

1511
Б-70.3
В. Беллюстин

КАК ПОСТЕПЕННО ДОШЛИ ЛЮДИ
ДО НАСТОЯЩЕЙ
АРИФМЕТИКИ

171080

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СКВА 1923 ПЕТРОГРАД

05



Ms-342
6-43.

Ms-342

Ms-342

В. Беллюстин

511/09/
Б-434

КАК ПОСТЕПЕННО ДОШЛИ ЛЮДИ
ДО НАСТОЯЩЕЙ
АРИФМЕТИКИ

АРХИВ

1941

Публичная библиотека

Е. И. ... 1940.
Екатеринбург.

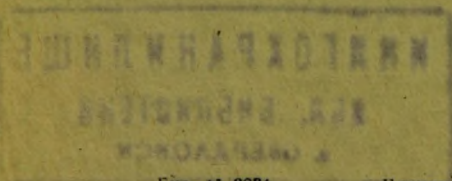
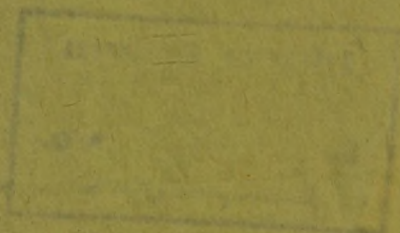
КНИГОХРАНИЛИЩЕ

БЕЛ. БИБЛИОТЕКИ

г. СЕРДАНОВСК

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1923 ПЕТРОГРАД

4



Гиз. № 3834.

Главлит. № 5574. Москва.

Напеч. 10.000 экз.

„Мосполиграф“ 1-я Образцовая типография, Пятницкая, 71.

544
1-13

Всякому, кто любитъ свой предметъ, бываетъ интересно знать, какъ онъ начался, какимъ путемъ онъ развивался и какъ онъ вылился въ свою послѣднюю форму. Въ этой книжкѣ изложена исторія ариметики, и очерки ея назначены для тѣхъ, кто чувствуетъ расположеніе къ математикѣ. Юнымъ математикамъ и прежде всего назначаю свой трудъ. Онъ же можетъ пригодиться и для педагога: для учителя крайне важно, чтобы расширился его кругозоръ, чтобы онъ могъ критически отнестись къ настоящему положенію преподаванія, и чтобы историческія данныя оживили обученіе и освѣтили его.

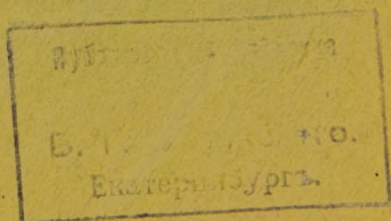
Въ Германіи имѣется масса сочиненій по исторіи математики; очевидно, они нужны и полезны. Пусть же и въ Россіи мой небольшой трудъ сослужитъ свою скромную службу *).

Начало ариметики.

27

Кто положилъ начало ариметикѣ и кто первый изъ людей «изобрѣлъ» счетъ, на это отвѣтить нельзя. Мы можемъ назвать лицо, которое изобрѣло компасъ или книгопечатаніе, порохъ и паровую машину; насъ можетъ интересовать, кто открылъ магнитъ или кто приготовилъ писчую бумагу; но никакъ нельзя рѣшить вопроса, кто положилъ начало счету. Умѣнье считать, по крайней мѣрѣ, въ небольшихъ предѣлахъ, а также и потребность считать присущи всякому мыслящему существу. Подобно тому, какъ живой человѣкъ непремѣнно дышитъ и

*) О первомъ изданіи этой книжки данъ отзывъ въ «Вѣстникѣ Воспитанія» I, 1908 г. и въ «Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики», № 445. Она названа «интересной», «просто, ясно и кратко написанной».



питается, такъ точно и человѣкъ, живущій сознательной жизнью, мыслить, говорить и, между прочимъ, считаетъ.

Итакъ, не можетъ быть и рѣчи о какомъ-то особомъ изобрѣтателѣ счета, такъ какъ эта потребность свойственна всѣмъ людямъ. Поэтому начало ариметики тонетъ въ тѣхъ же безпредѣльныхъ глубинахъ отдаленныхъ вѣковъ, какъ и начало человѣчества. Между тѣмъ наивные авторы старинныхъ учебниковъ искали, во что бы то ни стало, указать лицо или народъ, которымъ счетъ обязанъ своимъ началомъ. Такъ, напр., въ славянскихъ рукописяхъ время царя Алексѣя Михайловича эта честь приписывается «древле эллинскому мудрецу Пифагору, сыну Аггинанорову» или же «Сиру, сыну Асинорову», написавшему «численную сію философію (т.-е. ариметику) финическими письменами». Византійскіе историки среднихъ вѣковъ шли еще дальше и не стѣснялись признавать прямо чудесное происхожденіе ариметики: ее-де обнародовалъ на землѣ нѣкто Фениксъ, внукъ бога Нептуна.

Все это, конечно, фантазія; но на чемъ-нибудь должна же она быть основана. Такое основаніе можно видѣть въ общепризнанной славѣ, которою пользовался знаменитый греческій математикъ Пифагоръ, равно какъ и финикійцы, развитые, образованные и промышленные представители древняго міра, отважные мореплаватели, объѣзжавшіе на своихъ корабляхъ берега Средиземнаго моря. Финикійцамъ приписывается также изобрѣтеніе буквъ алфавита.

Первыя ступени счисленія.

Какъ считали наши предки, жившіе въ отдаленныя времена, за долго до Рождества Христова, — объ этомъ прямо и достовѣрно судить нельзя: письменныхъ свидѣтельствъ не сохранилось, да ихъ и не могло быть, потому что развитіе письменнаго счета зависитъ отъ общаго развитія образованія, а наши древнѣйшіе родичи находились, очевидно, на низшихъ ступеняхъ образованности. Судить о первыхъ шагахъ ариметики мы можемъ только по догадкамъ, сравнительно; средствомъ же для сравненія являются тѣ дикіе и малообразованные народы, затерявшіеся въ укромныхъ уголкахъ внутренней Африки, Америки и т. д., которые въ настоящее время едва выходятъ изъ первобытнаго состоянія

Займемся американскими индѣйцами и африканскими неграми. Индѣйцы Таманаки пользуются при счетѣ пальцами рукъ и ногъ. Вмѣсто «одинъ» они говорятъ «палецъ» и при этомъ обязательно протягиваютъ палецъ; вмѣсто «два» — «два пальца», «три» — «три пальца». Пять у нихъ зовется «рука», 6 — «палецъ на другой рукѣ», 7 — «два пальца на другой рукѣ», 10 — «двѣ руки». Покончивши съ руками, они перебираются къ ногамъ, и такъ какъ обувь не закрываетъ ихъ ногъ, то продолжаютъ считать наглядно: 11 — «палецъ на ногѣ», 12 — «два пальца на ногѣ», 15 — «нога и двѣ руки», 16 — «палецъ на другой ногѣ». Но вотъ подходитъ дѣло къ 20-ти, использованы, слѣдовательно, и руки и ноги, тогда является на помощь «человѣкъ». 20 называется «человѣкъ», такъ какъ у него 20 пальцевъ; какъ же выразить, напр., 27? Это будетъ — «2 пальца на другой рукѣ другого человѣка». Сотня замѣняется у нихъ пятью человѣками, а выше сотни бѣдные индѣйцы едва ли и порываются считать, потому что у нихъ нѣтъ для этого ни потребностей, ни развитія. Кстати сказать, и эскимосы, обитатели холодныхъ странъ Сѣверной Америки, вмѣсто «20» говорятъ «человѣкъ» и вмѣсто «100» пять человѣкъ.

Караибы на Антильскихъ островахъ и по рѣкѣ Ориноко даютъ первымъ четыремъ числамъ особыя имена, но 5 у нихъ замѣняется словами «четыре и одинъ», 6 — «рука и одинъ», 7 — «рука и два», 20 — «столько, сколько руки и ноги», 30 — «столько, сколько руки и ноги, и еще 2 руки лишнихъ».

Удивительна склонность индѣйцевъ и негровъ не довольствоваться однимъ словеснымъ счетомъ, а всячески дополнять его выразительными жестами. Говоря «шесть», они протягиваютъ 6 пальцевъ. Дойдя до 20, они разставляютъ ноги, вытягиваютъ руки и растопыриваютъ пальцы.

Зулусы въ Южной Африкѣ пользуются очень похожимъ обычаемъ. Они обходятся безъ ногъ и ведутъ расчеты на однихъ рукахъ. Они начинаютъ счетъ съ мизинца лѣвой руки. Когда окончатъ первый десятокъ, то второй десятокъ ведутъ уже съ мизинца правой руки. Если, напримѣръ, на правой рукѣ протянуты мизинецъ и безымянный палецъ, то это означаетъ 12. Послѣ каждаго десятка они хлопаютъ рукой объ руку. Чтобы выразить, наприм., число 35, имъ надо трижды хлопнуть рукой объ руку и протянуть 5 пальцевъ правой руки.

Такимъ образомъ, пальцы для того человѣка, который едва умѣетъ

считать, являются неоцѣненнымъ и удобнѣйшимъ пособіемъ. Это мы можемъ прослѣдить во всѣхъ странахъ земного шара и у всѣхъ людей. Для счета имъ нужно наглядное пособіе, а какое же пособіе ближе къ человѣку, какъ не его собственные пальцы? Особенно ихъ любятъ дикари и малыя дѣти.

Теперь является вопросъ: какъ быть съ числами, которыя включаютъ въ себѣ десятки и сотни? Какъ ихъ выразить при помощи пальцевъ? Отвѣтить на это могутъ нѣкоторые племена Южной Африки, которыя для единицъ берутъ одного счетчика, для десятковъ другого, а для сотенъ третьяго. Какъ только первый счетчикъ насчитаетъ по пальцамъ десять, второй сейчасъ же замѣчаетъ это у себя на пальцахъ, т.е. протягиваетъ мизинецъ. Когда второму придется протянуть всѣ 10 своихъ пальцевъ, то третій замѣчаетъ получившуюся сотню однимъ пальцемъ своей руки.

Дикари, подобно малымъ дѣтямъ, не нуждаются въ большихъ числахъ. Толчокъ къ развитію счета дается обыкновенно лишь возникновеніемъ торговли и промышленности. Самая нехитрая торговля—мѣновая, когда покушникъ даетъ одинъ товаръ, а продавецъ взаменъ того другой. Мѣновая торговля сама уже приводитъ къ мысли, что счетъ можно вести на какихъ угодно предметахъ. У какихъ только предметовъ при первоначальной мѣновой торговлѣ не берется простодушными торговцами въ пособіе для счета! Напр., негритянскіе купцы постоянно носятъ съ собою мѣшочки съ маисовыми зернами, иногда и съ камешками. Какъ только дѣло подходитъ къ расчету, они сейчасъ же высыпаютъ зерна и пользуются ими, какъ очень удобнымъ пособіемъ. И съ какимъ искусствомъ, съ какою ловкостью безграмотный негръ подводитъ итоги, высчитываетъ прибыль и убытокъ при помощи своихъ зернышекъ! Онъ не станетъ втупикъ даже и при составныхъ именованныхъ числахъ, такъ какъ для каждой мѣры у него въ запасѣ есть особый сортъ зернышекъ. Конечно, всѣ ихъ хитросплетенія покажутся намъ, знающимъ ариметику, наивными и незамысловатыми. Такъ, напр., сторговавши нѣсколько кусковъ матеріи, негры кладутъ противъ каждого куска столько камешковъ, сколько монетъ надо отдать за кусокъ, и потомъ все это сосчитываютъ.

Трудно даются первые шаги счета мало образованнымъ народамъ. Также и дѣтямъ нашимъ нелегко приходится, когда они начинаютъ

счисленіе. Необходимо нужны наглядныя пособія. Всякій человекъ и все народы прибѣгали къ нимъ и прибѣгаютъ, потому что потребности въ наглядности лежатъ въ природѣ человека. Кромѣ камешковъ, зернышекъ и т. д., можно пользоваться зарубками, чертами, крестиками. Такъ, индѣецъ дѣлаетъ зарубку на деревѣ всякій разъ, какъ онъ добываетъ свалышъ. И у насъ въ Россіи въ простомъ народѣ, среди неграмотныхъ крестьянъ, черточки и зарубки въ большомъ употребленіи: сельскій староста отмѣчаетъ ими поступленіе податей, плотникъ порядокъ бревенъ, молочница выданное молоко. Ацтеки, старинные обитатели Мексики, предпочитали обозначать числа точками, при чемъ они располагали точки не какъ придется, а въ видѣ правильныхъ фигуръ, въ родѣ тѣхъ, какія теперь у насъ рисуются на игральныхъ картахъ. Когда у счетчиковъ накапливалось много камешковъ, шариковъ или косточекъ, то чтобы ихъ не растерять, они нанизывали ихъ на шнурочки или прутья. Этимъ былъ данъ толчокъ къ изобрѣтенію счетныхъ приборовъ, изъ которыхъ прежде всего нужно упомянуть русскіе торговые счеты и китайскій инструментъ «сванъ-панъ», очень похожій на наши счеты.

Начальныя числительныя имена.

Рука объ руку съ развитіемъ счисленія идетъ и образованіе числительныхъ именъ. Числа—это идеи; они требуютъ словеснаго выраженія.

Филологи, знатоки языковъ, не мало и съ большимъ успѣхомъ потрудились надъ вопросомъ, какъ образовались слова, выражающія числа: «одинъ», «два» и т. д.? Они признали, что, вѣроятно, первыя числительныя имена взяты отъ тѣхъ вещей, которыя встрѣчаются всегда въ опредѣленномъ количествѣ, и именно въ такомъ, каково само число. Такъ, у индусовъ слово «два» созвучно со словомъ «глазъ»; у малайцевъ, (на островѣ Явѣ) слово пять обозначаетъ въ тоже время руку. И это понятно: глаза обыкновенно встрѣчаются въ количествѣ двухъ, а пальцы въ количествѣ пяти. И у насъ въ славянскомъ языкѣ «пять» созвучно съ «пядь»: подъ пядью разумѣется длина, которая равна разстоянію между растопыренными крайними пальцами руки.

Но само собой разумѣется, что отъ сходства словъ можетъ произойти смѣшеніе и сбивчивость понятій. Поэтому у образованныхъ націй давно, съ незапамятныхъ временъ, выработались особенныя числительныя имена, которыя не сходны съ именами какихъ бы то ни было предметовъ. Что это случилось очень давно, мы можемъ видѣть на примѣрѣ индо-европейской семьи народовъ, и доказывается это такимъ соображеніемъ. Мы, славяне, а также нѣмцы, французы, индусы и греки должны считаться отдѣльными отпрысками общаго корня, обитавшаго въ глубокой древности въ Индостанѣ. Легко прослѣдить, что первыя числительныя имена очень сходны и созвучны во всѣхъ индо-европейскихъ языкахъ, а изъ этого мы вправѣ вывести, что эти числительныя имена выработались еще въ ту отдаленную эпоху, когда не было великаго расселенія народовъ, и когда вся индо-европейская семья жила вмѣстѣ и пользовалась общимъ языкомъ.

Вотъ таблица, въ которой представлены латинскими буквами числительныя имена изъ 5 иностранныхъ языковъ и изъ 6-го нашего русскаго цифрами.

Русскій языкъ . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Санскритскій	eka	dva (dvi)	tri	catvâr	pāncan	sas	sāptau	āstan	nāvan	dāsan
Отаро-французскій . .	unan (un)	daou	tri	peuar	pemp	c eab	seis	eis	nao	dek
Нѣмецкій	ein	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn
Латинскій	unus	duo	tres	quatuor	quinque	sex	septem	octo	novem	decem
Греческій	heis	duo	treis	tessares	pente	hex	hepta	octo	ennea	deka

Различныя системы счисленія.

Почти всѣ цивилизованныя народы древняго и новаго міра ввели у себя десятичную систему счета. Именно они считаютъ единицами до десяти, десятками — до сотни, сотнями — до тысячи и т. д. Иначе

сказать: десять единиц составляют десятокъ, десять десятковъ — сотню, десять сотенъ тысячу и т. д. Откуда же произошло такое удивительное согласіе всѣхъ людей? Почему у всѣхъ одна система счета? Немыслимо вѣдь допустить, что обитатели различныхъ точекъ земного шара устроили нѣчто въ родѣ совѣщанія, на которомъ и постановили принять одну общую систему. Разгадка, очевидно, заключается въ слѣдующемъ. Отвлеченный счетъ начался у всѣхъ народовъ съ предметнаго, нагляднаго, а лучшимъ пособіемъ для счета, какъ наиболѣе доступнымъ и удобнымъ, являются для человѣка его пальцы. Что ближе пальцевъ, проще и дешевле? Смѣются надъ неграмотными, надъ малыми дѣтьми и надъ старухами, когда они безъ пальцевъ не могутъ счесть и малыхъ чиселъ: это напрасно, потому что потребность въ наглядномъ представленіи идей при помощи предметовъ присуща человѣческой природѣ, и всякій человѣкъ, который мало развитъ, ищетъ нагляднаго пособія, стремится выбрать наиболѣе удобное и невольно наталкивается въ нашемъ случаѣ на пальцы.

Впрочемъ, прибѣгая къ пальцамъ, мы могли бы выработать не только десятичную систему, но и пятеричную, двадцатеричную. Если пользоваться одной рукой, то будетъ пятеричная система, двумя — десятичная, руками и ногами двадцатеричная. Въ такомъ случаѣ мы стали бы считать пятками, 5 пятковъ соединить въ новую группу, 5 такихъ группъ въ еще большую новую и т. д. Это мы и видимъ у нѣкоторыхъ африканскихъ народовъ, которые любятъ считать пятками и вмѣсто «шесть» говорятъ «пять одинъ», вмѣсто «семь» — «пять два» и т. д. По примѣру многихъ народовъ, — напр., феллаховъ, индѣйцевъ, можно судить, что пятеричная система является очень древней и, можетъ быть, даже болѣе древней, чѣмъ десятичная, такъ что отсюда можно предположить, что люди считали нѣкогда пятками и ужъ позднѣе перешли къ счету десятками.

Что касается двадцатеричной системы, то во всей чистотѣ она, правда, не встрѣчается, но въ смѣшеніи съ десятичной ее можно прослѣдить во многихъ случаяхъ. Такъ, индѣйцы Майя въ Юкатанѣ пользуются особыми словами для чиселъ 20, 400 (20 разъ по 20), 8000 (20 разъ по 400) и 160000 (20 разъ по 8000). У ацтековъ въ Мексикѣ были особые слова для чиселъ 20, 400, 8000. Остатки двадцатеричной системы замѣтны и во французскомъ языкѣ: quatre

vingt=80, т. е. четырежды 20; sixvingt, quinze vingt. Также и въ датскомъ языкѣ слово шестьдесятъ (tresindstive) выражаетъ трижды двадцать, а слово восемьдесятъ (firsindstive)—четырежды двадцать.

Пальцевыя системы—самыя старинныя и древнія, и самыя распространенныя. Но, кромѣ нихъ, есть и другія, изъ которыхъ прежде всего мы назовемъ счетъ дюжинами, или двѣнадцатеричную систему. Это очень распространенный счетъ. Мы тоже нерѣдко считаемъ дюжинами, напр., посуду, перья, карандаши, бѣлье. Откуда взялось такое обыновеніе? На это прямо отвѣтить нельзя, потому что мы не знаемъ; знаемъ только что оно въ особенномъ ходу было у римлянъ и у нихъ имѣть корень, повидимому, въ томъ, что въ году 12 мѣсяцевъ. При счетѣ дюжинами мы идемъ до 12 дюжинъ, такъ что 12 дюжинъ составляютъ новую единицу «гроссъ»; въ каждой коробкѣ перьевъ, обыкновенно, бываетъ ровно «гроссъ»; также и карандаши связываются въ большія пачки по гроссамъ; счетъ гроссами идетъ до 12-ти, а 12 гроссовъ даютъ уже новую единицу—«массу». Счетъ дюжинами, гроссами и массаами очень удобенъ и даже могъ бы быть удобнѣе счета десятками и сотнями, но онъ привился слабо, и всѣ наши числительныя имена примѣнены къ десятичному счету, а не къ дюжинному; языкъ, конечно, передѣлать нельзя, и это очень жаль, потому что при дюжинномъ счетѣ много облегчилось бы вычисленіе, сравнительно съ десятичнымъ; напр., самое трудное изъ четырехъ дѣйствій, дѣленіе, не такъ бы часто производило къ остаткамъ и къ дробямъ, какъ сейчасъ, потому что 12 дѣлится на 2, на 3, 4, 6, между тѣмъ 10 разлагается только на 2 и на 5, и поэтому при дѣленіи приходится очень часто получать остатки и дроби. Особенно любили римляне число 12 въ дробяхъ. Двѣнадцатыя доли назывались у нихъ унціями. Это были двѣнадцатыя части какой угодно величины, такъ напр., $\frac{1}{12}$ хлѣба называлась унціей хлѣба, $\frac{5}{12}$ капитала составляли 5 унцій капитала. Въ настоящее время унціи остались только въ «латинской кухнѣ», т. е. въ аптекарскомъ вѣсѣ, именно, унція составляетъ $\frac{1}{12}$ аптекарскаго, иначе сказать, римскаго фунта (римскій фунтъ на $\frac{1}{8}$ меньше нашего); въ древности эти доли были въ повсемѣстномъ употребленіи до того, что, напр., вмѣсто $\frac{1}{8}$ писали $1\frac{1}{2}$ унцій, для $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, до $\frac{11}{12}$ имѣлись особыя значки, въ родѣ цифръ, и особыя названія;

вообще двѣнадцатыя доли напминали собою скорѣе именованныя числа, чѣмъ дѣйствительныя дроби.

Мы рассмотрѣли счетъ дюжинами. Теперь займемся счетомъ группами по 60; такъ считали халдеи. Халдеи были волхвами, звѣздочетами и астрономами древности; имъ мы обязаны тѣмъ, что въ часѣ 60 минутъ и въ минутѣ 60 секундъ, также и въ угловомъ градусѣ 60 минутъ; у нихъ, между прочимъ, и день дѣлится на 60 часовъ. Число выше 60 халдеи разлагали на 60 и на остатокъ; напр., чтобы выразить 87, они говорили 60 и 27. Число 60 имѣло у халдеевъ свое особое названіе «soss», также и 3600, равное 60×60 , специально называлось словомъ «sag». Работы халдеевъ въ астрономіи были выдающимися въ древнемъ мірѣ. Неудивительно поэтому, что ихъ вліяніе чувствуется и въ позднѣйшей наукѣ; отсюда происходитъ то предпочтеніе, которое дается числу 60 въ астрономіи. Халдеи считали въ году 360 дней, т.-е. 60×6 , и окружность дѣлили на 360 равныхъ частей или градусовъ; слѣдовательно, градусомъ экватора они считали путь, который пробѣгаетъ солнце въ одинъ сутки.

Вотъ мы поименовали самыя употребительныя системы счета; изъ нихъ самая распространенная и развитая—десятичная: счетъ десятками можно прослѣдить у всѣхъ народовъ, не исключая даже и тѣхъ, которые предпочитали пользоваться пятами и дюжинами или же группами по 20 и по 60.

Изъ другихъ системъ, не приведенныхъ нами, мы можемъ указать лишь слабыя намекы; такъ напр., ново-зеландцы считаютъ группами въ 11, и у нихъ есть особыя коренныя слова для 11, 121 ($=11 \times 11$), 1331 ($=11 \times 11 \times 11$); на ихъ языкѣ 12 замѣняется одиннадцатью однимъ, 13—одиннадцатью двумя, 22—дважды одиннадцать, 33 трижды 11 и т. д.

Вспомнимъ, встати, что наши предки тоже считали иногда при помощи особыхъ своеобразныхъ единицъ—сороковъ: сорокъ сороковъ церквей, пять сороковъ соболей; слѣдовательно, у нихъ единицей счета служила группа въ сорокъ.

Итакъ, у всѣхъ народовъ идетъ счетъ десятками, сотнями, тысячами и т. д. Какъ же изъ этихъ группъ или изъ этихъ сложныхъ единицъ образуются многозначныя числа? Въ нашемъ русскомъ языкѣ для этого обыкновенно существуетъ одинъ путь: сложеніе и повторе-

ніе. Что значить, напр., тринадцать? три-на-десять, т.-е. $10+3$, здѣсь мы видимъ сложеніе; что значить тридцать? тридцать—трижды десять: здѣсь встрѣчаемъ мы повтореніе, иначе сказать умноженіе 10 на 3; въ выраженіи «триста двадцать» содержится два повторенія «три-ста», «два-десять» — и одно сложеніе—«триста двадцать». Но не такъ просто рѣшается этотъ вопросъ въ другихъ языкахъ. Въ нихъ для образованія сложныхъ чиселъ берутся и другія два дѣйствія,—вычитаніе и дѣленіе; напр., по-латыни восемнадцать будетъ *duodeviginti*, это значитъ двадцать безъ двухъ, девятнадцать—*undeviginti*, это значитъ двадцать безъ одного. По-санскритски 95 выражается черезъ *pancho pangsatam*, что значитъ сто безъ пяти. Что касается дѣленія, то имъ иногда образуются числа и у насъ, напр., вмѣсто «пятьдесятъ» говорятъ часто полсотни. Въ датскомъ языкѣ 60 выражается черезъ трижды двадцать (*tresindstyve*)—объ этомъ мы говорили выше, а 50 черезъ $2\frac{1}{2}$ раза по 20—*halvtresindstyve*, здѣсь уже дѣленіе. Но вообще говоря, чѣмъ система счета развитѣе, тѣмъ болѣе приближается она къ десятичной и тѣмъ яснѣе проявляется образованіе чиселъ при помощи сложенія и умноженія. У насъ, напр., въ русскомъ языкѣ числа отъ 11 до 20 словесно выражены не очень ясно, напр., «пятнадцать» вмѣсто «десять и пять», но начиная съ 21, составъ чиселъ уже гораздо яснѣе, и мы встрѣчаемъ такіа выраженія: «двадцать пять», «тридцать шесть» и т. п., въ которыхъ десятки ясно разграничены съ единицами; подобно этому полные десятки въ предѣлѣ ста выражены не совсѣмъ ясно: «тридцать» вмѣсто «три десятка», а сотни выражены уже яснѣе: «триста» вмѣсто «три сотни», а тысячи совершенно ясно: «три тысячи». Нашимъ дѣтямъ, которыя начинаютъ учиться ариметикѣ, легче въ этомъ случаѣ, чѣмъ напр., нѣмецкимъ; тамъ для чиселъ 11 и 12 употребляются такіа слова, изъ которыхъ не видно разложенія ихъ на десятковъ и единицы; кромѣ того, въ двухъзначныхъ числахъ въ нѣмецкомъ языкѣ выговариваются сперва единицы, а потомъ уже десятки, т.-е. какъ разъ обратно тому, какъ числа обозначаются письменно.

Предѣлъ чисель.

Каковъ предѣлъ чисель, иначе сказать: до какого самого большого числа доходить тотъ или другой народъ при счетѣ и вычисленіи?

Живетъ въ настоящее время два дикихъ племени, Жури и Каирири, которые считаютъ только по одной рукѣ и такимъ образомъ доходить только до пяти. Есть еще хуже. Низшія племена Бразиліи считаютъ обыкновенно по суставамъ пальцевъ и добираются этимъ путемъ только до трехъ. Все, что выше 2-хъ, они выражаютъ общимъ словомъ «много». Цивилизованные народы древнѣйшихъ временъ, какъ-то: халдеи, евреи и китайцы, не заходили въ счетъ слишкомъ далеко. Въ халдейскихъ надписяхъ и памятникахъ нигдѣ не встрѣчается упоминанія о миллионѣ. Въ Библии есть, правда, выраженія «тысяча тысячъ» и «тысяча разъ по десяти тысячъ», однако подъ ними никакъ нельзя разумѣть определенныхъ чисель, скорѣй же это картинное обозначеніе какихъ-то громадныхъ, неизмѣримыхъ количествъ. Не даромъ наши предки славяне принимали десять тысячъ за «тѣму», какъ за что-то туманное и пеленное, до чего нельзя и досчитаться. Еще сильнѣе употреблявшееся у нихъ выраженіе «невѣдіе»; въ старинныхъ рукописныхъ славянскихъ ариметикахъ оно обозначало сотню тысячъ. Древнѣйшій культурный народъ Азии, китайцы, слабые, впрочемъ, математики, считали тысячу и десять тысячъ вѣнцомъ всѣхъ чисель: друзьямъ они желаютъ жить тысячу лѣтъ, а императору десятокъ тысячъ. Изъ всего этого видно, что большинство народовъ древности, даже и очень образованныхъ, довольствовались въ ариметикѣ первыми 4 разрядами и дальше тысячъ при счетѣ не шли.

Но кто особенно любилъ большія числа, такъ это индусы, горячіе поклонники ариметики и ея творцы. Умѣнье обращаться съ громаднѣйшими числами считалось у нихъ признакомъ чрезвычайной смысленности и ставилось въ высокую заслугу. Даровитый математикъ такъ же былъ славенъ въ Индіи и достигалъ такой же популярности, какая у насъ выпадаетъ на долю только побѣдителя или поэта. Интересна легенда о нѣкоемъ индусѣ Bodisattva, какъ онъ сталъ свататься за

одну дѣвушку, и какъ отецъ невѣсты соглашался отдать ее только въ томъ случаѣ, если юноша докажетъ свое особое искусство въ письмѣ, въ единоборствѣ, въ бѣгѣ и въ ариметикѣ. По требованію отца, *Vo-disattva* даетъ названія громаднымъ числамъ, кончая единицей 54-го разряда, т. е. онъ оказывается въ состояніи прочесть число, выраженное длинной строкой въ 54 цифры, и что всего поразительнѣе, такъ это то, что онъ выговариваетъ числа не по одному способу, а по нѣсколькимъ, по 6 или 7. Въ заключеніе ему даютъ задачу: пусть бы онъ указалъ самую наименьшую долю длины, какую только можетъ онъ придумать. Онъ назвалъ и указалъ

1
108 470 495 616 000 индусской

мѣры длины. Онъ началъ такъ: эта доля, которую я указываю, составляетъ седьмую часть тончайшей пылинки; 7 тончайшихъ пылинокъ составляютъ одну небольшую пылинку; изъ 7 небольшихъ выходитъ такая, которую кружить вѣтеръ; ихъ 7 даютъ одну, пристающую къ ногѣ зайца; 7 подобныхъ послѣдней даютъ одну, пристающую къ ногѣ барана; 7 пристающихъ къ ногѣ барана образуютъ одну, пристающую къ ногѣ буйвола; 7 пылинокъ буйвола составляютъ маковое зернышко; 7 маковыхъ зернышекъ даютъ горчичное зерно, 7 горчичныхъ — ячменное, 7 ячменныхъ даютъ длину сустава пальца, изъ 12 суставовъ получаемъ пядь, изъ двухъ пядей — локоть, 4 локтя составляютъ локъ и, наконецъ, 4000 локтей даютъ индусскую мѣру длины, такъ наз. «убана». Таковъ переходъ отъ этой мѣры къ самой малой долѣ и такова дробь, выраженная, по-нашему, въ триллионныхъ частяхъ.

Знаменитые математики древней Греціи, Пифагоръ и Архимедъ, не такъ интересовались ариметикой, какъ геометрией. Ариметика у нихъ была не своя, а заимствованная главнымъ образомъ у индусовъ. Неудивительно поэтому, что великій математикъ Пифагоръ ограничивался въ своихъ вычисленіяхъ только 16-ю разрядами счетныхъ единицъ и заканчивалъ, если перевести числа на нашу систему, квадриллионами (единица съ 15 нулями). Но Архимедъ пошелъ въ этомъ случаѣ довольно далеко. Подражая индусамъ, онъ поставилъ себѣ такую задачу: высчитать число песчинокъ во всей вселенной, даже и въ томъ предположеніи, что весь міръ состоитъ изъ песчинокъ. Архимедъ рѣшилъ задачу такъ. Пусть, говоритъ онъ, вся вселенная образуетъ шаръ съ центромъ на солнцѣ и съ радиусомъ, равнымъ разстоянію отъ солнца

до земли. Пусть вся вселенная состоитъ изъ песчинокъ и притомъ изъ такихъ мелкихъ, что тысяча песчинокъ равна маковому зерну. Предположимъ, что 40 маковыхъ зеренъ, уложенныя въ рядъ, образуютъ дюймъ длины. При всѣхъ этихъ условіяхъ, по вычисленію Архимеда, песчинка во всей вселенной менѣе, чѣмъ сколько выражаетъ число, обозначенное единицей съ 64 нулями. Интересно, какъ же выговорить такое громадное число или какъ его представить въ наглядномъ и доступномъ видѣ? Архимедъ идетъ такимъ путемъ: 10000 простыхъ единицъ онъ называетъ мириадой. Мириада мириадъ=100 000 000, это будетъ единица 9-го разряда. Назовемъ ее хоть группой. Группа группъ будетъ единицей 17-го разряда=100 000 000 000 000 000. Назовемъ эту группу группъ хоть массой. Тогда масса массъ составитъ единицу 33-го разряда. Назовемъ ее, пожалуй, хоть громадой. Тогда громада громадъ будетъ составлять единицу 65-го разряда и явится отвѣтомъ на задачу Архимеда.

Подобную систему, позволяющую выражать громадные количества, встречаемъ мы въ старинныхъ рукописныхъ славянскихъ арифметикахъ (XVI—XVII в. по Р. Х.). Она носитъ названіе «числа великаго словенскаго» и представляетъ изъ себя нумерацію, развитую подробно, остроумно и своеобразно. Не безъ вліянія на эту нумерацію осталась польская ученость, которая во времена, предшествовавшія Петру Великому, питала и растила зачатки русской образованности, въ особенности же въ свѣтской ея части; польская наука заимствовала, въ свою очередь, все содержаніе и силу изъ Западной Европы, Европа у арабовъ, арабы многому научились у индусовъ. Вотъ какая длинная цѣпь переходовъ и ступеней нужна была для того, чтобы арифметическія знанія индусовъ сдѣлались собственностью русскихъ. И времени для этого потребовалось не мало,—цѣлыя столѣтія: что въ Индіи извѣстно было вскорѣ по Р. Х., то къ намъ въ Россію прибыло едва въ 17 столѣтіи. Вотъ таблица «числа великаго словенскаго», употреблявшаяся въ томъ случаѣ, «когда прилучался великій счетъ и перечень», и содержавшая въ себѣ 50 счетныхъ единицъ: 1) единь, 2) десять, 3) сто, 4) едина тысяча, 5) десять тысячъ, 6) сто тысячъ, 7) едина тма, 8) десять темъ, 9) сто темъ, 10) тысяча темъ, 11) десять тысячъ темъ, 12) сто тысячъ темъ, 13) единъ легіонъ, 14) десять легіоновъ, 15) сто легіоновъ, 16) тысяча легіоновъ, 17) десять тысячъ легіоновъ, 18) сто тысячъ

легіоновъ, 19) тьма легіоновъ, 20) десять темъ легіоновъ, 21) сто темъ легіоновъ, 22) тысяча темъ легіоновъ, 23) десять тысячъ темъ легіоновъ, 24) сто тысячъ темъ легіоновъ, 25) единъ леодръ, 26) десять леодровъ, 27) сто леодровъ, 28) тысяча леодровъ, 29) десять тысячъ леодровъ, 30) сто тысячъ леодровъ, 31) тьма леодровъ, 32) десять темъ леодровъ, 33) сто темъ леодровъ, 34) тысяча темъ леодровъ, 35) десять тысячъ темъ леодровъ, 36) сто тысячъ темъ леодровъ, 37) единъ легіонъ леодровъ, 38) десять легіоновъ леодровъ, 39) сто легіоновъ леодровъ, 40) тысяча легіоновъ леодровъ, 41) десять тысячъ легіоновъ леодровъ, 42) сто тысячъ легіоновъ леодровъ, 43) тьма легіоновъ леодровъ, 44) десять темъ легіоновъ леодровъ, 45) сто темъ легіоновъ леодровъ, 46) тысяча темъ легіоновъ леодровъ, 47) десять тысячъ темъ легіоновъ леодровъ, 48) сто тысячъ темъ легіоновъ леодровъ, 49) вранъ, 50) колода. «Сего числа нѣсть больші», прибавляютъ рукописи въ заключеніе.

Кромѣ того, у русскихъ XVI—XVII вѣка по Р. Х. была еще другая система счета, такъ сказать, обиходная, будничная. Это — «малое число». По этой системѣ единицами счета являются: единица простая, десятокъ, сотня, тысяча, тьма = 10 000, легіонъ = 100 000 и леодръ = 100 000.

Замѣчательно, что и средневѣковые китайскіе ученые доводятъ нумерацию до 53-го разряда. И совпаденіе предѣла, и нѣкоторые другіе историческіе факты приводятъ къ вѣроятному предположенію, что не всегда Китай былъ такъ уединенно замкнутъ, какъ въ наши времена, и что индусская ученость, въ пору расцвѣта своей силы, т. е. лѣтъ тысячу тому назадъ, проникла и къ китайцамъ и проявила свое дѣйствіе тамъ.

Чтобы закончить выясненіе предѣла чиселъ, мы остановимся еще немного на преданіи о той наградѣ, китерую изобрѣтатель шахматной игры пожелалъ получить отъ шаха Шерама. Это преданіе свидѣлствуетъ опять-таки о склонности индусовъ къ громаднымъ вычисленіямъ. Гласитъ оно слѣдующее. Шахъ Шерамъ такъ былъ восхищенъ только что изобрѣтенной шахматной игрой, что предложилъ изобрѣтателю назначить самому себѣ награду. Тотъ и назначилъ: «положи», говорить, «шахъ, мнѣ на первую клѣтку доски 1 пшеничное зернышко, на 2-ю два, на 3-ю 4, на 4-ю 8 и т. д., на каждую послѣдующую вдвое больше, чѣмъ на предыдущую». Клѣтокъ въ доскѣ 64. Шахъ посчиталъ

согласиться, но когда стали высчитывать количество зеренъ, то оказалось, что получается нѣчто необъятное, и что столько зеренъ нечего и думать набрать, хотя бы начать собирать ихъ со всей земли. Отвѣтъ такой: 18 446 744 073 709 551 615.

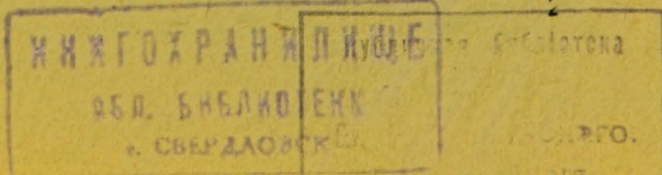
Счетные приборы.

Всякій отдѣльный человѣкъ и всякій отдѣльный народъ на первыхъ ступеняхъ своего развитія бываетъ склоненъ къ предметному счету. Какъ дѣтямъ, такъ и дикарямъ свойственно начитать счетъ съ пальцевъ. Отъ пальцевъ они переходятъ робкими попытками и съ большой нерѣшительностью къ счету на другихъ предметахъ, обыкновенно на близкихъ имъ и обиходныхъ, напр., на черточкахъ, зарубкахъ, крестикахъ, костяшкахъ и т. п. Они еще очень далеки въ этомъ случаѣ отъ устнаго счета и отъ письменныхъ вычисленій. Продолжая развивать свою привычку къ наглядному счету, человѣкъ доходитъ до сложныхъ системъ, которыя онъ проявляетъ въ особенныхъ счетныхъ приборахъ и аппаратахъ. Одни только индусы, у которыхъ наука восходитъ къ такой же сѣдой древности и къ такимъ же необъятнымъ глубинамъ прошедшихъ вѣковъ, какъ у египтянъ и китайцевъ, и у которыхъ образованіе начало развиваться за тысячи лѣтъ до Р. Х.,—одни они успѣли освободиться отъ помощи предметовъ во время счета и занялись чисто-умственнымъ, преимущественно устнымъ, счетомъ. У остальныхъ же народовъ, какъ образованныхъ, такъ и мало развитыхъ, мы встречаемъ множество наглядныхъ пособій.

Укажемъ прежде всего на счетъ по пальцамъ и притомъ не на простой способъ постепеннаго загибанія пальцевъ, а на оригинальные приемы, изобрѣтенные по большей части римлянами.

Римляне были большіе любители всевозможныхъ вычисленій на пальцахъ. Между прочимъ, путемъ разгибанія и загибанія пальцевъ, а также путемъ вытягиванія и складыванія рукъ, они умѣли выражать числа отъ 1 до милліона. При этомъ 3 пальца лѣвой руки, начиная съ мизинца, служили у нихъ въ различныхъ комбинаціяхъ для про-

БЕЛЛОСТИВЪ.



стыхъ единицъ, остальные пальцы лѣвой руки—для десятковъ, большой и указательный пальцы правой руки для сотенъ, а остальные для тысячъ. Чтобы выразить, напр., простую единицу, они загибали мизинецъ, чтобы выразить 2, пригибали 4-й и 5-й палецъ къ ладони, для 3-хъ—3-й палецъ; число 90, напр., обозначалось указательнымъ пальцемъ, пригнутымъ къ ладони; для обозначенія десятковъ тысячъ они клали лѣвую руку на грудь, бедро, для сотенъ тысячъ пользовались такимъ же образомъ правой рукой; складываніе рукъ крестъ-накрестъ соотвѣтствовало миллиону.

Римляне не только могли замѣчать на пальцахъ большія числа, но они умѣли производить при помощи пальцевъ нѣкоторыя дѣйствія. И сейчасъ еще потомки римлянъ, румыны и южные французы, въ состояніи быстро и искусно продѣлывать на пальцахъ таблицу умноженія.

Положимъ, дано умножить 6 на 8; тогда протягиваемъ на одной рукѣ 1 палецъ, т. е. ровно столько, насколько первый множитель больше пяти, а на второй рукѣ протягиваемъ 3 пальца, потому что, согласно такому же разсчету, 8 больше 5-ти на три; количество протянутыхъ пальцевъ складываемъ, и это будетъ число десятковъ—4; количества же пригнутыхъ пальцевъ перемножаемъ: $4 \times 2 = 8$, тогда получимъ единицы произведенія, $4 \text{ дес.} + 8 = 48$.

Еще примѣръ: 8×9 ; такъ какъ 8 больше 5-ти на 3, а 9 на 4, то надо протянуть на первой рукѣ 3 пальца, а на второй—4, тогда останется согнутыхъ пальцевъ на первой рукѣ 2, на второй—1; теперь мы складываемъ количество протянутыхъ: $3 + 4 = 7$, и перемножаемъ количества согнутыхъ: $1 \times 2 = 2$, отвѣтъ 72.

На чемъ же основанъ этотъ остроумный и быстрый приемъ? Имъ такъ любили пользоваться шольники, особенно среднихъ вѣковъ, когда имъ не давалась многотрудная таблица умноженія. Основаніе его лучше всего можно объяснить алгебраической формулой, и для тѣхъ, кто владѣетъ алгеброй, мы ее сообщаемъ. Она имѣетъ видъ тождества: $x \cdot y = (x - 5 + y - 5) \cdot 10 + [5 - (x - 5)] \cdot [5 - (y - 5)]$. Изъ формулы можно видѣть, что она применима только для тѣхъ случаевъ, когда множители больше 5-ти.

Пальцевымъ счетомъ можно воспользоваться также и при умно-

женін двузначныхъ чиселъ, но только такихъ, чтобы они были не выше 20-ти. Чтобы показать это на примѣрѣ, умножимъ этимъ способомъ 13 на 14; для этого 3 да 4 складываемъ, будетъ 7, столько десятковъ; эти же числа, т.-е. 3 и 4, перемножаемъ, будетъ 12, столько единицъ; а за то, что множители принадлежатъ ко 2-му десятку, надо къ полученнымъ отвѣтамъ добавить еще сотню; тогда всего получится: $100+70+12=182$ —отвѣтъ совершенно вѣрный. Кто знаетъ алгебру, тотъ безъ труда составитъ формулу для объясненія этого приема: $(10+a) \cdot (10+b)=100+ab+10 \cdot (a+b)$.

Покончивши съ вопросомъ о самомъ главномъ, близкомъ и употребительномъ пособіи, о пальцахъ, мы переходимъ къ тому разряду пособій, который нашелъ себѣ представителя въ русскихъ торговыхъ счетахъ. Русскіе счеты! Какъ они распространены въ народѣ среди лавочниковъ, мелкихъ служащихъ, въ конторахъ! Ихъ издавна любятъ русское торговое сословіе. Это дало поводъ думать нѣкоторымъ, что счеты изобрѣтеніе исключительно русское. Ничуть: приборы, похожіе на счеты, мы встрѣчаемъ у многихъ народовъ, въ особенности у народовъ древняго міра, напр., у римлянъ, грековъ, китайцевъ, халдеевъ и у всѣхъ народовъ, которые приходили съ ними въ соприкосновеніе. Да и какъ не быть счетамъ, когда происхожденіе ихъ такъ просто, ясно и всеобще. На счетахъ имѣются шарики: естественно и удобно для всякаго народа, потому что потребность наглядности есть у всѣхъ, а что-нибудь лучше шариковъ трудно и придумать, по крайней мѣрѣ, заостренные, неотшлифованные предметы не такъ удобны для рукъ: какъ круглые; да и, шарики надѣваются на проволоки, но они могли бы падать на стержни и шнуры или могли бы впасть въ желобки: цѣль, очевидно, та, чтобы они не рассыпались; это мы наблюдаемъ также у многихъ народовъ. Наконецъ, этотъ счетный приборъ содержитъ не одинъ рядъ костяшекъ, а нѣсколько; это уже болѣе высокая ступень счета, когда народъ имѣетъ нѣсколько разрядовъ единицъ, какъ простыхъ, такъ и сложныхъ; проволоки шнуры и колонны для различныхъ разрядовъ могли бы располагаться какъ горизонтально, такъ и вертикально; у насъ въ русскихъ счетахъ проволоки расположены горизонтально, у римлянъ же колонны для шариковъ располагались вертикальными рядами.

Русскимъ торговымъ счетамъ можно указать параллель и предше-

ственника въ китайскомъ сванъ-панѣ. Изобрѣтеніе его относится къ вѣкамъ глубокой древности, откуда, впрочемъ, восходить и вся китайская наука и искусство. Надо полагать, что сванъ-панъ получилъ свое начало не сразу, а преобразовался изъ зачаточнаго, грубаго прибора постепенно, многими поправками и улучшеніями, пока не дошелъ до своего настоящаго вида. Признакомъ его древности служить то, что онъ содержитъ въ себѣ смѣсь пятеричной системы съ десятичной, слѣдовательно, онъ изобрѣтенъ тогда, когда народъ еще пользовался пятеричной системой и не перешелъ къ чистой десятичной.

Объяснимъ устройство сванъ-пана. Представьте себѣ деревянную раму, въ родѣ той, какая имѣется въ русскихъ торговыхъ счетахъ; поперекъ этой рамы горизонтальными рядами натянуты шнуры, вмѣсто нашихъ мѣдныхъ проволокъ. На каждомъ шнурѣ только 7 шариковъ, а не 10. Какъ же управляться съ 7-ю шариками и почему именно 7, а не другое число? А вотъ какъ: вдоль всѣхъ счетовъ, вертикально сверху внизъ, пересѣкая шнуры, идетъ перегородка, сквозь которую шнуры и продѣваются. При этомъ по одну сторону перегородки остается шариковъ пятокъ, а по другую пара. Пятокъ назначается для отдѣльныхъ единицъ, и съ нимъ ведется дѣло такъ же, какъ у насъ съ косточками на торговыхъ счетахъ. Что же касается пары, то назначеніе ея сложнее: каждая изъ составляющихъ ее косточекъ равна по значенію 5 единицъ соответствующаго разряда. Поэтому, какъ только мы наберемъ 5 косточекъ на нижней проволоцѣ, то мы этотъ пятокъ должны сбросить и замѣнить одной изъ тѣхъ косточекъ, которая входитъ въ составъ пары. Въ свою очередь, какъ только наберется этихъ пятерныхъ косточекъ двѣ, такъ онѣ сбрасываются и замѣняются одной простой косточкой на слѣдующей высшей проволоцѣ. Изъ этого мы видимъ, что на нижней линіи кладутся единицы и пятки, на 2-й десятки и полсотни, на 3-ей сотни и полутысячи и т. д. Всего въ сванъ-панѣ 10 линій, т. е. шнуровъ. Отдѣльныхъ линій для долей въ немъ вовсе нѣтъ, не такъ, какъ въ русскихъ счетахъ.

Въ греческомъ и римскомъ мірѣ былъ свой замѣститель сванъ-пана и русскихъ счетовъ. Онъ назывался абакомъ. Слово «абакъ» происхожденія еврейскаго и значитъ *пыль*. И это потому, что римляне и греки пользовались досками, на которыхъ былъ насыпанъ мелкій песокъ: на нихъ расчерчивался рядъ вертикальныхъ параллельныхъ линій: между

начерченными линиями въ промежуткахъ само собой являлся рядъ колоннъ или гладкихъ пространствъ, изъ которыхъ крайнее назначено было для простыхъ единицъ, второе (обыкновенно слѣва) для десятковъ, третье для сотенъ и т. д. Какъ же обозначить на такомъ абакѣ число единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.? Для этого былъ не одинъ способъ, а нѣсколько, при чемъ въ разныя времена и подъ влияніемъ тѣхъ или другихъ математиковъ попеременно выдвигался на первый планъ то тотъ способъ, то другой: во-первыхъ, на колонны клали нужное количество костяшекъ или камешковъ, или же на нихъ чертили столько черточекъ, крестиковъ или кружковъ, сколько хотѣли обозначить единицъ; это самый немудрый, примитивный способъ. Позднѣе, съ Пифагора (въ VI вѣкѣ до Р. Хр.) начали пользоваться вторымъ приемомъ, именно въ колоннахъ на песокъ стали писать не крестики и черточки, а прямо цифры, и, наконецъ, въ замѣну этого приема явился третій: стали употреблять костяшки или «марки», съ награвированными цифрами, такъ что вмѣсто письма въ колоннахъ на песокъ начали класть костяшки съ цифрами; кромѣ того, вмѣсто доски съ насыпаннымъ пескомъ употребляли иногда поверхность гладкую изъ камня, дерева или металла, на ней графили рядъ колоннъ, въ которыя и клали марки. Чисто-римскій абакъ, въ отличіе отъ абака греческаго и отъ позднѣйшихъ видовъ этого же инструмента, былъ съ такими двумя подробностями. Во-первыхъ, сбоку у него имѣлись небольшія колонки для долей: половинъ, третей и четвертей или же унцій, т. е. двѣнадцатыхъ долей: потребность въ вычисленіяхъ съ дробями давала себя чувствовать въ обширной и практически-разносторонней дѣятельности римлянъ; во-вторыхъ, такъ какъ римляне долѣе всѣхъ народовъ примѣнивали къ десятичной системѣ нѣтеричную, то ихъ абакъ, подобно своему родоначальнику сванъ-пану, былъ примѣненъ къ счету пятками; надо замѣтить, что гордый Римъ, весь міръ приведшій подъ свое владычество и давшій образцы устройства государства, былъ не силенъ по части истинной науки и больше занимался вопросами житейской практики; плохіе математики и только свѣдущіе землемеры, римляне не могли представить себѣ ясно всѣхъ преимуществъ точнаго счета десятками безъ всякой примѣси пятковъ, и лишь ученый представитель позднѣйшей римской образованности Бозцій, жившій въ VI столѣтіи по Р. Хр., отбросилъ, наконецъ, добавочныя грани для пятковъ,

и у него мы видимъ чистый счетъ десятками. Абакъ Бозѣія содержитъ въ правой колоннѣ единицы, въ сосѣдней съ ней десятки, въ слѣдующей сотни и т. д.; если какой-нибудь разрядъ отсутствуетъ, то та колонна остается незаполненной. Какъ близко отъ такого способа обозначенія до нашего порядка записыванія чиселъ! Стоить стереть черты колоннъ и обозначить какъ-нибудь мѣста пропущенныхъ разрядовъ, вотъ и наша система. Весьма возможно, что въ историческомъ развитіи такъ именно и совершалось дѣло, т. е. когда въ данномъ числѣ какой-нибудь разрядъ отсутствовалъ, и та колонна, слѣдовательно, являлась незаполненной, то стирали всѣ колонны, кромѣ нея, ее же выражали въ видѣ квадрата, незаполненного цифрой; отсюда одинъ шагъ къ тому, чтобъ вмѣсто неудобнаго квадрата ввести кружокъ, который чертится гораздо легче: кружокъ этотъ и есть нашъ нуль. Но все-таки введеніе нуля никакимъ образомъ не можетъ считаться заслугой римлянъ: оно принадлежитъ индусамъ.

Въ XV столѣтіи по Р. Хр. абакъ, почти забытый со временъ Бозѣія и замѣненный письменными вычисленіями, вновь выступаетъ на первый планъ. Его выводитъ изъ забвенія кипучая, горячая пора открытій, изобрѣтеній, развитія торговли и мореплаванія. Въ XV—XVI столѣтіи торговля Западной Европы сильно оживилась, явилась потребность въ конторахъ, банкахъ и т. д., и вотъ гущи и всѣ коммерческіе люди стали усиленно примѣнять абакъ, какъ инструментъ сравнительно простой и легкій. При этомъ для удобства доску абакъ они клали на специальную подставку или скамейку и въ этомъ видѣ называли абакъ счетной скамьей, а такъ какъ по-нѣмецки скамья называется «bank» («банкъ»), то намъ легко понять, что значитъ «банкъ», «банкиръ».

Отголоски абакъ проникли въ русскую ариѣметическую литературу XVII вѣка, подъ именемъ счета «костыми» или «пѣнязи». Цѣль этого пособія была та, чтобы «великій счетъ считати». Нашъ абакъ отличался только одной особенностью, именно, онъ разлинеивался поперекъ на нѣсколько частей, и въ немъ отводились specialныя мѣста для слагаемыхъ и суммъ. Счетъ «костыми» употреблялся, когда нужно было «класть костыми сошную кладь», т. е. высчитывать земельные налоги, «а вытная и хлѣбная потому жъ», т. е. болѣе мелкія подати. Кромѣ единицъ, десятковъ и т. д. при счетѣ костыми употреблялись доли.

трети, полутрети, половино-полутрети, малыя трети (24-я), чети, т. е. четверти, получети, половино-получети, малыя чети (32-ая доли). Для всѣхъ этихъ дробей были внизу доски особыя мѣста. Что счетъ костью происхожденія иноземнаго, на это, между прочимъ, указываетъ и присутствіе пятковъ, полестенъ и т. д., какъ въ сванъ-панѣ и старинномъ римскомъ абакѣ.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о русскихъ торговыхъ счетахъ. Первоначальная ихъ форма на Руси, такъ назыв., «дошанный счетъ», т. е. доска или рама съ «четками» (шариками), надетыми на шнуры или веревки. Дошанный счетъ, подобно нынѣшнимъ торговымъ счетамъ, употреблялся въ народѣ часто: «имъ всякій торговый счетъ сочтеть и сошной и помѣрной и вѣсечей и денежной всякой счетъ по всякимъ статьямъ и въ доляхъ». Русскіе торговые счеты, или, какъ называютъ ихъ нѣмцы, «русская счетная машина», сдѣланы извѣстными за-границей очень недавно и по такому случаю. Французскій офицеръ Понселе въ 1812 году былъ взятъ въ плѣнъ и поселенъ въ Саратовъ; послѣ кампаніи онъ вернулся на родину въ Мецъ и ознакомилъ тамъ соотечественниковъ съ оригинальнымъ и удобнымъ приборомъ, который онъ захватилъ съ собой изъ Саратова. Съ тѣхъ поръ счеты распространились въ иностранныхъ школахъ въ видѣ нагляднаго пособія, но далеко не такъ повсемѣстно, какъ въ нашихъ.

Цифры различныхъ народовъ.

Немного есть наукъ, которыя свое начало вели бы съ такихъ древнихъ временъ, какъ ариметика. И среди этихъ немногихъ своихъ спутницъ ариметика является наукой самой отвлеченной. Но если ужъ теперь, несмотря на то, что цивилизація и общее развитіе значительно проникли въ массу народа, всякое отвлеченное мышленіе все же считается чѣмъ-то сухимъ и труднымъ, то тѣмъ болѣе во времена давно прошедшія отвлеченное знаніе нуждалось обязательно во внѣшнемъ проявленіи. Цифры и служатъ такимъ проявленіемъ. Онѣ всеобщи и такъ же древни, какъ древни крайніе зачатки ариметики. Такъ, цифры

у египтянъ мы видимъ за 2200 лѣтъ до Р. Хр. въ папирусъ Ринда, у халдеевъ за 2300 лѣтъ до Р. Х. въ табличкахъ Сенкере и у китайцевъ за 2637 лѣтъ до Р. Х. въ «Кіучангъ», составленномъ ученымъ авторомъ Тзинъ-кіу-чау. Много есть разныхъ сортовъ цифръ; онѣ отличаются другъ отъ друга и происхожденіемъ, и начертаніемъ, въ зависимости отъ того, когда онѣ получили начало и у какого именно народа.

Навѣрное, читатель, вамъ приходилось не разъ замѣчать, что малые ребята съ особенной охотою рисуютъ дома, людей, животныхъ, т. е. все то, что прямо предъ глазами, и лишь потомъ, въ послѣдствіи они берутся за условные рисунки, т. е. значки, планы и чертежи. Такъ точно и народы древности предпочитали имѣть цифры въ видѣ рисунковъ тѣхъ предметовъ, которые у нихъ передъ глазами. Особенно замѣтна эта склонность у древнихъ египтянъ, хотя и у другихъ народовъ мы можемъ указать подобныя слѣды. Это письмо носить названіе гіероглифическаго; напр., чертёжъ шеста или кола обозначалъ собою единицу; десятокъ означался фигурою 2-хъ соединенныхъ рукъ, такъ какъ на 2 рукахъ бываетъ 10 пальцевъ; символомъ сотни считался свернутый пальмовый листъ, такъ какъ съ его развитіемъ выходитъ изъ него много листовъ, можетъ быть до 100; тысяча рисовалась въ видѣ цвѣтка лотоса, который знаменовалъ собой обиліе; цифрою, которая обозначала 10000, было изображеніе лягушки, такъ какъ лягушки при разливахъ Нила являлись въ неисчислимомъ количествѣ, многими тысячами. Картиной милліона была фигура изумленнаго человѣка.

Такими гіероглифами пользовался Египетъ для выраженія всѣхъ чиселъ. Подобная система была и у халдеевъ. У римлянъ цифра V' напоминаетъ своей формой кисть руки. Но, очевидно, писать при помощи рисунковъ крайне медленно и неудобно, въ особенности же потому, что каждый изъ рисунковъ необходимо было повторять по многу разъ. Такъ, чтобы выразить число хоть 30270, египтянинъ 3 раза рисовалъ лягушку, 2 раза листъ и 7 разъ сложенные руки. Гіероглифы надо было упростить, снабдить ихъ легкой формой и примѣнностью къ письму. Въмѣсто фигуръ стали чертить лишь облики нѣчто въ родѣ условныхъ знаковъ. Такъ получились цифры. Кромѣ того, писать одинъ и тотъ же знакъ по многу разъ невыгодно и долго, поэтому египтяне придумали для чиселъ 2, 3, 4, 9 свои особые значки, которые за-

вали имъ возможность избѣжать длиннаго и утомительнаго повторенія цифры 1. Что же касается 5, 6, 7, 8, то эти цифры у египтянъ были составлены изъ 2, 3, 4.

Слѣды письма іероглифами, какъ сказано уже выше, мы видимъ у халдеевъ. Но и они оставили эту систему и выработали вмѣсто нея новую, очень послѣдовательную и простую, такъ называемое, клинообразное письмо. Чтобы обозначить единицу, халдеи рисовали вертикальную черту съ заостреннымъ нѣжнымъ краемъ и толстымъ расщепленнымъ верхнимъ. Десятокъ означался такою же чертой, но только въ положеніи горизонтальномъ и съ острымъ краемъ, обращеннымъ влѣво. Для выраженія нѣсколькихъ единицъ халдеи повторяли столько разъ знакъ единицы, сколько ихъ содержалось въ данномъ числѣ. Такъ, напр., чтобы выразить 7 единицъ, они писали 7 разъ знакъ единицы. Такимъ же образомъ они писали и десятки. Сотню они обозначали помощью 2-хъ чертъ, горизонтальной вмѣстѣ съ вертикальной. Для чиселъ, состоящихъ изъ полныхъ сотенъ, порядокъ видоизмѣнялся: именно, халдеи брали знакъ сотни и при немъ писали столько разъ единицу, сколько сотенъ въ заданномъ числѣ. Для тысячи халдеи не имѣли особенной цифры, и они обозначали тысячу, какъ десять сотенъ. И такъ, халдейская система цифръ, равно какъ и египетская, основаны на непосредственной наглядности, и отъ нея уже онѣ переходятъ къ условнымъ знакамъ.

