

**СЕМИМЕРНАЯ
ПАРАДИГМА
А.В. КОРОТКОВА
И ЕЕ ВОЗМОЖНЫЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ:
СБОРНИК НАУЧНЫХ РАБОТ**

Институт перспективных технологий

**СЕМИМЕРНАЯ ПАРАДИГМА
А.В. КОРОТКОВА
И ЕЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ:
СБОРНИК НАУЧНЫХ РАБОТ**

НОК
2023

УДК 524.8
ББК 22.68

Редакционная коллегия:

В.С. Чураков (председатель редакционной коллегии),
П.Д. Кравченко, Г.С. Мельников,
В.Е. Мешков, Ю.В. Никонов.

Семимерная парадигма А.В. Короткова и ее возможные приложения: сборник научных работ/Под. ред. В.С.Чуракова. (Серия «Многомерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып. 4). – Ростов-на-Дону– Новочеркасск: Издательство «НОК», 2023.– С 50.

Настоящее издание является уже четвёртым в этой серии. Данная серия публикаций основана на многомерной парадигме Анатолия Васильевича Короткова, который с сентября 1975 года занимается проектами: многомерные (семи-, пятнадцати-, тридцати одномерные и большей размерности) векторные алгебры; многомерная дифференциальная геометрия и теория поля; теория гравитационно-гироскопного поля; теория чисел Пифагора, Диофанта и Фибоначчи.

Настоящее издание предназначено для специалистов, занимающихся данной тематикой.

ISBN 978-5-8431-0495-5

УДК 524.8
ББК 22.68

ISBN 978-5-8431-0495-5

© Коллектив авторов,
н.ред.Чураков В.С., 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Мешков В.Е., Чураков В.С. Программа исследований в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова	8
Мешков В.Е., Чураков В.С. Возможная семимерная матмодель управления станком с ЧПУ	9
Коротков А.В. Особенности статистик Бозе-Эйнштейна в многомерном пространстве.....	11
Коротков А.В. Структура последовательностей пифагоровых чисел	16
Приложение	42
Троичный компьютер в браузере	42
Сведения об авторах	50

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание является уже четвёртым по счёту. Напомню, что данная серия публикаций основана на многомерной парадигме Анатолия Васильевича Короткова, который с сентября 1975 года занимается проектами: **многомерные (семи-, пятнадцати-, тридцати одномерные и большей размерности) векторные алгебры; - многомерная дифференциальная геометрия и теория поля; - теория гравитационно-гироскопного поля; - теория чисел Пифагора, Диофанта, Фибоначчи.** По словам автора,

«Этот проект выполняется впервые в мире и предназначен для введения в систему образования, науки и производства многомерного векторного исчисления в области теоретической и экспериментальной физики (математическая база теории струн)». Соответственно, А.В. Коротков ставит задачу: «Внедрение в практику выполненную мной научную работу:

- многомерное (семи-, пятнадцати-, тридцати одномерные и большей размерности) векторные алгебры;
- многомерная дифференциальная геометрия и теория поля;
- теория гравитационно-гироскопного поля;
- теория чисел Пифагора, Диофанта, Фибоначчи». Работы А.В.Короткова есть в научных библиотеках ведущих ВУЗов РФ и в свободном доступе в Интернете.

Неевклидовы алгебры – это дополнительный момент, который не так прост. Что можно сказать о булевых алгебрах? Алгебра Буля была создана в годы великого научного подъёма в середине XIX-го столетия. Она определяет двоичную логику с двумя состояниями: нуль и один. И двумя существенными операциями – операциями сложения этих величин и умножения этих величин. Собственно, от способа задания операций сложения и умножения зависят те или иные свойства алгебр. Характерна операция сложения в Булевой алгебре. Здесь, если нуль складывать с единицей, либо с нулём, то проблем не возникает: присутствуют те же самые свойства, что и в алгебре действительных чисел. А вот сложение единицы и единицы даёт в булевой алгебре единицу. Это не совсем традиционный подход, вернее можно сказать совсем не традиционный подход, но он выдал замечательные свойства булевых алгебр. По крайней мере, в них действуют операции поглощения, функции де-Моргана, целый ряд других процедур, симметрия в отношении дистрибутивности умножения и дистрибутивности типа сложения – в общем, ряд замечательных свойств. Именно это и обусловило широкое применение булевой алгебры в качестве алгебры логики.

Это обусловило ход развития алгебры логики, во-первых. Во-вторых, её применимость для выполнения логических операций, арифметических операций, а вслед за этим – обеспечило появление вычислительных устройств, логических устройств. Все они действуют на основе алгебры логики Буля – двухпозиционной алгебры с операцией сложения, о которой уже было сказано. Необходимо отметить, что в течение многих лет, прошедших со времён работы Буля и его последователей, не анализировался критически подход к построению алгебры логики. Вместе с тем, вызывает некоторые сомнения операция сложения двух единиц. Это с одной стороны.

С другой стороны, операция сложения или умножения, в принципе, может быть задана иными способами – какими, следует проанализировать. Первым способом несоответствующей операции сложения булевой алгебры может быть двоичная алгебра – но алгебра, построенная по способу теории сравнения по модулю два. В этой алгебре все числа – целые числа, лучше сказать, натуральный ряд чисел делится на два класса: первый класс – сложения по модулю два, дающее нуль, это класс чётных чисел, и второй класс – класс нечётных чисел. То есть, два класса чётных и нечётных чисел дают соответствующую алгебру. Каковы свойства этой алгебры? Легко доказать, что операция умножения такова, как и в алгебре Буля, вернее операция умножения. А операция сложения, если нуль и один складывать друг с другом, дают единицу, нуль и нуль дают нуль, то единица плюс единица даёт в данном случае нуль, потому что единица соответствует нечётным числам в этой алгебре, а сложение двух нечётных чисел всегда даёт чётное число, то есть, число иного класса.

Пока идёт речь об одномерном варианте, небулевом.

Операция сложения в этой алгебре совсем иная, нежели в булевой алгебре. Это создает прецедент для построения алгебр логики. Алгебры логики могут быть построены совершенно иначе, нежели булевы алгебры. А, следовательно, и процедуры выполнения логических функций, логических операций, а также арифметических операций будут иные, а вслед за этим будут иными по способу построения сами вычислительные устройства. Они будут существенно отличаться от вычислительных устройств, построенных в булевом варианте.

Итак, это первое направление – направление построения небулевых алгебр логики одномерных. Второе, существенно важное направление – это алгебры многомерные, в частности булевы и небулевы, то есть необходимо рассмотреть процесс расширения булевых и небулевых алгебр логики одномерных до многомерного варианта. Если рассматривать булеву алгебру, то в булевой алгебре нет операции вычитания. Поэтому традиционный способ расширения алгебр, который даёт вместо алгебры действительных чисел алгебру комплексных чисел кватернионов и

октанионов, не срабатывает. *Потому, что нет операции вычитания.* Однако тут возможны двухмерные, а также и n-мерные варианты построения алгебр, построенных по способу внешнего произведения двух векторов. То есть, по сути дела, прямое произведение алгебр может давать многомерные алгебры. (Этот способ изложен в литературе и о нём можно прочитать). Там возможно построение многомерных булевых алгебр, построенных по способу прямого произведения двух величин. Однако, если рассматривать не только булевы алгебры, но и не булев вариант – то, в которых алгебрах есть так называемая операция вычитания двух величин – то это существенно меняет возможность, кроме алгебр, построенных по способу построения путём создания прямого произведения алгебр, возможно расширение по традиционному способу. То есть, построение комплексных небулевых алгебр: двухмерных, четырехмерных кватернионных не булевых алгебр и восьмимерных октанионных небулевых алгебр. Этот способ возможен при применении схемы сравнения по модулю, в частности по модулю два, а также по любому другому модулю. Необходимо отметить, что, кроме модуля два, принципиально могут быть другие модули – в частности модули три и четыре. Чем они характерны? Модуль три даёт трёхпозиционную алгебру. С тремя устойчивыми состояниями: нуль, один и два. Это алгебра может быть использована для построения логики устройств не с двумя состояниями, а с большими, например, если рассматриваются функции «ДА-НЕТ» и третья из них «**МОЖЕТ БЫТЬ**». То есть, включение дополнительной процедуры «**МОЖЕТ БЫТЬ**» совершенно меняет свойства логических систем и логических устройств.

Необходимо отметить серьезную сложность таких логических устройств. В частности, две переменные с тремя состояниями имеют уже не четыре состояния, как в двузначной логике, а девять состояний. А количество функций, построенных на двух переменных с двумя состояниями, будет уже не два в четвёртой степени, а три в девятой степени, то есть число функций не шестнадцать, а колоссальное количество функций. Это уже трёхзначная логика. Трёхзначная логика построена на способе сравнения по модулю три и обладает совершенно другими, колоссальными по своим возможностям процедурами и операциями. Ещё большими возможностями обладает алгебра логики, построенная путём сравнения по модулю четыре.

Почему важен этот способ? Модуль четыре принципиален в плане многих показателей элементов. В частности, во-первых, чётные модули два и четыре дают чётные – класс чётных чисел, а нечётные элементы – класс единица и три – дают класс нечётных чисел. Но это не столь важно. Это и в двоичной логике так. Но, например, модуль четыре принципиален вот чем: не чётные числа содержат класс простых чисел, нечётных чисел.

И этот класс делится на два класса. Как известно, нечётные числа простые делятся на класс с модулем один и класс с модулем три. В частности, класс с модулем, вернее класс один по модулю четыре, даёт все нечётные числа, которые представимы в виде суммы квадратов двух величин.

В частности – следует повторить ещё раз – класс по модулю один, содержащий простые числа, вернее класс один по модулю четыре, содержащий простые числа, позволяет представлять эти числа в виде суммы квадратов двух величин.

