\omega + K_y K_4 K_5 K_6 T j\omega (1 + \tau j\omega) + K_y K_4 K_5 K_6 (1 + \tau j\omega)} \quad (4.99)$$

На рис. 120 представлена кривая  $D$ -разбиения, построенная по уравнению (4.99). Из этого рисунка видно, что верхняя граница  $K_1 K_2 K_3 K_Y$  равна 280, а нижняя — 130. Снять ограничение по величине  $K_1 K_2 K_3 K_Y$  можно введением в систему еще одного стабилизи-

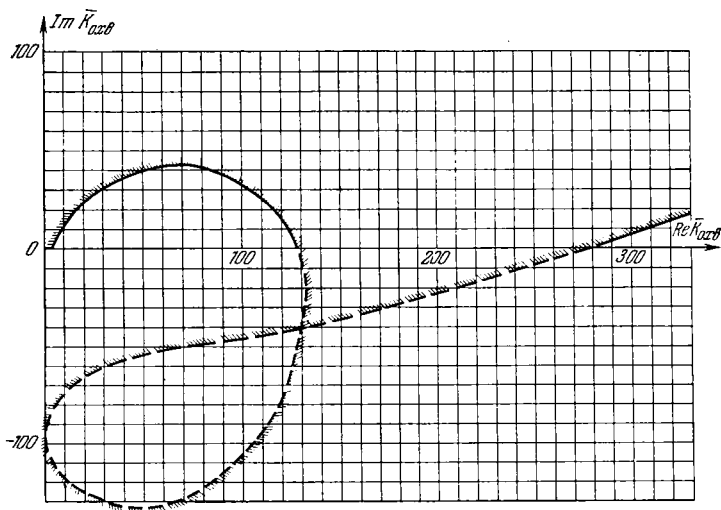


Рис. 120. Кривая  $D$ -разбиения по  $K_{\text{о.х.в.}}$ .

рующего устройства с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , охватывающего ЭМУ и электронный усилитель. При этих условиях можно сохранить все динамические свойства системы, выбрав соответствующим образом ее параметры. Практически это может быть сделано так же, как это ранее было сделано для случая, когда постоянная времени  $T_1$  полагалась равной нулю.

## ГЛАВА V

### НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

#### § 5.1. Учет влияния нелинейностей, которые не ограничивают величин переменных и их производных в процессе регулирования

Прежде всего мы выделим группу нелинейностей, которая не связана с ограниченной мощностью элементов, и выясним влияние этих нелинейностей на динамические свойства систем автоматического регулирования. В качестве примеров таких нелинейностей могут служить люфты, зоны нечувствительности и другие нелинейности.

Мы будем рассматривать влияние нелинейностей указанного типа в том конкретном случае, когда элементы, обладающие этой нелинейностью, охватываются стабилизирующими устройствами и когда коэффициенты усиления контуров, образуемых нелинейными элементами и стабилизирующим устройством, можно в широких пределах менять, в частности можно неограниченно увеличивать. При этом поставим следующие задачи: а) установить возможность возникновения в системе автоколебаний за счет указанной нелинейности и проанализировать их устойчивость; б) установить влияние коэффициента усиления контура, содержащего нелинейность, на возможность возникновения автоколебаний или на их устранение. Если система устойчива в малом во всех точках нелинейной характеристики и в ней не могут возникнуть автоколебания, то, как правило, в реальных системах она удовлетворяет необходимым условиям устойчивости в целом (в большом).

Для оценки влияния нелинейностей на динамические свойства системы будем пользоваться методом гармонического баланса в той его разновидности, которая была разработана Л. С. Гольдфарбом\*).

Имея в виду приближенный характер этого метода и гипотезы, на которых он базируется, попытаемся в каждом отдельном случае установить законность его применения.

---

\*) Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 8, № 5, 1947.

Как известно, для того чтобы установить возможность возникновения автоколебаний, необходимо найти амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой линейной части системы и эквивалентный коэффициент усиления нелинейного элемента. Если указанные кривые, построенные на одной плоскости, пересекаются, то это свидетельствует о возможности возникновения автоколебаний. Они действительно будут иметь место, если указанная точка пересечения соответствует устойчивым автоколебаниям.

Мы не будем здесь подробно излагать метод гармонического баланса и способы нахождения уравнений для определения эквивалентных коэффициентов усиления нелинейных элементов. Соответствующие сведения читатель может найти в литературе. Приведем только основные соотношения. Следуя Гольдфарбу, введем следующие обозначения:

$NJ_0\left(\frac{A}{a}\right)$  — эквивалентный коэффициент усиления нелинейного элемента;

$J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  — нормированный эквивалентный коэффициент усиления нелинейного элемента;

$N$  — число, зависящее от параметров нелинейной характеристики (в каждом отдельном случае  $N$  будет определено);

$W(j\omega) = \frac{KR(j\omega)}{Q(j\omega)}$  — амплитудно-фазовая характеристика линейной части системы для случая, когда система разомкнута в том месте, где находится нелинейный элемент.

Уравнение свободных колебаний замкнутой системы запишется:

$$NW(j\omega)J_0\left(\frac{A}{a}\right) + 1 = 0$$

или

$$N \frac{KR(j\omega)}{Q(j\omega)} J_0\left(\frac{A}{a}\right) + 1 = 0. \quad (5.1)$$

Получаемые результаты будут тем ближе к истине, чем более явно выражены фильтрующие свойства характеристики  $\frac{KR(j\omega)}{Q(j\omega)}$ . Оценку структур с точки зрения их фильтрующих свойств мы произведем несколько ниже, здесь же мы рассмотрим влияние нелинейностей, полагая, что фильтрующие свойства системы достаточны для применения метода гармонического баланса.

## 1. Нелинейность типа зоны нечувствительности

На рис. 121 представлена характеристика нелинейного элемента такого типа. Блок-схема системы регулирования дана на рис. 122. На этом рисунке вся линейная часть системы представлена одним элементом с передаточной функцией в разомкнутом состоянии,

равной  $\frac{KR(p)}{Q(p)}$ . Уравнение свободного состояния системы запишется:

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = -\frac{Q(j\omega)}{KNR(j\omega)}. \quad (5.2)$$

Правая часть уравнения (5.2) представляет собой в масштабе  $\frac{1}{KN}$  уравнение кривой Д-разбиения по коэффициенту  $K$  части контура, охватываемой стабилизирующим звеном. Уравнение эквивалентного коэффициен-

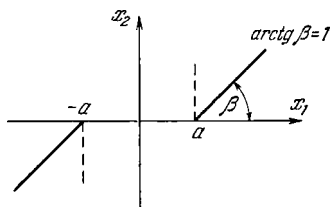


Рис. 121. Характеристика зоны нечувствительности.

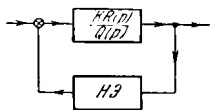


Рис. 122. Блок-схема системы с нелинейным элементом.

та усиления нелинейного элемента запишется:

$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = g\left(\frac{A}{a}\right) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{\pi} - \frac{4 \cos \alpha}{\pi \frac{A}{a}}, \quad (5.3)$$

где  $\alpha = \arcsin \frac{a}{A}$ .

На рис. 123 представлена зависимость  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  для случая изменения  $\frac{A}{a}$  от нуля до бесконечности. На плоскости комплексного пе-

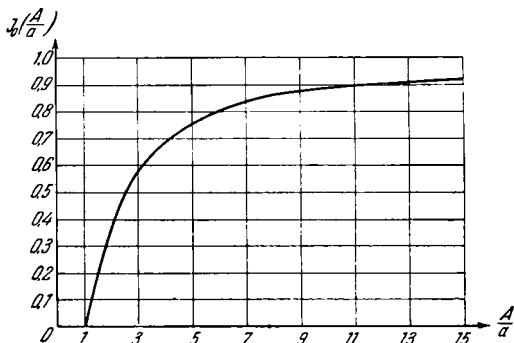


Рис. 123. Характеристика эквивалентного нелинейного элемента.

ременного  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  будет расположено на вещественной оси, занимая отрезок от начала координат до единицы.

Рассмотрим теперь, как будет расположена кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$ . Так как система устойчива при неограниченном увеличении коэффициента усиления  $K$ , то во всех случаях на вещественной оси,

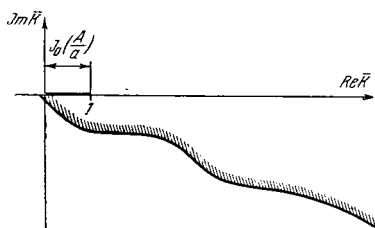


Рис. 124. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения и характеристика нелинейного элемента.

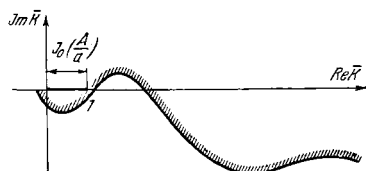


Рис. 125. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения и характеристика нелинейного элемента.

начиная с бесконечности, будет расположена область устойчивости по  $K$ . Кроме того, здесь возможны следующие случаи: а) когда вся вещественная ось принадлежит области устойчивости (рис. 124); б) когда области устойчивости расположены в начале координат и в бесконечности (рис. 125) (это случай клювообразной амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы) и в) когда в начале координат нет области устойчивости и единственная область устойчивости имеет место при больших  $K$  (рис. 126 \*).

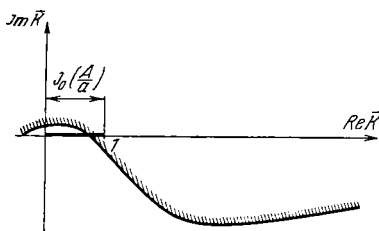


Рис. 126. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения и характеристика нелинейного элемента.

кривые  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  и  $-\frac{Q(j\omega)}{KNR(j\omega)}$  не пересекаются ни при каком значении  $K$ , и в такой системе не могут возникнуть автоколебания. Так как система устойчива при любых коэффициентах усиления и содержит только указанную нелинейность, то по существу нет причин для неустойчивости системы за счет этой нелинейности. Будем поэтому полагать, что система удовлетворяет необходимым требованиям устойчивости в целом. Рассмотрим второй случай. В зависимости от величины начальной области устойчивости кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения может

\*) Другие случаи, когда, например, имеется многократное чередование областей устойчивости и неустойчивости, можно привести к результатам, рассматриваемым далее.

пересекать характеристику  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  и может ее не пересекать. Предположим вначале, что область устойчивости по  $K$  в начальной части больше единицы и кривая  $D$ -разбиения не пересекает отрезка  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$ . Однако в зависимости от выбираемого значения коэффициента усиления  $K$  такое пересечение кривых может иметь место. Чем больше будет коэффициент усиления  $K$ , тем ближе к началу координат будет расположена точка пересечения и, следовательно, тем меньше будет амплитуда колебаний. При дальнейшем увеличении  $K$  пересечение кривых может быть уже в двух точках (рис. 127). Не-

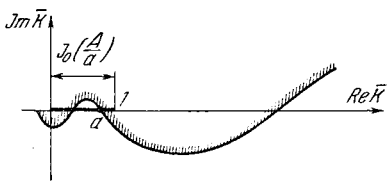


Рис. 127. К определению устойчивых автоколебаний.

трудно видеть, что первая точка пересечения будет соответствовать неустойчивым автоколебаниям. Действительно, давая приращение по амплитуде в сторону ее увеличения, мы попадаем в область неустойчивости, где амплитуда будет еще увеличиваться; наоборот, давая приращение амплитуды в обратном направлении, попадаем в область устойчивости, где амплитуда будет стремиться к нулю. Таким образом, с точки зрения возникновения колебаний за счет нелинейности опасной является вторая точка пересечения, обозначенная на рис. 127 буквой  $a$ . Изменением коэффициента усиления  $K$  можно вообще избежать возникновения автоколебаний или свести их амплитуду к весьма малой величине.

## 2. Нелинейность типа люфта или сухого трения

На рис. 128 представлена характеристика рассматриваемой нелинейности. Так как эта характеристика несимметрична, то эквивалентный коэффициент усиления будет иметь как вещественную, так и мнимую составляющие. Уравнения этих составляющих, найденные в упомянутой работе Гольдфарба, запишутся в следующем виде:

$$g\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{3}{4} \pi - \frac{a}{2} - \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{a}{A} \cos \alpha \right] \quad (5.4)$$

и мнимая

$$b\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{3}{4} + \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha \right], \quad (5.5)$$

где

$$\alpha = \arcsin \left( 1 - \frac{2a}{A} \right). \quad (5.6)$$



Эквивалентный коэффициент усиления нелинейного элемента записывается как векторная сумма этих двух составляющих

$$J\left(\frac{A}{a}\right) = g\left(\frac{A}{a}\right) + j b\left(\frac{A}{a}\right). \quad (5.7)$$

На рис. 129 представлена кривая  $\frac{1}{J\left(\frac{A}{a}\right)}$ , построенная для случая изменения  $\frac{A}{a}$  от нуля до бесконечности. Увеличивая коэффициенты

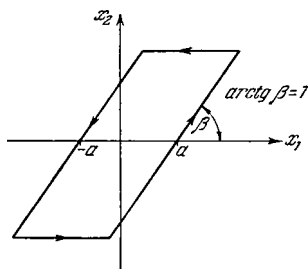


Рис. 128. Характеристика люфта.

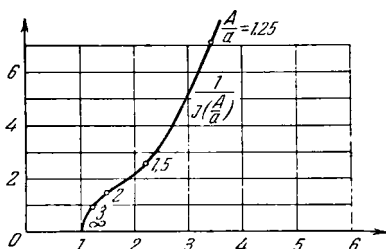


Рис. 129. Характеристика эквивалентного нелинейного элемента.

усиления  $K$ , можно всегда избежать пересечения кривых  $\frac{1}{J\left(\frac{A}{a}\right)}$  и  $\frac{-KR(j\omega)}{Q(j\omega)}$ . Это обстоятельство обусловлено тем, что кривая  $\frac{1}{J\left(\frac{A}{a}\right)}$

расположена в первом квадранте на ограниченном участке и не проходит через начало координат.

Общий вывод, который следует из приведенного исследования, состоит в том, что для данного класса структур при соответствующем выборе параметров нелинейности рассмотренного типа не оказывают влияния на динамические свойства системы и их можно не учитывать при исследовании систем регулирования.

## § 5.2. О фильтрующих свойствах рассматриваемого класса структур

Как уже отмечалось выше, результаты, полученные при исследовании с помощью метода гармонического баланса, будут тем ближе к действительности, чем ближе свойства линейной части разомкнутой системы к свойствам низкочастотного фильтра.

Система размыкается в том месте, где находится нелинейность. Отсюда ясно, что фильтрующие свойства системы регулирования будут существенно зависеть от того, в каком месте находится нелинейность. В одноконтурных системах фильтрующие свойства системы регулирования не зависят от места нахождения нелинейности, так как уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы не зависит от места ее размыкания. Эти системы будут по своим свойствам тем ближе к свойствам низкочастотного фильтра, чем выше порядок уравнения, которым они описываются. Кроме того, частота, при которой амплитудно-частотная характеристика пересекается с осью частот, будет тем меньше, чем больше абсолютные значения постоянных времени элементов.

Совсем другое может иметь место, когда система многоконтурная. Здесь все будет зависеть от того, в каком месте находится нелинейность и, следовательно, каков характер амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы. Для иллюстрации приведем пример. На рис. 84 приведена структурная схема системы, состоящей из четырех апериодических звеньев. Два первых звена охватываются

стабилизирующим устройством с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ . Рассмотрим два случая: а) когда нелинейность находится в точке А и б) когда нелинейность находится в точке В. Размыкая систему в точке А, получим уравнение амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы в следующей форме:

$$|W_A(j\omega)| = \frac{|K_1 K_2 K_3 K_4 (1 + \tau j\omega)|}{\left| \prod_{i=1}^4 (1 + T_i j\omega) (1 + \tau j\omega) + K_1 K_2 \tau j\omega (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) \right|}. \quad (5.8)$$

Для случая, когда нелинейность находится в точке В, уравнение амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы запишется:

$$|W_B(j\omega)| = \frac{|K_1 K_2 \tau j\omega (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) + K_1 K_2 K_3 K_4 (1 + \tau j\omega)|}{\left| \prod_{i=1}^4 (1 + T_i j\omega) (1 + \tau j\omega) \right|}. \quad (5.9)$$

Сравнивая уравнения (5.8) и (5.9), мы видим, что характер амплитудно-частотной характеристики будет существенно другим в зависимости от места нахождения нелинейности. Нетрудно видеть, что фильтрующие свойства для случая (5.8) будут более резко выражены, чем для случая уравнения (5.9). На рис. 130 приведены амплитудно-частотные характеристики, соответствующие случаям (5.8) и (5.9), для следующих данных:

$$T_1 = 0,1 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,01 \text{ сек}, \quad T_3 = 0,34 \text{ сек}, \quad T_4 = 0,1 \text{ сек}; \\ \tau = 0,5 \text{ сек}; \quad K_1 K_2 = 40, \quad K_3 K_4 = 15.$$

Амплитудно-частотные характеристики в каждом отдельном случае существенно зависят от численных значений параметров системы, и перед тем, как делать заключение о возможности применения метода гармонического баланса, необходимо выяснить характер расположения амплитудно-частотной характеристики.

Для такой оценки нет необходимости строить амплитудно-частотную характеристику. Как это было доказано в первой главе, абсолютное значение амплитудно-фазовой характеристики системы может

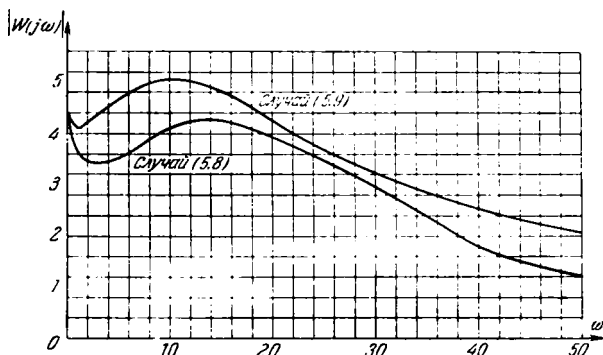


Рис. 130. Амплитудно-частотные характеристики.

быть найдено непосредственно из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$ . Приведем способ определения амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы из кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$  с тем, чтобы из этой кривой, построенной для определения возможности возникновения автоколебаний, можно было сразу же оценить фильтрующие свойства линейной части системы.

Выражение для амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы записывалось в следующей форме:

$$\frac{KR(j\omega)}{Q(j\omega)}. \quad (5.10)$$

Амплитудно-частотную характеристику разомкнутой системы мы найдем, если для каждой частоты  $\omega$  определим абсолютное значение выражения (5.10). Поделив числитель и знаменатель (5.10) на  $R(j\omega)$ , получаем:

$$\frac{K}{\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}}. \quad (5.11)$$

Но знаменатель (5.11) есть правая часть уравнения кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$ . Таким образом, для построения амплитудно-частотной

характеристики разомкнутой системы нужно определить абсолютные значения знаменателя (5.11) для всех частот и поделить выбранное значение  $K$  на найденные абсолютные значения знаменателя. На рис. 131 представлена кривая  $D$ -разбиения по  $K$ . Абсолютные значения знаменателя (5.11) для различных частот  $\omega_i$ ,  $\omega_{i+1}$  определяются отрезками  $a\omega_i$ ,  $a\omega_{i+1}$  и т. д. Абсолютное значение (5.11) определяется отношением длин отрезков  $K$  и  $a\omega_i$ . По характеру расположения кривой  $D$ -разбиения можно непосредственно из этой кривой и выбранного  $K$  определить фильтрующие свойства разомкнутой линейной части системы регулирования. В примере, который приведен в конце настоящей главы, дан расчет, на котором проиллюстрированы метод нахождения амплитудно-частотной характеристики и определение фильтрующих свойств линейной части системы регулирования.

При наличии одного стабилизирующего устройства степень оператора числителя передаточной функции разомкнутой системы может быть меньше степени оператора знаменателя не больше, чем на два. В этом случае следует обратить особое внимание на то, насколько выполняется гипотеза о фильтрующих свойствах линейной части системы.

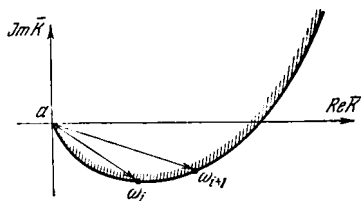


Рис. 131. К определению амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы.

### § 5.3. Нелинейности с положительным наклоном характеристик

В этом параграфе мы рассмотрим влияние нелинейностей, характеризующихся тем, что во всех точках их статических характеристик  $\frac{dx_2}{dx_1} > 0$ , где  $x_1$  — входная величина и  $x_2$  — выходная.

В качестве примера таких нелинейностей могут служить кривые намагничивания электрических машин и другие подобные характеристики.

Будем рассматривать влияние указанного типа нелинейностей на динамические свойства системы в том случае, когда этими характеристиками обладают элементы, охватываемые стабилизирующими устройствами, при условии, что коэффициент усиления контура, образуемого нелинейным элементом и стабилизирующим звеном, можно менять в широких пределах.

На рис. 132 представлена структурная схема системы автоматического регулирования, состоящая из  $N$  элементов. Пусть  $n$  из них обладают нелинейностями, статические характеристики которых



Для того чтобы характеристическое уравнение, порожденное уравнением (5.14), удовлетворяло условиям устойчивости при  $m_i \rightarrow 0$  (что равносильно  $K_i \rightarrow \infty$ ), необходимо и достаточно, чтобы вырожденное характеристическое уравнение

$$\prod_{i=1}^n F_{ni}(p) \prod_{j=n+1}^N [Q_j(p) + K_j] = 0$$

и вспомогательное уравнение первого или второго рода удовлетворяли условиям устойчивости.

Если эти условия выполняются, то при достаточно малых  $m \leq m_0$  переходный процесс будет в полной мере определяться вырожденным уравнением

$$\prod_{i=1}^n F_{ni}(p) \prod_{j=n+1}^N [Q_j(p) + K_j] x_N = \prod_{j=n+1}^N K_j x_0. \quad (5.15)$$

Таким образом, если можно выбрать достаточно большой коэффициент усиления усилителя так, что  $\frac{1}{K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i}} = m_i \leq m_0$ , то нели-

нейность рассматриваемого типа не будет практически оказывать никакого влияния на характер процесса.

Мы установили, что система будет *обязательно* устойчивой в малом. Так как для рассматриваемого типа нелинейностей эквивалентный коэффициент усиления будет изображаться вещественным отрезком, то при соответствующем выборе коэффициента усиления  $K_i$  и параметров стабилизирующего устройства можно добиться того, что либо пересечения амплитудно-фазовой характеристики с указанным отрезком вовсе не будет, либо будет при очень малых амплитудах, и систему можно считать устойчивой в целом.

В этих условиях остается только установить численное значение величин  $m$ , и если  $m_i < m_0$ , то с нелинейностью можно не считаться.

Для получения устойчивости при больших  $K_i$  в рассмотренном выше случае в систему вводились идеальные производные до  $(q-2)$ -го порядка. Как уже указывалось ранее, для получения таких производных часто приходится преодолеть существенные технические трудности. Поэтому вместо идеальных производных вводятся стабилизирующие устройства с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , количество которых приходится увеличивать. Выясним влияние нелинейностей рассматриваемого здесь типа на динамику системы в том случае, когда в качестве стабилизирующих вводятся устройства с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ . Собственные операторы  $Q(p)$  в этом случае могут быть не выше второго порядка. Запишем уравнение  $i$ -го

звена:

$$Q_i(p) x_{i+1} = K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i} (x_i - x'_i), \quad (5.16)$$

где  $x'_i$  — выходная координата стабилизирующего устройства. Уравнение стабилизирующего устройства будет:

$$(1 + \tau p) x'_1 = \tau p x_{i+1}. \quad (5.17)$$

Исключая из (5.16) и (5.17)  $x'_1$ , получаем:

$$\left[ Q_i(p) (1 + \tau p) + K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i} \tau p \right] x_{i+1} = K_i (1 + \tau p) \frac{dx_{i+1}}{dx_i} x_i. \quad (5.18)$$

Пользуясь правилом дифференцирования произведения, получаем:

$$\begin{aligned} \left[ Q_i(p) (1 + \tau p) + K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i} \tau p \right] x_{i+1} &= \\ &= K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i} (1 + \tau p) x_i + K_i \tau x_i \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_{i+1}}{dx_i} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left[ Q_i(p) (1 + \tau p) + K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i} \tau p \right] x_{i+1} &= \\ &= \left[ K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i} (1 + \tau p) + K_i \tau p \left( \frac{dx_{i+1}}{dx_i} \right) \right] x_i. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Поделим уравнение (5.19) на  $K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i}$  и, как это сделано выше,

обозначим  $\frac{1}{K_i \frac{dx_{i+1}}{dx_i}} = m_i$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} [m_i Q_i(p) (1 + \tau_i p) + \tau_i p] x_{i+1} &= \\ &= (1 + \tau_i p) x_i + \frac{\tau_i}{\frac{dx_{i+1}}{dx_i}} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_{i+1}}{dx_i} \right) x_i. \end{aligned} \quad (5.20)$$

По сравнению с тем, что имело место для случая, когда стабилизация осуществлялась введением идеальных производных, уравнение (5.20) в своей правой части содержит линейный член  $[(1 + \tau p) x_i]$ , учет которого не представляет труда, и член, зависящий от  $\frac{dx_{i+1}}{dx_i}$ .

Для того чтобы иметь возможность судить о влиянии нелинейностей в рассматриваемом случае, необходимо оценить последний член уравнения (5.20).

На рис. 133 приведена характеристика холостого хода электрической машины, являющаяся типичной для рассматриваемого класса нелинейностей. Для участков  $ab$  и  $cd$   $\frac{dx_{i+1}}{dx_i} = \text{const}$ , и поэтому при работе нелинейного элемента на этих участках характеристики по-

следний член уравнения (5.20) равен нулю. Остается рассмотреть его для случая, когда элемент работает на участке  $bc$ . Если характеристика на этом участке не имеет острых изломов, что для большинства реальных элементов имеет место, то и здесь величина последнего члена может не приниматься во внимание, так как наличие его приведет к некоторому небольшому изменению коэффициентов уравнения, но не изменит его порядка. Таким образом, для при-

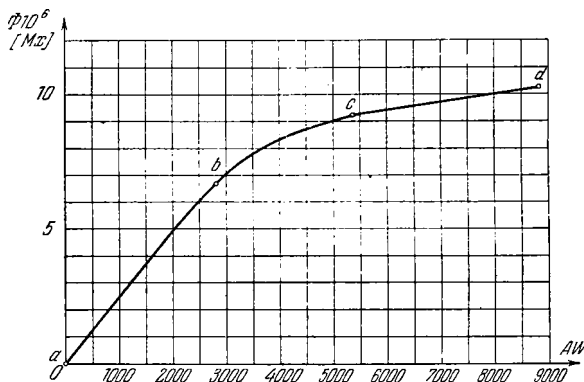


Рис. 133. Характеристика холостого хода машины.

нятых условий и данного вида нелинейностей при достаточной величине коэффициента усиления линейного усилителя нелинейность в контуре обратной связи практически не оказывает влияния на динамические свойства системы. Как это ясно из результатов § 5.1, можно так выбрать параметры линейной части системы и, в частности, коэффициенты усиления, чтобы в системе невозможны были автоколебания за счет рассмотренных нелинейностей.

## § 5.4. Релейные системы

Рассмотрение реле как элемента системы автоматического регулирования при малых отклонениях представляет существенный интерес уже потому, что коэффициент усиления его для малого входного сигнала бесконечно большой для соответствующего вида его характеристики. На рис. 134 представлены возможные типы релейных характеристик. Исследованию режимов работы релейных систем автоматического регулирования посвящено большое количество работ \*).

\*) Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955; Неймарк Ю. И., Релейные системы автоматического регулирования, Диссертация, 1957. Долголенко Ю. В., Скользящие режимы в релейных системах, Диссертация, 1956.



Достаточно подробно изучены автоколебания, вынужденные колебания и другие режимы. В нашем рассмотрении основное внимание будет уделено структурным свойствам этих систем.

### 1. Устойчивость релейных систем

Здесь подразумевается устойчивость состояния равновесия при малых отклонениях от установившегося значения (устойчивость в малом).

Само понятие устойчивости здесь имеет общепринятый смысл.

Из характеристик релейных элементов, приведенных на рис. 134, видно, что положение равновесия, включающее  $x(t) = 0$ , может иметь место для случая рис. 134, а, где положение равновесия соответствует точке  $x = 0$ , и рис. 134, б, где  $x$  лежит в пределах  $x - x_0 < x < x + x_0$ . Здесь  $x$  — сигнал, подаваемый на вход релейного элемента. Для нас представляет интерес случай  $x = 0$  (рис. 134, а); что касается устойчивости системы с релейным элементом с зоной нечувствительности, то она будет определяться устойчивостью линейной системы без реле\*), ибо в этом случае при  $-x_0 < x < +x_0$  релейный элемент не действует на линейную часть, и вся система ведет себя как разомкнутая линейная система.

Для исследования устойчивости нужно найти характеристическое уравнение линеаризованной системы.

На рис. 135 представлена блок-схема релейной системы автоматического регулирования. Вся линейная часть представлена одним звеном с определенной передаточной функцией, а релейный элемент выделен отдельно. При этом предполагается, что линейная часть схемы структурно может быть представлена одно-

Рис. 134. Характеристики реле.

контурной цепочкой без местных (внутренних) обратных связей. Уравнение линейной части схемы находится без труда. Рассмотрим подробнее релейный элемент. Трудность, которая здесь возникает, с принципиальной точки зрения обусловлена тем, что характеристика релей-

\*) Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.

ного элемента (рис. 134) не непрерывна и не дифференцируема. Поэтому применение метода малых отклонений и возможность написания уравнения в вариациях требует своего специального обоснования. Обоснованием возможности построения уравнения в вариациях может служить результат, полученный в работе Л. С. Понтрягина и В. Г. Болтянского. Физические соображения приведены в работе Я. З. Цыпкина. Они состоят в следующем. Уравнение релейного элемента (рис. 134, а) может быть записано в следующей форме:

$$x_{\text{вых}} = \Phi(x), \quad (5.21)$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} +x_{\text{вых}} & \text{при } x_{\text{вх}} > 0, \\ -x_{\text{вых}} & \text{при } x_{\text{вх}} < 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Заменим характеристику (5.22) другой, которая в точке  $x=0$  имеет производную  $\Phi'(x) \neq \infty$  (рис. 136). Тогда действительная характеристика получается из характеристики рис. 136, если угол  $\beta$  стремится к  $90^\circ$  и  $\Phi'(0) \rightarrow \infty$ . Таким образом, уравнение реле (в вариациях) заменяется уравнением безинерционного усилителя с бесконечно большим коэффициентом усиления:

$$x_{\text{вых}} = \Phi'(0) x_{\text{вх}}, \quad (5.23)$$

где

$$\Phi'(0) = K_p = \infty.$$

Рис. 136. К линеаризации релейного элемента.