Еще такого же происхожденія мы видимъ цифры у китайцевъ. Въ первоначальной своей формѣ онѣ напоминаютъ картины тѣхъ шнуровъ и косточекъ, которые употреблялись при наглядномъ счетѣ. Въ послѣдствіи цифры китайцевъ сильно измѣнились и приняли нѣсколько видовъ. У нихъ есть разныя цифры: древне-китайскія, торговыя, научныя и для правительственныхъ актовъ. Цифры древне-китайскія очень фигурны и замысловаты, и весьма возможно, что онѣ явились измѣненіемъ начальныхъ іероглифовъ; онѣ писались на листкахъ не въ строчку, а вертикальнымъ столбикомъ, располагаясь сверху внизъ. Наоборотъ, цифры торговыя писались горизонтальными строками и шли слѣва направо; при этомъ числа разлагались на разряды, такъ что разрядъ писался за разрядомъ. Чтобы прочесть число, китайцы прямо говорили тѣ слова, какія соответствуютъ написанному ряду цифръ: согласно ихъ произношенію, тридцать=три десять, тринадцать=десять три, девяносто=девять десять.

Итакъ, у египтянъ, халдеевъ и китайцевъ мы видимъ цифры древнѣйшаго происхожденія, которыя напоминаютъ собою іероглифы, или картины тѣхъ предметовъ, которые стоятъ въ связи съ даннымъ числомъ. Другимъ основнымъ корнемъ, давшимъ начало цифрамъ, являются числительныя имена. Это уже цифры болѣе позднѣйшія, такъ какъ для ихъ изображенія необходимо было развиться алфавиту, грамотности потребности въ письмѣ и достаточному искусству письменнаго изложенія. У нѣкоторыхъ народовъ, какъ напр. у финикянъ, перѣдко выписывались числительныя имена сполна, черезъ посредство буквъ и словъ: финикияне прямо записывали числа, согласно ихъ произношенію, словами, а не пользовались особыми значками—цифрами. Иногда такой же способъ примѣняли и греки, но особенно его любили арабы. Существуетъ цѣлый учебникъ по ариметикѣ араба Алькархи (въ 11 ст. по Р. Х.), гдѣ нѣтъ ни одной цифры, и всѣ вычисленія, даже довольно сложныя, выполнены словесно.

Но очевидно, что подобное выписываніе числительныхъ именъ крайне неудобно и утомительно. Въ силу этого, числительныя имена стали подвергаться сокращенію, и цифрами стали считаться начальныя буквы числительныхъ именъ. Примѣровъ этому мы видимъ много у грековъ и у римлянъ, у индусовъ и у арабовъ (въ ихъ позднѣйшихъ цифрахъ). Греческія слова «пять» (πέντε), десять (δέκα), тысяча (Χίλιοι), десять тысячъ (μύριοι) начинались съ буквъ π, δ, χ, μ, по этому именно такія буквы являлись у грековъ знаками для чиселъ 5, 10, 1000, 10000, такъ что, согласно первоначальному греческому обозначенію, число пять имѣло цифру π, десять δ, тысяча χ, и наконецъ, десять тысячъ μ. Подобный счетъ описанъ византійскимъ грамматистомъ Геродіаномъ, и этотъ сортъ греческихъ цифръ называется геродіановыми цифрами. Подобной же системой воспользовались и арабы; когда они, наконецъ, поняли, что полностью писать числительныя имена довольно затруднительно, они тоже стали писать только начальныя буквы числительныхъ именъ.

И, наконецъ, послѣдней стадіей развитія, хотя и близкой къ нашимъ временамъ, но вовсе неудобной, и потому оставленной, надо признать такой порядокъ, когда замѣной цифръ служили буквы въ послѣдовательности алфавита. Такъ напр., греческій алфавитъ содержитъ по порядку буквы: α, β, γ, δ, ε, въ виду этого и числа обозначались:

единица— α , два— β , три— γ , четыре— δ , пять— ϵ . Греки придумали обозначать такимъ образомъ приблизительно со временъ Рождества Христова, а до этого они прибѣгали къ геродиановымъ цифрамъ. Вслѣдствіе этого буква δ стала обозначать уже не десять, какъ начальная буква греческаго слова «δεκα», что значитъ десять, но она стала выражать четыре, какъ 4-ая буква алфавита. Какое же удобство въ этихъ позднѣйшихъ цифрахъ сравнительно съ тѣми, которыя указалъ Геродианъ? Ариѳметически нѣтъ совершенно никакого, и пользы отъ замѣны однихъ значковъ другими не представляется никакой; виной такой замѣны явились, вѣроятно, переписчики, которымъ слишкомъ трудно было помнитъ буквы вразбросъ и въ безпорядкѣ: они и предпочли расположить ихъ въ порядкѣ. Подобную же систему мы видимъ у славянъ и у евреевъ. Несомнѣнно, она заимствована отъ грековъ.

Повторимъ вкратцѣ еще разъ, что цифры всѣхъ народовъ и временъ распределяются на три разряда: 1) цифры, получившія начало отъ іероглифовъ и обратившіяся въ условные знаки; 2) цифры, образовавшіяся изъ буквъ алфавита и представляющія собой начальные буквы числительныхъ именъ, и 3) цифры въ порядкѣ буквъ алфавита. Вторая категорія цифръ тоже измѣнилась, подобно первой, въ нѣкоторыхъ случаяхъ до неузнаваемости, такъ что изъ буквъ образовались условныя знаки.

Теперь мы сообщимъ нѣкоторыя подробности о цифрахъ отдельныхъ народовъ *).

Египтяне. Они были образованнымъ народомъ уже за 4000 лѣтъ до Р. Х. Периодическіе разливы Нила рано побудили ихъ заниматься земледѣріемъ и ариѳметикой, такъ какъ каждую весну приходилось имъ снова размѣрять, расчислать и дѣлить поля, затянутыя иломъ могучей рѣки. Въ 1872 году въ тайникахъ одной изъ многочисленныхъ египетскихъ пирамидъ нашли свертокъ пергамента, такъ наз., папирусъ «Риндъ», въ которомъ разобрали рукопись ариѳметическаго содержанія. Авторъ ея нѣкто египтянинъ Амесь, жившій во времена фара-

*) Въ концѣ книги приложена таблица цифръ.

она Аменемы (2221—2179 г. до Р. Х.). Изъ рукописи можно усмотрѣть, что автору доступны были довольно сложныя задачи замысловатаго характера не только въ цѣлыхъ числахъ, но и съ дробями.

У египтянъ было три системы письма: а) гіероглифическая, о которой упомянуто выше, в) гіератическая, или письмо жрецовъ, и с) простонародная. Письмо гіератическое является нѣчтомъ инымъ, какъ упрощеніемъ гіероглифовъ, и въ этомъ смыслѣ его можно считать нормальнымъ переходомъ къ цифрамъ. Пользуясь знаками единицы, десятка, сотни, тысячи, египтяне ихъ повторяли столько разъ, сколько хотѣли обозначить единиць, десятковъ и т. д.; но выше 1000 въ гіератическомъ письмѣ они вводили умноженіе: такъ, чтобы обозначить 10000, они писали рядомъ 10 и 1000. Письмо простонародное преподавалось въ школахъ и примѣнялось въ обиходной жизни, въ торговлѣ, письмахъ, въ гражданскихъ документахъ. Оно имѣло, въ свою очередь, не мало разныхъ видовъ; одинъ изъ нихъ нами показанъ въ приложеніи 3-мъ. Когда египтяне имѣли дѣло съ большими числами, то высшіе разряды они писали слѣва, а низшіе направо, т. е. точъ въ точъ, какъ мы.

Финикияне. Они были моряками и купцами древняго міра. Имъ приписывается изобрѣтеніе алфавита и успѣшное развитіе ариметическихъ знаній. Алфавитъ финикиянъ состоялъ изъ 22 буквъ, похожихъ на египетскіе гіероглифы. Служили ль эти буквы также и для обозначенія чиселъ, на это нѣтъ никакихъ указаній. Напротивъ того, несомнѣнно, что финикияне или писали сполна слова, выражающія числа, или же пользовались особыми, специальными цифрами. Изъ этихъ цифръ и составлялись обозначенія чиселъ, при чемъ рядомъ стоящія цифры иногда являлись множителями другъ друга, иногда же онѣ подлежали сложению. Числа отъ 1 до 9 обозначались соотвѣтственнымъ количествомъ вертикальныхъ черточекъ. Горизонтальная черта или уголь, обращенный отверстіемъ внизъ, обозначали число 10. Налѣво (но не на право, какъ написали бы мы) отъ этого знака располагали 1, 2, 3 и т. д. вертикальныхъ черты, для обозначенія чиселъ отъ 11 до 19. Такъ напр. «| | | —» обозначало четырнадцать. Чтобы обозначить два десятка, финикияне писали двѣ параллельныхъ черты, которыя лежали горизонтально. Для 100 былъ тоже особый знакъ, именно $I < I$.

Изъ Тира и Сидона, древнихъ финикійскихъ городовъ, расположенныхъ на берегу Средиземнаго моря, центровъ тогдашней торговли, процвѣтавшихъ съ XIV до VIII вѣка до Р. Х., распространилось счетное искусство по финикійскимъ колоніямъ, которыя были разсѣяны по берегу Сѣверной Африки и южнымъ полуостровамъ Европы.

Халдеи, смѣшавшіеся съ вавилонянами и подчинившіе ихъ себѣ, жили на южномъ теченіи рѣкъ Тигра и Евфрата. Это сосѣди и счастливые противники іудеевъ Ветхаго Завета. Культура ихъ принадлежитъ къ древнѣйшимъ: она началась болѣе чѣмъ за 3000 лѣтъ до Р. Х., и пришла въ упадокъ за 500 лѣтъ до Р. Х. Халдеи употребляли для письма нѣчто въ родѣ грифелей, съ расщепленными концами, поэтому мы и видимъ у нихъ, такъ назыв., клинообразное письмо. Цифры халдеевъ приведены выше и представлены подробно въ приложеніи 4-мъ, въ концѣ книги. Ихъ можно хорошо установить, благодаря счастливой находкѣ, которую удалось сдѣлать въ развалинахъ древняго знаменитаго города Ниневіи. Тамъ подъ грудой мусора, пыли и пепла археологи открыли цѣлую сохранившуюся залу, по нашему сказать, библиотеку, устроенную по приказанію царя Сарданапала за 7 столѣтій до Р. Х. Это была публичная бібліотека. Вотъ еще когда и вотъ еще въ какихъ странахъ открывались публичныя бібліотеки! Но книгъ въ ней не было, а были цѣлые ряды тонкихъ глиняныхъ плитокъ, обожженныхъ и прочныхъ, расписанныхъ разными красками: это нарисованы буквы, фразы и цѣлыя сочиненія. Есть среди нихъ и сочиненія ариѣметическаго содержанія.

Обширная торговля, вмѣстѣ съ развитіемъ ремеслъ, заставила халдеевъ заняться практическими вычисленіями; этимъ любознательный народъ не удовольствовался и перешелъ къ теоретическимъ вопросамъ ариѣметики. Мало того, халдеи стали искать какихъ-то скрытыхъ, таинственныхъ свойствъ чиселъ, стали гадать на числахъ, волхвовать, предсказывать; цифрамъ придавался смыслъ символическій, и ими угадывали будущее. Какъ это бываетъ вездѣ и всегда, легковѣрные люди создали халдеямъ репутацію искусныхъ гадальщиковъ. Въ 139 г. до Р. Х. они были изгнаны изъ Рима за волшебство. Но слава ихъ и вліяніе были замѣтны еще въ средніе вѣка въ Западной Европѣ, такъ что имъ приписываютъ особыя кабалистическія цифры, употреблявшіяся въ астрологіи (см. 7-е приложение).

Греки. Древнѣйшія цифры грековъ мы указали выше. Позднѣйшими цифрами, примѣрно за 100 лѣтъ до Р. Х., стали служить буквы алфавита въ ихъ нормальномъ порядкѣ. Единицы, десятки и сотни обозначаются по этой системѣ такъ: $1=\alpha$, $2=\beta$, $3=\gamma$, $4=\delta$, $5=\epsilon$, $6=\sigma$, $7=\zeta$, $8=\eta$, $9=\theta$, $10=\iota$, $20=\kappa$, $30=\lambda$, $40=\mu$, $50=\nu$, $60=\xi$, $70=\omicron$, $80=\pi$, $90=\varsigma$, $100=\rho$, $200=\zeta$, $300=\tau$, $400=\upsilon$, $500=\phi$, $600=\chi$, $700=\psi$, $800=\omega$, $900=\omicron$. Тутъ, какъ видно, всего цифръ 27, а буквъ у грековъ въ алфавитѣ имѣется только 24; поэтому пришлось добавить къ нимъ еще 3 буквы старинныхъ, давно уже вышедшихъ изъ практики, такъ наз. $\nu\alpha\nu$, $\kappa\omicron\rho\rho\alpha$ и $\sigma\alpha\mu\pi\iota$, для обозначенія 6, 90 и 900.

Чтобы отличить число отъ слова, греки проводили обыкновенно надъ цифрами черту, такъ, напр., $\overline{\iota\epsilon}=15$, $\overline{\rho\chi\beta}=122$. Для обозначенія тысячъ они пользовались опять 9-ю первыми знаками, но надъ ними проводили маленькую вертикальную черту, напр., $\overline{\alpha}=1000$, $\overline{\beta}=2000$, $\overline{\gamma}=3000$, $\overline{\chi\phi\omicron\epsilon}=1575$, $\overline{\iota\epsilon\pi\kappa}=5380$, $\overline{\delta\omega\mu\gamma}=9843$, $\overline{\iota\gamma\chi\nu\delta}=3654$. Десятокъ тысячъ составляетъ новую употребительную единицу счета — мириаду. Греки любили пользоваться мириадами и примѣняли ихъ съ такою же охотой, съ какою мы примѣняемъ тысячи и миллионы; можно сказать, что въ греческомъ счисленіи классъ состоялъ изъ 4 разрядовъ, а не изъ трехъ, какъ въ нашемъ, такъ что при выговариваніи большихъ чиселъ они прежде всего указывали мириады, а послѣ нихъ и тысячи и остальные всѣ разряды. Знакъ мириады былъ М или Μ . Двѣ мириады обозначались черезъ $\beta\text{М}$.

Согласно этому $\text{Μ}\overline{\iota\delta\alpha\chi\pi}=141680$. Мириада мириадъ, по нашему сто миллионѣвъ, обозначалась черезъ $\text{Μ}\beta$. Мириада въ кубѣ, иначе сказать триллионъ, писалась $\text{Μ}\gamma$. Отдѣльныя же мириады раздѣлялись точками, поэтому: $\text{Μ}\gamma$, ϵ_1 , $\text{Μ}\beta$, ρ_1 , $\text{Μ}\alpha$, $\iota\epsilon\pi\kappa=560.1052800000$. Какъ видно, цифры здѣсь располагаются отъ лѣвой руки къ правой, но это было не всегда, и такой порядокъ не считался обязательнымъ: можно было писать отъ правой руки къ лѣвой; въ Сициліи и Малой Азіи даже и выговариваніе чиселъ происходило отъ низшаго разряда къ высшему, такъ что сперва произносились единицы, затѣмъ десятки, сотни, тысячи и высшіе разряды.

Буквы — цифры гораздо менѣе удобны, чѣмъ выше упомянутые знаки Геродіана. Внося немало сбивчивости при письмѣ, онѣ, кромѣ

того, мѣшаютъ производству дѣйствій, такъ какъ при нихъ надо въ отдѣльности учиться, какъ вычислять съ простыми единицами, въ отдѣльности съ десятками и съ прочими разрядами: нѣтъ аналогій и мало сходства въ вычисленіяхъ съ отдѣльными разрядами.

Евреи. Они употребляли вмѣсто цифръ буквы алфавита. Очевидно, они это сдѣлали подъ вліяніемъ греческихъ ученыхъ, жившихъ въ Александріи, въ Египтѣ. Точно сказать нельзя, когда именно евреи перешли къ такой системѣ цифръ; но, вѣроятно, это случилось незадолго до Р. Х., по крайней мѣрѣ, на еврейскихъ монетахъ такія цифры встрѣчаются не ранѣе 137 г. до Р. Х.

Числа отъ 1 до 9 выражались у евреевъ первыми 9-ю буквами алфавита, круглые десятки (20, 30.... 90) девятью слѣдующими буквами, затѣмъ круглыя сотни—100, 200, 300, 400 выражались четырьмя остальными, потому что въ еврейскомъ алфавитѣ было всего навсего 22 буквы. И вотъ для остальныхъ круглыхъ сотенъ буквъ не доставало. Первоначально этотъ недостатокъ пополнялся тѣмъ, что вмѣсто 500 писали $400+100$, $600=400+200$ и т. д. Потомъ догадались отсѣчь концы у 5 слишкомъ длинныхъ буквъ (Капъ, Мемъ, Нунъ, Пхе, Тцаде) и этими концами начали обозначать остальные сотни. Еврейскія цифры см. въ приложеніи 8-мъ, въ концѣ книги.

Тысячи обозначались опять при помощи 9 первыхъ буквъ, но только надъ ними ставились точки, чтобъ не смѣшать съ простыми единицами. Чтобъ отличить числа отъ словъ, употребляли въ первомъ случаѣ особый знакъ. Цифры писались отъ правой руки къ лѣвой, въ порядкѣ уменьшающейся величины значеній; слѣдовательно, разряды низшіе писались влѣво, а не вправо, какъ пишутся у насъ. Впрочемъ, у всѣхъ народовъ, такъ наз., семитическаго корня, т.-е. евреевъ, вавилонянъ, арабовъ, финикянъ, эфіоповъ, ассиріянъ, письмо шло противоположно нашему, т.-е. отъ правой руки къ лѣвой.

Сирійцы. Ихъ цивилизація относится къ гораздо болѣе позднѣйшимъ временамъ, чѣмъ финикійская, халдейская, египетская и т. д. Ихъ можно бы назвать въ нѣкоторомъ родѣ преемниками финикянъ. По крайней мѣрѣ, въ III в. по Р. Х. мы встрѣчаемъ у сирійцевъ цифры, которыя очень похожи на тѣ, какія были въ Финикии за много лѣтъ до Р. Х. Позднѣе эти цифры были отброшены, и, начиная приблизительно съ VII в. по Р. Х., сирійская литература содержитъ буквы алфа-

вита вмѣсто цифръ. Здѣсь мы находимъ то же самое, что въ Греціи и у евреевъ. Сирійскій алфавитъ, какъ и еврейскій, содержитъ 22 буквы. Для выраженія простыхъ единицъ, круглыхъ десятковъ и сотенъ отъ 100 до 500, буквъ алфавита было достаточно, какъ видимъ мы и у евреевъ. 500, 600 и далѣе до 1000 сирійцы означали при помощи сложенія, такъ что $500 = 400 + 100$, $600 = 400 + 200$ и т. д. Круглыя тысячи они писали какъ простыя единицы, только внизу налѣво приписывали запятую. Значеніе десятковъ тысячъ давалось единицамъ и десяткамъ при помощи маленькой горизонтальной черточки, которою подчеркивались цифры. Значеніе милліона давалось 2-мя запятыми.

Славяне. Составитель славянскаго алфавита, св. Кириллъ, заимствовалъ систему цифръ цѣликомъ у грековъ. Какъ греки пользовались буквами своего алфавита, такъ и для славянъ была составлена таблица, схожая даже до мелочей съ греческою. Напр., почему 2 обозначается по славянски черезъ вѣди, а не черезъ буки? Потому что въ греческомъ языкѣ нѣтъ отдѣльныхъ звуковъ «б» и «в», а есть для нихъ общая буква «вита» или «бота». Почему ѡпта обозначаетъ девять, хотя ей мѣсто въ самомъ концѣ алфавита? Потому что въ греческомъ языкѣ ей соответствуетъ буква θ, которая и стоитъ здѣсь на своемъ мѣстѣ, а не въ концѣ алфавита. Червь, обозначающій 90, поставленъ вмѣсто копны, такъ какъ по-гречески нѣтъ звука «ч» совсѣмъ, а по-славянски нѣтъ копны. Вотъ рядъ славянскихъ цифръ:

ѧ = 1, Ѣ = 2, Г = 3, Д = 4, Е = 5, З = 6, Ж = 7, И = 8, Ф = 9,
 Ҁ = 10, К = 20, Л = 30, М = 40, Н = 50, С = 60, О = 70, П = 80,
 ҂ = 90, Р = 100, Т = 200, ҃ = 300, ҄ = 400, Ф = 500, Х = 600,
 ҆ = 700, Ѡ = 800, ҈ = 900.

Тысячи обозначаются тѣми же буквами, какими и единицы, но съ добавленіемъ значка, который ставится налѣво отъ цифръ, выражающихъ количество тысячъ. Вообще славянская система — полнѣйшая копія греческой: такъ же берутся буквы алфавита, похоже обозначаются тысячи, и даже есть наклонность къ счету мириадами, т. е. десятками тысячъ. Впрочемъ, большія числа въ старинныхъ рукописныхъ славянскихъ сборникахъ встрѣчаются не очень часто. Ниже, въ прилож. 9-мъ, приводимъ мы обозначенія большихъ количествъ: тмы, леюна, леодра, врановъ. Эти изображенія встрѣчаются

въ старинныхъ рукописяхъ грамматическихъ, но не арифметическихъ, такъ какъ въ арифметическихъ рукописяхъ 16—17 столѣтій предпо- читаютъ пользоваться цифрами обыкновенными, которыми мы даемъ названіе арабскихъ.

Римляне. Ихъ система цифръ не принадлежитъ къ числу удоб- ныхъ и разработанныхъ. Римляне были слабы въ арифметикѣ, и даже до того слабы, что имъ никакъ не удалось освободиться отъ пережитковъ старой пятеричной системы счета, и только они одни остались при счетѣ пятами въ то время, какъ все другіе народы, начавши, быть можетъ, тоже со счета пятами, сумѣли выработать чистый счетъ десятками. Цифры у римлянъ смѣшанныя: одні изъ нихъ обязаны своимъ происхожденіемъ наглядности, а другія⁶ пред- ставляютъ собой буквы.

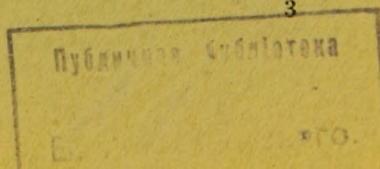
Римскія цифры таковы: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000. Изъ этихъ семи знаковъ легко можно составить обозначе- нія всехъ чиселъ. Тысяча иногда обозначалась не черезъ M, а че- резъ (I), т. е., она обозначалась чертой среди 2 скобокъ. Согласно этому, и десятокъ тысячъ имѣлъ знакъ такой: ((I)), сто тысячъ (((I))), для миллионъ брали ∞ .

При помощи раздвиганія 3-хъ послѣднихъ знаковъ можно обра- зовать 3 новыхъ цифры: I)) = 5000, I))) = 50000, 0 | = 500000, Отсюда ясно видно, какъ получилось D для пятисотъ; это ничто иное, какъ тысяча (I), раздѣленная пополамъ,—правая часть взята, а лѣвая откинута.

Значенія отдѣльныхъ знаковъ при письмѣ чаще всего складыва- лись, напр., III=3, XIII=13, MDCCCLXVI=1866. Но если высшій знакъ стоялъ правѣ низшаго, то это выражало отниманіе, такъ, напр., IX=9, XC=90. Вычитать обыкновенно можно было не больше одного знака, а прикладывать—не больше 3-хъ однородныхъ. Кромѣ того, прежде чѣмъ писать число, его разлагали на единицы, десятки, сотни и т. д., и чтобы написать хотя бы 990, писали сперва 900, затѣмъ уже 90, т. е., CMXC, а не отнимали прямо отъ тысячи деся- токъ. Бывали, впрочемъ, изрѣдка и исключенія: IIX=8, вмѣсто VIII; VIIII=9, вмѣсто IX; послѣдняя фигура (VIII) была особенно употре- бительна на памятникахъ и плитахъ, потому что римляне любили точ-

БЕЛЛОСТИКЪ.

3



ность, а между тѣмъ если подойти съ другой стороны, то IX покажется не 9-ю, а 11-ю (XI)

Только у однихъ римлянъ и видимъ мы отниманіе низшаго знака отъ высшаго, ни у какого другого народа нѣтъ подобнаго обыкновенія; если и ставился у другихъ народовъ низшій знакъ передъ высшимъ, то онъ указывалъ обыкновенно на повтореніе, а не на отниманіе. Даже и въ произношеніи у римлянъ было вычитаніе, особенно же если вычиталось 2 или 1; такъ, напр., вмѣсто восемнадцати они говорили двадцать безъ двухъ. Только въ случаѣ тысячъ низшій знакъ показывалъ умноженіе и, напр., десять тысячъ можно было писать черезъ X M= 10×1000 , а сто тысячъ черезъ CM; въ послѣднемъ случаѣ являлась полная возможность смѣшать 100000 съ 900, потому что не видно было, надо ли 1000 взять сто разъ или же отнять 100 отъ 1000

Точно такъ же писали иногда MM, и въ этомъ случаѣ опять не видно было, сколько тысячъ обозначено этой формулой: или это двѣ тысячи (M+M), или тысяча тысячъ (M×M), и то и другое чтеніе имѣть свои основанія и можетъ считаться правильнымъ; приходилось догадываться по смыслу, какое именно число надо подразумѣвать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Чтобы избѣжать сомнѣній и ошибокъ, римляне стали употреблять еще новый пріемъ, по которому тысячи обозначались горизонтальной линіей сверху; этимъ пріемомъ 1000 ни шесы I, 100000=C, 1000000=M, равнымъ образомъ CC=200000, CLX=160000. Знакъ $\overline{\quad}$ надъ цифрами придавалъ имъ значеніе сотенъ тысячъ, такъ напримѣръ, $\overline{\text{XVII}}$ = 1700000, $\overline{\text{M}}$ = 1000-100000 = 100000000. Знаменитый ученый и естествоиспытатель Плиній (въ I вѣкѣ по Р. X.) ввелъ знакъ для тысячъ точку, слѣдовательно, L.D=50500. Встрѣчаемъ и еще обозначеніе: Vm.=5000.

Теперь мы видимъ и ясно можемъ убѣдиться, насколько весь порядокъ нумераціи у римлянъ былъ сбивчивъ, непослѣдователенъ и могъ представить много поводовъ къ толкованіямъ въ ту и другую сторону. Вѣрнѣе всего мы отъ римлянъ заимствовали обыкновеніе, чтобъ сумму денегъ въ разныхъ векселяхъ, распискахъ и т. д. писать не только цифрами, но и словами. Для римлянъ это было очень важно и постоянно необходимо, потому что всѣ эти черточки при цифрахъ легко можно стереть, продолжить и пополнить. Исторія передаетъ

намъ случай, когда изъ-за неясности написаннаго ряда цифръ произошелъ большой споръ относительно завѣщаннаго наслѣдства. Галлоа получилъ отъ Ливіи Августы по завѣщанію 50 милліоновъ сестерцій (приблиз. 5 милліоновъ рублей), но Тиверій, главный наслѣдникъ, сумѣлъ доказать, что подъ этими цифрами надо разумѣть только 500 000 сестерцій; ему это удалось тѣмъ легче, что сумма денегъ не была написана словами.

При выговариваніи большихъ чиселъ у римлянъ не было въ распоряженіи другихъ словъ, кромѣ тысячи. Поэтому 1000 000 000 они читали такъ: тысячью тысяча разъ по тысячѣ.

Относительно происхожденія римскихъ цифръ существуетъ много различныхъ мнѣній и догадокъ. Нѣкоторые полагаютъ, что начало этимъ цифрамъ дано буквами стариннаго алфавита. Другіе объясняютъ такъ: первыя три цифры I, II и III само собой понятны: онѣ произошли отъ счета линій; цифра V образовалась изъ картины руки, т.-е., пяти пальцевъ, потому что, если бы очертить кисть руки съ раздвинутыми пальцами, то и получилась бы фигура, напоминающая цифру V; цифра десять своею формой креста разлагается на 2 пятка, приложенныхъ другъ къ другу острыми концами; «C», которое обозначаетъ сто, является первой буквой числительнаго «Septim», что значитъ сто; M—тысяча, это начальная буква латинскаго слова «Mille» (тысяча). О томъ, какъ получился знакъ пятисотъ D, нами уже сказано выше. Такъ же можно объяснить и знакъ пятидесяти L, именно сто $\left| \right.$, а 50 = $\left| \right.$, т.-е., знакъ ста раздвоенъ на двѣ половины, изъ которыхъ нижняя взята, а верхняя половина отброшена.

Происхожденіе нашихъ цифръ.

Тѣ цифры, которыя употребляются въ настоящее время почти всѣми образованными народами и которыми пользуемся также и мы, называются обыкновенно арабскими; но это названіе онѣ получили вовсе не потому, что обязаны своимъ происхожденіемъ арабамъ: арабы ихъ только принесли въ Европу, а начало имъ дали, по всей вѣроятности, индусы.

Дѣйствительныя, подлинныя арабскія цифры не имѣютъ никакого отношенія къ нашимъ, которыми мы пользуемся теперь. Прежде всего надо сказать, что первоначальное письмо арабовъ было грубо и некрасиво, и едва ли до VII в. по Р. Х. были у нихъ какія-нибудь цифры. Только со временъ Магомета, когда сразу былъ данъ чрезвычайный толчекъ развитію арабскаго могущества и образованности, стало у нихъ процвѣтать и письмо. Арабы особенно любили выражать числа такъ, чтобы писать полныя числительныя имена; отсюда естественно вытекаетъ, что съ теченіемъ времени они перешли къ первымъ буквамъ числительныхъ именъ; впоследствии, подобно грекамъ, они стали примѣнять буквы въ алфавитномъ порядкѣ.

Около 773 года по Р. Х. арабы приняли индусскую систему цифръ и стали обозначать числа такъ, какъ ихъ обозначали индусы. Сдѣлать это было тѣмъ болѣе легко и естественно, что Индія граничила съ владѣніями арабскихъ халифовъ, и между сосѣдями постоянно были близкія сношенія и торговля, и научныя.

Заслуга индусовъ въ развитіи ариметики громадна и неисчислима. Во-первыхъ, они сильно уменьшили количество цифръ и довели его до 10, считая въ томъ числѣ и нуль; между тѣмъ, у грековъ у евреевъ, у сирійцевъ и т. д. цифръ было не менѣе 27; правда, римляне умѣли обходиться 7-ю цифрами, но за то у нихъ была масса мелкихъ значковъ, которые только спутывали и мѣшали. Во-вторыхъ, въ индусской системѣ ясно проглядываетъ необыкновенная простота, точность и объединенность: каждый разрядъ выражается обязательно одной цифрой, а не нѣсколькими; значеніе цифры легко угадать по мѣсту, которое она занимаетъ, и не надо задумываться ни надъ сложеніемъ, ни надъ вычитаніемъ сосѣднихъ знаковъ, какъ это бываетъ въ другихъ системахъ; кромѣ того, десятки, сотни, тысячи и милліоны и высшіе разряды пишутся точно такъ же, какъ простыя единицы, поэтому не надо изобрѣтать особенныхъ правилъ для высшихъ разрядовъ, а можно безконечно прилагать одно и то-же правило. Всѣ эти выгоды настолько ясны и безспорны, что всякій народъ, какъ только ознакомится со способомъ индусовъ и пойметъ его, то перемѣняетъ свою систему на ихъ систему. Такъ было и съ арабами, и съ Западной Европой, и съ нами русскими.

Главное преимущество индусской системы заключается въ томъ,

что значеніе каждой цифры вполне опредѣляется ея мѣстомъ, т.-е., если, напр., цифра стоитъ на 4-мъ мѣстѣ справа, то она выражаетъ тысячи, и, слѣд., чтобы написать тысячу, надо только поставить цифру 1 на 4-е мѣсто, но не перемѣнять ея формы и не приписывать какого-нибудь особеннаго слова или значка. Въ глубокой древности встрѣчались и среди иныхъ народовъ гениальные умы, которые какъ-то смутно догадывались, что значеніе цифры лучше всего опредѣляется ея мѣстомъ, но всё они становились въ тупикъ передъ такимъ сомнѣніемъ: а какъ же быть, если какой-нибудь разрядъ въ числѣ пропущенъ, напр., если число состоитъ только изъ единицъ и сотенъ и не содержитъ десятковъ? Чѣмъ замѣщать недостающіе разряды? Индусы отвѣчали коротко и ясно: надо замѣщать нулемъ. И мы теперь, когда отвѣтъ извѣстенъ, пожалуй, удивляемся, чего тутъ труднаго, и какъ же было не смекнуть; но жизнь доказываетъ лучше всякихъ словъ что самыя простыя и общія идеи всегда и самыя мудренныя. Вотъ что говорить относительно этого извѣстный французскій математикъ Лапласъ: «Мысль выражать всё числа 9-ю знаками, придавая имъ, кромѣ значенія по формѣ, еще значеніе по мѣсту, настолько проста, что именно изъ-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Какъ нелегко было прійти къ этой методѣ,—мы видимъ ясно на примѣрѣ величайшихъ гениевъ греческой учености, Архимеда и Аполлонія, для которыхъ эта мысль осталась скрытною».

Всѣ величайшія открытія никогда не являются вдругъ и сразу, наоборотъ, для нихъ необходима продолжительная подготовка. Какъ же могли индусы прійти къ идеи обозначенія чиселъ? какъ они придумали нуль? Вѣрнѣе всего послѣ счета нагляднаго, т.-е., счета на пальцахъ, камешкахъ и черточкахъ они перешли къ специальнымъ счетнымъ приборамъ, именно къ шарикамъ и косточкамъ на проволокахъ и шнурахъ; затѣмъ естественно было чертить колонны на иескѣ, доскахъ и бумагѣ и въ эти колонки или желобки класть тѣ же косточки и шарики. Дальнѣйшая ступень: въ колоннахъ чертятся значки или кладутся въ нихъ костяшки съ награвированными цифрами, теперь остался одинъ шагъ и до того, чтобы цифрамъ придавать значеніе по мѣсту; дѣйствительно, если всѣ колонны заняты, то ихъ края, пожалуй, можно и стереть, потому что и безъ нихъ можно догадаться, что первая справа костяшка обозначаетъ единицы, сосѣдняя, т.-е., вторая

десятки и т. д. Получится гладкая, ровная поверхность, на которой под рядъ лежать костяшки, или начерчены значки; но какъ же быть съ той колонной, въ которой нѣтъ значка, потому что въ данномъ числѣ нѣтъ соответствующихъ единицъ? Подобную колонну стирать нельзя, потому что иначе смыслъ всѣхъ другихъ, лежащихъ влѣво, измѣнится, но ее-то одну именно и достаточно начертить, положимъ, въ такой формѣ: || или II или 0. Слѣдовательно, нуль образовался изъ фигуры пустой колонны.

Вотъ тотъ нормальный путь, которымъ можно постепенно отъ счета на предметахъ придти къ нулю. Путь этотъ очень продолжителенъ. Нужны тысячелѣтя, чтобы отъ пальцевъ перейти къ счетнымъ приборамъ и отъ нихъ къ писму.

Цифры индусовъ произошли, навѣрное, отъ первыхъ буквъ числительныхъ именъ; это тѣмъ болѣе возможно, что 9 первыхъ числительныхъ именъ въ ихъ языкѣ (въ санскритскомъ языкѣ) всѣ начинаются съ различныхъ буквъ. Индусская система разстановки цифръ отъ правой руки къ лѣвой по разрядамъ ведетъ начало съ III ст. по Р. Х. Арабы ее переняли въ VIII столѣтіи и принесли въ Европу въ IX вѣкѣ, но до XIII вѣка она распространялась въ христіанскихъ государствахъ очень слабо, потому что сначала, какъ и все новое, была встрѣчена съ недовѣріемъ и съ трудомъ проникала въ народную массу. Нулемъ индусы стали пользоваться гораздо позже, около VII-го или VIII-го вѣка по Р. Х. и во всякомъ случаѣ не ранѣе V-го. Опредѣленное извѣстіе о нулѣ мы встрѣчаемъ въ первый разъ въ 738 г. по Р. Х.

Наши цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 получили, какъ признаетъ большинство ученыхъ, начало отъ индусовъ, но это вовсе не значитъ, что цифры индусовъ имѣли именно такой видъ, какой онѣ имѣютъ у насъ.

Въ теченіе вѣковъ, переходя отъ народа къ народу и отъ ученаго къ ученому, измѣняясь подъ вліяніемъ практики и удобства, онѣ успѣли почти совершенно потерять свою прежнюю форму и вылиться въ новую, непохожую: отъ старинныхъ первоначальныхъ индусскихъ цифръ остались только слабые намеки въ цифрахъ 1, 5, 8, да и то послѣдняя цифра писалась въ горизонтальномъ положеніи, вмѣсто вертикаль-




наго; но во всякомъ случаѣ совершенно возможно прослѣдить, какъ изъ первоначальныхъ фигуръ постепенно получались дальнѣйшія; и вотъ эта-та возможность прослѣдить и доказываетъ намъ, что цифры получили начало у индусовъ. Въ XIII столѣтіи, когда индусская система сдѣлалась извѣстной всѣмъ европейскимъ математикамъ, мы видимъ 1, 3, 6, 8, 9, 0 въ той самой формѣ, въ какой онѣ употребляются и теперь, а остальные четыре цифры не похожи на наши нынѣшнія. Въ XV столѣтіи окончательно выработались цифры 2 и 4, но 7 упорно продолжало писаться въ видѣ пжицы или угла. 5 дольше всѣхъ не получало нынѣшняго своего облика и продолжало изображаться схоже съ 4-мя. Едва въ XVI столѣтіи можно въ первый разъ встрѣтить систему 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 въ ея нынѣшнемъ, всѣмъ намъ извѣстномъ видѣ. Всю эту измѣнчивость цифръ легко объяснить тѣмъ, что до 1471 года, когда было отпечатано въ первый разъ математическое сочиненіе типографскимъ шрифтомъ, всѣ книги переписывались ручнымъ способомъ, и вліяніе переписчиковъ на измѣненіе формъ цифръ могло быть громаднымъ. Кромѣ того, надо принять во вниманіе, что развитіе цифровыхъ фигуръ шло въ теченіе многихъ сотенъ лѣтъ, и въ немъ принимали участіе почти всѣ образованные народы того времени. И если въ наши дни, когда образованіе достигло высокой степени объединенія, когда печатные шрифты получили устойчивую форму, все-таки замѣчается разнообразіе въ печатныхъ буквахъ и въ различныхъ почеркахъ, то тѣмъ болѣе оно должно было проявляться въ средніе вѣка, когда произволу переписчиковъ отерывалась широкая возможность. (Образцы различныхъ типовъ цифръ мы помещаемъ въ приложеніи 10-мъ въ концѣ книги).

Итакъ, мы изложили, какъ постепенно изъ индусскихъ цифръ образовались наши нынѣшнія. Однако же не всѣ ученые согласны съ тѣмъ, что дѣло шло именно такъ, а не иначе. Нѣкоторые изъ нихъ обратили вниманіе на то, что первыя 4 цифры древнихъ египтянъ, которыми выражаютъ порядковыя числительныя, и, кромѣ того, цифра 9 сильно напоминаютъ индусскія цифры. Если это такъ, то, значитъ, изобрѣтателями цифръ скорѣе надо считать египтянъ, а не индусовъ. На это мы отвѣтимъ слѣдующее: подобное предположеніе очень возможно, тѣмъ болѣе, что есть въ исторіи намеки на какой-то древнѣйшій, миеническій народъ — кушитовъ, обитателей Эѳіопія и южной ча-


сти Аравіи; они легко могли быть посредниками между Египтомъ и Индіей и передать цифры отъ египтянъ къ индусамъ.

Второе возраженіе ученыхъ касается того, что истиннымъ посредникомъ въ переносѣ индусскихъ цифръ въ Европу можно бы считать греческаго ученаго Пифагора, жившаго за 500 лѣтъ до Р. Х. Въ такомъ случаѣ изобрѣтеніе цифръ отодвигается очень далеко. И это предположеніе опять можно допустить, потому что есть преданіе, что Пифагоръ много путешествовалъ, заходилъ въ далекіе края Азіи и вывезъ оттуда немало цѣнныхъ научныхъ изобрѣтеній. Но, съ другой стороны, гораздо лучше дать вѣру иному предположенію, именно, что цифры индусовъ заимствовали не Пифагоръ, а его позднѣйшіе ученики, такъ наз., новопифагорейцы, жившіе въ Александріи, въ Египтѣ, во II—III ст. по Р. Х. Они, согласно этому предположенію, сообщили цифры арабамъ, властителямъ сѣвернаго берега Африки и Испаніи, — маврамъ, а отъ арабовъ могли заимствовать испанцы и итальянцы.

Послѣдняя догадка, касающаяся нашихъ цифръ и, надо сказать, очень неосновательная, хотя и распространенная, заключается въ слѣдующемъ.

Будто бы каждая цифра образовалась изъ столькихъ точекъ или изъ столькихъ черточекъ, сколько въ этотъ числѣ единицъ. Если такъ, то цифра 4 состоитъ изъ , цифра 8 изъ , цифра 7 изъ .

Но этого никакъ не можетъ быть, потому что это чрезвычайная нагрузка и одна только игра остроумія. Такимъ путемъ можно всякую цифру привести въ столькихъ черточкахъ или точкахъ, къ сколькимъ

угодно. Цифру 3, напр., можно замѣнить , и тогда вышло бы, что она выражаетъ собою число 6. Конечно, единица подходитъ подъ эту гипотезу, и римскія цифры I, II, III совершенно соответствуютъ ей, но съ индусскими цифрами ничего не сдѣлать. Лучшимъ же доказательствомъ несообразности является историческое развитіе цифръ, при которомъ онѣ много, много разъ мѣняли свою форму, дѣлались неузнаваемыми, походили одна на другую, и только точное изслѣдованіе историковъ могло разобратъся и доказать, какъ изъ одной первоначальной формы вылилась другая, окончательная, путемъ многихъ и долгихъ преобразованій. Да и странно было бы думать, что изобрѣта-

тели цифръ такіе глубокіе мудрецы, что вложили въ каждую цифру таинственный символъ и образовали цифры изъ соотвѣствующаго числа черточекъ и точекъ.

Какъ сказано уже нами выше, цифры индусовъ были принесены въ Европу въ IX в. по Р. Х., но до XIII в. онѣ распространялись очень слабо.

Причиной этого является недовѣріе, съ которымъ ученые среднихъ вѣковъ встрѣтили новинку, хотя бы и полезную. Средневѣковая школьная ученость (схоластика), правда, не гнушалась свѣтскими науками, но въ то же время она слишкомъ высоко ставила латинскій языкъ и римскую цивилизацію.

Западная Европа явилась преемницей и носительницей научныхъ идей древняго Рима, поэтому-то такъ естественно вышло, что средне-вѣковая ариѳметика пользовалась исключительно римскимъ абакомъ (см. выше стр. 23) и римскими цифрами; хотя едва ли римляне оставили другое болѣе неудачное и несовершенное наслѣдіе, чѣмъ ихъ система ариѳметики. Во всякомъ случаѣ преданіе, инерція превозмогли все, и долго, долго не рѣшались ученые среднихъ вѣковъ порвать связь съ абакистами, т. е., послѣдователями римской ариѳметики, и превратиться въ «алгоритмиковъ», поклонниковъ учености арабской. Не смѣлыми шагами и тайкомъ, боясь навлечь на себя страшное обвиненіе въ еретичествѣ, пробивались сильные умомъ и волею ученые монахи въ Испанію, чтобы тамъ, въ центрахъ мавританской учености, въ Барселонѣ и Толедо, напиться открытіями свѣжей и новой, чуждой имъ, образованности. Такъ сдѣлалъ Гербертъ, свѣтлый умъ своего времени, достигшій папскаго престола подъ именемъ Сильвестра II, (+ 1003). Крестовыя походы, съ ихъ массовымъ передвиженіемъ цѣлыхъ народовъ изъ странъ Европы въ государства Азіи, много содѣйствовали усвоенію науки греческой, арабской, персидской и индусской. Можно сказать, что ариѳметика едва ли въ такой степени обязана своимъ развитіемъ другому историческому движенію, въ какой она обязана Крестовымъ походамъ. И замѣчательно, что итальянцы, эти посредники въ сношеніяхъ Европы съ Азіей, особенно чувствовавшіе вліяніе Крестовыхъ походовъ, такъ какъ чрезъ нихъ лилась волна народа въ Азію, явились въ то же время и лучшими математиками. Индусы дали зерно настоящей ариѳметики, а итальянцы его выростили.

По роду своихъ занятій прикосновенные къ морской торговлѣ (недаромъ Христофоръ Колумбъ былъ родомъ итальянецъ), они особенно нуждались въ ариметикѣ для своихъ коммерческихъ вычисленій, примѣняли ее въ банкахъ, конторахъ и т. д. и увѣковѣчили свое имя въ терминѣ «итальянская бухгалтерія». Индусы любили арифметику безкорыстно, какъ искусство, и до того ею увлекались, что даже устраивали цѣлые турниры и состязанія въ рѣшеніи арифметическихъ задачъ, итальянцы же приспособили ее прежде всего для цѣлей узко-житейскихъ.

Еще нѣсколько словъ объ индусахъ: имъ мы такъ обязаны усовершенствованіемъ арифметики. Это былъ народъ высоко-культурный, склонный къ отвлеченному мышленію. Едва ли какой-нибудь другой народъ на цѣломъ свѣтѣ любилъ настолько жить въ мірѣ идей, какъ это видимъ у индусовъ. Ихъ чистые созерцатели, «факиры», пользуются всемірной извѣстностью. Обѣ самыхъ распространенныхъ религій Азіи, буддизмъ и браманизмъ, получили свое начало въ Индіи. Согласно съ этимъ, математика отличалась у индусовъ идейнымъ, отвлеченнымъ характеромъ и носила алгебраическую окраску, въ противоположность грекамъ, поклонникамъ природы и наглядности, которые болѣе любили устремляться на геометрическія построенія. Въ полетѣ своей математической фантазіи индусы явились изобрѣтателями даже не одной, а многихъ арифметическихъ системъ. Такъ, напр., индусъ Аріабгатта, ученый V в. по Р. X., бралъ 25 согласныхъ буквъ и ими выражалъ всѣ числа, начиная съ единицы и оканчивая 25-ю, особыми же буквами обозначалъ онъ и полные десятки до 100; а чтобы обозначить сотни, тысячи и т. д., онъ къ предыдущимъ знакамъ придавалъ гласныя буквы, при чемъ особая гласная обозначала сотни, особая тысячи и т. д. Напримѣръ, «д» значитъ три, «да» — 300, «ди» — 30 000, «де» — 30 000 000 000. Математики Южной Индіи для каждаго изъ однозначныхъ чиселъ имѣли по нѣсколько особыхъ значковъ — буквъ, также имѣлось нѣсколько особыхъ знаковъ въ видѣ буквъ и для нуля. И вотъ, когда имъ приходилось обозначать разряды какого-нибудь длиннаго числа, они старались вмѣсто цифръ подставить буквы такъ, чтобы изъ нихъ составилось какое-нибудь слово, имѣющее смыслъ. Мало того, когда имъ приходилось запоминать не одно число, а нѣсколько, то они рядъ чиселъ замѣняли цѣлой фразой, которая опять-таки имѣла смыслъ.

И, наконецъ, что всего удивительнѣе, при длинномъ рядѣ чиселъ, когда изъ нихъ составлялось нѣсколько фразъ, индусы ухитрялись сочинять цѣлыя стихи и такимъ образомъ запоминать длинныя таблицы; для этого, конечно, нужна большая сноровка и многолѣтнія упражненія. И въ наше время среди индусовъ встрѣчаются такіе виртуозы, что въ умѣ совершаютъ головоломнѣйшія вычисленія, не прибѣгая къ помощи цифръ. Главный секретъ успѣха заключается въ этомъ случаѣ въ томъ, что они при устномъ счетѣ легко запоминаютъ всѣ промежуточные результаты, не теряютъ ихъ и не сбиваются, какъ это непременно случилось бы съ нами; кромѣ того, конечно, помогаетъ имъ и привычка къ искусственнымъ и сокращеннымъ приемамъ вычисленія, когда возможно столько упрощеній.

Распространеніе индусскихъ цифръ въ Россіи.

Какія были цифры у нашихъ предковъ до введенія христіанства? Вѣрнѣе всего никакихъ.

Для своихъ небольшихъ расчетовъ, надо полагать, они пользовались или пальцами, или нартѣками на палочкахъ, иначе сказать, бирками, которыми и сейчасъ пользуется темное крестьянство. Знакомство съ греками, введеніе христіанства и переводъ священныхъ книгъ на славянскій языкъ привели къ тому, что въ Россіи появилась своя славянская система цифръ, какъ простая копія и сколокъ греческой системы. Нерадостна и незавидна была участь ариометики въ Россіи. Нужды въ ней никакой особой не чувствовалось. по отсутствію образованности и торговли, и примѣнять ее необходимо было развѣ для вычисленія пасхалии, т.е. для опредѣленія дня Пасхи и другихъ переходящихъ праздниковъ. Наоборотъ, надо сказать, на ариометику смотрѣли косо, неласково и съ подозрѣніемъ; она была на замѣчаніи вмѣстѣ съ «Остронумѣй», еже есть «звѣздочетъ», и «волхвованіемъ». По мнѣнію проф. Бобынина, появленіе въ Россіи первыхъ ариометическихъ рукописей должно быть отнесено къ началу XII вѣка. Среди нихъ самая извѣстная: «Кирика діакона и domestika Новгородскаго Антоніева монастыря ученіе, имже вѣдати челоуѣку числа вѣхъ лѣтъ». Подлин-

ники старинныхъ рукописей, къ большому сожалѣнію для науки, утерялись постепенно въ теченіе столѣтій, а также не перестаютъ утеряться и въ наши дни. Такъ, во время пожара Москвы въ 1812 году погибла древнѣйшая ариѣметика (XVI в.). «Сія книга рекома по-гречески Ариѣметика, а по-нѣмецки Алгоризма, а по-русски Цифирная Счетная мудрость». Самую замѣчательную изъ сохранившихся рукописей Бобынинъ признаетъ ариѣметику (XVII в.) съ такимъ характернымъ предисловіемъ: «Пятая мудрость въ семи великихъ мудростѣхъ нарицается Ариѣметика. Начало мудростемъ: Грамматика, Геометрія, Астрономія, Музыка. Тѣ 4 мудрыя книги. Сія мудрость есть изыскана древними философи остропаримаго разума, нарицается ариѣметика, сирѣчь счетная-ариѣмость по-гречески счетъ толкуется. Безъ сея мудрости ни единъ философъ, ни докторъ не можетъ быть. По сей мудрости гости но государствамъ торгуютъ и во всякихъ товарѣхъ и въ торгѣхъ силу знаютъ, и во всякихъ вѣсахъ и въ мѣрахъ, и въ земномъ верстаніи, и въ морскомъ теченіи. Сія мудрость есть многихъ въ прикупѣхъ корысти сподобляетъ и честь даруетъ и умъ человѣческій высокопаривъ творить, и память укрѣпляетъ, и острыхъ острѣе творить въ разумъ. И сего ради слыши сію мудрость и воими, яже глаголетъ Ариѣметика. Азъ есмь отъ Бога свободная мудрость высокозрительнаго и остромысленнаго разума и добродатное придарованіе человѣческое. Мною человекъ превосходитъ безсловесное неразуміе. Азъ бо есмь своимъ легкими крылома парю выспръ подъ облаки, аще и нѣсть мя тамо. Азъ заочныя, невидимыя и предъочныя дѣла объявляю; въ солнечномъ же и въ лунномъ теченіи разумъ многимъ подаваю; и въ морскомъ плаваніи и въ земномъ верстаніи наставляю и мѣру указую; и въ купеческихъ вѣщѣхъ, и во всякихъ числѣхъ педоумѣніе разрѣшаю. И сего ради отъидете отъ меня иже меланколіею обдержаны суть, и у которыхъ мозги съ черною желчью смѣшаны, а моимъ ученикомъ достоинъ имѣти сугубильный чистый и высокій разумъ».

Такия пышныя предисловія составляютъ характерную черту ариѣметикъ этого періода. Текстъ въ нихъ писанъ славянскими буквами, и цифры употребляются въ большинствѣ славянскія. Индусскія цифры сдѣлались извѣстными въ Россіи съ 1611 года и появились первоначально въ тѣхъ славянскихъ книгахъ, которыя печатались въ юго-западныхъ типографіяхъ. Здѣсь сказывается польское вліяніе: оно энер-

гично воздѣйствовало на Россію въ XVII ст. и много сообщило намъ такого, что само получило отъ западно-европейской культуры.

Первоначально индусскія цифры употреблялись только для обозначенія страницъ въ книгахъ, а самый текстъ довольствовался славянскими цифрами. Въ 1647 г. въ Москвѣ издали книгу подъ заглавіемъ: «Ученіе и хитрость строенія пѣхотныхъ людей», въ ней цифры уже новыя, а не старыя—церковно-славянскія. Въ «Юрналѣ объ осадѣ Нотебурга» (1702 г.) половина экземпляровъ имѣла «числа русскія», т. е. со славянскими цифрами, а другая «цифирныя».

Классическій и знаменитый трудъ по части ариометики — «Ариометика, сирѣчь наука числительная. Съ разныхъ диалектовъ на славенскій языкъ преведеная, и во едино собрана и на двѣ книги раздѣлена. Въ лѣто отъ сотворенія міра ~~хх~~сѣи, отъ Рождества Бога Слова ~~хх~~лгг. Сочинися сія книга чрезъ труды Леонтія Магницкаго». Это извѣстная ариометика Магницкаго (1703 г.), по которой учились всѣ во времена Петра Великаго; по ней работала самоучка и нашъ великій Ломоносовъ. Это книга большого формата, напоминающая своей формой и шрифтомъ церковное Евангеліе или скорѣе Апостолъ. Въ ней болѣе 300 страницъ. Весь шрифтъ и обозначеніе страницъ—славянскіе, вычисленія же производятся на индусскихъ цифрахъ. Нумерація прямо и рѣшительно къ нимъ и переходитъ, минуя совершенно старыя славянскіе знаки. «Что есть нумераціо: нумераціо есть счисленіе еже совершенно вся числа рѣчію именовати, яже въ десяти знаменованіяхъ или изображеніяхъ содержатся и изображаются сице: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0».

Во времена послѣ-петровскія совершенно исчезаютъ славянскія цифры и славянскій текстъ. Книги принимаютъ такой шрифтъ и такую форму, какими мы пользуемся и теперь. Напоминаетъ лишь о старыхъ временахъ тяжелый слогъ и неупотребительныя въ настоящемъ литературномъ языкѣ выраженія. Вотъ выдержка изъ руководства къ ариометикѣ «для употребленія гимназій при императорской академіи наукъ», переведеннаго въ 1740 г. съ нѣмецкаго языка «чрезъ Василія Адоурова, академіи наукъ адъюнкта»: «Всякое число, какъ бы оно велико ни было, изъясняется весьма коротко и способно слѣдующими знаками: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которыхъ знаменованіе, когда оныя порознь разсуждаются, довольно извѣстно, и того ради никакого изъясне-

нія больше не требуетъ». Почти то же самое говорится и въ сочиненіи Румовскаго (1760 г.): «При счисленіи чиселъ больше не употребляется, какъ десять слѣдующихъ знаковъ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которыхъ знаменованіе всякому извѣстно». Замѣчательно, что у Румовскаго совершенно то же выраженіе, что и у Адодурова: «которыхъ знаменованіе довольно извѣстно». Вотъ какъ любятъ авторы черпать одинъ у другого не только доказательства и мысли, но и случайныя фразы. Неудивительно поэтому, что въ нашихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ все еще рѣшаютъ по ариметикѣ такія задачи, какія были въ сборникахъ тысячу лѣтъ тому назадъ.

Приведемъ еще небольшія выписки. «Знаки, употребляемые въ исчисленіи, суть слѣдующіе: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9». (Курсъ математики. Сочиненіе господина Безу. Переводъ Василія Загорскаго. 1806 г.). Въ руководствѣ къ ариметикѣ, для употребленія въ народныхъ училищахъ Россійской Имперіи, изданномъ «отъ Главнаго училищъ правленія», 1825 г., говорится такъ: «Знаки чиселъ суть слѣдующіе: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Къ симъ еще принадлежитъ знакъ единицы 1, и знакъ 0, который по себѣ ничего не значить и потому пулемъ называется. Всѣ сіи знаки цифрами именуются». Какъ видимъ, въ этой книжкѣ новшество, именно знакъ 1 стоитъ отдѣльно. Объяснить такой фактъ можно вліяніемъ нѣкоторыхъ математиковъ, которые, согласно съ Пифагоромъ, учили, что единица сама по себѣ не есть число, но только образуетъ другія числа. Впрочемъ, подобное новшество скоро опять проіадаеть, и уже въ 1834 году въ ариметикѣ, составленной Павломъ Цвѣтковымъ, мы читаемъ совершенно по-просту и безъ затѣй: «Всевозможныя числа изображаются десятью знаками или цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Каждая изъ сихъ цифръ означаетъ опредѣленное и постоянное число единицъ».

Выговариваніе цифръ и чиселъ.

Прежде всего, что значить слово «цифра»? Могу поспорить съ вами, читатель, что, не особенно задумываясь, вы быстро рѣшите этотъ вопросъ и скажете: слово «цифра» значить знакъ (а можетъ быть,

вы скажете—знакъ числа). Но это совершенно невѣрно. Слово «цифра» имѣетъ совсѣмъ другое значеніе и притомъ довольно неожиданное: по русски это будетъ «ничто». Какъ же такъ «ничто»? вѣдь это нуль, а кромѣ нуля есть еще и значащія цифры, къ которымъ ужъ совсѣмъ нельзя примѣнить смысла «ничто»?

Объяснимъ все это недоразумѣніе подробно.

Изобрѣтатели нуля индусы дали ему названіе «суніа» (Sunya), что значитъ «пустое», и этимъ указали на смыслъ нуля, замѣняющаго пустыя колонны или пустые разряды.

Арабы, перенявши нуль и примѣняя его въ своей ариметикѣ, перевели кетати и индусское слово «пустое» на свой языкъ: по-арабски пустое будетъ ас-сифръ. И долго, очень долго сохранялся первоначальный смыслъ этого термина, такъ что цифрой называли только кружокъ, т.-е., нуль. Сравнительно недавно рѣшились оставить цифрѣ нуль ея латинское имя (нуль по-латыни значитъ ничто), арабскій же терминъ распространить на всѣ 10 знаковъ индусской системы. Даже въ ариметикѣ Магницкаго, о которой мы говорили на предыдущихъ страницахъ, подъ цифрой разумѣется только нуль, кружокъ, или какъ его называли въ XVII вѣкѣ, «онъ» (буква о). Вотъ какъ говоритъ Магницкій: «Вся числа въ десяти знаменованіяхъ или изображеніяхъ содержится, изъ нихъ же девять назнаменовательны суть, послѣднее же 0 (еже цифрою или ничемъ именуется) егда убо (оно) едино стоитъ, тогда само о себѣ ничто же значитъ, егда же коему оныхъ знаменованій приложено будетъ, тогда умножаетъ въ десятеро». Какъ видите, читатель, здѣсь вмѣсто слова цифра употребляется знаменованіе, а цифрой называется одинъ только нуль.

Таково происхожденіе слова «цифра». Чтобы перейти къ выговариванію чиселъ, прежде всего скажемъ, что всякій народъ, какой бы системой счета онъ ни пользовался, всегда дѣлилъ многозначныя числа, для удобства выговариванія и письма, на классы. Греки въ основу класса полагали 4 разряда: это, такъ наз., счетъ мириадами. Римляне же составляли классъ изъ 3 разрядовъ. Нашъ настоящій порядокъ, во всей его основѣ, примѣняется сталъ съ XVI столѣтія, при чемъ въ нѣкоторыхъ странахъ классъ составляется не изъ 3-хъ, а изъ 6-ти разрядовъ, подразделяющихся, въ свою очередь на два подкласса, по 3 разряда въ каждомъ. Подобная система въ 6 разрядовъ ведетъ свое начало

отъ голландскаго математика Альберта Жирара (1629 г.). Кстати можно вспомнить, что и у грековъ было нѣчто въ этомъ родѣ. Напримѣръ, великій математикъ Архимедъ, когда ему надо было выговаривать большія числа, считалъ въ каждомъ классѣ по 8 разрядовъ, вмѣсто 4-хъ.