В то же время класс по модулю четыре, дающий класс чисел три, непредставим в виде суммы квадратов, никогда, что было доказано ещё Эйлером. То есть, класс по модулю три существенно отличается от величин класса по модулю один, вернее класса один по модулю четыре. Это позволяет применять модуль четыре для построения различных величин, в частности, алгебр логики. Итак, алгебра логики построена путём сравнений по модулю четыре. Она принципиально важна и следует её внимательно проанализировать и изучить. Необходимо отметить ещё большую сложность этой алгебры. Так, две переменных с четырьмя состояниями дают шестнадцать функций. *А число разнообразных функций, которые можно построить в алгебре логики – в алгебре сравнений по модулю четыре, вырастает до шестнадцатой степени,* то есть это колоссальное число функций, разнообразных и требующих применения в тех или иных вариантах теории. Таким образом, именно большая сложность логических систем, построенных путём сравнения величин по модулю четыре и также по модулю три – то есть, трёхзначные и четырёхзначные алгебры логики не применялись до сих пор ввиду своей существенной сложности.

Таким образом, подводя итог, следует сказать о том, что принципиально важными для дальнейшего изучения являются алгебры логики – многомерные, с одной стороны, и многозначные, с другой стороны. В частности, трёх- и четырёхзначные алгебры логики. Это как в дальнейшем, так и в ближайшее время возможный путь развития систем логических устройств и логических величин. Вслед за этим, должен последовать анализ многомерных логических устройств – например, нейрокибернетических, потому что двухпозиционные нейрокибернетические алгебры логики уже достаточно серьёзно изучены и используются для моделирования, (например, в когнитивной психологии процессов сознания и мышления, протекающих в мозгу человека), а также для построения кибернетических устройств.

Редактор-составитель

ПРОГРАММА ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА И КОГНИТОЛОГИИ В РАМКАХ СЕМИМЕРНОЙ ПАРАДИГМЫ А.В.КОРОТКОВА

В области **информационных технологий** в рамках семимерной парадигмы возможно решение следующих задач:

1. Разработка математических основ для создания многомерного булевого и небулевого логического базиса элементов и устройств вычислительной техники (включая нейрокомпьютеры и нейросети).
2. Разработка принципиальных схем для реализации полного набора базовых элементов вычислительных устройств на основе многомерного булевого и небулевого логического базиса.
3. Разработка новых алгоритмов и программного обеспечения на основе многомерных булевых и небулевых логик.
4. В робототехнике возможно построение систем представления и анализа пространственных объектов в семимерном пространстве координат (трехмерные пространственные координаты X, Y, Z , цветное восприятие, обоняние, осязание, аудиоинформация).

В области **искусственного интеллекта** в рамках семимерной парадигмы возможно решение следующих задач:

1. Разработка теоретических основ построения многомерных булевых и небулевых формальных логик.
2. Построение экспертных систем на базе многомерных булевых и небулевых формальных логик.
3. Применение семимерной парадигмы при построении многовекторных систем управления базами данных (МСУБД).
4. Применение семимерной парадигмы для реализации поисковых систем с многовекторным индексированием гипертекста.
5. Применение семимерной парадигмы для формирования продукционных моделей предметных областей в интеллектуальных информационных системах.

В области **когнитологии** в рамках семимерной парадигмы возможно:

В области **когнитивной науки (КН)** это позволит перейти к многомерной модели сознания и разработке на её основе реальных информационных процессов сознания и мышления, альтернативных реализациям на

булевой алгебре [1, 2, 3]. Под многомерной моделью сознания будем понимать модель, построенную на основе многомерных булевой и не-булевой алгебр и квантованных логических величин А.В.Короткова.

1. Построение многомерной модели сознания на основе многомерных булевой и не-булевой алгебр А.В.Короткова [4].
2. Появляется возможность на принципиально новой основе моделировать представление сознания и мышления, а также перейти от евклидовых представлений (моделирования работы мозга) к неевклидовым.

Литература

1. Коротков А.В. Многомерные булевы алгебры//Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.– 194с.– (с.180-185).

2. Коротков А.В. Многозначные алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008.– (с.17-23)

3. Коротков А.В. Не булевы алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. – (с.23-29).

4. Мешков В.Е., Чураков В.С. Многомерная модель сознания на основе многомерных булевой и не-булевой алгебр А.В.Короткова//Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS'08) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2008). Научное издание в 4-х томах.Т.2. – М.: Физматлит, 2008. – (с.159-161).

УДК 004.021

Мешков В.Е., Чураков В.С.

ВОЗМОЖНАЯ СЕМИМЕРНАЯ МАТМОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ СТАНКОМ С ЧПУ

Если говорить о технических сферах применения многомерных алгебр – то это, прежде всего, многотактные и многофазные системы, системы для переработки многоуровневой информации.

В станкостроении возникает проблема управления многошпиндельными и много инструментальными станками, т.е. число каналов (разрядов), по которым приходится воздействовать на исполнительные органы или инструменты, может быть значительно больше семи. Есть станки шести инструментальные, т.е. с шестью степенями свободы, с семью степенями свободы. Здесь вполне можно применить семимерную векторную

алгебру для описания характера движения инструментов и исполнительных органов станка. Встречаются публикации, где семимерные алгебры пытались использовать даже для тренировки спортсменов, уж не говоря о том, чтобы управлять самолетами, вертолетами, или еще какими -нибудь аппаратами. Спортсмены оказывается, быстрее применили результаты семимерных алгебр, чем инженеры, техники и технологи. А также ученые. Что связано с многомерными вычислениями вызывало нарекания. Даже семимерная векторная алгебра. Сейчас она может быть использована для определения характера движений того инструмента станка с ЧПУ (см. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с. Приложение 1. Вращения в семимерном евклидовом векторном пространстве. С.204-212). Вращения в семимерном векторном пространстве осуществляются ортогональными матрицами, причем произведение матрицы на ортогональную матрицу равно ортогональной матрице на исходную, причем равенство определяется единицей. Изучены способы вращения не только в семимерном евклидовом пространстве, но уже есть и работы, посвященные вращениям в пятнадцатимерном евклидовом пространстве, т.е. векторные алгебры позволяют построить не только алгебру как таковую, но и теорию преобразования, т.е. преобразования одного вектора в другой с помощью ортогональных матриц. Модель любого процесса надо разрабатывать с этим процессом и изучать объект исследования, т.е. объект исследования нужно изучить и построить матмодель семимерного инструментального станка путем использования семи независимых координат и управлять с помощью систем вращения в многомерных пространствах движением этих координат и изменением этих координат, т.е. движением инструмента и движением исполнительного механизма. Чтобы говорить о матмодели станка с ЧПУ, надо его знать.

Математическая модель должна получиться красивой, а её применение требует конкретного знания. Т.е. вот деталь, вот технологический процесс обработки детали, вот многофункциональный станок с ЧПУ, который имеет семь координат, и по крайней мере, семь инструментов исполнительных звеньев необходимо изучить объект, математическую модель станка. Такой матмодели нигде и никогда нам не попадалось.

Что может представлять собою математическая модель станка с ЧПУ? Она должна быть создана. В любой системе автоматического управления рассматриваются следующие объекты: элемент сравнения на входе, где сравнивается сигнал реальный заданный с реальным, элемент сравнения работает с очень малыми силами, поэтому для усиления необходим усилитель (поэтому вторым элементом является усилитель), третьим элементом является регулятор (регулятор регулирует движение исполнительного механизма через измеряемые параметры), дальше стоит

усилитель мощности, потому что сигналы управления очень слабые, а сигналы, которыми управляют исполнительные механизмы довольно большой мощности, это как, правило киловатты для станков. Ну и наконец, требуется математическое описание объекта, это ведь не просто станок, а как ведёт себя станок с изменением времени при единичном ступенчатом воздействии, например. Поскольку единичная ступень испытывает воздействие по выходу процесса изменения движения механизма во времени. Вот таким должно быть математическое описание объекта т.е. станка. На выходе должен быть обязательно датчик – датчик реального положения исполнительного механизма. И по обратной связи заводят, как правило, отрицательную обратную связь, преобразующий сигнал с датчика в сигнал для сравнения со входным сигналом – сигналом управления. Вот модель системы управления. Мы должны описать объект. Т.е. получить математическую модель станка.

Литература

Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. –244с.

Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Изд. 2-е, испр., и доп. – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. – 266с.

УДК 001.51

Коротков А.В.

ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИК БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассматриваются вопросы построения основ статистики Бозе-Эйнштейна для многомерного пространства. Число фазовых ячеек в многомерном случае равно $2-D$. Рассмотрение проведено в многомерных сферических координатах. Записаны выражения D -мерного элемента объема, элемента поверхности, полной поверхности и на их основе - кинетической энергии, импульса, числа ячеек, числа частиц фотонного газа, плотности энергии и полной энергии. Показано, что постоянная Стефана-Больцмана зависит от размерности пространства, а энергия излучения

определяется Гамма- и дзета-функциями. Это позволяет установить формулу Планка для размерности D вплоть до самых больших значений энергии и достижения самых малых размеров частиц.

Международный центр теоретической физики (2^n-1-D технологии), г. Новочеркасск

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

Число фазовых ячеек z_i в элементе фазового пространства

$$\prod_1^n dx_n \prod_1^n dp_n$$

в D -мерном пространстве равно отношению величины элемента к h^n [1]:

$$Z_i = \frac{\prod_1^n dx_n \prod_1^n dp_n}{h^n}.$$

Для выражения произведения дифференциалов импульсов dp через кинетическую энергию ε целесообразно перейти к сферическим координатам [2]

$$p_{x_1} = p \cos \phi_2,$$

$$p_{x_2} = p \sin \phi_2 \cos \phi_3,$$

$$p_{x_3} = p \sin \phi_2 \sin \phi_3 \cos \phi_4,$$

.....

$$p_{x_{D-2}} = p \sin \phi_2 \sin \phi_3 \dots \sin \phi_{D-2} \cos \phi_{D-1},$$

$$p_{x_{D-1}} = p \sin \phi_2 \sin \phi_3 \dots \sin \phi_{D-2} \sin \phi_{D-1} \cos \phi_D,$$

$$p_{x_D} = p \sin \phi_2 \sin \phi_3 \dots \sin \phi_{D-2} \sin \phi_{D-1} \sin \phi_D,$$

$$p \geq 0,$$

$$0 \leq \phi_i \leq \pi, (i = 2, 3, \dots, D - 1)$$

$$0 \leq \phi_D \leq 2\pi.$$

D -мерный элемент объема задается в этих координатах формулой $dV = p^{D-1} (\sin \phi_2)^{D-2} (\sin \phi_3)^{D-3} \dots (\sin \phi_{D-1})^1 dp d\phi_2 d\phi_3 \dots d\phi_{D-1} d\phi_D,$