Теперь уже можно без труда написать уравнение всей системы.

В качестве линейной взята одноконтурная цепь с тем, чтобы вначале выяснить свойство системы без стабилизирующих устройств.

Обозначим передаточную функцию линейной части системы через  $\frac{K}{Q(p)}$ . Тогда передаточная функция всей замкнутой системы (см. рис. 137) запишется:

$$\frac{\frac{KK_p}{Q(p)}}{1 + \frac{KK_p}{Q(p)}} = \frac{KK_p}{Q(p) + KK_p}. \quad (5.24)$$

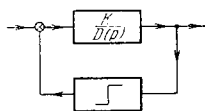
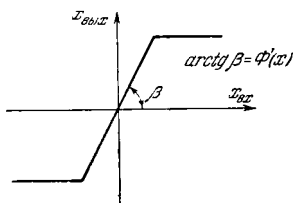


Рис. 135. Структура релейной системы регулирования.



Структурная схема системы, соответствующая уравнению в вариациях, представлена на рис. 137, где релейный элемент заменен усилителем с бесконечно большим коэффициентом

Характеристическое уравнение в данном случае запишется:

$$Q(p) + KK_p = 0$$

или

$$\frac{1}{K_p} Q(p) + K = 0. \quad (5.25)$$

Из (5.25) непосредственно видно, что система будет неустойчивой, если  $Q(p)$  имеет степень выше второй.

Если  $Q(p)$  имеет вторую или первую степень, то на основании ранее полученных результатов должны выполняться соответственно условия

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{B_0}{A_0} > 0.$$

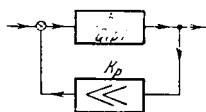


Рис. 137. Структурная схема релейной системы.

В данном случае как первое, так и второе условия всегда выполняются, если коэффициенты при второй и первой степенях  $p$  полинома  $Q(p)$  — положительные величины, так как  $A_1 = 0$ .

Следует иметь в виду, что в данном случае наличие дополнительной, хотя бы весьма малой, но конечной постоянной времени сделает систему неустойчивой. Поэтому можно сделать заключение, что практически структуры, подобные той, которая показана на рис. 137, неустойчивы в малом.

Допустим теперь, что  $Q(p)$  по степени  $p$  выше второй. Для обеспечения устойчивости такой системы необходимо ввести стабилизирующее устройство. Прежде всего ясно, что ни одно стабилизирующее устройство не обеспечит устойчивости, если релейный элемент останется не охваченным этим устройством. Действительно, на рис. 138 представлена структурная схема, где стабилизирующее устройство общего типа вводится так, что им охватывается вся линейная часть схемы. Передаточная функция в этом случае запишется:

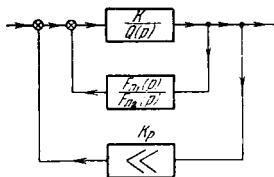


Рис. 138. Релейная схема со стабилизирующим устройством.

$$\frac{\frac{K}{Q(p)} K_p}{\frac{K}{Q(p)} \cdot \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\frac{K}{Q(p)} K_p}{\frac{K}{Q(p)} \cdot \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)} + 1}}. \quad (5.26)$$

Характеристическое уравнение системы, получаемое приравниванием нулю знаменателя (5.26), имеет вид

$$Q(p)F_{n_2}(p) + KF_{n_1}(p) + K_pKF_{n_2}(p) = 0. \quad (5.27)$$

Поделив (5.27) на  $K_p$  и обозначив  $\frac{1}{K_p} = m$ , имеем:

$$m[Q(p)F_{n_2}(p) + KF_{n_1}(p)] + KF_{n_2}(p) = 0.$$

Разность степеней полинома, стоящего в квадратных скобках, и полинома  $KF_{n_2}$  по-прежнему определяется степенью полинома  $Q(p)$ . Этот вывод не изменится, если стабилизирующее устройство охватывает только часть линейного контура при условии, что релейный элемент остается неохваченным. Таким образом, единственным способом обеспечения устойчивости здесь является охват стабилизирующим устройством части контура, включающей и релейный элемент.

На рис. 139 приведена структурная схема системы регулирования со стабилизирующим устройством, охватывающим реле. Имея в виду обозначения, принятые на рис. 139, получим передаточную функцию замкнутой системы в следующей форме:

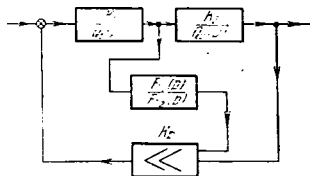


Рис. 139. Релейная схема со стабилизирующим устройством.

$$K(p) = \frac{\frac{K_1}{Q_1(p)}}{1 + \frac{K_p K_1}{Q_1(p)} \cdot \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}} \cdot \frac{K_2}{Q_2(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p \frac{K_1}{Q_1(p)} \cdot \frac{K_2}{Q_2(p)}}{1 + \frac{K_p K_1}{Q_1(p)} \cdot \frac{F_{n_1}(p)}{F_{n_2}(p)}}}. \quad (5.28)$$

Характеристическое уравнение запишется в следующем виде:

$$Q_1(p)Q_2(p)F_{n_2}(p) + K_p[K_1F_{n_1}(p)Q_2(p) + K_1K_2F_{n_2}(p)] = 0$$

или

$$mQ_1(p)Q_2(p)F_{n_2}(p) + [K_1F_{n_1}(p)Q_2(p) + K_1K_2F_{n_2}(p)] = 0. \quad (5.29)$$

Если обозначить степени полиномов соответственно  $F_{n_2}(p)$  через  $n_2$ ,  $F_{n_1}(p)$  через  $n_1$  и  $Q_1(p)$  через  $q_1$ , то устойчивость при  $m \rightarrow 0$  будет иметь место (см. главу II), если

$$n_2 + q_1 - n_1 \leq 2. \quad (5.30)$$

Система будет устойчивой в малом при выполнении условия (5.30), если вырожденное уравнение

$$K_1 F_{n_1}(p) Q_2(p) + K_1 K_2 F_{n_2}(p) = 0$$

удовлетворяет условиям устойчивости и выполняются условия

$$\frac{B_0}{A_0} > 0, \quad \text{если} \quad n_2 + q_1 - n_1 = 1,$$

или

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0, \quad \text{если} \quad n_2 + q_1 - n_1 = 2.$$

Таким образом, если речь идет об устойчивости релейной системы в малом, то ее структура должна принадлежать к классу структур, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициентов усиления. При этом само реле в этом режиме заменяет усилитель с бесконечно большим коэффициентом усиления.

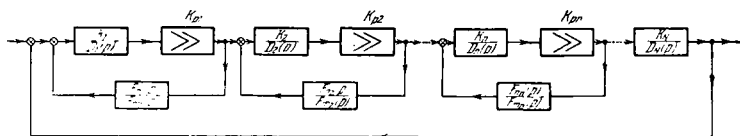


Рис. 140. Схема с  $n$  реле и  $n$  стабилизирующими устройствами.

Рассмотрим систему автоматического регулирования, которая содержит  $n$  релейных элементов. Устойчивость в малом такой системы может быть обеспечена, если ввести  $n$  стабилизирующих устройств по первому или второму варианту включения (см. главу III). На рис. 140 представлена структурная схема, где стабилизирующие устройства введены по первому варианту включения. Найдем передаточную функцию этой системы, полагая, что имеют место малые отклонения. Для  $i$ -го релейного элемента и линейной части, которые охватываются  $i$ -м стабилизирующим устройством общего типа  $\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}$ , передаточная функция запишется следующим образом:

$$K(p) = \frac{\frac{K_i K_{pi}}{Q_i(p)}}{1 + \frac{K_i K_{pi} F_{n_i}(p)}{Q_i(p) F_{m_i}(p)}} = \frac{K_i K_{pi} F_{m_i}}{Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{pi} F_{n_i}(p)}. \quad (5.31)$$

Учитывая, что таких элементов  $n$ , и обозначая передаточную функцию неохваченной части через  $\prod_{j=1}^n \frac{K_j}{Q_j(p)}$ , получим передаточ-

ную функцию замкнутой системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \frac{\prod_{i=1}^n \frac{K_i K_{p_i} F_{m_i}(p)}{Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{p_i} F_{n_i}(p)} \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{Q_j(p)}}{1 + \prod_{i=1}^n \frac{K_i K_{p_i} F_{m_i}(p)}{Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{p_i} F_{n_i}(p)} \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{Q_j(p)}} = \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^n K_i K_{p_i} F_{m_i}(p) \prod_{j=n+1}^N K_j}{\prod_{i=1}^n [Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{p_i} F_{n_i}(p)] \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i K_{p_i} F_{m_i}(p) \prod_{j=n+1}^N K_j}.
 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Поделив числитель и знаменатель уравнения (5.32) на  $K_p^n$  и обозначив  $\frac{1}{K_p^n} = m^n$ , приведем его к следующему виду:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots + m F_{N_{n-1}}(p) + F_{N_n}}, \quad (5.33)$$

где

$$F_{N_0}(p) = \prod_{i=1}^n Q_i(p) F_{m_i}(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p),$$

$$F_{N_1}(p) = \sum_{i=1}^n K_i F_{n_i}(p) \prod_{j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n} Q_j(p) F_{m_j}(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p),$$

.....

$$F_{N_n}(p) = \prod_{i=1}^n K_i F_{n_i}(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i F_{m_i}(p) \prod_{j=n+1}^N K_j.$$

Знаменатель уравнения (5.33), приравненный нулю, является характеристическим уравнением системы. Стабилизирующие устройства должны выбираться так, чтобы получаемая структура принадлежала к классу структур, устойчивых при неограниченно большом коэффициенте усиления. В противном случае система будет неустойчивой. Если структура выбрана правильно, то устойчивость будет иметь место, если вырожденное уравнение  $F_{N_n}(p) = 0$  и вспомогательные уравнения первого, второго или третьего рода, каждое в отдельности, будут удовлетворять условиям устойчивости.

Если бы коэффициенты усиления  $K_p$  оставались большими и при больших отклонениях, то характер переходного процесса в такой

системе определялся бы вырожденной передаточной функцией, которая получается из (5.33) приравнинванием нулю величины  $m$ , а именно

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \frac{\prod_{i=1}^n K_i \prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{\prod_{i=1}^n K_i F_{n_i}(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) + \prod_{i=1}^n K_i F_{m_i}(p) \prod_{j=n+1}^N K_j} = \\
 &= \frac{\prod_{j=n+1}^N K_j}{\prod_{i=1}^n \frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)} \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) + \prod_{j=n+1}^N K_j}. \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

В действительности можно говорить только о некотором усредненном коэффициенте усиления, который определяется отношением величины на выходе релейного элемента к величине на входе. Чем больше величина на входе, тем меньше усредненный коэффициент усиления. В окрестности начала координат даже усредненный коэффициент усиления остается достаточно большой величиной.

Рассмотрим несколько подробнее физику процесса в системе регулирования, содержащей  $n$  реле и образующей устойчивую структуру при неограниченно большом коэффициенте усиления. Возможны два варианта.

а. Стабилизирующее устройство выбрано так, что каждый малый параметр  $m = \frac{1}{K_p}$  повышает степень характеристического уравнения на единицу. В частности, если стабилизирующее устройство имеет передаточную функцию

$$\frac{\tau p}{1 + \tau p}$$

и само реле безинерционное, то в контуре, образуемом реле и стабилизирующим устройством в прямой цепи, может быть только одно звено, описываемое уравнением первого порядка.

В общем случае передаточная функция замкнутого контура, состоящего из линейного элемента с передаточной функцией  $\frac{K}{Q(p)}$ , реле с коэффициентом усиления  $K_p$  и стабилизирующего устройства с передаточной функцией  $\frac{F_{n_1}(p)}{F_{m_1}(p)}$ , запишется:

$$K(p) = \frac{\frac{K}{Q(p)} K_p}{1 + \frac{K}{Q(p)} \cdot K_p \frac{F_{n_1}(p)}{F_{m_1}(p)}} = \frac{KK_p F_{m_1}(p)}{Q(p) F_{m_1}(p) + KK_p F_{n_1}(p)}. \quad (5.35)$$

Если таких замкнутых контуров  $n$ , а общее количество элементов  $N$ , то передаточная функция запишется в следующей форме (рис. 140):

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{K_i K_{pi} F_{m_i}(p)}{Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{pi} F_{n_i}(p)} \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{Q_j(p)}}{1 + \prod_{i=1}^n \frac{K_i K_{pi} F_{m_i}(p)}{Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{pi} F_{n_i}(p)} \prod_{j=n+1}^N \frac{K_j}{Q_j(p)}}. \quad (5.36)$$

Характеристическое уравнение, которое получается приравнянием нулю знаменателя (5.36), запишется:

$$\prod_{i=1}^n [Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{pi} F_{n_i}(p)] \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) + \\ + \prod_{i=1}^n K_i K_{pi} F_{m_i}(p) \prod_{j=n+1}^N K_j = 0. \quad (5.37)$$

Поделив уравнение (5.37) на  $\prod_{i=1}^n K_i K_{pi}$ , обозначив  $\frac{1}{K_i K_{pi}} = m^i$  и положив, что между  $K_i$  и  $K_1 = K$  имеет место соотношение  $K_i = \eta_i K_1 = \eta_i K$ , можем его представить в следующем виде:

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_0-1}(p) + m^{n-2} F_{N_0-2}(p) + \dots \\ \dots + m F_{N_0-n+1}(p) + F_{N_0-n}(p) = 0. \quad (5.38)$$

Здесь  $N_0$  — степень характеристического уравнения, равная  $\sum_{i=1}^N q_i + \sum_{i=1}^n n_{2i}$ , а индексы при  $F$  означают степени соответствующих полиномов. Передаточная функция (5.36) для рассматриваемого случая запишется в следующем виде:

$$K_1(p) = \frac{\prod_{j=n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_0-1}(p) + \dots + m F_{N_0-n+1}(p) + F_{N_0-n}(p)}. \quad (5.39)$$

6. Стабилизирующее устройство выбрано так, что каждый малый параметр  $m = \frac{1}{K_i K_p}$  повышает порядок уравнения на два. Для частного случая, когда стабилизирующее устройство имеет передаточную функцию  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , а само реле безинерционное, в контуре, образуемом реле и стабилизирующим устройством в прямой цепи, может быть одно звено второго порядка (например, колебательное) или два звена первого порядка (апериодических или интегрирующих).



Для общего случая, пользуясь обозначениями, приведенными в пункте а, характеристическое уравнение запишем в следующей форме:

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_0-2}(p) + m^{n-2} F_{N_0-4}(p) + \dots + F_{N_0-2n}(p) = 0. \quad (5.40)$$

Передаточная функция для этого случая запишется соответственно:

$$K_2(p) = \frac{\prod_{j=2n+1}^N K_j \prod_{i=1}^n F_{m_i}(p)}{m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_0-2}(p) + m^{n-2} F_{N_0-4}(p) + \dots + F_{N_0-2n}(p)}. \quad (5.41)$$

Для принятой характеристики реле (рис. 134, а) устойчивость возможна только при сигнале на входе реле, равном нулю ( $x=0$ ). Поэтому полагаем, что системы, рассматриваемые как в первом, так и во втором вариантах, — астатические, и равновесие наступает при  $x=0$ .

Рассмотрим первый вариант.

Так как система устойчива в малом, то, как это следует из опубликованных работ \*), здесь возможны два режима работы реле при подходе к состоянию равновесия, а именно — скользящий режим и режим затухающих колебаний (в частном случае процесс может закончиться за одно срабатывание всех реле). Убедимся в следующих весьма важных свойствах рассматриваемой системы:

а) Если скользящий режим невозможен, то динамические свойства системы с  $n$  реле эквивалентны динамическим свойствам системы с передаточной функцией, равной вырожденной передаточной функции, получающейся из (5.39) приравниванием  $m$  нулю и включающей одно реле с характеристикой, эквивалентной характеристике последнего реле. При этом под последним мы подразумеваем реле, выход которого подается на линейную часть системы.

б) Если подход к состоянию равновесия осуществляется в скользящем режиме во всех реле, кроме последнего, то динамические свойства такой системы эквивалентны динамическим свойствам системы с передаточной функцией, равной вырожденной передаточной функции, имеющей, кроме того, элемент запаздывания и одно реле с характеристикой последнего реле системы.

Для доказательства приведем следующие физические рассуждения. Мы уже указывали выше, что усредненный коэффициент усиления остается достаточно большим числом для некоторой области значений входной величины. Для этой области процесс регулирования определяется вырожденной передаточной функцией. Однако система физически не может оставаться в указанной окрестности, ибо уже второе

\*) См. сноску на стр. 285.

реле получает на вход сигнал, равный полному выходному сигналу первого реле, третье реле получает на вход полный выходной сигнал второго реле и т. д. Наконец,  $n$ -е реле получает на вход полный выходной сигнал  $(n-1)$ -го реле. Это все имеет место, когда на первое реле подается разность  $x(t) = f(t) - z(t)$ , величина которой может быть и достаточно малой. Характер изменения регулируемой величины  $z(t)$  (выходного сигнала линейной части системы) зависит только от выходного сигнала  $n$ -го реле, который остается постоянным и может меняться только по знаку. Таким образом, при заданном  $f(t)$  величина  $x(t)$  зависит от свойств линейной части схемы и выходного сигнала последнего реле. При идеальных характеристиках всех реле знак выходного сигнала последнего реле будет совпадать со знаком выходного сигнала первого реле и теоретически будет совпадать с ним по времени, откуда и следует утверждение а). Следует подчеркнуть, что учет всей вырожденной передаточной функции необходим для того, чтобы точно установить характер переходного процесса при подходе к положению равновесия.

При отклонениях, выходящих за некоторую область значений, в вырожденной передаточной функции следует оставить только передаточную функцию стабилизирующего устройства, охватывающего первое реле. Для этих режимов переходный процесс определяется свойствами линейной части схемы, выходной характеристикой последнего реле и передаточной функцией стабилизирующего устройства, охватывающего контур с первым реле.

Приведенное утверждение основано на физическом рассмотрении и не претендует на строгость и всеобщность. Для того чтобы более полно выяснить характер возможных режимов, целесообразно процесс регулирования расчленить на два этапа: а) когда величина возмущения достаточно велика и б) когда система подходит к состоянию равновесия. Достаточно большой считаем величину на входе, при которой реле срабатывает и остается во включенном состоянии некоторое время, зависящее от свойств линейной части схемы. Такой режим можно назвать для характеристик реле рис. 134, а режимом заброса. Физически ясно, что если все реле имеют характеристики такого же типа и параметры стабилизирующих устройств выбраны так, что скользящего режима нет, то мгновенно после срабатывания первого реле срабатывают все  $n$  реле. На линейную часть системы будет подан выход последнего реле. Отсюда и вытекает утверждение, что вся система из  $n$  реле будет вести себя как система с линейной частью и одним реле. Когда система подходит к состоянию равновесия, реле с характеристикой рис. 134, а совершает колебания с очень большой частотой. Частотная характеристика реле вместе со стабилизирующим устройством имеет вид

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow \infty \\ K_p \rightarrow \infty}} \frac{K_p}{1 + \frac{K_p \tau j \omega}{1 + \tau j \omega}} \rightarrow 1.$$

Отсюда следует, что переходный процесс при подходе к состоянию равновесия будет в полной мере определяться одним вырожденным уравнением.

В случае подхода системы к состоянию равновесия в скользящем режиме могут иметь место два случая: а) когда все реле находятся в скользящем режиме и б) когда часть из них находится в скользящем режиме. В первом случае, как это известно из литературы\*), вся система линеаризуется и может быть исследована обычными методами. Во втором случае, если последнее реле не находится в скользящем режиме, то свойства системы эквивалентны динамическим свойствам системы с вырожденной передаточной функцией, имеющей, кроме того, одно реле с характеристикой последнего реле и элемент с запаздыванием (для случая заброса). Величина запаздывания зависит от количества реле, находящихся в скользящем режиме, и характеристик этих режимов для каждого реле.

Из сравнения этих двух случаев ясно, что с практической точки зрения нецелесообразно иметь в данном случае скользящий режим.

Кроме сказанного выше, практически приходится считаться с тем, что реле имеют реальную, а не идеальную характеристику.

Состояние равновесия системы при наличии реле возможно также, когда характеристики их имеют вид, представленный на рис. 134, б.

Без дополнительных разъяснений ясно, что динамические свойства таких систем будут определяться, как и ранее, вырожденной передаточной функцией, одним последним реле и элементом запаздывания с величиной запаздывания, равной сумме величин срабатывания всех реле.

В настоящей работе не рассматриваются режим автоколебаний релейных систем, так как этот режим работы достаточно подробно изучен и освещен в литературе.

Приведенные здесь исследования и полученные выводы могут быть использованы и распространены на более широкий класс систем, чем релейные. Действительно, все элементы систем автоматического регулирования, имеющие нелинейные элементы с ограниченной мощностью, могут при некоторых условиях рассматриваться как близкие к релейным. Для этого необходимо только, чтобы в линейной части характеристика элемента имела достаточно большую крутизну. При недостаточно большой крутизне характеристик нелинейных элементов с ограниченной мощностью их можно привести к рассматриваемому случаю включением последовательно с каждым нелинейным элементом линейного усиления.

На рис. 132 представлена структурная схема такой системы.

---

\*) Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.

### § 5.5. Структура систем оптимального регулирования

Прежде всего необходимо условиться о самом понятии оптимальной системы с тем, чтобы ограничить поставленную здесь задачу. При решении различных технических задач понятие оптимума может быть сформулировано по-разному. Обобщенно оптимум выражает одно или совокупность экстремальных свойств, которые могут быть достигнуты в каждом отдельном случае.

В большинстве случаев современное понятие оптимальности связано с достижением максимально возможного быстродействия при аperiodичности протекания процесса регулирования.

Теории оптимальных систем автоматического регулирования посвящено значительное количество работ\*). В этих работах получены важные результаты, касающиеся как основных свойств этого класса систем, так и некоторых путей их синтеза. В настоящей работе делается попытка показать разумность использования структур, устойчивых при больших коэффициентах усиления и обладающих неограниченной областью положительности, в качестве основы для линейной части системы оптимального регулирования, а также для линеаризованной системы оптимального регулирования в целом.

Для того чтобы выделить тот круг вопросов, который здесь дискутируется, приведем весьма интересные результаты, полученные в работе Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского и Р. Гамкрелидзе\*\*), относящиеся к определению общих свойств систем оптимального регулирования. Известно, что если подлежащий изучению процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, U^1, \dots, U^r) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.42)$$

где  $x^i$  — величины, определяющие состояние системы (например, координата регулируемой величины и ее  $n - 1$  производные), а  $U^1, \dots, U^r$  суть параметры управления (которые могут иметь ограниченные значения), то, полагая, что  $U^i$  являются заданными функциями времени, получим для системы дифференциальных урав-

\*) Фельдбаум А. А. 1) Доклад на II Всесоюзной конференции по теории автоматического регулирования, 2) Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 14, № 6, 1953, 3) Синтез оптимальных систем с помощью фазового пространства, Автоматика и телемеханика, т. 17, № 2, 1955; Лернер А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 2 и 4, 1952; Понтрягин Л. С., Доклад на сессии Академии наук СССР, Труды сессии, 1956. Hopkin A., A phase-plane approach to the compensation of saturating servomechanisms, Trans. AIEE, v. 70, 1, 1951; Silva L. M., Predictor servomechanisms, Trans. IRE, 1954, № 1, Circuit theorie.

\*\*) См. упомянутый доклад Л. С. Понтрягина на сессии Академии наук СССР.

нений (5.42) единственное решение при заданных начальных значениях

$$t = t_0, \quad x^1 = x_0^1, \quad x^2 = x_0^2, \quad \dots, \quad x^n = x_0^n.$$

Предположим, что в момент  $t_1 > t_0$  величины  $x^i$  принимают значения

$$x_1^1, \dots, x_1^n.$$

Задача об отыскании оптимального процесса заключается в том, чтобы осуществить переход из состояния  $x_0^1, \dots, x_0^n$  в состояние  $x_1^1, \dots, x_1^n$  за минимальное время, выбрав для этой цели надлежащим образом функции времени  $U^1(t), \dots, U^r(t)$ . При этом, имея в виду стремление максимально использовать возможности ограниченных значений  $U^i(t)$ , допускается, что функции  $U^i(t)$  являются разрывными, функции же  $x^i$  считаются непрерывными. Решение может быть найдено следующим образом\*).

Вводятся вспомогательные величины  $\psi_1 \dots \psi_n$  и вспомогательная функция  $H$ :

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i f^i(x^1, \dots, x^n, U^1, \dots, U^r).$$

Всякое оптимальное решение удовлетворяет тогда системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.43)$$

Первые  $n$  уравнений совпадают с исходными, вторые  $n$  являются новыми. Недостающие  $r$  уравнений получаются из условия, что в каждый момент времени функция  $H$  предполагается положительной и имеет максимальное значение как функция переменных  $U^1, \dots, U^r$  при заданных значениях  $x^1, \dots, x^n, \psi_1, \dots, \psi_n$ .

Решение, данное Л. С. Понтрягиным, может быть использовано для оценки правильности решений задач синтеза. В частности, становится ясным, что выбор структуры систем оптимального регулирования, исходя из условия ограничения некоторой координаты, ее  $i$ -ой производной или их комбинации, не всегда является достаточным. В справедливости этого утверждения можно убедиться и непосредственно. Нетрудно видеть, что структуры, полученные в работе А. А. Фельдбаума, являются при некоторых условиях неустойчивыми в малом\*\*). На рис. 141 приведена структура, полученная в работе А. А. Фельдбаума\*\*\*) из условия, что вторая производная может

\*) См. сноску на стр. 197

\*\*) Фельдбаум А. А., Синтез оптимальных систем автоматического регулирования, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, 1955.

\*\*\*) А. А. Фельдбаум указывает, что получаемые им структуры пригодны только для больших отклонений и могут оказаться непригодными при малых отклонениях.

иметь только ограниченное значение

$$\frac{d^2x}{dt^2} \leq M_2. \quad (5.44)$$

На этом рисунке обозначено: НП-1 — нелинейный преобразователь, преобразующий  $x$  в  $f(x)$ , где  $f(x)$  определяется характером кривой переключения; НП-2 — нелинейный преобразователь с характеристикой идеального реле;

$C$  — неизменная часть системы;  $p$  — дифференцирующее устройство;  $x_0$  — задающее воздействие (в данном случае — единичный скачок);  $x_1$  — регулируемая величина;  $x = x_0 - x_1$ ;

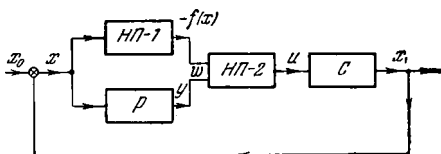


Рис. 141. Структура системы оптимального регулирования.

$u$  — входная величина неизменной части системы;  $w$  — входная величина преобразователя.

В линейном приближении (для малых отклонений) система может быть описана следующими уравнениями:

$$x = x_0 - x_1,$$

$$w = y - f(x), \text{ где } y = px \text{ и } f(x) = Kx,$$

$$u = K_p w,$$

$$R(p)x_1 = K_1 u.$$

Исключая  $x$ ,  $u$ ,  $w$ , получим:

$$R(p)x_1 + K_p K_1 p x_1 + K_p K_1 K x_1 = K_p K_1 K x_0. \quad (5.45)$$

Поделив (5.45) на  $K_p$  и обозначив  $\frac{1}{K_p} = m$ , получаем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$mR(p) + K_1 p + K_1 K = 0. \quad (5.46)$$

На основании ранее полученных результатов ясно, что система будет неустойчивой в малом, если степень полинома  $R(p)$  будет больше трех. Более того, если учесть, что практически невозможно получить идеальные производные, то система станет неустойчивой при степени  $R(p)$ , большей двух. То, что использование условий ограничения может оказаться недостаточным для синтеза систем оптимального регулирования, ясно уже из того, что этими условиями определяется ограниченное фазовое подпространство, порядок которого в общем случае меньше порядка полного фазового пространства,

характеризующего свойства всей системы регулирования. В частности, указанное выше ограниченное фазовое подпространство не может выяснить характера особенностей, которые могут иметь место во всем фазовом пространстве. Одна из особенностей фазового пространства, характеризующаяся наличием точки положения равновесия, определяет устойчивость системы в малом.

Особенностью структур систем оптимального регулирования является наличие в них элементов с характеристиками, близкими к релейным. Поэтому для устойчивости в малом вся структура линеаризованной системы оптимального регулирования должна принадлежать к классу структур, устойчивых при неограниченно большом коэффициенте усиления.

Как это следует из результатов предыдущего параграфа, наличие в соответствующих местах стабилизирующих устройств (при правильном подборе их параметров) окажет влияние на характер переходного процесса только при малых отклонениях и не нарушит оптимальности.

На основании сказанного синтез структуры оптимальной системы производится следующим образом. В исходную одноконтурную схему вводятся стабилизирующие устройства так, чтобы полученная таким образом линейная часть схемы имела структуру, устойчивую при неограниченном увеличении коэффициентов усиления. Выбираем величины коэффициентов усиления тех частей цепи, которые охватываются стабилизирующими устройствами, достаточно большими. При этих условиях переходный процесс будет полностью определяться вырожденным уравнением. Вырожденную часть схемы и следует считать неизменной и ее коэффициенты ограниченными. К этой части схемы и следует применить методику, предложенную А. А. Фельдбаумом и другими авторами\*). При этом в тех местах схемы, где вводятся элементы с релейными характеристиками, следует вводить стабилизирующие устройства с таким расчетом, чтобы вся полученная система оставалась устойчивой при неограниченном увеличении коэффициентов усиления.

Как это следует из ранее проведенного исследования, эти стабилизирующие устройства не окажут сколько-нибудь существенного влияния на оптимальность процесса.

Рассмотрим несколько другой аспект проблемы синтеза оптимальных систем. До сих пор нами рассматривались ограничения по таким координатам и их производным, которые непосредственно участвуют в формировании кривой переходного процесса регулируемой величины. Назовем их координатами класса  $A$ .

Существует весьма распространенный класс систем, где ограничения указанных координат обусловлены ограничениями других координат, которые сами непосредственно в формировании процесса

---

\*) См. сноску на стр. 197.

регулирования участия не принимают. Назовем их координатами класса  $B$ .

Указанное имеет место, например, при работе двигателя постоянного тока в повторно-кратковременном режиме, где ограничения на токи двигателя накладываются температурным режимом машины и условиями коммутации. При этом ясно, что ни температура, ни коммутация непосредственно не влияют на характер процесса регулирования.

В рассматриваемых случаях задача о получении оптимальности процесса может быть сформулирована так: найти законы изменения координат класса  $A$ , при которых координаты  $B$  при прочих равных условиях имеют минимальное значение или максимальный запас.