Классы отдѣлялись другъ отъ друга при письмѣ различно: то между ними ставили черточки, то оставляли промежутки, иногда пользовались дугами, точками. Въ старинныхъ нѣмецкихъ учебникахъ можно чаще всего встрѣтить точки, и при томъ между 1 и 2 классомъ ставилась одна точка, между 2 и 3—двѣ и т. д., все больше и больше. Это помогало выговариванію. Въ самое послѣднее время (съ 8 окт. 1877 г.) принято въ Германіи и даже утверждено Союзнымъ совѣтомъ, чтобы классъ отъ класса отдѣлялся промежутками, но никакъ не точкой, запятой и черточкой. Съ тѣхъ поръ во многихъ математическихъ книгахъ стали пользоваться именно этимъ порядкомъ.

Названіе большихъ чиселъ, начиная съ милліона, стали объединяться и вырабатываться прежде всего въ Италіи, которая въ началѣ новыхъ вѣковъ справедливо могла считаться колыбелью математики. Такъ, терминъ «милліонъ» вошелъ тамъ въ употребленіе въ концѣ XV вѣка. Слово «милліардъ», въ смыслѣ тысячи милліоновъ, образовалось во Франціи въ первой половинѣ XIX вѣка. Билліонъ и триллионъ введены въ XVII столѣтіи; но къ новымъ терминамъ привыкаютъ очень медленно, а поэтому и въ XVI столѣтіи можно было натолкнуться на такое чтеніе: 23 раза по тысячью тысячъ тысячъ, 456 разъ по тысячъ тысячъ, 345 тысячъ 678; все это равно числу 23 456 345 678.

Виды чиселъ.

Какую цѣль преслѣдуетъ ариѳметика въ нашихъ школахъ? Очевидно, она желаетъ научить дѣйствіямъ и рѣшенію практическихъ задачъ. Но не всегда эта цѣль такой и была, потому что въ различные вѣка и при разныхъ научныхъ системахъ она то суживалась, то расширялась, то уклонялась въ сторону. Она суживалась до вычисленія одной только пасхалии въ средневѣковыхъ христіанскихъ школахъ: она расширялась

до изученія алгебры у индусовъ и арабовъ, до извлеченія корней въ недавнее время и до пропорцій въ наши дни; и корни, и пропорции такъ же чужды настоящей ариметикѣ и ея цѣлямъ, какъ «раздѣленіе вѣтровъ во оризонтѣ» и «изображеніе кумпаса», противившіяся въ ариметикѣ Магницкаго. Но самымъ уродливымъ уклоненіемъ нашей науки съ ея истиннаго пути было то, когда вмѣсто вычисленій и дѣйствій ученые занимались классификаціей чиселъ и открытіемъ ихъ таинственныхъ свойствъ. А стремленіе къ такимъ занятіямъ не разъ прорывалось наружу, особенно у людей настроенныхъ мистически. Среди нихъ первое мѣсто занимаетъ греческій философъ Пифагоръ и его послѣдователи. Онъ жилъ за 500 лѣтъ до Р. Х. въ знаменательное время, когда приблизительно жили и дѣйствовали основатели новыхъ религій, Зороастръ въ Персіи и Конфуцій въ Китаѣ. То было мистически настроенное время, и Пифагоръ оказался усерднымъ его дѣтищемъ, такъ какъ вникалъ въ числа и искалъ въ нихъ ихъ внутренняго смысла. Онъ искалъ священныхъ чиселъ и выше всего ставилъ число 36, какъ символъ «всей вселенной», на томъ основаніи, что число 36 равно суммѣ первыхъ четырехъ четныхъ и первыхъ четырехъ нечетныхъ чиселъ: $36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 2 + 4 + 6 + 8$; числомъ 36 пользовались ученики Пифагора, какъ торжественной формулой клятвы. Число 9 было у нихъ символомъ постоянства, такъ какъ всѣ кратныя 9-ти имѣютъ суммой цифръ все-таки 9, именно: у дважды девяти, т.-е. у 18, сумма цифръ $1 + 8 = 9$, у трижды девяти, т.-е. у 27-ми, $2 + 7 = 9$, у 36-ти $3 + 6 = 9$ и т. д. Число восемь было символомъ смерти, потому что кратныя 8-ми, т.-е. 16, 24, 32, 40 имѣютъ все меньшую и меньшую сумму цифръ: 7, 6, 5, 4. Единица, по Пифагору, обозначала духъ, изъ котораго проистекаетъ весь видимый міръ. Изъ единицы происходитъ двойка, символъ матеріальнаго атома. Принимая въ себя опять единицу, двойка, или матеріальный атомъ, становится тройкой или подвижной частицей. Это символъ живого міра. Живой міръ плюсъ единица, слѣдовательно, четверка, образуетъ цѣлое, т.-е. видимое и невидимое. Такъ какъ $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, то оно выражаетъ собою «Все». Пифагорейцы провозглашали число началомъ и основаніемъ всѣхъ вещей, такъ какъ, по ихъ словамъ, природа числа не допускаетъ никакого обмана, она законмѣрна и неизмѣнна, она проникаетъ въ неизвѣстное.

Такими-то хитросплетенными умствованіями занимались пифаго-
беллюстины.

рейцы; они не были въ этомъ случаѣ одинокими, потому что извѣстно не мало и другихъ любителей таинственной, символической ариеметики. Прежде всего назовемъ египтянъ, у которыхъ богъ Озирисъ представлялся числомъ 4, богиня Изида числомъ 3, а «Время» числомъ 5, и все это чертилось въ видѣ прямоугольнаго треугольника со сторонами 3, 4, 5, въ которомъ квадратъ гипотенузы, $5.5=25$, равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ: 3. $3+4.4$. Бредни халдеевъ относительно чиселъ доставили имъ славу волшебниковъ; каждый халдейскій богъ, отъ 1-го и до 60-го, имѣлъ свое особое число, ему посвященное; даже и духи не были обижены, потому что и имъ были посвящены числа, но только похуже—дробныя. Мистическое ученіе евреевъ, такъ наз., каббала (отсюда «каббалистическіе», т.е. таинственные, знаки) возникло за 2 вѣка до Р. Х. и развивалось вплоть до XIII столѣтія и далѣе. Первые десять чиселъ считались у нихъ «путями премудрости».

Христіанская средневѣковая Европа тоже не лишена была стремленій къ таинственному, символическому толкованію чиселъ. Епископъ майнцкій Рабанъ Мавръ въ IX в. рѣшалъ вопросъ, почему Моисей и Илія постились ровно 40 дней? «А потому, — отвѣчаетъ Рабанъ, — что 40 состоитъ изъ 4 десятковъ и этимъ знаменуетъ временную жизнь, ибо 4 выражаетъ время, а въ 10-ти можно распознать Бога и Его творенія». Алькуинъ, другъ императора Карла Великаго, заинтересовался численной задачей: почему Св. Апостоль Петръ поймалъ 153 рыбы? не больше и не меньше, а ровно 153? Алькуину казалось, что онъ нашелъ рѣшеніе: $153 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17$, т.е. число 153 равно суммѣ первыхъ 17-ти чиселъ. Но почему же именно 17-ти? На это Алькуинъ ничего не отвѣчаетъ.

Сколько труда и энергіи тратилось обыкновенно на эти изысканія и на эти изслѣдованія глубины числовыхъ отношеній! Правда, можно согласиться, что эти труды не пропали безъ всякой пользы и содѣйствовали теоріи ариеметики и, такъ называемой, теоріи чиселъ, они заставили вникнуть въ разложеніе чиселъ на множителей и на слагаемыя и привели къ числовымъ рядамъ, которые теперь у насъ зовутся прогрессіями. Такъ древне происхожденіе прогрессій! У насъ онѣ отодвинуты на конецъ алгебры, а у древнихъ математиковъ имъ отводилось почетное мѣсто въ элементарной ариеметикѣ.

Дѣленіе чиселъ на четныя и нечетныя извѣстно было еще въ древнемъ Египтѣ; оно же было вполне извѣстно и Пифагору, потому что уже въ его времена была въ ходу игра «въ четъ и нечетъ». Кромѣ того, пифагорейцы раздѣлили числа на первоначальныя и составныя; первоначальными они называли, подобно намъ, такія числа, которые не разлагаются на другихъ дѣлителей, а составными тѣ, которые можно представить въ видѣ произведенія 2-хъ множителей; и такъ какъ греки, любители и поклонники геометріи, смотрѣли и на ариѣметику со стороны геометрическихъ свойствъ, то они еще придумали называть первоначальныя числа линейными, а составныя плоскостными; дѣйствительно, всякое составное число, напр., 10, разлагается на 2 производителя, въ данномъ случаѣ на 2 и на 5, и потому можетъ обозначать собой площадь, хотъ, напримѣръ, прямоугольника, у котораго стороны 2 и 5; первоначальныя же числа могутъ выражать собой только длину линіи, если, конечно, не вводитъ дробей.

Еще пифагорейцы выдѣлили треугольныя числа и квадратныя: треугольное число то, которое представляетъ собою половину произведенія 2-хъ сосѣднихъ чиселъ, напримѣръ, 6 будетъ треугольнымъ числомъ, потому что его можно образовать умноженіемъ 3 на 4 и дѣленіемъ на 2; вотъ примѣры треугольныхъ чиселъ: $10 = \frac{4.5}{2}$, $15 = \frac{5.6}{2}$, $21 = \frac{6.7}{2}$, $28 = \frac{7.8}{2}$, $36 = \frac{8.9}{2}$, и т. д. Ясно, почему они заслужили такое названіе: они могутъ выражать собой площадь треугольника. Что значить квадратное число, легко догадаться: то число, которое составлено изъ 2-хъ равныхъ множителей: квадратныя числа слѣдующія: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и т. д.

Кромѣ того, у грековъ были «совершенныя числа». Подъ этимъ именемъ разумѣлись такія, которые равны суммѣ всѣхъ своихъ дѣлителей, считая единицу; самый легкій примѣръ совершеннаго числа—28, потому что $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; другимъ примѣромъ можетъ служить число 496; если сложить всѣхъ его множителей, считая и единицу, то въ суммѣ получимъ опять 496; множители слѣдующіе: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Отъ совершенныхъ чиселъ греки перешли, къ такъ наз., содружественнымъ. Два числа называются содружественными тогда, когда ка-

ждое изъ нихъ равно суммѣ дѣлителей другого; лучшимъ примѣромъ такихъ чиселъ могутъ служить 220 и 284; у перваго изъ нихъ дѣлители 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 даютъ вмѣстѣ 284, а у втораго дѣлители 1, 2, 4, 71, 142 даютъ въ суммѣ число 220. Въ теоріи содружественныхъ чиселъ не обошлось безъ курьеза, опять проявилась та же наклонность къ таинственному или волшебному. Нѣкій Мадшрити, умершій въ Мадридѣ въ 1007 году по Р. Х., въ своемъ сочиненіи «О цѣляхъ существующаго» пытается увѣрить, что содружественныя числа могутъ сыграть роль талисмана или приворотнаго зелья; а способъ для этого очень простой: надо написать на 2 бумажкахъ, на одной число 220, на другой—284, сжечь ихъ и пепель выпить съ водой, большее число самому, а меньшее тому, кого желательно къ себѣ расположить. Другой авторитетный человекъ, нѣкто Ибн-халдунъ, подтверждаетъ, что дѣйствительно эти числа имѣютъ значеніе талисмановъ, и что многіе на дѣлѣ это испытали и увѣрились; и онъ самъ, Ибн-халдунъ, на своемъ опытѣ въ этомъ же увѣрился.

Все, изложенное выше, принадлежитъ, главнымъ образомъ, грекамъ, потому что всѣ эти подраздѣленія и всѣ формулы разрабатывались въ школахъ Пифагора и уже отъ позднѣйшихъ его учениковъ перешли къ арабамъ. Римляне не заносились такъ далеко въ своей фантазіи и предпочитали быть поближе къ практикѣ и наглядности; вычисляли они, какъ выше уже сказано, все больше по пальцамъ и даже ухитрялись замѣчать на пальцахъ довольно большія числа, при этомъ единицы отмѣчались пальцами, а десятки до сотни — суставами пальцевъ, именно:

- 1—мизинецъ согнуть,
 - 2—четвертый и пятый пальцы согнуты,
 - 3—третій палецъ согнуть
- и т. д.;

10—верхній суставъ указательнаго пальца прижать къ нижнему суставу большаго пальца.

20—указательный палецъ протянуть; большою палецъ приближается къ нижнему суставу указательнаго.

30 — верхніе суставы большого и указательнаго пальца сближены
и т. д.

Подобная наклонность считать все по пальцамъ отразилась и на раздѣленіи чиселъ. Простыя единицы до 10-ти назывались у римлянъ пальцевыми (*digiti*), круглыя десятки до сотни назывались суставными (*articuli*), и, наконецъ, всѣ остальные числа носили названіе сложныхъ или сочиненныхъ (*compositi*).

Когда свѣтъ христіанства распространился изъ Рима на всю Западную Европу, то вмѣстѣ съ этимъ разлилась волна и римской образованности. Скучна была римская ариметика, но, за неимѣніемъ лучшей, она царила безраздѣльно во всей Европѣ до XIII—XIV вѣка, со своимъ абакомъ, римскими цифрами и пальцевымъ счетомъ. Скучна и бѣдна была теоретическая часть ариметики, но она цѣнилась тѣмъ выше, чѣмъ была бѣднѣе. Вслѣдствіе этого и раздѣленіе чиселъ на пальцевыя, суставныя и сочиненныя бережно хранилось, какъ что то священное и чрезвычайно важное, и передавалось отъ одного ученаго къ другому даже тогда, когда Европа ознакомилась съ арабской ариметикою, и дошло почти до нашихъ дней, по крайней мѣрѣ, проявляло признаки жизни въ XVIII вѣкѣ, когда пропалъ и абакъ, и пальцевый счетъ. Римскія цифры оказались еще болѣе живучими, такъ что помѣщаются въ нашихъ ариметикахъ и проходятся въ школахъ по сегодняшний день. Въ послѣдній разъ мы видимъ пальцевыя, суставныя и сочиненныя числа въ славянской ариметикѣ Магницкаго (1703 г.). Въ ней говорится: «Персты: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 0. Сія изображенія отъ многихъ называются персты, а толико ихъ числомъ, елико и перстовъ есть по разумѣнію нѣкоторыхъ. Составы: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200. Сія числа именуются составы, зане цифрою 0 всегда въ десятеро составляютъ. Сочиненіе: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27. Сія числа сочиненія называются, понеже они изъ перстовъ и составовъ сочиняются». Какъ видимъ, въ этихъ объясненіяхъ недостаетъ убѣдительности, да и примѣры-то взяты непослѣдовательно и односторонне. Впрочемъ, авторъ добавляетъ еще объясненіе, которое, пожалуй, не столько уясняетъ, сколько запутываетъ: «Умствовать же вышеобъявленная перстовая, суставная и сочиненная числа, въ сотни, въ тысящи и вѣщще, сочиненіе отъ правыя руки къ лѣвой исчисляя впредъ въ десятеро».

Число и порядокъ дѣйствій, знаки и опредѣленія.

На вопросъ, сколько ариметическихъ дѣйствій, теперь всякій, даже недоучившійся въ школѣ, можетъ отвѣтить, что ихъ — четыре: сложение, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Но не всегда было такъ; прежде дѣйствій насчитывали больше: 5, 6, 7, и даже 9. Откуда же ихъ столько брали? Очевидно, изъ того же источника, т.е. изъ ариметики, но съ раздѣленіемъ и дополненіемъ. Во-первыхъ, нумерацію принимали за особое дѣйствіе и такимъ образомъ насчитывали 5. Во-вторыхъ, долгое время у большинства писателей выделялись еще въ особія правила удвоеніе и раздвоеніе. Выходитъ дѣйствій семь. Къ нимъ иногда присоединяли возвышеніе чиселъ въ степень и извлеченіе корня, и получалось 9.

Происходила эта путаница отъ того, что авторы никакъ не могли согласиться, что разумѣть подъ дѣйствіемъ. Мы разумѣемъ подъ нимъ составленіе новаго числа по даннымъ числамъ и потому не считаемъ нумерацію за дѣйствіе.

Удвоеніе числа и дѣленіе пополамъ изстари, съ глубокой древности, еще со временъ египтянъ. считалось не видомъ умноженія и дѣленія, а особымъ дѣйствіемъ. Впрочемъ, отъ египтянъ его переняли не столько римляне, сколько арабы. Поэтому въ борьбѣ новой арабской ариметики со старой римской, когда въ XIII—XIV вв. столкнулись латинская схоластика съ индусской математикой, удвоеніе и раздвоеніе стояли на знамени новой науки и усиленно рекомендовались въ качествѣ очень полезной и важной мѣры для лучшаго усвоенія дѣйствій. Ученый англичанинъ Сакро-Боско, жившій въ XIII столѣтіи, рекомендовалъ начинать дѣленіе пополамъ справа, т.е. съ низшихъ разрядовъ, подобно сложению и вычитанію, а удвоеніе — слѣва, съ высшихъ разрядовъ, какъ это дѣлалъ онъ и въ умноженіи вообще и въ дѣленіи. Сейчасъ намъ совершенно непонятно, какія такіа удобства могли бы представиться, если бы начинать дѣленіе справа, а умноженіе слѣва; мы, по крайней мѣрѣ, стали бы производить эти дѣйствія совершенно наоборотъ. Навѣрное, такіа же причины заставили и средневѣковыхъ математиковъ поглубже вдуматься, есть ли, дѣйствительно, польза отъ того, чтобы удвоеніе и раздвоеніе стличать отъ простаго

умноженія и дѣленія; пришлось сознаться, что это только частные случаи главныхъ дѣйствій; первый, кто авторитетно заявилъ объ этомъ, былъ итальянецъ Лука Пачіоло (1500 г.). Онъ перешелъ къ нашему обыкновенному способу дѣленія.

Возвышеніе чиселъ въ квадратъ и кубъ и извлеченіе корней считалось необходимой принадлежностью ариеметики почти до самаго послѣдняго времени. Эти два правила помѣщались въ ариеметикѣ до 50-хъ и даже 60-хъ годовъ истекшаго столѣтія. Теперь ихъ пропускаютъ, потому что, чтобы ихъ выяснить толково, надо знать алгебру, и, слѣд., лучшее имъ мѣсто въ алгебрѣ.

Арабскій математикъ Аль-Ховаризми (въ IX в. по Р. X.), въ честь котораго и вся система арабской ариеметики получила названіе алгоритма, не считалъ нумерацію за дѣйствіе и принималъ только слѣдующія шесть: сложеніе, вычитаніе, дѣленіе пополамъ, удвоеніе, умноженіе и дѣленіе. Послѣдовательность дѣйствій у него, какъ видимъ, очень оригинальная; хотя ей нельзя отказать въ большой долѣ цѣлесообразности, въ смыслѣ перехода отъ легкаго къ болѣе трудному. Когда удвоеніе и раздвоеніе были оставлены, то многіе математики начали послѣ сложенія проходить прямо умноженіе, а потомъ ужъ вычитаніе съ дѣленіемъ. И они поступали въ этомъ случаѣ основательно, потому что умноженіе опирается на сложеніе, а дѣленіе можетъ приводиться къ повторительному вычитанію дѣлителя изъ дѣлимаго.

Въ только что минувшемъ XIX столѣтіи нѣкоторые нѣмецкіе педагоги придумали изъ одного дѣленія образовать 2 дѣйствія, именно, во-первыхъ, когда требуется раздѣлить число на нѣсколько равныхъ частей, и, во-вторыхъ, когда надо узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ. Такое раздѣленіе надо признать излишнимъ, тутъ вовсе нѣтъ 2-хъ различныхъ дѣйствій, а есть только два вида одного дѣйствія, при чемъ въ первомъ видѣ отыскивается множимое по произведенію и множителю, а во второмъ—множитель по произведенію и множимому. Отдѣльные знаки для этихъ 2-хъ видовъ мы также полагали бы лишними: дѣлимъ ли мы, наприм., на пятерыхъ или дѣлимъ на пятки, и тутъ, и тамъ все дѣлимъ, поэтому и можно удовольствоваться однимъ знакомъ.

Поговоримъ теперь о знакахъ ариеметическихъ дѣйствій и прежде

всего отиѣтимъ, что потребность въ знакахъ начала чувствоваться такъ же давно, какъ и потребность въ цифрахъ. Какъ цифрами первоначально служили наглядныя фигуры и буквы алфавита, такъ и знаки образовались изъ чертежей и тоже буквъ. Еще древніе египтяне употребляли при сложеніи нѣчто въ родѣ нашего плюса. У грековъ знакомъ сложенія являлась косая черта, при вычитаніи писалась лавычка, и знакомъ равенства служила дуга (см. приложение 11-е въ концѣ книги). Позднѣе (въ IV в. по Р. Х.) Діофантъ Александрійскій, знаменитый греческій геометръ, ввелъ вмѣсто знака равенства букву ι , начальную букву слова «ισοι», что значитъ «равны». Арабы вовсе не употребляли знака сложенія въ томъ случаѣ, когда количества писались рядомъ, потому что, дѣйствительно, здѣсь можно подразумѣвать сложеніе само собой. Знакъ вычитанія у нихъ писался въ видѣ цѣлаго слова, которое, въ переводѣ на русскій языкъ, значитъ «безъ». Вычитаемое арабы ставили налѣво, а уменьшаемое—направо, потому что они, подобно всѣмъ семитическимъ народамъ, располагали слова отъ правой руки къ лѣвой, а не отъ лѣвой къ правой, какъ мы. Знакомъ равенства у нихъ было S: это есть послѣдняя буква слова «равняется». Нашъ настоящий знакъ равенства введенъ въ алгебру Робертомъ Рекордомъ въ 1556 году. Косой крестъ при умноженіи окончательно предложенъ Уттредомъ въ 1631 году. Но и до него этотъ знакъ употреблялся очень часто и считался очень удобнымъ, потому что онъ указывалъ не только дѣйствіе, но и порядокъ дѣйствія. Именно, старинный употребительный способъ умноженія былъ способъ «крестика», въ та-

26

комъ родѣ \times Чтобы умножить 26 на 34, брали 4 отдѣльныхъ произ-

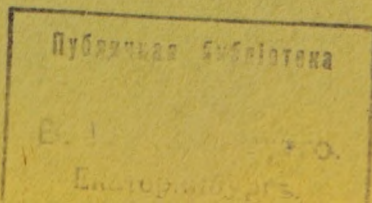
34

веденія: 20×4 , 6×30 , 6×4 , 20×30 , изъ нихъ два вертикально и два крестъ на крестъ. Этотъ способъ иначе называется хиазмомъ, потому что косой крестъ походить на греческую букву χ (хи), и самый знакъ умноженія назывался иногда «хи». Замѣчательно, что онъ же продолжительное время служилъ и знакомъ дѣленія дробей, такъ какъ въ этомъ случаѣ тоже приходится выполнять дѣйствіе крестъ на крестъ: числителя одной дроби помножать на знаменателя другой. Христіанъ Вольфъ въ XVIII ст. предложилъ обозначать умноженіе точкой. Наши знаки плюсъ и минусъ въ ихъ нормальной формѣ встрѣчаются въ пер-

вый разъ около 1489 г. въ ариѳметикѣ лейпцигскаго профессора Видмана. Съ 1600 г. уже во всѣхъ четырехъ дѣйствіяхъ можно видѣть настоящіе знаки.

Теперь поведемъ рѣчь объ опредѣленіяхъ дѣйствій. Что показываетъ опредѣленіе? Оно указываетъ смыслъ дѣйствія и его сущность. Такъ, напр., опредѣленіемъ умноженія цѣлыхъ чиселъ служить слѣдующее: «умноженіемъ называется такое ариѳметическое дѣйствіе, въ которомъ составляется сумма столькихъ слагаемыхъ, равныхъ первому данному числу, сколько единицъ заключается во второмъ данномъ числѣ». Надо сказать, что опредѣленія въ первоначальной арабской ариѳметикѣ были короткими и понятными и употреблялись только тогда, когда въ нихъ дѣйствительно являлась надобность, т. е. когда дѣйствіе безъ опредѣленія представлялось неяснымъ и смѣшивалось съ другимъ. Но, въ противоположность этому, средневѣковая школьная ученость (такъ назыв. схоластика) начала придавать словеснымъ опредѣленіямъ слишкомъ большое значеніе, начала требовать опредѣленій даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда и безъ нихъ понятія ясны, просты и не смѣшиваются. Къ этому еще присоединилось увлеченіе мнимонаучнымъ языкомъ, когда стремились нарочно выражаться туманно, тяжеловѣсно, нагромождая фразу на фразу, и все это съ цѣлымъ рядомъ придаточныхъ предложений, въ грудѣ которыхъ нерѣдко было трудно дойти до истиннаго смысла. Излишніе и тяжело выраженные опредѣленія не мало мучили учащихся; средневѣковая варварская латынь и хитроумная риторика ложились тяжелымъ бременемъ на умственные силы учениковъ и мало содѣйствовали уясненію основныхъ математическихъ понятій. И въ наши дни замѣтно еще нѣкоторое вліяніе средневѣковой схоластики, особенно въ нѣмецкой школѣ. Недаромъ знаменитый русскій педагогъ Ушинскій говоритъ: «Для нѣмца недостаточно понимать вещь: но ему непременно нужно опредѣлить ее и дать ей мѣсто въ системахъ своихъ знаній. Опредѣленіями пустѣйшихъ и ничтожнѣйшихъ предметовъ набиты кипы нѣмецкихъ учебниковъ. Безъ опредѣленія для нѣмца и вещь не вещь».

Приведемъ нѣсколько примѣровъ, которые доказываютъ, какъ иногда трудны и бесполезны бываютъ опредѣленія. Въ русской ариѳметикѣ Румовскаго (1760 г.) относительно дѣленія сказано такъ: «Дѣленіе есть способъ изъ данныхъ двухъ чиселъ D и M находить третіе E, въ ко-



торомъ бы столько разъ содержалась единица, сколько разъ одно изъ данныхъ двухъ чиселъ D въ другомъ данномъ M содержится». Какъ это мудрено и непонятно, хотя съ научной точки зрѣнія и правильно! Можно думать, что авторъ нарочно, съ цѣлью такъ затемнилъ смыслъ яснаго дѣйствія дѣленія; вѣдь пятилѣтніе ребята, если имъ дать яблоко и велѣтъ раздѣлить поровну, напр., пополамъ, поймутъ, чего отъ нихъ хотятъ, и съ удовольствіемъ рѣшать задачу, но авторъ этой ариметики, должно быть, думаетъ, что трудный слогъ содѣйствуетъ научности; на прасно: научность состоитъ въ глубокихъ мысляхъ, а не въ туманныхъ фразахъ. Вотъ еще опредѣленія Грамматеуса (XVI в.): «Сложеніе, или суммированіе, показываетъ сумму нѣсколькихъ чиселъ. Умноженіе, или увеличеніе, описываетъ, какъ умножать одно число на другое или увеличивать. Вычитаніе, или отниманіе, открываетъ, какъ число вычитать, или какъ одно число отнимать отъ другого, чтобы видѣть остатокъ». Здѣсь только одна замѣна словъ и нѣтъ никакой помощи для смысла.

Сложеніе цѣлыхъ отвлеченныхъ чиселъ

Это дѣйствіе безспорно и безъ всякаго сомнѣнія занимаетъ первенствующее мѣсто въ ряду четырехъ дѣйствій, потому что безъ сложенія не обойтись нигдѣ. «Что есть аддицію или сложеніе?» спрашиваетъ славянскій учебникъ ариметики и отвѣчаетъ: «Аддицію, или сложеніе, есть дву или многихъ числъ во едино собраніе, или во единъ перечень совокупленіе». И продолжаетъ сейчасъ же за этимъ: «Удобнѣйшаго же ради, и скорого сложенія, подобаетъ прежде предложенную таблицу имѣти въ разумѣ твердо, да всякихъ числъ сложеніе творити имаша скоро и извѣстно, безъ всякаго забвенія и лжи». Табличку надо было выучить непременно наизусть и помнить ее твердо, твердо, иначе все ариметическое зданіе могло бы рушиться, потому что въ старинные времена оно гораздо больше основывалось на чистомъ запоминаніи, чѣмъ на сужденіи и выводѣ. Учителя крѣпко убѣждаютъ помнить табличку, и вотъ даже стихи въ одной изъ ариметикъ:

«Къ двумъ единъ то есть три,
 Два же къ тремъ, пять смотри,
 Такъ и все назирай,
 Таблицу разбирай.
 Хотя же не лгати
 Похвально слагати,
 Да тщится познати,
 Изуствно сказати».

Въ нашихъ нынѣшнихъ учебникахъ ариѳметики таблица сложенія начинается съ $1+1$ и кончается $9+9$. Но прежде было иначе. Напр., въ ариѳметикѣ Леонардо Фибовначи (1200 г.), первомъ европейскомъ учебникѣ, составленномъ по арабскому образцу, рекомендуется заучить не только таблицу единицъ, но и цѣлую таблицу десятокъ отъ $10+10$ до $90+90$. Здѣсь, конечно, видна непослѣдовательность: если учить десятки, то отчего же не учить сотни, тысячи и всѣ остальные разряды. Въ противоположность такой большой таблицѣ, русскіе учебники XVII в. даютъ таблицу маленькую, которая кончается всего на все суммой 11, а до 18-ти не доходитъ. Заглавіе этой таблицы такое: «Граница изуствная счетная къ разуму хотящему разумѣти благая и полезная». Подобныхъ высокопарныхъ выраженій цѣлая тѣма въ старинныхъ ариѳметическихъ пособіяхъ.

Сложеніе большихъ чиселъ, особенно же многозначныхъ чиселъ издавна производилось гораздо чаще на счетныхъ приборахъ, чѣмъ письменно. Разныя наглядныя пособія для счета и придумывались, главнымъ образомъ, для того, чтобы помочь сложенію. У китайцевъ, — сванъ-панъ, у грековъ и римлянъ — абакъ, у насъ, русскихъ, торговые счеты, да, кромѣ того, еще нѣсколько видоизмѣненій этихъ приборовъ — все это служило цѣлямъ отысканія суммы. И надо сказать, что привычка складывать на приборахъ очень укоренилась въ простомъ народѣ во всѣхъ почти странахъ и при томъ настолько сильно, что, напримѣръ, римскій абакъ употреблялся для сложенія въ Западной Европѣ столѣтія 3—4 спустя послѣ введенія индусской системы.

Способомъ, переходнымъ отъ абака къ нашему настоящему, является такой. Положимъ, даны намъ два числа: 666 и 144; подписавши 144 подъ 666 и опредѣливъ сумму единицъ 10, мы стираемъ 6 у верхняго

слагаемого и пишемъ вмѣсто него 0, а такъ такъ сумма единицъ дала десятокъ, то и цифру десятковъ 6 стираемъ и пишемъ 7, теперь слагаемые измѣнились: 670 и 144; десятковъ въ суммѣ получится 11, слѣдовательно стираемъ 7 и замѣняемъ черезъ 1 и также вмѣсто 6 ти сотенъ пишемъ 7; теперь намъ остается только сложить 7 сотенъ съ 1, будетъ 8, эта цифра пишется вмѣсто 7 сотенъ, и весь отвѣтъ получается на мѣстѣ перваго слагаемаго въ видѣ 810. Пять разъ намъ приходилось стирать, прежде чѣмъ добраться до вѣрнаго отвѣта. Несомнѣнно, такимъ путемъ трудно дѣйствовать на бумагѣ, но онъ былъ умѣстенъ на абакѣ, покрытомъ пескомъ; еще можно попытаться на грифельной доскѣ, но эти постоянныя стиранія надоѣдаютъ; почему же они примѣнялись и на бумагѣ? Вѣдь отъ нихъ нѣтъ никакой выгоды и одно только неудобство? А потому, что прежняя метода обученія стремилась обратить человека въ машину, не полагалась на его личную сообразительность и предписывала все отмѣчать на абакѣ, но никакъ не удерживать въ умѣ. Мы теперь запоминаемъ десятки или сотни, получившіяся отъ единицъ или десятковъ, а тогда всѣ мелочи необходимо было писать, чтобы не утерять.

Механическій характеръ цифрового сложенія, безъ всякаго пособія устнаго счета, ясно проглядываетъ у большинства средневѣковыхъ писателей. Магометъ Бега эддинъ (XVI в.) подписываетъ слагаемые правильно одно подъ другимъ и складываетъ единицы опять же правильно, но когда изъ нихъ образуется десятокъ, то онъ не знаетъ, что съ нимъ дѣлать, и пока до поры до времени записываетъ его надъ десятками; далѣе ведетъ сложеніе десятковъ и только получивъ ихъ сумму, онъ вспоминаетъ про десятокъ, образовавшійся изъ единицъ и тутъ его прикладываетъ. Сложеніе другихъ разрядовъ идетъ подобнымъ образомъ. Примѣръ:

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 53739 \\ 28265 \\ \hline 71994 \\ 8200 \end{array}$$

Вотъ каково недовѣріе къ соображенію учениковъ и какая подробная механичность.

Въ этомъ родѣ, иногда съ небольшими улучшеніями, составленъ рядъ учебниковъ по ариѳметикѣ въ XVI—XVIII вв. Въ нихъ даются пространныя правила, какъ надо располагать слагаемыя и какъ замѣчать цифры. Эти правила нисколько не объясняются, и вычисляющій долженъ работать съ ними, какъ машина. Напр., Грамматеусъ, составитель нѣмецкаго учебника XVI в., даетъ три такихъ правила: 1-е. Смотри тщательно, чтобы цифры стояли какъ разъ одна надъ другой, такъ, чтобы 1-ая стояла надъ 1-ой, 2-ая надъ 2-ой и т. д.; проводи подъ этимъ линію, подъ которой и надо писать сумму. 2-е правило: Начиная съ правой руки, сложи все числа, которыя стоятъ на первомъ мѣстѣ; если получится отъ сложенія двѣ цифры, то первую напиши, а вторую удержи въ умѣ, съ тѣмъ, чтобы прибавить ее къ слѣдующей; такъ же поступай и со всеми остальными. 3-е правило: Въ концѣ ничего не надо держать въ умѣ, но все надо писать. Все время употребляй слово «и» или «да», напримѣръ, три да четыре—семь.

Въ настоящее время способъ сложенія тотъ же, что и въ старину. Правда, мы всегда начинаемъ дѣйствіе съ правой руки, когда вычисляемъ письменно, въ старину же дѣлали и съ лѣвой. Кромѣ того, наши ученики нерѣдко относятся совершенно сознательно къ дѣйствию и понимаютъ, что и для чего дѣлается. Но въ общемъ характеръ сложенія не измѣнился съ самыхъ тѣхъ поръ, какъ установилась индусская система съ ея нулемъ и значеніемъ цифръ по мѣсту, ими занимаемому.

Нѣкоторыя особенности можно отмѣтить только въ слѣдующихъ трехъ приѣмахъ, которые принадлежатъ индусамъ, арабамъ и грекамъ.

Арабскій ученый Алькальцаци (XV в.), совѣтуетъ писать сумму надъ слагаемыми, а внизу помѣщать тѣ цифры, которыя мы обыкновенно держимъ въ умѣ. Напримѣръ, дано сложить 48 съ 97-ю. Получится такое вычисленіе:

$$\begin{array}{r} 145 \\ \hline 97 \\ 48 \\ 1 \end{array}$$

Такое записываніе довольно неудобно, потому что при немъ необходимо впередъ приготовить мѣсто для суммы.

Греческій монахъ Максимъ Планудесъ (XIV в.), единственный представитель математическихъ знаній во весь византійскій періодъ греческой исторіи и къ тому же ученый не самостоятельный, а черпавшій свои приемы изъ арабскихъ источниковъ, предлагаетъ записывать сумму надъ слагаемыми, а не подъ ними, въ остальномъ же его способъ сходенъ съ нашимъ.

Индусы, какъ болѣе всего расположенные къ устному счету, вводили въ сложеніе, сравнительно съ другими народами, менѣе механичности и старались развивать въ ученикахъ сообразительность, быстроту вычисленій и умѣнье упрощать дѣйствіе. При многозначныхъ числахъ они писали слагаемыя въ строку и складывали ихъ по разрядамъ. $365+867+992$ индусы вычисляли такъ: $5+7+2=14$, $6+6+9=21$, $3+8+9=20$; всего 2224. Такъ идетъ дѣло у индусскаго писателя Баскары (XII в. по Р. X.).

Заканчивая эту главу, упомянемъ еще о терминахъ сложенія, т.-е. о названіи дѣйствія и обь именахъ данныхъ и искомымъ при немъ чиселъ. Средневѣковая ариѳметика вводила массу терминовъ. Такъ, вмѣсто «сумма» говорилось еще: агрегатъ, коллектъ, продуктъ. Вмѣсто «сложить» итальянскій ученый Тарталья приводитъ цѣлыхъ 12 терминовъ. Въ старинныхъ русскихъ ариѳметикахъ слагаемыя назывались перечнями, а сумма—исподнимъ большимъ перечнемъ, очевидно, потому, что принято было писать ее внизу, подъ малыми перечнями.

Вычитаніе цѣлыхъ отвлеченныхъ чиселъ.

До настоящаго времени извѣстно всего на все 5 способовъ письменнаго вычитанія многозначныхъ чиселъ, считая въ томъ числѣ и тотъ, который у насъ общепринятъ теперь. Начнемъ съ него. Мы производимъ письменное отніманіе отъ правой руки къ лѣвой, чтобы удобнѣе было занимать, а это приходится дѣлать всякій разъ, когда какой-нибудь разрядъ вычитаемаго не отнимается отъ разряда умень-

паемаго. Въ противоположность этому порядку, арабскій математикъ Бенъ-Муза, жившій при дворѣ халифа Аль-Мамума въ IX в. по Р. Х., настаиваетъ на вычитаніи съ высшихъ разрядовъ, т.-е. отъ лѣвой руки къ правой; причины онъ не объясняетъ, а просто говоритъ «такъ полезнѣе и легче». Вовсе не легче, прибавимъ мы отъ себя, потому что, если случается занимать, то нужно бываетъ перетирать цифры. Впрочемъ, весьма возможно, что Бенъ-Муза вычислялъ на пескѣ, да абакѣ, и ему ничего не стоило перемѣнить лишній разъ цифру; но очень нерасчетливо поступаютъ тѣ авторы, которые ведутъ вычисленія на бумагѣ, а правила даютъ такія, какія пригодны только для абака; вѣдь на абакѣ все можно стереть и все замѣнить новымъ, а на бумагѣ постоянныя перечеркиванья приводятъ къ путаницѣ, сбивчивости и къ лишнимъ усложненіямъ. Вотъ примѣръ, взятый изъ одного нѣмецкаго сборника XIII вѣка. Дается вычесть 144 изъ 810; отнимаемъ 4 отъ 810, получится 806; при этомъ цифры 1 и 0 мы замѣняемъ цифрами 0 и 6. Далѣе, вычитаемъ 4 десятка изъ 0, надо занять сотню, остатокъ будетъ всего 766; при этомъ цифры 8 и 0 замѣнялись другими: 7 и 6. Когда, наконецъ, вычтемъ 100 изъ 766, то получимъ искомый отвѣтъ 666. Такимъ путемъ послѣ трехъ измѣненій цифръ, приходимъ мы къ отвѣту 666. Максимъ Планудесъ, византійскій математикъ XIV вѣка, вычитаетъ точно такъ, какъ мы, но пишетъ всѣ вычисленія гораздо подробнѣе, такъ какъ не надѣется на устный счетъ и приводитъ все дѣло къ механическому записыванію. Если бы потребовалось вычесть 26158 изъ 35142, то по Планудесу мы, во-первыхъ, должны были бы остатокъ записать вверху, надъ чертой, точно такъ, какъ и сумму онъ же рекомендуетъ писать вверху надъ слагаемыми:

08984

24031

35132

26158

во-вторыхъ, надъ уменьшаемымъ появляется какой-то странный рядъ цифръ 24031. Объясняется онъ такъ. Когда мы начинаемъ дѣйствіе справа и хотимъ вычесть 8 изъ 2, то, конечно, намъ вычесть нельзя,

и мы должны къ 2 единицамъ еще занять 1 десятокъ изъ 4-хъ; вотъ этотъ то одинъ занятой десятокъ и пишется надъ цифрой единицъ и образуетъ вмѣстѣ съ ней 12; 8 изъ $12=4$, слѣдовательно, простыхъ единицъ въ отвѣтъ 4. Вычитая далѣе десятки, мы должны считать ихъ въ уменьшаемомъ не 4, а 3, такъ какъ одинъ десятокъ раздробленъ въ простые единицы; и вотъ, чтобы не сбиться; Планудесъ ставитъ надъ цифрой десятковъ 4 новую цифру 3 и продолжаетъ находить отвѣтъ также для сотенъ, тысячъ и десятковъ тысячъ. Изъ этого видно, что рядъ цифръ 24031 представляетъ собою исправленные разряды числа, когда въ нихъ произошло заиманіе.

Во всѣхъ разобранныхъ примѣрахъ, начиная съ Венъ-Музы, проявляется, несмотря на видимое разнообразіе подробностей, одинъ и тотъ же основной приемъ, и, очевидно, тотъ самый, который примѣняется и въ нашемъ настоящемъ способѣ вычитанія. Это не важно, съ какой руки начинать дѣйствіе, и гдѣ записывать цифры, которыя мы привыкли держать въ умѣ, но важно то, какъ производить заиманіе, потому что оно составляетъ самое трудное и сбивчивое мѣсто во всемъ вычитаніи. Во всѣхъ примѣрахъ, взятыхъ выше, заиманіе производилось нормальнымъ путемъ: если, напр., единицъ внизу больше, чѣмъ вверху, то берется десятокъ, прикладывается къ единицамъ, и такимъ образомъ дѣйствіе становится возможнымъ. Въ виду одинаковости заиманія, мы относимъ всѣ предыдущіе примѣры къ одному виду, или способу, который мы и называемъ первымъ способомъ вычитанія.

Чтобы объяснить второй способъ, беремъ примѣръ: 5975—497. Такъ какъ 7 изъ 5 не отнимается, то отнимаемъ 7 изъ 15, будетъ 8. Но, вычитая 7 изъ 15-ти вмѣсто 5-ти, мы этимъ къ уменьшаемому прибавляемъ лишній десятокъ, такъ какъ въ немъ простыхъ единицъ всего только 5, а мы говоримъ 15. Но не будемъ занимать этого десятка отдѣльно въ десяткахъ уменьшаемаго, потому что такимъ путемъ мы опять придемъ къ 1-му способу; вмѣсто того, мы отнимаемъ этотъ занятой десятокъ отъ 7 десятковъ уменьшаемаго тогда, когда будемъ отнимать десятки вычитаемаго, и намъ вмѣсто 9 придется отнять 10 десятковъ; такъ какъ 10 изъ 7-ми не вычитается, то надо занять сотню; ее мы опять-таки не будемъ занимать отдѣльно и не будемъ отнимать прямо отъ 9 сотъ уменьшаемаго, а вычтемъ вмѣстѣ

съ 4-мястами. Тогда, отнявши отъ 9-сотъ 5, получимъ 400. Теперь легко понять, чѣмъ отличается второй способъ вычитанія отъ перваго. По второму способу тотъ десятокъ или та сотня, которые мы занимаемъ, не отнимаются сейчасъ же отъ десятковъ или сотенъ уменьшаемаго, а придаются къ десяткамъ или сотнямъ вычитаемаго, и тогда уже вычитаются вмѣстѣ съ ними; слѣдовательно, не цифры уменьшаемаго понижаются на единицу, а, наоборотъ, цифры вычитаемаго повышаются на единицу, если только, конечно, изъ соответствующаго разряда занимаютъ. Вотъ еще примѣръ: $1236 - 879$. Рѣшеніе: 9 изъ 16-ти—7, 8 изъ 13-ти—5, 9 изъ 12-ти—3, всего 357. Чтобы отмѣтить, какія цифры вычитаемаго повышаются, надъ ними ставятъ точки. Этотъ второй способъ получилъ начало уже давно, еще со времени М. Планудеса и ранѣе, примѣняется же онъ теперь иногда во французскихъ школахъ. Въ немъ видятъ даже нѣкоторое удобство, сравнительно съ нашимъ приѣмомъ, потому что въ немъ занятая единица всегда прикладывается, а у насъ отнимается, прикладывать же вообще проще и естественнѣе, чѣмъ отнимать, такъ какъ и сама ариметика начинается съ элементарнаго прикладыванія, т.-е. счета по единицѣ. Но, разумѣется, это выгода довольно призрачна, и все дѣло зависитъ отъ привычки: насъ приучали съ малыхъ лѣтъ ставить точку надъ уменьшаемымъ, а не надъ вычитаемымъ, и это насъ не затрудняетъ, а даже кажется болѣе легкимъ.

Третій способъ, предложенный Адамомъ Ризе, нѣмецкимъ педагогомъ XVI вѣка, примыкаетъ къ первому. Объяснимъ его на примѣрѣ: $85322 - 67876$. Ведемъ вычитаніе съ простыхъ единицъ. По обыкновенному приѣму надо бы 6 вычесть изъ 12-ти, а мы по этому третьему способу вычтемъ 6 не изъ 12-ти, а изъ 10-ти, и этотъ 1 десятокъ занимаемъ у 2-хъ десятковъ уменьшаемаго. 6 изъ 10 составитъ 4, да 2 единицы въ уменьшаемомъ, всего будетъ 6. Далѣе вычитаемъ десятки. Такъ какъ 7 не вычитается изъ двухъ, или вѣрнѣе изъ одного, потому что одинъ десятокъ мы уже заняли, то надо намъ занять сотню и раздробить ее въ десятки; сотня дастъ 10 десятковъ, вычтемъ изъ нихъ 7, тогда получимъ въ разности 3; да еще въ уменьшаемомъ 1 десятокъ, итого накопится въ остаткѣ 4. Такъ же поступаемъ и съ остальными разрядами: $10 - 8 = 2$, да 2, всего 4 сотни; $10 - 7 = 3$, да 4 тысячи, всего 7 тысячъ; $10 - 6 = 4$, да 8, всего 12 десятковъ тысячъ.

сячь; но изъ этихъ 12 десятковъ тысячъ надо исключить 1 сотню тысячъ, потому что мы ее какъ бы заняли, а между тѣмъ занять-то было не у чего, то мы ее теперь и счеркиваемъ у остатка. Выводъ относительно третьяго способа получается слѣдующій. Онъ основанъ на отниманіи каждаго разряда вычитаемаго отъ 10-ти и прибавленіи разрядовъ уменьшаемаго, а такъ какъ разность между какимъ-нибудь однозначнымъ числомъ и десятью называется дополненіемъ этого числа до 10-ти, то способъ Адама Ризе можно еще выразить такъ: къ разрядамъ уменьшаемаго надо прикладывать дополненія разрядовъ вычитаемаго до 10-ти. Еще примѣръ:

19033091

2785306

16247785

Рѣшается онъ такъ: 4, дополненіе 6-ти до 10-ти, да 1, будетъ 5; 10, дополненіе нуля до 10-ти, да 8, потому что 1 занята, составитъ 18, изъ нихъ 8 пишемъ, а 1 сотню отбрасываемъ, потому что, когда мы брали дополненіе, то для этого намъ необходимо было имѣть сотню, а такъ какъ мы ее не занимали въ уменьшаемомъ, то и счеркиваемъ ее въ остаткѣ. Такъ же поступать надо и въ другихъ подобныхъ случаяхъ, именно когда дополненіе вычитаемаго вмѣстѣ съ разрядомъ уменьшаемаго дастъ болѣе 10-ти, то десятокъ счеркивается. Способъ Адама Ризе былъ знакомъ его современникамъ, но особаго развитія и распространенія онъ не получилъ. Онъ очень напоминаетъ новый, пятый способъ, который помѣщаемъ ниже.

Четвертое правило вычитанія принадлежитъ арабскому ученому Алькальцади изъ Андалузіи (XV в.). Чтобы, напримѣръ, вычесть 287 изъ 573, надо сперва 7 простыхъ единицъ вычесть изъ 3-хъ. Конечно, 7 изъ 3-хъ не вычитается, но прежде чѣмъ занимать десятокъ, Алькальцади задается вопросомъ: много ли недостаетъ къ тремъ для того, чтобы изъ нихъ можно было вычесть семь? Оказывается, недостаетъ четырехъ. И вотъ мы занимаемъ теперь десятокъ изъ 7 десятковъ, раздробляемъ его въ единицы и вычитаемъ столько, сколько не хватало, т. е. 4, въ остаткѣ будетъ 6. Такимъ же образомъ идетъ вычисленіе и съ десятками, и съ сотнями: 8 изъ 6, недостаетъ двухъ,

вычитаемъ 2 изъ 10-ти, будетъ 8 десятковъ; наконецъ, 2 сотни изъ 4 сотенъ дадутъ 2 сотни, всего 286.

Связь между способами первымъ, третьимъ и четвертымъ мы представимъ для ясности еще разъ на двузначныхъ числахъ. Возьмемъ 41—27. По первому способу необходимо 7 вычитать изъ 11-ти, по третьему 7 вычитается изъ десяти, и къ полученному прибавляется 1, а по четвертому изъ 10-ти вычитается недостатокъ единицы противъ 7-ми. Что касается второго способа, то въ немъ, какъ и въ первомъ, 7 вычитается изъ 11-ти, но зато потомъ, когда идетъ отниманіе десятковъ, не 2 десятка отнимается изъ 3-хъ, а 3 изъ 4-хъ.

Пятый и послѣдній способъ сходенъ по своей основной мысли со способомъ Адама Ризе. Въ немъ прибавляется къ разрядамъ уменьшаемаго дополненіе разрядовъ вычитаемаго, при чемъ дополненіе берется то до 10-ти, то до 9-ти: до десяти тогда, когда надъ цифрой уменьшаемаго не стоитъ точки, которая бы показывала, что здѣсь единица занята, а до 9-ти тогда, когда стоитъ точка. Примѣръ: 731—264. Чтобы произвести это вычитаніе по пятому способу, прибавляемъ къ одной простой единицѣ уменьшаемаго 6, т.-е. дополненіе 4-хъ единицъ вычитаемаго до 10-ти; получится 7. Далѣе беремъ десятки: 3 да 3 составить 6, при чемъ вторая тройка представляетъ собой дополненіе 6 десятковъ вычитаемаго до 9-ти, а до 9-ти потому, что надъ десятками уменьшаемаго стоитъ точка, какъ знакъ занимаія. Наконецъ, опредѣляемъ сотни: 7 да 7 14, 4 беремъ, а 1 скидываемъ. Окончательный отвѣтъ будетъ 467. Теперь надо объяснить, почему мы такъ дѣлаемъ, и на чемъ основанъ этотъ способъ. Намъ требовалось отнять 264, а мы не только не стали отнимать, но даже начали прикладывать и приложили всего 7 сотенъ 3 десятка 6 единицъ. На сколько же мы ошиблись, благодаря тому, что вмѣсто отниманія 264-хъ прибавили 736? Очевидно, на $736 + 264$, т.-е. ровно на тысячу.

Эту свою ошибку мы и исправляемъ въ самомъ концѣ, отчеркивая у отвѣта тысячу. Если бы намъ данъ былъ примѣръ 34985322—12467876, то вычисленіе получилось бы такое: $2+4=6$, $2+2=4$, $3+1=4$, $5+2=7$, $8+3=11$, изъ этого лѣвая единица скидывается, $9+6=15$, $4+8=12$, $9+3=12$, всѣ лѣвыя единицы скидываются. Если нужно дѣйствіе производить поскорѣе, то лучше точки ставить

не надъ уменьшаемымъ, а надъ вычитаемымъ. И вообще этотъ пятый способъ напоминаетъ собою второй способъ тѣмъ, что занимаемую единицу можно считать приложенной къ вычитаемому, а не отнятой отъ уменьшаемаго.

Таблица умноженія.

Твердое знаніе таблицы умноженія издавна требовалось отъ учениковъ и считалось совершенно необходимымъ. Составителемъ таблицы называютъ греческаго математика Пифагора или, вѣрнѣе, одного изъ его позднѣйшихъ учениковъ, ново-пифагорейца Никомаха (въ I ст. по Р. Х.). Начиная съ Никомаха ни одинъ авторъ не забываетъ напоминать, что «преимущественно передъ всѣмъ слѣдуетъ хорошо знать таблицу». Авторы старинныхъ русскихъ математическихъ сборниковъ также помѣщаютъ таблицу, или «границу умножалную» подъ титуломъ «граница изустная большому счету разумъ подаетъ хотящему въ нея зрѣти»; они тоже требуютъ заучиванія: «надобе сіи изустныя слова памятовати и въ памяти крѣпко держати, всегда во устѣхъ обносити, чтобы во умѣ незабыты были». Вотъ стихи изъ Магницкаго:

«Аще кто не твердитъ,	Не свободъ отъ муки.
Таблицы и гордить	Болико ни учить
Не можетъ познати,	Туне ся удручить.
Числомъ что множити.	И въ пользу не будетъ,
И во всей науки,	Аще ю забудеть».

Въ римскихъ школахъ таблицу заучивали хоромъ на распѣвъ.

Въ нашихъ современныхъ учебникахъ по ариметикѣ таблица умноженія содержитъ въ себѣ обыкновенно произведенія всѣхъ однозначныхъ чиселъ, начиная съ 2×2 и кончая 9×9 . Въ средніе вѣка смотрѣли на это дѣло иначе; тогда и въ ариметикѣ, и въ другихъ наукахъ давали большой просторъ памяти, а поэтому заучиваніе примѣняли широко; требованія въ этомъ отношеніи простирались такъ далеко, что ученики обязаны были запоминать произведенія всѣхъ

Французскій математикъ Chuquet (1484 г.) представляетъ таблицу умноженія въ такой формѣ:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	4	6	8	10	12	14	16	18	0	
3	3	4	5	6	7	8	9	0		
	9	12	15	18	21	24	27	0		
4	4	5	6	7	8	9	0			
	16	20	24	28	32	36	0			
5	5	6	7	8	9	0				
	25	30	35	40	45	0				
6	6	7	8	9	0					
	36	42	48	54	0					
7	7	8	9	0						
	49	56	63	0						
8	8	9	0							
	64	72	0							
9	9	0								
	81	0								
0	0									
	0									

Про то, какъ составляется обыкновенная таблица умноженія, говорилось подробно въ большинствѣ учебниковъ и объяснялось нѣсколькими, иногда многими способами. Но пропускался самый главный и простой способъ, когда таблицу составляютъ послѣдовательнымъ сложеніемъ, или набираніемъ. Въмѣсто него приводились такіе запутанные и искусственные приемы, что, дѣйствительно, гораздо легче было выучить таблицу наизусть, не понимая ея, чѣмъ запомнить эти приемы и особенно понять ихъ; они представляли изъ себя не столько ариметическое содержаніе, сколько алгебраическія формулы и помѣщались, какъ видно, больше для того, чтобы придать курсу серьезную, научную окраску. Между прочимъ, встрѣчаемъ въ старыхъ ариметикахъ такое правило: «умножь перваго производителя на 10 и вычти отсюда про-

изведеііе того же перваго произвоіітеля на доііолненіе втораго произвоіітеля до десяти»; это яснае видііо на примѣрѣ: чтобы составить, наііримѣръ, 4×7 , надо 4 умножить на 10, будетъ 40, потомъ 4 на 3, потому что 3 служить доііолненіемъ 7-ми до 10, будетъ 12, и, наконецъ, изъ 40 вычесть 12, тогда остатокъ 28 и составить произвоііеііе 4 на 7. Какія все это лишнія хлопоты и затрудненія! Они всегда неизбѣжны, если на дѣло смотрѣть не прямо и просто, а съ предвзятой точки зрѣнія, и въ данііомъ случаѣ съ той ошибочной точки зрѣнія, что будто бы чѣмъ объясненіе или способъ труднѣе, тѣмъ научнѣе. Не можетъ же быть, чтобы авторы учебііниковъ, люди доволъііо искусные въ изобрѣтеніи разныхъ ііріемовъ, не замѣчали среди нихъ самыхъ простыхъ и естественныхъ; но они какъ бы стѣснялись высказать простое слово.

Пеііагоііика римлянъ и грековъ въ этомъ отношеніи гораздо разумнѣе средневѣковой, она смотрѣла на науку практичнѣе и старалась сдѣлать ее ясною и доступной. Не даромъ римлянамъ принадлежить умѣііе составлять таблицу на пальцахъ, о чемъ сказано выше.

Развитіе нормального ііріема умноженія.

Намъ, привыкшимъ къ опредѣленному порядку умноженія, представляется чѣмъ-то страннымъ, что могутъ существовать еще другіе способы; настолько мы сжились съ своимъ. А между тѣхъ ихъ очень много, и ни въ какомъ другомъ дѣйствіи не встрѣчается такого большаго разнообразія, какъ въ умноженіи. Въ старину всякій авторъ выбивался изъ силъ, чтобы дать отъ себя какое-нибудь измѣненіе или улучшение. Мы приведемъ всего 27 способовъ, не ручаясь, конечно, за то, что здѣсь они всѣ безъ остатка; весьма возможно, что есть и еще, скрытые въ тайникахъ книгохранилищъ, разбросанные въ многочисленныхъ, главнымъ образомъ, рукоіісныхъ сборііникахъ. Мы начнемъ съ современнаго нормального способа и постепенно перейдемъ къ тѣмъ, которые болѣе всего отъ него уклоняются.

1. Авторомъ нашего нормального способа умноженія многозначнаго

числа на многозначное слѣдуетъ считать Адама Ризе, популярнаго нѣмецкаго педагога (1492—1559). Въ его рукахъ онъ получилъ послѣднюю отдѣлку и завершеніе, и теперь онъ считается самымъ удобнымъ. Главное отличіе способа Адама Ризе заключается въ томъ, что разряды всѣхъ чиселъ и множимаго и множителя, и произведенія стоятъ одинъ подъ другимъ въ одномъ вертикальномъ столбцѣ; благодаря этому сразу видно, къ какому разряду принадлежитъ извѣстная цифра, и, слѣд., сбиться въ этомъ почти нельзя. Между тѣмъ, разстановка разрядовъ бываетъ самымъ труднымъ мѣстомъ при умноженіи, въ чемъ вы, читатель, убѣдитесь, когда просмотрите остальные способы. Среди нихъ есть и болѣе скорые, но нѣтъ ни одного такого, который представлялъ бы менѣе возможности сбиться. Примѣра на первый способъ мы продѣлывать не будемъ, такъ какъ всякій самъ сумѣетъ его придумать и рѣшить. Скажемъ еще разъ: нашъ настоящій нормальный порядокъ умноженія болѣе всего напоминаетъ вычисленіе по колоннамъ абака, настолько выдержано въ немъ подписаніе однихъ и тѣхъ же разрядовъ въ вертикальномъ столбцѣ.

2. Первый способъ непосредственно образовался изъ второго, отъ котораго отличается такою особенностью: мы теперь не пишемъ лишняго нуля у второго неполнаго произведенія, двухъ нулей у третьяго и т. д., потому что ставимъ десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями, и не боимся сбиться; но прежде всѣ эти лишніе нули писались аккуратно: мы теперь ясно видимъ, что нули бесполезны, но математики до Адама Ризе не рѣшались ихъ отбрасывать и считали ихъ по большей части совершенно необходимыми. Этотъ второй способъ имѣлъ у итальянскихъ математиковъ особое названіе «per castelluccio». Примѣръ:

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 97 \\ \hline 3192 \\ 41040 \\ \hline 44232 \end{array}$$

Для начинающихъ учиться умноженію не худо и теперь приписывать нули къ произведеніямъ множимаго на десятки, сотни и т. д.

Тогда дѣтямъ понятіе будетъ, что для умноженія, въ нашемъ случаѣ на 90, необходимо умножить на 9 и считать полученное число за десятки. А потомъ, когда дѣти поймутъ это и нѣсколько привыкнуть, можно нули выпускать и пользоваться чистымъ первымъ способомъ.