Элемент поверхности $n-1$ -мерной единичной сферы $d\Omega$ -формулой

$$d\Omega = (\sin \phi_3)^{D-3} \dots (\sin \phi_{D-1})^1 d\phi_2 d\phi_3 \dots d\phi_{D-1} d\phi_D$$

Полная поверхность $D-1$ -мерной единичной сферы Ω представляется формулой

$$\Omega = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma((D-1)/2)}.$$

Кинетическая энергия ε и импульс p связаны функцией Гамильтона

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m},$$

где m - масса частиц фотонного газа, откуда

$$p^{D-1} dp = \frac{(2m)^{D/2} \varepsilon^{(D-2)/2}}{2} d\varepsilon$$

$$dp = \frac{(2m)^{D/2} \varepsilon^{(D-2)/2}}{2} d\varepsilon$$

Число энергетических ячеек z_i равно:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{p^{D-1} \sin \phi_D}{h^D} d\phi_2 \dots d\phi_{D-1} d\phi_D dp dV = \\ &= \frac{(2m)^{D/2} \varepsilon^{(D-2)/2} \sin \phi_n}{2h^D} d\phi_2 \dots d\phi_{D-1} d\phi_D dp dV \end{aligned}$$

Число частиц газа, подчиняющегося статистике Бозе-Эйнштейна в n -мерном пространстве

$$\begin{aligned} N &= \sum_i D_i = \\ &= \frac{(2m)^{D/2}}{2h^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{(D-2)/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} d\varepsilon \int_0^V dV \int_0^\pi d\phi_2 \int_0^\pi d\phi_3 \dots \int_0^\pi d\phi_{D-1} \int_0^{2\pi} \sin \phi_D d\phi_D = \\ &= \frac{2\pi V (2m)^{D/2}}{h^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{(D-2)/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} d\varepsilon \end{aligned}$$

Полная энергия

$$E = \sum_i D_i \varepsilon_i = \frac{2\pi V (2m)^{D/2}}{h^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{(D-2)/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} \varepsilon d\varepsilon.$$

Излучение рассматривается как идеальный газ, состоящий из частиц света - фотонов. Энергия фотона ε равна $h\nu$, импульс фотона p равен $\frac{h\nu}{c}$,

масса фотонов, согласно соотношению между энергией и массой, равняется $\frac{h\nu}{c^2}$.

Данной частоте ν , соответствующей излучению, поляризованному в противоположные стороны, для полного числа частиц можно найти выражение для числа фотонов dN_ν , которым соответствуют частоты в интервале от ν до $\nu+d\nu$:

$$dN_\nu = \frac{2\pi}{h^D} \frac{V_P^{D-1}}{e^{\varepsilon/kT} - 1} dp$$

В этой формуле μ для излучения равно нулю, T – температура фотонного газа.

Энергия равновесного излучения в указанном интервале частот:

$$E_\nu = e_\nu dN_\nu = \frac{8\pi h^{D-2}}{c^D} \frac{V}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Плотность энергии в единичном интервале частот можно получить, разделив энергию на объем V излучения и ширину интервала частот $d\nu$:

$$\frac{E_\nu}{V d\nu} = \frac{8\pi h^{D-2}}{c^D} \frac{\nu^D}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Последнее равенство аналогично формуле Планка и отличается от нее степенью частоты в числителе.

Полная энергия излучения по всем частотам от 0 до ∞ :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty E_\nu d\nu = \frac{2\pi h^D}{c^{D-1}} \int_0^\infty \frac{\nu^D}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \\ &= 2\pi^{D+2} h c^2 \left(\frac{kT}{ch}\right)^{D+1} = \sigma_D T^{D+1} \end{aligned}$$

Постоянная Стефана-Больцмана существенно зависит от размерности пространства. Так в случае семимерного пространства, имеем:

$$y_7 = 2\pi h c^2 \frac{8p^8}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^8$$

при $D = 15$

$$y_{15} = 2\pi h c^2 \frac{9,003 * 10^7}{1,308 * 10^{12}} \pi^{16} \left(\frac{k}{hc}\right)^{16}$$

Площадь под полученной кривой (Планка) [5] можно найти в относительных единицах, используя соотношение

$$\int_0^\infty \frac{y^D}{e^D - 1} dy = \Gamma(D + 1) \text{ ж } (D + 1)$$

где Γ – Гамма-, а ζ – дзета функция Римана,

$$\Gamma(D + 1) = D!, \quad \zeta(D + 1) = \frac{\pi^{D+1}}{(\text{знам.}\zeta)D!},$$

$$S = \Gamma(D + 1)\zeta(D + 1) = \frac{p^{n+1}}{(\text{знам.}\zeta)}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

D	2	3	4	5	6	7	...	15	
$\Gamma(D+1)$	1,00000	2,00000	6,00000	24,0000	120,000	720,000	5040,00	...	1,308*10 ¹²
$\zeta(D+1)=$	1,64493	1,20205	1,08232	1,03692	1,01734	1,00834	1,00407	...	1,00001528
$=\zeta(D+1)$	$\pi^2/6,00$	$\pi^3/25,79$	$\pi^4/90,0$	$\pi^5/295,1$	$\pi^6/925,0$	$\pi^7/2995$	$\pi^8/9450$...	я'790032220
$S=\Gamma*\zeta$	1,64493	2,40410	6,49390	24,8861	122,081	726,005	5060,51	...	1,308* 10 ¹²
знам. $\zeta/D!$	6,00000	12,8970	15,0000	12,2967	7,70830	4,16010	1,87500	...	6,8848*10 ⁻⁵

Очевидно, что площадь графика $S=\Gamma(D+1)*\zeta(D+1)$, характеризующая энергию, с ростом размерности пространства, интенсивно возрастает.

Функция (знам. ζ)/ $D!$ дает график, совпадающий с кривой Планка при $D=3$, при этом

$$(\text{знам.}\zeta)/D! = E_{V,D}.$$

$$\Gamma(D + 1) = D!, \quad \zeta(D + 1) = \frac{\pi^{D+1}}{(\text{знам.}\zeta)D!}, \quad S = \Gamma * \zeta.$$

Коэффициент пропорциональности определяется формулой Планка. Так в случае $D=3$

$$\Gamma(4) = 3!, \quad \zeta(4) = \frac{p^4}{3!*15},$$

причем постоянная Стефана-Больцмана равняется

$$y_3 = 2phc^2 * \frac{p^4}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^4.$$

При иной размерности пространства меняются величины

$$\Gamma(D + 1) = D!, \quad \zeta(D + 1) = \frac{\pi^{D+1}}{(\text{знам.}\zeta)D!},$$

а, следовательно, и σ_D . Например, при $D=7$

$$y_7 = 2phc^2 \frac{8p^8}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^8,$$

При $D=15$

$$y_{15} = 2phc^2 \frac{9,003*10^7}{1,308*10^{12}} \pi^{16} \left(\frac{k}{hc}\right)^{16}.$$

Найденные коэффициенты и соотношения могут корректироваться, например, при получении формулы Планка для распределения энергии по длинам волн. Однако можно говорить о возрастании функции Планка с ростом размерности вплоть до самых больших значений энергий и достижения самых малых размеров частиц.

Таким образом, в многомерном пространстве изменяются энергетические величины, в частности необходимо рассматривать n -мерное фазовое пространство с n -координатами и n -компонентами импульса. Это влечет за собой увеличение размерности статистики Бозе-Энштейна, и получаемой из неё формулы Планка. Т.е. необходимо рассматривать многомерную векторную алгебру, которая включает трехмерную векторную алгебру, как подалгебру.

В такой формуле Планка существенно возрастает степень числителя, а, следовательно, все энергетические показатели. С увеличением энергии существенно уменьшается расстояние до центра частиц. Уменьшение расстояния и увеличение силовых воздействий происходит при увеличении размерности векторной алгебры. Отметим, что нами разработаны основы 7-, 15-, 31-мерной векторных алгебр и найдены векторные произведения двух векторов для 63-, 127-, ..., 2047-мерной векторных алгебр. Процесс может быть продолжен до бесконечно больших величин. Алгебры больших размерностей более симметричны, нежели алгебры меньших размерностей.

Литература

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: «Наука», 1971.
2. Карякин Н. И. и др. Краткий справочник по физике. – М.: ГИ «Высшая школа», 1963. – 559 с.
3. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.
4. Коротков А. В. Элементы многомерного (15- и 31-мерного) векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2012. – 76с.
5. Коротков А. В. Формула Планка в D -мерных пространствах// Альманах современной науки и образования № 3 (70). Тамбов. Изд-во «Грамота», 2013.

УДК 001.53

Коротков А.В.

СТРУКТУРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПИФАГОРОВЫХ ЧИСЕЛ

Бесконечные последовательности чисел можно получить путем рассмотрения решений уравнения Диофанта

$$t^2 - ax^2 = \pm b$$

в целых числах [1]. При этом возникают последовательности t и x .

Рассмотрим последовательности пифагоровых чисел, под которыми понимаются числа с суммой квадратов, равной квадрату числа. С пифагоровыми числами в паре последовательностей t и x можно связать физические (в частности, геометрические) величины. Это показано в [2] для $a=2$ и $b=x_0^2$, где $x_0=const$. При этом выполняются уравнения (Диофанта):

$$n^2 - 2m^2 = \pm x_0^2,$$

$$c^2 - 2z^2 = -x_0^2,$$

$$r^2 - 2p^2 = +x_0^2.$$

Здесь n и m -числа натурального ряда, а четверки чисел z, c, p, r характеризуют соответственно гипотенузы, суммы катетов, периметры и суммы периметров с гипотенузами. При этом в правой части уравнения Диофанта стоит величина $x_0^2 = inv$ квадрата модуля разности катетов прямоугольных треугольников, что фиксирует дискретные значения всех компонентов.