Если при этих условиях обеспечить режим, при котором координаты класса  $B$  будут на предельно возможном уровне, то процесс будет оптимальным. Таким образом, в данном случае задача получения оптимальности сводится к обеспечению изменения координат класса  $A$  по определенным законам, которые вытекают из свойств объектов регулирования.

В частности, исследованию двигателя постоянного тока как объекта оптимального регулирования было посвящено значительное количество работ\*). В результате указанных исследований установлено, что оптимальный режим будет иметь место, если ток якоря при постоянном токе возбуждения будет меняться по линейному закону в функции времени. Этот результат был получен при неучете теплоотдачи. Если учесть теплоотдачу, то закон регулирования имеет несколько более сложный характер (см., например, упомянутую работу Ш. Ш. Хамитова). Здесь мы попытаемся указать путь синтеза структур указанного типа систем, при которых обеспечивается оптимальный процесс регулирования. Как будет ясно из дальнейшего, здесь задача сводится к получению систем с идеальным воспроизведением заранее заданного характера кривой.

Допустим, что исходная система, состоящая из основных элементов, структурно представляется одноконтурной цепочкой, элементы которой имеют передаточные функции  $\frac{K_i}{D_i(p)}$ . Введением усилителей и стабилизирующих устройств типа  $\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}$  создадим систему,

---

\*) Кожевников К. И., Об оптимальной кривой тока двигателя постоянного тока, *Электричество*, № 6, 1956; Хамитов Ш. Ш., Исследование двигателя постоянного тока как объекта оптимального регулирования, *Электричество*, № 5, 1958; Розенман Е. А., Об оптимальном процессе регулирования двигателя постоянного тока, *Автоматика и телемеханика*, № 6, 1957; № 7, 1958; Корнюшин, О кривой двигателя постоянного тока, *Труды Львовского политехнического института*.



устойчивую при неограниченном увеличении коэффициентов усиления, например, по варианту включения № 1 (см. главу III).

Если исходных элементов  $n$ , а количество введенных стабилизирующих устройств  $\nu$ , то общая передаточная функция системы запишется:

$$K(p) = \frac{\prod_{i=1}^{\nu} K_i \prod_{j=\nu+1}^n K_j \prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)}{\prod_{i=1}^{\nu} [D_i(p) F_{m_i}(p) + K_i F_{n_i}(p)] \prod_{j=\nu+1}^n D_j(p) + \prod_{i=1}^{\nu} K_i \prod_{j=\nu+1}^n K_j \prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)} \quad (5.47)$$

Поделим числитель и знаменатель (5.47) на  $\prod_{i=1}^{\nu} K_i$  и положим, что  $K_i$  — достаточно большие величины; обозначая  $\frac{1}{K_i} = m$ , получим после элементарных выкладок:

$$K(p) = \frac{\prod_{j=\nu+1}^n K_j \prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)}{m^{\nu} F_{N_0}(p) + m^{\nu-1} F_{N_1}(p) + \dots + \prod_{i=1}^{\nu} F_{n_i}(p) \prod_{j=\nu+1}^n D_j(p) + \prod_{j=\nu+1}^n K_j \prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)} \quad (5.48)$$

Так как система принадлежит к классу устойчивых при неограниченном коэффициенте усиления, то, как это было показано выше, при достаточно малом  $m$  процесс будет полностью определяться вырожденной передаточной функцией

$$K_{\text{выр}}(p) = \frac{K_{\text{выр}} \prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)}{\prod_{i=1}^{\nu} F_{n_i}(p) \prod_{j=\nu+1}^n D_j(p) + K_{\text{выр}} \prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)} \quad (5.49)$$

где  $K_{\text{выр}} = \prod_{j=\nu+1}^n K_j$ .

Поделим числитель и знаменатель (5.49) на  $\prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(p)$ :

$$K_{\text{выр}}(p) = \frac{K_{\text{выр}}}{\prod_{i=1}^{\nu} \frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)} \prod_{j=\nu+1}^n D_j(p) + K_{\text{выр}}} \quad (5.50)$$

Из (5.50) видно, что процесс регулирования полностью определяется кривой  $D$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$ .

Уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$  запишется:

$$\bar{K}_{\text{выр}} = - \frac{\prod_{i=1}^{\nu} F_{n_i}(j\omega) \prod_{j=\nu+1}^n D_j(j\omega)}{\prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(j\omega)}. \quad (5.51)$$

Предположим, что общая степень полинома  $\prod_{j=\nu+1}^n D_j(p)$  равна  $\alpha$ . Введем в систему  $\alpha + \nu(n_i - m_i)$  безинерционных усилителей с большими коэффициентами усиления, охваченных стабилизирующими устройствами типа  $\frac{\mu_i}{a_i p^2 + b_i p + 1}$  так, как это было сделано в § 4 главы IV. Тогда после элементарных выкладок кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{\text{выр}}$  получит следующий вид:

$$\bar{K}_{\text{выр}} = - \frac{\prod_{i=1}^2 \mu_i \prod_{i=1}^{\nu} F_{n_i}(j\omega) \prod_{j=\nu+1}^n D_j(j\omega)}{\prod_{i=1}^{\nu} F_{m_i}(j\omega) \prod_{i=1}^2 [a_i(j\omega)^2 + b_i j\omega + 1]}. \quad (5.52)$$

Такая система при соответствующем выборе постоянных  $a_i, b_i$  и при условии, что вырожденное и вспомогательное уравнения удовлетворяют условиям устойчивости, будет воспроизводить любую заданную функцию, с любой достаточно большой степенью точностью.

Когда такая система создана, остается ввести в нее нелинейное устройство, которое обеспечивало бы на входе системы сигнал, соответствующий желательному характеру кривой на выходе.

Так, для случая двигателя, работающего в повторно-кратковременном режиме, выбор нелинейности может быть произведен из следующих соображений. Закон изменения тока во времени, обеспечивающий оптимальный режим, известен и выражается заданной функцией

$$I = f_1(t). \quad (5.53)$$

Если рассматривать собственно двигатель, то задание закона изменения тока при постоянном потоке возбуждения уже определяет закон изменения скорости во времени. Допустим, что этот закон выражается функциональной зависимостью

$$n = f_2(t). \quad (5.54)$$

Исключив из (5.53) и (5.54) время, мы получим необходимую связь между током и оборотами

$$n = F(I), \quad (5.55)$$

из которой и выбирается характеристика нелинейного элемента. Система получает на вход сигнал, когда нарушается закон \*) (5.55). Теперь уже легко понять, что рассматриваемый здесь метод синтеза оптимальных структур вполне пригоден и для случая, когда регулируемую величину или ее производные целесообразно в процессе регулирования удерживать на предельных их значениях со знаком плюс или минус, ибо такой закон изменения координат и их производных является частным случаем законов (5.53) и (5.54). Пример построения нелинейного элемента для системы, рассмотренной в главе II, предложенный А. Я. Лернером, в полной мере иллюстрирует методику выбора нелинейного элемента для случая ограничения второй производной от регулируемой координаты. В этом случае система описывалась дифференциальным уравнением второго порядка, и дополнительного введения производных не требовалось. Уже при рассмотрении этого примера было подчеркнуто, что процесс будет тем ближе к оптимальному, чем больше коэффициент усиления  $K_3$  (см. главу II). Если бы система описывалась уравнением более высокого порядка, то увеличение коэффициента усиления  $K_3$  привело бы к нарушению устойчивости, и такая система была бы непригодна.

В этом случае, не меняя характера нелинейности и выбирая соответствующую структуру линейной части схемы, мы получим оптимальный режим независимо от порядка дифференциального уравнения, которым система описывается.

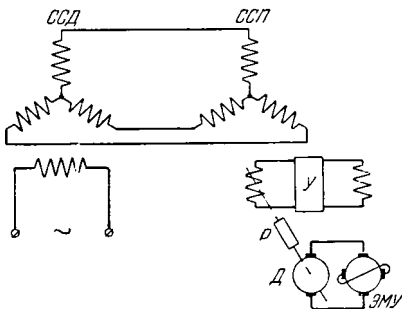


Рис. 142. Схема следящей системы.

## § 5.6. Примеры

В качестве примера рассмотрим следящую систему\*\*), принципиальная схема которой представлена на рис. 142. Работа такого рода системы подробно рассмотрена в примере четвертой главы. Рассматриваемая здесь система отличается только тем, что исполнительный двигатель питается непосредственно от электромашинного усилителя. Рабочий участок кривой намагничивания представлен на рис. 143. Наличие гистерезиса делает эту характеристику неоднозначной, и на рабочем участке с некоторой степенью точности ее можно представить характеристикой люфта. Известно, что

\*) Метод выбора нелинейностей так, чтобы на вход системы подавался сигнал, когда процесс отклоняется от оптимального, был предложен А. Я. Лернером (см. сноску на стр. 197).

\*\*) Система исследована Ш. Ш. Хамитовым.

в ряде случаев такой вид характеристики намагничивания электромашинного усилителя является причиной автоколебаний.

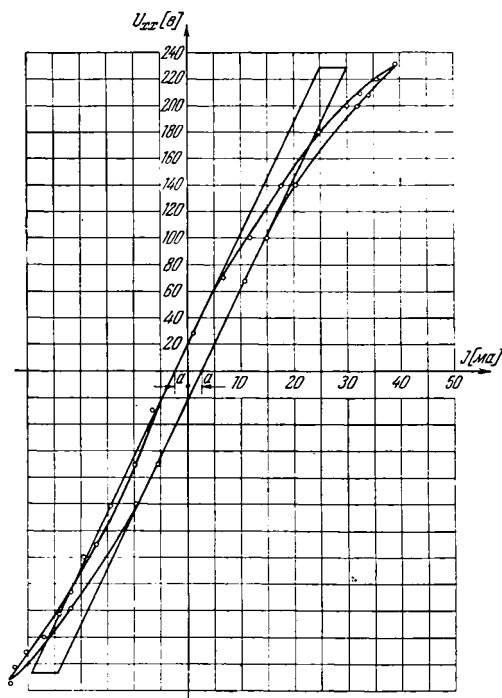


Рис. 143. Характеристика намагничивания электромагнитного усилителя.

Включим в систему стабилизирующее устройство типа трансформатора с передаточной функцией  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$  так, как это показано на структурной схеме рис. 144.

Данные системы следующие (обозначения приведены на рис. 144):

$$K_0 = 0,75, \quad K_{\text{ЭМУ}} = 10, \quad K_d = 108, \quad K_{\text{ред}} = \frac{1}{8,35},$$

$$K_y = 5,0, \quad T_b = 0,05 \text{ сек}, \quad T_k = 0,1 \text{ сек}, \quad T_1 = 0,274 \text{ сек},$$

$$T_2 = 0,0117 \text{ сек}, \quad \tau = 0,8 \text{ сек}.$$

Уравнение кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения по коэффициенту усиления элементов, охваченных стабилизирующим устройством, запишется:

$$\bar{K}_{\text{оXB}} = - \frac{(1 + T_B j\omega)(1 + T_R j\omega)(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + \tau j\omega)j\omega}{\tau j\omega(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)j\omega + K_{\mathcal{D}} K_{\text{ред}} K_G (1 + \tau j\omega)}.$$

Уравнение свободного состояния системы запишется:

$$J\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{\bar{K}_{\text{оXB}}(j\omega)}{N K_{\text{оXB}}}. \quad (5.56)$$

На рис. 145 построены кривые  $J\left(\frac{A}{a}\right)$  и  $\frac{\bar{K}_{\text{оXB}}(j\omega)}{N K_{\text{оXB}}}$  для случая, когда  $K_{\text{оXB}} = 50$  и  $N = 2$ .

Из этого рисунка видно, что пересечение происходит в двух точках  $a$  и  $b$ . Устойчивые колебания будут в точке  $b$ . Однако частота

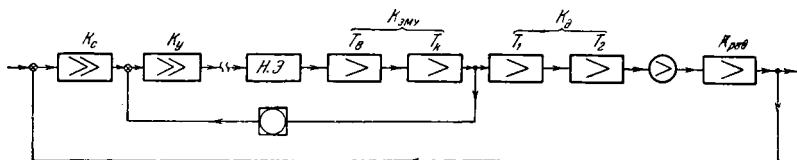


Рис. 144. Структурная схема следящей системы.

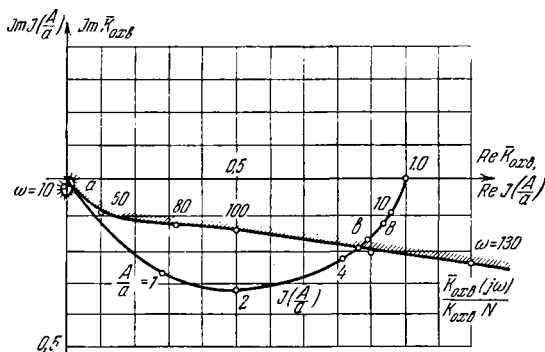


Рис. 145. К определению возможности возникновения автоколебаний.

колебаний здесь будет порядка 120 гц, что для этой системы является неопасным, так как такая частота не пройдет через систему. Частоту

колебаний можно существенно увеличить, если увеличить коэффициент усиления  $K_{\text{оув}}$ . Так, при  $K_{\text{оув}} = 100$  частота колебаний увеличивается до 250 гц.

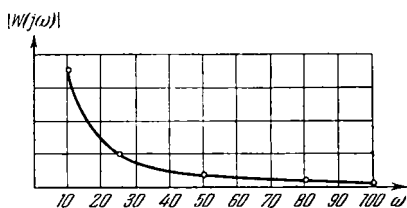


Рис. 146. Амплитудно-частотная характеристика.

Для суждения о фильтрующих свойствах линейной части системы на рис. 146 приведена амплитудно-частотная характеристика линейной части системы. Из этого рисунка видно, что система обладает резко выраженным фильтрующим свойством, и при частоте  $\omega = 100$  амплитуда практически равна нулю.

---

## Г Л А В А VI

### НЕКОТОРЫЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

#### § 6.1. Об учете влияния малых параметров

Вопросы, которые обычно возникают при использовании асимптотических методов (в нашем случае асимптотический переход совершался устремлением  $m \rightarrow 0$  или  $K \rightarrow \infty$ ), заключаются в следующем.

а) В действительных условиях коэффициенты усиления в динамических системах могут быть не сколь угодно большие, а вполне определенные конечные величины. Какое же значение коэффициента усиления можно считать достаточно большим? Иначе говоря, при каких численных значениях коэффициентов усиления справедливы полученные ранее выводы и соотношения?

б) В системах регулирования (как и в любых динамических системах), кроме учитываемых параметров, существуют паразитные параметры, которые при больших коэффициентах усиления могут оказать влияние на динамические свойства систем. В этой связи подлежат рассмотрению два вопроса: 1) могут ли малые параметры существенно повлиять на поведение системы, если количественно они сколь угодно малы; здесь речь идет о том — грубые или негрубые, в смысле А. А. Андропова, рассматриваемые системы, и 2) как определить количественно влияние малых, но конечных по величине паразитных параметров на характер протекания процессов в исследуемой системе.

В настоящем параграфе мы рассмотрим методы определения влияния малых параметров на динамические свойства систем в том случае, когда они имеют малые, но конечные значения и каждый из этих малых параметров повышает порядок уравнения не больше, чем на единицу. Кроме того, будет рассмотрен вопрос о грубости, в смысле А. А. Андропова, изучаемого класса систем.

#### 1. Количественная оценка малых параметров

Допустим, что система автоматического регулирования описывается дифференциальным уравнением  $N$ -го порядка. Допустим, кроме того, что в системе содержится  $n$  малых параметров, каждый из которых повышает порядок уравнения на единицу. Характеристическое урав-

нение, соответствующее вырожденному дифференциальному уравнению, получаемому в результате пренебрежения  $n$  малыми параметрами, будет алгебраическим уравнением  $(N - n)$ -й степени и в общем случае может быть записано в следующей форме:

$$a_0 p^{N-n} + a_1 p^{N-n-1} + \dots + a_{N-n} = 0. \quad (6.1)$$

Пусть корнями уравнения (6.1) будут  $z_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N - n$ .

Тогда уравнение (6.1) удовлетворится, если вместо  $p$  подставить  $z_i$ :

$$a_0 z_i^{N-n} + a_1 z_i^{N-n-1} + \dots + a_{N-n} = 0. \quad (6.2)$$

Учет отброшенных малых параметров сказывается двояко. Во-первых, претерпевают изменения корни вырожденного уравнения (6.2), во-вторых, добавляется  $n$  корней, которые стремятся к бесконечности, когда малые параметры стремятся к нулю.

Предположим, что в результате учета малых параметров  $i$ -й корень вырожденного уравнения изменился на  $\Delta z_i$ . При этом коэффициенты вырожденного уравнения меняются соответственно на  $\Delta a_i$ , и появляется  $n$  новых членов с коэффициентами  $\Delta b_i$ . При этих условиях полное характеристическое уравнение с учетом малых параметров может быть представлено в следующей форме:

$$\Delta b_0 (z_i + \Delta z_i)^N + \Delta b_1 (z_i + \Delta z_i)^{N-1} + \dots + (a_0 + \Delta a_0) (z_i + \Delta z_i)^{N-n} + \\ + (a_1 + \Delta a_1) (z_i + \Delta z_i)^{N-n-1} + \dots + a_{N-n} + \Delta a_{N-n} = 0. \quad (6.3)$$

Раскрывая биномы, получаем:

$$\Delta b_0 \left[ z_i^N + N z_i^{N-1} \Delta z_i + \frac{N(N-1)}{2!} z_i^{N-2} \Delta z_i^2 + \dots \right] + \\ + \Delta b_1 \left[ z_i^{N-1} + (N-1) z_i^{N-2} \Delta z_i + \frac{(N-1)(N-2)}{2!} z_i^{N-3} \Delta z_i^2 + \dots \right] + \dots \\ \dots + a_0 z_i^{N-n} + a_0 (N-n) z_i^{N-n-1} \Delta z_i + \dots + \Delta a_0 z_i^{N-n} + \dots \\ \dots + \Delta a_1 (N-n) z_i^{N-n-1} \Delta z_i + \dots + a_{N-n} + \Delta a_{N-n} = 0. \quad (6.4)$$

Учитывая (6.2) и пренебрегая малыми второго и высших порядков малости, получим:

$$\Delta b_0 z_i^N + \Delta b_1 z_i^{N-1} + \dots + \Delta a_0 z_i^{N-n} + \\ + \Delta a_1 z_i^{N-n-1} + \dots + \Delta a_{N-n} = \varphi'(z)_{z=z_i} \Delta z_i, \quad (6.5)$$

где  $\varphi'(z)_{z=z_i}$  — производная по  $z$  от уравнения (6.2) при  $z = z_i$ .

Из (6.5) получаем значение  $\Delta z_i$  в следующей форме:

$$\Delta z_i = - \frac{\Delta b_0 z_i^N + \Delta b_1 z_i^{N-1} + \dots + \Delta a_0 z_i^{N-n} + \Delta a_1 z_i^{N-n-1} + \dots + \Delta a_{N-n}}{\varphi'(z)_{z=z_i}}. \quad (6.6)$$



Полученная формула (6.6) дает связь между изменением корней и изменением коэффициентов уравнения с точностью до малых второго порядка малости.

Если количественные значения малых параметров известны и известны корни вырожденного уравнения, то по формуле (6.6) можно определить ошибку, которую мы допускаем, определяя корни из вырожденного характеристического уравнения. Если корни вырожденного уравнения — вещественные числа, то (6.6) дает возможность определить ошибку в определении декрементов затухания; если же корни вырожденного уравнения — комплексные, то из (6.6) можно сразу определить ошибку как по декрементам затухания, так и по частотам свободных колебаний системы.

Задача может быть поставлена и другим образом. Допустим, что задана допустимая ошибка (например, в процентах от корня вырожденного уравнения) и необходимо установить, каковы должны быть численные значения малых параметров, чтобы ошибка от неучета этих параметров не превышала заданной.

Обозначим допустимую ошибку через  $\epsilon$  так, что

$$\Delta z_i = \epsilon z_i.$$

Тогда числитель правой части уравнения (6.6) получается заданной функцией малых параметров  $m$ . Обозначив эту функцию через  $f(m)$ , можно (6.6) представить в следующей форме:

$$f(m_0) = \epsilon z_i \psi'(z)_{z=z_i}. \quad (6.7)$$

Здесь  $m_0$  — наибольший из малых параметров.

Естественно, что ошибка не превысит величины  $\epsilon$ , если любое

$$m < m_0. \quad (6.8)$$

В большинстве случаев при количественном определении влияния малых параметров на динамические свойства системы можно ограничиться рассмотрением ошибок в определении корней вырожденного уравнения. Строго говоря, нужно оценить также изменение расположения корней, порождаемых малыми параметрами. Рассмотрим эту задачу. Ранее было показано, что если малые величины стремятся к нулю, то корни, определяемые из вспомогательного уравнения, стремятся к бесконечности. Но так как в действительных условиях малые параметры — это некоторые малые, но конечные величины, то корни, порождаемые ими, будут располагаться не в бесконечности, а на некотором конечном расстоянии от начала координат.

С точки зрения возможности оценки переходного процесса по вырожденному уравнению желательно, чтобы вещественные корни, порождаемые малыми параметрами, были расположены значительно дальше влево от мнимой оси, чем наиболее отдаленный влево корень вырожденного уравнения, или чтобы модуль комплексного корня был значительно больше модуля комплексного корня вырожденного урав-

нения. Тогда при прочих равных условиях составляющие переходного процесса, вызванные наличием малых параметров, окажут несущественное влияние на характер общей кривой процесса регулирования.

Если общее количество малых параметров равно  $n$ , то вспомогательное уравнение при  $m \rightarrow 0$  может быть записано в виде

$$C_0 q^n + C_1 q^{n-1} + \dots + C_n = 0. \quad (6.9)$$

Учет численного значения малых параметров изменит вспомогательное уравнение следующим образом:

$$(C_0 + \Delta C_0) q^n + (C_1 + \Delta C_1) q^{n-1} + \dots + C_n + \Delta C_n = 0. \quad (6.10)$$

Производя вычисления, аналогичные ранее проведенным, получим приближенное выражение для определения ошибки  $i$ -го корня от учета малых параметров в следующей форме:

$$\Delta q_i = - \frac{\Delta b_0 q^N + \Delta b_1 q^{N-1} + \dots + \Delta a_0 q^{N-n} + \dots + \Delta a_{N-n}}{\varphi'(q)_{q=q_i}}, \quad (6.11)$$

где  $\varphi'(q)_{q=q_i}$  — производная по  $q$  уравнения (6.9) при  $q = q_i$ . Зная  $q_i$ , можно найти ошибку в определении корня. Действительное значение корня при этом определится из уравнения

$$p_i = \frac{q_i + \Delta q_i}{m}. \quad (6.12)$$

Все полученные в этом параграфе соотношения пригодны для определения численных значений малых параметров, повышающих порядок уравнения на единицу. Естественно, что для определенной структуры таким малым параметром может быть обратная величина коэффициентов усиления охваченной стабилизацией части контура. Следовательно, в этих случаях указанными формулами можно пользоваться для определения необходимой величины коэффициентов усиления. Имея в виду, что

$$m = \frac{1}{K_{\text{о.х.в}}}, \quad (6.13)$$

формулу (6.12) можно записать в виде:

$$p_i = (q_i + \Delta q_i) K_{\text{о.х.в}}. \quad (6.14)$$

Если  $K_{\text{о.х.в}}$  известно, то по (6.14) можно определить истинное значение корня. Практически целесообразно поступить наоборот: прежде всего найти корни вспомогательного уравнения, полученного в предположении, что  $m = 0$ , задаться величиной допустимой ошибки в величине корня  $\Delta q$  и из уравнения (6.14) определить необходимое значение коэффициента усиления  $K_{\text{о.х.в}}$ .

Изложенный в предыдущем параграфе метод определения малых  $m$ , а следовательно, и больших  $K$  имеет универсальный характер только для случаев, когда малые параметры повышают порядок уравнения не больше, чем на единицу.

Для использования этого метода необходимо знать корни вырожденного и вспомогательного уравнений. Часто нахождение корней даже вырожденного уравнения сопряжено со значительными трудностями, ибо оно может быть достаточно высокой степени. Поэтому наряду с изложенным выше методом, применение которого, как правило, целесообразно, когда необходимо установить влияние малых постоянных времени на динамику системы, в этом параграфе рассматриваются методы нахождения величин коэффициентов усиления для ряда практически интересных случаев и определения пределов изменения этих коэффициентов усиления, при которых остаются справедливыми полученные ранее законы построения структур.

### 1. Коэффициенты усиления, входящие в характеристическое уравнение линейно

В простейших случаях структур, устойчивых при больших коэффициентах усиления, тот коэффициент усиления, который можно в широких пределах менять, не нарушая устойчивости, входит в уравнение линейно. В качестве примера на рис. 147 приведена простейшая структурная схема.

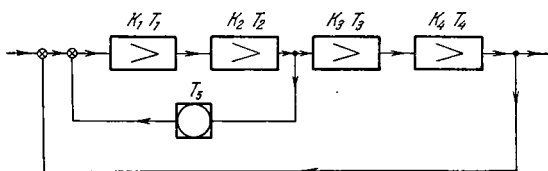


Рис. 147. Структурная схема.

Коэффициентами усиления, которые здесь можно менять в широких пределах, являются  $K_1 K_2$ . Характеристическое уравнение для рассматриваемого случая запишется:

$$\prod_{i=1}^4 (1 + T_i p) (1 + \tau p) + K_1 K_2 [\tau p (1 + T_3 p) (1 + T_4 p) + K_3 K_4 (1 + \tau p)] = 0. \quad (6.17)$$

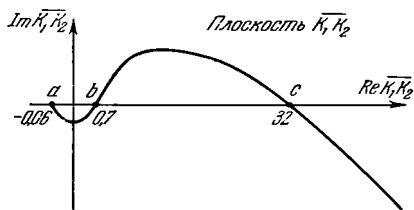
Определение границ  $K_1 K_2$ , при которых система устойчива, в данном случае не представляет труда. Для этой цели (если все прочие параметры известны) строится кривая  $D$ -разбиения по  $K_1 K_2$ . Для рассматриваемого примера уравнение кривой  $D$ -разбиения имеет вид

$$\overline{K_1 K_2} = - \frac{\prod_{i=1}^4 (1 + T_i j\omega) (1 + \tau j\omega)}{\tau j\omega (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) + K_3 K_4 (1 + \tau j\omega)}. \quad (6.18)$$

На рис. 148 представлена кривая, построенная по уравнению (6.18) для следующих численных данных параметров:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,1 \text{ сек}, & T_2 &= 0,01 \text{ сек}, & T_3 &= 0,34 \text{ сек}, \\ T_4 &= 0,1 \text{ сек}, & \tau &= 0,5 \text{ сек} & \text{и} & K_3 K_4 = 15. \end{aligned}$$

Как видно из рис. 148, в рассматриваемом случае существует две области значений  $K_1 K_2$ , при которых система устойчива: первая область



при  $K_1 K_2$  от  $-0,06$  до  $+0,7$  и вторая область при  $K_1 K_2$  от  $32$  до  $+\infty$ . Последняя и определяет пределы  $K_1 K_2$ , где система остается устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления. Очевидно, что наименьшее значение  $K_1 K_2$ , при котором справедливы все ранее полученные выводы, будет  $K_1 K_2 = 32$ .

Рис. 148. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_1 K_2$ .

В общем характеристическое уравнение, соответствующее рассматриваемому в настоящем пункте варианту структур, может быть представлено в следующем виде:

$$Q(p) + K_{\text{оув}} R(p) = 0, \quad (6.19)$$

откуда количественное значение пределов  $K_{\text{оув}}$  определяется из областей (если их несколько), устойчивости кривой  $\mathcal{D}$ -разбиения, построенной по уравнению

$$\bar{K}_{\text{оув}} = - \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)}. \quad (6.20)$$

Здесь обязательно будет область, одна граница которой уходит в бесконечность.

## 2. Коэффициенты усиления, входящие в характеристическое уравнение нелинейно

Количественная оценка коэффициентов усиления, входящих в характеристическое уравнение нелинейно, представляет собой значительно более сложную задачу, особенно, если важно определить не только одно какое-либо значение коэффициента усиления, при котором система устойчива, а всю область таких значений. Поэтому мы будем решать эту задачу применительно к рассматриваемому классу структур, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициентов усиления.

То обстоятельство, что система остается устойчивой при больших коэффициентах усиления, указывает на обязательное наличие целой области значений коэффициентов, где система устойчива. Если вместо больших коэффициентов усиления мы введем их обратные величины,

то получим некоторую область малых величин, где система остается устойчивой. Указанное обстоятельство мы учитываем в дальнейшем.

Ранее было показано, что для рассматриваемого класса структур при наличии  $n$  больших коэффициентов усиления характеристическое уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots + m F_{N_{n-1}}(p) + F_{N_n}(p) = 0, \quad (6.21)$$

где  $m = \frac{1}{K}$ .

В тех случаях, когда большие коэффициенты усиления численно неодинаковы, характеристическое уравнение также приводится к виду (6.21), но при этом коэффициенты полиномов  $F_{N_i}(p)$  зависят от коэффициентов  $\eta_i$ , определяющих связь между  $K_i$  и  $K$ .

Запишем уравнение кривой  $D$ -разбиения относительно последовательности малых параметров  $m$  в возрастающих степенях. Это уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{m}^n = - \frac{m^{n-1} + \frac{m^{n-2} + \frac{m^{n-3} + \frac{\dots}{F_{N_3}(j\omega)}}{F_{N_2}(j\omega)}}{F_{N_1}(j\omega)}}{F_{N_0}(j\omega)}. \quad (6.22)$$

Рассмотрим отдельные дроби полученной цепочки, начиная от  $m$  в наименьшей степени. В самом верху имеем левую часть вырожденного уравнения  $F_{N_n}(j\omega) = 0$ . Для устойчивости всей системы при малых  $m$  уравнение  $F_{N_n}(p) = 0$  должно удовлетворять условиям устойчивости.

Параметры, входящие в коэффициенты вырожденного уравнения, в частности коэффициент усиления в вырожденном уравнении, выбираются так, чтобы удовлетворялись условия устойчивости. Выбор параметров может быть произведен исходя из вида кривой  $D$ -разбиения по одному или двум входящим в это уравнение параметрам, уравнение которой имеет вид

$$F_{N_n}(j\omega) = 0. \quad (6.23)$$

Согласно принятому ранее условию все рассматриваемые здесь структуры принадлежат к классу устойчивых при неограниченном коэффициенте усиления. Следовательно, если вырожденное и одно из вспомогательных уравнений удовлетворяют условиям устойчивости, то

существует такое  $m < m_0$ , при котором вся система устойчива и будет оставаться устойчивой для всех  $m < m_0$ .