3. Третій приемъ составленъ Петценштейнеромъ, нѣмецкимъ математикомъ XV вѣка. Въ немъ множимое и произведеніе пишется по нашему, а множитель выходитъ изъ вертикальныхъ колоннъ и ставится сбоку, справа наискось. Расположеніе такое:

$$\begin{array}{r}
 456 \\
 3192 \\
 4104 \\
 \hline
 44232
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 7 \\
 9
 \end{array}$$

Какой смыслъ и какая цѣль въ подобномъ подписываніи множителя сбоку? Объ этомъ догадаться не трудно. У насъ въ примѣрѣ взято двузначное число 97, а иногда случается вмѣсто него брать трехзначное, четырехзначное и т. д.; тогда легко бываетъ забыть, на какія цифры мы уже умножали, и на какія осталось умножать; чтобы не забыть, Петценштейнеръ и пишетъ каждую цифру при своемъ произведеніи. Еще ранѣе его Радульфъ Лаонскій (+ 1131) предлагалъ, впрочемъ на абакѣ, особенные кружки изъ дерева или изъ камня, чтобы приставлять ихъ къ тѣмъ разрядамъ множимаго и множителя, которые теремножаются. Надо сознаться, что Адамъ Ризе уступаетъ Петценштейнеру въ его заботахъ о множителѣ, и наши школьники по способу Адама Ризе нерѣдко пропускаютъ, особенно на первыхъ порахъ, цифры множителя. Для нихъ тоже не мѣшало бы на первое время, когда они еще учатся умножать, пользоваться чѣмъ-нибудь въ родѣ бумажки, чтобы они могли закрывать тѣ разряды, на которые еще не умножали.

4. Четвертый способъ принадлежитъ Кебелю, нѣмецкому ученому XVI вѣка. Множимое и множитель пишутся такъ же, какъ и у насъ, но въ произведеніи порядокъ подписыванія нарушается, и единицы отступаютъ вправо, вмѣсто того, чтобы имъ стоять подъ единицами. Зачѣмъ это понадобилось Кебелю, и понять нельзя: нѣтъ въ этой формѣ ни удобства, ни вообще какой-нибудь замѣтной цѣли; единственно,

что тутъ можно думать, это то, что Кебель захотѣлъ изобре́сти свой способъ и изобре́лъ довольно неудачный.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 97 \\ 3192 \\ 4104 \\ \hline 14232 \end{array}$$

Впрочемъ, на способъ Кебеля учащіеся могутъ убѣдиться въ томъ, что неполныя произведенія можно подписывать какъ угодно, и не подъ разрядами производителей, лишь бы только выполнялось условіе, что единицы складываются съ единицами, десятки съ десятками и т. д.

5. Пятый способъ отличается еще большей свободой въ подписываніи: въ немъ и отдѣльныя произведенія располагаются прямо другъ подъ другомъ, не обращая вниманія на то, что единицы оказались наискось отъ единицъ и десятки наискось отъ десятковъ; разумеется, для отвѣта оно безразлично, складывать ли разряды вертикально или наклонно, лишь бы только не сложить единицъ съ десятками; есть въ этомъ способѣ много оригинальности и, пожалуй, изящества, но мало удобства. Названіе его «per quadrilatero» и, если перевести это выраженіе съ итальянскаго языка на русскій, то оно будетъ значить «способъ четырехугольника».

$$\begin{array}{r} 456 \\ 97 \end{array}$$

3	1	9	2	2
4	1	0	4	3
4	4	2		

Прежде всего чертится рѣшетка; потомъ въ ней располагаются отдѣльныя произведенія такъ, что ихъ крайнія цифры стоятъ другъ подъ другомъ вертикально; сложеніе разрядовъ идетъ наискось, и цифры произведенія размѣщаются вправо и внизъ; читать ихъ надо

ствѣ. Все это очень интересно, но для практическаго примѣненія мало годится. Это скорѣй ариѳметическое украшеніе, забава.

6. Всѣ предыдущіе пять способовъ требуютъ такого жъ основномъ порядкѣ умноженія, какой и мы примѣняемъ всегда у себя; разницъ только въ подписываніи данныхъ чиселъ и искомымъ: въ то время, какъ мы стремимся все расположить въ вертикальныхъ колоннахъ, Петценштейнеръ выноситъ множителя на сторону, Кебель отступаетъ съ произведеніемъ вправо, а по способу «четыреугольника» разряды пишутся въ діагональномъ направленіи, т.-е. наискось; но вездѣ умноженіе начинается неизмѣнно съ низшихъ разрядовъ. Теперь мы обратимся къ случаямъ, когда оно начинается съ высшихъ разрядовъ, а не съ низшихъ. Это бываетъ и у насъ, но только при томъ условіи, если не приходится перечеркивать и исправлять написанныхъ цифръ. А цифръ не бываетъ, во-первыхъ, при устномъ счетѣ и, во-вторыхъ, при выкладкахъ на счетахъ. Поэтому въ обоихъ этихъ случаяхъ удобно начинать умноженіе съ высшихъ разрядовъ, тѣмъ болѣе, что и выговариваніе чиселъ и откладываніе ихъ на счетахъ идетъ все съ высшихъ разрядовъ. Но письменное умноженіе начинать съ лѣвой руки неудобно, потому что, если, напримѣръ, мы умножимъ десятки и запишемъ ихъ и потомъ перейдемъ къ единицамъ, то отъ умноженія единицъ могутъ получиться еще десятки, и намъ придется написанную цифру десятковъ стирать и замѣнять новой.

Далеко не безразлично, съ какихъ разрядовъ множимаго начинать письменное дѣйствіе, съ высшихъ или низшихъ. Последнее удобнѣе. Что касается множителя, то въ сущности одна привычка заставляетъ насъ начинать съ единицъ, потому что можно съ такимъ же правомъ умножать сперва на высшіе разряды множителя и потомъ постепенно переходить къ низшимъ, лишь бы вѣрно подписывать произведенія, т.-е. десятки подъ десятками, а единицы подъ единицами. Покажемъ это на примѣръ:

456

97

4104

3191

14232

Еще виднѣе въ многозначныхъ числахъ:

$$\begin{array}{r}
 33 \\
 4567 \\
 \hline
 132 \\
 165 \\
 198 \\
 231 \\
 \hline
 150711
 \end{array}$$

7. Седьмой способъ принадлежитъ Вендлеру и отличается отъ шестого единственно тѣмъ же самымъ, чѣмъ второй отъ перваго, именно лишними нулями на мѣстѣ десятковъ, сотенъ и т. д. Если вписать эти нули, то 33×4567 изобразится въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r}
 33 \\
 4567 \\
 \hline
 132000 \\
 16500 \\
 1980 \\
 231 \\
 \hline
 150711
 \end{array}$$

8. Восьмой способъ устный, встрѣчается у Брамегушты, ученаго индуса VII в. по Р. X. Онъ совершенно сходенъ съ нашимъ устнымъ приѣмомъ, да такъ и должно быть, потому что индусы, главнымъ образомъ, изобрѣтали и совершенствовали устный счетъ, они были первыми специалистами въ этомъ родѣ вычисленій; они вычисляли отдѣльные произведенія въ умѣ, писали ихъ строкой и потомъ складывали. Лишнимъ, на нашъ взглядъ, могло бы показаться развѣ то, что множимое переписывается нѣсколько разъ, именно столько разъ, сколько разрядовъ во множителѣ.

$$\begin{array}{r|l|l}
 456 & 9 & 4104 \\
 456 & 7 & 3192 \\
 \hline
 & & 44232
 \end{array}$$

9. Девятымъ приѣмомъ умноженіе производится тоже сначала на десятки, а потомъ на единицы, если бы были сотни, то, конечно, сперва на сотни. Умноживши на десятки, произведеніе подписываютъ точно такъ же, какъ это сдѣлали бы и мы. но съ единицами идетъ иначе.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 97 \\ \hline 41042 \\ 319 \\ \hline 44232 \end{array}$$

Когда мы умножимъ 456 на 7, то получимъ 3192. Изъ нихъ 319 десятковъ помѣщаемъ внизу, во второй строкъ, подъ тѣми цифрами, какія соответствуютъ имъ по значенію, а 2 единицы вверху, рядомъ съ 4 десятками, прямо подъ единицами множителя, въ виду того, что это мѣсто ничѣмъ не занято. Подобная система писать цифры какъ можно выше, на свободныхъ мѣстахъ, проявляется у многихъ авторовъ, какъ это мы увидимъ впоследствии; порядокъ этотъ довольно безвредный, потому что, гдѣ бы ни писать, лишь бы написать вѣрно подъ своимъ разрядомъ: но онъ можетъ оказаться и неудобнымъ тогда, когда счетчикъ собьется: тогда очень трудно разобратъ въ рядѣ цифръ, найти, какая изъ нихъ принадлежитъ къ какому произведенію, и исправить ошибку. Этотъ девятый способъ приписывается Апіану (XVI в.).

10. Въ предыдущихъ 4 способахъ дѣйствіе начиналось съ высшихъ разрядовъ множителя, и въ этомъ только, главнымъ образомъ, и заключалась ихъ особенность; цифры подписывались почти такъ же, какъ у насъ, и вообще большого измѣненія противъ нормальнаго порядка не было. Но теперь мы перейдемъ къ болѣе грубымъ и старымъ приѣмамъ, въ которыхъ уклоненій отъ нашего уже гораздо больше. Отличіемъ ихъ является полная механичность, безъ всякаго вычисленія въ умѣ; составители этихъ приѣмовъ держатся слишкомъ невысокаго мнѣнія о понятливости и сообразительности своихъ учениковъ, ничего не довѣряютъ устному счету и рекомендуютъ все записывать, даже до мелочей, и притомъ по опредѣленнымъ, точно установленнымъ формамъ. Напримѣръ, когда умножаются десятки, то

къ ихъ произведенію нельзя прямо прибавить тѣхъ десятковъ, которые получились отъ единицъ, а надо написать отдѣльно и сложить ихъ въ самомъ концѣ, когда всѣ мелкія умноженія будутъ выполнены. Эти тяжеловѣсные, громоздкіе способы въ настоящее время всѣми оставлены, и никому въ голову не придетъ ими воспользоваться, тѣмъ болѣе. въ XV—XVII столѣтіи, въ эпоху наиболѣе усиленной работы надъ ариметикой, когда индусская система проникла и въ народъ, и въ школу, эти способы были ходячими и общепринятыми. Сейчасъ они не имѣютъ никакой цѣны, потому что требуютъ много лишняго письма и лишняго времени для вычисленій, мы же ихъ приводимъ съ тою цѣлью, чтобъ показать, изъ какихъ первоначальныхъ и несовершенныхъ формъ образовались наши болѣе совершенныя.

Вотъ способъ Штейнмеца (XVI в.). Примѣръ:

$$\begin{array}{r}
 456 \\
 97 \\
 \hline
 32342 \\
 485 \\
 654 \\
 5 \\
 \hline
 44232
 \end{array}$$

Шестью семь 42, такъ и пишемъ; пятью семь 35, пишемъ 5 десятковъ подъ 4 десятками, а три сотни вверху подъ сотнями, потому что тамъ мѣсто есть свободное; четырежды семь 28, пишемъ 8 сотенъ подъ 3-мя, а двѣ тысячи на свободномъ мѣстѣ тысячъ въ верхней строкѣ. Вообще стараемся писать цифры какъ можно выше, гдѣ только есть свободное мѣсто для извѣстнаго разряда. Отдѣльныя произведенія располагаются, какъ видимъ, строками, которыя, чѣмъ ниже, все короче, и получается фигура, похожая на треугольникъ, такъ что и самый способъ носить название треугольника. Последніе его слѣды встрѣчаются въ учебникахъ еще въ XVII столѣтіи.

11. Умноженіе треугольникомъ имѣетъ не одну форму, а нѣсколько, въ зависимости отъ того, начинать ли дѣйствіе съ высшихъ разрядовъ или низшихъ, или даже какихъ-нибудь промежуточныхъ, писать ли цифры какъ можно выше или какъ можно ниже. Если начинать умноженіе съ высшихъ разрядовъ, то образуется такая фигура:

$$\begin{array}{r}
 456.97 \\
 \hline
 36542 \\
 455 \\
 284 \\
 3 \\
 \hline
 44232
 \end{array}$$

12. По двѣнадцатому способу умноженіе треугольникомъ начи-
нается съ какого-нибудь средняго разряда. Конечно, это безразлично
для произведенія, если только мы не собьемся въ порядкѣ цифръ и
не пропустимъ чего-нибудь и не возьмемъ лишняго. Умножимъ сперва
5 дес. на 97, потомъ 4 сотни и, наконецъ, 6 единицъ.

$$\begin{array}{r}
 456.97 \\
 \hline
 34552 \\
 634 \\
 284 \\
 5 \\
 \hline
 44232
 \end{array}$$

Треугольникъ можно бы повернуть основаніемъ внизъ и вершиной
вверхъ. Тогда фигура получится красивѣе. Особенно она хороша при
длинныхъ многозначныхъ числахъ, когда очертаніе треугольника вы-
дѣляется яснѣе.

$$\begin{array}{r}
 79745 \\
 64689 \\
 \hline
 4236423245 \\
 28545636 \\
 54282440 \\
 427263 \\
 421630 \\
 5081 \\
 2420 \\
 63 \\
 30 \\
 \hline
 5158624305
 \end{array}$$

13. Стоило только математикамъ поласть на одну геометрическую фигуру, на треугольникъ, и они принялись изобрѣтать всевозможныя формы: уголь, ромбъ и т. д. Наперерывъ, одинъ передъ другимъ, школьные педагоги въ Германіи и Италіи XVI—XVII вѣка стали предлагать хитроумные, фигурные способы, въ которыхъ не имѣлось въ виду удобства, а требовалось только представить что-нибудь новое и замысловатое. Нѣкоторые педагоги получили даже своеобразную извѣстность въ этомъ направленіи. Такъ итальянецъ Тарталія училъ въ своей школѣ 8 способамъ; столькимъ же училъ и Лука-де-Бурго; но вычислять по нимъ они своихъ учениковъ не заставляли, кромѣ одного способа или двухъ, и приводили остальные только по установившемуся обычаю или изъ хвастовства.

Расположеніе угломъ достигалось благодаря тому, что произведеніе простыхъ единицъ отодвигалось вправо а остальные разряды писались симметрично вверху и внизу. Вотъ форма угла при умноженіи 456 на 97.

456.97

36

45

54

42

35

28

44232

Первое произведеніе 36 составилось изъ множителей 4 и 9, второе—изъ 5 и 9, третье—изъ 6 и 9. Такимъ образомъ, мы помножили на десятки и начали дѣйствіе въ этомъ случаѣ съ сотенъ множимаго; далѣе умножаемъ на единицы, но ведемъ уже въ обратномъ порядкѣ, именно, начинаемъ съ единицъ множимаго и постепенно добираемся до его сотенъ.

14. Четырнадцатый способъ—ромба. Онъ еще замысловатѣе, чѣмъ предыдущіе. Нужна особенная внимательность да и знаніе секрета, какъ составлять ромбъ. Если помножить 457 на 397, то ромбъ можетъ получиться слѣдующимъ путемъ. Вверху пишется произведеніе

4 сотенъ на 7 единицъ, подъ нимъ произведеніе 5 десятковъ на 3 сотни и на 7 единицъ; въ длинной строкѣ помѣщается 4 с. \times 3 с., 5 дес. \times 9 дес. и 6. ед. \times 7 ед.; далѣе располагаются и остальные произведенія. Все это очень сбивчиво и неудобно, даетъ массу ошибокъ въ вычисленіи, которыя найти потомъ такъ нелегко, что лучше все бросить и сдѣлать снова. Съ непривычки дѣло долго не клеится, отвѣта не выходитъ, но, зато въ концѣ ученикъ имѣетъ право похвастать: у него получился ромбъ.

456.397

28

1535

124542

3654

18

181032

15. До сихъ поръ мы подписывали отдѣльныя произведенія внизу подъ множимымъ и множителемъ, и на это, конечно, у насъ была причина, потому что всѣ люди начинаютъ писать съ верхней стороны листа и постепенно спускаются книзу, гдѣ мѣсто свободное, неиспользованное. Но отвѣтъ получится одинаково вѣрный и въ томъ случаѣ, если, не жаль бумаги, мы начнемъ дѣйствіе пониже и оставимъ мѣсто для отдѣльныхъ произведеній выше производителей. Получится у насъ такъ:

02

15

8654

1485

032342

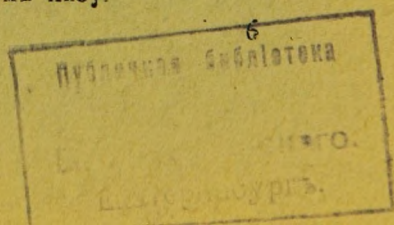
456

297

135432

Способъ этотъ указалъ Глареанъ въ XVI в. Вычисленіе начинается справа, съ низшихъ разрядовъ, отвѣтъ въ самомъ низу.

Беллюстичъ.



16. Шестнадцатый способ очень сходенъ съ предыдущимъ и является его предшественникомъ по времени, такъ какъ образовался въ XV вѣкѣ. Его даетъ ученый арабъ Алькальбади изъ Андалузіи. Особенность въ немъ та, что множимое переписывается нѣсколько разъ и притомъ столько разъ, сколько цифръ во множителѣ. И еще есть особенность: множитель не стоитъ подъ множимымъ, а располагается выше его; кромѣ того, отдѣльные произведенія разсыяны по разнымъ строкамъ.

44232

42

35

28

54

45

36

97

456

456

Множимое, повидимому, передвигается за тѣмъ, чтобы не сбиться, какой разрядъ множить на какой. Впрочемъ, выгоды отъ этого передвиженія особенной не представляется.

17. Въ высшей степени искусственная запись встрѣчается у Баскары, видусскаго автора, жившаго въ XII вѣкѣ. Это та же рѣшетка, что и въ 5 способѣ, но только съ полными цифрами, безъ всякаго пропуска и сокращенія. У итальянцевъ она называлась «gelosia», по образцу фигурныхъ рѣшетокъ, бывшихъ въ окнахъ средневѣковыхъ теремовъ.

		4		5		6		
			8		5		2	
7		2		3		4		2
			6		5		4	
9		3		4		5		3
			4		4		2	

Множимое 456 мы лишемъ сверху, множителя 97 съ лѣвой стороны. Каждый разрядъ числа 456 множится на каждый разрядъ 97-ми.

Всего образуется 6 отдѣльныхъ произведеній. Ихъ мы пишемъ полнотью по клѣткамъ, такъ, чтобы всякое произведеніе стояло противъ тѣхъ разрядовъ, отъ которыхъ оно получилось; напримѣръ шестью семь 42, ставимъ это число подѣ 6-ю и притомъ въ верхней строкѣ, потому что множитель 7 стоитъ въ этой строкѣ съ лѣвой ея стороны, 2 помѣщаемъ въ верхнемъ правомъ углу клѣтки, а 4 десятка въ нижнемъ лѣвомъ. Такъ же ведемъ дѣйствіе и съ остальными разрядами. Чтобы получить отвѣтъ, стоитъ только сложить числа въ діагональномъ порядкѣ наискось: 2 единицы свосимъ, $5+4+4=13$ десятковъ, изъ нихъ 3 пишемъ $8+3+5+5+1=22$ сотни, 2 пишемъ; тысячъ будетъ $2+6+4+2=14$, 4 пишемъ и, наконецъ, десятковъ тысячъ $3+1$, всего 4. Искомое произведеніе выразится пятью цифрами: 44232. Способъ этотъ, какъ видно, очень сложный, фигурный и сбивчивый. Надо твердо помнить и хорошо привыкнуть къ тому, какъ чертится рѣшетка, какъ пишутся производители, гдѣ помѣщаются отдѣльные произведенія, и какъ читается отвѣтъ: стоитъ только немного поостеречься, забыть, и тогда всѣ разряды перепутываются, и никакъ нельзя будетъ отличить, гдѣ единицы, гдѣ десятки, и что складывать съ чѣмъ. Вообще это вовсе не дѣловой способъ и не школьный, а скорѣе плодъ математической изобрѣтательности и развлеченіе въ математикѣ, которая въ средние вѣка была особенно суха и недоступна, а подобныя выдумки ее оживляли.

18. Арабъ Альнасави (XI в.) училъ умножать еще болѣе чуждымъ для насъ приемомъ. Онъ тоже не допускалъ устнаго счета и тоже подписывалъ всѣ цифры сполна, но сверхъ того и въ сложеніи у него было отличіе, потому что отдѣльные разряды складывались не въ концѣ всего дѣйствія, а постепенно, по мѣрѣ того, какъ они получались

42
313
189
40042
36597
4566
45

Множитель 97 пишется надъ множимымъ 456 такъ, что его высшій разрядъ, 9 десятковъ, стоитъ надъ простыми единицами числа 456. Вычисленіе начинается слѣва $4 \times 9 = 36$, пишемъ 6 надъ четырьмя, а 3 рядомъ надъ 5; $5 \times 9 = 45$, изъ нихъ 5 пишемъ рядомъ съ 5-ю, а 4 не подписываемъ надъ 6-ю, какъ это дѣлали въ способѣ треугольника, но прибавляемъ къ 6-ти, будетъ 10, прибавляемъ къ 30, будетъ 40, эти цифры помѣщаемъ надъ 36-ю. Ведемъ умноженіе далѣе $6 \times 9 = 54$, изъ этого 4 пишемъ надъ 9-ю, потому что нижнее мѣсто занято, а 5 прибавляемъ къ 5-ти, получится 10, нуль пишемъ надъ пятью, единицу — надъ нулемъ, именно тѣмъ нулемъ, который принадлежитъ числу 40. Такимъ-то образомъ сложеніе идетъ рука объ руку съ умноженіемъ, и когда всѣ умноженія окончатся, то окончится и сложеніе, и отвѣтъ представится самыми высшими цифрами въ каждомъ вертикальномъ столбцѣ. Какъ видно, Альнасави допускаетъ особенность и въ множимомъ, именно онъ его еще разъ подвигаетъ и не только горизонтально, но такъ, что крайній разрядъ переставляется въ слѣдующую высшую строчку. Цѣль перемѣщенія та, чтобы единицы множимаго всегда приходились подъ тѣмъ разрядомъ множителя, на какой умножаемъ.

Альнасави заимствовалъ свой пріемъ у индусовъ; индусы же предпочитали устный счетъ письменному, не любили лишнихъ цифръ и, во всякомъ случаѣ, не стали бы вычислять такъ растянуто, какъ это дѣлаетъ Альнасави. У какого же индуса онъ его заимствовалъ? Или онъ самъ его такъ измѣнилъ? Объяснить это все можно такъ. Индусы вычисляли на песокъ и сейчасъ же стирали тѣ цифры, которыя имъ не нужны, поэтому имъ было такъ легко передвигать множимое или множитель: они стирали прежнее и писали новое. Поэтому и мелкія сложенія и умноженія они писали только на одну минуту; и если имъ цифра не нужна, они ее сейчасъ замѣняли новой; такъ что, дѣйствительно, индусы не сбивались въ длинныхъ рядахъ цифръ и не запутывались, тѣмъ болѣе, что ихъ работъ много помогала устный счетъ. Но арабы и Западная Европа переняли способы индусовъ, а примѣнять ихъ стали чаще всего на доскахъ и на бумагѣ, гдѣ цифры перетирать совершенно неудобно; отъ этого и получилась масса лишняго письма, сбивчивость и трудность въ вычисленияхъ. Не скоро поняли европейскіе математики, что недостаточно пе-

ренести чужой приемъ къ себѣ, но надо еще примѣнить его къ своимъ условіямъ, и тогда онъ будетъ пригоднымъ и удобнымъ.

19. Во всѣхъ разобранныхъ нами 18-ти способахъ, какъ они ни сложны и ни разнообразны, существенный порядокъ дѣйствія все время остается тотъ же, вездѣ дается 2 числа, множимое и множитель, и первое число, т.-е. множимое, помножается такъ или иначе на отдѣльные разряды множителя, сперва на его единицы, потомъ на десятки, сотни и т. д., или же, наоборотъ, раньше на сотни, а потомъ уже на десятки и единицы. Но нѣтъ ничего легче примѣнить другой порядокъ; не цѣлое множимое умножать на отдѣльные разряды множителя, а отдѣльные разряды множимаго на цѣлаго множителя. Такъ училъ индусскій авторъ Брамегупта (въ VII ст. по Р. Х.).

$$\begin{array}{r}
 44232 \\
 \hline
 582 \\
 485 \\
 388 \\
 \hline
 456 \\
 97 \\
 97 \\
 97
 \end{array}$$

Отвѣтъ у него помѣщается въ самомъ верху, данные числа — внизу. Множитель переписывается столько разъ, сколько цифръ во множимомъ. Начинаемъ умножать 4 сотни на 97, получится 388 сотенъ, ихъ пишемъ надъ сотнями. Такъ же поступаемъ съ десятками и единицами.

20. Самыми старыми первоначальными способами умноженія надо считать тѣ, когда умноженіе замѣняется сложеніемъ. Умноженіе, конечно, и есть въ существѣ дѣла сложеніе, но только сокращенное, благодаря таблицѣ и вслѣдствіе равенства слагаемыхъ. Чтобы, напримѣръ, умножить 9 на 27, можно бы 9 выписать 27 разъ и потомъ послѣдовательно складывать: $9+9=18$, $18+9=27$, $27+9=36$ и т. д., до 243-хъ. Но такое сосчитываніе было бы слишкомъ продолжительнымъ, и вотъ здѣсь является на помощь таблица умноженія, которая значи-

тельно сокращаетъ работу; изъ таблицы намъ извѣстно, что $9 \times 2 = 18$, а слѣдовательно $90 \times 2 = 180$, да $9 \times 7 = 63$, всего составитъ $180 + 63 = 243$. Такимъ образомъ мы замѣнили набирание 27 слагаемыхъ болѣе простыми дѣйствіями, именно двумя умноженіями и однимъ сложениемъ. Не сразу выработала ариметика такой простой и легкой путь, чтобы замѣнять сложение равныхъ слагаемыхъ умноженіемъ. Поэтому на первыхъ ступеняхъ ея развитія, при наглядномъ счетѣ и при выкладкахъ на разныхъ счетныхъ приборахъ, преобладаетъ чистое сложение, а умноженіе является только урывками и проблесками. Едва къ концу среднихъ вѣковъ оно вполне вступило въ свои права.

Приведемъ образецъ вычисленій на римскихъ цифрахъ. Изъ него хорошо видно, насколько сложение преобладало надъ умноженіемъ и замѣняло его. Требуется, положимъ, CXXXVIII умножить на XXX . Тогда дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} \text{C} \cdot \text{X} = \text{M} \\ \text{C} \cdot \text{X} = \text{M} \\ \text{C} \cdot \text{X} = \text{M} \\ \text{XXXX} \cdot \text{XXX} = \text{MCC} \\ \text{XXX} + \text{XXX} + \text{XXX} + \text{XXX} = \text{CXX} \end{array}$$

Такъ какъ множитель XXX состоитъ изъ $\text{X} + \text{X} + \text{X}$, то достаточно повторить множимое сперва X разъ, потомъ еще X разъ, и, наконецъ, еще X разъ и полученные отвѣты сложить. Но когда мы начнемъ повторять X разъ, то множимое, въ свою очередь, разложится на отдѣльныя слагаемыя: $\text{C} + \text{X} + \text{X} + \text{X} + \text{X} + \text{X} + \text{III}$; и придется намъ каждое слагаемое перваго числа помножать на каждое слагаемое втораго.

21. Двадцать первымъ способомъ будетъ, такъ называемый, «*per ascharezza*». Въ переводѣ съ итальянскаго языка, — способъ чаще другихъ примѣняли итальянцы, — это значитъ способъ «разложенія». Примеръ: 44×26 . Для этого 26 разлагаемъ на какія-нибудь легкія слагаемыя, обыкновенно однозначныя, въ родѣ $3 + 4 + 5 + 6 + 8$, и составляемъ пять произведеній: $44 \cdot 3$, $44 \cdot 4$, $44 \cdot 5$, $44 \cdot 6$, $44 \cdot 8$. Всѣ ихъ можно легко найти устно, и въ этомъ заключается преимущество подобнаго умноженія. Но иногда, забывая о главномъ условіи удобства, примѣняли этотъ способъ и тогда, когда онъ не даетъ никакого

выигрыша ни во времени, ни въ письмѣ. Хорошимъ примѣромъ такого теоретическаго пользованія разложеніемъ можетъ служить помѣщенный въ ариметикѣ Брамегупты (VII в.): 235×288 , съ разложеніемъ числа 288 на $9+8+151+120$. Очевидно Брамегупта, выбирая такія неудобныя слагаемыя, не только не упростилъ дѣйствія, а скорѣе усложнилъ и затруднилъ; но онъ, навѣрное, и не задавался цѣлью упростить и облегчить вычисленіе, а желалъ только представить новую форму умноженія.

22. Какъ мы уже сказали, замѣна умноженія сложеніемъ является самымъ легкимъ и простымъ приѣмомъ и въ то же время самымъ старымъ и испытаннымъ. Египтяне за много столѣтій до Р. Х. умѣли съ большимъ искусствомъ, чрезвычайно свободно и остроумно пользоваться этой замѣной. Если, напримѣръ, имъ требовалось умножить на 17, то они сперва складывали множимое само съ собой и получали такимъ образомъ двойное число: его тоже складывали само съ собой, получали четверное число; четверное складывали съ четвернымъ, получали восьмерное; восьмерное съ восьмернымъ, получится 16-ть слагаемыхъ, а такъ какъ ихъ задано набрать 17-ть, то остается добавить только одно слагаемое, и отвѣтъ будетъ найденъ. Подобнымъ же образомъ они могли, напримѣръ, вычислять $466 \cdot 13$. Они составляли $466 \cdot 2 = 932$, $932 \cdot 2 = 1864$, $1864 \cdot 2 = 3728$, затѣмъ складывали восьмерное число съ четвернымъ и съ простымъ и получали $466 \cdot 13 = 3728 + 1864 + 466 = 6058$. Такимъ путемъ египтяне умѣли добираться до сложныхъ результатовъ, хотя и медленно, но довольно вѣрно и успѣшно. Изъ всѣхъ умноженій у нихъ было только одно удвоеніе; они даже не знали таблицы умноженія. Не они ли пришли къ мысли выдѣлить удвоеніе въ особое дѣйствіе, къ мысли, которая примѣнялась очень долго и едва въ XVI столѣтіи была оставлена, потому что съ этого времени удвоеніе вошло въ составъ вообще умноженія.

Покончимъ теперь на египтянахъ и не будемъ уходить далѣе въ глубь вѣковъ, тѣмъ болѣе, что у насъ нѣтъ фактическаго матеріала для этого. Подведемъ итоги всему, что сказали объ умноженіи. Оно начинается съ сложенія равныхъ слагаемыхъ и въ этомъ случаѣ не пользуется никакими особенными правилами, сокращеніями и удобствами. Затѣмъ, благодаря практикѣ, начинается выдѣляться удвоеніе и

оно образуетъ фундаментъ новаго дѣйствія—умноженія: по образцу удвоенія легко могли возникнуть другіе подобные расчеты, и удвоеніе натолкнуло на то, чтобы находить тройное число, четверное, десятерное и т. п. Всѣ эти употребительные случаи, повторяясь часто, привели къ таблицѣ умноженія и выдѣлили окончательно дѣйствіе умноженія изъ массы случаевъ сложенія. Тогда же начинается письменное производство этого дѣйствія, сначала въ грубой и несовершенной формѣ, при помощи абака и другихъ похожихъ на него пособій, съ многочисленными стираніями и измѣненіями цифръ; сложеніе отдельныхъ произведеній сначала шло попутно, вмѣстѣ съ умноженіемъ разрядовъ, но потомъ его начали относить на самый конецъ и производить тогда, когда уже всѣ произведенія найдены. Въ старинныхъ способахъ умноженія устный счетъ почти не допускался, и всѣ цифры, какія надо, писались безъ пропуска, и въ умѣ ничего не удерживалось: такъ, по крайней мѣрѣ, было въ Западной Европѣ въ средніе вѣка. Ближе къ нашему времени стали примѣнять и устный счетъ, начали помогать письму тѣмъ, что нѣкоторыя цифры удерживали въ умѣ, и такимъ-то образомъ развился и принялъ окончательную отдѣлку нашъ современный нормальный способъ умноженія.

23. Индусы и Адамъ Ризе, и итальянцы XVI в. часто разлагали множителя на производителей. У итальянцевъ это называлось «реггеріего». Чтобы, напр., умножить 15, можно данное число умножить на 5 и полученное вновь умножить на 3. Чтобы умножить на 121, можно умножить на 11 и опять на 11. Еще лучше у Адама Ризе: если ему надо какое-нибудь число взять слагаемымъ 46 разъ, то онъ умножаетъ данное число на 9, полученный результатъ—на 5 и ко всему этому прикладываетъ еще одно, 46 слагаемое. Хорошо бы и намъ пользоваться почаще такими сокращеніями и приучать къ нимъ своихъ дѣтей въ училищахъ. Есть, правда, во многихъ школахъ, особенно въ начальныхъ, спеціальныя занятія по устному счету, но, во-первыхъ, очень жаль, что они въ средней школѣ глоснутъ и не продолжаются, и, во-вторыхъ, они ведутся, обыкновенно, по шаблону и не столько развиваютъ личную сообразительность дѣтей, сколько приучаютъ ихъ къ готовымъ формуламъ.

24. Другимъ хорошимъ способомъ, который тоже можетъ развивать сообразительность и помогать вычисленію, является слѣдующій.

Множитель замѣняется новымъ числомъ, которое больше его въ нѣсколько разъ или на нѣсколько единицъ, и притомъ гораздо удобнѣе для дѣйствія, чѣмъ самъ данный множитель. Напримѣръ, если намъ задано умножить какое нибудь число на 25, то мы вмѣсто этого умножимъ на 100—такъ гораздо легче—и полученное отъ этого умноженія число раздѣлимъ на 4. Точно также, чтобы умножить на 98, мы можемъ умножить на 100 и изъ этого произведенія вычесть двойное множимое, потому что мы его взяли лишнихъ 2 раза. Оба эти приѣма хороши для устныхъ вычисленій, они придуманы давно, еще индусами, но все еще не имѣютъ такого большого примѣненія на практикѣ, какого заслуживаютъ по своей легкости и удобству.

25. Есть еще методъ умноженія многозначныхъ чиселъ, очень интересный и оригинальный. Онъ построенъ на совершенно иной руководящей мысли, чѣмъ нашъ настоящий методъ. Мы теперь интересуемся множимымъ и множителемъ, старательно подписывая ихъ другъ подъ другомъ или рядомъ, разлагаемъ ихъ на разряды и разсуждаемъ, съ которой стороны лучше начать; такъ что порядокъ вычисленія у насъ опредѣляется множимымъ и множителемъ, и наши заботы мало касаются произведенія, которое выходитъ какъ-то само собой, изъ сложения частныхъ результатовъ. Наоборотъ, способъ «крестикомъ», о которомъ мы будемъ сейчасъ говорить, обращаетъ исключительно свое вниманіе на результатъ умноженія и изъ его разбора, а не изъ разбора данныхъ чиселъ, выводитъ порядокъ дѣйствія. Въ способѣ «крестика» надо сперва вычислить единицы произведенія, потомъ его десятки и притомъ сразу всѣ, какіе только могутъ оказаться, чтобы затѣмъ къ десяткамъ болѣе не возвращаться; потомъ надо вычислить сотни—произведенія, опять-таки всѣ, какія только могутъ въ немъ быть; и такъ мы идемъ послѣдовательно отъ одного разряда къ другому. Еще греки любили пользоваться этимъ умноженіемъ и называли его «хиазмомъ», потому что греческая буква хи «X» какъ разъ своей фигурой напоминаетъ крестикъ.

Возьмемъ примѣръ сперва двузначный: 56×97 и поставимъ такой вопросъ: откуда могутъ получиться единицы произведенія? Очевидно, только отъ перемноженія простыхъ единицъ, потому что отъ умноженія десятковъ будутъ десятки, отъ сотенъ будутъ сотни и т. д.: $6 \times 7 = 42$, слѣдовательно, простыхъ единицъ въ отвѣтъ будетъ двѣ, не

больше и не меньше. Итакъ, одну цифру мы нашли, она будетъ обязательно 2. Рѣшаемъ теперь второй вопросъ: откуда получаются десятки произведенія? Во-первыхъ, отъ умноженія десятковъ на единицы, во-вторыхъ, отъ умноженія единицъ на десятки и, кромѣ того, нѣсколько десятковъ образовалось отъ перемноженія простыхъ единицъ. Больше ни откуда десятковъ получиться не можетъ, такъ какъ во всякомъ случаѣ сотни и тысячи дадутъ, по крайней мѣрѣ, сотни же и тысячи. Вычисляемъ десятки: $5 \times 7 = 35$, $9 \times 6 = 54$, да 4 десятка осталось отъ единицъ, всего составитъ ихъ 93; изъ этого 9 сотенъ пока замѣтимъ, а 3 десятка можемъ записать спокойно: это ужъ цифра окончательная. Высчитываемъ сотни. Въ нашемъ примѣрѣ онѣ могутъ получиться только отъ умноженія десятковъ на десятки и ихъ будетъ 45, да 9 сотенъ отъ десятковъ, всего 54 сотни. Пишемъ ихъ въ окончательномъ отвѣтѣ и получаемъ: $56 \times 97 = 5432$. «Крестикъ» мы здѣсь примѣняли, когда составляли десятки произведенія, потому что въ этомъ случаѣ мы умножали крестъ на крестъ 5 на 7 и 6 на 9. Все дѣйствіе можно изобразить такой фигурой:

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times \\ 97 \\ \hline 5432 \end{array}$$

Чтобы читателю былъ яснѣе виденъ ходъ вычисленія, разберемъ еще трехзначный примѣръ. Возьмемъ 467×893 . Низшимъ разрядомъ въ произведеніи будутъ простые единицы, а высшимъ — десятки тысячъ, потому что сотни, умноженные на сотни, даютъ десятки тысячъ; всего, слѣдовательно, въ произведеніи будетъ 5 разрядовъ. Опредѣляемъ ихъ постепенно. Прежде всего запишемъ данныя числа такъ, чтобы цифры стояли порѣже и между ними были свободные промежутки, а зачѣмъ,—это будетъ понятно далѣе.

$$\begin{array}{r} 467 \\ 893 \\ \hline 417031 \end{array}$$

Простыя единицы образуются отъ перемноженія простыхъ же единицъ; $7 \times 3 = 21$, единицу пишемъ и 2 въ умѣ. Десятки образуются отъ умноженія десятковъ на единицы и единицъ на десятки и дадутъ: $6 \times 3 = 18$, $9 \times 7 = 63$, да 2, всего 83, три пишемъ и 8 замѣчаемъ. Но мы пишемъ 3 десятка не подъ десятками, а въ промежуткѣ между единицами и десятками: цѣль здѣсь та, чтобы сохранить полную симметрію въ расположеніи цифръ и строгій порядокъ, который не допустилъ бы насъ сбиться; дѣйствительно, какъ у насъ образовалась цифра единицъ и гдѣ она подписана? Она образовалась отъ единицъ и подъ ними подписана: 7 Какъ образовалась цифра десятковъ и гдѣ ее

3
1

лучше всего подписать? На это отвѣтимъ мы такимъ чертежомъ

6 7 Цифра 3 стоитъ симметрично

$$\begin{array}{r} \times \\ 9 \ 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

подъ тѣми цифрами, отъ которыхъ она получилась. Вотъ даѣе чертежи для сотенъ, тысячъ и десятковъ тысячъ:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 8 \\ \hline 41 \text{ дес. тысячъ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 6 \\ \times \\ 8 \ 9 \\ \hline 7 \text{ тысячъ.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 6 \ 7 \\ \times \\ 8 \ 9 \ 3 \\ \hline 0 \text{ сотенъ.} \end{array}$$

Сотни высчитываются такъ. Онѣ получаютъ отъ умноженія сотенъ на единицы, единицъ на сотни и десятковъ на десятки, будетъ $4 \cdot 3 = 12$, $7 \cdot 8 = 56$, $6 \cdot 9 = 54$, да отъ умноженія десятковъ осталось 8 сотенъ, всего ихъ составитъ 130, нуль пишемъ подъ чертой, а 13 тысячъ пока держимъ въ умѣ. Отыскиваемъ теперь тысячи нашего произведенія: онѣ получаютъ тогда, когда сотни множатся на десятки и десятки на сотни, слѣдовательно, $4 \times 9 = 36$, $6 \times 8 = 48$, да еще замѣченныхъ 13 и составитъ ихъ всего 97. Цифру 7 пишемъ подъ чертой. Легко, наконецъ, опредѣлить и десятки тысячъ: ихъ будетъ 41.

Такимъ же образомъ можно умножить и всякія многозначныя числа, до пятизначныхъ, шестизначныхъ и выше. Симметрия руководитъ нами во всѣхъ этихъ примѣрахъ и не позволяетъ сбиться. Поэтому, если во множимомъ и во множителѣ цифръ не поровну, напримѣръ, четырехзначное число берется съ двузначнымъ, то лучше всего приписать пару лишнихъ нулей и получить опять симметричную фигуру:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 6 \\ 0\ 0\ 5\ 8 \\ \hline 136068 \end{array}$$

Индусы были въ восхищеніи отъ этого способа, часто имъ пользовались и умѣли умножать по этому способу очень быстро, за что и прозвали его «молніеноснымъ». Онъ вовсе не труденъ, если только научиться быстро складывать двузначныя числа, что онъ не нуждается въ большомъ письмѣ и даетъ выигрышъ во времени, въ этомъ, конечно, нечего и сомнѣваться. Какъ было бы хорошо, если бы онъ, почти забытый послѣ индусовъ и грековъ, получилъ доступъ въ наши школы, распространился въ народѣ и оправдалъ свое названіе «молніеноснаго».

26. Закончимъ нашу бесѣду объ умноженіи объясненіемъ послѣдняго, въ высшей степени оригинальнаго приема, который незнающаго наблюдателя можетъ даже поразить. Передаютъ, будто одинъ нѣмецкій школьный учитель показалъ дѣтямъ это умноженіе, а потомъ при посѣтителяхъ спрашивалъ считать устно и приводилъ въ удивленіе быстротой счета, разумѣется, въ томъ случаѣ, если посѣтитель не зналъ секрета. Учитель: « 83×87 !» Ученикъ: « $80 \times 90 = 7200$ да 3-жды семь 21, всего 7221». — Учитель: « 24×26 !» — Ученикъ: « $20 \times 30 = 600$, да четырежды шесть 24, всего 624». — Учитель: « 92×98 !» — Ученикъ: « $90 \times 100 = 9000$, да дважды восемь 16, всего 9016». Секретъ, какъ видно, заключается въ томъ, что не всякій примѣръ годится для этого правила, а только такой, гдѣ бы десятки въ обоихъ множителяхъ были одинаковыми, а единицы составляли въ суммѣ десять; такъ что если взять одинъ множитель, наприм., 41, то парнымъ къ нему множителемъ обязательно долженъ быть 49. Правило для подобныхъ примѣровъ слѣдующее: надо десятки помножить на слѣдующіе десятки

($40 \times 50 = 2000$), а единицы просто перемножить ($1 \times 9 = 9$) и все сложить: $2000 + 9 = 2009$. Правило это далъ итальянецъ Тарталья (XVI в.), большой изобрѣтатель разныхъ способовъ, и письменныхъ, и устныхъ.

Объяснимъ послѣдній примѣръ: 41×49 . Какъ бы мы по-просту стали его вычислять? Сперва 40 помножили бы на 40, потомъ 40 на 9, потомъ 1 на 40 и, наконецъ, 1 на 9. Намъ пришлось бы 40 повторить 40 разъ и 9 разъ и еще 1 разъ, потому что 1×40 все равно, что 40×1 ; такимъ образомъ 40 надо помножить на 50, да 1 на 9, всего 2009.

Подобные приемы, дѣйствительно, даютъ при устномъ счетѣ громадную выгоду и удобство. Смѣло рекомендуемъ ихъ вниманію любителей ариеметики.

Дѣленіе.

«Dura cosa e la partita» — звучить старинная итальянская поговорка, которая значить въ русскомъ переводѣ: «трудная вещь — дѣленіе». Не даромъ Лука де-Бурго, итальянскій математикъ XVI вѣка, утѣшаетъ начинающихъ учиться юношей и говорить, что «кто умѣетъ дѣлить, тому все остальное пустяки, потому что все заключается въ дѣленіи». И нашъ Магницкій не отстаётъ въ этомъ случаѣ и тоже, кончивши дѣленіе, вздыхаетъ свободно и назидаетъ своихъ «мудролюбивыхъ отроковъ» стихами:

Первую часть dokonчивше
И вся въ цѣлыхъ изучивше,
Ихъ въ памяти твердо держимъ
И за та вся Бога блажимъ.
Что даде намъ безъ напасти
Зрѣти конецъ первой части.

Трудно дѣленіе нашимъ школьникамъ и въ настоящее время. Но неизмѣримо, безконечно труднѣе было оно въ старинныя времена и особенно въ началѣ среднихъ вѣковъ. Тогда изъ столкновенія римской и арабской учености не успѣло еще выработаться сколько-нибудь.

сносной системы, да кромѣ того, самъ характеръ преподаванія, котораго держались тогда въ монастырскихъ школахъ, былъ сухъ, безсердеченъ, неприноровленъ къ силамъ дѣтей и требовалъ отъ нихъ нечеловѣческаго напряженія. Тотъ, кто оказывался въ состояніи понимать дѣленіе, признавался чуть не гениемъ и ему давали почетный титулъ «доктора абака», въ родѣ нашего «доктора математики» или «доктора медицины». Нормальнымъ, зауряднымъ дѣтямъ нечего было и мечтать о такомъ трудномъ, мудреномъ дѣйствіи, и они скромно ограничивались сложеніемъ и вычитаніемъ, съ придачей таблицы умноженія. Вотъ что значило неумѣнье преподавать, отсутствіе понятныхъ учебниковъ и усложненность вычисленій. Вотъ откуда пошло вредное повѣрье, будто для математики надо родиться со специальными способностями, и что кто не рожденъ математикомъ, тотъ не будетъ въ ней успѣвать, несмотря на свое стараніе и на искусство учителя. Смѣшно теперь слышать, что средневѣковые педагоги требовали врожденныхъ способностей для умноженія и дѣленія: вѣдь, въ наше время съ ними удачно справляется всякій мальчикъ въ сельской школѣ и всякая дѣвочка; но курьезъ сохраняется и въ наши дни, когда съ авторитетнымъ видомъ заявляютъ, что для алгебры и геометріи нужны какія-то особыя, исключительно математическія способности. Онѣ, конечно, нужны, но лишь въ такой мѣрѣ, въ какой и для каждаго учебного предмета, и виной неуспѣха слѣдуетъ признать, обыкновенно, не отсутствіе способностей, а плохое преподаваніе, особенно вначалѣ, когда разрабатываются элементы, основы предмета, и когда зарождается расположеніе къ нему. Стоитъ только вмѣсто расположенія и пониманія возбудить отвращеніе и непониманіе, и дѣло пропало, при томъ пропало болѣе, чѣмъ въ какомъ бы то ни было другомъ предметѣ, потому что въ математикѣ все послѣдующее вытекаетъ изъ предыдущаго, и если только зародышъ слабъ, то и весь организмъ будетъ хилымъ.

Перейдемъ теперь къ способамъ дѣленія и разберемъ ихъ по порядку.

Объясненіе дѣленія начнемъ съ нашего способа и прежде всего замѣтимъ, что имя ему было «золотой» способъ за его удобства и «французскій» за то, что французы предпочитали его болѣе всего. Первые намеки на него мы можемъ видѣть у Альхваризми, араба.

жившаго въ IX в. по Р. Х. Въ болѣе ясной формѣ онъ встрѣчается у индуса Баскары (XII в. по Р. Х.). Въ нѣмецкой литературѣ можно указать на рукопись, найденную въ мюнхенской библиотекѣ и принадлежащую къ XII вѣку. Въ ней вычисленія располагаются колоннами, при чемъ вверху колонны подписано римскими цифрами ихъ значеніе, такъ что въ сущности здѣсь идетъ вычисленіе на абакѣ. Примѣръ: $100000 : 20023 = 4$ и ост. 19908.

СМ.	ХМ.	М.	С.	Х.	І.	
	2			2	3	дѣлитель
1	2					высшій разрядъ дѣлителя
	2		1			дѣлимое
	1	9	9	8		остатокъ
						Остатокъ въ иномъ видѣ
				8		произведеніе 4×20
	1	9	9	2		
				1	2	произвед. 4×3
	1	9	9		8	остатокъ
					4	частное.

Порядокъ дѣйствія, какъ видимъ, такой: подписавши дѣлителя и его высшій разрядъ, помѣщаемъ подъ нимъ дѣлимое 100000 и задаемся цифрой частнаго; она не будетъ 5, потому что въ дѣлитель кромѣ 20000 есть еще другіе разряды, слѣд, цифра частнаго будетъ 4; такъ какъ $2 + 4 = 8$, а $10 - 8 = 2$, то остатокъ послѣ высшаго разряда дѣлителя, умноженнаго на частное, составитъ 2; далѣе умножимъ на частное десятки дѣлителя, ихъ всего 2, $2 \times 4 = 8$; но чтобы вычесть 8 дес. изъ 20000, надо сперва 20000 замѣнить черезъ $19900 + 100$ и тогда легко становится отнять 80 отъ 100, остатокъ будетъ 20; наконецъ, $3 \times 4 = 12$. вычитаемъ 12 изъ 20, получаемъ

8, а всего послѣ дѣленія имѣемъ въ остаткѣ 19908. Частное пишется въ самомъ низу. Вообще во всемъ этомъ примѣрѣ мы наблюдаемъ ходъ дѣйствія такой же, какъ и у насъ, но въ подробностяхъ много особеннаго: не пишется нулей, потому что мѣста цифръ достаточно указываются надписями надъ колоннами; не по нашему расположены дѣлимое, дѣлитель и частное, умноженіе идетъ съ высшихъ разрядовъ; вычитаніе производится постепенно, разрядъ за разрядомъ, какъ только они образуются.

2) Слѣдующій разъ мы встречаемся съ этимъ способомъ уже въ XV—XVI в. А какъ же вычисляли въ промежуткѣ между XII и XVI вв.? Кстати, какъ вычисляли до XII вѣка, вѣдь, очевидно, и тогда было дѣленіе? Конечно, вычисляли, но только не по нашему приему, а совсѣмъ по другому, непохожему, который развивался и удерживался вплоть до XIX вѣка и въ началѣ его исчезъ; о немъ рѣчь будетъ впереди, теперь же приведемъ образецъ нашего дѣленія, который встрѣчается у Луки де-Бурго, итальянца. Раздѣлить требуется 97535376 на 9876, получится въ частномъ 9876. Расположеніе то же, что и у насъ, только дѣлитель и частное пишется вверху, а не сбоку.

$$\begin{array}{r}
 9876 \quad 9876 \\
 97535376 \\
 88884 \\
 \hline
 86513 \\
 79008 \\
 \hline
 75057 \\
 69132 \\
 \hline
 59256 \\
 59256
 \end{array}$$

3) Въ знаменитомъ трудѣ по ариметикѣ, который у арабовъ считается образцовымъ, классическимъ, и который принадлежит Бага-едину (1547—1622), встрѣчается такое расположеніе: (975741 : 53—18410).

9	1	8	4	1	0
5	7	5	7	4	1
4	3				
4	4				
	0				
	4				
	2	4			
	2	1			
	2	0			
		1			
		1			
		1	2		
			5		
			5		
			5	3	
				1	
				5	
				3	
					1
					3
5	5	5			
	3	3			

Частное пишется въ самомъ верху. Цифры дѣлимаго не сносятся внизъ, но вмѣсто этого чертятся, для удобства, колонны, чтобы не сбиться въ цифрахъ. Оба разряда дѣлителя, 5 дес. и 3 ед., помножаются отдѣльно на частное и отдѣльно же вычитаются. Дѣлитель переписывается столько разъ, сколько разрядовъ въ частномъ. Здѣсь повторяется опять то же, что мы видѣли и въ умноженіи, гдѣ множитель переписывался нѣсколько разъ. Причина опять та же, что и въ умноженіи, и заключается она въ слѣдующемъ. Способъ Бэгаэдина получилъ начало, очевидно, еще тогда, когда вычисленія шли на абакѣ, покрытомъ пескомъ, и когда, слѣд., легко было дѣлителя стереть и его же переписать, снова, расположивши снова подъ тѣми разрядами, которые дѣлятся; съ теченіемъ времени абакъ былъ оставленъ, математики стали пользоваться бумагой, а между тѣмъ манера переписыванія все еще сохранилась и привела къ большимъ неудобствамъ, къ затратѣ лишняго труда, къ потерѣ времени и мѣста. Вотъ что значить инерція, не просвѣтленная лучами разума!

4) Апіанъ въ XVI ст. даетъ такое расположеніе, какое дали бы и мы, но только онъ подписываетъ числа не разрядъ подъ раз-

рядомъ, а просто крайнюю цифру подъ крайней. Раздѣлить 97535376 на 9876, получится 9876. Пишется дѣлимое, подъ нимъ дѣлитель, а частное сбоку.

$$\begin{array}{r}
 \text{а в с} \\
 97535376 \quad (9876 \\
 9876 \\
 88884 \\
 86513a \\
 79008 \\
 75057b \\
 69132 \\
 59256c \\
 59256
 \end{array}$$

5) Тарталья, изобрѣтательный итальянскій математикъ XVI в., не только учившій го старинѣ, но и отъ себя предлагавшій много оригинальныхъ и удобныхъ приѣмовъ, для большей ясности расчленяетъ дѣйствіе на рядъ отдѣльныхъ вычисленій, смотря по тому, сколько цифръ въ частномъ.

Вотъ, какъ онъ выполняетъ дѣленіе 2596860019 на 38784.

<p>I. 259686 (6</p> $ \begin{array}{r} 232488 \\ \hline 27198 \end{array} $	<p>II. 271980 (7</p> $ \begin{array}{r} 271236 \\ \hline 744 \end{array} $	<p>III. 7440 (0</p>
	<p>IV. 74401 (1</p> $ \begin{array}{r} 38748 \\ \hline 35653 \end{array} $	<p>V. 356539 (9</p> $ \begin{array}{r} 348732. \\ \hline 7807 \end{array} $

Частное 67019, остатокъ 7807. При этомъ Тарталья говоритъ, что хорошо бы передъ дѣленіемъ заготовить произведенія дѣлителя на всѣ однозначныя числа; тогда виднѣе было бъ, какою цифрою задаваться въ частномъ, да и не нужно составлять отдѣльно произведеній дѣлителя на цифры частнаго, такъ какъ они ужъ есть, и остается прямо вычитать.

6) Клавіусъ въ XVII ст. вводитъ нашъ знакъ дѣленія (при по-

мощи угла), но числа при дѣленіи располагаетъ не по нашему. При мѣръ: $1902942 : 2978 = 639$.

$$\begin{array}{r} 2978 \\ 1902942 \overline{) 639} \\ 1161 \overline{) 17868} \\ 2680 \overline{) 8934} \\ 26802 \end{array}$$

7) Вендлеръ, нѣмецкій педагогъ XVII в., употребляетъ почти нашъ пріемъ, съ тою только разницей, что дѣлитель и частное у него ставятся по обѣимъ сторонамъ дѣлимаго.

$$\begin{array}{r} 486 \mid 225505 \mid 464 \\ 1944 \\ 311 \\ 2196 \\ 194 \\ 1944 \end{array}$$

Кромѣ того, цифры дѣлимаго не сносятся, а остаются на своемъ прежнемъ мѣстѣ вверху.

8) Пешекъ въ XVIII ст. вычисляетъ такъ же, какъ и Вендлеръ.

Пешекъ даетъ нашему способу названіе французскаго.

9) Бартъ въ XVIII ст. пишетъ дѣлителя подъ дѣлимымъ при всякомъ частномъ дѣленіи, слѣд., столько разъ, сколько разрядовъ въ частномъ. $66734 : 325 = 205 \frac{109}{325}$.

$$\begin{array}{r} 66734 \\ 325 \\ 650 \\ 1734 \\ 325 \\ 1625 \\ 109 \end{array}$$

10) Въ русскихъ математическихъ рукописяхъ XVII столѣтія встрѣчаются, какъ и слѣдовало ожидать, тѣ же самыя пріемы, какіе выработала Западная Европа. Они перешли къ намъ черезъ Польшу, такъ какъ именно польская ученость давала пищу русской образованности

XVII вѣка. Чаше всего въ это время встрѣчается способъ Апіана (см. выше, 4). У Магницкаго, стр. к на оборотѣ, представлено дѣленіе въ такомъ видѣ.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 5175 \mid 345 \\ 1555 \\ 4505 \\ 11 \\ 67 \end{array}$$

Здѣсь дѣлимое 5175 помѣщено во второй строкѣ, частное справа, дѣлитель 15 переписывается трижды (въ третьей и пятой строкахъ), четвертая и пятая строка отведены частнымъ произведеніямъ, а верхняя—остатку отъ вычитанія. Изъ этого видно, что цифры расположены довольно несистематично и неудобно, такъ что сбиться въ нихъ очень легко. Но, по правилу, «изъ двухъ золь выбирай меньшее», Магницкій очень доволенъ этимъ способомъ и одобряетъ его въ слѣдующихъ выраженіяхъ: «Мнози убо дѣлять перечни сичевымъ образомъ: егда дѣлителемъ емлютъ, изъ числъ дѣлимаго, и написавши за чертою, умножаютъ имъ весь дѣлитель и, подписавши вычитаніемъ, вычитаютъ изъ дѣлимаго. И намъ видится, сичевымъ образомъ есть удобнѣйше, но тѣмъ иже слабѣйшее разумѣніе и тщаніе имутъ: зане не толикаго есть домышленія, и остроты». Далѣе у Магницкаго идетъ способъ, похожій на Барта (см. выше, 9), и способъ Вендлера (выше, 7). Вліяніе Вендлера вполне замѣтно въ ариметикѣ Василія Адодурова (1740 г.), Румовскаго (1760 г.), Кузнецова (1760 г.). У Загорскаго (1806 г.) является нашъ нормальный способъ во всей чистотѣ.

Австрійскій способъ дѣленія.

Подъ именемъ австрійскаго способа разумѣется такой, который хотя и похожъ на нашъ нормальный, но отличается отъ него большимъ примѣненіемъ устнаго счета. Австрійскій способъ можно считать шагомъ впередъ сравнительно съ нашимъ способомъ; въ немъ меньше письма и самое дѣйствіе совершается вслѣдствіе этого гораздо быстрѣе; правда, есть въ немъ и неудобство: именно, чело-

вѣкъ, мало-мальски невнимательный, легко въ немъ сдѣлаетъ ошибку и собьется. Для примѣра возьмемъ $167535 : 365$. Первая цифра частнаго будетъ 4; составляемъ произведеніе 365 на 4, начиная съ низшихъ разрядовъ, но не подписываемъ этого произведенія подъ дѣлимымъ, а вычитаемъ каждый разрядъ его, какъ только онъ получится, и пишемъ прямо остатокъ: $4 \times 5 = 20$, слѣд. въ остаткѣ 5; $4 \times 6 = 24$, да 2, 26, 6 изъ 7 = 1, слѣд. въ остаткѣ 1; далѣе $3 \times 4 = 12$ да 2 — 14. 14 изъ 16 даетъ въ остаткѣ 2; всего получится послѣ вычитанія 215, сносимъ слѣдующую цифру 3 и дѣлимъ новое число 2153 такъ же, какъ и предыдущее, т.-е. одновременно производимъ умноженіе и вычитаніе.

Австрійская метода стала выдвигаться на первый планъ сравнительно недавно, съ середины XIX вѣка, но зачатки ея простираются вплоть до XVII вѣка; еще Вендлеръ даетъ образецъ такого сокращеннаго дѣленія.

$$\begin{array}{r} 4564 \mid 20830096 \mid 4564 \\ 2574 \\ 2920 \\ 1825 \end{array}$$

Кегель въ XVII ст. даетъ болѣе грубую форму этого способа, такъ какъ онъ начинаетъ умноженіе съ высшихъ разрядовъ, а не съ низшихъ, и ему приходится лишній разъ измѣнять цифры. Вотъ какъ у него идетъ дѣленіе 135531 на 21:

$$\begin{array}{r} 21 \mid 135513 \mid 6453 \\ 1916 \\ 1 \end{array}$$

Наконецъ, Маурахеръ (XVIII в.) пользуется такимъ расположеніемъ вычисленія:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 98760 \\ & 18 \\ & 27 \\ & 36 \\ & 40 \\ \hline & 12345 \end{array}$$

При этомъ частное 12345 помѣщается внизу, дѣлитель 8 слѣва, а дѣлимое 98760 правѣ дѣлителя.

Испанскій способъ дѣленія.