Выполняется также теорема Пифагора

$$z^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

где x_1 и x_2 – катеты бесконечной последовательности прямоугольных треугольников, определяемых одним и тем же значением модуля разности катетов. Это определяет способ дискретизации всех рассматриваемых величин (Таблица 1). Здесь нижний индекс соответствует модулю разности катетов, причем

$$(2nm)^2 + (n^2 - m^2)^2 = (n^2 + m^2)^2$$

или, если $n=h+g$ и $m=h$

$$(2h(h+g))^2 + ((h+g)^2 - h^2)^2 = ((h+g)^2 + h^2)^2$$

т.е. $2(h(h+g))^2 + (2hg+g^2)^2 = (2h^2+2hg+g^2)^2$

при $g^2 - 2h^2 = \pm x_0$.

Здесь h -числа натурального ряда, а g -нечетные числа.

Очевидно, что уравнение Пифагора соответствует двумерной проекции “светового” конуса в трехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени [2]. Это придает ему особое значение, что требует рассмотрения широкого класса уравнений для квадрата интервала x_0^2

$$z^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \pm x_0^2,$$

или $\pm x_0^2 + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = z^2$,

включающего времени подобный и пространственно подобный случаи при

$\pm x_0^2 = const$ с уравнением “светового конуса” при $x_0^2 = 0$. Особо отметим, что модуль разности катетов x_0 относится к числам вида $8k \pm 1$ классов 1 и 7 вычетов по модулю $mod 8$, где $k=0, 1, 2, \dots$, [3], т.е. к числам

(1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 79, 89, 97, ...), что ограничивает множество бесконечных последовательностей решений уравнений Диофанта и Пифагора.

В таблице 1 значения рядов z , c , p и r , а также чисел m и n , могут быть безгранично продолжены в обоих вертикальных направлениях, причем используются одни и те же рекуррентные соотношения [3]

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

$$n_{k+1} = 2n_k + n_{k-1},$$

$$h_{k+1} = 2h_k + h_{k-1},$$

$$g_{k+1} = 2g_k + g_{k-1},$$

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

$$c_{k+1} = 6c_k - c_{k-1},$$

$$p_{k+1} = 6p_k - p_{k-1},$$

$$r_{k+1} = 6r_k - r_{k-1}.$$

Таблица 1.

m	n_1	m_7	n_7	m_{17}	n_{17}	m_{23}	n_{23}	m_{31}	n_{31}	m_{41}	n_{41}	m_{47}	n_{47}	m_{49}	n_{49}
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	257
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	113
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113	65	-79	61	-71
z_1	c_1	z_7	c_7	z_{17}	c_{17}	z_{23}	c_{23}	z_{31}	c_{31}	z_{41}	c_{41}	z_{47}	c_{47}	z_{49}	c_{49}
2	4	97	13	30	431	37	527	629	889	505	713	905	127	106	151
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	257
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113	65	-79	61	-71
5	-7	73	-	13	-193	20	-289	221	-311	481	-679	353	-497	325	-457
p_1	r_1	p_7	r_7	p_{17}	r_{17}	p_{23}	r_{23}	p_{31}	r_{31}	p_{41}	r_{41}	p_{47}	r_{47}	p_{49}	r_{49}
7	9	23	33	73	104	90	127	151	214	121	172	218	308	258	364
1	1	40	57	12	179	15	219	260	369	208	297	374	531	442	627
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	113
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
-2	3	-30	43	-56	81	-84	121	-90	131	-198	283	-144	209	-132	193

Эти числа в каждом ряду располагаются по вертикальной линейке бесконечной длины в обе стороны. Последовательности чисел m и n , z и c , p и r , получаются с точностью до знака при одном и том же значении x_{0i}^2 и определителя Δ_i (таблица 2), причём спектр последовательностей строго регламентирован.

Таблица 2 дает классификацию рядов m и n бесконечных числовых последовательностей, соответствующих данному значению модуля разности катетов. То же самое относится к рядам числовых

последовательностей z, c , и p, r . Отметим, что величина x_{0i} может принимать значения из двух классов вычетов по модулю восемь $(1, 17, 41, 49, 73, 89, 97, 113, \dots, \text{т.е. чисел вида } 8n+1)$ или $(7, 23, 31, 47, 71, 79, 103, 119, \dots, \text{т.е. чисел вида } 8n+7)$, составленных из соответствующих простых чисел, их произведений и степеней.

Таблица 2.

n_1	m_1	$\pm x_0^2$	c_1	z_1	$-x_0^2$	r_1	p_1	x_0^2
7	5	-1^2	41	29	-1^2	99	70	1^2
3	2	1^2	7	5	-1^2	17	12	1^2
1	1	-1^2	1	1	-1^2	3	2	1^2
1	0	1^2	-1	1	-1^2	1	0	1^2
-1	1	-1^2	-7	5	-1^2	3	-2	1^2
n_7	m_7	$\pm x_0^2$	c_7	z_7	$-x_0^2$	r_7	p_7	x_0^2
23	17	-7^2	137	97	-7^2	331	234	7^2
11	6	7^2	23	17	-7^2	57	40	7^2
1	5	-7^2	1	5	-7^2	11	6	7^2
9	-4	7^2	-17	13	-7^2	9	-4	7^2
-17	13	-7^2	-103	73	-7^2	43	-30	7^2
n_{17}	m_{17}	$\pm x_0^2$	c_{17}	z_{17}	$-x_0^2$	r_{17}	p_{17}	x_0^2
73	53	-17^2	431	305	-17^2	1041	736	17^2
33	20	17^2	73	53	-17^2	179	126	17^2
7	13	-17^2	7	13	-17^2	33	20	17^2
19	-6	17^2	-31	25	-17^2	19	-6	17^2
-31	25	-17^2	-193	137	-17^2	81	-56	17^2
...

Рассмотрим процедуру формирования пифагоровых чисел и их последовательностей. В случае двумерного уравнения Пифагора известен ряд способов формирования троек пифагоровых чисел [3]. Нами найдено уравнение, упрощающее процесс нахождения троек пифагоровых чисел в виде

$$x_1^2 + (((x_1^2/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2/d) + d)/2)^2.$$

Здесь d -разность между гипотенузой z и катетом x_2 . Результаты расчетов приведены в таблице 3.

Таблица 3.

$d=1$			$d=2$			$d=8$...
x_1	x_2	z	x_1	x_2	z	x_1	x_2	z	...
1	0	1	4	3	5	4	-3	5	...
3	4	5	8	15	17	12	5	13	...
5	12	13	12	35	37	20	21	29	...
7	24	25	16	63	65	28	45	53	...
9	40	41	20	99	101	36	77	85	...
11	60	61	24	143	145	44	117	125	...
13	84	85	28	195	197	52	165	173	...
15	112	113	32	255	257	60	221	229	...
17	144	145	36	323	325	68	285	293	...
19	180	181	40	399	401	76	357	365	...
21	220	221	44	483	485	84	437	445	...
23	264	265	48	575	577	92	525	533	...
25	312	313	52	675	677	100	621	629	...
27	364	365	56	783	785	108	725	733	...
29	420	421	60	899	901	116	837	845	...
31	480	481	64	1023	1025	124	957	965	...
...

Для последовательностей чисел, характеризующих гипотенузы прямоугольных треугольников используется рекуррентное соотношение

$$t_{n+1} = 6t_n - t_{n-1},$$

а для последовательностей чисел, характеризующих как гипотенузы, так и катеты прямоугольных треугольников – соотношение

$$x_{n+1} = 5(x_n + x_{n-1}) - x_{n-2},$$

где в качестве t_{n+1} , t_n , t_{n-1} и x_{n+1} , x_n , x_{n-1} выступают величины x_1 , x_2 и t при одном и том же значении величины $x_0=0$.

Отметим уникальную особенность решений уравнения второй степени с двумя переменными, заключающуюся в том, что тройки чисел целочисленных решений уравнения образуют различные последовательности, определяемые рекуррентными соотношениями (таблицы 4.1, 4.2.).

Таблица 4.1

x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
...
21	20	29	65	72	97	133	156	205	225	272	353
3	4	5	15	8	17	35	12	37	63	16	65
1	0	1	-3	4	5	-15	8	17	-35	12	37
-1	0	1	-5	-12	13	-33	-56	65	-85	-132	157
-3	-4	5	-55	-48	73	-275	-252	373	-663	-616	905
...
341	420	541	481	600	769	645	812	1037	833	1056	1345
99	20	101	143	24	145	195	28	197	255	32	257
-63	16	65	-99	20	101	-143	24	145	-195	28	197
-161	-240	289	-261	-380	461	-385	-552	673	-533	-756	925
-1219	-1140	1669	-1943	-1824	2665	-2835	-2668	3893	-3895	-3672	5353
...
429	460	629	969	1120	1481	1725	2068	2693	2697	3304	4265
91	60	109	247	96	265	475	132	493	775	168	793
-7	24	25	-91	60	109	-247	96	265	-475	132	493
-9	-40	41	-189	-340	389	-585	-928	1097	-1197	-1804	2165
-171	-140	221	-1647	-1496	2225	-4635	-4292	6317	-9135	-8528	12497
...
3885	4828	6197	5289	6640	8489	6909	8740	11141	8745	11128	14153
1147	204	1165	1591	240	1609	2107	276	2125	2695	312	2713
-775	168	793	-1147	204	1165	-1591	240	1609	-2107	276	2125
-2025	-2968	3593	-3069	-4420	5381	-4329	-6160	7529	-5805	-8188	10037
-15147	-14204	20765	-22671	-21320	31121	-31707	-29876	43565	-42255	-39872	58097
...
377	336	505	1357	1476	2005	2937	3416	4505	5117	6156	8005
39	80	89	299	180	349	759	280	809	1419	380	1469
21	-20	29	-39	80	89	-299	180	349	-759	280	809
-77	-36	85	-57	-176	185	-637	-1116	1285	-1817	-2856	3385
-319	-360	481	-779	-660	1021	-5439	-4960	7361	-14299	-13260	19501
...
7897	9696	12505	11277	14036	18005	15257	19176	24505	19837	25116	32005
2279	480	2329	3339	580	3389	4599	680	4649	6059	780	6109
-1419	380	1469	-2279	480	2329	-3339	580	3389	-4599	680	4649
-3597	-5396	6485	-5977	-8736	10585	-8957	-12876	15685	-12537	-17816	21785
-27359	-25560	37441	-44619	-41860	61181	-66079	-62160	90721	-91739	-86460	126061
...