Предположим, что все  $m^i$ , где  $i = 2, 3, \dots, n$ , сколь угодно малые величины. Определим область значений  $m$ , при которых вся система остается устойчивой. Эта область значений  $m$  может быть получена построением кривой  $D$ -разбиения из уравнения

$$\bar{m} = - \frac{F_{N_n}(j\omega)}{F_{N_{n-1}}(j\omega)}. \quad (6.24)$$

Верхняя граница  $m = m_{01}$ , получаемая из построения кривой  $D$ -разбиения, определяет устойчивость системы при  $m^i = 0$ . При  $m < m_{01}$  система будет устойчивой и при  $m^i \neq 0$ . Выберем вещественное значение  $m_1$ , принадлежащее области устойчивости, и определим границу устойчивости по  $m^2$  при условии, что  $m^i$ , где  $i = 3, \dots, n$ , равны нулю; тогда получим:

$$\bar{m}^2 = - \frac{m_1 + \frac{F_{N_n}(j\omega)}{F_{N_{n-1}}(j\omega)}}{F_{N_{n-2}}(j\omega)} = \frac{\bar{m} - m_1}{F_{N_{n-2}}(j\omega)}. \quad (6.25)$$

Теперь уже можно выбрать  $m^2 \leq m_{02}^2$ , где  $m_{02}^2$  — значение  $\bar{m}^2$ , при котором система находится на границе устойчивости. Таким образом, переходя по ступенькам дроби вниз, можно последовательно определять граничные значения  $m_{0i}^i$  и выбирать соответственно значения  $m_i$  в области устойчивости. Система будет устойчива при всех

$$m^i < m_{0i}^i.$$

Общее выражение кривой  $D$ -разбиения по  $m^i$  может быть записано в следующем виде:

$$\bar{m}_i = \frac{\bar{m}^{i-1} + m_{i-1}}{F_{N_{n-i}}(j\omega)}. \quad (6.26)$$

Сам процесс построения кривых существенно облегчается. Так, числитель в выражении (6.26) уже известен из построения кривой  $D$ -разбиения по  $m^{i-1}$  и выбранному в устойчивой области  $m_{i-1}$ . После того как определено  $m^i$ , на основании формулы связи между отдельными коэффициентами усиления могут быть определены коэффициенты связи  $\eta_i$  для случая, когда большие коэффициенты усиления численно различные.

В качестве иллюстрации найдем выражение цепной дроби для определения границ  $D$ -разбиения по коэффициентам усиления применительно к двум основным структурам, рассмотренным в главе III.

Для конкретности ограничимся случаем, когда в систему вводятся три стабилизирующих устройства общего типа.

На рис. 149 представлена структурная схема по первому варианту включения. Характеристическое уравнение запишется в следующем виде:

$$[mF_{m_1}(p)D_1(p) + F_{n_1}(p)][mF_{m_2}(p)D_2(p) + F_{n_2}(p)] \times \\ \times [mF_{m_3}(p)D_3(p) + F_{n_3}(p)]D_4(p) + K_4F_{m_1}(p)F_{m_2}(p)F_{m_3}(p) = 0. \quad (6.27)$$

Здесь  $D_i(p)$  — собственный оператор  $i$ -й части одноконтурной цепи,  $m = \frac{1}{K}$  (для простоты принято  $K_{1\text{охв}} = K_{2\text{охв}} = K_{3\text{охв}} = K$ ),  $K_4$  — коэф-

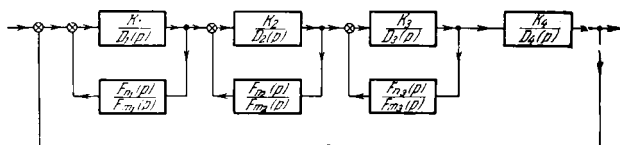


Рис. 149. Структурная схема по первому варианту включения.

фициент усиления в вырожденном уравнении,  $\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}$  — передаточная функция  $i$ -го стабилизирующего устройства. Раскрывая скобки в уравнении (6.27) и группируя, получаем:

$$m^3 D_1(p) D_2(p) D_3(p) F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) D_4(p) + \\ + m^2 [F_{n_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) D_2(p) D_3(p) + \\ + F_{n_2}(p) F_{m_1}(p) F_{m_3}(p) D_1(p) D_3(p) + \\ + F_{n_3}(p) F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) D_1(p) D_2(p)] D_4(p) + \\ + m [F_{n_1}(p) F_{n_2}(p) F_{m_3}(p) D_3(p) + F_{n_1}(p) F_{n_3}(p) F_{m_2}(p) D_2(p) + \\ + F_{n_2}(p) F_{n_3}(p) F_{m_1}(p) D_1(p)] D_4(p) + F_{n_1}(p) F_{n_2}(p) F_{n_3}(p) D_4(p) + \\ + K_4 F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) = 0. \quad (6.28)$$

Выражение для нахождения кривых  $D$ -разбиения по  $m^i$  запишется:

$$\bar{m}^3 = - \frac{m^2 + \frac{E}{D}}{A}, \quad (6.29)$$

где

$$A = D_1(j\omega) D_2(j\omega) D_3(j\omega) D_4(j\omega) F_{m_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) F_{m_3}(j\omega),$$

$$B = [F_{n_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) F_{m_3}(j\omega) D_2(j\omega) D_3(j\omega) + \\ + F_{n_2}(j\omega) F_{m_1}(j\omega) F_{m_3}(j\omega) D_1(j\omega) D_3(j\omega) + \\ + F_{n_3}(j\omega) F_{m_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) D_1(j\omega) D_2(j\omega)] D_4(j\omega),$$

$$C = [F_{n_1}(j\omega) F_{n_2}(j\omega) F_{m_3}(j\omega) D_3(j\omega) + F_{n_1}(j\omega) F_{n_3}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) D_2(j\omega) + \\ + F_{n_2}(j\omega) F_{n_3}(j\omega) F_{m_1}(j\omega) D_1(j\omega)] D_4(j\omega),$$

$$D = F_{m_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) F_{m_3}(j\omega),$$

$$E = F_{n_1}(j\omega) F_{n_2}(j\omega) F_{n_3}(j\omega) D_4(j\omega).$$



В уравнении (6.29) дано также уравнение кривой  $D$ -разбиения по коэффициенту усиления вырожденной части системы.

На рис. 150 представлена структурная схема по второму варианту включения. Характеристическое уравнение в этом случае запишется в следующей форме:

$$D_1(p) D_2(p) D_3(p) D_4(p) F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) + \\ + K_1 F_{n_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) D_2(p) D_3(p) D_4(p) + \\ + K_1 K_2 F_{n_2}(p) F_{m_1}(p) F_{m_3}(p) D_3(p) D_4(p) + \\ + K_1 K_2 K_3 F_{n_3}(p) F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) D_4(p) + \\ + K_1 K_2 K_3 K_4 F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) = 0. \quad (6.30)$$

Здесь обозначения — те же, что и для рассмотренного выше случая.

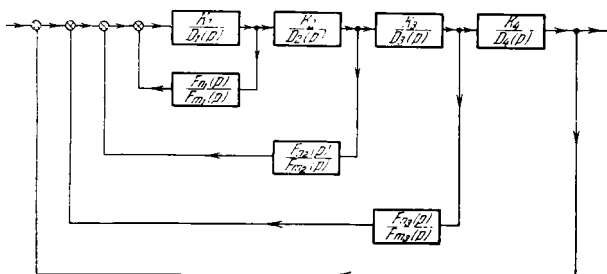


Рис. 150. Структурная схема по второму варианту включения.

Поделим уравнение (6.30) на  $K_1 K_2 K_3$  и обозначим  $\frac{1}{K_1 K_2 K_3} = m^3$ . Полагая для простоты  $K_1 = K_2 = K_3$ , получим:

$$m^3 D_1(p) D_2(p) D_3(p) D_4(p) F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) + \\ + m^2 F_{n_1}(p) F_{m_2}(p) F_{m_3}(p) D_2(p) D_3(p) D_4(p) + \\ + m F_{n_2}(p) F_{m_1}(p) F_{m_3}(p) D_3(p) D_4(p) + \\ + F_{n_3}(p) F_{m_1}(p) F_{m_2}(p) D_4(p) + K_4 F_{m_1}(p) F_{m_2} F_{m_3}(p) = 0. \quad (6.31)$$

Цепочка для вычисления пределов устойчивости по  $m^4$  запишется в следующем виде:

$$m^3 = - \frac{K_4 + \frac{F_{n_3}(j\omega) F_{m_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) D_4(j\omega)}{F_{m_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) F_{m_3}(j\omega)}}{m + \frac{F_{n_2}(j\omega) F_{m_1}(j\omega) F_{m_3}(j\omega) D_3(j\omega) D_4(j\omega)}{F_{n_1}(j\omega) F_{m_2}(j\omega) F_{m_3}(j\omega) D_2(j\omega) D_3(j\omega) D_4(j\omega)}}. \quad (6.32)$$

Расчет производится совершенно так же, как и для рассмотренного выше случая включения по первому варианту.



Для определения  $i$ -й постоянной интегрирования имеем следующее выражение:

$$A_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (6.37)$$

где  $\Delta_i$  — определитель (6.36), в котором вместо  $i$ -го столбца подставлена правая часть системы уравнений (6.35).

Допустим, что в системе имеется  $n$  малых параметров, каждый из которых повышает порядок уравнения на единицу. Тогда из общего числа  $N$  корней  $n$  будут уходить в бесконечность при стремлении  $n$  малых параметров к нулю, а  $N - n$  будут конечными величинами и в пределе равняться  $N - n$  корням вырожденного уравнения.

Если разложить согласно теореме Лапласа определители  $\Delta$  и  $\Delta_i$  по минорам  $N - n$ -го порядка и положить, что  $n$  корней стремятся к бесконечности, то можно убедиться в справедливости следующего:

$$\lim_{z_j \rightarrow \infty} A'_i = A_i, \quad (6.38)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N - n$ ,  $j = N - n + 1, \dots, N$  и

$$\lim_{z_j \rightarrow \infty} A'_j = 0. \quad (6.39)$$

Здесь  $A'_i$  и  $A'_j$  — постоянные интегрирования, определяемые из полного уравнения,  $A_i$  — соответствующая постоянная, определяемая из вырожденного уравнения.

Таким образом, при достаточно больших значениях корней, порождаемых малыми параметрами, постоянные интегрирования, найденные из вырожденного уравнения, будут достаточно близкими к соответствующим постоянным интегрирования, определяемым из полного уравнения, а остальные постоянные интегрирования будут стремиться к нулю. Отсюда и следует, что переходный процесс, полученный из вырожденного уравнения, будет при достаточной малости неучтенных параметров достаточно близок к переходному процессу, получаемому из полного уравнения.

Допустим, что переходный процесс наступает при следующих начальных условиях:

$$x(t)_{t=0} = x_0, \quad x^i(t)_{t=0} = x_0^i. \quad (6.40)$$

Результаты, полученные выше, будут в полной мере справедливы и в этом случае при условии, что  $x_0$  и все  $x_0^i$  являются величинами конечными, в чем можно убедиться непосредственным расчетом, пользуясь вышеизложенной методикой.

## ГЛАВА VII

### СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ РЕГУЛИРУЕМЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

#### § 7.1. Предварительные замечания

В практике автоматического регулирования весьма часто встречаются объекты, в которых необходимо регулировать не одну, а несколько величин; эти величины могут быть связаны между собой в том смысле, что изменение одной влечет за собой изменение других регулируемых величин. В качестве примеров таких объектов могут служить электрические генераторы, где регулируются напряжение, частота тока (в машинах переменного тока), активная и реактивная мощность (в синхронной машине, работающей параллельно с другими синхронными машинами). При частотном управлении асинхронными двигателями напряжение и частота источника питания должны меняться по определенным законам, обычно отличным от естественных законов изменения этих величин, присущих источникам. В качестве примера можно также указать паровой котел, ставший классическим примером объекта с несколькими регулируемыми величинами (давление, температура пара и т. д.).

По условиям эксплуатации к каждой из регулируемых величин могут предъявляться свои особые требования с точки зрения точности их поддержания, скорости установления после нарушения установившегося режима и других показателей качества регулирования. Так, при работе синхронной машины параллельно с сетью частоту необходимо поддерживать строго постоянной (а статическое регулирование), напряжение же поддерживается с некоторой конечной точностью (статическое регулирование) и т. д.

В рассматриваемых случаях по каждой из величин создается свой контур регулирования. По этой причине такие системы иногда называют системами многосвязного регулирования. В дальнейшем, если не будет специально оговорено, будем подразумевать, что связь между отдельными регулируемыми величинами имеет место через объект регулирования.

Прежде чем сформулировать задачу синтеза структур систем многосвязного регулирования, необходимо выяснить некоторые общие свойства этих систем.

# 1. Зависимость установившейся ошибки от коэффициента усиления

Как известно, в системах с одной регулируемой величиной установившаяся ошибка обратно пропорциональна величине коэффициента усиления разомкнутой цепи регулирования. Выясним, как связана

установившаяся ошибка  $i$ -й регулируемой величины с коэффициентом усиления разомкнутого  $i$ -го контура и другими параметрами системы многосвязного регулирования. Допустим, что в объекте имеется  $n$  регулируемых величин. По каждой из регулируемых величин объект имеет соответствующую передаточную функцию. Ограничимся рассмотрением систем регулирования, которые могут быть представлены схемой, показанной на рис. 151. Будем называть знаменатель передаточной функции элемента или разомкнутой части схемы собственным оператором, а ее числитель — взаимным оператором. Введем следующие обозначения:  $D_i(p)$  — собственный оператор объекта по  $i$ -й регулируемой величине  $x_i$ ;  $M_i(p)$  — собственный оператор цепи регулирования (без объекта) по  $i$ -й регулируемой величине в случае отсутствия стабилизирующих средств;  $K_i$  и  $\mu_i$  — коэффициенты усиления объекта и цепи регулирования (без объекта) по  $i$ -й величине;  $K_i = K'_i \mu_i$  — общий коэффициент усиления разомкнутой цепи  $i$ -й регулируемой величины;  $f_i$  — нагрузка, приложенная к объекту и действующая в  $i$ -й цепи регулирования (рис. 151)\*).

Рис. 151. Схематическое изображение системы многосвязного регулирования.

Выясним сначала свойства системы, не имеющей стабилизирующих устройств. По условию связь между отдельными регулируемыми величинами существует только через объект регулирования. Эта связь может быть как алгебраической, так и дифференциальной. Обозначим коэффициент, характеризующий связь между  $i$ -й и  $k$ -й величинами, через  $\alpha_{ik}$ ; этот коэффициент может быть постоянной величиной или некоторой функцией оператора дифференцирования  $p$ .

В последнем случае полагаем, что наивысшая степень  $p$ , входящего в  $\alpha_{ik}$ , меньше степени собственных операторов  $D_i(p)$ ,  $M_i(p)$

\*) Если нагрузка  $f_i$  приложена не так, как это показано на рис. 151, а в каком-либо другом месте объекта, то изменится оператор и коэффициент при  $f_i$ ; основные выводы, получаемые далее, от этого не изменятся.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 + K_1, & K'_1 \alpha_{12}, \dots, & K'_1 f_1, \dots, & K'_1 \alpha_{1n} \\ K'_2 \alpha_{21}, & 1 + K_2, \dots, & K'_2 f_2, \dots, & K'_2 \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K'_n \alpha_{n1}, & K'_n \alpha_{n2}, \dots, & K'_n f_n, \dots, & 1 + K_n \end{vmatrix}. \quad (7.4)$$

Из выражений (7.3) и (7.4) можно найти статическую ошибку. Кроме того, из этих уравнений следует, что при определении  $i$ -й величины определитель  $\Delta_i$  не будет зависеть от  $K_i$ , в то время как определитель системы  $\Delta$  зависит от всех  $K$ , в том числе и от  $K_i$  и притом так, что значение  $\Delta$  растет с ростом  $K_i$ . Полагая, что уравнение (7.2) записано в отклонениях, приходим к заключению, что увеличение коэффициента усиления  $i$ -го контура при прочих равных условиях уменьшает установившуюся ошибку по  $i$ -й регулируемой величине. Таким образом, для систем со многими взаимосвязанными регулируемыми величинами, как и для систем с одной регулируемой величиной, увеличение коэффициента усиления ведет к увеличению установившейся точности.

## 2. Влияние коэффициентов усиления отдельных контуров на устойчивость всей системы регулирования

Известно, что в одноконтурных системах с одной регулируемой величиной увеличение общего коэффициента усиления неизбежно ведет к нарушению их устойчивости. Такой же вопрос возникает и при рассмотрении многоконтурных систем со многими взаимосвязанными регулируемыми величинами. Для того чтобы выяснить, как влияет увеличение одного, нескольких или всех коэффициентов усиления на устойчивость, рассмотрим характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (7.1). Напомним, что при составлении системы уравнений (7.1) предполагалось, что все контуры регулирования состоят только из основных элементов, т. е. не содержат стабилизирующих устройств. На основании (7.1) характеристическое уравнение представляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} [D_1(p)M_1(p) + K_1], & K'_1M_1(p)\alpha_{12}, \dots, & K'_1M_1(p)\alpha_{1n} \\ K'_2M_2(p)\alpha_{21}, & [D_2(p)M_2(p) + K_2], \dots, & K'_2M_2(p)\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K'_nM_n(p)\alpha_{n1}, & K'_nM_n(p)\alpha_{n2}, \dots, & [D_n(p)M_n(p) + K_n] \end{vmatrix} = 0. \quad (7.5)$$

Раскрывая определитель, можно уравнение (7.5) привести к следующему виду:

$$F'_{N_0}(p) + \sum_{i=1}^n K_i F'_{N_i}(p) + \sum_{i,j=1}^n K_i K_j F'_{N_{ij}}(p) + \dots + K_1 K_2 \dots K_n + \\ + f_1(\alpha_{ik}) F_n(p) + f_2(\alpha_{ik}) F_{n-1}(p) + \dots + f_n(\alpha_{ik}) = 0, \quad (7.6)$$

где  $F'_{N_i}(p)$ ,  $F_{N_{ij}}$  — многочлены от переменной  $p$ , коэффициенты которых не зависят от  $K_i$ ,  $F_n(p)$  — многочлены, коэффициенты кото-

рых не зависят от  $K_i$  и  $\alpha_{ik}$ , и  $f(\alpha_{ik})$  — некоторые функции от коэффициентов связи  $\alpha_{ik}$ .

Убедимся, что при некоторых условиях увеличение одного, нескольких или всех коэффициентов усиления неизбежно приводит к нарушению устойчивости и что в системе многосвязного регулирования, как и в одноконтурной, возможности увеличения коэффициентов усиления находятся в противоречии с ее устойчивостью.

Допустим, что между коэффициентами усиления отдельных контуров существуют (или могут быть осуществлены) следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= \eta_1 K_1, \\ K_3 &= \eta_2 K_1, \\ &\dots\dots\dots \\ K_n &= \eta_m K_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Подставляя (7.7) в (7.6) и полагая  $K_1 = K$ , получим:

$$\begin{aligned} &F'_{N_0}(p) + KF_{N_1}(p) + K^2 F_{N_2}(p) + K^3 F_{N_3}(p) + \dots \\ &\dots + K^n \prod_{i=1}^n \eta_i + f_1(\alpha_{ik}) F_n(p) + f_2(\alpha_{ik}) F_{n-1}(p) + \dots + f_n(\alpha_{ik}) = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Поделим (7.8) на  $K^n$  и обозначим  $\frac{1}{K_i} = m_i$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} &m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots \\ &\dots + m F_{N_{n-1}}(p) + \prod_{i=1}^n \eta_i = 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где

$$F_{N_0}(p) = F'_{N_0}(p) + f_1(\alpha_{ik}) F_n(p) + \dots + f_n(\alpha_{ik}).$$

Увеличение коэффициентов усиления равносильно уменьшению  $m$ . Выясним возможность получения устойчивой системы при  $m \rightarrow 0$ . Для этой цели решим следующую задачу.

Допустим, что в общем случае характеристическое уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned} &m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots \\ &\dots + m F_{N_{n-1}}(p) + F_{N_n}(p) = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь индексы при  $F$  показывают степени многочленов. Необходимо установить, при каких условиях корни уравнения (7.10) будут расположены слева от мнимой оси на плоскости корней при  $m \rightarrow 0$ .

Уравнения, подобные (7.10), уже рассматривались нами в главе III при исследовании сложных структур систем с одной регулируемой величиной, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициентов усиления участков цепи, охватываемых стабилизирующими устройствами. Там было показано, что устойчивость при  $m \rightarrow 0$  может



быть обеспечена, если каждый малый параметр повышает порядок уравнения не больше, чем на два. При этом вырожденное уравнение и вспомогательное уравнение первого, второго и третьего рода, каждое в отдельности, должны удовлетворять условиям устойчивости.

Возвращаясь к системе с  $n$  связанными регулируемыми величинами, поведение которой описывается совокупностью уравнений (7.1), можно сделать следующее заключение.

а) Если собственный оператор каждого из контуров, состоящего из основных элементов, имеет первый порядок, то можно увеличивать одновременно все коэффициенты усиления, не нарушая устойчивости. При этом необходимо, чтобы вырожденное уравнение и вспомогательное уравнение первого рода, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости.

б) Если собственный оператор каждого из контуров, состоящего из основных элементов, имеет второй порядок, то можно увеличивать одновременно все коэффициенты усиления, не нарушая устойчивости. При этом необходимо, чтобы вспомогательное уравнение второго рода и вырожденное уравнение, каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости.

в) Если собственный оператор каждого из контуров, состоящих из основных элементов, имеет третий или более высокий порядок, то увеличение одного, нескольких или всех одновременно коэффициентов усиления неизбежно приводит к неустойчивости. В этом смысле, как и для одноконтурных систем с собственным оператором, порядок которого выше второго, существует противоречие между возможностью увеличения коэффициента усиления (или коэффициентов усиления) и устойчивостью. В связи с этим и возникает задача о нахождении таких структур и принципов их построения, для которых это противоречие может быть устранено.

## § 7.2. Структуры систем со многими регулируемыми величинами, допускающие неограниченное увеличение коэффициентов усиления

В реальных условиях порядки собственных операторов отдельных контуров могут быть выше второго. Как следует из результатов предыдущего параграфа, при указанных условиях увеличение одного или нескольких коэффициентов усиления неизбежно приводит к нарушению устойчивости.

Отсюда (как и для систем с одной регулируемой величиной) возникает задача: найти законы построения систем, в которых принципиально не существовало бы этого основного противоречия между устойчивостью и точностью.

Допустим, что собственный оператор цепи регулирования по одной из регулируемых величин, например  $x_1$ , имеет порядок  $\nu_1 > 2$ . Увеличение коэффициента усиления этого контура неизбежно приведет к неустойчивости системы. Это заключение вытекает из ранее

полученных результатов. В справедливости его можно убедиться и непосредственно.

Действительно, разложив определитель (7.5) по первому столбцу, получим:

$$[D_1(p) M_1(p) + K_1] \Delta_{11} + K'_2 M_2(p) \alpha_{21} \Delta_{21} + \dots \\ \dots + K'_n M_n(p) \alpha_{n1} \Delta_{n1} = 0, \quad (7.11)$$

где  $\Delta_{ik}$  — алгебраические дополнения к соответствующим элементам первого столбца. Первый член суммы (7.11) имеет наивысшую степень  $p$ , так как этот член содержит наименьшее количество взаимных коэффициентов, которые являются или постоянными величинами, или операторами с порядком, меньшим порядков собственных операторов отдельных контуров. Уравнение (7.11) может быть приведено к следующему виду:

$$F_{N_2}(p) + K_1 F_{N_1}(p) = 0, \quad (7.12)$$

где индексы при  $F$  означают степень многочленов  $F_{N_2}(p)$  и  $F_{N_1}(p)$ . Пусть

$$N_2 - N_1 = \nu_1.$$

Отсюда и вытекает, что если  $\nu_1 > 2$ , то увеличение  $K_1$  неизбежно приведет к неустойчивости системы. Из уравнения (7.12) видно, что условие

$$N_2 - N_1 \leq 2 \quad (7.13)$$

будет выполняться, если в первый контур ввести воздействие по  $\nu_1 - 2$ -й производной.

Действительно, если в первый контур ввести воздействие по  $\nu_1 - 2$ -й производной, то уравнение (7.12) получит следующий вид:

$$F_{N_2}(p) + K_1 (p^{\nu_1-2} + 1) F_{N_1}(p) = 0. \quad (7.14)$$

В этом уравнении условие (7.13) выполняется.

Обобщая этот результат на случай, когда степени собственных операторов каждого из контуров системы будут  $\nu_i$ , приходим к выводу, что для получения устойчивости при любых  $K_i$  необходимо в каждый контур с порядком собственного оператора, равным  $\nu_i > 2$ , ввести воздействие по производной порядка  $\nu_i - 2$ .

Введением  $\nu_i - 2$ -й производной мы обеспечиваем выполнение условия (7.13). Выясним следующий вопрос: необходимо ли, кроме  $(\nu_i - 2)$ -й производной, вводить все низшие, вплоть до первой, производные? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем выражение для вырожденного уравнения, полагая, что в каждый контур вводится  $(\nu_2 - 2)$ -я производная. Нетрудно показать, что вырожденное уравнение будет иметь следующий вид:

$$(p^{\nu_1-2} + 1)(p^{\nu_2-2} + 1) \dots (p^{\nu_n-2} + 1) F_n(p) = 0. \quad (7.15)$$

Независимо от характера функций  $F_n(p)$  ясно, что система будет неустойчивой, если  $\nu_i > 3$ . Отсюда следует вывод, что устойчивость для вырожденного уравнения может быть обеспечена, если, кроме  $\nu_i$  — 2-й производной, будут вводиться все более низшие производные вплоть до первой.

Таким образом, приходим к следующему заключению. В системе с  $n$  связанными между собой регулируемыми величинами можно

обеспечить устойчивость при любом коэффициенте усиления по любой из регулируемых величин. Для этой цели в соответствующий контур нужно ввести воздействие по  $\nu_i$  — 2-й производной, где  $\nu_i$  — порядок собственного оператора  $i$ -го контура.

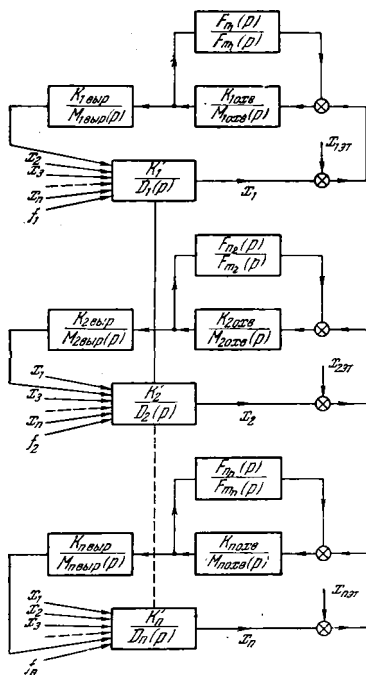


Рис. 152. Общий вид схемы многосвязного регулирования со стабилизирующими устройствами.

нарушения устойчивости и не требующие введения «чистых» производных. В качестве стабилизирующих средств используются обычные стабилизирующие устройства, построенные из пассивных звеньев.

Введем следующие обозначения:  $M_i(p)D_i(p)$  — собственный оператор контура без учета стабилизирующего звена;  $\frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)}$  — опера-

### § 7.3. Второй путь решения поставленной задачи

В предыдущем разделе были найдены структуры, допускающие неограниченное повышение коэффициентов усиления при сохранении устойчивости. Трудности, которые могут возникнуть при техническом осуществлении приведенного выше способа, связаны с необходимостью получения идеальных производных. Этот метод особенно осложняется, если порядок собственного оператора контура регулирования выше третьего и для получения нужной структуры приходится вводить вторую и более высокие производные.

В настоящем параграфе рассмотрены структуры, допускающие неограниченное увеличение коэффициентов усиления без на-





член уравнения (7.19), в котором коэффициентом является  $K_{охв}^n$ , состоит из произведения  $\prod_{i=1}^n B_i(p)$ , к которому добавляются члены, зависящие от  $z_{ik}$  и получающиеся в качестве множителя при  $K_{охв}^n$ .

Допустим, что каждый контур регулирования со своим стабилизирующим звеном в отдельности образует структуру, допускающую неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости. Тогда, как это вытекает из закона построения многочленов, входящих в уравнение (7.19), разность степеней рядом стоящих многочленов не может быть больше двух.

Из сказанного следует закон построения многоконтурных систем со многими связанными между собой регулируемыми величинами, обладающими любой степенью установившейся точности. Для того чтобы в системе с  $n$  связанными между собой регулируемыми величинами можно было каждую регулируемую величину поддерживать с любой степенью установившейся точности, достаточно, чтобы каждый контур в отдельности удовлетворял этому условию. При этом такая система будет устойчивой при неограниченном увеличении коэффициентов усиления, если вспомогательное уравнение первого, второго или третьего рода и вырожденное уравнение, каждое в отдельности, будут удовлетворять условиям устойчивости.

### § 7.4. Одно обобщение

В действительных условиях не всегда требуется поддерживать все регулируемые величины с большой степенью установившейся точности. Более того, бывают такие частные случаи, когда чрезмерная точность может оказаться для некоторых из регулирующих величин нежелательной.

Примером может послужить случай регулирования скорости гидротурбины, генератор которой работает на сеть параллельно с другими генераторами.

Как известно, распределение активных мощностей между параллельно работающими машинами будет определяться статическими характеристиками регуляторов скорости турбин. Поэтому увеличение точности регулирования связано с изменением наклона статической характеристики регулирования турбины. Изменение наклона характеристики ведет к изменению распределения активных нагрузок между машинами, что может оказаться нежелательным.

Рассмотрим для общности случай, когда из  $n$  регулируемых величин  $n - n_1$  должны поддерживаться с большой степенью точности.

При этих условиях уравнение (7.10) может быть приведено к следующему виду:

$$m^{n-n_1} F_{N_1}(p) + m^{n-(n_1+1)} F_{N_1}(p) + \dots + F_{N, n-n_1}(p) = 0. \quad (7.20)$$



касается устойчивости, то нетрудно доказать, что наличие запаздывания в некоторых или во всех контурах не изменит ранее полученного вывода о наличии противоречия между точностью (величиной коэффициентов усиления) и устойчивостью, если система состоит только из основных элементов, т. е. отсутствуют стабилизирующие устройства. Поэтому не будем повторять ранее установленные свойства многосвязных систем, а выясним те дополнительные свойства, которые обусловлены наличием элементов с запаздыванием.

Докажем следующее положение. Если существует хотя бы одна пара коэффициентов связи  $\alpha_{ik}(p)$  и  $\alpha_{ki}(p)$  таких, что  $\alpha_{ik}(p)\alpha_{ki}(p)$  имеет более высокую степень  $p$ , чем  $D_i(p)D_k(p)$  и в  $i$ -м или  $k$ -м контуре имеется запаздывание, то система структурно неустойчива.