Эта самая употребительная, самая распространенная форма дѣленія. Теперь ея уже нѣтъ въ учебникахъ, и объ ней не вспоминаютъ, но почти въ теченіе тысячи лѣтъ, съ IX вѣка до XIX, она являлась общезвѣстной и популярной формой. Начало ей положили арабы; черезъ Испанію она была принесена въ Западную Европу и потому получила названіе «испанскаго» способа. Участь его можно сравнить съ той, которую пришлось испытать обученію грамотѣ по методу: «буки азъ ба». Теперь этотъ методъ отжилъ свой вѣкъ и скоро о немъ, навѣрное, забудутъ, а въ свое время онъ пользовался общепризнаннымъ авторитетомъ, и на немъ воспитывался длинный рядъ поколѣній: наши отцы, дѣды и прадѣды, и дѣды нашихъ прадѣдовъ. Тоже случилось съ испанскимъ дѣленіемъ. Сколько надъ нимъ старались, сколько хлопотали надъ его усовершенствованіемъ, а сейчасъ его забыли. Правду сказать, горевать объ этомъ не приходится, потому что — то было дѣленіе длинное, сбивчивое и обильное всякими недоразумѣніями. Надо думать, что корень его скрывается въ индусской математикѣ, судя по тому, что вычислять подобнымъ образомъ очень удобно было на пескѣ, какъ то было принято у индусовъ. Когда же этотъ способъ сталъ примѣняться на бумагѣ, то получилось нѣчто несообразное по основной идеѣ: цифры, которыя слѣдовало стирать, оставались нетронутыми (иногда зачеркивались), нагромождались другъ на друга и давали массу липняго и бесполезнаго письма. Приведемъ примѣры.

1) Примѣръ Альхваризми, араба IX столѣтія. Требуется 46468 разделить на 324, частное 143.

$$\begin{array}{r}
 136 \\
 24 \\
 110 \\
 22 \\
 140 \\
 143 \\
 46468 \\
 324 \\
 324 \\
 324
 \end{array}$$

Какъ видно, дѣлимое въ срединѣ; подъ нимъ помѣщается дѣлитель и при томъ переписывается столько разъ, сколько цифръ въ частномъ; такое передвиженіе осталось, конечно, отъ вычисленій на песокъ, когда такъ легко было стирать цифры и писать ихъ еще разъ въ болѣе удобномъ положеніи; первая цифра частного будетъ 1, первый остатокъ 140 пишется надъ частнымъ; теперь надо дѣлить 1406 на 324, въ частномъ будетъ 4; умноженіе 324 на 4 идетъ съ высшихъ разрядовъ и одновременно же происходитъ вычитаніе. Вотъ гдѣ, между прочимъ, основаніе для австрійскаго способа, разобранныго нами выше. Такъ какъ $3 \times 4 = 12$, то вычитаемъ 12 изъ 14-ти и получаемъ 2, которое и пишемъ надъ 4-мя; далѣе $2 \times 4 = 8$, 8 изъ 10 = 2, слѣд., надъ нулемъ надо помѣстить 2, а прежнюю цифру десятковъ 2 надо замѣнить новой 1, написавши эту 1 надъ двумя. Такъ дѣйствіе идетъ до самаго конца, т.-е. умноженіе производится съ высшихъ разрядовъ и сопровождается вычитаніемъ, при чемъ измѣненія цифры переписываются выше.

2) Альнасави, арабскій писатель XI вѣка, нѣсколько упрощаетъ письмо и даетъ хоть небольшой просторъ устному счету. $2852 : 12$ онъ рѣшаетъ такъ:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 498 \\ 237 \\ 2852 \\ 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 237 \\ 8 \\ 12 \end{array}$$

Интересно отмѣтить, какъ Альнасави изображаетъ частное. Цѣлое число 237 онъ пишетъ вверху, подъ нимъ остатокъ, а подъ нимъ уже дѣлителя; все это считается обозначеніемъ смѣшанной дроби $237 \frac{8}{12}$.

3) Греческій монахъ Максимъ Планудесъ, одинъ изъ немногихъ представителей византійской учености, даетъ еще болѣе легкій образецъ дѣленія, но, конечно, Планудесъ потому такъ легко справляется, что примѣръ-то самъ по себѣ не замысловатъ. $4865 : 5 = 973$. Вычисленіе идетъ такъ:

$$\begin{array}{r} 31 \\ 4865 \\ 973 \\ 5 \end{array}$$

4) Алькальцади, жившій въ XV ст., хотя и является заключительнымъ звеномъ въ блестящей цѣпи арабскихъ математиковъ, но все-таки не можетъ обойтись безъ того, чтобы не переписать дѣлителя нѣсколько разъ даже въ легкомъ примѣрѣ. $924 : 6$ у него представляется въ такомъ видѣ:

32

924

666

154

Частное въ самомъ низу, дѣлитель надъ нимъ, еще выше дѣлимое и, наконецъ, въ самой верхней строкѣ послѣдовательные остатки.

5) Петценштейнеръ въ XV ст., нѣмецкій педагогъ, нисколько не измѣняетъ основного хода дѣйствія и всего только вводитъ ту подробность, что пишетъ частное справа за чертой. Дано разделить 467 на 19.

1

4

281

467 24

199

1

Получается довольно красивое расположеніе, съ ясной наклонностью къ симметріи. Начиная съ этихъ поръ, математики обращаютъ вниманіе на то, чтобы груда цифръ не представляла собой чего-то безпорядочнаго и несимметричнаго, а образовывала изящную фигуру, построенную по извѣстной идеѣ. Особенно любили изощряться надъ построениемъ фигуръ итальянцы, и надо отдать имъ справедливость, что они много успѣли въ этой бесполезной и даже вредной игрѣ; вѣдь всякая погоня за ненужнымъ и постороннимъ вредитъ, въ концѣ концовъ, главной и существенной цѣли; такъ и здѣсь, одинъ авторъ передъ другимъ старались придумать что-нибудь оригинальное, красивое и стройное по внѣшнему виду, но забывали главное достоинство, т.-е. быстроту вычислений, удобство и вѣрность.

6) Лука-де Бурго ухитрился представлять дѣленіе фигурой корабля съ трюмомъ, рулемъ, мачтами и парусами.

00	
150	
765	
08290	
14544	
861022	
0975565	
16301573	
97535399	9876
9876666	
98777	
988	
9	

Дальше этого идти уже трудно, и путь всевозможныхъ ухищреній² можно считать исчерпаннымъ. Хорошо еще, что педагоги тогдашняго времени большею частію не неволили учениковъ къ тому, чтобы они непременно умѣли строить эти изящныя фигуры; они обыкновенно предпочитали только хвастаться другъ передъ другомъ, кто сколько знаетъ способовъ и кто сколько изобрѣлъ.

Какъ видимъ изъ фигуры, частное 9876 стоитъ съ правой стороны у знака дѣленія (угла); лѣвѣе, въ одной съ нимъ строкѣ, располагается дѣлимое; что же касается дѣлителя 9876, то онъ помѣщенъ четыре раза: первый разъ подъ дѣлимымъ, второй разъ онъ расчлененъ на 987 и 6, третій разъ на 98, 7, и 6, и, наконецъ, въ послѣдній разъ на 9, 8, 7 и 6, при чемъ 9 стоитъ въ самомъ низу, 8 во второй строкѣ снизу, 7 въ третьей снизу и 6 въ четвертой, подъ дѣлимымъ, на самомъ правомъ мѣстѣ. Дѣйствіе начинается съ того, что 97535 дѣлится на 9876, въ частномъ получается 9; теперь надо 9876 умножить на 9 и полученное произведеніе вычесть изъ 97535, при чемъ умноженіе начинается съ высшихъ разрядовъ, вычитаніе производится одновременно съ нимъ. $9 \times 9 = 81$, 8 изъ 9 = 1, 1 пишемъ надъ 9-ю, 1 изъ 7 = 6, пишемъ 6 надъ 7-ю; далѣе $8 \times 9 = 72$, вычитаемъ 7 изъ 16-ти, получается 9, пишемъ эти 9 надъ 6-ю, а надъ единицей пишемъ 0; такъ продолжаемъ вычисленіе все далѣе и далѣе, до тѣхъ поръ, пока не кончимъ его. Требуется большая, можно сказать, не-

обыкновенная внимательность, чтобы не сбиться и не спутать въ такомъ рядѣ вычисленій. Положимъ, что передвиженіе дѣлителя помогаетъ разбираться скорѣе и вѣрнѣе въ разрядахъ, но все-таки избѣжать ошибокъ очень трудно, а между тѣмъ, стоитъ только допустить ошибку, и все кончено: все надо передѣлывать снова, потому что выдѣлить вѣрное отъ невѣрнаго нельзя. Если же къ этому еще вспомнить, что при дѣленіи легко попасть на цифру частнаго, которая слишкомъ велика или слишкомъ мала, то мы вполне себѣ представимъ, сколько попытокъ и притомъ какихъ отчаянныхъ попытокъ стоило вѣрное вычисленіе частнаго. Современники передаютъ, что, чтобы рѣшить примѣръ на дѣленіе,—на это требовалось сутки времени. Не даромъ Гербертъ (папа Сильвестръ II), жившій, правда, нѣсколько ранѣе разсчитываемаго періода, считалъ возможнымъ преподавать ариметику только особенно одареннымъ ученикамъ. Святой Бонифачій пишетъ, что «при одной мысли о математическихъ наукахъ у меня отъ страха захватываетъ дыханіе. Передъ ними вся грамматика, реторика и діалектика — просто дѣтская забава».

7) Французскій математикъ Ла-Рошъ (въ XVI ст.) понималъ, что выгоднѣе начинать умноженіе съ низшихъ разрядовъ, потому что тогда будетъ легче вычитать; но и отъ стараго приѣма онъ не рѣшается отказаться, поэтому даетъ и то и другое расположеніе, начиная въ первомъ случаѣ умноженіе съ низшихъ разрядовъ, а во второмъ съ высшихъ. Пусть будетъ дѣлимое 7985643, дѣлитель 1789, тогда въ частномъ получается 4463.

а)	1	б)	1
	6		3
	1143		16
	829736		573
	7985643		1126
	4463		44473
	1789		182726
			3169006
			7985643
			4463
			1789

Ла-Рошъ стремится, очевидно, къ тому, чтобы получить красивую фигуру треугольника: онъ не прочь, подобно Лукѣ де-Бурго, пожертвовать удобствомъ вычислений въ пользу второстепенной цѣли — изящества.

Бешенштейнъ и Ризе, нѣмецкіе педагоги XVI ст., даютъ подобные приемы дѣленія.

124620 : 18=6923	10734 : 6=1789	572832 : 72
1723	455	44
66466	10734	655
124620 (6923	6666	8801
18888		572832
111		72222
		777

8) Штифель и Петръ Рамусъ дѣлаютъ попытки помочь вычисленію и предлагаютъ: Штифель—вычитать частныя произведенія сразу, послѣ того, какъ они уже составлены, а не по отдѣльнымъ разрядамъ, какъ только они получаются; Рамусъ—заготавливать заранѣе произведенія дѣлителя на всѣ однозначныя числа. «Правда, это кропотливо,—говоритъ онъ,—но зато полезно».

9) Изложенный способъ дѣленія, испанскій, какъ называетъ его Пешекъ, отличается той характерной чертой, что всѣ промежуточные вычисления пишутся выше дѣлимаго, поэтому онъ получилъ у нѣмецкихъ математиковъ названіе дѣленія «вверху» — «ueberwärts» или «uebersich» — «dividieren», въ противоположность нашему нормальному приему, которому придали названіе дѣленія «внизу», на томъ основаніи, что все вычисленіе сосредоточивается ниже дѣлимаго.

Дѣленіе «вверху», какъ мы уже упоминали, являлось самой распространенной и употребительной формой вплоть до начала XIX-го вѣка. Къ этому времени были признаны, наконецъ, его неудобства, и оно мало-по-малу стало уступать свое мѣсто нормальному, практикуемому въ настоящее время, приему. Въ русскихъ ариметикахъ XVII вѣка находимъ такой примѣръ дѣленія: 5692597 : 3625=

$$\begin{array}{r} 1570 \quad 1347 \\ \quad \quad 3625 \end{array}$$

41
2533
5656
207704
5692597
1570
3625555
36222
366
3

Въ сущности, тотъ же ромбъ, что и выше. У Магницкаго вычисленіе въ этомъ же родѣ, при чемъ частное располагается съ правой стороны и отдѣляется скобкой. 9649378 : 5634.

3
14
259
710
59427
4015530
9649378 (1712
5634444
56333
566
5

Выпишемъ кстати изъ Магницкаго объясненіе, которое онъ проводить на примѣрѣ 1952 : 32. «Подобаетъ вѣдати, яко егда дѣлитель имѣеть не едино число, но два 32 или три 4 3 2, и тогда такожде подписуются числа дѣлителя, подъ болшая себе, дѣлимаго сиче. 1952. 32

И умствуется тако: яко елико первымъ числомъ дѣлителя, емлещи изъ верхнихъ числъ дѣлимаго толикожде бы взяти, и другимъ числомъ дѣлителя, изъ тѣхъ же числъ дѣлимаго, якоже здѣ:
1 Изъ 19 взяти на 3, по 6: по толику же бы взяти, и
1952 изъ 15, на 2: и останется изъ 15, 3, еже на 13
32 (6. пиши надъ 5-ю, а прочая похѣрь сиче (всѣ 1952 (6
цифры, кромѣ 3, 2 и 6, перечеркиваются). 32

Потомъ напиши первое число дѣлителя, противъ остаточныхъ 3-хъ дѣлимаго, а другое дѣлителя въ рядъ къ правой рукѣ яко здѣ:

$$\begin{array}{r} 13 \\ 1952 \text{ (6} \\ 322 \\ 3 \end{array}$$

И умствуй 3 дѣлителя изъ 3-хъ дѣлимаго, и будетъ 1: и сей 1 напиши подлѣ 6 за чертою, а другимъ числомъ дѣлителя 2-мя возьми изъ 2 дѣлимаго 1, который уже за чертою написанъ сиче:

$$\begin{array}{r} 13 \\ 1952 \\ 322 \text{ (61 толико пришло изъ 1952 на 32).} \\ 3 \end{array}$$

10) Въ заключеніе приведемъ изъ Магницкаго «инъ изящнѣйшій образецъ дѣленія, зане во единомъ семъ образцѣ сугубое дѣйство, сирѣчь съ дѣленіемъ и повѣреніе: яко же явлено есть.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 1736 \\ 56092 \\ 5984 \text{ (882} \\ 678 \\ \hline 5424 \\ 5424 \\ 1356 \\ \hline 436 \text{ оставшее} \\ \hline 598432 \text{ вѣрно раздѣлено.} \end{array}$$

Въ этомъ примѣрѣ требуется 598432 раздѣлить на 678: въ частномъ получится 882 и въ остаткѣ 436. Дѣлитель 678 пишется только одинъ разъ и въ этомъ обстоятельствѣ мы должны видѣть большой успѣхъ. Первымъ неполнымъ дѣлимымъ является число 5984: когда

его разделимъ на 678, то получимъ въ частномъ 8, составляемъ теперь произведение 678 на 8, при чемъ умноженіе ведемъ съ низшихъ разрядовъ: это опять-таки полезная подробность: восемью восемь 64, 4 изъ 4 будетъ 0, пишемъ 0 надъ 4-мя; семьюю восемь 56, да 6,—62, вычитаемъ 2 изъ 8-ми, будетъ 6, пишемъ 6 надъ 8-ю; шестьюю восемь 48, да 6,—54, вычитаемъ 54 изъ 59, останется 5.

Такимъ путемъ ведемъ мы дѣйствіе до самого конца и находимъ въ отвѣтъ 882. Что касается «повѣренія», т.-е., повѣрки, то она состоитъ въ перемноженіи дѣлителя и частнаго, при чемъ $678 \cdot 8 = 5424$, $678 \cdot 8 = 5424$, $678 \cdot 2 = 1356$, къ этому присоединяется остатокъ отъ дѣленія, который равенъ 436, и всего составитъ 598432.

Римскій способъ дѣленія.

Римляне были расположены къ счету круглыми числами, и поэтому они любили замѣнять числа, близкія къ круглымъ, при посредствѣ этихъ круглыхъ. Примѣровъ этому можно привести очень много, хотя бы: 18 по ихъ нумераціи. выражается черезъ 20 безъ двухъ, 90 черезъ сто безъ десяти и т. д. Естественно поэтому ожидать, что подобная наклонность къ круглымъ числамъ будетъ проявлена и при дѣленіи. Примѣръ $668 : 6$ рѣшается по римскому способу слѣдующимъ образомъ. Дѣлимъ 668 не на 6 равныхъ частей, а на 10, тогда въ каждой части будетъ по 6 десятковъ, но вѣдь мы взяли 4 лишннихъ части, а въ каждой по 6 десятковъ, всего, слѣдовательно, взяли лишняго 24 десятка, эту сдачу надо приложить опять къ дѣлимому, будетъ 308. Дѣлимъ теперь 30 десятковъ на 10, будетъ въ каждой части по 3 десятка, и такъ какъ лишннихъ частей взято опять 4, то онѣ составятъ 12 десятковъ, а поэтому всего осталось поделить число 128. Изъ этого 12 дес. при дѣленіи на 10 дадутъ въ каждой части по 1 дес. и сдачи образуется 4 дес. Всего мы, слѣдовательно, набрали въ частномъ 6 дес. + 3 дес. + 1 дес. = 10 дес., или 100. Теперь надо 68 дѣлить на 6. Продолжаемъ это дѣлать тѣмъ же самымъ приемомъ, какимъ вели и до сихъ поръ, именно: $60 : 10$, будетъ по 6 ед., сдачи $4 \times 6 = 24$, да 8, всего 32; дѣлимъ 32 на 10,

будетъ по 3, сдачи $3 \times 4 = 12$, да 2, всего 14; дѣлимъ 14 на 10, будетъ по 1 единицѣ, сдачи 4, да 4, всего 8, теперь число уже не дѣлится на 10 и поэтому остается только вспомнить настоящаго дѣлителя 6 и раздѣлить на него, будетъ въ частномъ 1 и въ остаткѣ 2. Подсчитаемъ итогъ, сколько мы набрали всего на все единицъ: $6 + 3 + 1 + 1 = 11$, и въ остаткѣ 2; десятковъ мы выше насчитали 10, и, слѣдовательно, окончательный отвѣтъ представится въ видѣ $100 + 11$, т.-е., 111 и ост. 2. Вотъ какой длинный и кропотливый путь. Онъ составляетъ характерную принадлежность римской ариѳметики, особенно же временъ упадка Рима и перехода римской цивилизаціи къ народамъ Западной Европы. Особенно подробно разработанъ этотъ способъ у Бозція (470 — 525 по Р. Х.), знатнаго и ученаго римскаго гражданина, и у Герберта (папы Сильвестра II), жившаго около 1000 года по Р. Х. Послѣ Герберта этотъ способъ сталъ все болѣе и болѣе вытѣсняться арабскими приемами, т.-е., такими, которые близки къ нашему нормальному дѣленію. Не даромъ съ этихъ поръ стали называть способъ Бозція «железнымъ правиломъ», въ отлчіе отъ «золотого», подъ которымъ чаще всего разумѣли «дѣленіе вверху» (см. на стр. 98).

Труденъ и очень труденъ былъ римскій способъ, значительно труднѣе, чѣмъ «дѣленіе внизу» и «дѣленіе вверху».

Обременительность его зависѣла прежде всего отъ его сложности, но, кромѣ того, еще и отъ того, что педагоги и составители учебниковъ или не умѣли, или не хотѣли объяснить дѣло, какъ слѣдуетъ. Высокимъ, ученымъ слогомъ, безъ обращенія къ чему-нибудь наглядному и понятному, они вели бесѣду такъ, какъ будто передъ ними находились тоже ученые люди или педагоги, а не малыя дѣти: тогдашняя школа мѣряла все на аршинъ учителя и не примѣнялась къ возрасту и развитію ученика.

Вотъ выписка изъ книжки Сперанскаго (Очерки по исторіи народной школы въ Западной Европѣ, стр. 118, заимств. изъ Гюнтера): При дѣленіи 5069 на 4, дѣйствія располагаются слѣдующимъ образомъ. Мы имѣемъ: $10 - 4 = 6$, $\frac{5000}{10} = 500$. 6 = 3000. Образуемъ теперь произведеніе $(\frac{3000}{10} = 300)$. 6 = 1800, $(\frac{1000}{10} = 100)$. 6 = 600, от-

куда мы получаемъ $6000 + 800 = 1400$. Точно также: $(\frac{1000}{10} = 100)$.
 $6 = 600$, $600 + 400 = 1000$. Пользуясь все тѣмъ же приѣмомъ, вы-
числяемъ произведение $(\frac{1000}{10} = 100)$. $6 = 600$, $(\frac{600}{10} = 60)$. $6 =$
 $= 360$, $(\frac{300}{10} = 30)$. $6 = 180$, $(\frac{100}{10} = 10)$. $6 = 60$ и образуемъ сум-
му $60 + 80 + 60 + 60 = 260$. Далѣе: $(\frac{200}{10} = 20)$. $6 = 120$, $(\frac{100}{10} =$
 $= 10)$. $6 = 60$, а $60 + 20 + 60 = 140$. Двигаясь тѣмъ же путемъ
далѣе мы получимъ: $(\frac{100}{10} = 10)$. $6 = 60$, $40 + 60 = 100$, $(\frac{100}{10} =$
 $= 10)$. $6 = 60$, $(\frac{60}{10} = 6)$. $6 = 36$, $(\frac{30}{10} = 3)$. $6 = 18$, $(\frac{10}{10} = 1)$.
. $6 = 6$; $6 + 8 + 6 + 9 = 29$. Затѣмъ находимъ $(\frac{20}{10} = 2)$. $6 = 12$;
 $(\frac{10}{10} = 1)$. $6 = 6$; $6 + 2 + 9 = 17$; $(\frac{10}{10} = 1)$. $6 = 6$; $7 + 6 = 13$;
 $(\frac{10}{10} = 1)$. $6 = 6$; $3 + 6 = 9$; эта сумма, подобно дѣлителю, является
уже числомъ меньшимъ 10-ти. Такимъ образомъ оказывается, что
остатокъ отъ дѣленія равенъ 1. Искомое частное 1267. Первоначально
римскій способъ примѣнялся на абаѣ, при помощи римскихъ цифръ;
но съ теченіемъ времени, когда въ Европу проникли арабскія цифры,
онъ сталъ примѣняться и на нихъ и долго не уступалъ своего мѣста
новымъ приѣмамъ. Теперь онъ уже совершенно оставленъ и рѣшительно
нигдѣ не встрѣчается. А между тѣмъ и у него есть нѣкоторое удоб-
ство, которое возвышаетъ его въ этомъ отношеніи: именно легкое
угадываніе цифръ частнаго. Въ нашемъ нормальномъ дѣленіи иногда
случается задаваться не тою цифрою, какая нужна, а большей или
меньшей; у римлянъ же это могло случаться гораздо рѣже, потому что
дѣлителемъ у нихъ всегда служило круглое число, слѣдовательно, легко
найти, сколько разъ оно содержится въ дѣлимомъ.

Приведемъ образцы письменнаго расположенія по этому способу.
Примѣры: $672 : 16$ и $3276 : 84$.

2) Замѣна дѣленія умноженіемъ нѣсколько труднѣе, чѣмъ замѣна его вычитаніемъ; она не такъ доступна, понятна и наглядна; ее мы встрѣчаемъ на тѣхъ ступеняхъ развитія науки, когда совершается переходъ отъ простонародныхъ приемовъ вычисленія къ точнымъ научнымъ приемамъ. Такъ, напр., у индусовъ до выработки нормальныхъ способовъ дѣленія мы видимъ массу попытокъ привести его къ умноженію; при этомъ и само умноженіе совершается такимъ искусственнымъ порядкомъ, какой встрѣчается еще въ глубокой древности у египтянъ, распространенъ былъ среди всѣхъ народовъ и пользуется до сегодня популярностью среди самоучекъ и немудрыхъ счетчиковъ. Для поясненія беремъ примѣръ у Евтокія греческаго писателя въ VI в. по Р. X. Требуется раздѣлить 6152 на 15. Для этого Евтокій составляетъ рядъ чиселъ, кратныхъ 15-ти: 15, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 600, 900, 1200, 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 6000. Рядъ этотъ, какъ видимъ, содержитъ не всѣ кратныя числа, но онъ только пролагаетъ путь къ тому, чтобы догадаться, что 6000 кратно 15, и что въ 6000 содержится 15 четырехста разъ. Остается теперь раздѣлить 152 на 15. Для этого Евтокій снова составляетъ подобный же рядъ: 15, 30, 60, 90, 150 и выводитъ, что 15 въ 150-ти содержится 10 разъ. Всего въ отвѣтъ получится 410 и 2 въ остаткѣ.

3) Слѣдующей попыткой къ упрощенію дѣленія является расчлененіе дѣлителя на производителей; оно и теперь примѣняется съ большимъ успѣхомъ, особенно при устномъ счетѣ; именно, чтобы раздѣлить, напр., на 8, можно раздѣлить данное число пополамъ, полученный отвѣтъ опять пополамъ и вновь полученный отвѣтъ еще разъ пополамъ. Для письменнаго вычисленія такой порядокъ особенно рекомендуется итальянцемъ Леонардо Фибонначи (около 1200 г. по Р. X.); при этомъ, въ случаѣ дробнаго частнаго, у него получается рядъ дробей съ возрастающими знаменателями.

Оригинальный приемъ, основанный на той же идеѣ, даетъ Апіанъ (XVI в. по Р. X.); у него проскальзываетъ глѣбо въ рождѣ десятичныхъ дробей, хотя въ его время теорія десятичныхъ дробей находилась въ самомъ зачаточномъ состояніи.

Положимъ, ему надо раздѣлить 11664 на 48; онъ сперва вычитаетъ $11664 : 6$, потомъ отъ каждаго полученнаго разряда беретъ

восьмую долю, это легко достигается тѣмъ, что каждый разрядъ помножается на 0125, такъ какъ $1:8=0,125$. Все дѣйствіе можно представить въ такомъ видѣ.

$$\begin{array}{r|l}
 522 & \\
 11664 & \\
 \hline
 0125 & \\
 0062 & 5 \\
 05 & \\
 05 & \\
 0 & 5 \\
 \hline
 243 &
 \end{array}$$

Объясняется это вычисленіе слѣдующимъ образомъ. Дѣлимъ 11 тыс. на 6, получаемъ 5 въ остаткѣ и 1 въ частномъ; 5 пишемъ надъ 1, а единицу частнаго умножаемъ на 0125 и пишемъ прямо подъ чертой. Далѣе, 56 сот.: $6=9$ сот. и 2 сотни въ остаткѣ; остатокъ помещаемъ надъ 6-ю, а 9 надо умножить на 0125; для этого Апіанъ множитъ отдѣльно 0125 на 5 и на 4, получаетъ 0625 и 05; при записываніи цифра 5 у числа 0625 подвигается вправо за черту, потому что это будетъ уже не цѣлыя единицы, а только десятая доли. Теперь 26 десятковъ надо дѣлить на 6, будетъ въ частномъ 4 десятка; помножить 4 на 0125, получится 5 — столько простыхъ единицъ, ихъ пишемъ. Наконецъ, $24:6=4$, $4 \times 0125=5$, это будутъ десятая доли, и ихъ слѣдуетъ писать за чертой вправо. Остается сложить все отдѣльные частныя, и тогда получится общій отвѣтъ 243.

4) Все три предыдущихъ способа уступаютъ нашему, которыми мы, обыкновенно, пользуемся: они труднѣе и длиннѣе нашего. Но вотъ методъ Тиллиха, предложенный имъ въ 1806 г. Онъ уже вытекаетъ изъ нормальнаго приѣма и стремится еще болѣе его усовершенствовать. Суть его состоитъ въ слѣдующемъ. При дѣленіи на однозначное число, напр., на 3, не сносятъ остатковъ къ слѣдующему низшему разряду, а стараются раздѣлить каждый разрядъ вполнѣ, хотя бы для этого пришлось воспользоваться и дробнымъ частнымъ. Согласно этому, дѣйствіе $56789:3$ располагается такъ:

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{1}{3} & 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 12223 \\
 \hline
 \frac{2}{3} & 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 6706\frac{2}{3} \\
 \hline
 & 18929\frac{2}{3}
 \end{array}$$

Прежде всего дѣлится 5 дес. тысячъ на 3, на каждую часть приходится по $1\frac{2}{3}$ дес. тысячъ, изъ этого 1 дес. тыс. сносится въ частное, а $\frac{2}{3}$ дес. тыс. пока оставляются. Затѣмъ дѣлимъ 6 тысячъ на 3, будетъ по 2 тысячи, ихъ такъ и пишемъ въ частномъ. Точно такимъ же образомъ 7 сот.: $3=2\frac{1}{3}$ сотни, 8 дес.: $3=2\frac{2}{3}$ дес. и, наконецъ, $9:3=3$. При этомъ всѣ цѣлые отвѣты сносятся въ частное, а дроби пока оставляются. Дроби эти приводятся къ нормальному виду слѣдующимъ путемъ. $\frac{2}{3}$ десятка тысячъ дадутъ 6 тысячъ и $\frac{2}{3}$ тысячи; эти $\frac{2}{3}$ тысячи составятъ $6\frac{2}{3}$ сотни, да у насъ еще $\frac{1}{3}$ сотни, всего получится 7 сотенъ, ихъ такъ и пишемъ. Останется только перевести $\frac{2}{3}$ десятка въ единицы, будетъ $6\frac{2}{3}$. Окончательный отвѣтъ составитъ $18929\frac{2}{3}$.

Въ иныхъ примѣрахъ можно разбивать дѣлимое на группы въ 2 разряда, и это представляетъ немалое удобство. Такъ, $\frac{1}{4}$ отъ 339765 Гиллинхъ совѣтуетъ находить дѣленіемъ 33 дес. тысячъ на 4, 97 сотенъ на 4 и 65-ти единицъ на 4. Тогда форма вычисленія получится слѣдующая:

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{1}{4} & 33 \quad 97 \quad 65 \quad 82416 \\
 \hline
 & \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 2525 \\
 \hline
 & 84941
 \end{array}$$

Повѣрка дѣйствій.

Въ чемъ состоитъ повѣрка дѣйствій, и чѣмъ она вызывается? Повѣрить дѣйствіе значитъ произвести такое дополнительное вычисленіе, которое вселило бы нѣкоторую увѣренность, что данный намъ примѣръ рѣшенъ правильно. Въ наши времена повѣрка примѣняется не очень часто, и даже начинающіе школьники на столько бываютъ увѣрены въ своихъ силахъ и въ своемъ умѣньи вычислять, что избѣгаютъ повѣрки.

Это, съ одной стороны, вредно. такъ какъ дѣти приучаются съ ма-

лыхъ лѣтъ искать опоры не тамъ, гдѣ надо бы, т.-е. не въ своемъ искусствѣ и умѣни, а на сторонѣ: они надѣдають учителю вопросами «такъ ли?» и постоянно засматриваютъ въ задачки, сходятся ли съ отвѣтомъ.

Этимъ наша школа разслабляетъ дѣтей, вмѣсто того, чтобы помогать имъ становиться на ноги.

Старинная школа была счастливѣе въ выработкѣ характера и самимъ родомъ своихъ занятій закаляла его. Да и какъ было не закалять, когда, напр., въ средніе вѣка та самая работа требовала отъ дѣтей усиленныхъ трудовъ, которая теперь едва-едва оставляетъ въ нихъ впечатлѣніе. Въ средневѣковой школѣ какое-нибудь дѣленіе многозначныхъ чиселъ требовало массы времени, настойчивости, терпѣнія и т. п. Понятно, что затративши много труда и положивши не мало силъ, счетчику интересно было убѣдиться, хорошо ли онъ исполнилъ работу, и годится ли результатъ. Этимъ и вызывалась потребность повѣрки. Еще индусы, творцы ариметики, любили пользоваться повѣркой; впрочемъ, у нихъ была на то своя особенная, специальная причина, именно они, какъ ужъ упоминалось не разъ выше, вели всѣ вычисленія на пескѣ и стирали всѣ лишнія цифры по мѣрѣ того, какъ подходили къ концу, такъ что въ самомъ концѣ у нихъ оставались только данныя числа и отвѣтъ; вслѣдствіе этого имъ нельзя было просмотрѣть дѣйствіе еще разъ и убѣдиться, насколько вѣрно оно сдѣлано, поэтому имъ приходилось изобрѣтать особенные способы повѣрки, которыхъ они и предложили нѣсколько.

Самымъ употребительнымъ способомъ, не только у индусовъ, но и вообще во всей школѣ до XVIII-го вѣка была повѣрка числомъ 9. Она основана на слѣдующемъ. Если мы возьмемъ 2 слагаемыхъ, напр., 370 и 581, и раздѣлимъ каждое изъ нихъ на 9, затѣмъ сложимъ остатки отъ дѣленія, то эта сумма остатковъ будетъ такою же, какъ если бы мы прямо раздѣлили на 9 сумму данныхъ чиселъ.

Дѣйствительно, остатокъ отъ $370:9$ будетъ 1, отъ 581 остатокъ будетъ 5 и отъ суммы данныхъ чиселъ, т.-е. отъ 951, остатокъ будетъ тоже $5+1=6$ (иногда, впрочемъ, изъ суммы остатковъ приходится выпадывать одну или нѣсколько девятокъ, напр., если бы слагаемыми были 370 и 581, то сумма остатковъ составила бы 11, а остатокъ суммы равнялся бы 2, т.-е. $11-9$) Эти числа 1, 5, 6, но-

сять названіе повѣрочныхъ чиселъ, слѣд., 1 будетъ повѣрочнымъ числомъ для 370-ти, 5 для 581 и 6 для 951. Отсюда ясно вытекаетъ правило: повѣрочное число суммы равно суммѣ повѣрочныхъ чиселъ всѣхъ слагаемыхъ. Точно также при вычитаніи: повѣрочное число разности соответствуетъ разности повѣрочныхъ чиселъ уменьшаемаго и вычитаемаго; или иначе: повѣр. число уменьшаемаго равно суммѣ повѣрочныхъ чиселъ вычитаемаго и разности. При умноженіи правило такое: повѣр. число произведенія соответствуетъ произведенію повѣр. чиселъ множителей; и, наконецъ, при дѣленіи повѣр. число дѣлимаго соответствуетъ произведенію повѣрочныхъ чиселъ дѣлителя и частнаго.

За исключеніемъ сложенія, при каждомъ дѣйствіи имѣется 4 повѣрочныхъ числа, и они, обыкновенно, располагались такъ, что получалась фигура косога креста. Примѣръ: 525 раздѣлить на 15, получится въ частномъ 35. Тогда повѣрка представляется слѣдующимъ крестомъ:

$$\begin{array}{r} \diagup 3 \diagdown \\ 6 \times 8 \\ \diagdown 3 \diagup \end{array}$$

Нѣкоторые математики, приверженцы совершенной точности и полной безошибочности, находили, что повѣрка числомъ 9 далеко не безупречна и можетъ повести къ ошибкамъ. Зависѣть онѣ могутъ отъ такихъ причинъ. Во-первыхъ, различныя по величинѣ числа, но только отличающіяся другъ отъ друга на цѣлое число девятокъ, имѣютъ повѣрочныя числа одинаковыя; напр., числа 172 и 1081. Во-вторыхъ, этой повѣркой нельзя открыть пропуска нулей или же излишка нулей: числа 105, 1050, 15 даютъ одинаковыя повѣрочныя числа. Въ третьихъ, перестановка цифръ точно также не можетъ быть открыта этой повѣркой, такъ какъ, напр., числа 78932 и 87932 даютъ одинаковыя повѣрочныя числа. Итакъ, повѣрка числомъ 9 ненадежна. Поэтому, лучшіе авторы XVI—XVII в. рекомендуютъ еще повѣрку числомъ 7. Она основана на томъ же, на чемъ и предыдущая, и, слѣд., при ней изъ данныхъ и искомыхъ чиселъ выкидываютъ возможное число семерокъ, а съ остатками поступаютъ точно такимъ же образомъ, какъ и при повѣркѣ числомъ 9. Въ этомъ случаѣ ужъ можно обнаружить и перестановку цифръ, и пропускъ нулей.

Казалось бы, что вполне достаточно повѣрки числомъ 9 и числомъ 7 для того, чтобы можно было успокоиться и убѣдиться, что отвѣтъ вѣренъ. Но нѣтъ, Рудольфъ и Апіанъ (въ XVI ст.) объясняютъ, что повѣрять можно такимъ же путемъ, какъ и выше, еще съ помощью чиселъ 8, 4, 6.

Фишеръ (въ 1559 г.) провѣряетъ свои вычисленія числами 5, 6, 7, 8, 9, 11.

Но такое большое количество искусственныхъ повѣрокъ приводило многихъ авторовъ прямо къ отричанію ихъ необходимости и пользы. Петръ Рамусъ, извѣстный французскій ученый и математикъ (ум. 1572 г.), говоритъ, что всѣ эти ухищренія излишни и ненужны, и что если кому требуется повѣрить дѣйствіе, то пусть онъ передѣлаетъ его снова и больше ничего; такъ будетъ лучше и въ томъ отношеніи, что, передѣлывая снова, мы можемъ не только открыть присутствіе ошибки, но и исправить ее.

Лука-де-Бурго смотритъ на дѣло хладнокровнѣе. Онъ не отрицаетъ совершенно провѣрки, но только совѣтуетъ дѣлать ее, по возможности, проще. Именно онъ указываетъ для этого 2 способа. Во-первыхъ, можно то же дѣйствіе произвести еще разъ и только измѣнить его порядокъ, напр., при сложеніи нѣсколькихъ чиселъ, если мы сперва складывали сверху внизъ, то потомъ надо пересложить снизу вверхъ. Во-вторыхъ, всякое дѣйствіе повѣряется своимъ обратнымъ: вычитаніе сложеньемъ, дѣленіе умноженьемъ и т. п.

Происхожденіе мѣръ.

Всѣ предыдущія объясненія, которыя изложены до настоящей главы, касались счета и вычисленій, т.-е. тѣхъ умственныхъ отправленій человека, которыя составляютъ наиболѣе характерную и общую черту его природы.

Дѣйствительно, потребность считать принадлежитъ всѣмъ людямъ и составляетъ необходимую часть ихъ мышленія. Поэтому естественно, что и проявленіе этой всеобщей потребности и присущей всѣмъ способности тоже носитъ въ себѣ много общаго и неизмѣннаго у всѣхъ

народовъ и во всѣ времена. Въ счетѣ и вычисленіи нѣтъ мѣста произволу и очень мало мѣста для свободнаго выбора: все совершается по общему закону, предусмотрѣнному психической организаціею человѣка. Не то мы видимъ въ измѣреніи и особенно въ выборѣ мѣръ. Вотъ ужъ именно «что городъ, то коровъ, что деревня, то обычай!» Каждое маленькое государство, каждый хоть немножко самостоятельный народъ, каждый городъ, каждый уголокъ стремится измѣрять своими мѣрами, да и тѣ еще успѣваетъ перемѣнить нѣсколько разъ съ теченіемъ времени. Прослѣдимъ вкратцѣ эту измѣнчивость мѣръ и постараемся извлечь изъ нея тѣ немногія руководящія основанія, которыми подчиняется выборъ мѣръ, а для этого возьмемъ отъ каждаго народа то, что болѣе всего примѣчательно.

Древній міръ признавалъ египтянъ творцами системы мѣръ. Еще въ доисторическія времена египтяне принимали 365 дней въ году; имъ же принадлежитъ введеніе високоснаго года въ 366 дней черезъ каждые 3 простыхъ, при чемъ установленіе это приписывается царю Капону и относится къ 238 г. до Р. X. Отъ египтянъ этотъ порядокъ былъ заимствованъ Юліемъ Цезаремъ и введенъ имъ во всемъ римскомъ государствѣ, онъ же держится и у насъ теперь подъ именемъ юліанскаго лѣтосчисленія. Счетъ по недѣлямъ и по мѣсяцамъ точно также былъ извѣстенъ египтянамъ.

Вавилоняне замѣчательны тѣмъ, что они стремились объединить всю систему мѣръ и привести ее къ одной основной единицѣ. Эта глубокая мысль занимала потомъ многихъ математиковъ, принадлежавшихъ къ различнымъ національностямъ, и нашла себѣ выраженіе только очень недавно, именно съ введеніемъ метрической системы мѣръ. Съ этой цѣлью вавилоняне пользовались особымъ священнымъ сосудомъ опредѣленныхъ размѣровъ, который они хранили въ надежномъ мѣстѣ. Длина ребра этого сосуда принималась за единицу длины. Когда же этотъ сосудъ наполнялся водою, то вѣсъ воды, вытекавшей изъ него въ опредѣленное время, принимался за единицу вѣса и назывался талантомъ, талантъ раздѣлялся на 60 минъ. Отъ вавилонянъ онъ перешелъ къ другимъ сосѣднимъ народамъ, напр., грекамъ, евреямъ, но при этомъ не всегда и не вездѣ онъ сохранялъ свою первоначальную величину. Обыкновенный греческій талантъ вѣсилъ слишкомъ $1\frac{1}{2}$ пуда и раздѣлялся на 6000 драхмъ.

Талантъ не особенно извѣстенъ, какъ мѣра вѣса, но зато онъ былъ очень распространенъ въ видѣ мѣры стоимости.

Это происходило потому, что въ древности монеты цѣнились по ихъ вѣсу, и когда совершалась купля-продажа, то, обыкновенно, условливались, сколько надо отвѣсить за такую-то вещь золота, серебра или даже мѣди. Такимъ образомъ талантъ золота, т.-е. приблизительно $1\frac{1}{2}$ пуда золота, цѣнился при царѣ Давидѣ въ 125 тысячъ рублей, въ переводѣ на наши монеты. Талантъ серебра при немъ же обошелся бы въ 2400 руб. Аттичeskій талантъ серебра цѣнился почти вдвое дешевле и доходилъ лишь до 1290 р. на наши деньги. Это случилось, вѣроятно всего, потому, что съ теченіемъ времени талантъ сталъ терять свое первоначальное значеніе вѣса и постепенно обращался въ монету, т.-е. съ нимъ получалось такое превращеніе: за талантъ принимался не кусокъ опредѣленнаго вѣса, а кусокъ съ клеймомъ «талантъ», при чемъ вѣсу-то въ этомъ кускѣ было менѣе противъ должнаго, и, слѣд., монета являлась неполноцѣнной.

Слѣдуетъ отмѣтить еще интересное совпаденіе, которое доказываетъ, что историческія вліянія простираются гораздо глубже, чѣмъ можно бы предполагать съ перваго раза. Заключается оно въ томъ, что есть связь между монетами современныхъ намъ англичанъ и монетами древнихъ вавилонянъ. Вавилоняне чеканили изъ мины чистаго золота 60 шекелей, а за 1 шекель давали 20 драхмъ серебряныхъ монетъ. Англійскій же фунтъ стерлинговъ (золотая монета, иначе наз. соверенъ) равенъ по вѣсу вавилонскому шекелю и содержитъ 20 шиллинговъ (шиллингъ—серебряная монета). Такимъ образомъ, видно полное соотвѣтствіе между фунтомъ стерлинговъ и шекелемъ, а также между драхмой и шиллингомъ.

Мѣрой длины у евреевъ и у многихъ народовъ не только древняго, но и новаго міра служилъ локоть. Ноевъ ковчегъ былъ длиною 300 локтей, шириною 50 и высотой 30 локтей. Локоть на наши мѣры составляетъ 21 дюймъ или 12 вершковъ. Впрочемъ, у другихъ народовъ онъ немного измѣнялся и колебался въ предѣлахъ отъ 18 до $22\frac{1}{2}$ дюймовъ. Размѣръ локти опредѣлялся длиной локтевой кости отъ плеча до пальцевъ. Употребленіе его въ качествѣ мѣры длины подтверждаетъ намъ, что люди всегда искали мѣры среди самой природы, которая одна только и можетъ указать намъ нѣчто неизбѣжное,

постоянное и можетъ избавить насъ отъ произвола и неопредѣленности.

У римлянъ вмѣсто локтя употреблялся футъ — «pes», который представлялъ собой длину ступни взрослого мужчины. И у германцевъ была въ употребленіи эта же самая мѣра, и слово «футъ» германскаго происхожденія и значить собственно «нога», т. е. ступня. Подобнаго же происхожденія славянская мѣра «пять». Это, собственно говоря, пространство между раздвинутыми мизинцемъ и большимъ пальцемъ, на наши мѣры будетъ около 4 вершковъ. Еще можно упомянуть о шагѣ римлянъ: римляне нерѣдко измѣряли разстояніе шагами (passus).

Римская мѣра фунтъ сохранила всю свою силу и примѣненіе до нашихъ дней. Это то, что мы теперь зовемъ аптекарскимъ фунтомъ, который равенъ $\frac{7}{8}$ обыкновеннаго русскаго фунта, или 84 золотникамъ. По образцу римскаго фунта употреблялись фунты въ Германіи, Австріи, Швеціи и т. д. Шведскій фунтъ на 15 граммовъ тяжелѣе русскаго, германскій на 90 граммовъ и австрійскій на 150, т. е., почти на $\frac{3}{8}$ нашего фунта (граммъ = $\frac{1}{4}$ золотн.).

Аптекарскій фунтъ издавна дѣлился на 12 унцій и основаніемъ такого дѣленія служилъ, вѣроятно, примѣръ года, который тоже дѣлится на 12 равныхъ частей — мѣсяцевъ. Дѣленіе на унціи было чрезвычайно распространено въ древнемъ Римѣ и отчасти въ средніе вѣка. Его примѣняли даже во многихъ такихъ случаяхъ, которые не имѣли ничего общаго ни съ вѣсомъ, ни съ фунтомъ. Напр., дробь $\frac{1}{12}$ у римлянъ большею частью называлась унціей, хотя бы то было $\frac{1}{12}$ листа бумаги или $\frac{1}{12}$ капитала, или $\frac{1}{12}$ времени — все это были унціи.

Еще два слова о мѣрахъ квадратныхъ. Вычисленіе площади прямоугольника не всегда было такимъ легкимъ дѣломъ, какимъ оно представляется намъ теперь. По крайней мѣрѣ, извѣстная арабская задача X-го вѣка со слѣдующимъ оригинальнымъ содержаніемъ: судья разбираетъ споръ, можно ли участокъ въ 100 локтей длины и 100 локтей ширины замѣнить 2 участками въ 50 локтей ширины. Судья склоняется къ тому, что такая замѣна возможна. Очевидно, ему не подъ силу было догадаться, что первый участокъ содержитъ 4 вторыхъ, а не два.

Метрическая система мѣръ.

На послѣднюю четверть XVIII столѣтія приходится самая важная реформа въ области мѣръ — введеніе одной основной метрической единицы.

Мѣры времени у всѣхъ народовъ земли приблизительно одинаковы, потому что онѣ зависятъ отъ тѣхъ размѣровъ, которые предустановлены самой природой. Но остальные всѣ мѣры чрезвычайно разнообразны и произвольны. Германія, раздробленная до послѣдняго времени (1870 г.) на многое множество отдѣльныхъ мелкихъ государствъ и въ то же время достигшая высокой степени гражданского развитія, служила нагляднымъ образцомъ обилія мѣръ. Въ каждомъ княжествѣ и въ каждомъ порядочномъ городѣ былъ свой локоть или свой футъ: мѣры вмѣстимости при одномъ названіи иногда имѣли разный объемъ; центнеръ (употребительная мѣра вѣса, 6 пуд. съ лишкомъ), давалъ, смотря по мѣсту, разницу фунтовъ въ 20. Въ Швейцаріи каждый кантонъ чеканилъ свою монету и устанавливалъ мѣры и вѣсы.

Во Франціи во 2-ю половину XVIII-го вѣка примѣнялось свыше 50-ти различныхъ мѣръ вѣса, вмѣстимости и длины. Все это разнообразіе чрезвычайно губительно дѣйствовало и на внутреннюю, и на вѣшнюю торговлю государствъ.

Купцамъ приходилось имѣть дѣло съ тысячами различныхъ цѣнъ и мѣръ. Приводя къ извѣстнымъ мѣрамъ, они часто должны были вычислять только приблизительно, а не вполне точно, потому что и самыя отношенія мѣръ подвергались колебаніямъ. Кромѣ того, нормальныхъ образцовъ и мѣръ, по которымъ можно было бы провѣрить и съ которыми сравнивать, обыкновенно, нигдѣ не хранилось и разрѣшить сомнѣніе и споръ не было по чему. Кстати, и въ учебникахъ допускались относительно мѣръ неточности и даже ошибки. По всемъ этимъ основаніямъ вполне понятно стремленіе ученыхъ математиковъ, коммерсантовъ и вообще всѣхъ людей, такъ или иначе прикасавшихся къ куплѣ и продажѣ, объединить мѣры и дать имъ твердые устои, заимствовавъ образцы изъ самой природы.

Въ средніе вѣка нѣкоторые государи и городскія управленія пытались установить опредѣленные закономъ величины мѣръ. Въ городской ратушѣ въ Регенсбургѣ хранились метталлическіе образцы мѣръ.

футъ, шестифутовая сажень и локоть; всякій желающій могъ осматривать эти образцы и сравнивать съ ними свои мѣры. Многократно издавались въ различныхъ государствахъ предписанія, чтобы мѣры вмѣстимости и длины приготавливались «съ запасомъ», т.-е. съ нѣкоторымъ прибавкомъ къ своей величинѣ, очевидно, во избѣжаніе злоупотребленій со стороны купцовъ.

Франція первая привела въ исполненіе мысль о твердо установленной мѣрѣ. Прежде всего ученые задались вопросомъ: что именно принять за единицу мѣры? Какую величину взять для этого изъ природы? Предлагали взять длину секунднаго маятника, т.-е. такого, который совершаетъ свое качаніе ровно въ секунду, но оказалось, что эта длина имѣетъ нѣкоторыя неудобства, такъ какъ секундныи маятникъ измѣняется съ географической широтой мѣстности. Другіе предлагали величину ячейки пчелиныхъ сотъ, разстояніе между зрѣнками взрослого человѣка, видимый діаметръ солнца. Въ 1789 г французское національное собраніе энергично взялось за реформу. Въ засѣданіи 8 мая 1790 г., по предложенію извѣстнаго аббата Таллейрана, было рѣшено выработать, совмѣстно съ Англіей, такую систему, которая годилась бы для всѣхъ народовъ земного шара.

Для этого организована была коммиссія изъ французовъ и англичанъ. Однако, вскорѣ англичане разошлись съ французами изъ-за политическихъ недоразумѣній и устанавили у себя свою систему, въ которой единицей былъ принять ярдъ, заимствованный отъ длины секунднаго маятника въ Гринвичѣ; ярдъ=3 футамъ=0,91439 метра. Франція такимъ образомъ осталась одна и принялась за работу. Коммиссія рѣшила принять за основаніе одну десятимилліонную часть четверти парижскаго меридіана или, иначе сказать, сорокамилліонную долю окружности земного шара. Для этого потребовалось новое измѣреніе меридіана. Работа нѣсколько затянулась и едва къ 1799 году была закончена подъ руководствомъ знаменитаго математика Лапласа; при этомъ фактически было измѣрено 10 градусовъ меридіана, на разстояніи между городами Барселоной и Дюнкирхеномъ. Когда всѣ работы окончились, то приготовлено было 2 нормальныхъ платиновыхъ образца, совершенно равныхъ другъ другу, и имъ было дано названіе «метръ» отъ греческаго слова *métron*, что значитъ мѣра. Въ этомъ случаѣ съ особенной цѣлью было выбрано слово греческое, а не фран-

пузское, т.-е. слово языка отжившаго, международного, чтобы не обидѣть самолюбіе всѣхъ тѣхъ государствъ, которыя пожелали бы ввести у себя метръ. Чтобы образовать долю метра, а также чтобы получить кратныя метра, воспользовались исключительно десятичной системой и раздѣлили метръ на 10 равныхъ частей, назвали дециметромъ, раздѣлили на 100, назвали сантиметромъ, на 1000 — миллиметромъ; точно также декаметръ составляетъ 10 метровъ, гектометръ — 100, километръ 1000 и мириаметръ — 10000.

При этомъ десятичная система была выбрана потому, что на ней основана вся наша нумерация, и она даетъ наибольшія выгоды для расчетовъ. Латинскія слова: деци, центи, милли и греческія: дека, гекто, кило, мириа, которыя обозначаютъ соответственно: 10, 100, 1000, 10000, были выбраны опять-таки потому, что этимъ путемъ ничей патріотизмъ не затрагивается, и система можетъ быть признана вполне международной. Отъ мѣръ длины легко было прсизвести мѣры поверхностей, вмѣстимости, вѣса и кубическія. Такъ, площадь квадрата съ десятиметровой стороной принята была за единицу подъ именемъ ара, отъ латинскаго слова «ареа», что значить поверхность. Единицей объемовъ былъ взятъ кубическій метръ, который сталъ называться стеромъ, когда примѣнялся, напр., къ измѣренію объема угля, дровъ и т. п. Греческое слово «стеръ» и значить «объемъ», отъ него, между прочимъ, производится и слово «стереометрія», т.-е., измѣреніе объемовъ тѣлъ. Для объемовъ жидкостей стала употребляться болѣе мелкая мѣра — литръ, составляющій 1 кубическій дециметръ. Единицей вѣса былъ принятъ граммъ, равный вѣсу кубическаго сантиметра чистой воды, взятой при температурѣ 4° Цельсія. Слово «граммъ» — греческаго корня и означаетъ, собственно говоря, гравировку или штампель, который долженъ класться на гирькѣ, а уже отсюда и самый вѣсъ; въ буквальномъ переводѣ слово граммъ значить «написанное» и поэтому оно стоитъ въ связи со словами грамматика, грамота.

Метрическая система отличается простотой, потому что въ ней только одинъ исходный пунктъ — метръ, и всѣ остальные мѣры вытекаютъ изъ него; это составляетъ большое упрощеніе, такъ какъ при помощи 12 словъ составляются названія для всѣхъ рѣшительно единицъ этой системы, которыя обнимаютъ собою всѣ ея отдѣлы и

не даютъ повода къ смѣненію съ какими бы то ни было другими старинными мѣрами. 1-го января 1872 года метрическая система была введена въ Германіи. Нѣсколько ранѣ этого ее приняла Италія и Швейцарія. По закону 9-го іюля 1873 года всѣ мѣстные мѣры различныхъ уголковъ Германіи были отмѣнены и объявлены недействительными.

Къ большому сожалѣнію, оказывается, что измѣрить длину меридіана совершенно точно — чрезвычайно трудная задача; Лапласу и его сотрудникамъ не удалось избѣжать нѣкоторой, хотя и небольшой, ошибки, а потому нормальный метръ, образецъ котораго сохраняется въ Парижѣ, не равенъ въ точности одной сорокамилліонной долѣ истинной длины меридіана. Именно, по новѣйшимъ изслѣдованіямъ и измѣреніямъ оказывается, что принятый во всемъ свѣтѣ метръ короче того, какой бы слѣдовало имѣть, на $\frac{1}{10}$ милліметра. Точно также, когда метрическія мѣры вводились въ Пруссіи, то нормальный образецъ, изготовленный въ Берлинѣ, когда его сличили съ парижскимъ, оказался неравнымъ ему, правда, на микроскопическую долю: прусскій метръ = 1, 00000301 метра французскаго.

Русскія мѣры.

Мѣры времени Мы начинаемъ съ нихъ потому, что въ нихъ все народы болѣе согласны, чѣмъ въ какихъ бы то ни было другихъ. Вездѣ принятъ солнечный годъ, содержащій 12 мѣсяцевъ или $365\frac{1}{4}$ сутокъ, и только въ очень немногихъ странахъ (например, въ Турціи) пользуются луннымъ годомъ, продолжительностью въ 354 дня 8 час. 45 м. 5 с. Поэтому представляется вполне естественнымъ, что уже въ ариметикѣ Леоптія Магницкаго мѣры времени совершенно тѣ же, что и у насъ:

годъ имѣетъ 12 мѣсяцевъ,
мѣсяцъ имѣетъ 4 седмицы,
седмица имѣетъ 7 дней,
день имѣетъ 24 часа,
часъ имѣетъ 60 минутъ,
а весь годъ имѣетъ $365\frac{1}{4}$ дней.

О минутахъ и секундахъ здѣсь вовсе ничего не сказано. Лѣтъ за сто передъ Магницкимъ существовали оригинальныя дѣленія часа:

Большой часъ имѣеть 5 первыхъ дробныхъ часовъ,
1-й дробный часъ—5 другихъ дробныхъ часовъ,
другой дробный часъ—5 третьихъ дробныхъ часовъ,
и т. д. до 6-го,

шестой дробный часъ—5 часовъ седьмыхъ малыхъ дробныхъ.

«Боле же сего не бываетъ, т. е., не рождаются отъ седьмыхъ дробныхъ». Не сказано здѣсь ничего и о вѣѣ, а вотъ у Кирика, новгородскаго діакона, жившаго въ XII-мъ столѣтіи, вѣѣ принимается за 1000 лѣтъ, вмѣсто нашихъ ста.

Мѣры длины. Футъ никогда не признавался исконной русской мѣрой; онъ введенъ въ Россію уже при Петрѣ Великомъ и вывезенъ имъ изъ Англіи, не даромъ и сейчасъ онъ иногда называется для точности англійскимъ футомъ, и въ немъ содержится 12 англійскихъ дюймовъ. Старинная русская мѣра — аршинъ, состоящій изъ 4 четвертей. Онъ, подобно локтю и футу, заимствованъ, вѣроятно всею, пазъ природы, по крайней мѣрѣ, его четвертая доля — «четверть» — равна разстоянію между раздвинутыми большимъ и указательнымъ пальцемъ взрослого человѣка.

Въ русскихъ сборникахъ XVII вѣка, кромѣ извѣстныхъ намъ сажени, аршина и вершковъ, упоминается еще локоть, и опредѣленъ онъ такъ, что 2 аршина равны 3 локтямъ, слѣдовательно, локоть выходитъ длиною въ $10\frac{2}{3}$ вершка.

Земельныя мѣры. Въ Московской Руси было 3 главныхъ земельныхъ мѣры: соха, четверть и десятина. Соха, подобно многимъ другимъ мѣрамъ того времени, не отличалась постоянствомъ и зависѣла отъ качества земли и отъ принадлежности ея тому или другому владѣльцу. Соха хорошей («доброй») земли составлялась изъ 800 четвертей, средней изъ 1000 и худой изъ 1200. Она дѣлилась на доли, при чемъ названія долямъ бывали иногда черезчуръ длинными, такъ, напримѣръ,

1
24 выражалась такъ: «пол-пол-пол-треть сохи».

Другая земельная мѣра — четверть. Чему, примѣрно, она равна на наши мѣры, — трудно сказать: одни утверждаютъ, что пол-десятина.

родская соха, или сошка. въ 10 разъ меньше московской; въ сохѣ 3 обжи, въ обжѣ 5 коробьевъ. Особыя земельныя мѣры существовали, повидимому, въ Тверскомъ княжествѣ. Въ монгольскій періодъ въ юго-западной Россіи были земельныя мѣры: уволока, моргъ и прутъ; въ уволокѣ 30 морговъ, въ моргѣ 30 прutowъ. Моргъ на наши мѣры составляетъ приблизительно пол-десятины (Всѣ эти свѣдѣнія заимствованы изъ сочиненія Бобынина «Состояніе физико-математическихъ знаній въ Россіи въ XVII вѣкѣ»).

Мѣры вѣстимости. Въ старину онѣ представляли гораздо болѣе сложную таблицу, чѣмъ теперь. Вотъ что встрѣчаемъ въ XVII ст

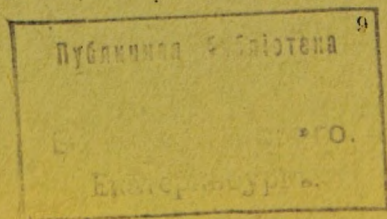
Оковъ—4 чети,
четвертокъ—2 чети,
четь—2 мѣры или 2 осмины,
осмина—2 полуосмины;
мѣра—2 полумѣры,
полмѣры—2 четверика,
четверикъ—2 получетверика.

Изъ этого видно, что четверть являлась четвертой долей окова, а четверикъ четвертой долей мѣры, при чемъ послѣдняя считалась осминой, т. е., восьмой частью окова.

Мѣры вѣса. Въ XVII и XVIII ст встрѣчаются болѣею частью знакомые намъ берковецъ, пудъ, фунтъ. Но на ряду съ ними перечисляется цѣлая масса иностранныхъ мѣръ, и старинныхъ, и современныхъ. Знаніе ихъ было очень необходимо тогдашнему торговому человеку, потому что всѣ обороты шли чрезъ «иноземныхъ гостей»: голландцевъ, англичанъ, венгровъ и т. д. У Магницкаго приведены мѣры латинскія (ассъ, унція и ихъ доли), греческія (талантъ, мина, драхма и друг.), польскія, прусскія, литовскія, краковскія, голландскія и много другихъ; перечисленіе ихъ занимаетъ нѣсколько страницъ въ ариметикѣ, а для ясности приложены сравнительныя таблицы, довольно длинныя.