Таблица 4.2

x_1	x_2	z	x_1	x_2	z									
...
3	4	5	65	72	97	207	224	305	429	460	629	731	780	1069
1	0	1	15	8	17	45	28	53	91	60	109	153	104	185
-1	0	1	-3	4	5	-5	12	13	-7	24	25	-9	40	41
-3	-4	5	-5	-12	13	-7	-24	25	-9	-40	41	-11	-60	61
-21	-20	29	-55	-48	73	-105	-88	137	-171	-140	221	-253	-204	325
...
1113	1184	1625	1575	1672	2297	2567	1124	3085	2739	2900	3989	3441	3640	5009
231	160	281	325	228	397	435	308	533	561	400	689	703	504	865
-11	60	61	-13	84	85	-15	112	113	-17	144	145	-19	180	181
-13	-84	85	-15	-112	113	-17	-144	145	-19	-180	181	-21	-220	221
-351	-280	449	-465	-368	593	-595	-468	757	-741	-580	941	-903	-704	1145
...
4223	4464	6145	5085	5372	7397	6027	6364	8765	7049	7440	10249	8151	8600	11849
861	620	1061	1035	748	1277	1225	888	1513	1431	1040	1769	1653	1204	2045
-21	220	221	-23	264	265	-25	312	313	-27	364	365	-29	420	421
-23	-264	265	-25	-312	313	-27	-364	365	-29	-420	421	-31	-480	481
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1081	-840	1369	1275	-988	1613	1485	1148	1877	1711	1320	2161	1953	1504	2465
...

Указанные рекуррентные соотношения позволяют продлевать каждый из приведенных столбцов таблиц 4.1 и 4.2 вверх и вниз до бесконечности, так что создаются бесконечные последовательности целых чисел, относящихся к катетам и гипотенузам прямоугольных треугольников с одинаковым модулем разности длин катетов. Каждая из этих последовательностей может быть построена на базе двух (для гипотенуз), или трех (для катетов) целых чисел, которые связаны соотношениями

в случае гипотенуз:

$$t_{n+1} = 6t_n - t_{n-1},$$

в случае катетов:

$$x_{n+1} = 5(x_n + x_{n-1}) - x_{n-2},$$

при этом любая гипотенуза определяется одним из соотношений, соответствующих теореме Пифагора:

$$z^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

$$(2nm)^2 + (n^2 - m^2)^2 = (n^2 + m^2)^2$$

$$2(h(h+g))^2 + (2hg + g^2)^2 = (2h^2 + 2hg + g^2)^2$$

Результаты решения уравнения Пифагора сведем в таблицу 5.

Отметим, что из этой таблицы следует, что каждая последовательность пифагоровых чисел формируется довольно понятным способом — путем выбора начальных пар чисел x_1 (-1, -3; -3, -5; -5, -7; ...;), последующей прибавкой постоянной величины к этим парам и ступенчатым смещением пифагоровых троек от одной тройки к последующей. Замечательной особенностью такой классификации является постоянство значений разности (либо суммы) двух соседних чисел в каждой цепи x_1 , причем формируется следующая зависимость величин от одной таблицы к другой:

$$\Delta = 2, 18, 50, 98, 242, 338, 450, 578, 722, 882, 1058, 1250, 1682, 1922, \dots$$

Эта величина совпадает со значениями функции $2 \cdot n^2$ при нечетных n . Отметим, что та же самая функция используется при формировании таблицы Менделеева и электронных оболочек атомов.

Рассмотрим структуру формирования пифагоровых четверок чисел и числовых последовательностей из них. Отметим уникальную особенность решений уравнения второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что четверки чисел целочисленных решений уравнения Пифагора, также как и тройки Пифагора, образуют последовательности, однако, определяемые рекуррентными соотношениями

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

$$x_{k+1} = 6x_k - x_{k-1},$$

где в качестве z_{k+1} , z_k , z_{k-1} и x_{k+1} , x_k , x_{k-1} выступают три последовательные значения величины z_i или x_i при одном и том же значении величины x_0 . Некоторые из бесконечных последовательностей решений при положительном x_0^2 представлены в левой части таблицы 5.

Таблица 5.

| x_0, x_1, x_2, t |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 2 54 141 151 | 3 56 312 317 | 2 49 238 243 | 2 70 198 210 | 14 234 662 702 |
| 2 10 25 27 | 3 10 54 55 | 2 9 42 43 | 2 12 34 36 | 14 40 114 120 |
| 2 6 9 11 | 3 4 12 13 | 2 5 14 15 | 2 6 6 6 | 14 6 22 18 |
| 2 26 29 39 | 3 14 18 23 | 2 21 42 47 | 2 0 2 0 | 14 -4 18 12 |
| 2 150 165 223 | 3 80 96 125 | 2 121 238 267 | 2 -2 6 -6 | 14 -30 86 90 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

Характерной особенностью таких числовых последовательностей являются постоянное значение определителей между соседними

четверками чисел в каждой паре из трех числовых рядов x_1, x_2, t и постоянство значения x_0 , так что выполняется уравнение

$$z^2 - (x_1^2 + x_2^2) = \pm x_0^2,$$

при $x_0 = \text{const}$.

Такие же последовательности решений имеют место при отрицательном знаке x_0^2 (правая часть таблицы 5). В таблице 6 приведены некоторые четверки пифагоровых чисел. Все указанные таблицы можно продолжать в обоих направлениях по вполне понятным алгоритмам сколь угодно далеко.

В [3] показаны различные методы формирования четверок пифагоровых чисел и числовых последовательностей, в том числе при отрицательном знаке при x_0^2 (правая часть таблицы 5).

Нами найдено соотношение связи компонентов четверок пифагоровых чисел, облегчающее их поиск, в виде

$$x_0^2 + x_1^2 + (((x_0^2 + x_1^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d = z - x_2$.

При $x_0 = 0$ имеем двумерную теорему Пифагора в непривычном виде $x_1^2 + (((x_1^2/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2/d) + d)/2)^2$.

Таблица 6.

$d=1$				$d=2$				$d=4$...
x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	...
...
1	2	2	3	2	2	1	3	2	2	-1	3	...
1	4	8	9	2	6	9	11	2	6	3	7	...
1	6	18	19	2	10	25	27	2	10	11	15	...
1	8	32	33	2	14	49	51	2	14	23	27	...
1	10	50	51	2	18	81	83	2	18	39	43	...
...
2	3	6	7	4	4	7	9	6	6	7	11	...
2	5	14	15	4	8	19	21	6	10	15	19	...
2	7	26	27	4	12	39	41	6	14	27	31	...
2	9	42	43	4	16	67	69	6	18	43	47	...
2	11	62	63	4	20	103	105	6	22	63	67	...
...
3	4	12	13	6	6	17	19	10	10	23	27	...
3	6	22	23	6	10	33	35	10	14	35	39	...
3	8	36	37	6	14	57	59	10	18	51	55	...
3	10	54	55	6	18	89	91	10	22	71	75	...
3	12	76	77	6	22	129	131	10	26	95	99	...
...
4	5	20	21	8	8	31	33	14	14	47	51	...
4	7	32	33	8	12	51	53	14	18	63	67	...
4	9	48	49	8	16	79	81	14	22	83	87	...
4	11	68	69	8	20	115	117	14	26	107	111	...
4	13	92	93	8	24	159	161	14	30	135	139	...
...

Отметим уникальную особенность решений уравнения второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что (как и в случае рассмотрения пифагоровых троек), четверки чисел целочисленных решений уравнения образуют последовательности, определяемые рекуррентными соотношениями

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

$$x_{k+1} = 6x_k - x_{k-1},$$

где в качестве z_{k+1} , z_k , z_{k-1} и x_{k+1} , x_k , x_{k-1} выступают величины x_1 , x_2 и z при одном и том же значении величины x_0 .

Приведем некоторые последовательности четверок пифагоровых чисел (таблица 7). Тем самым создается набор взаимно простых четверок чисел удовлетворяющих уравнению Пифагора. Этот набор чисел позволяет сформировать бесконечные последовательности четверок чисел, некоторые из которых приведены в таблице 8. Для каждой из них важно согласовать только три четверки чисел. Более того, бесконечные последовательности четверок чисел связаны между собой простым и очевидным образом и могут быть легко расширены по горизонтали и вертикали (таблица 7).

Таблица 7.

x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	...
...
1	46	22	51	1	104	172	201	1	162	438	467	...
1	8	4	9	1	18	30	35	1	28	76	81	...
1	2	2	3	1	4	8	9	1	6	18	19	...
1	4	8	9	1	6	18	19	1	8	32	33	...
...
2	11	10	15	2	21	42	47	2	31	94	99	...
2	3	6	7	2	5	14	15	2	7	26	27	...
2	7	26	27	2	9	42	43	2	11	62	63	...
2	39	150	155	2	49	238	243	2	59	346	351	...
...
3	80	96	125	3	138	314	343	3	196	648	677	...
3	14	18	23	3	24	56	61	3	34	114	119	...
3	4	12	13	3	6	22	23	3	8	36	37	...
3	10	54	55	3	12	76	77	3	14	102	103	...
...
2	34	-19	39	2	150	165	223	2	266	581	639	...
2	6	-3	7	2	26	29	39	2	46	101	111	...
2	2	1	3	2	6	9	11	2	10	25	27	...
2	6	9	11	2	10	25	27	2	14	49	51	...
...
4	12	3	13	4	32	47	57	4	52	131	141	...
4	4	7	9	4	8	19	21	4	12	39	41	...
4	12	39	41	4	16	67	69	4	20	103	105	...
4	68	227	237	4	88	383	393	4	108	579	589	...
...
6	102	61	119	6	218	381	439	6	334	933	991	...
6	18	13	23	6	38	69	79	6	58	165	175	...

6	6	17	19	6	10	33	35	6	14	57	59	...
6	18	89	91	6	22	129	131	6	26	177	179	...
...
...
2	34	-53	63	2	150	39	155	2	266	247	363	...
2	6	-9	11	2	26	7	27	2	46	43	63	...
2	2	-1	3	2	6	3	7	2	10	11	15	...
2	6	3	7	2	10	11	15	2	14	23	27	...
...
6	18	-1	19	6	38	27	47	6	58	75	95	...
6	6	7	11	6	10	15	19	6	14	27	31	...
6	18	43	47	6	22	63	67	6	26	87	91	...
6	102	251	271	6	122	363	383	6	142	495	515	...
...
10	170	67	183	10	286	295	411	10	402	639	755	...
10	30	15	35	10	50	55	75	10	70	115	135	...
10	10	23	27	10	14	35	39	10	18	51	55	...
10	30	123	127	10	34	155	159	10	38	191	195	...
...