Действительно, для того чтобы система была структурно неустойчивой, в данном случае достаточно, чтобы в характеристическом уравнении отсутствовал главный член. Как это нетрудно видеть из (7.22), наибольшее значение  $\tau$  будет равно сумме всех запаздыва-

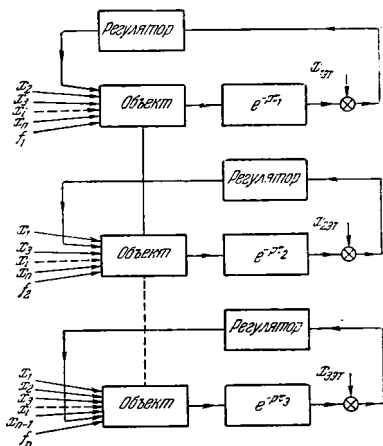


Рис. 152. Многосвязная система с запаздыванием.

ний  $\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i$  и при составлении характеристического уравнения по (7.22) коэффициентом при  $e^{-p\tau}$  будет  $\prod_{i=1}^n D_i(p)$ . Так как среди квазиполиномов, входящих слагаемыми в характеристическое уравнение, будет квазиполином

$$\prod_{i=1, 2, \dots, i-1} D_i(p) \alpha_{ik}(p) \alpha_{ki}(p) \prod_{k=i+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n} D_k(p) e^{p\tau_i},$$

то при условии, что степень  $\alpha_{ik}(p)\alpha_{ki}(p)$  выше степени  $D_i(p)D_k(p)$ , в характеристическом уравнении будет отсутствовать главный член и система будет структурно неустойчивой.

Таким образом, можно сделать следующее заключение о свойствах многосвязных систем автоматического регулирования при наличии элементов с запаздыванием.

а) Установившаяся ошибка  $i$ -й регулируемой величины будет тем меньше, чем больше коэффициент усиления  $i$ -го контура регулирования.





где

$$\left. \begin{aligned} P_i(p) &= D_i(p) N_i(p) F_{m_i}(p) Q_i(p), \\ S_i(p) &= D_i(p) N_i(p) F_{n_i}(p), \\ R_i(p) &= N_i(p) F_{m_i}(p) Q_i(p) \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

и  $N_i(p)$  — собственный оператор части  $i$ -го контура регулятора, не охваченной стабилизирующим устройством;  $Q_i(p)$  — собственный оператор части  $i$ -го контура, охваченной стабилизирующим устройством;  $K_i$  — коэффициент усиления элементов  $i$ -го контура, не охваченных стабилизирующим звеном;  $K_{i \text{ охв}}$  — коэффициент усиления элементов  $i$ -го контура, охваченных стабилизирующим звеном;  $K_{i \text{ общ}} = K_{i \text{ охв}} K_i$ . Характеристическое уравнение запишется в следующей форме:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.25)$$

Выражения для  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) имеют следующий вид:

$$A_{ij} = P_i e^{\tau_i p} + K_{i \text{ охв}} S_i(p) e^{\tau_i p} + K_{i \text{ общ}} F_{m_i} \quad \text{при } i = j$$

и

$$A_{ij} = K_i [R_i(p) + K_{i \text{ охв}} N_i F_{n_i}] \alpha_{ij} \quad \text{при } i \neq j.$$

В дальнейшем будем предполагать, что в отдельных контурах коэффициенты усиления элементов, охваченных стабилизирующими устройствами, равны между собой или находятся в соотношении

$$K_{i \text{ охв}} = \eta_i K_{1 \text{ охв}} = \eta_i K_{\text{охв}}.$$

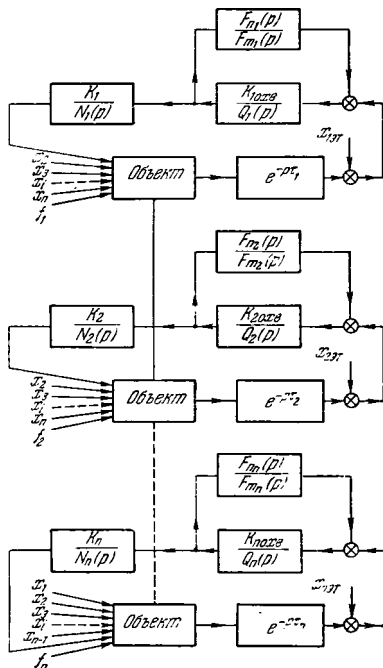


Рис. 154. Многосвязная система с запаздыванием и со стабилизирующими устройствами.

При указанных условиях характеристическое уравнение (7.25) может быть приведено к следующему виду:

$$\prod_{i=1}^n P_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + K_{\text{оxb}} \left\{ \sum_{i=1}^n S_i(p) C_n^{n-1} P_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + D_{00}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots \right. \\ \left. \dots + D_{0n}(p) \right\} + K_{\text{оxb}}^2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n S_i(p) S_k(p) C_n^{n-2} P_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots \right. \\ \left. + D_{10}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots + D_{1n}(p) \right\} + \dots + K_{\text{оxb}}^n \left\{ \prod_{i=1}^n S_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots \right. \\ \left. + D_{n0}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots + D_{nn}(p) \right\} + F(p) = 0, \quad (7.26)$$

где  $F(p)$  — полином, не зависящий от  $K_{\text{оxb}}$  и  $\tau$ . Очевидно, что полиномы  $D_{ik}(p)$  имеют степень  $p$  ниже, чем соответствующие полиномы, стоящие первыми в фигурных скобках.

Поделим уравнение (7.26) на  $K_{\text{оxb}}^n$  и обозначим

$$\frac{1}{K_{\text{оxb}}^i} = m^i.$$

Тогда (7.26) запишется в следующем виде:

$$m^n \left\{ \prod_{i=1}^n P_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + F(p) \right\} + m^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n S_i(p) C_n^{n-1} P_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots \right. \\ \left. + D_{00}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots + D_{0n}(p) \right\} + \\ + m^{n-2} \left\{ \sum_{i,k=1}^n S_i(p) S_k(p) C_n^{n-2} P_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots \right. \\ \left. + D_{10}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots + D_{1n}(p) \right\} + \dots + \prod_{i=1}^n S_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \\ + D_{n0}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots + D_{nn}(p) = 0. \quad (7.27)$$

Вырожденное уравнение получим, полагая в уравнении (7.27)  $m=0$ :

$$\prod_{i=1}^n S_i(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + D_{n0}(p) e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \dots + D_{nn}(p) = 0. \quad (7.28)$$

Допустим, что вырожденное уравнение (7.28) при соответствующем выборе параметров стабилизирующих устройств  $F_{n_1}(p)$  и  $F_{n_2}(p)$  удовлетворяет условиям устойчивости (в противном случае дальнейшее исследование теряет смысл). Устойчивость всей системы будет зависеть от расположения корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ .

Прежде всего необходимо установить наличие главного члена в уравнении (7.27). На основании теоремы о структурной устойчивости, доказанной в предыдущем параграфе, можем утверждать, что уравнение (7.27) будет иметь главный член, если для каждой пары коэффициентов связи степень полинома  $\alpha_{ik}(p) \alpha_{ki}(p)$  меньше степени полинома  $D_i(p) D_k(p)$ .

В дальнейшем будем предполагать, что указанное условие выполняется.

Определим количество и характер корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ .

Поделив уравнение (7.27) на  $m^n e^{\sum_{i=1}^n \tau_i p}$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n P_i(p) + F(p) e^{-\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^n S_i(p) C_n^{n-1} P_i(p) + D_{00}(p) e^{-\tau_i p} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + D_{0n}(p) e^{-\sum_{i=1}^n \tau_i p} \right] + \frac{1}{m^2} \left[ \sum_{i,k=1}^n S_i(p) S_k(p) C_n^{n-2} P_i(p) + \right. \\ & \quad \left. + D_{i0}(p) e^{-\tau_i p} + \dots + D_{in}(p) e^{-\sum_{i=1}^n \tau_i p} \right] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{m^n} \left[ \prod_{i=1}^n S_i(p) + D_{n0}(p) e^{-\tau_i p} + \dots + D_{nn}(p) e^{-\sum_{i=1}^n \tau_i p} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

В развернутом виде (7.29) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & A_{00} p^{N_0} + A_{01} p^{N_0-1} + \dots + (B_{00} p^{\beta_{00}} + B_{01} p^{\beta_{00}-1} + \dots) e^{-\sum_{i=1}^n \tau_i p} + \\ & + \frac{1}{m} [A_{10} p^{N_1} + A_{11} p^{N_1-1} + \dots + (B_{10} p^{\beta_{10}} + B_{11} p^{\beta_{10}-1} + \dots) e^{-\tau_1 p} + \dots] + \\ & + \frac{1}{m^2} [A_{20} p^{N_2} + A_{21} p^{N_2-1} + \dots + (B_{20} p^{\beta_{20}} + B_{21} p^{\beta_{20}-1} + \dots) e^{-\tau_2 p} + \dots] + \\ & + \frac{1}{m^n} [A_{n0} p^{N_n} + A_{n1} p^{N_n-1} + \dots \\ & \quad \dots + (B_{n0} p^{\beta_{n0}} + B_{n1} p^{\beta_{n0}-1} + \dots) e^{-\tau_n p} + \dots], \end{aligned} \quad (7.30)$$

где  $N_0, N_1, \dots$  определяют степени входящих в (7.30) полиномов, стоящих при соответствующих степенях  $m$ .

Допустим, что

$$N_0 - N_1 = 1, \quad N_0 - N_2 = 2, \quad \dots, \quad N_0 - N_n = n. \quad (7.31)$$

Иначе говоря, степень каждой последующей суммы полиномов на единицу меньше, чем предшествующей.

Произведем следующую замену переменных:

$$p = \frac{q}{m}. \quad (7.32)$$

Подставляя (7.32) в (7.30), умножая затем полученное уравнение на  $m^{N_0}$  и полагая  $m = 0$ , получим после соответствующих выкладок следующее уравнение:

$$A_{00}q^n + A_{10}q^{n-1} + \dots + A_{n0} = 0. \quad (7.33)$$

Следовательно, количество корней, уходящих в бесконечность при  $m \rightarrow 0$ , равно  $n$  и характер их расположения на плоскости корней зависит от значений коэффициентов уравнения (7.33).

Для того чтобы все корни уравнения (7.33) уходили в бесконечность слева от мнимой оси на плоскости корней, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условиям Раута — Гурвица.

Таким образом, приходим к выводу, что система будет устойчивой при выполнении условия (7.31), если вырожденное трансцендентное уравнение удовлетворяет условиям устойчивости и уравнение (7.33), которое назовем по аналогии с предыдущим вспомогательным уравнением первого рода, также удовлетворяет условиям устойчивости. Следовательно, задача состоит в таком выборе передаточной функции стабилизирующего устройства и места его включения, чтобы

$$N_0 - N_i = i.$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$N_0 - N_1 = 2, \quad N_0 - N_2 = 4, \quad \dots, \quad N_0 - N_n = 2n. \quad (7.34)$$

При помощи преобразования

$$p = \frac{q}{m^2} \quad (7.35)$$

и выкладок, аналогичных проделанным ранее, получаем уравнение, которое будем называть вспомогательным уравнением второго рода. Оно составляется следующим образом:

$$A_{00}q^{N_0} + A_{01}q^{N_0-1} + \dots + A_{10}q^{N_0-2} + A_{11}q^{N_0-3} + \dots \\ \dots + A_{n0}q^{N_0-2n} + A_{n1}q^{N_0-2n-1} + \dots \quad (7.36)$$

Такое же уравнение было получено нами ранее при исследовании многосвязных систем автоматического регулирования без запаздывания. Оно образуется из первых двух старших коэффициентов каждого из полиномов (7.30).

Для устойчивости при  $m \rightarrow 0$  необходимо и достаточно, чтобы а) вырожденное трансцендентное уравнение удовлетворяло условиям устойчивости;

б) вспомогательное уравнение второго рода также удовлетворяло условиям устойчивости.

После деления уравнения (7.36) на  $q^{N_0-2n}$  вспомогательное уравнение второго рода получит следующий вид:

$$A_{00}q^{2n} + A_{01}q^{2n-1} + A_{10}q^{2n-2} + A_{11}q^{2n-3} + \dots + A_{n0}q + A_{n1} = 0. \quad (7.37)$$

Наконец, если

$$N_0 - N_1 \geq 3, \quad N_0 - N_2 \geq 6, \dots, \quad (7.38)$$

то при  $m \rightarrow 0$  система будет неустойчивой. Справедливость этого утверждения вытекает из свойств корней двучленных алгебраических уравнений и доказывается аналогично тому, как это было сделано в главе III.

Таким образом, приходим к выводу о возможности получения систем многосвязного регулирования с запаздыванием, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициентов усиления отдельных контуров. Для этой цели необходимо выполнение приведенных выше условий.

Выясним, как связаны полученные ранее условия со структурой системы регулирования. Для этой цели определим, чему равны  $N_0, N_1, \dots, N_n$ .

Из структуры старших членов полиномов (7.29) и обозначений (7.24) видно, что разность степеней  $N_0 - N_1, N_1 - N_2, \dots, N_{n-1} - N_n$  определяется из соотношения

$$N_0 - N_i = m_i + Q_i - n_i, \quad (7.39)$$

где  $m_i$  — степень оператора  $p$  в знаменателе передаточной функции стабилизирующего устройства;  $Q_i$  — степень оператора  $p$  в знаменателях передаточных функций элементов, охватываемых стабилизирующим звеном;  $n_i$  — степень оператора  $p$  в числителе передаточной функции стабилизирующего устройства. По условию

$$N_i - N_{i-1} \leq 2.$$

Следовательно, получаем:

$$m_i - n_i + Q_i \leq 2.$$

Таким образом, порядок уравнения, описывающего часть звеньев, которые охватываются стабилизирующим устройством в структурах, допускающих неограниченное увеличение коэффициента усиления

без нарушения устойчивости, находится из следующего соотношения:

$$Q_i \leq n_i - m_i + 2. \quad (7.40)$$

Аналогичное соотношение было получено и для систем с одной регулируемой величиной. Отсюда вытекает следующий вывод. Для того чтобы многосвязная система регулирования, содержащая элементы с запаздыванием, оставалась устойчивой при неограниченном увеличении ее коэффициентов усиления, необходимо и достаточно, чтобы каждый отдельный контур регулирования, в котором коэффициент усиления неограниченно увеличивается, принадлежал к классу структур, устойчивых при неограниченно большом коэффициенте усиления.

### § 7.7. Автономность процессов регулирования в системах с несколькими регулируемыми величинами, связанными между собой через объект

Под автономными подразумеваются такие многосвязные системы, в которых изменение в процессе регулирования какой-либо одной регулируемой величины не приводит к изменениям других регулируемых величин. Автономность в этом смысле может быть полной (или «абсолютной») или может выдерживаться с точностью до некоторой малой величины. Практический интерес представляет последний случай при условии, что степень малости связи может быть заранее определена и может регулироваться. Автономность можно рассматривать с двух точек зрения.

Во-первых, необходимость автономности может диктоваться условиями, которые мы назовем условиями технологии. В качестве примера, где автономность диктуется условиями технологии, может служить система частотного управления и регулирования скорости вращения асинхронного двигателя. Для того чтобы получить необходимые эксплуатационные характеристики, особенно в режимах пуска и торможения, необходимо менять приложенное к статору напряжение и частоту питающего двигателя тока по определенным законам, отличным от естественных законов изменения регулируемых величин переменной частоты (например, в синхронном генераторе с переменной скоростью вращения). В этих условиях требование технологии процесса ставится на первый план даже в том случае, если бы автономность приводила к некоторому ухудшению процесса регулирования всей системы.

Во-вторых, автономность может рассматриваться как некоторое динамическое свойство системы и органически вытекать из ее структурных свойств. В настоящей работе основное внимание уделяется автономности как динамическому свойству рассматриваемого класса структур. Кроме того, приводятся общие методы получения автономных систем, где рассматриваемые структуры составляют основу всей системы.





Полагая, что все  $m_i$  одинакового порядка малости  $m$ , запишем характеристическое уравнение в следующей форме:

$$\begin{vmatrix} m(T_1 p + 1) + K_1 & mK_1 \alpha_{12} & \dots & mK_1 \alpha_{1n} \\ mK_2 \alpha_{21} & m(T_2 p + 1) + K_2 & \dots & mK_2 \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ mK_n \alpha_{n1} & mK_n \alpha_{n2} & \dots & m(T_n p + 1) + K_n \end{vmatrix} = 0. \quad (7.43)$$

Уравнение (7.43) приводится к следующему виду:

$$m^n F_n(p) + m^{n-1} F_{n-1}(p) + \dots + F_0(p) = 0,$$

где индекс при  $F$  показывает степень полинома.

Чтобы система была устойчивой при  $m \rightarrow 0$ , необходимо и достаточно, чтобы вырожденное уравнение  $F_0(p) = 0$  и вспомогательное уравнение (в данном случае оно будет первого рода), каждое в отдельности, удовлетворяли условиям устойчивости. В данном случае, очевидно, необходимо проверить на устойчивость только вспомогательное уравнение, которое после элементарных выкладок приводится к следующему виду:

$$\prod_{i=1}^n (K_i + T_i p m) = 0. \quad (7.44)$$

Оно состоит из  $n$  множителей, каждый из которых характеризует не зависящий друг от друга затухающий процесс соответствующей переменной. Следовательно, вся система устойчива.

Корни вспомогательного уравнения суть

$$p_i = -\frac{K_i}{mT_i}, \quad (7.45)$$

что свидетельствует о том, что большой коэффициент усиления, кроме большой

установившейся точности и автономности, обеспечивает также большую степень устойчивости\*), т. е. большее быстродействие.

Таким образом, в данном случае наряду с автономностью достигаются высокие динамические свойства всей системы.

\*) Цыпкин Я. З. и Бромберг П. В., О степени устойчивости линейных систем, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1945.

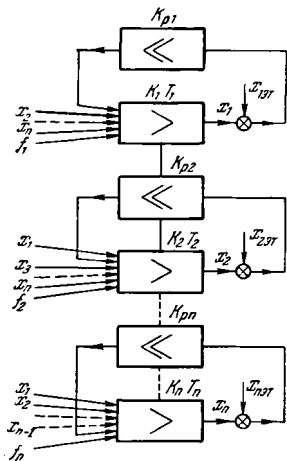


Рис. 155. К нахождению условий автономности.

2. Объект и регулятор по каждой регулируемой величине описываются дифференциальными уравнениями первого порядка

На рис. 156 представлена структурная схема для рассматриваемого случая. Объект и регулятор по каждой регулируемой величине описываются дифференциальными уравнениями первого порядка и на структурной схеме представляются аperiодическими звеньями с постоянными времени  $T_i$  и  $T'_i$  и коэффициентами усиления  $K_i$  и  $K_{ip}$ .

Процессы описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [(1 + T_1 p)(1 + T'_1) + K_1 K_{p1}] x_1 + K_1 (1 + T'_1 p) \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i = \\ = K_1 K_{p1} x_{1\text{э}т} + K_1 (1 + T'_1 p) f_1, \\ [(1 + T_2 p)(1 + T'_2) + K_2 K_{p2}] x_2 + K_2 (1 + T'_2 p) \sum_{i=1,3,\dots,n}^n \alpha_{2i} x_i = \\ = K_2 K_{p2} x_{2\text{э}т} + K_2 (1 + T'_2 p) f_2, \\ \dots \dots \dots \\ [(1 + T_n p)(1 + T'_n) + K_n K_{pn}] x_n + K_n (1 + T'_n p) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ni} x_i = \\ = K_n K_{pn} x_{n\text{э}т} + K_n (1 + T'_n p) f'_n. \end{aligned} \right\} (7.46)$$

При достаточно малых  $m_i = \frac{1}{K_{pi}}$  система уравнений (7.46) выражается в  $n$  уравнений нулевого порядка, не связанных между собой.

Для определения расположения  $2n$  корней, уходящих в бесконечность при  $m_i \rightarrow 0$ , нужно составить и проверить на устойчивость вспомогательное уравнение. Полагая, что все  $m_i$  имеют одинаковый порядок малости  $m$ , приводим характеристическое уравнение к следующему виду:

$$m^n F_{2n}(p) + m^{n-1} F_{2n-2}(p) + m^{n-2} F_{2n-4}(p) + \dots + F_0(p) = 0, \quad (7.47)$$

где индексы при  $F$  показывают степени полиномов  $F(p)$ .

Из (7.47) видно, что в данном случае вспомогательное уравнение будет второго рода. Оно составляется из суммы каждого двух старших членов полиномов  $F_i(p)$ .

Производя необходимые выкладки, получаем это уравнение в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n [(1 + T_i q)(1 + T'_i p) + K_i] = 0. \quad (7.48)$$

Так как  $T_i$ ,  $T_i'$  и  $K_i$  — всегда положительные вещественные числа, уравнение (7.48) удовлетворяет условиям устойчивости. Из (7.48) видно также, что переходный процесс в системе будет состоять из  $n$  не зависящих друг от друга переходных процессов, соответствующих независимому, автономному изменению  $n$  регулируемых величин.

Таким образом, в рассматриваемом более сложном случае, автономность протекания процессов отдельных регулируемых величин достигается увеличением коэффициентов усиления отдельных контуров.

Как и в пункте 1, мы здесь предполагали, что  $K_{pi}$  имеют один и тот же порядок величин, и принимали их равными друг другу.

Такое ограничение несущественно, так как выбор коэффициентов усиления регуляторов может быть сделан соответствующим образом. В тех же случаях, когда коэффициенты усиления регуляторов отличаются друг от друга, они все выражаются через один коэффициент усиления (как это делалось в главе II) и коэффициенты пропорциональности. В остальном исследование проводится аналогичным образом, т. е. составляется вспомогательное уравнение, коэффициенты которого зависят и от введенных коэффициентов пропорциональности. Затем это уравнение исследуется на устойчивость.

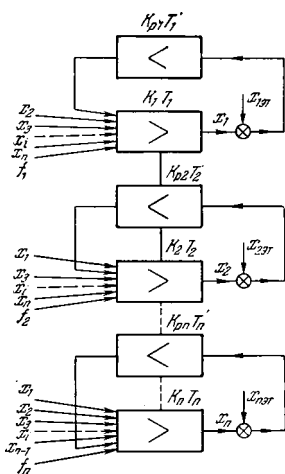


Рис. 156. Автономность при инерционном регуляторе.

Не повторяя элементарных выкладок, заметим, что сделанные выше выводы об автономности, получаемой за счет увеличения коэффициентов усиления, будут справедливы и для случая, когда регуляторы структурно представляются интегрирующими звеньями.

### 3. Автономность при введении идеальных производных

Рассмотрим общий случай, когда объект регулирования по каждой регулируемой величине описывается дифференциальным уравнением  $i$ -го порядка, а регулятор без стабилизирующих устройств описывается дифференциальным уравнением  $j$ -го порядка.

Для обеспечения устойчивости при больших коэффициентах усиления в каждую отдельную систему согласно ранее полученным правилам (см. главы II и III) вводятся  $n-2$  производных ( $n=i+j$ ).

Обозначим:  $D_i(p)$  — собственный оператор объекта регулирования по  $i$ -й регулируемой величине,  $M_i(p)$  — собственный оператор

регулятора по  $i$ -й регулируемой величине,  $K_{pi}$  — коэффициент усиления регулятора и  $K_i$  — коэффициент усиления объекта по  $i$ -й регулируемой величине.

Найдем систему уравнений, описывающих процессы в рассматриваемом случае.

Уравнение объекта по первой регулируемой величине запишется \*):

$$D_1(p) x_1 = K_1 \left( x'_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i + f_1 \right). \quad (7.49)$$

Уравнение регулятора

$$M_1(p) x'_1 = K_{p1} [x_{1\text{эт}} - x_1 - (a_0 p^{n_1-2} + a_1 p^{n_1-3} + \dots + a_{n_1-1} p) x_1]. \quad (7.50)$$

Подставляя в (7.49) значение  $x'_1$  из (7.50) и находя аналогичным образом уравнение других регулируемых величин, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} [D_1(p) M_1(p) + K_1 K_{p1} (a_{10} p^{n_1-2} + a_{11} p^{n_1-3} + \dots \\ \dots + a_{1, n_1-1} p) + K_{p1} K_1] x_1 + K_1 M_1(p) \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i = \\ = K_{p1} K_1 x_{1\text{эт}} + K_1 M_1(p) f_1, \\ \dots \\ [D_n(p) M_n(p) + K_n K_{pn} (a_{n0} p^{n_n-2} + a_{n1} p^{n_n-3} + \dots \\ \dots + a_{n, n_n-1} p) + K_{pn} K_n] x_n + K_n M_n(p) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ni} x_i = \\ = K_{pn} K_n x_{n\text{эт}} + K_n M_n(p) f_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= d_1 + \nu_1, \\ &\dots \dots \dots \\ n_n &= d_n + \nu_n. \end{aligned}$$

При достаточно больших  $K_{pi}$  каждое уравнение из системы (7.51) вырождается в не зависящее от других регулируемых величин уравнение. Так  $i$ -е уравнение при  $K_{pi} \rightarrow 0$  будет иметь вид

$$K_i [a_{i0} p^{n_i-2} + a_{i1} p^{n_i-3} + \dots + a_{i, n_i-1} p + K_i] x_i = K_i x_{i\text{эт}}. \quad (7.52)$$

Левая часть общего вырожденного уравнения будет состоять из произведения отдельных множителей, составляющих левые части вырожденных уравнений по отдельным регулируемым величинам.

\*) Естественно, что первой может быть любая из регулируемых величин.

Для устойчивости системы при  $m \rightarrow 0$  необходимо еще проверить на устойчивость вспомогательное уравнение второго рода. Оно также не зависит от коэффициентов связи  $\alpha_{ik}$ .

На основании проведенного исследования приходим к выводу, что в случае, когда для получения структур, устойчивых при любом сколь угодно большом коэффициенте усиления, используются идеальные производные, автономность является динамическим свойством этих систем; при этом степень автономности будет тем большей, чем больше соответствующий коэффициент усиления. Что касается качества регулирования, то, как это видно из (7.52), вырожденное уравнение, которое определяет качество, в полной мере зависит от параметров стабилизирующих устройств. Последние могут выби-

раться так, чтобы обеспечить нужное качество.

В пп. 1, 2 и 3 мы рассмотрели структуры, в которых автономность является их динамическим свойством.

Далее будут рассмотрены структуры, где одно увеличение коэффициента усиления не обеспечивает автономности, и для достижения автономности в систему необходимо вносить дополнительные изменения.

#### 4. Изодромные системы

Изодромными называются системы, в которых в качестве стабилизирующего устройства используется так называемый изодром.

Передачная функция механического изодрома имеет вид (если пренебречь влиянием массы поршня изодрома)

$$\frac{x_{\text{вых}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{\tau p}{1 + \tau p}. \quad (7.53)$$

Такой же вид передаточной функции имеют широко применяемые в практике регулирования стабилизирующие трансформаторы, цепочки RC и др.

На рис. 157 представлена структурная схема системы для рассматриваемого случая: изодромная обратная связь охватывает регулятор, который представляется одним аperiodическим звеном. Имея в виду обозначения, приведенные на рис. 157, получаем

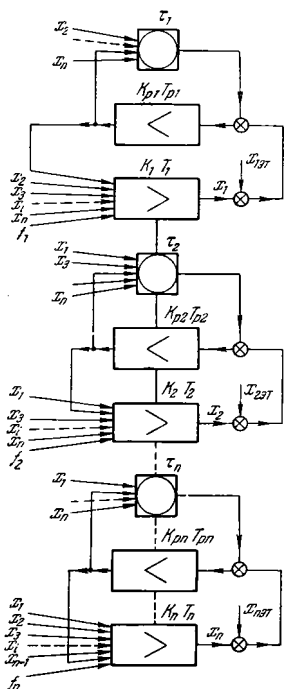


Рис. 157. Автономность при охвате всего регулятора стабилизирующим устройством.

Регулятор, который представляется одним аperiodическим звеном. Имея в виду обозначения, приведенные на рис. 157, получаем



Как видно из (7.56), в каждое уравнение входят члены, определяющие взаимное влияние отдельных регулируемых величин. Отсюда ясно, что получить автономность только за счет большого коэффициента усиления не представляется возможным.

Для обеспечения автономности введем следующие изменения в структуру системы.

На вход изолдра каждого из регуляторов дополнительно подадим сумму сигналов от всех переменных, кроме собственной. В этом случае получим следующие уравнения, описывающие поведение системы.

Уравнение объекта для первой переменной (см. рис. 157)

$$(1 + T_1 p) x_1 = K_1 \left[ x'_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i + f_1 \right]. \quad (7.57)$$

Уравнение регулятора

$$(1 + T_{p1} p) x'_1 = K_{p1} \left[ x_{1 \text{ эт}} - x_1 - \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} x'_1 - \sum_{i=2}^n \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} \alpha_{1i} x_i \right]. \quad (7.58)$$

Подставляя  $x'_1$  из (7.58) в (7.57), получаем:

$$\begin{aligned} & \{ (1 + T_1 p) [(1 + T_{p1} p) (1 + \tau_1 p) + K_{p1} \tau_1 p] + K_1 K_{p1} (1 + \tau_1 p) \} x_1 - \\ & - K_1 [(1 + T_{p1} p) (1 + \tau_1 p) + K_{p1} \tau_1 p] \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i + K_1 K_{p1} \tau_1 p \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i = \\ & = K_1 K_{p1} (1 + \tau_1 p) x_{1 \text{ эт}} + K_1 f_1 [(1 + T_{p1} p) (1 + \tau_1 p) + K_{p1} \tau_1 p]. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Аналогичные уравнения получим для всех других переменных. Так, для  $k$ -й переменной имеем:

$$\begin{aligned} & \{ (1 + T_k p) [(1 + T_{pk} p) (1 + \tau_k p) + K_{pk} \tau_k p] + K_k K_{pk} (1 + \tau_k p) \} x_k - \\ & - K_k [(1 + T_{pk} p) (1 + \tau_k p) + K_{pk} \tau_k p] \sum_{i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n} \alpha_{ki} x_i + \\ & + K_k K_{pk} \tau_k p \sum_{i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n} \alpha_{ki} x_i = K_k K_{pk} (1 + \tau_k p) x_{k \text{ эт}} + \\ & + K_k f_k [(1 + T_{pk} p) (1 + \tau_k p) + K_{pk} \tau_k p]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Поделив каждое из уравнений (7.60) на соответствующие  $K_{pi}$  и полагая  $m_i = \frac{1}{K_{pi}}$  достаточно малым числом, получим систему независимых вырожденных уравнений для каждой регулируемой величины.

Для  $k$ -й регулируемой величины уравнение запишется:

$$[(1 + T_k p) \tau_k p + K_k (1 + \tau_k p)] x_k = K_k (1 + \tau_k p) x_{k \text{ эт}} + K_k \tau_k p f_k. \quad (7.61)$$

Это уравнение описывает автономный процесс в  $k$ -м контуре регулирования. Процесс здесь не зависит от других регулируемых величин.