Мѣры стоимости. Уже во времени Ярослава Мудраго существовала на Руси монета «гривна». Въ ней было 20 ногатъ, или 50 рѣзанъ. Различаются гривны купныя, серебряныя и золотыя; изъ нихъ

вѣдлѣютины.



кушныя готовились изъ низкопробнаго серебра и стоили вчетверо дешевле настоящихъ серебряныхъ; предполагаютъ, что изъ серебряной гривны образовался въ Новгородѣ къ XV вѣку рубль; золотая гривна въ $12\frac{1}{2}$ разъ дороже серебряной и вѣсила около 20 золотниковъ. Съ петровскихъ временъ стали чеканиться монеты «гривенники».

Рубль получилъ свое названіе отъ слова «рубить» и представлялъ собой отрубленный кусокъ серебра вѣсомъ около полуфунта. Онъ принадлежалъ, главнымъ образомъ, къ новгородскимъ монетамъ, но попадались и московскіе рубли, которые были вдвое меньше новгородскихъ. Въ рубль содержалось 10 гривенъ, или, вѣрнѣе, гривенниковъ. Гривенникъ равнялся 10-ти новгородкамъ, т. е., новгородскимъ мелкимъ серебрянымъ (XV вѣкъ) монетамъ, или 10-ти копейкамъ, т. е. московскимъ монетамъ. Происхожденіе слова «копейка» объясняется такъ. Это была небольшая серебряная монета, на которой изображался великій князь — верхомъ на конѣ; въ рукахъ онъ держалъ копьѣ, а такъ какъ монетка была невелика, то и копьѣ было очень маленькое, и прозвали его копейкомъ, и отсюда получилось названіе самой монеты — копейка. По крайней мѣрѣ, во временникѣ (лѣтописи) XVI вѣка прямо говорится: «оттолѣ прозваша деньги копейныя». Серебряныя копейки вѣсили около 10 долей. При Алексѣѣ Михайловичѣ стали чеканить мѣдныя копейки.

Алтынъ — татарскаго происхожденія; «алты» по-татарски значить шесть, алтынъ содержалъ 6 денегъ, т. е., 6 полукопеекъ. При Петрѣ Великомъ чеканились серебряныя алтыны.

Деньга равнялась половинѣ копейки. До XVI вѣка она чеканилась изъ серебра, а потомъ ее стали готовить изъ мѣди. Съ 1829 года переименовали ее въ денежку. Ея нельзя смѣшивать съ полушкой, иначе сказать, съ полуденьгой, которая равна $\frac{1}{4}$ копейки. Это была уже самая мелкая монета на Руси. Впрочемъ, Карамзинъ приводитъ еще другія доли: въ полушкѣ 2 полуполушки, въ полуполушкѣ 2 пирога, въ пирогѣ 2 полупирога, въ полпирогѣ 2 четверти пирога.

Обыкновенныя (простыя) дроби

Необходимость дробей должна чувствоваться всякимъ человѣкомъ, который желаетъ хоть немного выйти за предѣлы начальныхъ вычислений. И въ практической жизни, и при первыхъ же шагахъ науки дроби совершенно необходимы, и безъ нихъ обойтись нельзя. Поэтому и въ самыхъ древнихъ и въ самыхъ короткихъ арифметическихъ рукописяхъ встрѣчаются непременно замѣтки о доляхъ.

Прежде всего наталкиваетъ на необходимость дробей дѣленіе съ остаткомъ. Интересны попытки, которыя дѣлались старинными авторами для того, чтобы какъ-нибудь обойтись безъ дробей и провести все дѣло легко и спокойно, т.-е. въ цѣлыхъ числахъ. Такъ, въ арабской рукописи 12-го вѣка по Р. Х. рѣшается вопросъ «раздѣлить 100 фунтовъ между 11-ю человѣками поровну»; какъ видно, здѣсь получается остатокъ—1 фунтъ, его предлагаютъ промѣнять на яйца, которыхъ по существующимъ цѣнамъ придется 91 штука; тогда на каждаго человѣка можно дать по 8 яицъ и еще 3 яйца въ остаткѣ; что дѣлать съ ними? ихъ авторъ рекомендуетъ отдать тому, кто дѣлилъ, за его труды или же промѣнять на соль къ яйцамъ. Еще проще поступаетъ представитель римской монастырской учености IX вѣка Одо Клюбійскій. Требуется ему раздѣлить 1001 фунтъ на 100. Остатокъ 1 онъ дробитъ въ унціи, драхмы и т. д. до тѣхъ поръ, пока только можно дробить. И такъ какъ въ концѣ концовъ еще получается маленькій остатокъ, то его Одо предлагаетъ совсѣмъ бросить и не брать въ счетъ. Но при этомъ вѣдь происходитъ ошибка, хотя и небольшая, и автору ничего иного не остается, какъ извинить свою ошибку несовершенствомъ всего земного и всѣхъ людскихъ дѣяній и для большей убѣдительности привести даже латинскіе стихи.

Rerum véro paréns qui sòlus
súncta tuétur
Cúm sit cúncti poténs perféctus
solus habétur.

Отецъ вселенной, — который все
держитъ,
Одинъ владѣетъ всѣмъ, одинъ безъ
недостатковъ.

Изъ нихъ авторитетно вытекаетъ, что только небесное свободно отъ ошибокъ и обладаетъ совершенствомъ.

Понятна та осторожность и та боязнь, съ которой въ старину относились къ дробямъ. Это былъ труднѣйшій и запутаннѣйшій отдѣлъ ариметики. Не даромъ и сейчасъ у нѣмцевъ сохранилась поговорка «попасть въ дробь» (*in die Brüche gerathen*), что совершенно равносильно нашему «стать въ тупикъ», т. е. зайти въ такой проулокъ, выходъ изъ котораго застроенъ. Трудность увеличивалась и усложнялась, главнымъ образомъ, тѣмъ, что не принято было давать никакихъ объясненій, и вся старательность ученика направлялась на заучиваніе правилъ, безъ всякаго пониманія того, откуда эти правила вытекаютъ. Кстати, и самая глава о дробяхъ была мало разработана и представлялась неясной даже для составителей учебниковъ, потому что дробь то смѣшивалась съ именованными числами, то принималась состоящими изъ 2 чиселъ—числителя и знаменателя. Въ понятіяхъ о дѣйствіяхъ надъ дробями была большая путаница, особенно, что касалось умноженія и дѣленія, да и сейчасъ въ наши дни этотъ туманъ не разсѣялся; напр., первые 2—3 года, пока ребенокъ учитъ цѣлыя числа, ему толкуютъ, что умножить значитъ увеличить въ нѣсколько разъ, а потомъ, когда онъ перейдетъ къ дробямъ, его начинаютъ убѣждать, что умножить вовсе не значитъ увеличить. Между тѣмъ, какъ легко было бы устранить все это, если бы взглянуть на дѣло проще и согласиться, что умножить въ цѣлыхъ числахъ значитъ взять слагаемыхъ нѣсколько разъ, а въ дробяхъ — взять долю числа. Трудны были дробь прежде, нелегки онѣ и теперь, а такъ какъ изученіе ихъ очень полезно и необходимо, то преподаватели старались и въ прозѣ и въ стихахъ ободрить своихъ учениковъ и побудить ихъ пересилить трудности. Знаменитый римскій ораторъ Цицеронъ (въ 1 ст. до Р. Х.) счелъ долгомъ сказать свое авторитетное слово по этому случаю: «*sine fractionibus arithmetices peritus nemo esse potest*»; это значитъ: «безъ знанія дробей никто не можетъ признаваться сведущимъ въ ариметику». То же самое встрѣчаемъ у нашего Магницкаго въ такихъ стихахъ:

Но нѣсть той ариметикъ,
Иже въ цѣлыхъ отвѣтникъ,
А въ доляхъ сый ничтоже,

Отвѣщати возможе.

Тѣмже о ты радѣй,

Буди въ частяхъ умѣй.

Особенное уваженіе къ дробямъ свидѣлствуетъ авторъ одной славянской рукописи XVI в. Именно, разсуждая о тройномъ правилѣ, онъ говоритъ: «Нѣсть се дивно, что тройная статія въ цѣлыхъ, но есть похвально, что въ доляхъ»

Разсмотримъ теперь подробно, какъ развилось ученіе о дробяхъ у различныхъ народовъ.

Древніе египтяне задались въ этомъ отношеніи чрезвычайно оригинальной мыслью. Они пользовались только такими дробями, у которыхъ числитель непременно единица; все остальные дроби они считали неудобными для вычисленія и старались замѣнять ихъ этими основными дробями, т.-е. съ числителемъ, равнымъ единицѣ, такъ что когда египтянину требовалось произвести какое-нибудь дѣйствіе надъ дробями, то онъ сперва замѣнялъ данныя дроби основными, затѣмъ дѣлалъ вычисленіе и уже въ концѣ-концовъ изъ ряда основныхъ дробей выводилъ одинъ общій отвѣтъ. Все замѣны, которыя требовалось при этомъ дѣлать, совершались при помощи обширныхъ таблицъ, специально заготовленныхъ на этотъ случай. Вотъ какъ начинаются эти таблицы:

2	1	1
5	3	15
2	1	1
7	4	28
2	1	1
9	6	18
2	1	1
11	6	66
2	1	1
13	8	52
		104

и т. д. до $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$

Здѣсь между долями подразумѣвается, очевидно, сложеніе, такъ что $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Съ дробями, у которыхъ числитель больше двухъ,

приходилось немало хлопотать, и составителямъ таблицъ досталось немало труда, напр., надъ разложеніемъ дроби $\frac{7}{29}$ Ходъ

$$\begin{aligned} \text{вычисленія такой: } \frac{7}{29} &= \frac{1}{29} + \left(\frac{1 \ 1 \ 1 \ 1}{24 \ 58 \ 174 \ 232} + \frac{1 \ 1 \ 1 \ 1}{24 \ 58 \ 174 \ 232} \right) + \\ &+ \left(\frac{1 \ 1 \ 1 \ 1}{24 \ 58 \ 174 \ 232} \right) = \frac{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}{29 \ 24 \ 58 \ 174 \ 232} + \left(\frac{2 \ 2 \ 2 \ 2}{24 \ 58 \ 174 \ 232} \right) = \\ &= \frac{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}{29 \ 24 \ 58 \ 174 \ 232 \ 12 \ 29 \ 87 \ 116} = \frac{2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2}{29 \ 24 \ 58 \ 174 \ 232} \\ &= \frac{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}{12 \ 87 \ 174 \ 24 \ 58 \ 174 \ 232 \ 24 \ 58 \ 174 \ 232 \ 12 \ 87 \ 116} = \frac{6}{6} \\ &= \frac{1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}{29 \ 87 \ 58 \ 58 \ 174 \ 6 \ 29 \ 58 \ 29 \ 174 \ 6 \ 24 \ 58} \\ &= \frac{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1}{174 \ 232 \ 174 \ 6 \ 24 \ 58 \ 87 \ 232 \ 6 \ 6 \ 24 \ 58 \ 87 \ 232} \end{aligned}$$

При помощи такихъ таблицъ египтяне умѣли обходиться безъ приведенія дробей къ одному знаменателю, для этого они переводили слагаемыя въ основныя дроби на основаніи таблицъ, соединяли всѣ эти основныя дроби въ одну массу и потомъ смотрѣли, опять же руководствуясь таблицами, какой одной дроби равняется вся эта масса. Какъ составлялись подобныя таблицы? Точнаго отвѣта дать сейчасъ нельзя, тѣмъ болѣе, что они заимствованы изъ папируса Ринда, а этотъ папирусъ относится ко времени за 2000 лѣтъ до Р. Х. Можно догадываться, что едва ли всѣ строки принадлежать одному составителю, вѣрнѣе всего отдѣльные результаты тщательно собирались въ общій сводъ, такъ что на нѣкоторые отвѣты приходилось наталкиваться случайно, при какихъ-нибудь другихъ вычисленіяхъ.

Такъ какъ египтяне пользовались только основными дробями, т.е. съ числителемъ, равнымъ единицѣ, то они, обыкновенно, вовсе и не писали числителя, а только подразумѣвали его, писали же одного знаменателя; но чтобы не смѣшать дробь съ цѣлымъ числомъ. они надъ цифрами знаменателя ставили точку. Изъ производныхъ же дробей разсматривалась только $\frac{2}{3}$, у которой былъ свой знакъ, такъ

что эта дробь принималась за какую-то особенную величину, не стоящую въ прямой связи ни съ цѣлыми числами, ни съ дробями.

Арабы, очевидно, подѣ влияніемъ египтянъ, раздѣляли дроби на «выговариваемыя» и «невыговариваемыя». Такіе термины встрѣчаются, напр., въ VIII—IX в. по Р. Х. Выговариваемыми дробями были тѣ, у которыхъ числитель единица, а знаменатель отъ 2 до 9; для нихъ есть особенныя названія, въ родѣ нашихъ «половина», «треть» и т. д.

Невыговариваемыми дробями были всѣ остальные, и, напр., $\frac{1}{13}$ выражалась описательно такъ: одна изъ тринадцати долей, $\frac{1}{30}$ такъ: шестая часть одной пятой.

Древніе греки часто вводили въ вычисленія дроби. Обозначали они ихъ такъ: сперва писали числителя и сверху справа ставили значекъ въ родѣ запятой, потомъ дважды повторяли знаменателя и приписывали каждый разъ значокъ въ видѣ 2-хъ запятыхъ. Напр.,

$\frac{3}{21} = \gamma \text{ К} \alpha'' \text{ К} \alpha'$, такъ какъ у грековъ γ обозначаетъ 3, α единицу, К двадцать. Однако чаще всего греки, по примѣру египтянъ и арабовъ, пользовались основными долями и при этомъ обыкновенно пропускали числителя, а знаменателя писали съ присоединеніемъ 2 черточекъ, и выходило, напр., что $\frac{1}{21} = \text{К} \alpha$. Если нѣсколько основныхъ

дробей писалось подѣ рядъ, то это значило, что ихъ надо сложить. Особенные знаки были для половины: σ (старинная греческая буква сигма) и для $\frac{2}{3}$ третьей ω .

Индусы, въ лицѣ одной изъ древнѣйшихъ своихъ отраслей—до-историческаго племени Тамуловъ, выражали всѣ доли при помощи только $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{47}$, $\frac{1}{167}$, $\frac{1}{407}$, $\frac{1}{807}$, $\frac{1}{9687}$, для которыхъ у нихъ были особенныя названія и знаки. Всѣ другія дроби они старались привести къ шести указаннымъ, и это имъ въ большинствѣ случаевъ удавалось порядочно, такъ какъ комбинаціи этихъ долей даютъ почти цѣлую единицу.

У индускаго математика Брамагупты (въ XI в. по Р. Х.) имѣется довольно развитая система простыхъ дробей. У него встрѣчаются различныя дроби, и простыя и производныя, т. е. съ числителемъ и 1.

и любое число. Числитель и знаменатель пишутся такъ же, какъ у насъ, но только безъ горизонтальной черты, а просто ставятся одинъ подъ другимъ. Выше числителя помѣщается цѣлое число, если

оно есть. И выходитъ по индусскому порядку $7\frac{5}{8}$, а по нашему— $5\frac{7}{8}$.

Представители позднѣйшей арабской учености (XI в.) копируютъ индусскій порядокъ. Если цѣлыхъ нѣтъ, то они вверху помѣщаютъ нуль. Вотъ изображеніе $\frac{1}{11}$ восточно-арабскими цифрами $\frac{i}{ii}$; отсюда видно, что нуль у восточныхъ арабовъ писался въ видѣ точки. Итальянецъ Леонардо Фибонначи, слѣдуя манерѣ восточныхъ народовъ (семитовъ) писать справа налѣво, помѣщаетъ, въ случаѣ смѣшанныхъ чиселъ, справа цѣлое число, а лѣвѣе дробь, но читаетъ написанное общепринятымъ европейскимъ порядкомъ, т. е. сперва цѣлое число, а потомъ уже дробь.

Своеобразную систему дробей наблюдаемъ мы у римлянъ. Народъ серьезный, практичный, дѣловой, они предпочитали отвлеченному мышленію наглядность, и поэтому ничего нѣтъ естественнѣе въ ихъ положеніи, какъ замѣнить отвлеченныя доли подраздѣленіями употребительныхъ мѣръ. Они остановили свое вниманіе на мѣрѣ вѣса—фунтѣ (ассѣ, въ настоящее время аптекарскій фунтъ) Ассъ дѣлится на 12 частей—унцій. Изъ нихъ образуются всѣ дроби со знаменателемъ 12, т. е.

$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}$

при этомъ каждая изъ такихъ дробей выражается особеннымъ знакомъ и особеннымъ словомъ; любую дробную величину можно было выражать посредствомъ унцій, напр., вмѣсто того, чтобы сказать: «я прочиталъ $\frac{5}{12}$ книги» говорили «я прочиталъ 5 унцій книги». Такимъ

образомъ, фунтъ являлся и именованной единицей, и въ то же время отвлеченной, такъ какъ его долями выражались всевозможныя дроби.

Эта римская система дробей держалась въ школахъ Западной Европы вплоть до тѣхъ поръ, когда принесенная чрезъ Испанію арабская—вѣрнѣе сказать индусская—арифметика, стала вступать въ свои права и получила силу и перевѣсъ. Это относится къ XV—XVI вѣк

по Р. Х. Въ эти вѣка ученіе о дробяхъ уже получаетъ настоящій обликъ, знакомый намъ теперь, и формируется приблизительно въ тѣ же самыя отдѣлы, которые встрѣчаются въ нашихъ настоящихъ учебникахъ. Но все это было еще очень мудро и туманно и трудно для начинающихъ учиться. О происхожденіи дробей тогда не говорили или же говорили очень мало и съ пропусками. Въмѣсто того прямо начинали съ выговариванія дробей и съ ихъ письм. обозначенія. Вотъ цитата изъ Грамматеуса, нѣмецкаго автора XVI в.: «слѣдуетъ замѣтить, что всякая дробь имѣетъ 2 цифры, вверху и внизу линіи Верхняя цифра называется числителемъ, нижняя—знаменателемъ. Выговариваютъ дробь такъ: сперва называютъ верхнюю цифру, затѣмъ нижнюю, съ прибавленіемъ слова «части». Напр $\frac{2}{5}$ — двѣ пятыхъ части».

Въ русскихъ матем. рукописахъ XVII в. мы видимъ то же самое, что въ западно-европейскихъ XIV и даже XV столѣтія, потому что, чтобы знанію дойти до Россіи, требовалось столѣтіе или болѣе. «Статія численая о всякихъ доляхъ указъ» начинается прямо съ письм. обозначенія дробей и съ указанія числителя и знаменателя. При выговариваніи дробей интересны такія особенности: четвертая доля называлась четью, доли же со знаменателями отъ 5 до 11 выражались словами съ окончаніемъ «ина», такъ что $\frac{1}{7}$ = седмина, $\frac{1}{5}$ = петина, $\frac{1}{10}$ = десятина; доли со знаменателями, большими 10, выговаривались съ помощью слова «жеребей», напр $\frac{3}{13}$ = нять тринадцатыхъ жеребей. Нумерація дробей была прямо заимствована изъ западныхъ источниковъ, въ чемъ авторъ рукописи сейчасъ же сознается: «будя ти вѣдомо, како ся пишуть доли въ цифирномъ счетѣ, по нѣмецкимъ землямъ, въ латинѣ и во французской земли». Числитель назывался верхнимъ числомъ, а знаменатель исподнимъ.

У Магницкаго (славянская ариметика 1703 г.) можно найти яркій примѣръ того, какъ смутно вырисовывалась глава о дробяхъ въ представленіи самихъ авторовъ учебниковъ. Первый разъ упоминаетъ о дробяхъ Магницкій совершенно неожиданно, когда у него идетъ дѣленіе съ остаткомъ. На стр. 17 рѣшается примѣръ $130:3$, и въ концѣ рѣшенія говорится такъ: «И умствуй изъ 10 3 хъ: и придетъ 3, еже напиши за чертою. А осталось изъ 10, 1, иже есть общій восьмъ».

тремя и пишется послѣди сиче $\frac{1}{3}$.» Больше никакихъ разъясненій нѣтъ совершенно. Слѣдующій примѣръ дѣленія съ остаткомъ приведенъ на стр. 21, и тутъ уже прямо подписанъ отвѣтъ $77446399:2864=27041$ ⁹⁶⁸₂₈₆₄. Затѣмъ встрѣчается еще не мало примѣровъ дѣленія съ остаткомъ, и во всѣхъ въ нихъ остатокъ подписывается именно такимъ образомъ, т.-е. въ видѣ числителя дроби, у которой дѣлитель служитъ знаменателемъ. Трудно сказать, что хотѣлъ изобразить этимъ Магницкій: хотѣлъ ли онъ представить отвѣтъ въ видѣ цѣлаго числа съ дробью, или же это вовсе, по его мнѣнію, не дробь, а только своеобразное обозначеніе дѣленія съ остаткомъ. Если это дробь, то лучше было бы отложить ее до полного разсмотрѣнія дробей, или, въ крайнемъ случаѣ, подробно ее объяснить; если же это не дробь, и если черта не отдѣляетъ числителя отъ знаменателя, то какая же сбивчивость и неясность возникнетъ для ученика, когда онъ начнетъ изучать дроби и увидитъ, что онѣ пишутся почему-то точно такъ же, какъ и остатокъ съ дѣлителемъ, при дѣленіи съ остаткомъ. Почему все это такъ? Едва ли умъ ученика будетъ въ состояніи переварить этотъ вопросъ, и, вѣроятно, придется ему бѣдному просто запомнить и затвердить, не мудрствуя сверхъ силъ.

На стр. 42 начинается у Магницкаго вторая часть ариметики, въ которой говорится «о числахъ ломаныхъ или съ долями». «Что есть число ломаное?»—«Число ломаное ничто же иное есть, токмо часть вещи, числомъ объявленная, сирѣчь полтина есть, половина рубля, а пишется сиче $\frac{1}{2}$ рубля, или четъ $\frac{1}{4}$, или пятая часть $\frac{1}{5}$ или двѣ пятыхъ части $\frac{2}{5}$ и всякія вещи яковыя либо часть, объявлена числомъ, то есть ломаное число». Затѣмъ идетъ «нумераціо», или «счисленіе въ доляхъ», т.-е. дается рядъ дробныхъ примѣровъ и указывается, какъ ихъ выговаривать.

Полезно еще здѣсь объяснить, что значать старинныя русскія выраженія «полтретья», «полпята» и т. п. Полпята вовсе не значитъ половина пяти, но это будетъ $4\frac{1}{2}$, потому что, по нашему говоря, это половина пятого, т.-е. 4 цѣлыхъ и отъ пятого половина. Точно такъ же полтретья значитъ половина третьяго, т.-е. $2\frac{1}{2}$. У насъ осталось и сейчасъ выраженіе полтора; оно произошло отъ полптора, т. е. половина второго, слѣд., одинъ съ половиной, $1\frac{1}{2}$. Теперь понятна задача изъ Магницкаго на стр. 41: купилъ полторажды полтора

аршина, далъ полтретьяжды полтретьи гривны, колико дати за полдевятажды полдевята аршина придетъ 20 рублей 2 алтына и $3\frac{7}{8}$ полуденъги.

Сокращеніе дробей и приведеніе къ одному знаменателю.

Умѣнье сокращать дроби восходитъ довольно далеко и замѣчается у математиковъ, жившихъ еще до Р. Х. Самымъ простымъ способомъ былъ тотъ, который практикуется и у насъ, т. е. дѣленіе числителя и знаменателя на одно какое-нибудь небольшое число, въ родѣ 2, 3, 5 и т. д. Эвклидъ (за 300 лѣтъ до Р. Х.) въ совершенствѣ знаетъ способъ послѣдовательнаго дѣленія, т. е. когда большее число дѣлится на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый на второй и т. п. до тѣхъ поръ, пока не будетъ найденъ общій дѣлитель. Этотъ способъ разработанъ былъ Эвклидомъ въ геометріи и имъ-же предлагается для сокращенія дробей. Въ трудѣ ученаго Боэція (въ VI ст. по Р. Х.) рекомендуется послѣдовательное вычитаніе, какъ средство для сокращенія дробей; при этомъ, схоже съ Эвклидомъ, меньшее число отнимается отъ большаго столько разъ, сколько можно, первый остатокъ отнимается отъ меньшаго числа, второй остатокъ отъ перваго и т. д. до тѣхъ поръ, пока, подобно Эвклиду, не будетъ найдено общаго дѣлителя, на котораго затѣмъ и остается раздѣлить числителя и знаменателя. Кромѣ того, въ средніе вѣка составлялись довольно длинныя таблицы для сокращенія дробей; въ нихъ выписывалось подробно, на какихъ именно производителей можетъ разлагаться каждое изъ составныхъ чиселъ. Былъ и еще пріемъ довольно своеобразный. Требуется, положимъ, сократить $\frac{14}{21}$. Для этого помножаемъ числителя и знаменателя дроби на такое число, чтобы новый числитель содержалъ въ себѣ прежняго знаменателя; въ нашемъ примѣрѣ достаточно помножить 14 на 3, получится 42, дѣлимъ это число на 21; будетъ 2, а весь отвѣтъ составитъ $2\frac{2}{3}$. Этотъ способъ можетъ и теперь иногда пригодиться, на примѣръ, въ устномъ счетѣ.

Въ старинныхъ русскихъ ариметикахъ сокращеніе называлось такъ: «уменьшеніе долямъ». Это выраженіе неправильно, потому что величина дроби при сокращеніи не измѣняется и, слѣдовательно, не уменьшается, а уменьшается только числитель и знаменатель; такимъ

образомъ, здѣсь сама дробь смѣшивается съ ея членами, а это вовсе не одно и то же. Подобный неправильный терминъ встрѣчается еще и сейчасъ въ нѣмецкой литературѣ: verkleinern — уменьшеніе, вмѣсто слова сокращеніе.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю встрѣчалось еще у древнихъ египтянъ, хотя они предпочитали обходиться безъ него. Общимъ знаменателемъ у нихъ не всегда было наименьшее кратное число; напр., чтобы привести къ одному знаменателю дроби $\frac{13}{15}$ и $\frac{7}{20}$, они не брали обязательно числа 60 и не замѣняли данныхъ дробей чрезъ $\frac{51}{60}$ и $\frac{21}{60}$, они пользовались знаменателемъ и 120 и 300 и т. п., и выражали предыдущія дроби чрезъ $\frac{104}{120}$ и $\frac{42}{120}$, $\frac{260}{300}$ и $\frac{103}{300}$. Мало того, знаменателемъ выбиралось иногда такое число, которое вовсе не дѣлилось на данныхъ знаменателей. Попробуемъ, напримѣръ, привести дроби $\frac{13}{15}$ и $\frac{7}{20}$ къ общему знаменателю 30, тогда получится $\frac{26}{30}$ и $10\frac{1}{2}$ тридцатыхъ, такъ какъ тридцатая доли въ полтора раза мельче двадцатыхъ. Такимъ образомъ, мы видимъ, что древніе египтяне не стѣснялись формой числителя и допускали дробныхъ числителей. Это указываетъ на значительное пониманіе ими свойствъ дробей; они, слѣдовательно, вникали въ ихъ смыслъ, умѣли обращаться съ ними свободно и увѣренно и примѣняли ихъ, смотря по удобству, къ различнымъ особенностямъ задачъ. Средневѣковая арифметика уступаетъ въ этомъ отношеніи древней. Въ ней гораздо больше механизма, заученныхъ правилъ, строго очерченныхъ приемовъ, и поэтому гораздо меньше свободного соображенія. Это обусловливается общимъ впечатломъ средневѣковой науки, какъ исключительно ремесленной, сухой, не позволяющей вникать въ суть и вертѣвшейся на формахъ. Въ XVI вѣкѣ по Р. Х. учебники относительно этого говорили кратко и внушительно: «перемножь крестъ-накрестъ, затѣмъ перемножь знаменателей!» Косой крестъ считался даже знакомъ приведенія дробей къ одному знаменателю, потому что онъ лучше всего указывалъ порядокъ вычисленія: достаточно числителя первой дроби помножить на знаменателя второй, а числителя второй дроби на знаменателя первой, — это будутъ числители, общимъ же знаменателемъ будетъ произведеніе данныхъ знаменателей. Похоже на это, и знакомъ дѣленія дробей служилъ въ то время косой крестъ, потому что и при дѣленіи надо множить крестъ на крестъ, т. е. числителя одной дроби на знаменателя другой.

Механическое правило, по которому дроби приводятся къ одному знаменателю, касалось не только двухъ дробей, но и нѣсколькихъ. Дано, напримѣръ, выразить въ одинаковыхъ доляхъ $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{25}$. Тогда составляли сперва произведение 15 на 20 и приводили первыя двѣ дроби въ такой видъ: $\frac{80}{300}$, $\frac{105}{300}$. Потомъ составляли произведение 300 на 25 и получали общимъ знаменателемъ число 7500, такъ что 3 данныхъ дроби превращались уже въ $\frac{2000}{7500}$, $\frac{2825}{7500}$, $\frac{2700}{7500}$. Знаменатель, какъ видимъ, возросъ до значительной величины, и все оттого, что математики не научились пользоваться наименьшимъ кратнымъ данныхъ знаменателей. У Магницкаго дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$ приведены къ знаменателю 360, вмѣсто того, чтобы имъ имѣть общаго знаменателя 60; у него получаются такіе отвѣты: $\frac{240}{360}$, $\frac{270}{360}$, $\frac{300}{360}$, $\frac{288}{360}$ и это послѣ ряда длинныхъ вычисленій, занимающихъ цѣлую страницу книги. Даже въ ариметикѣ Степана Румовскаго (С.-Петербургъ, 1760 г.) дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ приводятся къ общему знаменателю 27, а не 9, какъ это сдѣлали бы мы. Изъ всего этого видно, что правило, по которому общимъ знаменателемъ должно служить наименьшее кратное, является сравнительно новымъ правиломъ и замѣнялось прежде тѣмъ порядкомъ, что общій знаменатель составлялся прямо перемноженіемъ данныхъ знаменателей.

Дѣйствія надъ простыми дробями.

Въ настоящее время принято во всѣхъ учебникахъ, чтобы дѣйствія надъ дробями шли въ такомъ порядкѣ: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Прежде было иначе: старинные авторы предпочитали начинать съ умноженія и дѣленія, и потомъ уже они переходили къ сложенію и вычитанію; при этомъ они руководствовались тѣмъ, что для умноженія и дѣленія не надо приводить къ общему знаменателю и, слѣд., эти два дѣйствія гораздо легче тѣхъ двухъ.

Мы будемъ держаться общепринятаго порядка и поэтому скажемъ сперва нѣсколько словъ о сложеніи. Изъ его особенностей отмѣтимъ только ту, которая касается сложенія нѣсколькихъ дробей. Для этого, обыкновенно, складывали сперва только двѣ дроби, сумму ихъ сокращали, если только она сокращается; потомъ къ ней прикладывали третью дробь и сумму опять сокращали, если только можно, и т. д.

вели сложение до последней дроби. Въ XVI ст. по Р. Х. умѣли, впрочемъ, складывать нѣсколько дробей сразу, но тогда ужъ принимали за общаго знаменателя произведение всѣхъ знаменателей. Для облегченія сложения придумывались особенныя таблицы, въ которыхъ были помѣщены суммы наиболѣе употребительныхъ долей. Напримѣръ, итальянецъ Ліонардо Фибонначи (въ XIII ст. по Р. Х.) даетъ въ своемъ учебникѣ таблицу сложения дробей, у которыхъ знаменателемъ служатъ числа: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Вычитаніе. Древніе египтяне замѣняли вычитаніе дробей сложениемъ. Въмѣсто того, чтобы привести дроби къ одному знаменателю и потомъ вычесть числители, какъ это вездѣ дѣлается, они задавались вопросомъ: какое число надо прибавить къ меньшему данному числу, чтобы получить большее данное? Напримѣръ, сколько недостаетъ до единицы у $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}$ (египтяне, обыкновенно, пользовались только основными дробями, т. е. съ числителями, равными единицѣ); они рѣшали этотъ вопросъ слѣдующимъ образомъ: общій знаменатель 45, складываемъ $11\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1, будетъ всего $23\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$; до $\frac{2}{3}$ не хватаетъ $\frac{6\frac{1}{8}}{45} = \frac{5}{45} 1\frac{1}{8} = \frac{1}{9} \frac{1}{40}$; всего до 1 не хватаетъ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{40}$ — это есть отвѣтъ. Читатель, навѣрное, понялъ, что здѣсь между дробями пропущены знаки сложения; египтяне ихъ и не ставили и полагали, что достаточно написать дроби рядомъ, чтобы принять ихъ за слагаемыя.

Умноженіе. Умножить какое-нибудь количество на правильную дробь значитъ найти такую долю этого количества, какая выражается множителемъ. Это такъ ясно и понятно. Тѣмъ не менѣе нахождение частей числа почему-то отдѣлялось и отдѣляется отъ умноженія и принимается за какое-то особенное вычисленіе, которое должно яко бы предшествовать 4 аримет. дѣйствіямъ. Почему все это такъ, и гдѣ кроется корень недоразумѣнія, — объяснить трудно, такъ какъ исторія ариметики не даетъ надежнаго ключа къ разгадкѣ. Но любопытно сопоставить это дѣло съ другимъ недоразумѣніемъ, которое нѣсколько вѣковъ тому назадъ особенно авторитетно выставлялось на первый планъ, считаясь чѣмъ-то непреложнымъ, а въ настоящее время оно оставлено и забыто. Касается оно слѣдующаго. Въ вычисле-

няхъ съ дробными числами, кромѣ чиселъ цѣлыхъ и дробей, встрѣчались еще, такъ наз., доли отъ долей; это были длинныя формулы, состоящія изъ огромнаго ряда дробей, которыя не подлежали упрощенію и въ сыромъ видѣ входили въ дѣйствіе. Лучше всего пояснить это на примѣрѣ: сложить $\frac{2}{3}$ отъ $\frac{4}{5}$ отъ $\frac{3}{6}$ съ $\frac{7}{8}$ отъ $\frac{9}{10}$, или еще изъ 10 вычесть $3\frac{2}{3}$ отъ $2\frac{1}{2}$ отъ $\frac{4}{5}$. Ясно, что здѣсь невычисленныя формулы, и что прежде чѣмъ складывать или вычитать, надо привести слагаемыя или же уменьшаемое съ вычитаемымъ въ обработанный видъ. Получится $\frac{2}{3}$ отъ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{6} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$; $\frac{3}{6}$ отъ $\frac{7}{8}$

отъ $\frac{9}{10} = \frac{315}{480} = \frac{21}{32}$, теперь эти дроби возможно сложить, и въ суммѣ

будетъ $\frac{317}{288} = 1 \frac{29}{288}$. Такъ же и во второмъ примѣрѣ приведемъ

сперва вычитаемое къ должному виду и тогда уже произведемъ дѣйствіе: $3\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{11.5.4}{3.2.5} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$, $10 - 7\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Совершенно нельзя понять, къ чему требовалось математикамъ затруднять сложеніе и вычитаніе дробей особенными правилами, какъ обращаться съ долями долей, а между тѣмъ эти правила рассматривались на нѣсколькихъ страницахъ, занимавшихъ много параграфовъ, требовали большого количества упражненій и приносили только вредъ, такъ какъ на нихъ безъ пользы уходило много времени и труда. Теперь уже наши дѣти не изучаютъ отдѣльныхъ правилъ, какъ складывать или вычитать доли долей, и въ этомъ отношеніи имъ легко. Будемъ же надѣяться, что подобно этому отдѣлу исчезнетъ въ учебникахъ и другой лишній отдѣлъ—нахожденіе частей цѣлаго, и присоединится туда, гдѣ ему настоящее мѣсто, т.-е. къ умноженію дробей.

Замѣтивъ, что вычисленія съ долями долей очень древняго происхожденія, они ведутъ свое начало отъ греческаго математика, Герона (во II ст. до Р. Х.). Были выработаны спеціальныя приемы, какъ обозначать часть дробнаго числа. Напр., у арабовъ примѣнялось таксе

обозначеніе: $\frac{5}{8} \left| \frac{3}{7} \right| \frac{4}{5}$, которое должно показывать $\frac{4}{5}$ отъ $\frac{3}{7}$ отъ $\frac{5}{8}$, т.-е. окончательно $\frac{3}{14}$. У Леонардо Фибоначчи (въ XIII ст. по Р. Х.) формула $0 \frac{6}{7} \frac{8}{9} \frac{9}{10} 22$ равна, согласно нашему порядку.

$22 + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10}$, всего $22 \frac{24}{35}$, а формула $\frac{2}{3} \frac{5}{8} \frac{4}{9} \cdot 0 \cdot 11$ равна
 $11 + \frac{4}{9} + \frac{5}{8} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{4}{9}$. Вотъ такая путаница вносилась этимъ

отдѣломъ совершенно безъ всякой нужды. Также и въ русскихъ матем. сборникахъ XVII—XVIII в. этотъ отдѣлъ давалъ не мало сбивчивости. Онъ назывался «выниманіе дробовое» или «вычитаніе доли изъ долей». Его нельзя было смѣшивать съ другимъ дѣйствіемъ, которому придано созвучное заглавіе, т. е. съ «вычитаніемъ въ доляхъ», гдѣ разсматривается наше вычитаніе дробныхъ чиселъ. Составителю учебника приходилось не мало разъяснять, чтобы предостеречь ученика отъ смѣшиванія вычитанія и нахожденія части, такъ что предъ вычитаніемъ помѣщено было отдѣльное разъясненіе «о разумѣніи, что есть доля изъ долей».

Обратимся теперь къ чистому умноженію дробей, какъ отдѣльному дѣйствію. Обособляться оно стало только въ средніе вѣка, и тогда ему придано было названіе «умноженіе», древняя же математика ограничивалась только нахожденіемъ простѣйшихъ частей числа, тѣмъ болѣе, что даже и въ цѣлыхъ числахъ она стремилась привести умноженіе къ сложенію. У Бернелинуса, ученика римскаго папы Сильвестра II (въ XI в.) умноженіе $\frac{1}{36}$ на $\frac{1}{3}$ совершается по римскимъ образцамъ слѣдующимъ образомъ: $\frac{1}{36}$ обращается въ доли фунта; въ фунтѣ 12 унцій, слѣд., унція равна $\frac{1}{12}$, а такъ какъ въ унціи 24 скрупула, то дробь $\frac{1}{36}$ обратилась въ 8 скрупуловъ; $\frac{1}{3}$ равна $\frac{1}{3}$ фунта, т. е. 4 унціямъ; множимъ теперь $\frac{1}{3}$ фунта на $\frac{1}{3}$ унціи, т. е. на 8 скрупуловъ, и получается $\frac{1}{9}$ унціи, иначе сказать $2\frac{2}{3}$ скрупула, а такъ какъ 2 скрупула составляютъ особую мѣру, которая называется «emisescia», то окончательный отвѣтъ представится въ видѣ $1\frac{1}{3}$ «emisescia». Да, можно сказать, что способъ Бернелинуса очень и очень нелегокъ.

У Фибоначчи (XIII ст. по Р. Х.) подъ вліяніемъ арабскихъ и индусскихъ образцовъ нѣтъ вычисленія съ унціями, и дѣло идетъ просто съ отвлеченными долями. Фибоначчи пользуется такимъ способомъ. Сперва онъ перемножаетъ числители, а потомъ получившееся число дѣлитъ на перваго знаменателя и, затѣмъ, уже это частное дѣлитъ на втораго знаменателя.

Петръ Рамусъ, знаменитый французскій математикъ и философъ XVI столѣтїя, даетъ въ главѣ о дробяхъ, какъ и въ другихъ отдѣлахъ математики, много свѣжихъ и новыхъ мыслей. Онъ особенно настаиваетъ на томъ, что ученикамъ надо объяснять правила, а не только принуждать выучивать ихъ наизусть, и что правила надо выводить, а не только примѣнять готовые къ примѣрамъ. Однако, самъ Рамусъ, вслѣдствіе той туманности, которую придавали ариметикѣ его предшественники, не всегда одинаково ясно и удачно ведетъ свое изложеніе, такъ что въ случаѣ умноженія дробей мы находимъ у него такой запутанный выводъ: «дано умножить $\frac{3}{4}$ на $\frac{2}{3}$, это значить найти $\frac{3}{4}$ части отъ дроби $\frac{2}{3}$; разсуждаемъ по тройному правилу—1 относится къ 3, какъ 2 къ 6, и 1 относится къ 4, какъ 3 къ 12, слѣдовательно, отвѣтъ будетъ $\frac{6}{12}$. Это и есть произведеніе $\frac{2}{3}$ на $\frac{3}{4}$ ».

Русскіе математики XVII и XVIII в. слѣдовали въ главѣ объ умноженіи западно-европейскимъ образцамъ. Они разсматривали 3 случая: а) умноженіе дроби на цѣлое, б) умноженіе дроби на дробь и с) умноженіе смѣшанныхъ чиселъ. Въ концѣ, въ такъ, наз., «строкѣ генераль» давалось общее правило перемноженія дробей. неизмѣняемость произведенія при перестановкѣ производителей объяснялась въ такихъ выраженіяхъ: «вѣдай доли изъ доли умноженіе, какъ $\frac{1}{3}$ изъ $\frac{1}{4}$ умножаніи придетъ $\frac{1}{12}$; такожь $\frac{1}{4}$ изъ $\frac{1}{3}$ то-жь $\frac{1}{12}$ ». Знакъ при умноженіи дробей всегда употреблялся такой: одна горизонтальная черта проводилась отъ числителя къ числителю, а другая отъ знаменателя къ знаменателю, и это служило хорошимъ знакомъ дѣйствія, такъ какъ этимъ обозначался порядокъ вычисленія.

Замѣчательно мѣсто у Магницкаго, въ которомъ онъ трактуетъ объ умноженіи простыхъ дробей. Здѣсь явственно вылилась вся нетребовательность по отношенію ко всякимъ выводамъ и объясненіямъ. Достаточно сообщить правило, а кромѣ него что же еще надо? такъ, навѣрное, думаетъ Магницкій, и мы не можемъ отказать себѣ въ томъ, чтобы не привести отрывка изъ его ариметики. Стр. 54 «Мультипликацію или умноженіе въ доляхъ. Что въ семъ предѣленіи достоинъ вѣдати. Впервыхъ подобаетъ вѣдати яко во умноженіи нѣсть потреба да сравняши доли къ одинакому знаменателю: но яковы доли дадутся, таковы и умножати числители чрезъ числители, и знаменатели чрезъ

знаменатели, якоже $\frac{3}{8}$ чрезъ $\frac{1}{4}$. 3 чрезъ 1 будетъ 3, а 8 чрезъ 4, будетъ 32, и еже отъ числителей произыдетъ напиши надъ чертою, а отъ знаменателей произведенное напиши подъ чертою и будетъ $\frac{3}{32}$. Итакъ, въ ариметикѣ дается только правило, безъ вывода, зато послѣ правила идетъ цѣлый рядъ примѣровъ, всего 60 номеровъ, съ отвѣтами, и предлагается заняться продѣлываніемъ этихъ примѣровъ, чтобы, такъ сказать, набить руку въ этомъ правилѣ.

Преемники Магницкаго, т.-е. составители русскихъ учебниковъ XVIII и даже XIX в., не оказались счастливѣе его въ этомъ случаѣ. Они тоже или не даютъ никакихъ объясненій умноженія дробей, или даютъ объясненія спутанныя и трудныя. Такъ, въ ариметикѣ Адогурова (1740 г.) про умноженіе дробей объясняется на 29 страницахъ, при чемъ объясненіе дано очень растянутое, многословное и малоубѣдительное. У Румовскаго (1760 г.) передъ дробями расположены пропорціи, и умноженіе дробей выводится изъ общаго свойства пропорцій, именно, что произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ членовъ. И сами пропорціи являются для учениковъ темнымъ мѣстомъ, а ужъ про выводъ изъ нихъ и говорить нечего, особенно когда онъ идетъ на буквахъ, какъ это видимъ у Румовскаго. Порядочное изложеніе встрѣчаемъ мы у Загорскаго (1806 г.), но уже у Павла Цвѣткова (1834 г.) опять тянется старая пѣсня. «Какъ множится дробь на дробь?» спрашиваетъ онъ, и отвѣчаетъ: «При умноженіи дробей на дроби надлежитъ множить числителей на числителей, а знаменателей на знаменателей». Этимъ заканчивается § 34, и авторъ уже болѣе не желаетъ возвращаться къ подобному скучному вопросу, къ которому, вдобавокъ, никакъ еще не придумать подходящаго объясненія. И это въ то время, когда Цвѣтковъ для болѣе легкаго вопроса, для умноженія дроби на цѣлое, находитъ нужнымъ и возможнымъ дать толковое объясненіе.

Да, умноженіе на дробь и въ старину, и еще теперь является однимъ изъ самыхъ больныхъ мѣстъ начальной ариметики.

Дѣленіе. Дѣленіе дробей шло все время правильнымъ путемъ, безъ скачковъ и отклоненій въ сторону. Еще древніе египтяне вполне логично заключали, что дѣленіе обратно умноженію, и что поэтому его можно привести къ умноженію. По своей привычкѣ къ основнымъ дробямъ, т.-е. съ числителемъ, равнымъ единицѣ, они и дѣленіе раз-

сма тривали съ точки зрѣнія этихъ дробей. Примѣръ: $2:1\frac{1}{3} \frac{1}{4}$. Здѣсь египтяне ставили вопросъ: на какое число надо помножить выраженіе $1\frac{1}{3} \frac{1}{4}$, иначе сказать, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, чтобы получить въ произведеніи 2? Для этого помножаемъ количество $1\frac{1}{3} \frac{1}{4}$ на $\frac{2}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{12}$ и получаемъ $\frac{285}{144}$; при этомъ отдѣльно помножается множимое число на $\frac{2}{3}$, на $\frac{1}{3}$, на $\frac{1}{6}$ и на $\frac{1}{12}$, съ такимъ расчетомъ, чтобы каждое слѣдующее произведеніе было вдвое меньше предыдущаго. Такъ какъ $\frac{285}{144}$ отличается отъ даннаго числа 2 на $\frac{3}{144}$, т.-е. на $\frac{1}{72} \frac{1}{144}$, то остается рѣшить вопросъ: на какое число надо умножить $1\frac{1}{3} \frac{1}{4}$, или $\frac{228}{144}$, чтобы получить сперва $\frac{1}{144}$? Очевидно, на $\frac{1}{228}$. Чтобы получить $\frac{1}{72}$, надо умножить на $\frac{1}{144}$. Такимъ образомъ, послѣ довольно запутаннаго вычисленія получается итогъ: $\frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{12} \frac{1}{114} \frac{1}{288}$, который и считался у египтянъ вполнѣ нормальнымъ, какъ составленный изъ основныхъ дробей (дробь $\frac{2}{3}$ у нихъ тоже признавалась основной, это единственная изъ дробей съ числителемъ 2, у нея даже былъ овой спеціальный знакъ).

Римскій способъ дѣленія дробей напоминаетъ собой римскій же способъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Вотъ примѣръ Бернелинуса (въ XIII ст. по Р. Х.). Раздѣлить 28 на $1\frac{3}{4}$. Дѣлится 28 не на $1\frac{3}{4}$, а на 2, т.-е. дѣлитель дополняется до цѣлаго числа, $28:2=14$; теперь надо составить лишекъ или сдачу, которую слѣдуетъ возвратить дѣлимому; такъ какъ на каждую часть взято лишняго по $\frac{1}{4}$, то на всѣ 14 частей пришлось $3\frac{1}{2}$, дѣлимъ $3\frac{1}{2}$ на 2, будетъ въ частномъ 1, въ остаткѣ $1\frac{1}{2}$; сдачи возвратится $\frac{1}{4}$, всего составитъ въ дѣлимомъ $1\frac{3}{4}$; дѣлимъ это количество на $1\frac{3}{4}$ и получимъ въ частномъ 1: такимъ образомъ, весь искомый результатъ будетъ $14+1+1=16$.

Неморарій, математикъ среднихъ вѣковъ, современникъ Бернелинуса, пользуется для дѣленія аналогіей съ умноженіемъ и даетъ слѣдующій искусственный приемъ. Задано раздѣлить $\frac{2}{3}$ на $\frac{4}{5}$. Тогда числитель и знаменатель первой дроби увеличивается въ 4×5 разъ и затѣмъ принимается правило: числителя раздѣлить на числителя, а знаменателя на знаменателя, подобно тому, какъ въ умноженіи дробей множатся числитель на числителя и знаменатель на знаменателя. Получается

$$\text{формула: } \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2.4.5}{3.4.5} : \frac{4}{5} = \frac{2.4.5.4}{3.4.5.5} = \frac{2.5}{3.4}.$$

Леонардо Фибонначи, итальянскій математикъ XIII вѣка, совѣтовалъ приводить дроби къ одному знаменателю и потомъ уже дѣлать, пользуясь аналогіей съ именованными числами, такъ какъ тамъ, обыкновенно, мѣры раздробляются въ одинаковое наименованіе, и затѣмъ полученные числа дѣлятся. Примѣръ у Фибонначи слѣдующій:

$$523 \frac{1}{10} \frac{7}{9} : 17 \frac{1}{6} \frac{2}{5} = \frac{47149}{90} : \frac{1581}{90} = \frac{47149}{1581} \text{ Въ XVI ст.}$$

по Р. Х. на сцену вышло новое правило дѣленія дробей: надо дѣлимое помножить на обращеннаго дѣлителя. Примѣръ: $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$. Для рѣшенія его множимъ $\frac{3}{4}$ на $\frac{3}{2}$, получимъ $\frac{9}{8}$, это и будетъ вѣрнымъ отвѣтомъ. Въ объясненіе этого правила, равно какъ и всѣхъ другихъ, авторы учебниковъ входить не любили. Они только ограничивались тѣмъ, что приводили самое правило и потомъ нѣсколько примѣровъ съ рѣшеніемъ. Ученики же запоминали правило и практиковались въ примѣненіи его въ вычисленіяхъ.

Знакомъ дѣленія до XVIII ст. являлись, обыкновенно, двѣ перекрещивающихся черты, которыя шли отъ числителя первой дроби къ знаменателю второй и отъ знаменателя первой къ числителю второй. Только съ развитіемъ алгебры, когда потребовался общій знакъ дѣленія и для цѣлыхъ чиселъ и для дробей, стали обозначать это дѣйствіе такъ же въ дробяхъ, какъ и въ цѣлыхъ числахъ, т.е. двумя точками.

Приведемъ еще небольшой интересный отрывокъ, который хорошо показываетъ, къ какимъ хитростямъ нужно было прибѣгать средневѣковымъ ученымъ, когда имъ давался трудный примѣръ съ дробями. Въ Зальцбургскомъ (Австрія) сборникѣ, относящемся въ XII вѣку, надо было вычислить земной радіусъ по окружности земли. Извѣстно, что окружность въ $3\frac{1}{7}$ раза больше своего радіуса, и поэтому, чтобы получить радіусъ земли, достаточно ея окружность раздѣлить на $\frac{22}{7}$. Принимая окружность за 252000, составитель находитъ $\frac{7}{22}$ этого числа, т.е. умноженіемъ на $\frac{7}{22}$ замѣняетъ дѣленіе на $\frac{22}{7}$. Умноженіе же онъ ведетъ такъ. Сперва вычисляетъ $\frac{1}{22}$ всего числа, получится $11454\frac{1}{2} \frac{1}{22}$, затѣмъ вычитаетъ эту величину изъ 252000, будетъ $240544 \frac{1}{2} \frac{21}{22}$. Третъ этого числа и составитъ искомый отвѣтъ, т.е. земной радіусъ, такъ какъ $\frac{21}{22} : 3 = \frac{7}{22}$.

Шестидесятеричныя дроби.

Древніе халдеи, образованность которыхъ исходитъ изъ глубины вѣковъ и позволяетъ прослѣдить свои пути далѣе, чѣмъ на 1000 лѣтъ до Р. Х., издавна любили считать по копамъ, т.-е. группами по 60. Почему они остановились именно на этомъ числѣ,—теперь рѣшить, конечно, нелегко, но выборъ этотъ надо считать чрезвычайно удачнымъ, такъ какъ число 60 обладаетъ массой дѣлителей и, слѣдов., рѣже приводитъ къ дробямъ, чѣмъ большинство другихъ чиселъ, и позволяетъ дѣлать много упрощеній. Халдеи примѣняли шестидесятеричный счетъ вездѣ: и въ торговыхъ дѣлахъ, и въ научныхъ выкладкахъ, особенно же въ любимой своей наукѣ, которая многимъ обязана ихъ трудамъ,—въ астрономіи. Привычка къ числу 60 сама собою перешла и на дроби, и вотъ у халдеевъ явились шестидесятеричныя дроби, т.-е. со знаменателемъ 60, $3600=60 \cdot 60$, $216000=60 \cdot 60 \cdot 60$. Эти дроби примѣнены были въ астрономіи къ дѣленію времени, такъ что часъ сталъ дѣлиться на 60 равныхъ частей (минуть), минута на 60 секундъ, секунда на 60 терцій и т. д. Всѣ простыя дроби халдеями обыкновенно приводились въ шестидесятыя доли и даже, напр., $\frac{2}{3}$ они выражали не иначе, какъ черезъ $\frac{40}{60}$.

Отъ халдеевъ шестидесятеричныя доли перешли къ индусамъ и арабамъ, и также къ грекамъ. Особенно онѣ были разработаны греческими учеными, жившими въ Александріи въ первые вѣка по Р. Х. Знаменитый астрономъ Клавдій Птоломей (во II в. по Р. Х.), система котораго держалась болѣе тысячи лѣтъ и признавалась въ свое время гениальнымъ твореніемъ, писалъ, обыкновенно, шестидесятеричныя дроби безъ знаменателя. Для этого онъ цѣлыя числа подчеркивалъ горизонтальной чертой, шестидесятыя доли отмѣчалъ значкомъ', 3600-ыя значкомъ". 216000-ыя доли значкомъ'" и т. д., смотря по ихъ разряду. И это дѣлалось не только при измѣреніи времени и при градусахъ дуги, но и въ мѣрахъ длины и въ другихъ мѣрахъ. Такъ, напр., Птоломей выражаетъ сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника черезъ— $37 \frac{4'55''}{60}$. при діаметрѣ круга, равномъ 120. Это значитъ, что если діаметръ составляетъ 120, то сторона равняется $37 \frac{4}{60} \frac{55}{3600}$ такихъ же единицъ (по порядку, принятому въ настоя-

шее время въ геометріи, сторону эту можно выразить въ десятичныхъ дробяхъ чрезъ 0,30902, при діаметрѣ, равномъ единицѣ).

Горизонтальная черта, которой подчеркивались цѣлыя числа была замѣнена въ послѣдствіи знакомъ⁰, и самимъ долямъ были присвоены названія: минуты, секунды, терціи и т. д. Что значать эти слова? Минута значить «доля», и долго послѣ Итоломей, болѣе тысячи лѣтъ, всевозможныя доли всегда назывались минутами (minutae). Къ слову минута присоединялось, обыкновенно, слово прима (prima), и выраженіе «minuta prima» обозначало первыя доли, иначе сказать, доли перваго порядка, т.-е. со знаменателемъ 60. Далѣе шли доли со знаменателемъ 3600, онѣ назывались минутами секундами, т.-е. долями втораго порядка, такъ какъ $3600=60 \cdot 60$. Потомъ слѣдовали минуты терціи, доли третьяго порядка, у которыхъ знаменатель 60. 60. 60.

Шестидесятеричныя дроби, какъ мы уже сказали, служили не только для геометріи и астрономіи, но являлись преобладающими во всѣхъ наукахъ и даже въ практической жизни. Онѣ стали терять свое значеніе только тогда, когда начали вводиться десятичныя дроби, приблизительно около XVI в. по Р. Х. Кромѣ того, въ торговыхъ расчетахъ нѣкоторую конкуренцію имъ составляли обыкновенныя дроби, которыя носили названіе «простонародныхъ», а также унціи, изучавшіяся во всѣхъ латинскихъ школахъ.

Десятичныя дроби.

Первые намеки на десятичныя дроби можно прослѣдить у творцовъ арифметики,—индусовъ. Они пользовались ими при извлеченіи квадратныхъ корней, въ тѣхъ случаяхъ, когда корень не извлекается точно; тогда они приписывали столько паръ нулей, сколько желательно имѣть лишнихъ знаковъ въ корнѣ. Индусы писали десятичныя дроби со знаменателями, и имъ не удалось распространить общей десятичной нумераціи также и на дроби. Заслуга въ этомъ отношеніи принадлежитъ арабамъ, и въ частности тѣмъ арабамъ, которые жили въ Испаніи. Между 1130 и 1150 г. по Р. Х. появилось въ Толедо сочиненіе «Практическая арифметика алгоризма», принадлежащее Іоанну Севильскому. У него уже замѣтны явственныя слѣды десятичныхъ дробей, и при томъ съ такимъ характеромъ, какой онѣ носятъ у насъ.

Послѣ Іоанна Севильскаго десятичныя дроби какъ-то стушевываются, тѣмъ болѣе, что тѣ времена были не особенно благопріятны вообще для западно-европейской науки. Но идея не пропала, и ее мы видимъ возрожденной у Кардана (XVI ст.). Между прочимъ, онъ стали примѣняться въ тригонометріи для вычисленія синусовъ. Кромѣ того, стали ими пользоваться при дѣленіи съ остаткомъ, чтобы выразить отвѣтъ точнѣе и дать въ частномъ не только цѣлыя числа, но и рядъ долей съ десятичными знаменателями. Грамматеусъ въ 1523 году советуетъ примѣнять десятичныя дроби къ такому случаю. Пусть требуется сравнить $\frac{5}{8}$ съ $\frac{2}{3}$ и узнать, которая величина больше. Тогда мы къ каждому числителю приписываемъ по нулю, иначе сказать, — раздробляемъ въ десятые доли, и дѣлимъ на знаменателя, получимъ $62\frac{1}{2}$ и $66\frac{2}{3}$, слѣдовательно, вторая величина болѣе первой.

Честъ полного введенія десятичныхъ дробей и ихъ толковаго объясненія приписывается Симону Стевину изъ Брюгге (въ Бельгіи), жившему съ 1548 по 1620 годъ. Заглавіе его сочиненія такое: «La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans romprouz tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes». Въмѣсто запятой, отдѣляющей цѣлыя числа отъ долей, это сочиненіе рекомендуетъ ставить нуликъ, заключенный въ скобки. Точно также и у долей былъ при каждомъ разрядѣ значекъ, напримѣръ, 34, 7605 писалось слѣдующимъ образомъ: 34 ⁽⁰⁾ 7 ⁽¹⁾ 6 ⁽²⁾ 0 ⁽³⁾ 5 ⁽⁴⁾. Съ такимъ обозначеніемъ десятичныя дроби входили и въ дѣйствія. Положимъ, требовалось умножить 0, 0426 на 0, 28; тогда вычисленіе располагалось такъ:

$$\begin{array}{r}
 4^{(2)} 2^{(3)} 6^{(4)} \\
 2^{(1)} 8^{(2)} \\
 \hline
 3 \quad 4 \quad 4 \quad 8 \\
 8 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \\
 \hline
 1^{(2)} 1^{(3)} 9^{(4)} 2^{(5)} 8^{(6)}
 \end{array}$$

Сочиненіе Стевина появилось первоначально въ 1585 году на фламандскомъ нарѣчій, а потомъ уже оно было переведено и на французскій языкъ. Десятые, сотые и т. д. доли назывались долями первыми, вторыми и т. д. (primes, secondes). Стевинъ ясно видѣлъ, что деся-

тичныя дроби были бы особенно полезны въ томъ случаѣ, если бы вездѣ была принята десятичная система мѣръ; поэтому онъ энергично настаивалъ на введеніи десятичной системы мѣръ. Впрочемъ, его сочиненіе не сдѣлалось извѣстнымъ за предѣлами отечества, и, на примѣръ, въ Германіи заслуга введенія десятичныхъ дробей приписывается Бейеру (1563—1625).