Особо выделим, что отдельные последовательности четверок связаны с величинами p , r и d прямоугольных треугольников. Для формирования последовательностей четверок чисел могут использоваться пары соседних четверок. Приведем последовательности четверок пифагоровых чисел.

Отдельные последовательности чисел, связанных с прямоугольными треугольниками, приведены в таблице 8.

Таблица 8.

0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	
...
1	70	70	99	17	736	736	1041	41	1218	1218	1723	49	2580	2580	3649	...
1	12	12	17	17	126	126	179	41	208	208	297	49	442	442	627	...
1	2	2	3	17	20	20	33	41	30	30	59	49	72	72	113	...
1	0	0	1	17	-6	-6	19	41	-28	-28	57	49	-10	-10	51	...
1	-2	-2	3	17	-56	-56	81	41	-198	-198	283	49	-132	-132	193	...
...
7	234	234	331	23	900	900	1273	31	1518	1518	2147	47	2184	2184	3089	...
7	40	40	57	23	154	154	219	31	260	260	369	47	374	374	531	...
7	6	6	11	23	24	24	41	31	42	42	67	47	60	60	97	...
7	-4	-4	9	23	-10	-10	27	31	-8	-8	33	47	-14	-14	51	...
7	-30	-30	43	23	-84	-84	121	31	-90	-90	131	47	-144	-144	209	...
...

Очевидно, что увеличение числа компонент приводит к трудностям в получении самих компонент и последовательностей из них, связанных с увеличением чисел. Усложняются также используемые методы.

Нами найдено соотношение связи компонентов пятерок чисел, облегчающее их поиск, в виде

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)/d) - d/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)/d) + d/2)^2,$$

где $d = z - x_3$.

При $x_0=0$ имеем трехмерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{((x_1^2 + x_2^2)/d) - d}{2} \right)^2 = \left(\frac{((x_1^2 + x_2^2)/d) + d}{2} \right)^2.$$

Для формирования последовательностей пятерок чисел могут использоваться пары пятерок. Приведем некоторые пятерки пифагоровых чисел (таблица 9).

Таблица 9.

x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150
1	1	17	145	146	1	2	18	164	165	1	3	19	185	186
1	1	19	181	182	1	2	20	202	203	1	3	21	225	226
1	1	21	221	222	1	2	22	244	245	1	3	23	269	270
...

Уже эти пятерки чисел позволяют сформировать множество бесконечных последовательностей пятерок чисел комбинацией соседних пар, например таблицу 10.

Таблица 10

x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	
...
1	29	17	5	34	1	58	46	80	109	1	87	75	213	242	1	116	104	404	433	
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	1	20	18	70	75	
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	1	4	4	16	17	
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	1	4	6	26	27	
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98	1	20	32	140	145	
...
1	29	75	97	126	1	58	104	230	259	1	87	133	421	450	1	116	162	670	699	
1	5	13	17	22	1	10	18	40	45	1	15	23	73	78	1	20	28	116	121	
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	1	4	6	26	27	
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30	1	4	8	40	41	
1	5	27	73	78	1	10	32	110	115	1	15	37	157	162	1	20	42	214	219	
...
1	29	133	305	334	1	58	162	496	525	1	87	191	745	774	1	116	220	1052	1081	
1	5	23	53	58	1	10	28	86	91	1	15	33	129	134	1	20	38	182	187	
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30	1	4	8	40	41	
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46	1	4	10	58	59	
1	5	37	137	142	1	10	42	184	189	1	15	47	241	246	1	20	52	308	313	
...
1	29	191	629	658	1	58	220	878	907	1	87	249	1185	1214	1	116	278	1550	1579	
1	5	33	109	114	1	10	38	152	157	1	15	43	205	210	1	20	48	268	273	
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46	1	4	10	58	59	
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66	1	4	12	80	81	
1	5	47	221	226	1	10	52	278	283	1	15	57	345	350	1	20	62	422	427	
...
1	29	249	1069	1098	1	58	278	1376	1405	1	87	307	1741	1770	1	116	336	2164	2193	
1	5	43	185	190	1	10	48	238	243	1	15	53	301	306	1	20	58	374	379	
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66	1	4	12	80	81	
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90	1	4	14	106	107	
1	5	57	325	330	1	10	62	392	397	1	15	67	469	474	1	20	72	556	561	
...
1	29	307	1625	1654	1	58	336	1990	2019	1	87	365	2413	2442	1	116	2040	2894	2193	
1	5	53	281	286	1	10	58	344	349	1	15	63	417	422	1	20	350	500	379	
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90	1	4	60	106	81	
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118	1	4	10	136	107	
1	5	67	449	454	1	10	72	526	531	1	15	77	613	618	1	20	0	710	561	
...
1	29	365	2297	2326	1	58	394	2720	2749	1	87	423	3201	3230	1	116	452	3740	3769	
1	5	63	397	402	1	10	68	470	475	1	15	73	553	558	1	20	78	646	651	
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118	1	4	16	136	137	
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150	1	4	18	170	171	
1	5	77	593	598	1	10	82	680	685	1	15	87	777	782	1	20	92	884	889	
...
1	29	423	3085	3114	1	58	452	3566	3595	1	87	481	4105	4134	1	116	510	4702	4731	
1	5	73	533	538	1	10	78	616	621	1	15	83	709	714	1	20	88	812	817	
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150	1	4	18	170	171	
1	1	17	145	146	1	2	18	164	165	1	3	19	185	186	1	4	20	208	209	
1	5	87	757	762	1	10	92	854	859	1	15	97	961	966	1	20	102	1078	1083	
...

Особо выделим, что отдельные последовательности пятерок чисел связаны с величинами p , r и d прямоугольных треугольников. Для формирования последовательностей пятерок чисел могут использоваться пары соседних пятерок. Приведем последовательности пятерок пифагоровых чисел в таблицах 11 и 12.

Таблица 11.

0	x_1	x_2	x_3	z	x_0	x_1	x_2	x_3	z	x_0	x_1	x_2	x_3	z	...
...
1	29	17	5	34	1	58	46	80	109	1	87	75	213	242	...
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	...
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	...
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	...
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98	...
...
7	97	57	17	114	7	194	154	268	365	7	291	251	713	810	...
7	17	11	5	22	7	34	28	50	67	7	51	45	129	146	...
7	5	9	13	18	7	10	14	32	37	7	15	19	61	66	...
7	13	43	73	86	7	26	56	142	155	7	39	69	237	250	...
7	73	249	425	498	7	146	322	820	893	7	219	395	1361	1434	...
...
17	305	179	53	358	17	610	484	842	1147	17	915	789	2241	2546	...
17	53	33	13	66	17	106	86	152	205	17	159	139	397	450	...
17	13	19	25	38	17	26	32	70	83	17	39	45	141	154	...
17	25	81	137	162	17	50	106	268	293	17	75	131	449	474	...
17	137	467	797	934	17	274	604	1538	1675	17	411	741	2553	2690	...
...
23	373	219	65	438	23	746	592	1030	1403	23	1119	965	2741	3114	...
23	65	41	17	82	23	130	106	188	253	23	195	171	489	554	...
23	17	27	37	54	23	34	44	98	115	23	51	61	193	210	...
23	37	121	205	242	23	74	158	400	437	23	111	195	669	706	...
23	205	699	1193	1398	23	410	904	2302	2507	23	615	1109	3821	4026	...
...
31	629	369	109	738	31	1258	998	1736	2365	31	1887	1627	4621	5250	...
31	109	67	25	134	31	218	176	310	419	31	327	285	813	922	...
31	25	33	41	66	31	50	58	124	149	31	75	83	257	282	...
31	41	131	221	262	31	82	172	434	475	31	123	213	729	770	...
31	221	753	1285	1506	31	442	974	2480	2701	31	663	1195	4117	4338	...
...
41	505	297	89	594	41	1010	802	1396	1901	41	1515	1307	3713	4218	...
41	89	59	29	118	41	178	148	266	355	41	267	237	681	770	...
41	29	57	85	114	41	58	86	200	229	41	87	115	373	402	...
41	85	283	481	566	41	170	368	934	1019	41	255	453	1557	1642	...
41	481	1641	2801	3282	41	962	2122	5404	5885	41	1443	2603	8969	9450	...
...
47	905	531	157	1062	47	1810	1436	2498	3403	47	2715	2341	6649	7554	...
47	157	97	37	194	47	314	254	448	605	47	471	411	1173	1330	...
47	37	51	65	102	47	74	88	190	227	47	111	125	389	426	...
47	65	209	353	418	47	130	274	692	757	47	195	339	1161	1226	...
47	353	1203	2053	2406	47	706	1556	3962	4315	47	1059	1909	6577	6930	...
...
49	1069	627	185	1254	49	2138	1696	2950	4019	49	3207	2765	7853	8922	...
49	185	113	41	226	49	370	298	524	709	49	555	483	1377	1562	...
49	41	51	61	102	49	82	92	194	235	49	123	133	409	450	...
49	61	193	325	386	49	122	254	640	701	49	183	315	1077	1138	...
49	325	1107	1889	2214	49	650	1432	3646	3971	49	975	1757	6053	6378	...
...