## 5. Автономность в общем случае

В заключение настоящего параграфа рассмотрим возможность получения автономности в общем случае системы с  $n$  взаимосвязанными величинами, построенной так, что устойчивость ее сохраняется при неограниченном увеличении коэффициентов усиления по всем регулируемым величинам; при этом для стабилизации в каждую цепь регулирования вводится стабилизирующее устройство с передаточной

функцией  $\frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)}$ , которое охваты-

вает часть контура регулятора с собственным оператором  $M_{i \text{ охв}}(p)$  (рис. 157).

Введем следующие обозначения:  $D_i(p)$  — собственный оператор объекта по  $i$ -й регулируемой величине;  $M_{i \text{ охв}}(p)$  — собственный оператор части контура, охваченной стабилизирующим устройством;  $M_{i \text{ вып}}(p)$  — собственный оператор части контура регулятора, не охваченной стабилизирующим устройством;  $K_i$  — коэффициент усиления объекта по  $i$ -й регулируемой величине;  $K_{i \text{ охв}}$  — коэффициент усиления части контура регулирования, охваченной стабилизирующим устройством;  $K_{i \text{ вып}}$  — коэффициент усиления неохваченной части контура регулирования. Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае, так же как и в пункте 4, получить автономность только за счет увеличения коэффициентов усиления невозможно.

Доказательство этого положения мы приводить здесь не будем; оно, в частности, вытекает из результатов пункта 4, где использовано стабилизирующее устройство с передаточной функцией, являющейся частным случаем функции  $\frac{F_n(p)}{F_m(p)}$ .

Подадим на вход каждого стабилизирующего устройства дополнительно сумму воздействий  $\sum_{k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \alpha_{ik} x_k$  так, как это показано на рис. 158.

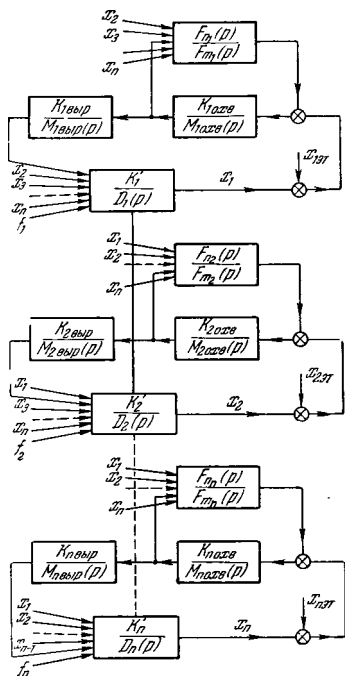


Рис. 158. Схема для получения автономности в общем случае.



Процессы в изучаемом случае опишутся следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \{D_i(p) M_{i \text{ вып}}(p) [M_{i \text{ охв}}(p) F_{m_i}(p) + K_{i \text{ охв}} F_{n_i}(p)] + \\ & + K_{i \text{ охв}} K_{i \text{ вып}} K_i F_{m_i}(p)\} x_i = K_i K_{i \text{ охв}} K_{i \text{ вып}} F_{m_i}(p) x_{i \text{ эт}} - \\ & - K_i K_{i \text{ вып}} K_{i \text{ охв}} F_{n_i}(p) \sum_{k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \alpha_{ik} x_k + \\ & + K_i M_{i \text{ вып}}(p) M_{i \text{ охв}}(p) F_{m_i}(p) + K_i K_{i \text{ охв}} F_{n_i}(p) \sum_{k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \alpha_{ik} x_k + \\ & + K_i M_{i \text{ вып}}(p) [M_{i \text{ охв}}(p) F_{m_i}(p) + K_{i \text{ охв}} F_{n_i}(p)] f_1, \quad (7.62) \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Как уже указывалось выше, вид передаточной функции стабилизирующего устройства и метод его включения выбираются так, чтобы система оставалась устойчивой при неограниченном увеличении коэффициентов усиления. Поэтому в каждом контуре можно неограниченно увеличивать  $K_{i \text{ охв}}$ . Вся система будет при этом устойчивой, если вырожденное и вспомогательное уравнения, каждое в отдельности, будут удовлетворять условиям устойчивости.

Предположим, что  $K_{i \text{ охв}}$  — достаточно большие числа. Поделив каждое из уравнений (7.62) на  $K_{i \text{ охв}}$ , найдем, что при достаточно малом  $m_i = \frac{1}{K_{i \text{ охв}}}$  и  $K_{i \text{ вып}} = 1$  система распадается на  $n$  независимых уравнений, каждое из которых описывает процесс регулирования одной из регулируемых величин.

На основании полученного результата становится ясно, что при выполнении ранее полученных условий автономности расчет процесса регулирования и выбор основных параметров каждого контура могут производиться независимо, известными методами теории регулирования для систем с одной регулируемой величиной.

Следует подчеркнуть, что точность получаемых результатов будет определяться порядком малости величины  $m$ . Чем меньше  $m$ , т. е. чем больше  $K_{i \text{ охв}}$ , тем более точными будут получаемые результаты. Практически, если другие параметры системы известны, то величина  $K_{i \text{ охв}}$  выбирается без труда методами, изложенными в главе VI. Не обязательно, чтобы  $K_{i \text{ вып}}$  точно равнялось единице. Разность  $K_{i \text{ вып}} - 1 = m$  должна иметь порядок малости  $m$ .

На основании проведенных в этом параграфе исследований можно сделать следующие выводы.

а) Системы автоматического регулирования со многими регулируемыми величинами, принадлежащие классу систем, устойчивых при любом (в том числе сколь угодно большом) коэффициенте усиления, могут быть сделаны автономными по отношению к каждой регулируемой величине. При этом в ряде случаев (пункты 1, 2, 3) автономность при достаточно больших коэффициентах усиления является

динамическим свойством этих систем. В общем случае автономность достигается одновременно увеличением соответствующих коэффициентов усиления  $K_{i \text{ охв}}$  и введением на вход стабилизирующих устройств сумм воздействий от всех несобственных регулируемых величин с коэффициентами пропорциональности  $\alpha_{ik}$ .

б) Для проектирования и выбора параметров таких систем могут быть в полной мере использованы все методы теории регулирования систем с одной регулируемой величиной.

### § 7.8. Автономность многосвязных систем регулирования при наличии элементов с запаздыванием

При рассмотрении условий устойчивости систем многосвязного регулирования, содержащих элементы с запаздыванием, предполагалось, что в течение времени от  $t = -\tau$  до  $t = 0$  переменная, которая подается на элемент с запаздыванием, равна нулю. Такое предположение вполне допустимо, так как устойчивость не зависит от начальных условий.

Полагать начальные значения нулевыми при рассмотрении условий автономности, если в системе имеются элементы с запаздыванием, вообще говоря, не представляется возможным. Поэтому необходимо составить уравнения системы для случая ненулевых начальных условий.

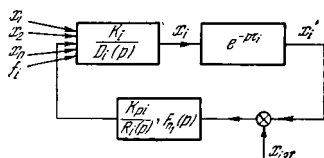


Рис. 159. Схема при введении идеальных производных.

Рассмотрим следующие случаи: а) когда устойчивость при больших коэффициентах усиления достигается введением в систему идеальных производных и б) когда устойчивость при больших коэффициентах усиления достигается введением реальных производных.

Составим уравнение для  $i$ -го контура в случае а). На рис. 159 представлена структурная схема для рассматриваемого случая.

Уравнение объекта без учета запаздывания запишется:

$$D_i(p) x_i = K_i [Y_i + \sum \alpha_{ik} x_k + f_i]. \quad (7.63)$$

Уравнения элемента с запаздыванием

$$x_i' = x_i(t - \tau). \quad (7.64)$$

Уравнение регулятора

$$R_i(p) Y_i = K_{pi} [x_{i,ст} - x_i(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-3} p + 1)], \quad (7.65)$$

где  $a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-3} p = F(p)$ , а  $n = D + R$  — общий порядок дифференциального уравнения, описывающего процессы в рассматриваемом контуре.

Преобразуя уравнения (7.63), (7.64), (7.65) по Лапласу, получим соответственно:

преобразованное уравнение объекта

$$D_i(p) x_i = K'_i [Y_i(p) + \sum \alpha_{ik} x_k(p) + f_i(p)] + D_{\pi i} [P, x_i(0), x'_i(0) \dots], \quad (7.66)$$

преобразованное уравнение элемента с запаздыванием

$$x'_i(p) = e^{-\tau_i p} x_i(p) + \int_{-\tau_i}^0 x'_i e^{-pt} dt = e^{-\tau_i p} x_i(p) + \psi(p), \quad (7.67)$$

где  $\psi_i(p) = \int_{-\tau_i}^0 x'_i e^{-pt} dt$  учитывает начальные условия за время от  $t = -\tau_i$  до  $t = 0$ .

Преобразование уравнения регулятора имеет вид

$$R_i(p) Y_i(p) = K_{pi} [x_{i\text{эт}} - x_i(p) (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-3} p + 1)] + R_{\pi i} [P, Y_i(0), Y'_i(0) \dots]. \quad (7.68)$$

В формулах (7.66) и (7.68)  $D_{\pi i}$  и  $R_{\pi i}$  введены для учета начальных условий по  $x_i$  и  $y_i$  соответственно. Решая уравнения (7.66), (7.67), (7.68) относительно изображения регулируемого параметра  $x_i(p)$ , получаем:

$$\begin{aligned} [D_i(p) R_i(p) e^{\tau_i p} + K_i K_{pi} (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-3} p + 1)] x_i(p) + \\ + K_i R_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k(p) e^{\tau_i p} = \\ = \{K_i K_{pi} x_{i\text{эт}} + K_i \psi(p) (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + 1) + \\ + K_i R_{\pi i} [P, Y_i(0), Y'_i(0) \dots] + \\ + K_i R_i(p) f_i(p) + R_i(p) D_{\pi i} [P, x_i(0), x'_i(0) \dots]\} e^{\tau_i p}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Поделив уравнение (7.69) на  $K_{pi}$  и полагая  $K_{pi}$  достаточно большим числом, получим:

$$\begin{aligned} [m D_i(p) R_i(p) e^{\tau_i p} + K_i (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + 1)] x_i(p) + \\ + m K_i R_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k(p) e^{\tau_i p} = \{K_i x_{i\text{эт}} + m K_i \psi(p) (a_0 p^{n-2} + \\ + a_1 p^{n-3} + \dots + 1) + m K_i R_{\pi i} [P, Y_i(0), Y'_i(0) \dots] + \\ + m K_i R_i(p) f_i(p) + m R_i(p) D_{\pi i} [P, x_i(0), x'_i(0) \dots]\} e^{\tau_i p} \dots, \end{aligned} \quad (7.70)$$

где  $m = \frac{1}{K_{pi}}$ .

Прежде всего выясним, как сказываются начальные условия. Будем предполагать, что на отрезке времени  $-\tau \div 0$  функция  $x_i$  и ее производные имеют конечные значения; кроме того, предположим, что для момента  $t=0$  функция  $Y(0)$  и ее производные — также конечные величины. Тогда, как это видно из уравнения (7.70), чем больше

будет  $K_{pi}$ , тем меньше будет влияние начальных значений  $x$  и  $u$  и их производных на переходный режим, и в пределе их влияние равно нулю. Однако особенность рассматриваемого способа стабилизации (введение идеальных производных на вход всей системы), как это видно из уравнения (7.70), состоит в том, что в пределе при  $m \rightarrow 0$  уравнение перестает зависеть от запаздывания, в нем пропадает главный член, и система становится неустойчивой. Следовательно, использование идеальных производных, подаваемых на вход всей системы для достижения автономности путем увеличения коэффициента усиления, невозможно. Это можно было бы предположить и без доказательств, так как введение на вход системы идеальных производных равносильно охвату всей системы стабилизирующим устройством с передаточной функцией

$$a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-3} p.$$

Такая система не может быть устойчивой при  $K_{pi} \rightarrow \infty$ , так как вместе с другими стабилизирующее устройство охватывает также элемент с запаздыванием.

Существенно, однако, то, что начальные значения не могут внести какие-либо изменения в основные свойства системы, если эти значения конечные. В дальнейшем эти начальные условия не учитываются.

Рассмотрим теперь случай, когда идеальная производная охватывает часть контура так, что предельная система остается устойчивой при неограниченном увеличении коэффициента усиления охваченной части контура. Для  $i$ -го контура имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} [D_i(p) N_i(p) Q_i(p) e^{\tau_i p} + K_{i \text{ охв}} D_i(p) N_i(p) F_{n_i}(p) e^{\tau_i p} + K_{i \text{ общ}}] x_i + \\ + K_i \{N_i(p) Q_i(p) + K_{i \text{ охв}} N_i(p) F_{n_i}(p)\} \sum \alpha_{ik} x_k = \\ = [N_i(p) Q_i(p) + K_i K_{i \text{ охв}} N_i(p) F_{n_i}(p)] x_{i \text{ эт}} + \\ + [N_i(p) Q_i(p) + K_{i \text{ охв}} N_i(p) F_{n_i}(p)] f_i, \dots, \quad (7.71) \end{aligned}$$

где  $K_{i \text{ общ}} = K_i K_{Ni} K_{i \text{ охв}}$ . Обозначения приведены на рис. 160.

Порядок наивысшей идеальной производной, входящей в выражение для  $F_{n_i}(p)$ , выбирается так, чтобы обеспечить устойчивость при неограниченном увеличении  $K_{i \text{ охв}}$ .

Поделим уравнение (7.71) на  $K_{i \text{ охв}}$  и положим, что  $K_{i \text{ охв}} \rightarrow \infty$ . Вырожденное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} [D_i(p) N_i(p) F_{n_i}(p) e^{\tau_i p} + K_{i \text{ общ}}] x_i + \\ + K_i N_i(p) F_{n_i}(p) \sum \alpha_{ik} x_k = K_{i \text{ общ}} x_{i \text{ эт}} + N_i(p) F_{n_i}(p) f_i \dots \quad (7.72) \end{aligned}$$

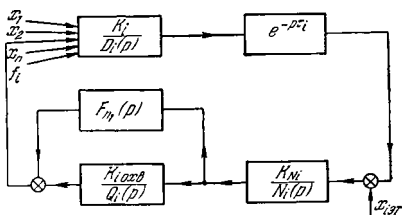


Рис. 160. Введение идеальных производных вокруг части контура регулятора.

Как ясно из рассмотрения уравнения (7.72), получить автономность только за счет увеличения коэффициента усиления  $K_{i \text{ охв}}$  не представляется возможным, ибо вырожденное уравнение содержит член

$$N_i(p) F_{n_i}(p) \sum_{k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \alpha_{ik} x_k,$$

и процесс в такой системе будет зависеть от влияния всех прочих регулируемых величин.

Для получения автономности поступим так же, как это было сделано в случае, когда система не содержит элемента с запаздыванием (§ 7.7). Подадим на вход стабилизирующих устройств сигналы следующего вида:

$$\frac{1}{K'_1} \sum_{i=1, 2, \dots, i, -1, i+1, \dots, n} \alpha_{ik} x_k \dots \quad (7.73)$$

Система уравнений для первого контура в этом случае запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} [D_1(p) N_1(p) Q_1(p) e^{\tau_1 p} + K_{1 \text{ охв}} D_1(p) N_1(p) F_{n_1}(p) e^{\tau_1 p} + K_{1 \text{ обш}}] x_1 + \\ + [N_1(p) Q_1(p) + K_{1 \text{ охв}} N_1(p) F_{n_1}(p)] \sum_{i=2}^n \alpha_{1k} x_k - \\ - K_{1 \text{ охв}} N_1(p) F_{n_1}(p) \sum_{i=2}^n \alpha_{1k} x_k = K'_1 [N_1(p) Q_1(p) + \\ + K_{1 \text{ охв}} N_1(p) F_{n_1}(p)] x_{1 \text{ эт}} + [N_1(p) Q_1(p) + K_{1 \text{ охв}} N_1(p) F_{n_1}(p)] f_1. \quad (7.74) \end{aligned}$$

Аналогично записываются уравнения для схем других контуров; необходимо только вместо индекса 1 поставить индекс соответствующего контура, а в сумме  $\sum_{i=2}^n$  этот индекс исключить.

Поделим уравнение (7.74) на  $K_{1 \text{ охв}}$  и положим, что  $K_{1 \text{ охв}} \rightarrow \infty$ . Тогда вырожденное уравнение запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} [D_1(p) N_1(p) F_{n_1}(p) e^{\tau_1 p} + K_{1 \text{ вып}}] x_1 = \\ = K'_1 N_1(p) F_{n_1}(p) x_{1 \text{ эт}} + N_1(p) F_{n_1}(p) f_1. \quad (7.75) \end{aligned}$$

Это уравнение не зависит от  $\alpha_{ik} x_k$ .

Таким образом, заключаем, что введение на вход стабилизирующих устройств дополнительного сигнала типа (7.73) и увеличение коэффициента усиления  $K_{i \text{ охв}}$  обеспечивают автономное протекание процессов во всех отдельных контурах многосвязной системы регулирования при наличии в них элементов с запаздыванием. При этом, естественно, должны выполняться условия, обеспечивающие устойчивость системы при неограниченном увеличении коэффициентов усиления.

Рассмотрим в заключение случай, когда устойчивость при неограниченном увеличении  $K_{i \text{ охв}}$  обеспечивается введением в систему реальных стабилизирующих устройств.

Выражение для передаточной функции стабилизирующего устройства  $i$ -го контура имеет вид

$$\frac{F_{n_i}(p)}{F_{m_i}(p)}.$$

Выкладки, аналогичные проделанным выше, показывают, что автономность при неограниченном увеличении коэффициента усиления охваченной части  $i$ -го контура достигается для этого контура, если на вход стабилизирующего звена ввести дополнительно сигнал типа

$$\frac{1}{K_i} \sum \alpha_{ik} x_k, \text{ где индекс } k \text{ принимает все значения, кроме } i.$$

Таким образом, полученные ранее (§ 7.7) условия автономности распространены на случай, когда многосвязная система содержит элементы с запаздыванием. При этом, естественно, элементы с запаздыванием могут быть во всех контурах, а также только в некоторых из них.

### § 7.9. Зависимость характера связи от структуры системы многосвязного регулирования

В настоящей работе рассматривается такое многосвязное регулирование, в котором отдельные регулируемые величины связаны между собой через объект регулирования. Однако, как это будет видно из дальнейшего, характер связи в общем случае зависит не только от свойств объекта регулирования, но существенно зависит от структуры системы регулирования. Для того чтобы установить зависимость характера связи от структуры, разделим системы регулирования на следующие структурные группы: а) системы по каждой регулируемой величине представляются одноконтурными цепочками; б) системы по каждой регулируемой величине представляются одноконтурными цепочками, но дополнительно на вход вводятся от  $(n - 2)$ -й до первой производной включительно, так что устойчивость может обеспечиваться при неограниченном увеличении их коэффициентов усиления; в) по каждой регулируемой величине система представляется многоконтурными структурами. Рассмотрим каждую из указанных групп.

**а. Первая группа.** На рис. 161 приведена схема для  $i$ -й регулируемой величины. Такая структурная схема описывается следующим уравнением, представленным в операторном виде:

$$[D_i(p) R_i(p) + K_i K_p i] x_i + K_i R_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k = K_i K_p i x_{i \text{ эт}} + K_i R_i(p) f_i \dots, \quad (7.76)$$

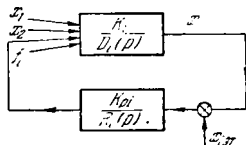


Рис. 161.  $i$ -я одноконтурная часть многосвязной системы.

где  $D_i(p)$  и  $K_i$  — собственный оператор и коэффициент усиления объекта по  $i$ -й регулируемой величине;  $R_i(p)$  и  $K_{pi}$  — то же для регулятора;  $\alpha_{ik}$  — коэффициент связи между  $i$ -й и  $k$ -й величинами, определяемый свойствами объекта;  $x_{i \text{ эт}}$  — эталонное значение  $i$ -й регулируемой величины;  $f_i$  — нагрузка в  $i$ -м контуре.

Из уравнения (7.76) видно, что характер связи между отдельными регулируемыми величинами зависит не только от свойств объекта (коэффициенты  $\alpha_{ik}$  и  $K_i$ ), но и от основных свойств регулятора. Для удобства разделим (7.76) на  $K_{pi}$ :

$$\left[ \frac{1}{K_{pi}} D_i(p) R_i(p) + K_i \right] x_i + \frac{K_i}{K_{pi}} R_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k = K_i x_{i \text{ эт}} + \frac{K_i}{K_{pi}} R_i(p) f_i \dots \quad (7.77)$$

Степень связности будет тем больше, чем больше  $K_i$ , и тем меньше, чем больше коэффициент усиления регулятора  $K_{pi}$ ; кроме того, характер связи в динамике зависит от  $R_i(p)$ . Из уравнения (7.77) также видно, что взаимное влияние между регулируемыми величинами можно свести к сколь угодно малой величине соответствующим увеличением коэффициента усиления  $K_{pi}$  регулятора. Это, однако, возможно достигнуть, если при этом не нарушается устойчивость. В рассматриваемой группе структур, если степень  $D_i(p) R_i(p)$  больше двух, критический коэффициент усиления  $K_{pi \text{ кр}}$  имеет конечное значение, чем и определяется нижняя граница степени связности.

**б. Вторая группа.** Для того чтобы иметь возможность неограниченно увеличивать коэффициент усиления  $K_{pi}$ , не нарушая при этом устойчивости, введем на вход системы регулирования от  $(n-2)$ -й до первой производной, где  $n$  — степень оператора  $D_i(p) R_i(p)$ . Уравнение для  $i$ -й регулируемой величины в этом случае запишется:

$$[D_i(p) R_i(p) + K_{pi} K_i (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + 1)] x_i + K_i R_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k = K_i K_{pi} x_{i \text{ эт}} + K_i R_i(p) f_i \dots \quad (7.78)$$

Поделив (7.78) на  $K_{pi}$ , получим:

$$\left[ \frac{1}{K_{pi}} D_i(p) R_i(p) + K_i (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + 1) \right] x_i + \frac{K_i}{K_{pi}} R_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k = K_i x_{i \text{ эт}} + \frac{K_i}{K_{pi}} R_i(p) f_i.$$

По характеру связи рассматриваемый случай не отличается от рассмотренного в пункте а. Существенно, однако, то, что здесь коэффициент усиления  $K_{pi}$  можно неограниченно увеличивать, не опасаясь нарушения устойчивости. Следовательно, степень связности может быть доведена до нуля.

**в. Третья группа.** Рассмотрим, наконец, случай, когда системы по отдельным регулируемым величинам являются многоконтурными

со стабилизирующими устройствами общего типа. На рис. 162 представлена схема для  $i$ -й регулируемой величины. Уравнение в данном случае запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \{[Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_{i \text{ oxb}} F_{n_i}(p)] N_i(p) D_i(p) + K_{i \text{ o6w}} F_{m_i}(p)\} x_i + \\ & + K_i \sum \alpha_{ik} x_k [Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_{i \text{ oxb}} F_{n_i}(p)] N_i(p) = \\ & = K_{i \text{ o6w}} F_{m_i}(p) x_{i \text{ 3T}} + K_i [Q_i(p) F_{m_i}(p) + K_{i \text{ oxb}} F_{n_i}(p)] N_i(p) f_i, \quad (7.79) \end{aligned}$$

где  $K_{i \text{ общ}} = K_i K_{N_i} K_{i \text{ охв}}$ , где для  $i$ -го контура обозначены:  $D_i(p)$  — собственный оператор объекта;  $Q_i(p)$  — собственный оператор части контура регулятора, охватываемой стабилизирующим устройством;  $N_i(p)$  — собственный оператор части контура регулятора, не охватываемой стабилизирующим устройством;  $F_{n_i}(p)$  и  $F_{m_i}(p)$  — соответственно операторы числителя и знаменателя передаточной функции стабилизирующего устройства;  $K_{i \text{ охв}}$  — коэффициент усиления части контура, охваченной стабилизирующим устройством;  $K_i$  — коэффициент усиления объекта;  $K_{N_i}$  — коэффициент усиления части контура, не охваченной стабилизирующим устройством.

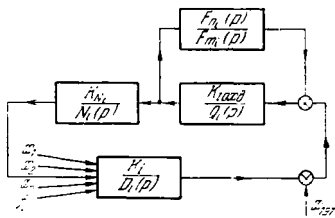


Рис. 162. 1-я часть многосвязной системы со стабилизацией.

Для удобства дальнейших исследований приведем (7.79) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \frac{1}{K_{i \text{ oxb}}} Q_i(p) F_{m_i}(p) + F_{n_i}(p) \right] N_i(p) D_i(p) + K_{N_i} K_i F_{m_i}(p) \right\} x_i + \\ & + \frac{K_i}{K_{i \text{ oxb}}} Q_i(p) N_i(p) F_{m_i}(p) \sum \alpha_{ik} x_k + K_i F_{n_i}(p) N_i(p) \sum \alpha_{ik} x_k = \\ & = K_i K_{N_i} F_{m_i}(p) x_{i \text{ 3T}} + \frac{K_i}{K_{i \text{ oxb}}} [Q_i(p) F_{m_i}(p) + \\ & + K_{i \text{ oxb}} F_{n_i}(p)] N_i(p) f_i. \quad (7.80) \end{aligned}$$

Как видно из уравнения (7.80), характер связи в зависимости от структуры в данном общем случае определяется двумя составляющими уравнения (7.80), содержащими суммы  $\sum \alpha_{ik} x_k$ . В первой составляющей коэффициент связи прямо пропорционален коэффициенту усиления объекта по  $i$ -й регулируемой величине, зависит от собственного оператора регулятора и оператора знаменателя передаточной функции стабилизирующего устройства и обратно пропорционален коэффициенту усиления части контура, которая охватывается стабилизирующим устройством.



Во второй составляющей коэффициент связи пропорционален коэффициенту усиления объекта и зависит от собственного оператора части регулятора, не охваченной стабилизирующим устройством, и оператора числителя передаточной функции стабилизирующего устройства. В системах, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициента усиления, первая составляющая может быть сведена к минимуму увеличением коэффициента усиления  $K_{i_{\text{охв}}}$ . Что касается второй составляющей, то она может оказать влияние на процесс только в динамике, так как в установившемся режиме  $F_{n_i}(p)_{p=0} = 0$ .

Аналогичная картина будет иметь место, если в качестве стабилизирующих устройств будут применены идеальные производные, охватывающие только часть контура регулирования. Соответствующее уравнение может быть получено из (7.80), если положить в нем  $F_{m_i}(p) = 1$ . Таким образом, установлено, что существенное влияние на характер взаимосвязи между регулируемыми величинами оказывают структуры систем регулирования по каждой из регулируемых величин, хотя регуляторы не связаны между собой.

Проведенное исследование позволяет сделать следующие важные выводы о динамических свойствах рассматриваемых систем, о влиянии нелинейностей и о наиболее целесообразных структурах многосвязного регулирования.

а) Во всех рассмотренных случаях степень взаимосвязности была прямо пропорциональной коэффициенту усиления объекта и обратно пропорциональной коэффициенту усиления регулятора или коэффициенту усиления части контура регулятора. Отсюда следует, что для случаев, когда желательно ослабить связь между регулируемыми величинами, необходимо увеличивать коэффициент усиления регулятора. Нелинейности, которые присущи рассматриваемым здесь объектам регулирования, обычно обусловлены ограниченностью мощности (другие виды нелинейностей, например, силы сухого трения, мы здесь не рассматриваем; их влияние было рассмотрено в главе V).

Учет этих нелинейностей сводится к учету изменения величины коэффициента усиления объекта в зависимости от того, на какой части характеристики он работает. Наибольшее значение коэффициент усиления имеет, когда объект работает в условиях, близких к холостому ходу. Чем больше объект нагружен, тем сильнее уменьшается его коэффициент усиления. Таким образом, если выбрать наибольшее возможное значение  $K_i$  и по этому значению определять степень связности, то в действительных условиях в результате влияния нелинейности степень связности может быть только уменьшена.

б) Допустим, что по каждой регулируемой величине, без учета взаимосвязности, осуществляется оптимальное регулирование. Из самого понятия оптимальности вытекает, что лучшим процесс сделать невозможно из-за свойств неизменяемой части системы (обычно к неизменяемой части относится объект регулирования). Кроме того,

оптимальная система содержит необходимое и достаточное число элементов, обеспечивающих оптимум. Очевидно, что в этом случае наличие взаимосвязности может только ухудшить динамические свойства системы. Отсюда следует, что для многосвязного регулирования, где системы по каждой регулируемой величине осуществляют оптимальное регулирование, автономность является необходимым условием оптимальности.

в) В главе V было показано, что устойчивость в малом систем оптимального регулирования может быть достигнута, если их структуры (линейное приближение) принадлежат к классу устойчивых при неограниченном увеличении коэффициентов усиления. Следовательно, для получения оптимальности в каждом контуре регулирования, без учета взаимосвязности, необходимо, чтобы структуры этих систем принадлежали к классу устойчивых при больших коэффициентах усиления.

Автономность, в данном случае тождественная с оптимальностью, будет достигнута увеличением соответствующих коэффициентов усиления и введением дополнительных воздействий на входы стабилизирующих устройств (см. § 7.7 настоящей главы).

### § 7.10. Примеры

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим систему автоматического регулирования двух синхронных генераторов, работающих параллельно через длинную линию с нагрузкой. Регулируемыми величинами являются напряжение электрического тока, скорость вращения и частота. По условиям работы регулирование скорости осуществляется с помощью статического регулятора; при этом статической характеристикой регулирования по скорости определяется распределение активных нагрузок между параллельно работающими генераторами. По этим причинам будем считать статизм по скорости (или соответственно коэффициент усиления контура скорости) заданным числом. Частота регулируется астатически с помощью вторичного регулятора.

Существенное значение для поведения всей энергосистемы с точки зрения устойчивости (статической и динамической) имеет регулирование напряжения.

Важными здесь являются как скорость протекания переходных процессов, так и точность поддержания напряжения. По этой причине основное внимание уделим выбору закона регулирования напряжения и определению параметров регулятора. Системы регулирования скорости и частоты будем считать заданными. При исследовании будем учитывать взаимовлияние отдельных регулируемых величин, определяемое свойствами объекта. На рис. 163 представлена блок-схема регулирования. Вся система состоит из двух синхронных генераторов, соединенных длинной линией с нагрузкой. На генераторе 1

регулируется только скорость, на генераторе 2 регулируются скорость, частота и напряжение.