Самъ Бейеръ такимъ образомъ излагаетъ путь, которымъ онъ дошелъ до мысли о десятичныхъ дробяхъ: «въ свободное отъ своей службы (Бейеръ былъ врачомъ) время любилъ и иногда заняться астрономіей и математикой; и я обратилъ вниманіе на то, что техники и ремесленники, когда измѣряютъ какую-нибудь длину, то очень рѣдко и лишь въ исключительныхъ случаяхъ выражаютъ ее въ дѣльных числахъ одного наименованія; обыкновенно имъ приходится или брать мелкія мѣры, или обращаться къ дробямъ; точно также астрономы измѣряютъ величины, не только въ градусахъ, но и въ доляхъ градусовъ, т. е. въ минутахъ, секундахъ и т. д.; но мнѣ кажется, что ихъ дѣленіе на 60 частей не такъ удобно, какъ дѣленіе на 10, на 100 частей, потому что въ послѣднемъ случаѣ гораздо легче складывать, вычитать и вообще производить ариметическія дѣйствія; мнѣ кажется, что десятичныя доли, если бы ихъ ввести вмѣсто шестидесятеричныхъ, пригодились бы не только для астрономіи, но и для всякаго рода вычисленій». Для наглядности Бейеръ дѣлитъ прямую линію на 10 равныхъ частей и называетъ каждый отрѣзокъ прямой, т. е. первой долей, или долей перваго порядка; и каждая прима дѣлится, въ свою очередь, на 10 равныхъ частей и даетъ 10 секундъ, т. е. долей втораго порядка; изъ секунды получается 10 терцій и т. д. Такимъ образомъ ясно видно, что Бейеръ воспользовался для десятичныхъ дробей тѣми же названіями, какія были въ употребленіи въ шестидесятеричныхъ дробяхъ. Такое же заимствованіе сдѣлалъ онъ и въ записываніи дробей, потому что, на примѣръ, 123, 459872 Бейеръ пишетъ

о	i	ii	iii	iv	v	vi	о	iii	vi
---	---	----	-----	----	---	----	---	-----	----

такъ: 123. 4. 5. 9. 8. 7. 2. или же 123 459872, т. е. приводя доли

о	vi
---	----

въ трехразрядные классы, или же, наконецъ, 123, 459872 — здѣсь отмѣченъ римской цифрой VI только послѣдній разрядъ. По этой системѣ 0,000054 пишется такъ: 54. Для умноженія дается такое пра-

вило: поставь надъ послѣднимъ справа разрядомъ отвѣта такой значекъ, который равнялся бы суммѣ значковъ множимаго и множителя, стоящихъ надъ ними съ праваго края; всѣ остальные разряды произведенія опредѣляются по этому крайнему разряду. Примѣръ: 124. 385

IV

умножить на 643; умноживъ 124385 на 643, получимъ въ отвѣтъ 79979555, и остается только поставить надъ послѣдней цифрой справа значекъ X, потому что $VI + IV = X$. Результатъ можно прочитать такъ: 79979555 десятого порядка (десятыхъ скрупуловъ, по выраженію Бейера). Для дѣленія дается такое правило: сдѣлай такъ, чтобы въ дѣлимомъ было столько же знаковъ, сколько и въ дѣлителѣ, или даже больше; если въ дѣлимомъ мало знаковъ, то припиши столько нулей, сколько тебѣ нужно, и это не измѣнитъ величины дроби. Потомъ произведи дѣленіе, какъ будто бы это были цѣлыя числа, и у послѣдняго разряда отвѣта поставь справа такой значекъ, который бы равнялся разности значковъ дѣлимаго и дѣлителя. Если при дѣленіи получится остатокъ, и если надо частное найти точнѣе, то можно приписывать къ дѣлимому нуль за нулемъ, сколько угодно разъ, и въ результатѣ получатся разряды, которыхъ номеръ постепенно понижается на единицу. Въ концѣ своей брошюры Бейеръ говоритъ подробно о томъ, какъ изъ десятичныхъ дробей можно получить шестидесятеричныя, и наоборотъ; также о томъ, какъ примѣнять десятичныя дроби къ рѣшенію задачъ.

Скоро и англійскій авторъ I. Неппиръ (Nepper) слѣшитъ подѣлиться съ своими читателями свѣдѣніями о новыхъ дробяхъ. Въ его книжкѣ (1626 годъ) дробь пишется такъ: $28^{\circ} 6' 7'' 5'''$ и читается такъ: 28 цѣлыхъ 6 примъ 7 секундъ 5 терцій. Кромѣ того, разряды иногда у него раздѣляются точками; $27^{\circ} : 0' : 5''$ и т. п. Сложеніе и вычитаніе идетъ у него обыкновеннымъ порядкомъ, такъ же, какъ и у насъ; вотъ примѣръ сложенія:

$$\begin{array}{r} 2^{\circ} 6' 7'' 5''' \\ 27 \quad 0 \quad 5 \\ 0 \quad 7 \quad 3 \\ \hline 56 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

При умноженіи не считается необходимымъ, чтобы цифры одинаковыхъ разрядовъ стояли другъ подъ другомъ; надо умножать такъ, какъ будто бы это были все цѣлыя числа, и потомъ слѣдуетъ отсчитывать съ правой стороны столько разрядовъ, сколько ихъ вмѣстѣ въ обоихъ произвѣдителяхъ; это будутъ скрупулы — десятичныя доли. Примѣры:

456 7'	4° 0' 6"
58 5"	0 0 3"
2283 5	1 2 1 8
36536	0 0 0
22835	0 0 0
26716' 9" 5'''	0, 1 2 1 8iv

Въ первомъ примѣрѣ множимое раздроблено въ десятичныя доли, множитель въ сотыя, произведеніе поэтому содержитъ 2671 цѣлую единицу, 6 десятихъ, 9 сотыхъ и 5 тысячныхъ. Во второмъ примѣрѣ мы видимъ запятую между цѣлыми и десятичными. Введеніе ея приписывается извѣстному астроному Кеплеру (1571—1630).

Правило дѣленія слѣдующее: дѣлить надо, какъ цѣлыя числа, и кромѣ того надо вычесть изъ значка дѣлимаго значекъ дѣлителя, тогда остатокъ опредѣлитъ собой значекъ частнаго. Примѣръ, раздѣлить 5' 7" на 8° 6' 5" 6'''. Рѣшеніе:

	iv
57000 (6" 5''' 8	
8656	
51936	
50640	
43280	
73600	
69248	
4352	

Въ ариметикѣ Беклера (1661) десятичныя дроби примѣняются только къ мѣрамъ длины, поверхности и объема; поэтому имъ дается названіе геометрическихъ долей. Цѣлыя отдѣляются отъ долей запятой или черточкой; кромѣ того, употребляются еще отмѣтки: для

сажени 0, для фута 1, для дюйма 2 и для линии 3; у послѣдней доли ставится значекъ, который опредѣляетъ ея разрядъ, и отдѣляется этотъ значекъ скобкой. Примѣръ: 123, 6543 (4; это значитъ 123 сажени, 6 футовъ, 5 дюймовъ, 4 линии и 3 точки. Какъ видно, Беклеръ проектируетъ ввести десятичную зависимость между мѣрами, т.-е. считать въ сажени 10 футовъ, въ футѣ 10 дюймовъ и т. д. Сочиненіе англичанина Вингата (1668) еще болѣе приблизило теорію десятичныхъ дробей къ тому виду, какой она имѣетъ сейчасъ. Онъ примѣняетъ дроби къ тригонометріи, къ вычисленію сложныхъ процентовъ и къ дѣйствіямъ съ именованными числами. Онъ хорошо видитъ всю громадную пользу, которая получилась бы для науки, если бы всѣ мѣры были приведены къ десятичной системѣ, иначе сказать, всякая мѣра содержала бы въ себѣ ровно 10 слѣдующихъ низшихъ. Разряды десятичныхъ дробей идутъ, по мнѣнію Вингата, такъ же безпредѣльно, какъ и разряды цѣлыхъ чиселъ, такъ что за десятиными долями, сотыми, тысячными идутъ десятитысячныя, сотытысячныя, миллионныя и т. д. до безконечности. Знаменатели десятичной дроби вполне возможно не писать, если только условиться отдѣлять цѣлое число отъ десятихъ долей точкой или запятой. Вингатъ пишетъ по-нашему 285,82 или 285. 82, но у него вмѣсто 0,5 встрѣчается .5 и вмѣсто 0,25 пишется .25, слѣд., цѣлыхъ онъ въ этомъ случаѣ не пишетъ. Три первыхъ дѣйствія онъ проходитъ совершенно аналогично съ нами, а для дѣленія у него взять такой порядокъ: къ дѣлимому можно приписать сколько угодно нулей и потомъ произвести дѣйствіе такъ, какъ если бы это были цѣлыя числа; чтобы опредѣлить значеніе первой цифры частнаго, по которой уже можно рассчитать и всѣ остальные разряды, стоитъ только подписать дѣлителя подъ тѣми же разрядами дѣлимаго, которые были отчеркнуты для перваго дѣленія; подъ какимъ разрядомъ дѣлимаго находятся единицы дѣлителя, таковъ и будетъ высшій разрядъ частнаго. Примѣръ: 2.34:52,125. Дѣлимъ 23400000 на 52125 и получаемъ 448. Теперь подписываемъ 52,125 подъ 2,34 такъ, чтобы дѣлитель стоялъ подъ тѣмъ числомъ, которое на него дѣлилось въ первый разъ, именно

$$\begin{array}{r} 2,34000 \\ 52,125 \end{array}$$

и такъ какъ единицы дѣлителя оказались подъ сотыми долями дѣлимаго, то первая цифра частнаго 448, т.-е. 4, выражаетъ собой сотыя доли и, слѣд.

результатъ дѣйствія долженъ быть такой: 0,0448. Иногда нужно бываетъ при этомъ способѣ приписать съ лѣвой стороны дѣлимаго нѣсколько нулей, потому что иначе дѣлитель не можетъ помѣститься подъ дѣлимымъ. Примѣръ— $0,0758 : 0,000064$, тогда для удобства мы напишемъ такъ; 0000,0758 и выведемъ изъ этого, что при дѣленіи на 0,000064

высшій разрядъ частнаго составитъ тысячи, такъ какъ единицы дѣлителя оказались подъ тысячами дѣлимаго. И действительно, если произвести вычисленіе, то получится въ отвѣтъ 1184,375.

Если сопоставить всѣ способы, какими писались десятичныя дроби въ математ. работахъ XVIII вѣка, то получится всего пять видоиз-

мненій, и если по-нашему пишется 0, 784, то у Бейера 784, у Непцира 07'8"4"', у Вингата .784, и Беклера 784 (3 и у Валиса 0×784 .

Мы рассмотрѣли до сихъ поръ, кѣмъ и какъ было положено начало десятичнымъ дробямъ, и какіе успѣхи онѣ сдѣлали въ XVII столѣтіи. Въ слѣдующемъ вѣкѣ, въ XVIII-мъ, шестидесятеричныя дроби мало по малу исчезаютъ, и ихъ мѣсто занимаютъ десятичныя дроби. Напр., въ ариметикѣ нѣмецкаго педагога Цариціуса, въ первомъ изданіи, которое вышло въ 1706 году, разсматриваются дроби шестидесятеричныя, но во второмъ изданіи этой же ариметики онѣ уже замѣнены десятичными. Впрочемъ Цариціусъ, подобно Беклеру, примѣняетъ десятичныя дроби только къ мѣрамъ длины. Самое трудное изъ дѣйствій — дѣленіе онъ производитъ по такому правилу: надо дѣлить, какъ цѣлыя числа, а чтобы узнать номеръ разряда частнаго, надо изъ номера дѣлимаго вычесть номеръ дѣлителя Вотъ примѣръ. $4269342 (5 : 321 (2$ (согласно нашему обозначенію это было бы $42,69342 : 3,21$).

$$\begin{array}{r} 19 \\ 1056 \quad (5 \\ 4269342 \quad (13'300 (3 \\ 3211111 \quad (2 \\ 32222 \\ 333 \end{array}$$

При такомъ приѣмѣ получается въ отвѣтъ двѣ дроби: десятичная 3 и обыкновенная $\frac{42}{321}$, такъ какъ въ остаткѣ получилось 42.

Чтобы частное состояло только изъ одной десятичной дроби, Париціусъ совѣтуетъ приписывать къ дѣлимому постепенно нули, до тѣхъ поръ, пока, наконецъ, дѣленіе не выйдетъ безъ остатка. Если же оно безъ остатка никакъ не выходитъ, то Париціусъ рекомендуетъ совсѣмъ бросить небольшой остатокъ. по латинской пословицѣ «*minima non curat praetor*», т.-е. «о пустякахъ не стоитъ толковать».

Періодическія дроби принадлежатъ уже 19-му вѣку.

Непрерывныя дроби.

Еще у египтянъ встрѣчаемъ мы дроби, у которыхъ числитель не цѣлое число; онъ самъ представляетъ изъ себя дробь, напр. $\frac{2^{1/3}}{8}$, это значитъ 2 восьмушки и еще сверхъ того треть восьмушки. Также и у римлянъ нерѣдко можно было встрѣтить $\frac{1^{1/2}}{12}$ унціи, т.-е. 1 двѣнадцатую и еще $\frac{1}{2}$ двѣнадцатой, т.-е. всего $\frac{3}{24}$. Такимъ образомъ и въ древнемъ мірѣ идея непрерывныхъ дробей была ясна и доступна: дроби эти основаны на томъ, что числитель можетъ быть не только цѣлое число, но и смѣшанное.

Греческій математикъ Архимедъ примѣнялъ непрерывныя дроби къ извлеченію квадратныхъ корней и выражалъ этими дробями приближенныя величины корней. Арабскій ученый Алькальпади (въ XV в. по Р. Х.) даетъ нѣкоторые намеки на восходящія непрерывныя дроби; онъ примѣняетъ ихъ къ дѣленію съ остаткомъ и обозначаетъ ими дробное частное. Напр., требуется раздѣлить 253 на 280, и такъ какъ 280 разлагается на производителей 5, 7 и 8, то мы сперва дѣлимъ 253 на 8, будетъ $31\frac{5}{8}$, потомъ полученное дѣлимъ на 7, будетъ $4\frac{3^{5/8}}{7}$ и, наконецъ, дѣлимъ на 5, будетъ $4\frac{3^{5/8}}{7}$, а это, обычно

венно, представляется такъ: $4 + \frac{3}{5} + \frac{5}{7}$ и составляетъ восходящую непрерывную дробь. Нисходящей же дробью была бы такая.

$\frac{4}{5} + \frac{3}{7} + \frac{5}{8}$ или, если написать ее яснѣе. то $\frac{4}{5} + \frac{3}{7} + \frac{5}{8}$; вычислить ее можно такъ: $7 + \frac{5}{8} = \frac{61}{8}$, $3: \frac{61}{8} = \frac{24}{61}$, $5 \cdot \frac{24}{61} = \frac{329}{61}$

4: $\frac{329}{61} = \frac{244}{329}$

Лордъ Брункеръ, англичанинъ, представилъ (въ 1655 г.) въ видѣ непрерывной дроби величину $\frac{\pi}{4} = 0,78539316...$ (π показываетъ отношеніе длины окружности къ длинѣ ея діаметра). Гюйгенсъ въ 1682 году далъ подробное объясненіе того, какъ съ помощью непрерывныхъ дробей можно приводить къ легкимъ числамъ трудныя несократимыя дроби. Полную теорію непрерывныхъ дробей далъ Леонардъ Эйлеръ, нѣмецкій ученый 18 в.

Пропорціи, прогрессіи и извлеченіе корней.

Не только въ одной ариметикѣ, но и почти во всѣхъ другихъ наукахъ идетъ постоянная разработка вопроса, что должно служить ихъ содержаніемъ, и изъ чего должны слагаться ихъ матеріалъ. Въ зависимости отъ способовъ изслѣдованія и отъ приѣмовъ обученія содержаніе учебнаго предмета то увеличивается, то уменьшается, то замѣняется другимъ. Ариметика не мало за свою многовѣковую жизнь потеряла измѣненій. Началась она съ вычисленій надъ цѣлыми числами, потомъ къ ней присоединились дроби и именованныя числа, затѣмъ рядъ другихъ отдѣловъ и среди нихъ пропорціи, прогрессіи и извлеченіе корней. Поговоримъ о нихъ въ отдѣльности.

Пропорціи первоначально разрабатывались въ геометріи и занимали въ ней видное мѣсто, онѣ примѣнялись къ подобію фигуръ, и такъ какъ геометрія составляла любимый предметъ греческихъ математиковъ, то естественно вышло, что разработка пропорцій является заслугой греческихъ ученыхъ. Знаменитѣйшій геометръ Эвклидъ (III ст.

до Р. Х.), система котораго вдохновляла всѣхъ позднѣйшихъ геометровъ, и европейскихъ и азіатскихъ, и труды котораго считаются классическими и незамѣнными по настоящее время, далъ среди другихъ искусно разработанныхъ отдѣловъ отдѣлъ о пропорціяхъ. Вліяніе Эвклида на послѣдующія поколѣнія было громадно, и оно даетъ себя чувствовать и теперь, поэтому то направленіе, которое придавъ пропорціямъ Эвклидъ, преобладаетъ и теперь въ большинствѣ учебниковъ. Вкратцѣ по отношенію къ ариметикѣ его можно охарактеризовать тѣмъ, что пропорціямъ отводится къ ариметикѣ болѣе высокое мѣсто, чѣмъ онѣ заслуживаютъ, и на нихъ болѣе обращаютъ вниманія, чѣмъ это должно было бы вызываться содержаніемъ ариметики и ея цѣлями. Всякій, кто проходилъ арифметику въ школѣ и изучалъ пропорціи, вспомнить навѣрное, что этотъ отдѣлъ вызывалъ въ немъ недоумѣніе, казался какимъ-то чуждымъ и даже труднымъ. И дѣйствительно, пропорціи надо бы, по-настоящему, исключить изъ курса элементарной арифметики и ввести въ составъ буквенной, общей арифметики, т.-е. теоріи чиселъ. Пропорціи не учатъ вычисленіямъ, которыя одни только и составляютъ матеріалъ элементарной арифметики, но онѣ излагаютъ нѣкоторыя общія свойства, которыя, въ силу своей общности, подлежатъ арифметикѣ не вычисляющей, а обобщающей, т.-е. теоріи чиселъ и алгебрѣ: тамъ ихъ естественное и законное мѣсто. Надо пожелать, чтобы глава о пропорціяхъ была исключена изъ арифметическаго курса средней школы. Въ геометріи она необходима, тамъ она пусть останется, и пусть геометрическое ученіе о пропорціяхъ послужить началомъ для алгебраическаго, какъ болѣе наглядное должно служить фундаментомъ для отвлеченнаго. Напрасно думаютъ нѣкіе, что пропорціи нужны для задачъ на тройное правило, на правило процентовъ и т. д. Всѣ эти задачи могутъ прекрасно обойтись безъ пропорцій и рѣшаться приведеніемъ къ единицѣ, а еще лучше различными искусственными упрощающими приемами, которые скорѣе ведутъ къ цѣли и могутъ болѣе изощрить мышленіе учениковъ. Практическая жизнь сильно суживаетъ примѣненіе пропорцій, сравнительно съ тѣмъ, какое имъ дается въ арифметикѣ. Напр., бываютъ въ арифметикѣ задачи: «1 арш. стоитъ 2 руб. Сколько стоятъ 1000 аршинъ»? Всякій торговый человѣкъ, даже неучившійся арифметикѣ, знаетъ, что при большихъ партіяхъ товара обязательно

дѣлается уступка, и, слѣд., 1000 арш. обойдутся не въ 2000 руб., а нѣсколько дешевле. Подобныхъ задачъ, гдѣ расхочется ариѳметическая точность съ житейской практикой, можно привести массу, и поэтому не удивительно, если при нѣкоторой неосторожности ученики вмѣсто полезныхъ выводовъ получаютъ отъ пропорцій нѣчто сумбурное и несообразное, доходящее даже до извѣстныхъ курьезовъ, въ родѣ: «одинъ человѣкъ пройдетъ весь путь во столько-то времени, сколько времени потребуется, если пойдутъ вмѣстѣ два человѣка». Мы, конечно, смѣемся надъ несообразительностью маленькаго ученика, но мы несправедливы, когда объясняемъ нелѣпный отвѣтъ только тупостью ученика; нѣтъ, виноваты и мы, потому что заставляемъ изучать въ ариѳметикѣ отдѣлъ чуждый, отвлеченный, не вытекающій изъ предыдущихъ отдѣловъ.

Прогрессія. Прогрессіей, какъ извѣстно называютъ рядъ чиселъ, расположенныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ уменьшенія или увеличенія. Напр., рядъ 2, 4, 6, 8, 10 и т. д. составляетъ прогрессію, потому что входящія въ него числа все увеличиваются на 2; точно также прогрессіей будетъ называться и рядъ такой: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, и такъ далѣе, потому что помѣщенные здѣсь числа постепенно все уменьшаются вдвое. Въ старинныхъ учебникахъ ариѳметики прогрессіи считались необходимой главой и помѣщались въ нихъ всегда, и это было до середины прошлаго XIX-го вѣка. При этомъ, изложеніе часто отличалось неясностью и сбивчивостью, такъ что, напр., прогрессія смѣшивалась съ пропорціей, какъ у Магницкаго на стр. рѣф «Что есть прогрессію: Прогрессію есть пропорцію, или подобенство чиселъ къ числамъ въ примноженіи или во уменьшеніи яковыхъ либо перечневъ и раздѣляются на три вида, иже суть: ариѳметическое, геометрическое и армоническое. О армоническомъ или мусикійскомъ нѣсть треба намъ глаголати. Во ариѳметическомъ прогрессіи въ примножительномъ егда къ первому числу приложиши разнство тогда исполнится другое, егда же ко другому числу тожде разнство приложиши, тогда будетъ третіе число. А во умалительномъ прогрессіи аще вычтеша разнство отъ перваго числа останется другое, а отъ другаго третье и прочая». И т. далѣе.

Въ иныхъ старинныхъ ариѳметикахъ къ прогрессіямъ еще присоединялось вычисленіе рядовъ. Такъ, напр., арабскій математикъ

Алькархи (въ XI в. по Р. Христ.) далъ правило, какъ вычислять сумму кубовъ ряда послѣдовательныхъ чиселъ, начиная съ единицы. Примѣры на правило Алькархи можно привести такіе:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2, \text{ такъ какъ } 1 + 8 + 27 = 6 \times 6$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2, \text{ такъ какъ}$$

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 15 \times 15$$

и т. д.

Въ настоящее время прогрессіи и ряды не встрѣчаются въ учебникахъ ариѳметики и не входятъ въ школьную программу по этому предмету. Теперь признано, что для полнаго объясненія этихъ отдѣловъ нужна общая количественная наука, а не частная, числовая, т.-е. не ариѳметика, а алгебра.

Извлеченіе корней до самаго послѣдняго времени входило въ составъ ариѳметики и содержалось даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ 60-хъ годовъ прошлаго столѣтія, напр., въ задачникѣ, изданномъ департаментомъ народнаго просвѣщенія, имѣлись задачи на квадратные и кубическіе корни. Этотъ отдѣлъ, дѣйствительно, вполнѣ числовой, и процессъ извлеченія корня очень подходилъ бы къ курсу ариѳметики, но только въ томъ бѣда, что трудно провести хорошее объясненіе этого дѣйствія безъ помощи алгебры, поэтому теперь извлеченіе корней признается обыкновенно частью алгебры.

Умѣли извлекать корни индусскіе и арабскіе математики, также и греческіе ученые. Индусамъ и арабамъ были извѣстны начала алгебры и даже въ такой мѣрѣ, что они могли рѣшать квадратныя уравненія. Поэтому вполнѣ слѣдовало ожидать того, что уже въ XII в. по Р. Х. извлеченіе корнейшло почти такъ же, какъ идетъ оно сейчасъ у насъ.

Тройное правило.

Нѣтъ такого достаточно сильнаго выраженія, на которое поспешили бы составители средневѣковыхъ ариѳметикъ, чтобы похвалить тройное правило. «Та строка тройная похвальная и лучшая строка изъ всѣхъ иныхъ строкъ». «Ее философы зовутъ золотою строкою». Въ нѣмецкихъ учебникахъ объ немъ отзывались, какъ о такомъ, которое «выше всѣхъ похвалъ», оно — «ключъ купцовъ». Такъ же и в

французовъ оно слыло подъ именемъ *règle dorée*—золотого правила. Оно противопологалось цѣлой наукѣ—алгебрѣ.

За что же воздаются такіа неумѣренные похвалы отдѣлу, который въ наше время привыкъ занимать уже болѣе скромное мѣсто? Выяснить это очень интересно, и мы позволяемъ себѣ вернуться немного назадъ и дать краткую характеристику цѣлей, которыя преслѣдовала ариѣметика съ древнихъ временъ.

Всякая наука въ первоначальной стадіи своего развитія вызывается практическими потребностями и стремится, въ свою очередь, имъ удовлетворить. Затѣмъ, въ зависимости отъ условій, при которыхъ она развивается, наука иногда довольно скоро, иногда болѣе медленно принимаетъ теоретическую окраску и на изучающихъ ее дѣйствуетъ образовательно, т. е. совершенствуетъ ихъ душевныя способности: умъ, чувство и волю; при медленномъ же ростѣ наука долго остается руководительницей мастерства, сообщаетъ одно только умѣнье, даетъ человѣку механическіе навыки и придаетъ ему черты машинальности. И то и другое направленіе испытала ариѣметика. Съ одной стороны, греческіе ученые видѣли въ ариѣметикѣ болѣе всего образовательный элементъ; они постоянно ставили вопросы «почему?» и «зачѣмъ?», всегда искали основанія и вывода; ученики греческихъ школъ углублялись въ суть науки, думали надъ ней, и потому изученіе дѣйствовало на нихъ образовательно-развивающимъ образомъ. Съ другой стороны, индусы смотрѣли на ариѣметику скорѣе со стороны искусства, они не любили вопроса «почему?», но у нихъ основнымъ вопросомъ всегда былъ: «какъ это сдѣлать?» Направленіе индусовъ перешло къ арабамъ, а оттуда въ средневѣковую Европу. Въ ней оно встрѣтило чрезвычайно радушный пріемъ, и почва для него оказалась вполне благодарной: послѣ великаго переселенія народовъ и при непрерывно продолжающихся войнахъ нечего было и думать о развитіи точной, чистой, отвлеченной науки, а въ пору было ограничиться ея прикладной частью, достаточно было только учить «какъ дѣлать», а не «почему такъ дѣлать». И вотъ практическая окраска осталась за ариѣметикой на долгое время, почти до нашихъ дней, и вмѣстѣ съ тѣмъ изученіе ея было узко-механическимъ: безъ выводовъ, разъясненій, безъ углубленія въ основанія; повсюду въ учебникахъ встрѣчалось «такъ дѣлай», «дѣлать надо такъ», и ученику оставалось только за-

тверждать и применять къ дѣлу; у нашего Магницкаго тоже встречается рядъ характерныхъ выраженій «зри сице», «зри изобрѣтеніе»; положимъ, среди этихъ выраженій у него есть «умствуй и придетъ», но какъ именно умствовать, на то дается очень мало намековъ. Сообразно практическому значенію ариѳметики, въ ней особенно выделялось и цѣнилось все, что можетъ принести непосредственную выгоду, доставить заработокъ. «Хто сію мудрость знаетъ», говорится въ русской ариѳметикѣ XVII вѣка, «можетъ быть у государя въ великой чти и въ жалованьи: по сей мудрости гости по государствамъ торгуютъ и во всякихъ товарѣхъ и торгѣхъ силу знаютъ и во всякихъ вѣсѣхъ и мѣрахъ и въ земномъ верстаніи и въ морскомъ теченіи зѣло искусни, и счетъ изъ всякаго числа переню знаютъ».

Но какая же часть ариѳметики можетъ болѣе дать практическихъ, непосредственно приложимыхъ навыковъ, какъ не рѣшеніе задачъ? Поэтому всѣ старанія средневѣковыхъ авторовъ направлялись къ тому, чтобы собрать какъ можно больше задачъ и при томъ самаго разнообразнаго житейскаго содержанія. Тутъ были задачи и о продажѣ, и о покупкѣ, о векселяхъ и о процентахъ, о смѣшеніи, объ объѣмѣ; простота была ужасная, и разобраться во всей массѣ задачъ не представлялось никакой возможности. Чтобы хоть нѣсколько сгруппировать и ввести нѣкоторую систему и порядокъ, пытались распределить всѣ задачи по отдѣламъ или типамъ. Это мысль, конечно, хорошая, но выполнялась она, обыкновенно, очень неудачно, и задачи распределялись не по способамъ ихъ рѣшенія, какъ бы слѣдовало, а по ихъ содержанію, т. е. по внѣшнему виду; напр., были особый видъ задачъ о собакахъ, догоняющихъ зайца, о деревьяхъ, о дѣвицахъ и т. п.

Рѣшеніе задачъ съ раздѣленіемъ по ихъ содержанію не приносило почти никакой пользы, потому что нисколько не помогало тому, чтобы лучше понимать рѣшеніе. Да и понимать-то, по мнѣнію старинныхъ авторовъ, едва ли нужно было. «Это ничего», — утѣшаетъ бывало наставникъ своихъ питомцевъ: — «что ты ничего не понимаешь, ты и впереди также многого не будешь понимать». Въмѣсто пониманія рекомендовалось не заноситься, а выучивать наизусть все, что задаютъ, и потомъ стараться применять это къ дѣлу, т. е. къ примѣрамъ, и вся сила пониманія сосредоточивалась не на томъ, чтобы уяснить выводъ

правила, а на болѣе скромномъ—на томъ, какъ примѣнить общее правило къ примѣрамъ.

И вотъ тройное правило являлось выдающимся и заслуживающимъ особеннаго вниманія во многихъ отношеніяхъ. Во-первыхъ, кругъ его задачъ довольно обширенъ, во-вторыхъ, самое правило выражается довольно просто и ясно, и въ третьихъ, примѣнить это правило было сравнительно нетрудно. За всѣ эти достоинства ему и дали названіе «золотого», «ключа купцовъ» и т. п.

Тройное правило получило начало у индусовъ, тамъ его задачи рѣшались болѣею частію приведеніемъ къ единицѣ. Арабскій ученый Альхваризми (IX в. по Р. X.) относилъ его къ алгебрѣ. Леонардо Фибонначи, итальянецъ XIII в. по Р. X., посвящаетъ тройному правилу особый отдѣлъ подъ названіемъ: *ad maiorem guisam*, гдѣ даются задачи на вычисленіе стоимости товаровъ. Примѣръ: 100 *rotuli* (пизанскій вѣсъ) стоятъ 40 лиръ, что стоятъ 5 *rotuli*? Условіе записывалось такъ:

$$\begin{array}{r} 40 \text{ } L \qquad 100 \text{ } R \\ \hline \qquad \qquad \qquad 5 \text{ } R \end{array}$$

Правило предписывало рѣшать эту задачу слѣдующимъ порядкомъ: произведеніе 40 на 5 дѣлить на 100.

Особенное вниманіе стали удѣлять тройному правилу съ XVI-го вѣка, т. е. съ тѣхъ поръ, какъ европейская торговля и промышленность сразу двинулись впередъ, благодаря важнымъ изобрѣтеніямъ и открытію новыхъ странъ. Но это не мѣшало разрабатывать эту главу совершенно неудовлетворительно, по крайней мѣрѣ, съ нашей точки зрѣнія. Прежде всего опредѣлялось правило чисто внѣшнимъ образомъ: «задача состоитъ изъ трехъ чиселъ и даетъ собою четвертое число подобно тому, какъ если поставить три угла дома, то этимъ самымъ ужъ опредѣлится 4-й уголъ; второе число надо умножить на 3-е, и что получится, то раздѣлить на 1-е число». Такое опредѣленіе не могло не вести къ сбивчивости, и прежде всего являлся вопросъ: что считать первымъ числомъ, и всякія ли задачи съ тремя данными числами можно рѣшать тройнымъ правиломъ? Разъяснять это недоразумѣніе учебники не считали нужнымъ. Кромѣ того, рѣшались задачи не только съ цѣлыми числами, но и съ дробями, и въ иныхъ ариеме-

тикахъ онѣ располагались такъ непослѣдовательно, что задачи съ дробными числами на тройное правило помѣщались раньше главы о дробяхъ, потому что и все тройное правило шло раньше ариметики дробныхъ чиселъ.

Послѣ тройного правила съ цѣлыми числами и дробями излагалось особое правило «сократительное», въ которомъ разъяснялось, какъ можно сокращать нѣкоторые данныя числа, а потомъ уже шло правило «возвратительное»; это былъ очень сбивчивый отдѣлъ, къ которому принадлежали вопросы съ обратной пропорціональностью, и авторамъ учебниковъ никакъ не удавалось разграничить, какія задачи относятся къ этой группѣ; ученикамъ приходилось полагаться на свою собственную догадку и довольствоваться смекалкой. Въ XV и XVI вв. объясненіе давалось въ родѣ слѣдующаго: «Если мѣра зерна стоитъ $1\frac{1}{2}$ марки, то на одну марку даютъ два пуда хлѣба; сколько пудовъ хлѣба дадутъ на марку, если мѣра зерна стоитъ $1\frac{3}{4}$ марки; рѣшаемъ тройнымъ правиломъ, получится $\frac{2 \cdot 1\frac{3}{4}}{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{3}$; но понятливый смекаетъ, что когда зерно вздорожаетъ, то хлѣба будутъ давать меньше, а не больше, поэтому вопросъ надо перевернуть, будетъ $\frac{2 \cdot 1\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4}} = 1\frac{5}{7}$ ».

Въ подобномъ духѣ трактуетъ и Магницкій (1703 г.) «Правило возвратительное есть, егда потреба бываетъ въ заданіи третій перечень поставляти вмѣсто перваго: потребно же сіе въ гражданскихъ частныхъ случаяхъ, якоже рещи на прикладъ: нѣкій господинъ призвалъ плотника и велѣлъ дворъ строить, давъ ему двадцать человѣкъ работниковъ: и спросилъ, въ koliko дней построить той его дворъ; онъ же отвѣща, въ тридцать дней; а господину надобно въ 5 дней построить весь, и ради того спросилъ паки плотника, колкихъ человѣкъ достоятъ ти имѣти, дабы съ ними ты построилъ дворъ въ 5 дней, и той плотникъ недоумѣя вопрошаетъ ти ариѳметиче: koliko человѣкъ ему достоятъ имѣти, чтобъ построить ему той дворъ въ 5 дней, и аще ты начнеши творити по чину тройного правила просто; то воистину погрѣшиши; но подобаетъ ти не тако: $30—20—5$, но сиче превративъ: $5—20—30$; $30 \times 20 = 600$; $600 : 5 = 120$ ».

За тройнымъ правиломъ шло пятерное, за нимъ семерное. Легко догадаться, что это частные случаи сложнаго тройного правила, именно когда по 5 или 7 даннымъ, находящимся между собою въ пропор-

ціональної залежності, отыскивается 6-е или 8-е, имъ соответствующее число, иначе сказать: пятерное правило требуетъ 2-хъ пропорцій, а семерное трехъ. Пятерное правило объяснялось въ XVIII вѣкѣ такъ: «имъ производится такіа вычисленія, которыхъ нельзя произвести по другому правилу; въ немъ дается 5 чиселъ, и по нимъ отыскивается шестое искомое число; напр., нѣкто пустилъ въ оборотъ сто рублей, и они принесли ему прибыли 7 р., спрашивается, сколько прибыли онъ получилъ бы съ 100 р. на 5 лѣтъ; рѣшается такъ: $100-1-7-1000-5$, перемножь два лѣвыхъ числа, а также перемножь 3 правыхъ числа и послѣднее произведеніе раздѣли на первое, будетъ въ отвѣтъ 350, столько рублей прибыли дастъ 1000 р. въ теченіе 5 лѣтъ.

Простое и сложное тройное правило распредѣлялись обыкновенно въ XVI—XVIII вв. на массу мелкихъ отдѣловъ, которые носили очень замысловатыя названія, въ зависимости отъ содержанія задачъ. Вотъ эти названія по Магницкому: а «тройное торговое правило», т. е. вычисленіе стоимости купленнаго товара; б «тройное торговое о купляхъ и продажахъ», — то же, что и предыдущее, но только посложнѣе; в «тройное торговое въ товарныхъ овощахъ и съ вывѣскою», когда приходится дѣлать вычетъ за посуду и вообще оболочку; г «о прибыли и убыткѣ»; е «статья вопросная въ тройномъ правилѣ», въ ней задачи очень разнообразнаго содержанія, по большей части съ обратной пропорціональностью; ф «статья вопросная со временемъ», гдѣ спрашивается высчитать продолжительность работы, пути и т. п.

Въ началѣ XIX-го вѣка было предложено Базедовымъ еще измѣненіе въ тройномъ правилѣ и опять въ ту же самую сторону машинальнаго, безсознательнаго кавыка. Этотъ нѣмецкій педагогъ задался цѣлью еще болѣе упростить рѣшеніе задачъ на тройное правило тѣмъ, чтобы еще сильнѣе уменьшить разсужденіе при ихъ рѣшеніи и замѣнить его письмомъ готовой формулы. Онъ совѣтуетъ располагать данныя числа 2 столбцами: въ лѣвомъ пишется неизвѣстное количество и всѣ тѣ числа, которыя должны войти въ числителя формулы, а въ правомъ— всѣ множители, составляющіе знаменателя. Примѣръ: для продовольствія 1200 человекъ въ теченіе 4 мѣсяцевъ требуется 2400 центнеровъ муки; на сколько человекъ 4000 центнеровъ выйдеть въ 3 мѣсяца? Пишемъ 2 столбца: ? — 1200

2400—4000

и получаемъ формулу отвѣта $\frac{1200 \cdot 4000 \cdot 4}{2400 \cdot 3}$ Почему числа 1200, 4000 и 4 вошли въ числителя, а 2400 и 3—въ знаменателя? На это можно отвѣтить такимъ правиломъ: въ числителя входитъ число, однородное съ искомымъ, т. е. въ нашемъ случаѣ число 1200; кромѣ того въ него же входятъ всѣ тѣ числа второго условія (4000 . 4), которые прямо пропорціональны искомому; если же они обратно пропорціональны, какъ въ нашемъ примѣрѣ 3, то они замѣняются соответствующими числами 1-го условія (4-мя).

Вотъ все, что мы можемъ сообщить объ историческомъ развитіи тройного правила. Изъ всего сказаннаго можно сдѣлать заключеніе, которое годится для нашего времени. Средневѣковая ариметика, съ ея стремленіемъ давать только правила и пропускать выводы, съ ея механическимъ рѣшеніемъ вопросовъ, имѣли слишкомъ большое вліяніе на всю послѣдующую школьную жизнь, и настолько большое, что слѣды его проявляются на каждомъ шагѣ и въ наше время. Какъ бы мы ни старались отряхнуться отъ традицій, освободиться отъ привычки, но снѣ слишкомъ тѣсно насъ охватили и слишкомъ крѣпко къ намъ приклеились, чтобы ихъ можно было отбросить безъ остатка. Наша школа все еще повинна въ механическомъ заучиваніи ариметики, безъ достаточнаго участія сознательности. Тройное правило служить хорошимъ доказательствомъ этого. Нерѣдко забываетъ наша средняя и низшая школа, что она призвана давать общее образованіе, а не готовить бухгалтеровъ, конторщиковъ, счетчиковъ и т. п. Между тѣмъ ремесленные приемы итальянцевъ и нѣмцевъ, стремившихся не развить чело-вѣка, а сдѣлать изъ него счетную машину, примѣняются нерѣдко и теперь. Къ чему всѣ эти правила: тройное, смѣшенія и т. д.? Какой цѣли они должны удовлетворять? Они должны являться выводомъ изъ рѣшенныхъ задачъ, а не предшествовать рѣшенію задачъ; вредно рѣшать задачи по предварительно усвоенному правилу, но надо стараться доходить до отвѣта свободнымъ личнымъ соображеніемъ. Однимъ словомъ, правило не надо почитать въ видѣ рецепта, который достаточно запомнить, чтобы по нему готовить разныя мудренныя рѣшенія, но имъ слѣдуетъ дорожить только какъ выводомъ, къ которому приходитъ ученикъ; если ученикъ не можетъ сдѣлать этого вывода, то это значитъ, что задачъ взято мало, или онѣ расположены не систематично,

и эту ошибку надо поправить болѣе систематическимъ расположеніемъ задачъ; если ученикъ дѣлаетъ не такой полный и обстоятельный выводъ, какой хотѣлось бы учителю, то лучше удовольствоваться имъ, чѣмъ заставлять разучивать правило, навазанное учебникомъ: оно скоро забудется и не окажетъ развивающаго дѣйствія, такъ какъ необходимымъ качествомъ математическаго вывода должна быть самостоятельность, а необходимымъ условіемъ сознательности должно быть тѣсное связываніе всѣхъ частей курса, почему и не можетъ имѣть мѣста механическое вкладываніе въ голову отдѣльных кусковъ, усвояемыхъ памятью.

Правило пропорціональнаго дѣленія.

Пропорціональное дѣленіе съ давнихъ временъ прилагалось тогда, когда требовалось раздѣлить завѣщанный капиталъ между наслѣдниками. Поэтому въ сборникахъ, обыкновенно, помѣщалось нѣсколько задачъ этого рода. Вотъ задача изъ сборника Магницкаго: «Нѣкій человѣкъ имяше жену и три сына и дочь едину; той человѣкъ при смерти своей написа въ завѣтъ своемъ послѣди себе раздѣлити пожитки, женѣ осмую часть всего имѣнія, сыномъ же всякому ихъ вдвое при дочери своей, изъ тѣхъ $\frac{7}{8}$ всего имѣнія, по смерти же его обрѣтется имѣнія на 48000 рублей, и вѣдательно есть, колико кому досталось изъ того его всего имѣнія; придетъ: женѣ 6000 рублей, дѣтямъ мужеску полу 12000 рублей, а дочери 6000 рублей:

48000	первому 2		зри 48000		8	6000 женѣ.
6000	второму 2					
42000	третьему 2	7—42000	2	12000		
			2	12000 сыномъ.		
			2	12000		
всѣмъ дѣтямъ	дщери $\frac{1}{7}$		1	6000 дочери.		

Въ прежнее время авторы учебниковъ давали очень замысловатые вопросы касательно завѣщаній. Напримѣръ, они разсчитывали доли такъ, что сумма ихъ не составляла единицы, и тутъ приходилось много мудрить, прежде чѣмъ придти къ сносному рѣшенію. Дѣйстви-

тельно, если осталось три наслѣдника, и первому отказано $\frac{1}{2}$ имѣнія, второму $\frac{1}{3}$ и послѣднему $\frac{1}{4}$, то какъ же тутъ поступить, вѣдь эти доли образуютъ вмѣстѣ больше, чѣмъ цѣлое наслѣдство, именно $\frac{13}{12}$ наслѣдства; въ такихъ случаяхъ брали, обыкновенно, отношеніе частей и по нимъ дѣлили; въ нашемъ примѣрѣ $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 4 : 3$, слѣдовательно, старшему сыну надо дать $\frac{6}{13}$, второму $\frac{4}{13}$ и третьему $\frac{3}{13}$ всего наслѣдства.

Любопытную задачу въ этомъ родѣ далъ знаменитый римскій юристъ Сальвіанъ Юліанъ, жившій при императорахъ Адріанѣ и Антонинѣ Піѣ (во II вѣкѣ по Р. Х.) «Нѣкто, умирая, оставилъ беременную жену и завѣщалъ: если у меня родится сынъ, то пусть ему дано будетъ $\frac{2}{3}$ имѣнія, а женѣ остальная $\frac{1}{3}$, если же родится дочь, то ей $\frac{1}{3}$, а женѣ остальныя $\frac{2}{3}$; родилась двойня, — сынъ и дочь, какъ же теперь раздѣлить имѣніе?» Сальвинъ предложилъ сыну дать 4 части, женѣ 2 и дочери 1. Задача считалась очень интересной и даже вошла въ пандекты, византійскій сборникъ законовъ. Между прочимъ, Алькуинъ, придворный математикъ Карла Великаго (въ VIII вѣкѣ по Р. Х.), думалъ надъ этой же задачей, но она изложена у него съ другими числами. По Алькуину, сыну завѣщено $\frac{3}{4}$ и вдовѣ $\frac{1}{4}$, дочери $\frac{7}{12}$ и вдовѣ $\frac{5}{12}$. Къ задачѣ приложено переписчикомъ рѣшеніе, съ которымъ согласиться нелегко: чтобы удовлетворить сына и мать, надо 12 долей, а еще дочь и мать 24 доли; по 1-му условію сынъ получаетъ 9 долей, мать 3, по второму — мать 5 и дочь 7, всего приходится матери $\frac{3+5}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, сыну $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, дочери $\frac{7}{24}$.

Все задачи на завѣщанія рѣшались тройнымъ правиломъ и относились къ той группѣ, которая въ старинныхъ русскихъ ариметикахъ озаглавливалась: «статья дѣловая въ тройномъ правилѣ», т. е. статья, гдѣ производится дѣлежъ, то былъ дѣлежъ заработка, награды и т. п. За ней шла «торговая мѣновая въ тройномъ правилѣ», т. е. статья объ обмѣнѣ, которая также приводилась къ тройному правилу. Потомъ «статья торговая складная и дѣлительная», гдѣ прибыль дѣлилась соотвѣтственно вложенному капиталу. Затѣмъ «статья торговая складная съ прикащиками и съ людьми ихъ», въ ней нужно было выдѣлить кромѣ прибыли еще жалованіе прикащикамъ. И, наконецъ, шла «торговая складная со времени»: здѣсь принимался во вниманіе не только

капиталь, вложенный каждым компаньономъ въ предпріятіе, но и время оборота.

Задачи на пропорціональное дѣленіе рѣшались, обыкновенно, тройнымъ правиломъ, при этомъ не оставалось мѣста ни сокращеніямъ, ни упрощеніямъ и не давалось простора личной сообразительности ученика. Обыкновенно, сперва помѣщалось условіе вопроса, потомъ тутъ же рѣшеніе, ученикъ все это заучивалъ и въ послѣдствіи старался это прилагать, когда встрѣчать вопросъ, похожій на заученный.

Правило процентовъ.

Взиманіе процентовъ практиковалось еще въ древнія времена, но въ различныхъ государствахъ къ нему относились различно, и вообще это дѣло было совершенно не урегулировано.

У римлянъ допускались только простые проценты, они высчитывались по одному въ мѣсяць и выплачивались по истеченіи каждаго мѣсяца. Брать сложные проценты было у нихъ запрещено закономъ. Также и въ средніе вѣка во многихъ государствахъ сложные проценты запрещались закономъ, и тѣ, кто ихъ бралъ, считались ростовщиками и пользовались презрѣніемъ. Это были, обыкновенно, евреи. Законодатель исходилъ изъ того положенія, что если человѣкъ затрудняется простыми процентами и не можетъ вносить ихъ аккуратно въ срокъ, то безжалостно было бы начислять на него сложные проценты. Въ ариѳметическихъ сборникахъ такіа задачи попадались рѣдко, и въ условіяхъ ихъ говорилось, обыкновенно, про евреевъ. Въ русскомъ обществѣ до 18 ст. начисленіе процентовъ, очевидно, тоже не пользовалось расположеніемъ, по крайней мѣрѣ, у Магницкаго (1703 г.) очень мало задачъ на вычисленіе роста, и самое слово «процентъ» у него не употребляется.

Въ XV—XVI стол., когда въ Западной Европѣ замѣчается особенный подъемъ торговли, всякія коммерческія вычисленія стали пользоваться вниманіемъ и среди нихъ вычисленіе сложныхъ процентовъ, но математикамъ того времени стояло большого труда рѣшать эти вопросы: не было десятичныхъ дроби и логарисмовъ, да кромѣ того, мѣры стоимости были во всякомъ государствѣ свои, и переводить ихъ

изъ одной системы въ другую считалось нелегкой операцией. Итальянскій математикъ Тарталья даетъ 4 способа вычисленія сложныхъ процентовъ: 1) опредѣляетъ наращенный капиталъ въ концѣ перваго года, затѣмъ въ концѣ второго и т. д., отвѣтъ находится при помощи тройного правила. 2) Пользуясь извѣстной алгебраической формулой aq^n , но ея буквально не приводитъ. 3) Приростъ капитала выражаютъ его долей $\frac{p}{100}$ (алгебраически $\frac{p}{100}$) и находятъ эту долю сперва отъ начального капитала, потомъ отъ перваго наращеннаго, затѣмъ отъ второго наращеннаго и т. д.; эту долю прибавляютъ, когда нужно, къ первому капиталу, ко второму и т. д. 4) Берется произвольная сумма, обыкновенно сто рублей, и для нея находится отвѣтъ, т. е. капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами, потомъ конечный отвѣтъ помножаютъ на то число, которое показываетъ, сколько сотенъ въ данномъ первоначальномъ капиталѣ. На этомъ способѣ основано и нынѣшнее пользованіе таблицами сложныхъ процентовъ.

Чтобы избѣжать трудныхъ дробей, нѣмецкій математикъ Рудольфъ (XVI в.) еще до введенія десятичныхъ дробей пользовался десятичными дробями. Его примѣръ такой: во что обратится сумма 375 флориновъ черезъ 10 лѣтъ по 5%? Рѣшеніе:

375 фл. начальн. кап.

18 75

393 / 75 капиталъ по истеченіи 1 го года.

19 68 75

413 / 43 75 по ист. 2-го года.

20 67 18 75

434 / 109 375 по ист. 3-го года.

610 / 835 485 041 540 527 34 375 по ист. 10-го года.

Въ связи съ процентами стоитъ *учетъ векселей*. Правило учета было извѣстно еще римлянамъ. Такъ, напримѣръ, римскій математикъ Секстъ Юлій Африканъ, писавшій свои сочиненія по арифметикѣ и геометріи при императорѣ Александрѣ Северѣ (222—235 г.), разсказывалъ такъ, наз., *interesurium*, т. е. ученіе о интересахъ или процентахъ, по нашему—коммерческій учетъ векселей. Отъ римлянъ онъ перешелъ къ народамъ Западной Европы, а тамъ мы его видимъ въ

XIII вѣкѣ у итальянцевъ, которые первые надумали устраивать коммерческіе банки (первые итальянскіе банки относятся къ 1200 году по Р. Х.). Самый старинный вексель, дошедшій до насъ, помѣченъ 1325 годомъ и писанъ въ Миланѣ, получить по нему въ Луккѣ. Въ XIII и XIV ст. въ Германіи встрѣчались векселя совершенно примитивной формы, но зато исключавшіе возможность всякой поддѣлки: бралась бирка, длинная палочка, и на ней графили такія зарубки, которыя могли бы точно выражать вексельную сумму; затѣмъ эта бирка кололась по длинѣ на 2 палочки, и одна изъ нихъ вручалась должнику, другая—заимодавцу; поддѣлать такой вексель было невозможно, потому что иначе палочки другъ къ другу не подойдутъ. На учетъ векселей смотрѣли въ древніе вѣка очень косо, и дурная слава утвердилась за нимъ потому, что маклера не брезговали большими процентами; довольно обыкновеннымъ размѣромъ было 33%, а если какой маклеръ учитывалъ изъ 20%, то онъ считался милостивымъ.

Коммерческій учетъ называется въ настоящее время иначе учетомъ Пинкарда или Карпцова, по имени составителя и издателя таблицъ этого учета. По этому способу учета заимодавецъ остается въ убыткѣ, если учетный процентъ равенъ тому проценту, по которому брали деньги взаймы. Нашъ математическій учетъ называется иначе учетомъ Гоффмана (около 1731 года). Третій способъ учета предложенъ Лейбницемъ. Въ немъ есть сходство съ математическимъ учетомъ, но проценты на уплачиваемую сумму начисляются сложные. Объяснимъ это алгебраически. Пусть плата будетъ X , валюта A , число процентовъ p , срокъ n лѣтъ; тогда $x \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n = A$, отсюда $X = A :$

$$\left(1 + \frac{p}{100} \right)^n, \text{ следовательно, скидка или учетъ по векселю составляетъ}$$

$$A \left\{ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100} \right)^n} \right\}$$

Постепенное погашеніе государственныхъ долговъ, устройство лоттерей, покупка капитала путемъ періодическихъ взносовъ, различные виды страхованія и другія банковскія и коммерческія операціи требуютъ вычисленій, основанныхъ на правилѣ сложныхъ процентовъ и на теоріи вѣроятностей. Эти вычисленія составляютъ предметъ, такъ

назыв., политической (коммерческой) ариметики. Терминъ «политическая ариметика» былъ въ большомъ ходу во 2-й половинѣ XVIII столѣтія. Въ новѣйшее время этотъ отдѣлъ обработанъ съ большою полнотою вѣнскими профессорами Шпитцеромъ и Габерлемъ. Въ XIX столѣтіи самое понятіе о процентѣ расширилось, благодаря введенію его въ статистику. Теперь уже отброшено старое опредѣленіе процента, какъ прибыли или убытка на сто рублей капитала, и вмѣсто того говорить, что процентъ просто сотая доли количества. Это опредѣленіе принимается, обыкновенно, во всѣхъ новѣйшихъ учебникахъ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о правилѣ, которое у нѣмцевъ носитъ названіе «Terminrechnung» а у насъ озаглавляется «вычисленіе сроковъ платежей». Оно примѣняется тогда, когда нѣсколько капиталовъ, отданныхъ на разные сроки и по разному числу процентовъ, надо замѣнить общимъ капиталомъ, съ тѣмъ, чтобы онъ уплачивался въ общій срокъ. Расчетъ долженъ быть основанъ на томъ, чтобы ни заимодавецъ, ни должникъ не терпѣли убытка. Примѣръ можно взять такой: я обязанъ уплатить 1000 рубл. черезъ 2 года по 5%, 2500 р. черезъ 3 г. по 4% и 3000 р. черезъ 1 годъ по 6%. Когда въ одинъ общій срокъ я могу отдать эти деньги сразу? Уже въ XVI столѣтіи итальянскими учеными было предложено два совершенно вѣрныхъ пути для рѣшенія подобныхъ вопросовъ. Лука де-Бурго разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что должникъ платитъ всѣ деньги въ первый срокъ; тогда онъ платитъ напрасно процентныя деньги съ остальныхъ капиталовъ, которымъ срокъ еще не наступилъ, а именно платитъ за время между 1-мъ срокомъ и остальными; высчитаемъ эту лишнюю сумму процентныхъ денегъ, высчитаемъ также, въ какое время эту сумму принесутъ всѣ капиталы, тогда мы и получимъ средній срокъ. Тарталья и Видманнъ пользуются нѣсколько инымъ приѣмомъ, который, сравнительно съ приѣмомъ Бурго, нѣсколько сокращеннѣе, именно тѣмъ, что вмѣсто прибыли вводятся произведенія капиталовъ на число дней или лѣтъ. Это и есть тотъ самый нормальный приѣмъ, какой употребляется въ настоящее время.

Наконецъ, правило процентовъ, отчасти съ всексельными операціями, примѣняется къ, такъ наз., переводу платежей. Обороты по переводу платежей вошли въ обыкновеніе давно, одновременно съ изобрѣтеніемъ денегъ. Такъ какъ купцамъ различныхъ націй, вѣдшимъ

между собою торговлю, необходимо было однѣ монеты переводить въ другія, то для этого имѣлись мѣняльныя конторы; ихъ всегда можно было встрѣтить на рынкахъ большихъ городовъ. Что касается письменныхъ переводовъ, то они первоначально были введены евреями. Изгнанные въ VII ст. изъ Франціи, евреи перешли въ Ломбардію и внесли туда обыкновеніе пользоваться переводами, а итальянцы очень охотно приняли этотъ порядокъ. Затѣмъ гибеллины, когда ихъ лишили Ломбардіи, перенесли съ собою новый порядокъ въ Амстердамъ, а оттуда онъ распространился уже по всей Европѣ. Около 1315 г. Іоаннъ, герцогъ Лотарингскій, далъ Ганзейцамъ привилегію на производство въ Брабантѣ денежныхъ переводовъ. Въ 1445 г. мы видимъ переводы въ Нюрнбергѣ. Денежные письменные переводы доставляли большое удобство и выгоду, такъ какъ они избавляли отъ лишнихъ трудовъ и издержекъ, и, кромѣ того, при нихъ было меньше риска, что деньги потеряются, къ тому же надо замѣтить, что нерѣдко бывали случаи, когда въ иныхъ государствахъ запрещалось вывозить туземную монету за-границу, подъ страхомъ конфискаціи. Всѣ операціи по переводу находились въ средніе вѣка въ начальной стадіи своего развитія; онѣ ограничивались вычисленіемъ суммъ по курсу, комиссіонныхъ же процентовъ не упоминается, такъ что обыкновеніе отчислять процентъ за переводъ принадлежитъ новѣйшему времени.

Цѣльное правило.

Начало цѣльнаго правила можно прослѣдить у индусовъ, именно, оно содержится въ арифметикѣ индуса Брамэгупты, относящейся къ VII ст. п. Р. X. Въ Германіи оно встрѣчается раньше всѣхъ у Адама Ризе (въ XVI ст.); распространенію его особенно способствовалъ голландецъ Ванъ-Реесъ (1740 г.), по его имени и правило часто называется правиломъ Рееса, другія его названія—*Kettenregel* на нѣмецкомъ языкѣ и *Règle conjointe* на французскомъ.

Прямой цѣлью, для которой и придумано цѣльное правило, является переводъ мѣръ одной системы въ мѣры другой, при посредствѣ мѣръ еще какой-нибудь третьей системы. Возьмемъ такую задачу: сколько флориновъ стоитъ 8 центнеровъ, если въ центнерѣ 100 фунтовъ, въ

фунтъ 32 лота, каждыя 6 лотовъ стоятъ 42 крейцера, 60 крейцеровъ стоятъ одинъ флоринъ? Конечно, эту задачу можно рѣшить простыми дѣленіями и умноженіями; можно ее рѣшить черезъ пропорціи, но изобрѣтатели цѣпного правила не довольствовались этимъ и хотѣли дать такой пріемъ, по которому человѣкъ могъ бы работать, какъ машина, почти не разсуждая и не давая себѣ отчета. По цѣпному правилу задача пишется такъ:

X флор.—8 центн.
 1 центн.—100 фун.
 1 фун.—32 лота.
 6 лот.—42 крейц.
 60 крейц.—1 флоринъ.

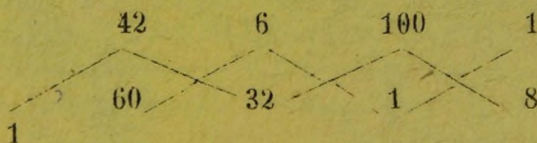
Затѣмъ пишется прямо формула отвѣта, а для этого достаточно перемножить числа праваго ряда и сдѣлать это числителемъ и произведение лѣвыхъ чиселъ сдѣлать знаменателемъ, будетъ тогда

$$X = \frac{8. 100. 32. 42. 1.}{1. 1. 6. 60.}$$

Въ XIII в. и позже въ Италіи условія подобныхъ задачъ располагались иначе, именно не двумя вертикальными столбцами, а двумя горизонтальными строками; получается такое расположеніе:

42 кр. 6 лот. 100 ф. 1 центн.
 1 фл. 60 кр. 32 лот. 1 ф. 8 центн.

Затѣмъ проводилась ломанная линія между множителями числителя той дроби, которая должна выражать отвѣтъ, и такая же линія между множителями знаменателя: слѣдов. долженъ получиться чертежъ.



Онъ представляетъ подобіе цѣпи, и благодаря ему самое правило названо цѣпнымъ.

Совершенно справедливо замѣчаютъ противники Ванъ-Рееса, что

цѣнное правило не только не полезно для начальнаго обученія, но даже вредно. Оно, подобно многимъ другимъ правиламъ, стремится внести неханичность и уничтожить свободное сужденіе при выборѣ способа; оно пригодно, пожалуй, для людей, которымъ часто надо переводить мѣры изъ одной системы въ другую, но оно неумѣстно для общеобразовательной школы, такъ какъ вносить специальный техническій элементъ.

Итальянская практика.

Странное названіе, чуждое нашимъ учебникамъ! Что же это за правило?

До XIX столѣтія оно обязательно было во всѣхъ ариеметикахъ. Какъ показываетъ самое заглавіе, итальянская практика обязана своей разработкой итальянцамъ (главнымъ образомъ Тартальѣ), и касается она приѣмовъ, вызванныхъ практикой и приложимыхъ на практикѣ. Происхожденіе ея слѣдующее. Въ то время, какъ средневѣковая ариеметика старалась изъ всѣхъ силъ напичкать ученика всевозможными готовыми правилами, по которымъ, какъ по шаблону, можно было рѣшать любой вопросъ, не затрудняя себя придумываніемъ способовъ, въ это время, въ противовѣсъ такому направленію, природная человѣческая смѣтливость, естественная пытливость и ничѣмъ неуничтожаемая потребность думать—искали себѣ выхода, находили его въ изобрѣтеніи оригинальныхъ приѣмовъ, которые болѣе соотвѣтствовали характеру каждаго вопроса, облегчали и упрощали его. Такимъ образомъ, итальянская практика—это собраніе искусственныхъ приѣмовъ, отчасти письменныхъ, иногда устныхъ, нерѣдко простонародныхъ, которые здравымъ человѣческимъ разсудкомъ противопоставляются заученнымъ формуламъ сухой науки. Склонность къ такимъ приѣмамъ живетъ во всякомъ народѣ, и итальянцы нѣсколько опередили остальныхъ только потому, что ихъ роль коммерсантовъ и посредниковъ скорѣе дала выходъ природнымъ задаткамъ.