Таблица 12

x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	...
...
1	29	99	169	198	1	58	128	326	355	1	87	157	541	570	...
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98	...
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	...
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	...
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	...
...
7	97	331	565	662	7	194	428	1090	1187	7	291	525	1809	1906	...
7	17	57	97	114	7	34	74	188	205	7	51	91	313	330	...
7	5	11	17	22	7	10	16	38	43	7	15	21	69	74	...
7	13	9	5	18	7	26	22	40	53	7	39	35	101	114	...
7	73	43	13	86	7	146	116	202	275	7	219	189	537	610	...
...
17	305	1041	1777	2082	17	610	1346	3428	3733	17	915	1651	5689	5994	...
17	53	179	305	358	17	106	232	590	643	17	159	285	981	1034	...
17	13	33	53	66	17	26	46	112	125	17	39	59	197	210	...
17	25	19	13	38	17	50	44	82	107	17	75	69	201	226	...
17	137	81	25	162	17	274	218	380	517	17	411	355	1009	1146	...
...
23	373	1273	2173	2546	23	746	1646	4192	4565	23	1119	2019	6957	7330	...
23	65	219	373	438	23	130	284	722	787	23	195	349	1201	1266	...
23	17	41	65	82	23	34	58	140	157	23	51	75	249	266	...
23	37	27	17	54	23	74	64	118	155	23	111	101	293	330	...
23	205	121	37	242	23	410	326	568	773	23	615	531	1509	1714	...
...
31	629	2147	3665	4294	31	1258	2776	7070	7699	31	1887	3405	11733	12362	...
31	109	369	629	738	31	218	478	1216	1325	31	327	587	2021	2130	...
31	25	67	109	134	31	50	92	226	251	31	75	117	393	418	...
31	41	33	25	66	31	82	74	140	181	31	123	115	337	378	...
31	221	131	41	262	31	442	352	614	835	31	663	573	1629	1850	...
...
41	505	1723	2941	3446	41	1010	2228	5674	6179	41	1515	2733	9417	9922	...
41	89	297	505	594	41	178	386	980	1069	41	267	475	1633	1722	...
41	29	59	89	118	41	58	88	206	235	41	87	117	381	410	...
41	85	57	29	114	41	170	142	256	341	41	255	227	653	738	...
41	481	283	85	566	41	962	764	1330	1811	41	1443	1245	3537	4018	...
...
47	905	3089	5273	6178	47	1810	3994	10172	11077	47	2715	4899	16881	17786	...
47	157	531	905	1062	47	314	688	1750	1907	47	471	845	2909	3066	...
47	37	97	157	194	47	74	134	328	365	47	111	171	573	610	...
47	65	51	37	102	47	130	116	218	283	47	195	181	529	594	...
47	353	209	65	418	47	706	562	980	1333	47	1059	915	2601	2954	...
...
49	1069	3649	6229	7298	49	2138	4718	12016	13085	49	3207	5787	19941	21010	...
49	185	627	1069	1254	49	370	812	2066	2251	49	555	997	3433	3618	...
49	41	113	185	226	49	82	154	380	421	49	123	195	657	698	...
49	61	51	41	102	49	122	112	214	275	49	183	173	509	570	...
49	325	193	61	386	49	650	518	904	1229	49	975	843	2397	2722	...
...

Особо выделим последовательности отдельных пятерок, связанных с величинами z , c и d прямоугольных треугольников.

Таблица 13.1

x_0	x_1	x_2	x_3	z	x_0	x_1	x_2	x_3	z	x_0	x_1	x_2	x_3	z	...
$8n+1$
1	29	17	5	34	1	58	46	80	109	1	87	75	213	242	...
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	...
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	...
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	...
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98	...
...
17	305	179	53	358	17	610	484	842	1147	17	915	789	2241	2546	...
17	53	33	13	66	17	106	86	152	205	17	159	139	397	450	...
17	13	19	25	38	17	26	32	70	83	17	39	45	141	154	...
17	25	81	137	162	17	50	106	268	293	17	75	131	449	474	...
17	137	467	797	934	17	274	604	1538	1675	17	411	741	2553	2690	...
...
41	505	297	89	594	41	1010	802	1396	1901	41	1515	1307	3713	4218	...
41	89	59	29	118	41	178	148	266	355	41	267	237	681	770	...
41	29	57	85	114	41	58	86	200	229	41	87	115	373	402	...
41	85	283	481	566	41	170	368	934	1019	41	255	453	1557	1642	...
41	481	1641	2801	3282	41	962	2122	5404	5885	41	1443	2603	8969	9450	...
...
49	1069	627	185	1254	49	2138	1696	2950	4019	49	3207	2765	7853	8922	...
49	185	113	41	226	49	370	298	524	709	49	555	483	1377	1562	...
49	41	51	61	102	49	82	92	194	235	49	123	133	409	450	...
49	61	193	325	386	49	122	254	640	701	49	183	315	1077	1138	...
49	325	1107	1889	2214	49	650	1432	3646	3971	49	975	1757	6053	6378	...
$8n+7$
7	97	57	17	114	7	194	154	268	365	7	291	251	713	810	...
7	17	11	5	22	7	34	28	50	67	7	51	45	129	146	...
7	5	9	13	18	7	10	14	32	37	7	15	19	61	66	...
7	13	43	73	86	7	26	56	142	155	7	39	69	237	250	...
7	73	249	425	498	7	146	322	820	893	7	219	395	1361	1434	...
...
23	373	219	65	438	23	746	592	1030	1403	23	1119	965	2741	3114	...
23	65	41	17	82	23	130	106	188	253	23	195	171	489	554	...
23	17	27	37	54	23	34	44	98	115	23	51	61	193	210	...
23	37	121	205	242	23	74	158	400	437	23	111	195	669	706	...
23	205	699	1193	1398	23	410	904	2302	2507	23	615	1109	3821	4026	...
...
31	629	369	109	738	31	1258	998	1736	2365	31	1887	1627	4621	5250	...
31	109	67	25	134	31	218	176	310	419	31	327	285	813	922	...
31	25	33	41	66	31	50	58	124	149	31	75	83	257	282	...
31	41	131	221	262	31	82	172	434	475	31	123	213	729	770	...
31	221	753	1285	1506	31	442	974	2480	2701	31	663	1195	4117	4338	...
...
47	905	531	157	1062	47	1810	1436	2498	3403	47	2715	2341	6649	7554	...
47	157	97	37	194	47	314	254	448	605	47	471	411	1173	1330	...
47	37	51	65	102	47	74	88	190	227	47	111	125	389	426	...
47	65	209	353	418	47	130	274	692	757	47	195	339	1161	1226	...
47	353	1203	2053	2406	47	706	1556	3962	4315	47	1059	1909	6577	6930	...
...

Таблица 13.2.

x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	...
...
1	29	75	97	126	1	58	104	230	259	1	87	133	421	450	...
1	5	13	17	22	1	10	18	40	45	1	15	23	73	78	...
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	...
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30	...
1	5	27	73	78	1	10	32	110	115	1	15	37	157	162	...
...
1	29	133	305	334	1	58	162	496	525	1	87	191	745	774	...
1	5	23	53	58	1	10	28	86	91	1	15	33	129	134	...
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30	...
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46	...
1	5	37	137	142	1	10	42	184	189	1	15	47	241	246	...
...
1	29	191	629	658	1	58	220	878	907	1	87	249	1185	1214	...
1	5	33	109	114	1	10	38	152	157	1	15	43	205	210	...
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46	...
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66	...
1	5	47	221	226	1	10	52	278	283	1	15	57	345	350	...
...
1	29	249	1069	1098	1	58	278	1376	1405	1	87	307	1741	1770	...
1	5	43	185	190	1	10	48	238	243	1	15	53	301	306	...
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66	...
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90	...
1	5	57	325	330	1	10	62	392	397	1	15	67	469	474	...
...
1	29	307	1625	1654	1	58	336	1990	2019	1	87	365	2413	2442	...
1	5	53	281	286	1	10	58	344	349	1	15	63	417	422	...
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90	...
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118	...
1	5	67	449	454	1	10	72	526	531	1	15	77	613	618	...
...
1	29	365	2297	2326	1	58	394	2720	2749	1	87	423	3201	3230	...
1	5	63	397	402	1	10	68	470	475	1	15	73	553	558	...
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118	...
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150	...
1	5	77	593	598	1	10	82	680	685	1	15	87	777	782	...
...
1	29	423	3085	3114	1	58	452	3566	3595	1	87	481	4105	4134	...
1	5	73	533	538	1	10	78	616	621	1	15	83	709	714	...
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150	...
1	1	17	145	146	1	2	18	164	165	1	3	19	185	186	...
1	5	87	757	762	1	10	92	854	859	1	15	97	961	966	...
...
1	29	481	3989	4018	1	58	510	4528	4557	1	87	539	5125	5154	...
1	5	83	689	694	1	10	88	782	787	1	15	93	885	890	...
1	1	17	145	146	1	2	18	164	165	1	3	19	185	186	...
1	1	19	181	182	1	2	20	202	203	1	3	21	225	226	...
1	5	97	941	946	1	10	102	1048	1053	1	15	107	1165	1170	...
...

Бесконечное число последовательностей пифагоровых пятерок невозможно определить, однако, последовательности формируются на базе двух пифагоровских пятерок, так что можно задавать лишь первую пару

пифагоровских пятерок, как показано в таблице 14.1 для чисел вида $8n+1$ и 14.2 для чисел вида $8n+7$ (остальные пятерки последовательности формируются с помощью рекуррентного соотношения).

Таблица 14.1.