Процессы в линеаризованной системе описываются следующей системой дифференциальных уравнений \*):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial \delta_{12}} \Delta \delta_{12} + \left( I_1 p + \frac{\partial M_1}{\partial \omega_0} \right) \Delta \omega_1 + \frac{\partial M_1}{\partial E_{2d}} \Delta E_{2d} &= \Delta \mu_1, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \delta_{12}} \Delta \delta_{12} + \left( I_2 p + \frac{\partial M_2}{\partial \omega_0} \right) \Delta \omega_2 + \frac{\partial M_2}{\partial E_{2d}} \Delta E_{2d} &= \Delta \mu_2 + \Delta M_{2B}, \\ p \delta_{12} &= \Delta \omega_1 - \Delta \omega_2, \\ p(T_2 p + 1)(T_c p + 1) \Delta \omega_2 &= [p(T_c p + 1)(K_d c p + 1) + K_2 K'_c] \Delta \mu_2, \\ (1 + T_1 p) \Delta \omega_1 &= K_1 \Delta \mu_1, \\ \Delta E_{2de} &= \Delta E_{2d} + T_{2d} \frac{d \Delta E'_{2d}}{dt}, \\ (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \Delta E_{2de} &= K \Delta U_2, \\ \Delta E'_{2d} &= A \Delta \delta_{12} + B \Delta E_{2d}, \\ \Delta U_2 &= C \Delta \delta_{12} + D \Delta E_{2d}. \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

В этих уравнениях обозначено:  $I_1, I_2$  — приведенные моменты инерции первой и второй машин;  $\Delta \omega_1, \Delta \omega_2$  — изменения частоты машин;  $\Delta M_{2B}$  — момент, вызывающий переходный процесс;  $E_{2d}$  — э. д. с.

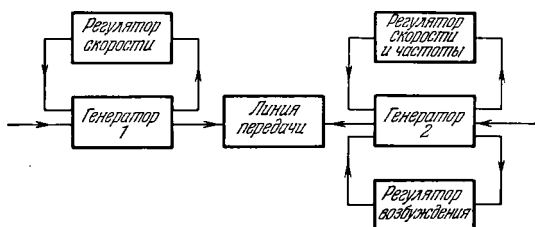


Рис. 163. Блок-схема регулирования двух синхронных генераторов, работающих на общую нагрузку.

холостого хода генератора 2;  $E_{2de}$  — напряжение возбуждения генератора;  $E'_{2d}$  — э. д. с. за переходным реактансом генератора 2;  $T_{2d}$  — постоянная времени цепи возбуждения генератора 2;  $T_c$  — постоянная времени регулятора частоты;  $T_2$  — постоянная времени регулятора скорости в регуляторе генератора 2;  $T_1$  — то же для генератора 1;  $\mu_1, \mu_2$  — координаты регулирующих органов машин;  $K_c$  — коэффици-

\*) Меев М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956, стр. 300.

циент усиления регулятора частоты;  $K_2$  — коэффициент усиления регулятора скорости генератора 2;  $K_1$  — то же для генератора 1;  $K_{д.с.}$  — коэффициент воздействия по производной регулятора скорости;  $T_3$  — постоянная времени возбуждения возбудителя;  $T_4$  — постоянная времени регулятора напряжения;  $U_2$  — напряжение на зажимах генератора 2;  $K$  — коэффициент усиления по напряжению возбудителя, регулятора напряжения и генератора 2;  $\delta_{12}$  — угол сдвига фаз между э. д. с. генератора 2 и напряжением на зажимах генератора 1;  $A, B, C$  и  $D$  — постоянные.

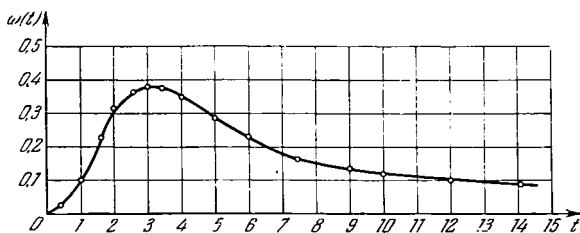


Рис. 164. Кривая изменения частоты во времени при постоянных  $E'_{d1}$  и  $E'_{d2}$ .

В рассматриваемом примере постоянные имели следующие значения:

$$I_1 = 0,469 \text{ мг} \cdot \text{ватт} \cdot \text{сек}^3, \quad I_2 = 0,222 \text{ мг} \cdot \text{ватт} \cdot \text{сек}^3,$$

$$A = 70,5 \text{ кв/град}, \quad B = 0,843, \quad C = 112 \text{ кв/град}, \quad D = 0,75,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \omega_0} = 0,0312 \text{ мг} \cdot \text{ватт} \cdot \text{сек}^2,$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \delta_{12}} = 2,23 \text{ мг} \cdot \text{ватт} \cdot \text{сек/град},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial E_{2d}} = 0,00468 \text{ ка} \cdot \text{сек},$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \omega_0} = 0,022 \text{ мг} \cdot \text{ватт} \cdot \text{сек}^3,$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \delta_{12}} = 1,231 \text{ мг} \cdot \text{ватт} \cdot \text{сек/град}, \quad \frac{\partial M_2}{\partial E_{2d}} = 0,00648 \text{ ка} \cdot \text{сек},$$

$$T_1 = 1 \text{ сек}, \quad T_2 = 2 \text{ сек}, \quad T_3 = 0,2 \text{ сек}, \quad T_4 = 0,2 \text{ сек},$$

$$T_0 = 0,5 \text{ сек}, \quad T_{2d} = 5 \text{ сек},$$

$$K_1 = 0,25, \quad K_2 = 0,53, \quad K'_0 = 0,5,$$

$$K_{д.с.} = 0,5.$$

Как уже указывалось выше, коэффициенты усиления регуляторов скорости и частоты считаем заданными. Что касается регулятора напряжения, то весьма существенно, чтобы точность регулирования

была порядка  $1-1,5\%$ . Кроме того, желательно, чтобы процессы регулирования напряжения не оказывали существенного влияния на процесс регулирования частоты.

На рис. 164 приведена расчетная кривая процесса регулирования частоты при условии, что э. д. с. генератора за переходными реак-

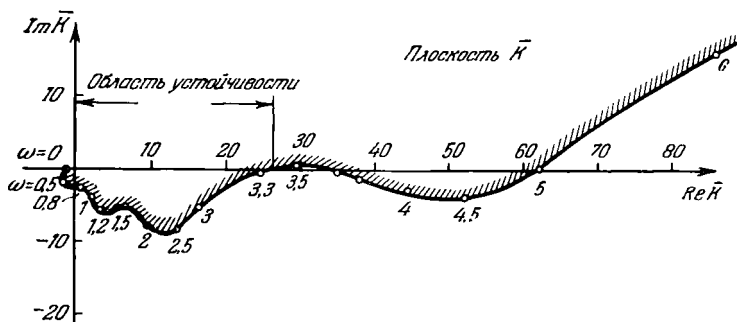


Рис. 165. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K$ .

танцами  $E'_{1d}$  и  $E'_{2d}$  остаются величинами постоянными. Из этого рисунка видно, что процесс практически заканчивается через 10—12 сек при относительном выбросе, равном 0,4.

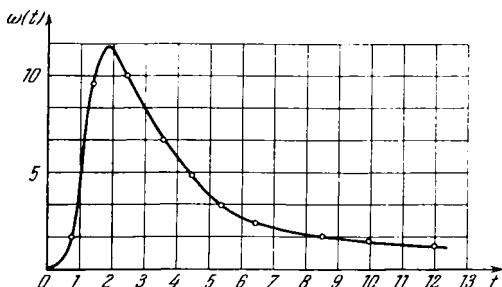


Рис. 166. Кривая изменения частоты по времени при регулировании напряжения и  $K=10$ .

Собственный оператор контура регулирования напряжения в рассматриваемом случае имеет третий порядок. Поэтому согласно полученным ранее выводам характеристическое уравнение системы может быть приведено к виду

$$F_N(p) + KF_{N-3}(p) = 0.$$

Подставляя численные значения в (7.82), получим следующее характеристическое уравнение:

$$0,00233p^{10} + 0,0567p^9 + 0,544p^8 + 2,95p^7 + 10,8p^6 + \\ + 23,7p^5 + 49,4p^4 + 50,1p^3 + 30,3p^2 + 18,2p + 0,788 + \\ + K(0,0104p^7 + 0,147p^6 + 0,690p^5 + 2,60p^4 + 6,07p^3 + \\ + 6,72p^2 + 4,28p + 0,777) = 0. \quad (7.82)$$

На рис. 165 приведена кривая  $D$ -разбиения по  $K$  для рассматриваемого случая. Из этого рисунка видно, что критическое значение коэффициента усиления равно 27. Прежде всего ясно, что система в таком виде непригодна по условиям точности. Нетрудно, однако, видеть, что и по характеру переходного процесса система непригодна.

На рис. 166 приведена расчетная кривая регулирования частоты при учете регулирования напряжения с коэффициентом усиления  $K=10$ . Сравнивая эту кривую с кривой рис. 164, мы видим, что перерегулирование возрастет в 30 раз. При этом также увеличивается и время регулирования. Таким образом, система непригодна и по условиям статической точности и по качеству переходного процесса.

Введем теперь воздействие по первой производной от напряжения в контур регулирования напряжения. Характеристическое уравнение в этом случае запишется:

$$F_N(p) + K(K'_1 p + 1) \times \\ \times F_{N-3}(p) = 0,$$

где  $K'_1$  — коэффициент воздействия по производной. На рис. 167 приведена кривая  $D$ -разбиения по  $K$  для случая, когда  $K'_1 = 2$ . Областью устойчивости является вся вещественная полуось.

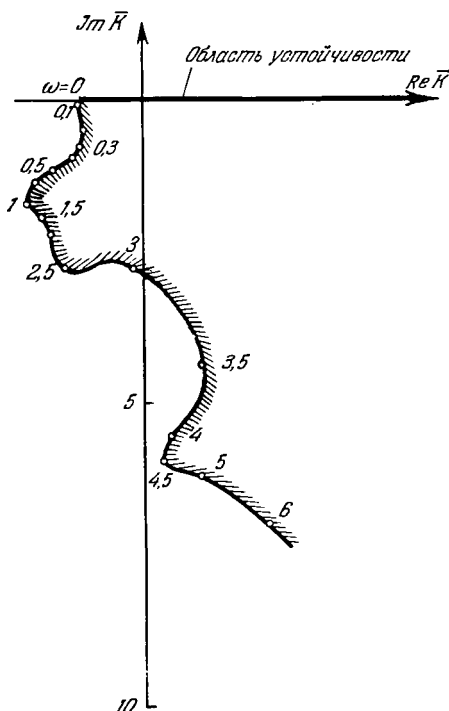


Рис. 167. Кривая  $D$ -разбиения.

Расчетная кривая регулирования частоты для  $K=200$  приведена на рис. 168. Сравнивая кривую рис. 168 с кривой рис. 164, мы видим, что как по величине выброса, так и по времени регулирования эти две кривые достаточно хорошо совпадают.

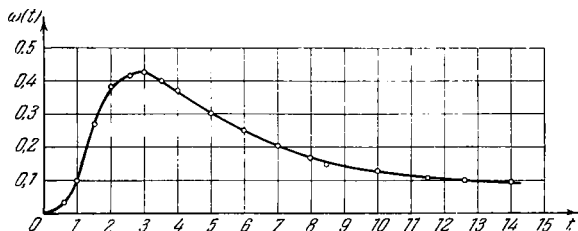


Рис. 168. Кривая изменения частоты при регулировании напряжения и  $K=200$ .

На рис. 169 приведена кривая изменения напряжения во времени. Процесс регулирования напряжения заканчивается примерно через 6 сек, в то время как процесс регулирования частоты заканчивается через 12 сек.

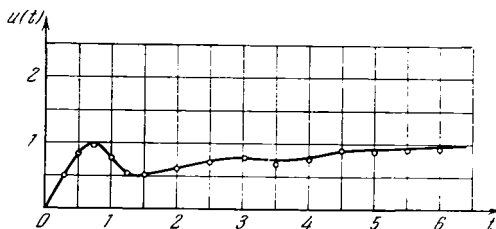


Рис. 169. Кривая изменения напряжения.

На основании этого исследования можно сделать заключение, что процессы регулирования напряжения и частоты остаются практически автономными не потому, что длительность протекания их разная (12 сек и 6 сек), а потому, что автономность достигается за счет большого коэффициента усиления, который в рассматриваемом случае равен 200.

**Пример 2.** Исследование системы автоматического регулирования частоты и напряжения синхронного генератора \*).

Для получения необходимых эксплуатационных характеристик регулируемых электроприводов переменного тока при частотном управлении необходимо обеспечить независимое регулирование частоты

\*) Система разработана и исследована Д. П. Петелиным.

и напряжения переменного тока по определенным законам. Решение такой задачи может быть осуществлено путем применения специально разработанной системы автоматического регулирования. В настоящем примере иллюстрируется применение теории автоматического регулирования взаимосвязанных величин при разработке системы автоматического регулирования частоты и напряжения синхронного генератора, удовлетворяющей требованиям высокой точности, устойчивости и автономности.

В качестве объекта регулирования рассматривается первичный двигатель постоянного тока и синхронный генератор.

Исследуемая система автоматического регулирования состоит из двух контуров регулирования:

а) Контур регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока и соответственно частоты синхронного генератора.

б) Контур регулирования напряжения синхронного генератора.

Принципиальная схема системы автоматического регулирования частоты и напряжения синхронного генератора и ее структурная схема приведены на рис. 170а и 170б.

Составим уравнения системы автоматического регулирования частоты и напряжения синхронного генератора в линейном приближении.

1-й контур регулирования. Полагая ЭМУ полностью скомпенсированным, запишем его уравнение в следующем виде:

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) U_{a1} = K_1 K_2 K_{y1} (U_{1 \text{ эт}} - e_{\tau}), \quad (7.83)$$

где  $T_1 = T_{\text{обм. упр.}}$ ,  $T_2 = T_k$ ,  $K_1 K_2 = K_{a1}$  — коэффициент усиления по напряжению.

Уравнение генератора постоянного тока запишется в форме

$$(1 + T_3 p) U_2 = K_3 U_{a1}. \quad (7.84)$$

Уравнение двигателя постоянного тока с учетом нагрузки запишем:

$$(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) n = \frac{U_{\Gamma}}{K_e} - \frac{r_{\text{я}} M_{\text{сг}}}{K_e K_m} (1 + T_4 p) \quad (7.85)$$

или

$$(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) n = K_4 U_{\Gamma} - K_4 K_5 K_6 (1 + T_4 p) U_{\text{сг}},$$

где

$$K_4 = \frac{1}{K_e}, \quad K_5 = \frac{1}{K_m}, \quad K_6 = r_{\text{я}} 975 \frac{E_{d0} \sin \theta_0}{n_0 x_{d0}} \frac{\text{об/мин}}{\text{об/мин}}.$$

Уравнения для тахогенератора записываются:

$$e_{\tau} = K_{\tau} n. \quad (7.86)$$

Совместное решение уравнений (7.83)—(7.86) дает:

$$\begin{aligned} & [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) + \\ & \quad + K_1 K_2 K_{y1} K_3 K_4 K_{\tau}] n = K_1 K_2 K_{y1} K_3 K_4 U_{1 \text{ эт}} - \\ & \quad - K_4 K_5 K_6 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) U_{\text{сг}}. \end{aligned} \quad (7.87)$$



2-й контур регулирования. Уравнение ЭМУ запишем:

$$(1 + T_8 p)(1 + T_9 p) U_{a2} = K_8 K_9 K_{\tau 2} (U_{23T} - U_{cr}). \quad (7.88)$$

Уравнение синхронного генератора, работающего на постоянную

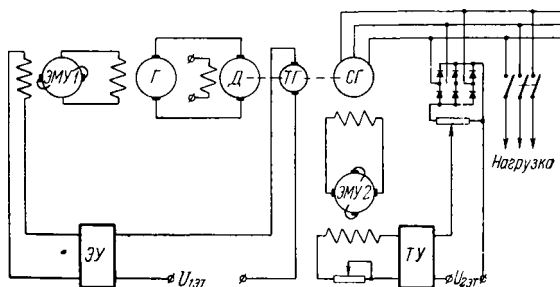


Рис. 170а. Принципиальная схема системы регулирования.

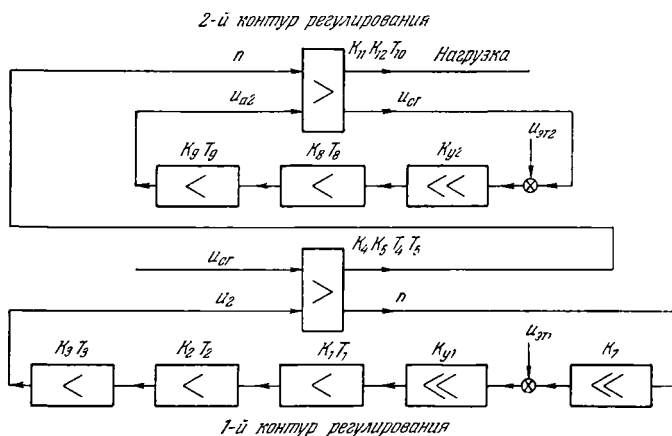


Рис. 170б. Структурная схема системы рис. 170а.

нагрузку, при пренебрежении переходными процессами в статорной цепи записывается:

$$(1 + T_{10} p) U_{cr} = K_{11} U_{a2} + K_{12} n, \quad (7.89)$$

где  $T_{10} = T_{d0} \frac{x'_{d\epsilon} x_{qe} + r_{\epsilon}^2}{x_{d\epsilon} x_{qe} + r_{\epsilon}^2}$ ;  $T_{d0}$  — постоянная времени обмотки возбуждения синхронного генератора при холостом ходе,  $x'_{d\epsilon} = x'_d + x_n$ ;  $x_{qe} = x_q + x_n$ ;  $x_{d\epsilon} = x_d + x_n$ ;  $r_{\epsilon} = r_d + r_n$ ;  $r_n$ ,  $x_n$  — активное и реактивное сопротивления нагрузки;  $K_{10} = \frac{K_{\text{г.т}}}{n_0}$ ;  $K_{\text{г.т}} = K_f \cdot \frac{V(x_{qe}^2 + r_{\epsilon}^2)(x_n^2 + r_n^2)}{x_{d\epsilon} x_{qe} + r_{\epsilon}^2}$ ;  $K_f$  — коэффициент усиления синхронного генератора по напряжению при холостом ходе.

Решая совместно уравнения (7.88) и (7.89), получим:

$$\begin{aligned} & [(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + K_8 K_9 K_{y2} K_{11}] U_{\text{г.т}} = \\ & = K_8 K_9 K_{y2} K_{11} U_{2\text{эт}} + K_{12}(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)n. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Для определения статических свойств системы автоматического регулирования положим в уравнениях (7.87) и (7.90)  $p = 0$ ; тогда получим:

$$(1 + K_1 K_2 K_{y1} K_3 K_4 K_7) n = K_1 K_2 K_{y1} K_3 K_4 U_{1\text{эт}} - K_4 K_5 K_6 U_{\text{г.т}}, \quad (7.91)$$

$$(1 + K_8 K_9 K_{y2} K_{11}) U_{\text{г.т}} = K_8 K_9 K_{y2} K_{11} U_{2\text{эт}} + K_{12} n. \quad (7.92)$$

Обозначая  $K_1 K_2 K_{y1} = K_{1\text{охв}}$  и  $K_8 K_9 K_{y2} = K_{2\text{охв}}$  и решая совместно уравнения (7.91) и (7.92), получим:

$$U_{\text{г.т}} = \frac{K_{1\text{охв}} K_3 K_4 K_{11} U_{1\text{эт}} + (K_{1\text{охв}} K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} + K_{2\text{охв}} K_{11}) U_{2\text{эт}}}{1 + K_{1\text{охв}} K_3 K_4 K_7 + K_{2\text{охв}} K_{11} + K_{1\text{охв}} K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} + K_4 K_5 K_6 K_{12}}, \quad (7.93)$$

$$n = \frac{(K_{1\text{охв}} K_3 K_{11} + K_{1\text{охв}} K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_{11}) U_{1\text{эт}} - K_{2\text{охв}} K_4 K_5 K_6 K_{11} U_{2\text{эт}}}{1 + K_{1\text{охв}} K_3 K_4 K_7 + K_{2\text{охв}} K_{11} + K_{1\text{охв}} K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} + K_4 K_5 K_6 K_{12}}. \quad (7.94)$$

Рассматривая уравнения (7.93) и (7.94) при  $K_{1\text{охв}} \rightarrow \infty$ , получим:

$$U_{\text{г.т}} \rightarrow \frac{K_3 K_4 K_{12} U_{1\text{эт}} + K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} U_{2\text{эт}}}{K_3 K_4 K_7 + K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11}}, \quad (7.95)$$

$$n \rightarrow \frac{(K_3 K_{11} + K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_{11}) U_{1\text{эт}}}{K_3 K_4 K_7 + K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11}}. \quad (7.96)$$

Рассматривая уравнения (7.95) и (7.96) при  $K_{2\text{охв}} \rightarrow \infty$ , получим:

$$U_{\text{г.т}} \rightarrow U_{2\text{эт}}, \quad \Delta U = U_{\text{г.т}} - U_{2\text{эт}} \rightarrow 0. \quad (7.97)$$

$$n \rightarrow \frac{U_{1\text{эт}}}{K_7}, \quad \Delta n = K_7 n - U_{1\text{эт}} \rightarrow 0. \quad (7.98)$$

Таким образом, увеличение коэффициентов усиления 1-го и 2-го контуров регулирования уменьшает статическую ошибку, и в пределе достигается абсолютная точность регулирования.

Рассмотрим свойства исследуемой системы автоматического регулирования с точки зрения устойчивости. Выясним, как влияет увели-

чение коэффициентов усиления в одном контуре, а затем в обоих одновременно на устойчивость системы автоматического регулирования.

Решая уравнения (7.91) и (7.92) относительно  $p$  и  $U_{ог}$ , найдем характеристическое уравнение системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + \\ & \quad + T_5 p + 1)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + \\ & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \times \\ & \quad \times (1 + T_4 p)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)] + \\ & \quad + K_{2_{охв}} K_{11}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) + \\ & \quad + K_{1_{охв}} K_3 K_4 K_7 (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + \\ & \quad + K_{1_{охв}} K_{2_{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} = 0. \quad (7.99) \end{aligned}$$

Положим, что между коэффициентами усиления отдельных контуров регулирования существует следующая взаимосвязь:

$$K_{2_{охв}} = \eta K_{1_{охв}},$$

где  $\eta$  — постоянное число.

Тогда после подстановки  $K_{2_{охв}} = \eta K_{1_{охв}}$  получим характеристическое уравнение системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + \\ & \quad + T_5 p + 1)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + \\ & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \times \\ & \quad \times (1 + T_4 p)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)] + \\ & \quad + K_{1_{охв}} [\eta K_{11}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + \\ & \quad + T_5 p + 1) + K_3 K_4 K_7 (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p)] + \\ & \quad + K_{1_{охв}}^2 \eta K_3 K_4 K_7 K_{11} = 0. \quad (7.100) \end{aligned}$$

Деля уравнение (7.100) на  $K_{1_{охв}}^2$  и обозначая  $\frac{1}{K_{1_{охв}}^2} = m^2$ ,  $\frac{1}{K_{1_{охв}}} = m$ , получим:

$$\begin{aligned} & m^2 [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + \\ & \quad + T_5 p + 1)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + \\ & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \times \\ & \quad \times (1 + T_4 p)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)] + \\ & \quad + m [\eta K_{11}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) + \\ & \quad + K_3 K_4 K_7 (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p)] + \eta K_3 K_4 K_7 K_{11} = 0. \quad (7.101) \end{aligned}$$

Очевидно, если  $K_{1_{охв}} \rightarrow \infty$ , то  $m \rightarrow 0$ .

Ранее было установлено, что если каждый малый параметр  $m$  повышает порядок уравнения на три и больше, то характеристическое уравнение системы будет всегда иметь корни справа от мнимой оси, а система автоматического регулирования будет неустойчивой.

Как видно из уравнения (7.101), это как раз имеет место; следовательно, при  $K_{1\text{охв}} \rightarrow \infty$  система автоматического регулирования неустойчива.

Рассмотрим случай, когда  $K_{1\text{охв}} \rightarrow \infty$ , а  $K_{2\text{охв}} = \text{const}$ . Обозначая  $\frac{1}{K_{1\text{охв}}} = m$ , уравнение (7.101) можно представить следующим образом:

$$m \{ [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + K_4 K_5 K_6 K_{12} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \times (1 + T_4 p)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)] + K_{2\text{охв}} K_{11} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) \} + K_3 K_4 K_7 (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + K_{2\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} = 0. \quad (7.102)$$

В данном случае каждый малый параметр  $m$  повышает порядок уравнения на пять. Следовательно, при  $K_{1\text{охв}} \rightarrow \infty$  справа от мнимой оси для уравнения (7.102) всегда будут корни, и система автоматического регулирования будет неустойчивой.

Рассмотрим случай, когда  $K_{2\text{охв}} \rightarrow \infty$  и  $K_{1\text{охв}} = \text{const}$ . Обозначая  $\frac{1}{K_{2\text{охв}}} = m_1$ , уравнение (7.101) можно представить следующим образом:

$$m_1 \{ [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) + K_4 K_5 K_6 K_{12} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \times (1 + T_4 p)(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)] + K_3 K_4 K_7 K_{1\text{охв}} (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p) \} + K_{11} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) + K_{1\text{охв}} K_3 K_4 K_7 K_{11} = 0. \quad (7.103)$$

В данном случае малый параметр  $m$  повышает порядок уравнения на три. Следовательно, при  $K_{2\text{охв}} \rightarrow \infty$  справа от мнимой оси для уравнения (7.103) всегда будет по крайней мере один корень, и система автоматического регулирования будет неустойчивой.

Найдем структуру системы автоматического регулирования частоты и напряжения синхронного генератора, допускающей неограниченное увеличение коэффициентов усиления контуров регулирования без нарушения устойчивости.

Для этой цели каждый контур регулирования со своим стабилизирующим звеном должен образовать структуру, допускающую неограниченное увеличение коэффициента усиления без нарушения устойчивости.

Исходя из этих соображений, проанализируем устойчивость двух-связной системы автоматического регулирования при наличии гибких обратных связей с передаточной функцией типа  $\frac{\tau p}{1 + \tau p}$ , охватывающих звенья с наибольшими коэффициентами усиления.

Структурная схема системы автоматического регулирования частоты и напряжения синхронного генератора в этом случае будет иметь вид рис. 171.

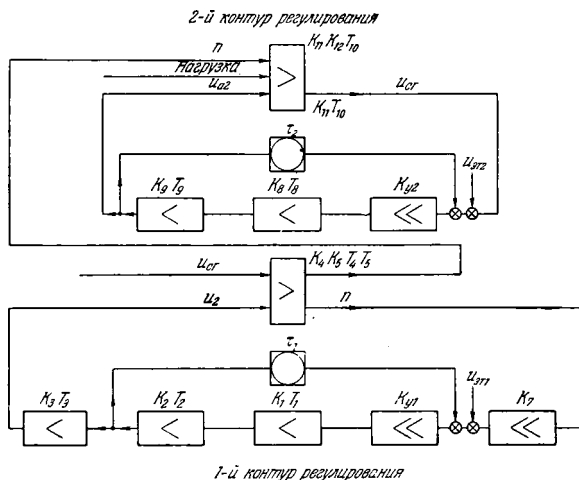


Рис. 171. Структурная схема со стабилизирующими устройствами.

Процесс автоматического регулирования в рассматриваемой системе описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + \tau_1 p) + \\ & + K_{10xb} \tau_1 p (1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) + \\ & + K_{10xb} K_3 K_4 K_7 (1 + \tau_1 p)] n = K_{10xb} K_3 K_4 (1 + \tau_1 p) U_{1э\tau} - \\ & - [K_4 K_5 K_6 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + \tau_1 p) + \\ & + K_{10xb} K_4 K_5 K_6 \tau_1 p (1 + T_3 p)(1 + T_4 p)] U_{сг}, \quad (7.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_2 p) + \\ & + K_{20xb} \tau_2 p (1 + T_{10} p) + K_{20xb} K_{11} (1 + \tau_2 p)] U_{сг} = \\ & = K_{20xb} K_{11} (1 + \tau_2 p) U_{2э\tau} + \\ & + [(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + \tau_2 p) K_{12} + K_{20xb} K_{12} \tau_2 p] n. \quad (7.105) \end{aligned}$$

Система уравнений (7.104) и (7.105) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
 & [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) \times \\
 & \quad \times (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \times \\
 & \quad \times (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)] + \\
 & \quad + K_{2_{\text{охв}}}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)[K_{11}(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) \times \\
 & \quad \times (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + (T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_4 p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p] + \\
 & \quad + K_{1_{\text{охв}}}(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)[(1 + T_3 p) \times \\
 & \quad \times (T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p + \\
 & \quad + K_3 K_4 K_7(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p] + \\
 & \quad + K_{1_{\text{охв}}} K_{2_{\text{охв}}}(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p) \tau_1 p \tau_2 p + \\
 & \quad + K_3 K_4 K_7(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p + \\
 & \quad + K_{11}(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p + \\
 & \quad + K_3 K_4 K_7 K_{11}(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \tau_1 p \tau_2 p] = 0. \quad (7.106)
 \end{aligned}$$

Обозначая  $K_{2_{\text{охв}}} = \eta K_{1_{\text{охв}}}$  и  $\frac{1}{K_{1_{\text{охв}}}} = m$ , уравнение (7.106) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & m^2 [(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_8 p) \times \\
 & \quad \times (1 + T_9 p)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) \times \\
 & \quad \times (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)] + \\
 & \quad + m \{ \eta (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) \times \\
 & \quad \times [K_{11}(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + \\
 & \quad + (T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_4 p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p] + \\
 & \quad + (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)[(1 + T_3 p) \times \\
 & \quad \times (T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p + \\
 & \quad + K_3 K_4 K_7(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p] \} + \\
 & \quad + \eta \{ [(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p) + \\
 & \quad + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)] \tau_1 p \cdot \tau_2 p + \\
 & \quad + K_3 K_4 K_7(1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p + K_{11}(1 + T_3 p) \times \\
 & \quad \times (T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p + \\
 & \quad + K_3 K_4 K_7 K_{11}(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \} = 0. \quad (7.107)
 \end{aligned}$$

В полученном уравнении (7.107) каждый малый параметр  $m$  повышает порядок уравнения на два. Следовательно, в соответствии с ранее полученными выводами исследуемая система автоматического регулирования будет устойчивой, если вырожденное уравнение, получаемое из уравнения (7.107), приравниванием  $m = 0$ , удовлетворяет условиям устойчивости и вспомогательное уравнение второго рода также удовлетворяет условиям устойчивости. Методика составления вспомогательного уравнения второго рода подробно изложена выше.