Тарталья различаетъ простую итальянскую практику и искусственную. Простой практикой рѣшаются вопросы не особенно сложные, которые относятся главн. обр. къ простому тройному правилу. Пер-

вый примѣръ: 8 килограммовъ саго стоятъ 3,80 марокъ, что стоятъ 12 килограммовъ саго? Для рѣшенія мы сперва высчитаемъ стоимость 4 килограммовъ, а для этого достаточно 3,80 марокъ раздѣлить пополамъ, потому что 4 килограмма составляютъ половину 8, и слѣд., цѣна ихъ составляетъ половину 3,80 марокъ, затѣмъ складываемъ стоимость 8-ми килогр. и 4-хъ и получаемъ искомую цѣну 12-ти:

8 килогр.	— 3,80 мар.
4 —	— 1,90 мар.
12 килогр.	— 5,70 марокъ.

Приведемъ еще примѣръ, въ которомъ удобнѣе не складывать, а вычитать: 15 арш. матеріи стоятъ 16,80 рублей, что стоятъ 10 аршинъ матеріи?

15 арш.	— 16,80 руб.
5 арш.	— 5,60 руб.
10 арш.	— 11,20 руб.

Искусственная итальянская практика состоитъ въ слѣдующемъ. Если въ задачѣ встрѣчается какой-нибудь сложный множитель, то разбиваютъ его на слагаемыя и эти слагаемыя подбираютъ такъ, чтобы самое большое являлось кратнымъ остальныхъ, или вообще одно слагаемое содержало въ себѣ другое; когда намъ удалось такъ разложить, то мы умножимъ данное число на большее слагаемое, а всѣ остальные произведенія получимъ дѣленіемъ и именно воспользуемся свойствомъ, что во сколько разъ меньше множитель, во столько же разъ меньше и произведеніе. Примѣръ: сколько прибыли получится съ 9000 руб. по 4% за 1 годъ 2 м. 24 д.? Въ этомъ случаѣ вычисляемъ сперва прибыль за 1 годъ, потомъ за $\frac{1}{6}$ года, т.-е. за 2 мѣсяца, для этого дѣлимъ годовую прибыль на 6, потомъ вычисляемъ за 20 дней—они составляютъ $\frac{1}{3}$ двухъ мѣсяцевъ, потомъ за 4 дня, т.-е. за $\frac{1}{5}$ двадцати дней; въ концѣ всѣ полученныя прибыли складываемъ. Тарталья даетъ подобнымъ задачамъ такое расположеніе:

1 г.	— 9000 руб.	— 4% — 360 р.
2 мѣс.	6	— — 60 р. (: 6
20 дней	3	— — 20 р. (: 3
4 дня	5	— — 4 р. (: 5
		444 р.

Еще примѣръ: найти прибыль съ 6000 руб. по 4% за 1 г. 7 м. 9 дней.

1 г.	—	6000 р.	4%	240 р.
4 м.	—	3 «	—	0 «
3 м.	—	4 «	—	60 «
9 дн.	—	10 «	—	6 «

386 рублей.

Изъ этихъ примѣровъ можно понять, чѣмъ отличается итальянская практика отъ тройного правила: въ тройномъ правилѣ идетъ приведеніе къ единицѣ или, точнѣе сказать, къ простой единицѣ, здѣсь же вопросъ приводится къ сложной единицѣ, т. е. къ группѣ единицъ. Это виднѣе на такомъ примѣрѣ: 22 фунта стоятъ 10 руб., сколько стоятъ 33 ф.? По итальянской практикѣ не надо приводить этого вопроса къ 1 фунту, а удобнѣе привести прямо къ кратной части всего количества, къ 11 фун.: получимъ ихъ стоимость=5 руб.; а потомъ остается 5 руб. повторить 3 раза.

Въ послѣднее время задачи на приведеніе къ кратной части и на сложеніе кратныхъ частей стали встрѣчаться въ нѣкоторыхъ задачникахъ, особенно для начальной школы. Это очень хорошо, потому что такіе вопросы развиваютъ сообразительность, даютъ просторъ выбору и обсужденію способовъ и вообще соответствуютъ истинной цѣли ариметики, какъ общеобразовательнаго учебнаго предмета, имѣющаго въ виду развитіе умъ, а не только снабдить ученика навыками счета.

Фальшивое правило.

Существовало и такое правило, и не только существовало, но пользовалось громаднымъ вниманіемъ. По крайней мѣрѣ, у Магницкаго особая 4-я часть его ариметики была посвящена правиламъ «фальшивымъ или гадательнымъ», въ то время, какъ въ 1-й части шли дѣйствія надъ цѣлыми числами, во 2-й надъ дробями, въ 3-й помѣщено тройное правило и въ 5-й и послѣдней о «прогрессіи и радикалахъ (т. е. корняхъ) квадратныхъ и кубическихъ». Что же это за фальшивое правило, и почему у него такое странное названіе? Магницкій какъ бы предвидѣть подобный вопросъ и потому объясняетъ успокоительно:

«Фальшивая правила, сирѣчь не истинная положенія, зане чрезъ два не истинная положенія изобрѣтасть самое оно желаемое истинное число».

Объяснимъ это правило на общеизвѣстной задачѣ о гусяхъ, кстати она и помѣщена въ ариметикѣ Румовскаго (1760 г.), какъ примѣръ фальшиваго правила. Задача такая: «летѣло стадо гусей, на встрѣчу имъ летить одинъ гусь и говорить: здравствуйте, сто гусей, а тѣ ему отвѣчаютъ: нѣтъ, насъ не сто гусей, а если бы насъ было еще столько, сколько есть, да еще полъ-столька, да четверть-столька, да еще ты одинъ гусь съ нами, тогда насъ было бы ровно сто гусей. Сколько ихъ было?» Рѣшеніе такое: положимъ, во-первыхъ, что гусей было хоть двадцать; сочтемъ теперь, что составитъ столько, да полъ-столько, да четверть столько, да еще одинъ, и выйдетъ всего гусей $20+20+10+5+1=56$; а ихъ надо 100, слѣдовательно не достасть 44-хъ. Положимъ теперь, во-вторыхъ, что гусей было 24, и сосчитаемъ опять итогъ, выйдетъ $24+24+12+6+1=67$, не достасть до 100 33-хъ. Итакъ, первое предположеніе бы 20, недостатокъ 44, второе предположеніе 24, недостатокъ 33. Теперь слѣдуетъ перемножить накрестъ 20 24 и изъ большого произведенія вычесть меньшее, т.е.

$$\begin{array}{r} \times \\ 44 \quad 33 \end{array}$$

44 . 24—20 33=1056—660=396 и этотъ остатокъ 396 раздѣлить на разницу между обоими недостатками 44—33, получится $396 : 11=36$, вѣрный отвѣтъ задачи.

Общее правило выражается такъ: надо принять для вопроса задачи какое-нибудь произвольное значеніе, высчитать тотъ результатъ, который получится, когда подставимъ въ задачу это произвольное число, затѣмъ высчитать погрѣшность; точно также берется второе произвольное значеніе и вычисляется второй результатъ и вторая погрѣшность; тогда

$$X = \frac{1 \text{ погр.} \times 2 \text{ знач.} - 1 \text{ знач.} \times 2 \text{ погрѣш.}}{1 \text{ погр.} - 2 \text{ погр.}}$$

Способъ фальшиваго правила былъ извѣстенъ индусамъ и арабамъ еще въ IX в. по Р. Х., при чемъ выводъ его принадлежитъ, по всей вѣроятности, индусамъ. Въ латинскихъ рукописяхъ Парижской бібліотеки говорится, что индусское сочиненіе, относящееся къ этому предмету, было переведено въ XII в. на еврейскій языкъ испанскимъ евреемъ

Авраамомъ бэнъ-Эзра. Съ еврейскаго языка это сочиненіе было переведено впослѣдствіи на латинскій. У арабскихъ писателей фальшивое правило пользовалось широкимъ распространеніемъ, и объ немъ говорить всѣ арабскіе математики.

Альхваризми (въ IX в. по Р. Х.) даетъ слѣдующій примѣръ: «найти такое число, что если отнять отъ него $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ его, то въ остаткѣ будетъ 8»; положимъ, что число будетъ 12, тогда остатокъ вышелъ бы 5, вмѣсто 8, т.-е. на 3 меньше; пусть число 24, тогда остатокъ оказался бы больше настоящаго на 2, теперь въ формулѣ рѣшенія намъ придется сложить 2 произведенія, о которыхъ говорилось выше въ правилѣ, а не вычесть одно изъ другого, и это потому, что въ задачѣ одинъ отвѣтъ больше настоящаго, а другой меньше его ($24 \cdot 3 + 12 \cdot 2 : (3 + 2) = 19\frac{1}{5}$). О фальшивомъ правилѣ много говорить также Леонардо Фибонначи, итальянскій математикъ 13 ст. Въ русскихъ математическихъ рукописяхъ XVII в. это правило извѣстно подъ такимъ именемъ: «статья циферная именуется вымышленная или затѣйчивая. Высокаго остропамятнаго разума и умнаго приложеніе ея же нѣци фальшивою строкою нарекоша, иже ни малымъ чѣмъ погрѣшается».

Сущность фальшиваго правила лучше всего объясняется алгебраически. Возьмемъ одно уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ: $ax + b = 0$. Примемъ x равнымъ произвольному количеству k_1 , подставивъ k_1 вмѣсто x , пусть мы получимъ во второй части вмѣсто нуля n_1 , такъ что $ak_1 + b = n_1$, т.-е. ошибка оказалась во второй части на n_1 . Дадимъ иксу другое произвольное значеніе k_2 , и пусть вторая часть обратится въ n_2 , такъ-что ошибка второй части уравненія будетъ n_2 . Теперь мы получаемъ такую систему:

$$ak_1 + b = n_1$$

$$ak_2 + b = n_2,$$

откуда
$$a = \frac{n_1 - n_2}{k_1 - k_2}, \quad b = \frac{k_1 n_2 - n_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

но такъ какъ $x = -\frac{b}{a}$, то образуется слѣдующее выраженіе для

неизвѣстнаго:
$$x = \frac{n_1 k_2 - k_1 n_2}{n_1 - n_2}$$

Изъ этой формулы выходитъ: $n_1 x - n_2 x = n_1 k_2 - n_2 k_1$, или $n_1 (x - k_2) = n_2 (x - k_1)$, откуда получается пропорція: $n_1 : n_2 = (x - k_1) : (x - k_2)$, т. е. ошибки неизвестныхъ пропорціональны ошибкамъ уравненій. Этой пропорціей и устанавливается связь между фальшивымъ правиломъ и способомъ пропорцій.

Фальшивое правило вводилось во все учебники ариметики до начала 19-го вѣка и считалось необходимой ихъ частью и однимъ изъ самыхъ важныхъ отдѣловъ. Оно встрѣчается, между прочимъ, въ ариметикѣ Безу, переведенной на русскій языкъ В. Загорскимъ въ 1806 г. Въ настоящее время это правило совершенно исключено изъ арифметическаго курса, и его нигдѣ найти нельзя. Двѣ причины содѣйствовали его исключенію. Во-первыхъ, выводъ его можетъ быть сдѣланъ только алгебраически и, слѣдовательно, въ ариметикѣ онъ не можетъ быть объясненъ ученикамъ и требуетъ отъ нихъ прямого заучиванія; во-вторыхъ, никакой учебникъ не разграничивалъ, какія задачи можно рѣшать фальшивымъ правиломъ, и какихъ нельзя имъ рѣшать; а, между тѣмъ, это существенно важно, потому что, если примѣнить правило къ тому, къ чему оно непримѣнимо, то выйдетъ, конечно, одно печальное недоразумѣніе. На самомъ дѣлѣ это правило можетъ имѣть силу только для тѣхъ задачъ, гдѣ вся задача сводится къ умноженіямъ и дѣленіямъ неизвестнаго.

Прочія правила: смѣшенія, дѣвичье и другія.

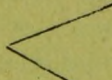

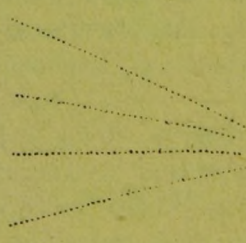
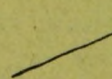
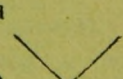
Правило смѣшенія было въ употребленіи, очевидно, очень давно, такъ какъ потребности въ смѣшеніи лѣкарствъ и какихъ-нибудь составовъ, а также въ сплавленіи металловъ имѣли мѣсто еще въ древнемъ мірѣ. Формулы смѣшенія были найдены, вѣроятно, отчасти путемъ опыта, отчасти алгебраическими выкладками; потомъ онѣ были перенесены въ арифметику, запоминались учениками и примѣнялись къ рѣшенію задачъ.

Леонадро Фибонначи въ XIII в. даетъ такіе приемы, которые надо признать совершенно механическими; и вся забота его направлена только къ тому, чтобы расположить данныя числа, какъ слѣдуетъ; задачи у него раздѣляются на 2 вида, тѣхъ самыхъ, какіе сейчасъ и у насъ: въ первомъ видѣ узнается, какого достоинства выйдетъ

смѣсь, если извѣстно количество смѣшиваемыхъ веществъ и ихъ достоинство; въ второмъ видѣ надо опредѣлить, сколько слѣдуетъ взять каждаго вещества, чтобы получить смѣсь такого достоинства, какое требуется. У Леонардо встрѣчаются задачи на смѣшеніе нѣсколькихъ сортовъ, и есть примѣры болѣе отвлеченнаго характера, въ такомъ родѣ: «Стоимость 30, количество 30, стоимость единицы—3, 2, $\frac{1}{2}$; рѣшеніе; I: III=1:4, II: III=1:2, положимъ на I съ III всего 15 единицъ, изъ нихъ 3 на I, 12 на III; на II съ III кладемъ тоже 15 единицъ, изъ которыхъ 5 на II, и 10 на III; всего тогда получится на I=3, на II=5 и на III=22». Эта задача, какъ видно, неопредѣленная.

Въ 15—16 вѣкѣ задачи на смѣшеніе рѣшались нѣсколько иначе, чѣмъ мы ихъ рѣшаемъ; онѣ приводились къ тройному правилу, и для каждаго неизвѣстнаго составлялась отдѣльная строка, отдѣльная пропорція.

Въ русскихъ учебникахъ XVII вѣка правилу смѣшенія соответствовала «статья о нечисти во всякихъ овощахъ и въ товарахъ», въ ней говорилось о смѣшеніи чистаго товара съ нечистымъ и о сплавѣ золота, серебра и мѣди. У Магницкаго статья «третья надесать» въ тройномъ правилѣ, подъ заглавіемъ «о соединеніи вещей», начинается прямо съ задачи, безъ всякаго предисловія и объясненія: «Нѣкій винопродавецъ имаше четыре разныя вины, ихъ же продаше разною цѣною, по 10 алтынъ, по 8 алтынъ, по 6 алтынъ и по 5 алтынъ по 2 денги галенокъ, и хочетъ отъ тѣхъ разноцѣнныхъ винъ бочку наліяти въ 80 галенковъ, чтобы галенокъ былъ цѣною въ 6 алтынъ 4 денги, и вѣдательно есть, колико галенковъ котораго вина вліати достойтъ во ону бочку, придетъ 16, 8, 16, 40. Зри како изобрѣтати:

желаемая цѣна 20		цѣна 30		4		сложи всё, придетъ 20
		цѣна 16		10		
паки твори 20		цѣна 24		2		
		цѣна 18		4		
				20 и глаголи:		

галенковъ въ бочки	4—16	добраго
20—80	10—40	плохого
или паче: множь	2—	8 среднелучшаго
1—4	4—16	среднехудшаго.

По толику галенковъ таковыхъ разныхъ вить въ бочкѣ оной вина его же цѣна по 20 коп. галенковъ».

Понятно, зачѣмъ Магницкій помѣщалъ задачи на смѣшеніе, и зачѣмъ онѣ были въ старинныхъ ариметикахъ: учебникъ считался тогда сборникомъ всевозможныхъ правилъ, пригодныхъ для разныхъ житейскихъ случаевъ; къ нему, какъ къ какому-нибудь справочнику, и обращались за указаніями и искали практическаго отвѣта. Теперь же техника и ремесла, равно какъ и гражданская жизнь, настолько развились и расширились, что нечего и думать сообщить ученику запасъ предписаній на всевозможные житейскіе случаи. Кромѣ того, смѣшеніе применяется теперь не настолько часто, чтобы считать его употребительнымъ дѣйствіемъ и приучать къ нему учениковъ и ученицъ изъ разныхъ классовъ общества и изъ разныхъ состояній. Такимъ образомъ, практическое значеніе правила смѣшенія можно считать въ настоящее время за нуль, особенно если имѣть въ виду задачи второго рода. Но и образовательное, развивающее его значеніе тоже очень не велико, потому что тѣ же задачи второго рода, по самой своей сущности, принадлежать алгебрѣ, съ большимъ удобствомъ и пониманіемъ рѣшаются въ ней, въ ариметикѣ же онѣ являются какимъ-то оторваннымъ кускомъ и потому не могутъ быть проработаны вполне сознательно. Гораздо лучше было бы и для учениковъ и для науки, если бы задачи второго рода на смѣшеніе были отнесены къ алгебрѣ.

Дѣвичье правило. Оригинальное и странное названіе, получившееся оттого, что прежде (впрочемъ, бываетъ это и теперь) задачи располагались и назывались не по способамъ ихъ рѣшенія, а по внѣшнему виду. Къ дѣвичьему правилу относились задачи, въ которыхъ говорилось о дѣвицахъ. Правда, всѣ онѣ въ старыхъ сборникахъ приурочивались къ одному типу, именно къ отдѣлу неопредѣленныхъ задачъ. Типической задачей можетъ служить слѣдующая, заимствованная изъ Адама Ризе, составившаго учебникъ въ XVI ст. «26 персонъ издержали вмѣстѣ 88 марокъ, при чемъ мужчина издерживалъ по 6 ма-

рогъ, женщина по 4 и дѣвушка по 2; сколько было мужчинъ, женщинъ и дѣвушекъ? Адамъ Ризе учить рѣшать такимъ образомъ: пусть, говоритъ онъ, всѣ 26 персонъ были бы дѣвушки, тогда онѣ издержали бы $2 \cdot 26 = 52$ марки, слѣдовательно, остается $88 - 52 = 36$ марокъ. Разложимъ теперь 36 на такія два слагаемыхъ, чтобы одно состояло изъ четверокъ, другое изъ паръ, напримѣръ, 8 четверокъ и +2 пары, или 5 четверокъ +8 паръ, или еще 2 четверки +14 паръ; такое расположеніе удобно тѣмъ, что 32 марки въ первомъ случаѣ мы отнесемъ на долю мужчинъ и 4 марки на долю женщинъ и расчислимъ такъ: мужчина тратитъ больше дѣвушки на 4 марки, ихъ можно принять всего 8 человекъ, такъ какъ $32 : 4 = 8$; женщина тратитъ больше дѣвушки на 2 марки, и женщинъ можно полагать 2, потому что $4 : 2 = 2$; слѣдовательно, получается въ отвѣтъ 8 мужчинъ, которые заплатятъ вмѣстѣ 48 марокъ, 2 женщины—8 марокъ и 16 дѣвушекъ 32 марки, всего 88 марокъ. Другой рядъ отвѣтовъ можно бы получить, съ помощью этого же способа, такой: 5 мужч., 8 женщ. и 13 дѣвушекъ; и много другихъ рѣшеній, такъ какъ эта задача неопредѣленная.

Первая неопредѣленная задача на латинскомъ языкѣ изъ тѣхъ, которыя дошли до насъ, содержится въ сборникѣ Алькуина (въ VIII ст. по Р. Х.) и выражается такъ: «100 шеффелей раздѣлить между мужчинами, женщинами и дѣтьми и дать при этомъ мужчинамъ по 3 шеффеля, женщинамъ по 2 и ребенку $\frac{1}{3}$ шефф.» Рѣшеніемъ этой задачи могло бы быть, напр., 24, 40 и 36; у Алькуина дано 11, 15, 74.

Кромѣ названія «дѣвичье», это правило имѣло иногда титулъ «слѣплого» правила и опять по той же самой причинѣ, именно, что въ неопредѣленныхъ задачахъ этого рода упоминалось о слѣпцахъ. Кстати скажемъ, что были и другія курьезныя правила, въ родѣ правила «крокодиловъ», правила «роговъ» и т. п., и назывались они по той своей особенноти, что въ задачахъ, которыя являлись характеристичными, упоминалось про крокодиловъ, рога и т. д.

Многое множество тѣхъ задачъ, которыми наполняются современные намъ сборники, идутъ изъ глубокой древности, пережили многія тысячелѣтія и терпѣливо переписываются однимъ составителемъ изъ другого.

Напр., извѣстная задача о бассейнахъ, которые наполняются тру-

бами, и изъ которыхъ вода выливается, пользовалась вниманіемъ уже во времена Герона Александрійскаго (во 2 в. до Р. Х.). Метродоръ, жившій при Константинѣ Великомъ, даетъ задачу съ 4 трубами, изъ которыхъ 1-я можетъ наполнить бассейнъ въ день, 2-я—въ 1, 3-я—въ 3 и 4-я—въ 4 дня. Эту же задачу мы видимъ и у индусовъ, во времена математика Ариабатты, въ 5 в. по Р. Х. Она же встрѣчается въ русскихъ старинныхъ ариеметикахъ, и она же помѣщается во всѣхъ новѣйшихъ сборникахъ. Точно также задача о собакахъ, догоняющей зайца, имѣется уже въ сборникѣ Алькуина (въ 8 ст. по Р. Х.). Заяцъ впереди собаки на 150 футовъ, и онъ пробѣгаетъ 7 футовъ, въ то время, какъ собака 9; для рѣшенія предлагается 150 раздѣлить пополамъ.

Рѣшеніе ариеметическихъ задачъ всегда было несвободно отъ разныхъ недочетовъ, которые имѣютъ мѣсто и въ наше время и объясняются исторически. Во-первыхъ, даются ученикамъ иногда такіа задачи, которыя пережили самихъ себя и утѣрили смыслъ, потому что времена измѣнились; притѣромъ можетъ служить задача о курьерахъ; теперь уже вездѣ телеграфы, телефоны, сообщенія по желѣзнымъ дорогамъ, и поэтому нѣтъ никакой надобности посылать конныхъ курьеровъ, это было 50—100 лѣтъ тому назадъ, а сейчасъ это анахронизмъ. Во-вторыхъ, рѣшеніе задачъ никакъ не можетъ освободиться отъ того элемента механичности, который сжился съ нимъ въ теченіе многихъ сотенъ лѣтъ. Прежде всякая школа была главнымъ образомъ школой спеціальной и имѣла въ виду сообщить ученику навыки и умѣнья, пригодные ему для извѣстной отрасли жизненной дѣятельности. Теперь, наоборотъ, школа проникла въ массу народа, сдѣлалась общедоступной и должна быть поэтому общеобразовательной, развивающей душевныя силы дѣтей и воспитывающей.

Съ этой точки зрѣнія не такъ важно количество задачъ, и не такъ важны ихъ отдѣлы, какъ важенъ путь ихъ рѣшенія. Надо, чтобы рѣшеніе задачъ основывалось на соображеніи и развивало сообразительность, а не строило свою опору только на привычки и простомъ заиминаніи.

Все вниманіе составителей сборниковъ должно сосредоточиваться на томъ, чтобы расположить работу строго послѣдовательно и систематично, съ переходомъ отъ простаго къ сложному и отъ нагляднаго къ

отвлеченному, безъ рѣзкихъ скачковъ отъ легкаго къ трудному. Если такъ расположить задачи, то ученикъ самъ, своимъ личнымъ мышлениемъ будетъ доходить до рѣшенія все болѣе и болѣе сложныхъ задачъ. Въ такомъ случаѣ учителю не придется на каждомъ шагѣ наставлять ученика и помогать ему; все дѣло учителя сосредоточится на подборѣ матеріала, расположеннаго цѣлесообразно. Методъ самостоятельнаго выбора—идеальный методъ въ математикѣ, и ему въ ней предстоитъ будущность.

Между тѣмъ, въ послѣдніе годы, отчасти подъ вліяніемъ строгихъ экзаменныхъ требованій, вошло въ моду дѣленіе ариметическихъ задачъ на мелкіе типы. Это вредное увлеченіе. Оно ведетъ къ выучкѣ и встряхиваетъ опять тѣ порядки, которые стали было затягиваться пылью съдой старины *). Не дробленіе на типы, главнымъ образомъ по внѣшнему виду, но строго постепенный подборъ сослужить службу при рѣшеніи задачъ, подводить же подъ типы—дѣло ученика, и тотъ, кто снимаетъ съ него эту работу мысли, тѣмъ самымъ лишаетъ его значительной части той пользы, какая проистекаетъ отъ занятій математикой.

Добавочныя статьи ариметическаго курса.

Если взять десятокъ-другой учебниковъ ариметики, изданныхъ въ послѣдніе годы на русскомъ языкѣ, то увидимъ, что всѣ они очень похожи другъ на друга. Если просмотрѣть учебники на разныхъ языкахъ за послѣднее столѣтіе, то увидимъ разницу въ матеріалѣ и въ его объясненіи. Но эта разница сдѣлается рѣзко-очевидной, если сопоставить учебники древняго времени съ учебниками новаго. О характерѣ объясненій въ старинное время или, вѣрнѣе, объ отсутствіи объясненій мы уже упоминали. Но самое содержаніе ариметики сейчасъ далеко не то, каково оно было прежде. Приведемъ нѣсколько подробностей.

Въ ариметикѣ, составленной Павломъ Цвѣтковымъ (1834 г.), есть отдѣлъ объ извлеченіи квадратныхъ и кубическихъ корней. Этотъ

*) Изобрѣтеніемъ всевозможныхъ типовъ и многочисленныхъ правилъ отличился еще въ средніе вѣка германскій педагогъ Видманъ (въ 15 ст.). Съ него пошли эти порядки.

отдѣлъ исключенъ изъ ариѳметики вообще около середины 19-го вѣка. Корни извлекаются у Цвѣткова изъ отвлеченныхъ чиселъ и изъ именованныхъ. Напр., корень квадратный изъ 4 дней 302 час. 369 мин. квадратныхъ составляетъ 2 дня 3 часа 3 мин.; при этомъ вводится квадратный день, въ которомъ 576 квадр. ч. и кв. часъ въ 3600 кв. минутъ—все это несообразности.

До второго десятилѣтія 19-го в. вставлялись въ ариѳметику логариѳмы, и это начали дѣлать съ самаго ихъ примѣненія къ математикѣ, т.-е. съ 17 ст. У Василя Загорскаго (1806 г.) логариѳмы подробно объяснены, и къ нимъ приложены таблицы; въ этихъ таблицахъ содержатся логариѳмы чиселъ до 10000 съ семью десятичными знаками.

Въ «Начальныхъ основаніяхъ ариѳметики», сочиненныхъ Степаномъ Румовскимъ (1760 г.), помѣщены прогрессіи, которыя мы встречаемъ у всѣхъ его предшественниковъ. У Магницкаго въ его известной «Ариѳметикѣ, сирѣчь наукѣ числительной», которая «съ разныхъ діалектовъ на славенскій языкъ переведена, и во едино собрана, и на двѣ книги раздѣлена», вся вторая книга, т.-е. вторая половина, содержитъ такіе отдѣлы, которые сейчасъ у насъ не признаются ариѳметическими и ни въ какомъ случаѣ не помѣщаются въ учебникахъ ариѳметики. Это, во-первыхъ, ариѳметика алгебраика, по нашему сказать алгебра, съ ея нумераціей и дѣйствіями и съ извлеченіемъ такихъ мудреныхъ корней, что одно названіе ихъ приводитъ въ недоумѣніе: биквадратъ или зензизензусъ—корень 4-ой степени, солидусъ или сурдесолидусъ—5-й степени, квадратокубусъ или зензикубусъ—6-й степени, бисурдесолидусъ или бисолидусъ—7-й степени, триквадратъ или зензизензусъ, отъ зенза—8-й степени, бикубусъ, кубокубусъ, сугубый кубусъ—9-й ст.; квадратъ солида, зенсурдесолидъ—10-й ст. кубосурдесолидъ, терсолидъ—11-й ст., биквадратокубусъ—12-й ст. За этими корнями, которые, впрочемъ, болѣе страшны и обширны своими названіями, чѣмъ процессомъ извлеченія, идетъ ариѳметико-логистика или астрономская «како въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, и въ прочихъ колесъ сѣченіяхъ дѣйство и чинъ ариѳметика содержитъ»—здѣсь просто-напросто показывается, какъ дѣлать вычисленія съ градусами, минутами и секундами. Потомъ идетъ еще приложение, и на этотъ разъ геометрическаго характера «о геометрическихъ черезъ ариѳметику дѣйствуемыхъ», гдѣ рѣшаются примѣры на вычисленія площа-

дей и объемовъ, и даже сообщаются свѣдѣнія изъ тригонометріи. Въ заключеніе идетъ глава «о земномъ размѣреніи и яже къ мореплаванію прилежать», тутъ есть таблицы широтъ и долготъ, описаніе вѣтровъ и т. п. Какое разнообразіе содержанія! Можно сказать, что ариеметика Магницкаго—это цѣлая энциклопедія; въ ней собраны всевозможные случаи, гдѣ только можетъ пригодиться вычисленіе: и изъ хозяйства, и изъ ремеслъ, и изъ гражданской и военной жизни. Сочинитель заботился, чтобы его книга всѣхъ удовлетворила и ни одного вопроса не оставила безъ отвѣта, чтобы она всецѣло соотвѣтствовала требованіямъ практики.

Эта пестрота и этотъ наборъ всевозможнаго матеріала, который складывается въ одну кучу, на всякій случай, авось пригодится гдѣ-нибудь въ жизни и хозяйствѣ, эта пестрота и случайность еще болѣе проскальзываютъ въ старинныхъ сборникахъ XVI—XVII вѣка. Чего-чего только тамъ нѣтъ. Какъ Плюшкинъ тащилъ въ свою грудь всякій ненужный хламъ и рухлядь, и какъ любитель-коллекціонеръ добываетъ и вставляетъ въ свое собраніе всякія мелочи и подробности, такъ и авторы старинныхъ учебниковъ собирали въ ариметику все, что хоть сколько-нибудь подходитъ къ ея практическимъ требованіямъ и можетъ дать отвѣтъ на какой-нибудь числовой вопросъ. О смыслѣ, цѣлесообразности и воспитательномъ дѣйствіи науки не заботились: лишь бы только она годилась для жизни. Доходило дѣло до такихъ курьезовъ и странностей: «Есть убо человекъ, яко же повѣдають, на главѣ имѣя 3 швы и на углы составлены; женская же глава имѣетъ единъ шовъ, кругомъ обходя главу; да по тому знаменію и въ гробѣхъ знаютъ, кая мужеска, кая-ли женска». «Хошь сыскати тварей обновленіе небу и землѣ, морю и звѣздамъ, солнцу и лунѣ, и индикту». Оказывается, небо поновляется въ 80 лѣтъ, а земля въ 40 лѣтъ, море въ 60 лѣтъ.

Въ составъ средневѣковыхъ ариметикъ входили еще, такъ называемыя, математическія развлеченія. Трудно и скучно было тогдашнимъ ученикамъ. Сухое изложеніе, мудреный языкъ, масса научныхъ терминовъ, отсутствіе объясненій *)—все это приводило къ тому, что

*) Оддо, педагогъ 12 в. по Р. Х., очень затрудняется въ объясненіяхъ и оправдываетъ себя тѣмъ, что «все это гораздо легче объяснить устно, чѣмъ письменно».

ученье обращалось въ долбленье, и только болѣе счастливые, т.-е. болѣе сильные, умы могли справляться съ матеріаломъ, перерабатывать и понимать. Вотъ когда появились поговорки: «корень ученья горекъ» и «лучше книги не скажешь». Чтобы хоть нѣсколько оживить учениковъ, утѣшить и ободрить, ихъ назидали, во-первыхъ, увѣщательными стихами, гдѣ воспѣвалась вся сладость подвига и вся цѣнность результатовъ, которыхъ имѣть достигнуть «мудролюбивый» отрокъ.

О любезный ариѳметикъ,
Буди наукъ не отметникъ,
Тщися еще быти усердъ,
Да будешь въ нихъ силенъ и твердъ,
Въ смѣтахъ каинихъ дѣлъ купецкихъ
И во всякихъ иныхъ свѣцкихъ.
Тѣмже въ Бога уповая
И на помощь призывая,
Потрудися въ нихъ охотно,
Аще будетъ и работно.

Во-вторыхъ, давались задачи съ остроумнымъ содержаніемъ и требовавшія особенной изворотливости и догадки. Вотъ задача изъ сборника, приписываемаго Алькуину (въ 8 в. по Р. Х.). Рукопись относится приблизительно къ 1000 г. по Р. Х. «Два человѣка купили на 100 сольдовъ свиней и платили за каждыя пять штукъ по 2 сольда. Свиней они раздѣлили, продали опять каждыя 5 штукъ по 2 сольда и при этомъ получили прибыль. Какъ это могло случиться? А вотъ какъ: на 100 сольдовъ приходится 250 свиней, ихъ они раздѣлили пополамъ, на 2 стада, и изъ перваго стада отдавали по 2 свиньи на 1 сольдъ, а изъ втораго по 3; тогда достаточно выдать по 120 штукъ изъ cadaго стада, такъ какъ придется получить 60 сольдовъ за свиней перваго стада, 40 за свиней втораго, всего 100 сольдовъ; 5-ть же штукъ изъ cadaго стада останется въ прибыли». Требуется разгадать эту загадку.

Въ сборникѣ Алькуина содержится извѣстная загадка о волкѣ, козѣ и капустѣ, которыхъ надо перевезти черезъ рѣку, съ такимъ условіемъ, что въ лодкѣ нельзя помѣщать волка съ козой, козы съ капустой, и

оставлять на берегу тоже нельзя вмѣстѣ, потому что они съѣдятъ; какъ же это устроить?

Лучшій сборникъ задачъ-загадокъ, издалъ Баше-де-Мезириакъ въ 1612 году, заглавіе его такое: *Problemes plaisants et delectables qui se font par les nombres*. Въ немъ помѣщена большая часть тѣхъ задачъ, какія встрѣчаются и сейчасъ въ сборникахъ этого рода, напримѣръ, о задуманныхъ числахъ, о работникѣ, котораго нанимаетъ хозяинъ съ условіемъ платить ему за рабочіе дни и вычитать за прогульные, и т. д.

Въ старинныхъ русскихъ ариметикахъ можно отмѣтить такіа интересные задачи: «I. Пришелъ христіанинъ въ торгъ и принесть лукошко яицъ. И торговцы его спрашивали: много ли у тебя въ томъ лукошкѣ яицъ? И христіанинъ молвилъ имъ такъ: язь, господине, всего не помню на перечень, сколько въ томъ лукошкѣ яицъ. Только язь помню: перекладывалъ язь тѣ яйца изъ лукошка по 2 яйца, ино одно яйцо лишнее осталось на земли; и язь клалъ въ лукошко по 3 яйца, ино одно же яйцо осталось; и язь клалъ по 4 яйца, ино одно же яйцо осталось; и язь клалъ по 5 яицъ, ино одно же яйцо осталось; и язь ихъ клалъ по 6 яицъ, ино одно же яйцо осталось; и язь клалъ по 7 яицъ, ино все посему пришло. Ино, сколько яицъ въ томъ лукошкѣ было, сочти ми? Придоть было 721. II. Левъ съѣлъ овцу однимъ часомъ, а волкъ съѣлъ овцу въ 2 часа, а песь съѣлъ овцу въ 3 часа. Ино, хочешь вѣдати, сколько бы они всѣ три: левъ, волкъ и песь овцу съѣли вмѣстѣ вдругъ и сколько бы они скоро ту овцу съѣли, сочти ми *)? III. О деньгахъ въ кучѣ вѣдати. Аще хочещи въ кучѣ деньги вѣдати, и ты вели перевести по 3 деньги. А что останется отъ 3-хъ—2 или 1, и ты за 1 по 70. Да опять вели перевести по 5, и что останется—4 или 3, или 2, или 1, и ты за 1 клади по 21. Да опять вели перевести по 7, и что останется—6 или 5, или 4, или 3, или 2, или 1, и ты тако же за всякій 1 клади по 15. Да что въ остаткахъ перечни родились, и тѣ перечни сочти вмѣсто, а сколько станеть, и ты изъ того перечню вычитай по 105,

*) Эта задача встрѣчается у Видманна, германскаго педагога XV вѣка; у него она выдѣлена въ особое правило—«правило о лѣвѣ, волкѣ и собакѣ, съѣдающихъ овцу».

и что останется изъ сто пяти или сама сто пять, то столько въ кучѣ и есть».

Немаловажной статьёй среди математическихъ развлеченій были магическіе квадраты. Что такое магическій квадратъ? Это рядъ чиселъ отъ 1 и до какого-нибудь предѣла, размѣщенныхъ по вѣткамъ квадрата такъ, что сумма чиселъ по діагоналямъ и по сторонамъ остается постоянной. Вотъ примѣры, взятые изъ сборника Алькуина (этотъ ученый особенно любилъ магическіе квадраты):

4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15
15	15	15	15

2	7	6	15
9	5	1	15
4	3	8	15
15	15	15	15

5	10	3	18
4	6	8	18
9	2	7	18
18	18	18	18

Они встрѣчаются въ сочиненіяхъ секты «Чистыхъ братьевъ», существовавшей въ X в. по Р. Х. въ г. Аль-Басра. Эта секта приписывала магическимъ квадратамъ особенную таинственную силу. Вѣрили, что они способны измѣнить расположеніе звѣздъ при рожденіи младенца и помочь ему.

Въ концѣ ариеметики Іоанна Севильскаго (1150 года) приведенъ такой магическій квадратъ:

4	—	9	—	2
	↘		↗	
3	—	5	—	7
	↗		↘	
8	—	1	—	6

Объясненія не дано, только помѣщены тѣ же самыя черточки, какія и на этомъ чертежѣ.

Исторія алгебры.

Хотя народы древняго міра не знали нашей алгебры, но это не мѣшало имъ заниматься такими вопросами, которые принадлежать, собственно говоря, алгебрѣ. Еще у египтянъ въ древнѣйшей рукописи-папирусу Ринда рѣшаются уравненія первой степени съ однимъ не-

извѣстнымъ; въ этихъ уравненіяхъ мы встрѣчаемъ и знаки, напр., своеобразный знакъ равенства $///$. Задача помѣщена, между прочимъ, такая: « $\frac{2}{3}$ цѣлаго числа вмѣстѣ съ его $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$ и съ этимъ же цѣлымъ числомъ даютъ 33, найти неизвѣстное»; прежде всего отбираются извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую, коэффициенты при неизвѣстныхъ представляются основными дробями (т. е. съ числителемъ 1) или же выражаются въ одинаковыхъ доляхъ и складываются; величина неизвѣстнаго опредѣляется такъ: въ первомъ случаѣ умножается коэффициентъ на подходящее число, такъ чтобы въ произведеніи получился извѣстный членъ, а во второмъ множить извѣстный членъ на знаменателя коэффициента и полученное дѣлать на числителя.

Греческіе ученые занимались алгеброй въ періодъ времени съ VI ст. до Р. Х. и кончая IV ст. по Р. Х. Они разработали нѣсколько отдѣловъ ея, но ихъ труды идутъ въ иномъ направленіи, чѣмъ какого держится новѣйшая математика, именно они носятъ на себѣ геометрическую окраску.

Прежде всего Пифагоръ (въ VI ст. до Р. Х.) и Платонъ (въ V ст.) рѣшили въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2 + y^2 = z^2$.

$$\text{Пифагоръ далъ такія формулы: } x^2 = \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2, y^2 = a^2, z^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2,$$

гдѣ a равно любому нечетному числу; по Платону $x^2 = \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2$,

$$y^2 = a^2, z^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2, \text{ гдѣ } a \text{ любое четное число.}$$

Діофантъ, жившій въ Александріи въ 4 в. по Р. Х., оказалъ алгебрѣ большія услуги. До него древніе не знали употребленія буквъ при доказательствахъ въ общемъ видѣ. Діофантъ же первый сталъ вводить различныя знаки для неизвѣстныхъ величинъ, главнымъ образомъ греческія буквы; ему обязана своей разработкой глава объ уравненіяхъ, именно объ уравненіяхъ первой степени со многими неизвѣстными и о полныхъ квадратныхъ уравненіяхъ. Вотъ примѣръ изъ Діофанта:

$$x + y = 10, x^2 + y^2 = 68,$$

вѣдѣмъ 1-е уравненіе на 2 и получаемъ $\frac{x+y}{2} = 5,$

теперь положимъ, что $\frac{x-y}{2}=d$, тогда

$$x=5+d, y=5-d$$

$$(5+d)^2+(5-d)^2=68$$

$$50+2d^2=68$$

$$d=3, x=8, y=2.$$

Диофантъ занимался также неопредѣленными уравненіями первой и второй степени, но ему не удалось найти полнаго ихъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ; это сдѣлали уже Эйлеръ, нѣмецкій математикъ 18 в., и французскій математикъ Лагранжъ (1736—1813).

Индусы называли неизвѣстныя величины, которыя мы теперь обозначаемъ черезъ x , y , z и т. д., черной величиной, голубой, желтой, зеленой, красной и обозначали ихъ первыми буквами тѣхъ словъ, которыя выражаютъ эти цвѣта. Индусскіе математики 6—12 в. по Р. Х. знакомы были, правда, съ греческой ариѳметикой и алгеброй, но они далеко опередили грековъ. Они знали ирраціональныя числа, знали, что всякій квадратный корень имѣетъ два значенія: положительное и отрицательное, и дошли до мнимыхъ величинъ. Баскара (въ 12 в.) принялся за кубическія уравненія, и вотъ его примѣръ:

$$\begin{array}{r} x^3+48x=12x^2+72 \\ \text{вычтемъ по} \quad 12x^2+64=12x^2+64 \\ \hline x^3-12x^2+48x-64=8 \\ (x-4)^3=2^3 \\ x-4=2 \\ x=6 \end{array}$$

Вплоть до 18-го вѣка индусскіе математики являлись учителями европейскихъ математиковъ и образцами для нихъ, и лишь Лагранжу и Эйлеру удалось двинуть науку далѣе и превзойти индусовъ.

Арабскіе ученые переняли отъ индусовъ начала алгебры и перенесли въ Европу, гдѣ ею занялись главнымъ образомъ итальянцы. Лука-де-Бурго (въ 15 ст.) перешелъ къ уравненіямъ 4-й степени и рѣшалъ тѣ изъ нихъ, которыя приводятся къ квадратнымъ. Тарталья и Кардано (въ 16 ст.) объяснили рѣшеніе кубическихъ уравненій, привелъ

томъ всякихъ безъ исключенія, а Людовикъ Феррари далъ общую формулу рѣшенія уравненій 4-й степени.

Виѣта (1540—1603) положилъ начало общей ариѣметикѣ тѣмъ, что сталъ обозначать буквами не только искомыя количества, но и данныя; до него же буквами обозначались только тѣ количества, которыя требовалось опредѣлить; по способу Виѣта извѣстныя величины въ уравненіяхъ обозначались согласными буквами латинскаго алфавита, а неизвѣстныя — гласными.

За Виѣтой слѣдовалъ англичанинъ Гарриотъ (1560—1621). Онъ нашелъ, что всякое уравненіе высшихъ степеней является произведеніемъ уравненій низшихъ степеней, что между коэффициентами и корнями уравненія есть опредѣленная зависимость; онъ ввелъ знакъ неравенства и предложилъ писать буквенныхъ множителей рядомъ, безъ всякаго знака; но коэффициенты онъ отдѣляетъ отъ буквы точкой и степени обозначаетъ повтореніемъ количества, т. е. вмѣсто a^3 пишетъ aaa . Французъ Декартъ (1596—1650) положилъ начало аналитической геометріи и ввелъ нынѣшнюю форму цѣлыхъ степеней. Голландецъ Жираръ ввелъ скобки, Исаакъ Ньютонъ (1642—1727) — дробныя степени и биномъ, шотландецъ Непиръ (въ 17 ст.) — логариѣмы съ натуральнымъ или гиперболическимъ основаніемъ $e=2,7182818...$

Вскорѣ послѣ него англійскій профессоръ Бригъ (ум. въ 1630) вычислилъ логариѣмы при основаніи 10. Такимъ образомъ получается 7 дѣйствій общей ариѣметики: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня, логариѣмированіе; иныя присоединяютъ еще восьмое дѣйствіе — нахожденіе числа по логариѣму. Теорія чиселъ, т. е. ученіе о свойствахъ чиселъ, была извѣстна въ нѣкоторой степени еще древнимъ грекамъ. Особенное развитіе она получила въ новѣйшее время.

Источники по исторіи ариѣметики.

Большая часть трудовъ по исторіи ариѣметики принадлежитъ нѣмецкой литературѣ: нѣмецкая ученость особенно занимается этими вопросами. Мы для своей работы воспользовались слѣдующими источниками:

1. *M. Sterner*. Geschichte der Rechenkunst. 1891. Стр. 533. Это самая лучшая книжка въ своемъ родѣ, мы ее порекомендовали бы всякому, кто хочетъ узнать исторію ариѣметики; она очень доступна, обстоятельна и недорога, изложеніе въ ней чисто-литературное.

2. *W. Adam*. Geschichte des Rechnens und des Rechnunterrichts. Zum Gebrauch an gehobenen und höheren Lehranstalten, sowie auch bei der Vorbereitung auf die Mittelschullehrer und Rektoratsprüfung. 1892. стр. 182. Составлена по программѣ, изданной для учителей среднихъ учебныхъ заведеній; какъ видно, въ Германіи требуется отъ учителей не только знать науку, но и обладать свѣдѣніями по ея исторіи. Книжка Адама невелика, конспективна; хотя она и написана простымъ языкомъ, но изложеніе въ ней суховато: много перечисленій и мало обобщеній.

3. *M. Kantor*. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweite Auflage. 1894. Стран. 883+863. Громадная работа по исторіи математики; считается чрезвычайно авторитетнымъ источникомъ, изъ котораго черпаютъ всѣ остальные авторы. Канторъ—общепризнанный спеціалистъ по своему предмету.

Изложеніе у него доступное, хотя, по самому характеру книги, содержитъ много подробностей и тонкихъ изслѣдованій. Цѣна не дешевая—болѣе 25 руб.

4. *H. Hankel*. Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. 1874. Страницъ 410. Рядъ хорошихъ очерковъ по исторіи математики.

5. *G. Friedlein*. Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7 bis 13 Jahrhundert. 1869. Стр. 164. Для своихъ отдѣловъ эта книжка хороша; правда, она написана нѣсколько спеціально, съ цитатами и мелкими подробностями, но въ общемъ она доступна.

6. *P. Treutlein*. Das Rechnen im 16 Jahrhundert. 1877. Стр. 100. Хорошая картина 16-го вѣка, того самого вѣка, когда стали обрисовываться основы нашей ариѳметики.

7. *F. Unger*. Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. 1888. Стр. 240. Работа Унгера неудобна для того, кто желалъ бы начать съ нея знакомство съ исторіей ариѳметики. Унгеръ слишкомъ гоняется за подлинными выписками, даже такими, которые не представляютъ большого интереса, и слишкомъ окрашиваетъ свои очерки въ колоритъ специально нѣмецкой школы. У него много замѣчаній относительно методики, однако и ихъ гораздо интереснѣе читать по Штернеру.

Изъ французскихъ авторовъ мы могли воспользоваться:

8. *G. Libri*. Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle. 1835—1865. Стр. 456+530+444+492. Это довольно старая книжка, и въ ней трудно найти что-нибудь новое, сравнительно съ тѣми пособиями, какія перечислены выше.

На русскомъ языкѣ пользуются извѣстностью труды профессора Московскаго университета В. В. Бобынина, который съ 1883 года читаетъ лекціи по этому предмету. Мы въ особенности обязаны свѣдѣніями слѣдующимъ интереснымъ очеркамъ:

9. *В. В. Бобынинъ*. Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. XVII столѣтіе. 1886 г. Стр. 123.

10. *В. В. Бобынинъ*. Очерки исторіи донаучнаго періода развитія ариѳметики. 1896 г. Стр. 48.

11. *В. В. Бобынинъ*. Очерки исторіи развитія математическихъ наукъ на Западѣ. 1896 г. Стр. 30+129.

Послѣ выхода въ свѣтъ I изданія, авторъ познакомился еще съ такими трудами:

12. *Boyer*. Histoire des mathématiques.

13. *Зутеръ*. Исторія математическихъ наукъ. СПб. 1905. Цѣна 1 р. Пер. съ нѣмецкаго П. Федорова.

1. Гієроглифическія цифри египтянь.

$$I_0 = 1, \quad II_0 = 2, \quad III_0 = 3,$$

$\cap \circ = 10$, $\cap | \circ = 11$, $\cap || \circ = 12$,

$nn. = 20$, $nnn. = 32$, $c. = 100$,

$\textcircled{2}\textcircled{2} = 200$, $\textcircled{2}! = 122$.

2. Гієратическія цифри египтянь:

а) порядковыя.

1. 1 1; 2. 2 2; 3. 3 3;

4. 972; 5. 22 6. 22

7. 37 32; 8. 44 7722;

9. 7, 10. 11. 12.

$$9 = \overset{\text{III}}{\underset{\text{III}}{\vee}} = \overset{\text{II}}{\wedge} \oplus \overset{\text{II}}{\vee}$$

$$10 = \times$$

$$11 = \overset{\text{I}}{\times}$$

$$15 = \overset{+}{\wedge}$$

$$16 = \overset{+}{\wedge}$$

$$100 = \bigcirc$$

$$200 = \overset{\text{II}}{\bigcirc}$$

$$500 = \overset{\circ}{\vee}$$

$$1000 = \otimes$$

4. Халдейскія цифры.

$$\text{Y} = 1, \text{YY} = \text{V} = 2, \text{YYY} = \text{V} = 3, \text{VVV} = 4,$$

$$\text{VVVV} = 5, \text{VVVV} = 6, \text{VVVVY} = 7, \text{VVVVVV} = 8,$$

$$\text{VVVVVVY} = 9, < = 10, <\text{V} = 12, <\text{VV} = 14,$$

$$\text{Y} > = 23, <<< = 30, \text{Y} << = 40, \text{Y} <\text{Y} < = 50,$$

$$\text{Y} > = 100, \text{Y} >\text{Y} > \text{Y} = 221, <\text{Y} > = 1000,$$

$$\text{VVVV} <\text{Y} > = 4000, << \text{Y} > = 10000,$$

$$<<< <\text{Y} > \text{VVVV} <\text{Y} > \text{VVVVVVY} <<< = 36830.$$

5. Китайскія цифры: А) старинныя, В) современныя.

А	В		
一	Ⅰ	1	
二	Ⅱ	2	
三	Ⅲ	3	
四	Ⅳ	4	
五	Ⅴ	5	
六	Ⅵ	6	
七	Ⅶ	7	
八	Ⅷ	8	
九	Ⅸ	9	
十	Ⅹ	10	
百	百	100	
千	千	1000	
萬	萬	10000	
	月 ⁺ Ⅹ	=	124
	月 ⁺ Ⅴ	=	465
	月0=	=	102
	方 月0Ⅹ	=	10204

6. Научныя цифры китайцевъ.

1. II. III. IIII. IIII. 上 十 百 千 〇

1 ≡ 十 〇 〇 〇 〇 = 1470000, 十 十 III 上 十 = 64464,

1 ≡ 〇 ≡ IIII ≡ 十 = 1405436.

7. Цифры средневѣковыхъ астрологовъ.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Г	Г	Г	У	Г	П	Г	И	Р
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
Г	Г	Г	У	Г	П	Г	И	Р
100.	200.	300.	400.	500.	600.	700.	800.	900.
Г	Г	Г	У	Г	П	Г	И	Р
1000.	2000.	3000.	4000.	5000.	6000.	7000.	8000.	9000.
Г	Г	Г	У	Г	П	Г	И	Р

ИЛИ

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Г	Г	Г	У	Г	Г	Г	И	Р

и т. д.

5343.

Ж

2454.

Ж

3970.

З





1581.





З





8. Еврейскія цифры.

א	a	1
ב	b	2
ג	g	3
ד	d	4
ה	h	5
ו	v	6
ז	z	7
ח	ch	8
ט	ts	9

9. Обозначеніе большихъ чиселъ по-славянски.

ТѢМЫ:  ,  ,  ,  И Т. Д.

Легіоны:  ,  ,  ,  И Т. Д.

Леодры:  ,  ,  ,  И Т. Д.

Врановѣ: :ка к , к.в к И Т. Д.

10. Видоизмѣненіе такъ наз. арабскихъ цифръ.

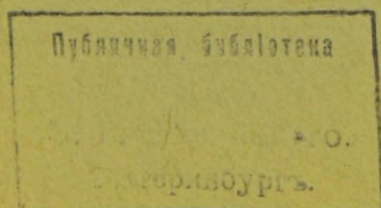
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Цифры восточныхъ арабовъ.		۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	.
				ع	В					о
Цифры X вѣка.	1	2	3	۴	۵	۶	۷	۸	9	0
Цифры Гобаръ.	1	2	3	۴	۵	6	7	8	9	
XII.	3	۵	3	۴	4	6	۸	9	9	۵
XIII.	۱	2	3	4	۵	6	۸	8	9	0
XIV.	۱	7	3	۴	7	6	۸	8	9	0
1508 г.	۱	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1550 г.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

11. Греческіе знаки дѣйствій.

Сложенія. **+**

Вычитанія: **-**

Равенства. **=**



ОГЛАВЛЕНІЕ.

	<i>Стр.</i>
Начало ариѳметики	3
Первыя ступени счисленія	4
Начальныя числительныя имена	7
Различныя системы счисленія	8
Предѣлы чиселъ	13
Счетныя приборы	17
Цифры различныхъ народовъ	23
Происхожденіе нашихъ цифръ	36
Распространеніе индусскихъ цифръ въ Россіи	43
Выговариваніе цифръ и чиселъ	47
Виды чиселъ	49
Число и порядокъ дѣйствій, знаки и опредѣленія	54
Сложеніе цѣлыхъ отвлеченныхъ чиселъ	59
Вычитаніе цѣлыхъ отвлеченныхъ чиселъ	63
Таблица умноженія	68
Развитіе нормальнаго приема умноженія	71
Дѣленіе	93
Австрійскій способъ дѣленія	100
Испанскій способъ дѣленія	102
Римскій способъ дѣленія	110
Другіе способы дѣленія	113
Повѣрка дѣйствій	116
Происхожденіе мѣръ	119
Метрическая система мѣръ	122
Русскія мѣры	126
Обыкновенныя (простыя) дроби	131
Сокращеніе дробей и приведеніе къ одному знаменателю	139
Дѣйствія надъ простыми дробями	141
Шестидесятеричныя дроби	149
Десятичныя дроби	150
Непрерывныя дроби	157
Пропорціи, прогрессіи и извлеченіе корней	158

	<i>Стр.</i>
Тройное правило	161
Правило пропорціональнаго дѣленія	168
Правило процентовъ	170
Цѣпное правило	174
Итальянская практика	176
Фальшивое правило	178
Прочія правила: смѣшенія, дѣвичье и другія	181
Добавочныя статьи ариметическаго курса	186
Исторія алгебры	191
Источники по исторіи ариметики	195
Приложеніе. Таблица цифръ	197

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. МОСКВА.

Учебники и пособия для единой трудовой школы.

Русский язык и история литературы.

- Ананьин. Утренние зори. Книга для первоначального чтения. Азбука глухонемых по пальцам.
- Бродский, Мендельсон, Сидоров. Историко-литературная хрестоматия. Ч. I, II и III.
- Бродский, Мендельсон, Сидоров. Наш мир. Книга для чтения. Ч. I, IV.
- Борзова. Букварь.
- Вахтеров. Новый русский букварь.
- " Первый шаг. Букварь.
- " Мир в рассказах для детей. Кн. I и II.
- Гиппиус. Синтаксис современного русского языка.
- Горобец. Из деревни. Букварь.
- Гливенко. Чтения по истории всеобщей литературы.
- Державин. Учебник русской грамматики. Маленькая грамматика.
- Зельцер и Элькина. Книга для чтения и бесед в школе взрослых.
- Озаровская. Бабушкины старинки.
- Петров. Этимология.
- " Синтаксис.
- Поляков. Развитие речи.
- Трофимова. Сборник статей для рассказов. Ч. I и II.
- Трофимова. Страны, города, народы, — хрестоматия.
- Тумин. В помощь пишущим орфографический словарь.
- Толстой. Книга для чтения.
- Шапошников. Этимологический задачник. Задачи по правописанию.
- Щепетова. Орфографические упражнения.
- Элькина, Богуславская. Долой неграмотность. Букварь для взрослых.

История и обществоведение.

- Богданов. Краткий курс экономической науки.
- Вольфсон. Очерки обществоведения.
- Виппер. Древняя Европа и восток.
- " Учебник древней истории.
- " Учебник средней истории.
- " Учебник новой истории.
- Коваленский. Учебник русской истории. Т. I и II.
- хрестоматия по русской истории. Т. II.
- Покровский. Русская история в самом сжатом очерке.
- Рожков. Учебник всеобщей и русской истории. Вып. I. Древняя.
- Рожков. Учебник всеобщей и русской истории. Вып. II. Средняя.
- Рожков. Учебник всеобщей и русской истории. Вып. III. Новая.
- Рожков. Учебник всеобщей и русской истории. Вып. IV. Новейшая.
- Сергеев. История древнего Рима.

Математика.

- Аржениников. Задачник. Ч. I—IV.
- Бем, Волков, Струве. Сокращенный сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры. Ч. I и II.

- Воронец. Справочник по математике для учащихся в школе II ступени.
- Воронец. Справочник по математике для взрослых.
- Герхер. Учебник элементарной геометрии. Ч. I и II.
- Давыдов. Начальная алгебра.
- " Элементарная геометрия.
- Егоров и Карасев. Арифметический задачник.
- Зверев. Элементарная геометрия. Ч. I, II и III.
- Зенченко и Еменов. Жизнь и знание в числах. Арифметический задачник. Ч. I, II и III.
- Звягинцев и Бернашевский. Живой счет в городской школе. Арифметический задачник. Ч. I, II и III.
- Иовлев. Математика в школах для взрослых. Задачи и правила.
- Иовлев. Практическая геометрия.
- Кочетов. Продзадачник.
- Клазен и Бах. Сборник геометрических задач (к учебн. Герхера).
- Кавун. Начальные сведения о приближенных вычислениях.
- Каменьщиков. Логарифмы трехзначные.
- Каменьщиков. Логарифмы четырехзначные.
- Крогиус. Тригонометрия.
- Киселев. Алгебра.
- Лебединцев. Алгебра. Ч. II.
- Мартэль. Приемы быстрого счета.
- Михайлов. Карманные таблицы логарифмов.
- Никитин. Первая ступень из геометрии.
- " Вторая ступень из геометрии.
- Норрис и Смит. Практическая арифметика.
- Норрис и Крэг. Основы алгебры, геометрии и тригонометрии.
- Пржевальский. Логарифмы пятизначные.
- Уэнтворт и Рид. Первоначальная арифметика.
- Фридман. Курс концентрической алгебры.
- Шапошников. Прямолинейная тригонометрия.
- Шапошников и Вальцов. Сборник алгебр. задач. Ч. I и II.

Физика и химия.

- Баранов. Начальная физика, элем. курс.
- Бачинский. Сборник задач и упражнений по физике.
- Бачинский. Краткий курс физики для школ II ступени.
- Бачинский. Электричество и магнетизм.
- Верховский. Химическая лаборатория трудовой школы.
- Григорьев. Краткий курс химии.
- Езерский. Популярные очерки химии.
- Кашин. Физика. I ступень.
- " II
- Крашков. Самоделные физические приборы.
- " Колодезь. Опыт комплексного преподавания.
- Краевич. Сокращенный учебник физики.
- Реформатский. Начальный курс органической химии.
- Созонов и Верховский. Учебник химии.
- Цингер. Начальная физика. I ступень.
- " II
- " " задачник по физике.
- Шмидт. Введение в химию.

1) Советская площадь, под гостиницей „Дрезден“; 2) Моховая, 17; 3) „Серп и Молот“, под гостиницей „Метрополь“; 4) Б. Никитская, 13 (консерватория).

8028

2805
75