Таким образом, полагая  $K_{10\text{хв}} \rightarrow \infty$ , что соответствует  $m \rightarrow 0$ , получим из уравнения (7.107) вырожденное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + T_{10} p) + \\ & + K_4 K_5 K_6 K_{12}(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)] \tau_1 p \cdot \tau_2 p + \\ & + K_3 K_4 K_7 (1 + T_{10} p)(1 + \tau_1 p) \tau_2 p + \\ & + K_{11}(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + \tau_2 p) \tau_1 p + \\ & + K_3 K_4 K_7 K_{11}(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) = 0. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Вспомогательное уравнение второго рода для уравнения (7.107) записывается в следующем виде:

$$a_{00} q^5 + m^{\frac{1}{2}} a_{01} q^4 + a_{10} q^3 + m^{\frac{1}{2}} a_{11} q^2 + a_{20} q + m^{\frac{1}{2}} a_{21} = 0, \quad (7.109)$$

где  $q = m^{\frac{1}{2}} p = \sqrt{m} p$ ,

$$a_{00} = T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2,$$

$$\begin{aligned} a_{01} = & T_2 T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_3 T_4' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_8 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1, \end{aligned}$$

$$a_{10} = \tau_1 T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2,$$

$$\begin{aligned} a_{11} = & \tau_1 (T_2 T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_4' T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4' T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' \tau_1 \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_2 + T_1 T_2 T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_1) + \\ & + (T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_4' T_8 T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_3 T_4' T_5' T_9 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_4' T_5' T_8 T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_2 + T_3 T_4' T_5' T_8 T_9 T_{10} \tau_1), \end{aligned}$$

$$a_{20} = \tau_1 T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2,$$

$$\begin{aligned} a_{21} = & \tau_1 (T_4' T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_5' T_{10} \tau_1 \tau_2 + T_3 T_4' T_{10} \tau_1 \tau_2 + \\ & + T_3 T_4' T_5' \tau_1 \tau_2 + T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_2 + T_3 T_4' T_5' T_{10} \tau_1). \end{aligned}$$

Постоянные времени  $T'_4$  и  $T'_5$  получились в результате замены

$$(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) = (1 + T'_4 p)(1 + T'_5 p).$$

Для устойчивости исследуемой системы автоматического регулирования условие устойчивости вырожденного уравнения (7.108) является необходимым, но недостаточным. В дополнение к этому условию необходимо, чтобы вспомогательное уравнение второго рода (7.109) также удовлетворяло условию устойчивости.

Рассмотрим получение автономного регулирования частоты и напряжения синхронного генератора с точностью до малого параметра  $m$  путем увеличения коэффициентов усиления регуляторов обоих контуров регулирования и введения дополнительных воздействий по определенному закону на входы стабилизирующих устройств несобственных переменных. Вид дополнительных сигналов, подаваемых на входы стабилизирующих устройств, будет найден из дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системе.

Принципиальная схема для получения автономного регулирования частоты и напряжения синхронного генератора и структурная схема имеют вид, показанный на рис. 172а и 172б.

Составим систему дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системе автономного регулирования напряжения и частоты синхронного генератора с точностью до малого параметра  $m$ .

Для 1-го контура регулирования. Уравнение звеньев, не охваченных гибкой обратной связью, будет:

$$\begin{aligned} (1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)n &= \\ &= K_3 K_4 U_{a1} - K_4 K_5 K_6 (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) U_{cr} = \\ &= K_3 K_4 \left[ U_{a1} - \frac{K_5 K_6}{K_3} (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) U_{cr} \right]. \end{aligned} \quad (7.110)$$

Уравнение звеньев, охваченных гибкой обратной связью с дополнительным воздействием на вход стабилизирующего звена для получения автономности, будет:

$$\begin{aligned} (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) U_{a1} &= \\ &= K_1 K_2 K_{y1} \left[ (U_{13T} - e_T) - \frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p} \frac{K_5 K_6}{K_3} (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) U_{cr} \right]. \end{aligned} \quad (7.111)$$

Уравнение тахогенератора

$$e_T = K_T n. \quad (7.112)$$

Решение уравнений (7.110), (7.111) и (7.112) относительно  $U_{a1}$  и  $e_T$  дает:

$$\begin{aligned} &[(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)(1 + \tau_1 p) + \\ &+ K_{10xb}(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1)\tau_1 p + K_{10xb} K_3 K_4 K_7 (1 + \tau_1 p)]n = \\ &= K_{10xb} K_3 K_4 (1 + \tau_1 p) U_{13T} - K_4 K_5 K_6 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \times \\ &\quad \times (1 + T_3 p)(1 + T_4 p)(1 + \tau_1 p) U_{cr}, \end{aligned} \quad (7.113)$$



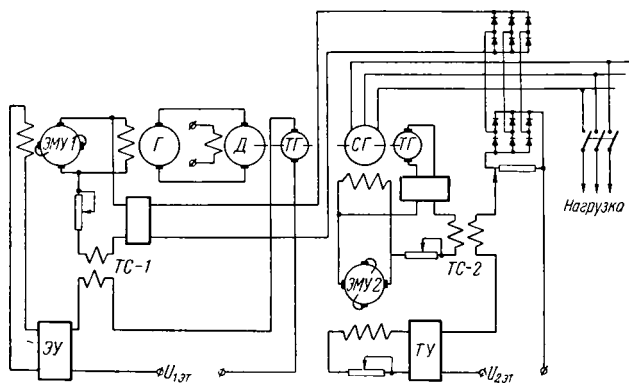


Рис. 172а. Принципиальная схема автономного регулирования.

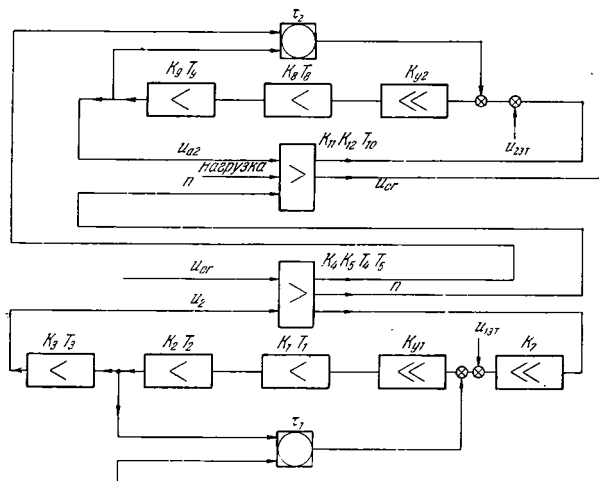


Рис. 172б. Структурная схема автономного регулирования.

где  $K_{10\text{хв}} = K_1 K_2 K_{y1}$ . Деля каждый член на  $K_{10\text{хв}}$  и полагая  $K_{10\text{хв}} \rightarrow \infty$ , получим вырожденное уравнение в следующем виде:

$$[(1 + T_3 p)(T_4 T_5 p^2 + T_5 p + 1) \tau_1 p + K_3 K_4 K_7 (1 + \tau_1 p)] n = \\ = K_3 K_4 U_{1\text{эт}} (1 + \tau_1 p). \quad (7.114)$$

Для 2-го контура регулирования уравнение звена, не охваченного гибкой обратной связью, будет:

$$(1 + T_{10} p) U_{\text{сг}} = K_{11} U_{a2} + K_{12} n = K_{11} \left( U_{a2} + \frac{K_{12}}{K_{11}} n \right). \quad (7.115)$$

Уравнение звеньев, охваченных гибкой обратной связью с дополнительным воздействием на вход стабилизирующего звена для получения автономности, записывается:

$$(1 + T_8 p)(1 + T_9 p) U_{a2} = \\ = K_8 K_9 K_{y2} \left[ (U_{2\text{эт}} - U_{\text{сг}}) - \frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p} U_{a2} - \frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p} \cdot \frac{K_{12}}{K_{11}} n \right]. \quad (7.116)$$

Решение уравнений (7.115) и (7.116) относительно  $U_{a2}$  дает:

$$[(1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + T_{10} p)(1 + \tau_2 p) + K_{20\text{хв}} \tau_2 p (1 + T_{10} p) + \\ + K_{20\text{хв}} K_{11} (1 + \tau_2 p)] U_{\text{сг}} = K_{20\text{хв}} K_{11} (1 + \tau_2 p) U_{2\text{эт}} + \\ + K_{12} (1 + T_8 p)(1 + T_9 p)(1 + \tau_2 p) n, \quad (7.117)$$

где  $K_{20\text{хв}} = K_8 K_9 K_{y2}$ . Деля каждый член уравнения (7.117) на  $K_{20\text{хв}}$  и полагая  $K_{20\text{хв}} \rightarrow \infty$ , получим вырожденное уравнение в следующем виде:

$$[\tau_2 p (1 + T_{10} p) + K_{11} (1 + \tau_2 p)] U_{\text{сг}} = K_{11} (1 + \tau_2 p) U_{2\text{эт}}. \quad (7.118)$$

Полученные уравнения описывают процессы в отдельных контурах независимо друг от друга. Следовательно, дополнительные воздействия несобственных переменных по определенному закону на входы стабилизирующих звеньев обеспечивают автономность системы с точностью до малой величины  $m$  при условии, что система допускает неограниченную точность по каждой из регулируемых величин.

В соответствии с полученными выводами на вход стабилизирующего звена 1-го контура необходимо подавать дополнительное воздействие положительного знака от переменной 2-го контура по следующему закону:

$$\frac{K_5 K_6}{K_3} (1 + T_3 p)(1 + T_4 p) U_{\text{сг}},$$

а на вход стабилизирующего звена 2-го контура необходимо подавать дополнительное воздействие отрицательного знака от переменной 1-го контура по закону  $\frac{K_{12}}{K_{11}} n$ .

Произведем расчет конкретной системы. Данные отдельных элементов приведены в таблице 3.

Таблица 3

№№ п/п	Наименование элементов	<i>P</i>	<i>U</i>	<i>n</i>	<i>I</i>	Коэффициент усиления	Постоянная времени	Примечание
		<i>квт</i>	<i>в</i>	<i>об/мин</i>	<i>а</i>		<i>сек</i>	
1	Электромашинный усилитель № 1 . . . . .	4,5	230	2890	19,6	$K_1 K_2 = 10$	$T_1 = 0,04$ $T_2 = 0,1$	—
2	Генератор постоянного тока . . . . .	15	230	1000	65	$K_3 = 3,04$	$T_3 = 0,3$	—
3	Двигатель постоянного тока . . . . .	4,4	220	1500	23,5	$K_4 = 7,15$ $K_5 = 7,35$	$T_4 = 0,01$ $T_5 = 0,06$	Размерность коэффициента усиления $\frac{\text{об/мин}}{в}$
4	Синхронный генератор	7,2	230	1500	22,6	$K_{10} = 10,3$	$T_{10} = 0,4$	—
5	Электромашинный усилитель № 2 . . . . .	4,5	230	2850	19,6	$K_8 K_9 = 80$	$\begin{cases} T_8 = 0,06 \\ T_9 = 0,05 \end{cases}$	—
6	Асинхронный двигатель (нагрузочный) . . . .	5,3	230/380	980	223/13	—	—	—
7	Стабилизирующий трансформатор ТС-1 .	—	—	—	$\frac{0,3}{1,4}$	—	$\tau_1 = 0,4$	Тип трансформатора ТС-72-60
8	Стабилизирующий трансформатор ТС-2 .	—	—	—	$\frac{0,3}{1,4}$	—	$\tau_2 = 0,2$	Тип трансформатора ТС-72-60
9	Тахогенератор № 1 . .	—	—	—	—	$K_7 = 0,013$	—	Размерность коэффициен- та усиления $\frac{\text{об/мин}}{в}$
10	Тахогенератор № 2 . .	—	—	—	—	$K_7 = 0,013$	—	Размерность коэффициен- та усиления $\frac{\text{об/мин}}{в}$
11	Электронный усилитель	—	—	—	—	$K_{y1} = 10$	—	—
12	Тиратронный усилитель	—	—	—	—	$K_{y2} = 4,3$	—	—

В соответствии с уравнением (7.102) произведено построение областей устойчивости по  $K_{1\text{охв}}$  для  $K_{2\text{охв}} = 344$  при отсутствии стабили-

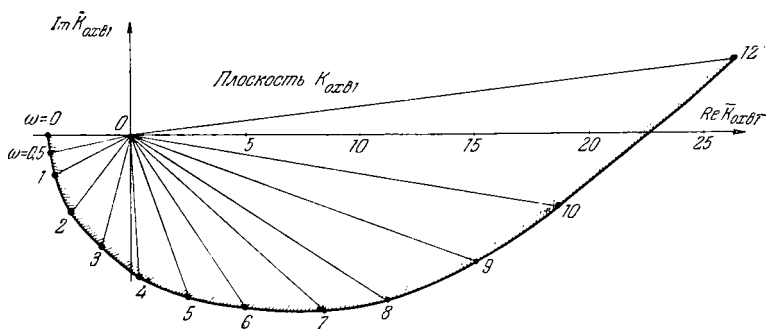


Рис. 173. Кривая  $D$ -разбиения по  $K_{1\text{охв}}$ .

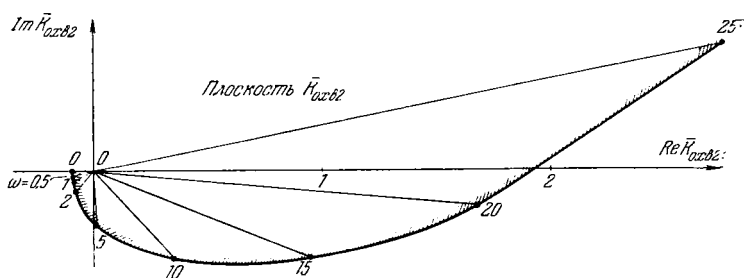


Рис. 174. Кривая  $D$ -разбиения по  $K_{2\text{охв}}$ .

зирующих устройств. После подстановки значений коэффициентов усиления получим:

$$K_{1\text{охв}} = -\{(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega)[T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] \times \\ \times (1 + T_8 j\omega)(1 + T_9 j\omega)(1 + T_{10} j\omega)\} \times \\ \times \{0,283(1 + T_8 j\omega)(1 + T_9 j\omega)(1 + T_{10} j\omega) + 1000\}^{-1} + \\ + \frac{0,0147(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_3 j\omega)(1 + T_4 j\omega)(1 + T_8 j\omega)(1 + T_9 j\omega)}{0,283(1 + T_8 j\omega)(1 + T_9 j\omega)(1 + T_{10} j\omega) + 1000} + \\ + \frac{3560(1 + T_1 j\omega)(1 + T_7 j\omega)(1 + T_3 j\omega)(T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1)}{0,283(1 + T_8 j\omega)(1 + T_9 j\omega)(1 + T_{10} j\omega) + 1000}.$$

Кривая  $D$ -разбиения по  $K_{1\text{охв}}$  приведена на рис. 173. Критический коэффициент усиления  $K_{1\text{охв кр}} = 22,5$ . В соответствии с уравне-

нием (7.102) произведен расчет кривой  $\mathcal{D}$ -разбегания по  $K_{20xb}$  при  $K_{10xb} = 65$ :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{20xb} = - \{ & (1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega) (1 + T_3 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] \times \\ & \times (1 + T_8 j\omega) (1 + T_9 j\omega) (1 + T_{10} j\omega) \} \times \\ & \times \{ 10,3 (1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega) (1 + T_3 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] + 190 \}^{-1} + \\ & + \frac{0,0147 (1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega) (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) (1 + T_8 j\omega) (1 + T_9 j\omega)}{10,3 (1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega) (1 + T_3 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] + 190} + \\ & + \frac{18,4 (1 + T_8 j\omega) (1 + T_9 j\omega) (1 + T_{10} j\omega)}{10,3 (1 + T_1 j\omega) (1 + T_2 j\omega) (1 + T_3 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] + 190}, \end{aligned}$$

которая приведена на рис. 174. Критический коэффициент усиления  $K_{20xb, \text{кр}} = 1,93$ .

Как следует из построенных областей устойчивости (рис. 173, 174), исследуемая система автоматического регулирования устойчива при малых значениях коэффициентов усиления отдельных контуров. Действительные значения коэффициентов усиления 1-го и 2-го контуров регулирования значительно больше, и система без стабилизирующих устройств неустойчива. Для получения высокоточной системы автоматического регулирования введены стабилизирующие устройства с передаточной функцией типа  $\frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}$ , обеспечивающие устойчивость системы. Можно показать, что при достаточно большом  $K_{10xb}$  система регулирования скорости будет устойчива, если звенья с общим коэффициентом усиления  $K_{10xb}$  охвачены гибкой обратной связью с передаточной функцией  $\frac{\tau_1 p}{1 + \tau_1 p}$ , причем параметр  $\tau_1 = 0,4$  сек.

В соответствии с требованием устойчивости систем автоматического регулирования взаимосвязанных величин найдем значение параметра  $\tau_2$  стабилизирующего устройства 2-го контура.

Для определения значения  $\tau_2$ , обеспечивающего условие устойчивости вырожденного уравнения (7.108), построено  $\mathcal{D}$ -разбегание по  $\tau_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_2 = - \{ & 10,3 (1 + T_3 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] \times \\ & \times \tau_1 j\omega + 2,9 (1 + \tau_1 j\omega) \} : \{ \{ (1 + T_3 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + \\ & + T_5 j\omega + 1] + 0,0147 (1 + T_3 j\omega) (1 + T_4 j\omega) \} \times \\ & \times \tau_1 (j\omega)^2 + 0,282 (1 + T_{10} j\omega) (1 + \tau_1 j\omega) j\omega + \\ & + 10,3 (1 + T_2 j\omega) [T_4 T_5 (j\omega)^2 + T_5 j\omega + 1] \tau_1 (j\omega)^2 + \\ & + 2,9 (1 + \tau_1 j\omega) j\omega \}. \end{aligned}$$

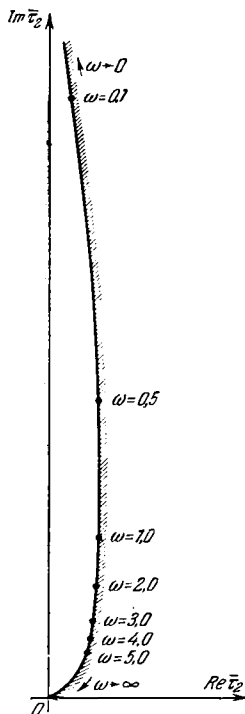


Рис. 175. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбегания по  $\tau_2$ .

На рис. 175 представлена кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $\tau_2$ . Система будет устойчивой, если выбрать  $\tau_2 > 0,075 \text{ сек}$ . В реальной установке охват звеньев с общим коэффициентом усиления  $K_{20\text{хв}}$  осуществлен стабилизирующим устройством типа  $\frac{\tau_2 p}{1 + \tau_2 p}$  со значением параметра  $\tau_2 = 0,2 \text{ сек}$ .

При значениях параметров стабилизирующих устройств 1-го и 2-го контуров регулирования соответственно  $\tau_1 = 0,4 \text{ сек}$  и  $\tau_2 = 0,2 \text{ сек}$  было построено  $\mathcal{D}$ -разбиение по  $K_{10\text{хв}}$  (рис. 176). Как видно из рисунка 176, система устойчива при всех вещественных значениях  $\bar{K}_{10\text{хв}}$ .

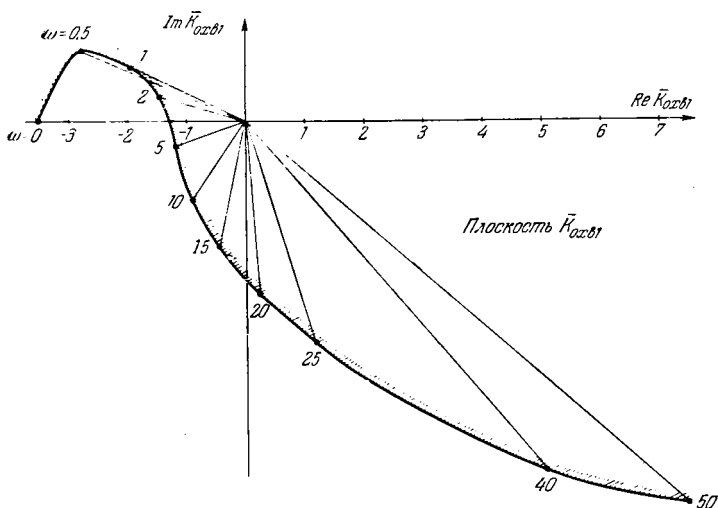


Рис. 176. Кривая  $\mathcal{D}$ -разбиения по  $K_{10\text{хв}}$  при наличии стабилизирующего устройства.

Было проведено экспериментальное исследование системы двухсвязного автоматического регулирования. В эксперименте рассматривался самый тяжелый режим — пуск асинхронного короткозамкнутого двигателя мощностью  $P_{\text{ас. дв}} = 5,3 \text{ кВт}$  от синхронного генератора мощностью  $P_{\text{ст}} = 7,2 \text{ кВт}$ . Экспериментальные исследования проводились при разных коэффициентах усиления 1-го и 2-го контуров регулирования и при отсутствии дополнительных воздействий, обеспечивающих автономность.

На осциллограммах № 1, 2, 3 и 4 (рис. 177) видно, как с увеличением коэффициента усиления 1-го контура регулирования уменьшается время регулирования и появляется перерегулирование.

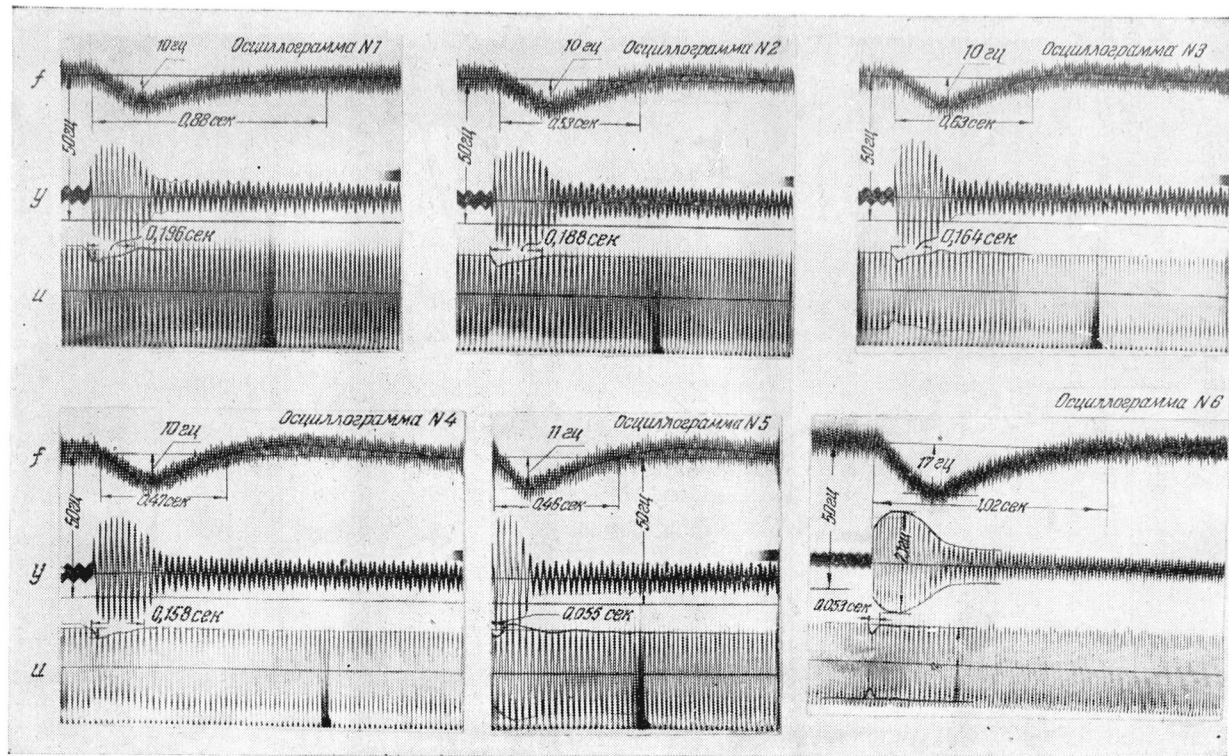


Рис. 177. Осциллограммы.

Осциллограммы № 1, 2, 3 и 4 сняты при постоянном коэффициенте усиления 2-го контура регулирования.

Осциллограмма № 5 показывает протекание процесса регулирования при больших коэффициентах усиления 1-го и 2-го контуров регулирования. Как следует из этой осциллограммы, заметно уменьшается время регулирования  $U_{\text{сг}}$  и появляется наибольшая колебательность.

На всех осциллограммах (№ 1, 2, 3, 4 и 5) явно заметна малая связь между процессами регулирования в 1-м и 2-м контурах регулирования, что обуславливается достаточно большими коэффициентами усиления контуров регулирования. Однако здесь неполностью решаются вопросы получения автономности системы двухсвязного автоматического регулирования.

Для получения автономности в соответствии с ранее рассмотренными законами были введены дополнительные воздействия на входы соответствующих стабилизирующих устройств. Осциллограмма № 6 соответствует системе автоматического регулирования с дополнительными воздействиями для получения автономности.

Как видно из этой осциллограммы, законы изменения скорости двигателя постоянного тока и напряжения синхронного генератора протекают практически независимо.

---



## ЛИТЕРАТУРА\*)

1. Айзерман М. А., О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 9, № 2 (1948).
2. Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, Гостехиздат, 1952.
3. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., О структурных условиях устойчивости одноконтурных систем, Прикладная математика и механика № 3 (1953).
4. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., О структурных условиях устойчивости при введении воздействия по производной, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. I, 1955.
5. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Грубые системы, ДАН СССР, новая серия, т. 14, № 5 (1937).
6. Андронов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Гостехиздат, 1937.
7. Воронов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, изд. 2-е, Воениздат, 1954.
8. Гальперин И. И., О возможных способах устойчивого регулирования с нулевой неравномерностью, Известия ВТН, № 6 (1940).
9. Гольдфарб Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 8, № 5 (1947).
10. Лернер А. Я., Построение быстродействующих систем автоматического регулирования при ограничении значений координат регулируемого объекта, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. I, 1955.
11. Лернер А. Я., Улучшение динамических свойств автоматических компенсаторов при помощи нелинейных связей, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 2 и 4 (1952).
12. Лурье А. Н., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
13. Марьяновский Д. И., Устойчивость линейных систем автоматического регулирования, Электричество, № 9 (1946).
14. Марьяновский Д. И., Исследование устойчивости систем регулирования при введении внутренних связей, Электричество, № 3 (1950).
15. Мееров М. В., Некоторые вопросы устойчивости регулирования напряжения электрических генераторов, Вестник электропромышленности, № 9 (1943).
16. Мееров М. В., Критерий аperiodичности регулирования, Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1945).

---

\*) Здесь приведена только литература, которая упоминается в тексте или в той или иной степени использовалась при написании книги.

17. Мееров М. В., Об учете малых параметров при исследовании устойчивости систем авторегулирования, Электричество, № 6 (1947).
18. Мееров М. В., Системы автоматического регулирования, устойчивые при сколь угодно большом коэффициенте усиления, Автоматика и телемеханика, т. 8, № 4 (1947).
19. Мееров М. В., Принципы построения систем авторегулирования с малой установившейся ошибкой, Автоматика и телемеханика, т. 10, № 2 (1949).
20. Мееров М. В., Исследование системы регулирования и управления двигателя реверсивного прокатного стана с электромашинным регулятором, Электричество, № 7 (1949).
21. Мееров М. В., Об одном случае применения границы  $D$ -разбиения для оценки качества систем автоматического регулирования, Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1950).
22. Мееров М. В., Об использовании кривой  $D$ -разбиения для исследования качества систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 12, № 6 (1951).
23. Мееров М. В., Основы автоматического регулирования электрических машин, Госэнергоиздат, 1952.
24. Мееров М. В., Некоторые вопросы выбора структурной схемы системы автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 4 (1952).
25. Мееров М. В., О стабилизации систем, содержащих элементы с запаздыванием, Автоматика и телемеханика, т. 14, № 3 (1953).
26. Мееров М. В., Системы многосвязного регулирования, устойчивые при сколь угодно малой установившейся ошибке, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 1, 1955.
27. Мееров М. В., Оценка качества систем автоматического регулирования по картине кривой  $D$ -разбиения, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 11, 1955.
28. Мееров М. В., Об автономности многосвязных систем автоматического регулирования, устойчивых при сколь угодно больших коэффициентах усиления, Автоматика и телемеханика, т. 17, № 5 (1956).
29. Мееров М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956.
30. Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, № 3 (1938).
31. Неймарк Ю. И., Устойчивость линеаризованных систем, Изд. ЛКВВА, 1949.
32. Неймарк Ю. И., О периодических режимах и устойчивости релейных систем, Автоматика и телемеханика, т. 14, № 5 (1953).
33. Неймарк Ю. И., Теория релейных систем, Диссертация, 1956.
34. Понтрягин Л. С., О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, Изв. АН СССР, серия матем., т. 6, № 3 (1942).
35. Солодовников В. В., Об одном приближенном методе исследования динамики систем регулирования и следящих систем, Изв. АН СССР, ОТН, № 12 (1945).
36. Солодовников В. В., Частотный метод анализа следящих и регулируемых систем, Диссертация, 1949.
37. Трапезников В. А., Коган Б. Я., Принципы построения моделирующих установок для исследования процессов автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 13, № 6 (1952).
38. Фельдбаум А. А., К вопросу о синтезе оптимальных систем автоматического регулирования, Труды второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. 1, 1955.

39. Фельдбаум А. А., Простейшие релейные системы автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 10, № 4 (1949).
  40. Фельдбаум А. А., Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 14, № 6 (1953).
  41. Цыпкин Я. З., Системы с запаздывающей обратной связью, Автоматика и телемеханика, т. 8, № 3 (1947).
  42. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
  43. Bode H. W., Network analysis and feedback amplifier design., N. Y. 1945.
  44. Hopkin A., A phase-plane approach to the compensation of saturating servomechanisms, Trans. AIEE, v. 70, 1950.
  45. MacDonald O., Non linear techniques for improving servo-performance, Proc. NEC, v. 6, 1950.
  46. Nyquist H., Regeneration theory, Bell syst. Techn. Journ., v. 11, № 1 (1932).
  47. Peterson E., Kreer J. G. and Ware L. A., Regeneration theory and experiment, Bell syst. Techn. Journ., v. 13, № 4 (1934).
  48. Prinz D. G., Contributions to the theory of automatic controllers and followers. Journ. Sci. Instr., v. 21, № 4 (1944).
  49. Silva L. M., Predictor servomechanisms, Trans. IRE, 1954.
-

# Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
56	16 св.	$= \frac{K}{D(p)}$	$= \frac{K}{D(p)} x_{\text{вх}}(p)$
143	13 и 14 стр.	$- \prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega) \times \prod_{i=1}^n \frac{F_{n_i}(j\omega)}{F_{m_i}(j\omega)}$	$- \prod_{j=n+1}^N Q_j(j\omega)$

Зак. 3557.



Al  

---

10021