1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	...
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	...
17	53	33	13	66	17	106	86	152	205	17	159	139	397	450	...
17	13	19	25	38	17	26	32	70	83	17	39	45	141	154	...
41	89	59	29	118	41	178	148	266	355	41	267	237	681	770	...
41	29	57	85	114	41	58	86	200	229	41	87	115	373	402	...
49	185	113	41	226	49	370	298	524	709	49	555	483	1377	1562	...
49	41	51	61	102	49	82	92	194	235	49	123	133	409	450	...
73	193	123	53	246	73	386	316	562	755	73	579	509	1457	1650	...
73	53	89	125	178	73	106	142	320	373	73	159	195	621	674	...
89	241	153	65	306	89	482	394	700	941	89	723	635	1817	2058	...
89	65	107	149	214	89	130	172	386	451	89	195	237	753	818	...
97	397	241	85	482	97	794	638	1120	1517	97	1191	1035	2949	3346	...
97	85	99	113	198	97	170	184	382	467	97	255	269	821	906	...
113	337	211	85	422	113	674	548	970	1307	113	1011	885	2529	2866	...
113	85	129	173	258	113	170	214	472	557	113	255	299	941	1026	...
137	305	201	97	402	137	610	506	908	1213	137	915	811	2329	2634	...
137	97	187	277	374	137	194	284	658	755	137	291	381	1233	1330	...
161	521	323	125	646	161	1042	844	1490	2011	161	1563	1365	3897	4418	...
161	125	177	229	354	161	250	302	656	781	161	375	427	1333	1458	...
161	689	417	145	834	161	1378	1106	1940	2629	161	2067	1795	5113	5802	...
161	145	163	181	326	161	290	308	634	779	161	435	453	1377	1522	...
217	565	361	157	722	217	1130	926	1648	2213	217	1695	1491	4269	4834	...
217	157	267	377	534	217	314	424	958	1115	217	471	581	1853	2010	...
217	745	459	173	918	217	1490	1204	2122	2867	217	2235	1949	5561	6306	...
217	173	233	293	466	217	346	406	872	1045	217	519	579	1797	1970	...
233	793	489	185	978	233	1586	1282	2260	3053	233	2379	2075	5921	6714	...
233	185	251	317	502	233	370	436	938	1123	233	555	621	1929	2114	...
241	1061	641	221	1282	241	2122	1702	2984	4045	241	3183	2763	7869	8930	...
241	221	243	265	486	241	442	464	950	1171	241	663	685	2077	2298	...
257	653	419	185	838	257	1306	1072	1910	2563	257	1959	1725	4941	5594	...
257	185	321	457	642	257	370	506	1148	1333	257	555	691	2209	2394	...
281	1009	619	229	1238	281	2018	1628	2866	3875	281	3027	2637	7521	8530	...
281	229	297	365	594	281	458	526	1120	1349	281	687	755	2333	2562	...
289	661	433	205	866	289	1322	1094	1960	2621	289	1983	1755	5037	5698	...
289	205	387	569	774	289	410	592	1366	1571	289	615	797	2573	2778	...
313	905	569	233	1138	313	1810	1474	2612	3517	313	2715	2379	6801	7706	...
313	233	363	493	726	313	466	596	1322	1555	313	699	829	2617	2850	...
329	901	571	241	1142	329	1802	1472	2614	3515	329	2703	2373	6789	7690	...
329	241	393	545	786	329	482	634	1420	1661	329	723	875	2777	3018	...
329	1189	729	269	1458	329	2378	1918	3376	4565	329	3567	3107	8861	10050	...
329	269	347	425	694	329	538	616	1310	1579	329	807	885	2733	3002	...
337	1513	913	313	1826	337	3026	2426	4252	5765	337	4539	3939	11217	12730	...
337	313	339	365	678	337	626	652	1330	1643	337	939	965	2921	3234	...
353	1313	803	293	1606	353	2626	2116	3722	5035	353	3939	3429	9777	11090	...
353	293	369	445	738	353	586	662	1400	1693	353	879	955	2941	3234	...
401	1025	657	289	1314	401	2050	1682	2996	4021	401	3075	2707	7753	8778	...
401	289	499	709	998	401	578	788	1786	2075	401	867	1077	3441	3730	...
409	1189	747	305	1494	409	2378	1936	3430	4619	409	3567	3125	8933	10122	...
409	305	473	641	946	409	610	778	1724	2029	409	915	1083	3417	3722	...
433	1657	1011	365	2022	433	3314	2668	4690	6347	433	4971	4325	12329	13986	...
433	365	449	533	898	433	730	814	1712	2077	433	1095	1179	3621	3986	...
...

Таблица 14.2.

7	17	11	5	22	7	34	28	50	67	7	51	45	129	146	...
7	5	9	13	18	7	10	14	32	37	7	15	19	61	66	...
23	65	41	17	82	23	130	106	188	253	23	195	171	489	554	...
23	17	27	37	54	23	34	44	98	115	23	51	61	193	210	...
31	109	67	25	134	31	218	176	310	419	31	327	285	813	922	...
31	25	33	41	66	31	50	58	124	149	31	75	83	257	282	...
47	157	97	37	194	47	314	254	448	605	47	471	411	1173	1330	...
47	37	51	65	102	47	74	88	190	227	47	111	125	389	426	...
71	281	171	61	342	71	562	452	794	1075	71	843	733	2089	2370	...
71	61	73	85	146	71	122	134	280	341	71	183	195	597	658	...
79	289	177	65	354	79	578	466	820	1109	79	867	755	2153	2442	...
79	65	83	101	166	79	130	148	314	379	79	195	213	657	722	...
103	233	153	73	306	103	466	386	692	925	103	699	619	1777	2010	...
103	73	139	205	278	103	146	212	490	563	103	219	285	921	994	...
119	349	219	89	438	119	698	568	1006	1355	119	1047	917	2621	2970	...
119	89	137	185	274	119	178	226	500	589	119	267	315	993	1082	...
119	461	281	101	562	119	922	742	1304	1765	119	1383	1203	3429	3890	...
119	101	123	145	246	119	202	224	470	571	119	303	325	997	1098	...
127	533	323	113	646	127	1066	856	1502	2035	127	1599	1389	3957	4490	...
127	113	129	145	258	127	226	242	500	613	127	339	355	1081	1194	...
151	2225	1307	389	2614	151	4450	3532	6146	8371	151	6675	5757	16353	18578	...
151	389	249	109	498	151	778	638	1136	1525	151	1167	1027	2941	3330	...
167	673	409	145	818	167	1346	1082	1900	2573	167	2019	1755	5001	5674	...
167	145	171	197	342	167	290	316	658	803	167	435	461	1409	1554	...
191	625	387	149	774	191	1250	1012	1786	2411	191	1875	1637	4673	5298	...
191	149	209	269	418	191	298	358	776	925	191	447	507	1581	1730	...
199	865	523	181	1046	199	1730	1388	2434	3299	199	2595	2253	6417	7282	...
199	181	201	221	402	199	362	382	784	965	199	543	563	1709	1890	...
223	925	561	197	1122	223	1850	1486	2608	3533	223	2775	2411	6869	7794	...
223	197	227	257	454	223	394	424	878	1075	223	591	621	1893	2090	...
239	509	339	169	678	239	1018	848	1526	2035	239	1527	1357	3901	4410	...
239	169	337	505	674	239	338	506	1180	1349	239	507	675	2193	2362	...
263	725	459	193	918	263	1450	1184	2102	2827	263	2175	1909	5461	6186	...
263	193	313	433	626	263	386	506	1132	1325	263	579	699	2217	2410	...
271	821	513	205	1026	271	1642	1334	2360	3181	271	2463	2155	6157	6978	...
271	205	307	409	614	271	410	512	1126	1331	271	615	717	2253	2458	...
287	1217	737	257	1474	287	2434	1954	3428	4645	287	3651	3171	9033	10250	...
287	257	291	325	582	287	514	548	1130	1387	287	771	805	2449	2706	...
311	725	473	221	946	311	1450	1198	2144	2869	311	2175	1923	5517	6242	...
311	221	411	601	822	311	442	632	1454	1675	311	663	853	2749	2970	...
343	1097	681	265	1362	343	2194	1778	3140	4237	343	3291	2875	8209	9306	...
343	265	379	493	758	343	530	644	1402	1667	343	795	909	2841	3106	...
359	1549	937	325	1874	359	3098	2486	4360	5909	359	4647	4035	11493	13042	...
359	325	363	401	726	359	650	688	1414	1739	359	975	1013	3077	3402	...
367	1105	691	277	1382	367	2210	1796	3178	4283	367	3315	2901	8289	9394	...
367	277	417	557	834	367	554	694	1528	1805	367	831	971	3053	3330	...
383	1417	867	317	1734	383	2834	2284	4018	5435	383	4251	3701	10553	11970	...
383	317	401	485	802	383	634	718	1520	1837	383	951	1035	3189	3506	...
391	985	633	281	1266	391	1970	1618	2884	3869	391	2955	2603	7457	8442	...
391	281	491	701	982	391	562	772	1754	2035	391	843	1053	3369	3650	...
391	1769	1067	365	2134	391	3538	2836	4970	6739	391	5307	4605	13113	14882	...
391	365	393	421	786	391	730	758	1544	1909	391	1095	1123	3397	3762	...
431	949	627	305	1254	431	1898	1576	2830	3779	431	2847	2525	7253	8202	...
431	305	593	881	1186	431	610	898	2084	2389	431	915	1203	3897	4202	...
...

В завершение раздела приведем таблицы (приложение 1.) числовых последовательностей пифагоровских пятерок, которые характеризуют способ расширения систем пятерок Пифагора. Это желательно осуществить по той причине, что пифагоровские пятерки являются разложением квадратов чисел из ряда натуральных чисел (т.е. сохраняют свойства теоремы Пифагора), и осуществимы для всех квадратов натуральных чисел.

Используемые ранее методы нахождения компонент чисел и тем более формирования последовательностей слабо работают при таком большом числе компонентов.

Нами найдено соотношение связи компонентов шестерок чисел, сильно облегчающее их поиск, в виде

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_3^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d=t-x_4$.

При $x_0=0$ имеем четырехмерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + \dots + x_3^2 + (((x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) + d)/2)^2.$$

Более того эти формулы пригодны для многомерных случаев

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d=t-x_{n+1}$.

При $x_0=0$ имеем $n+1$ мерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + (((x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) + d)/2)^2.$$

С их помощью находим компоненты пифагоровых шестерок (таблица 15).

Таблица 15.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t
1	2	1	1	3	4	1	3	2	1	7	8	1	4	3	1	13	14
1	4	1	1	9	10	1	5	2	1	15	16	1	6	3	1	23	24
1	6	1	1	19	20	1	7	2	1	27	28	1	8	3	1	37	38
1	8	1	1	33	34	1	9	2	1	43	44	1	10	3	1	55	56
1	10	1	1	51	52	1	11	2	1	63	64	1	12	3	1	77	78
1	12	1	1	73	74	1	13	2	1	87	88	1	14	3	1	103	104
1	14	1	1	99	100	1	15	2	1	115	116	1	16	3	1	133	134
1	1	3	5	8	10	3	1	3	5	10	12	5	1	3	5	14	16
1	3	5	7	20	22	3	3	5	7	22	24	5	3	5	7	26	28
1	5	7	9	38	40	3	5	7	9	40	42	5	5	7	9	44	46
1	7	9	11	62	64	3	7	9	11	64	66	5	7	9	11	68	70
1	9	11	13	92	94	3	9	11	13	94	96	5	9	11	13	98	100
1	11	13	15	128	130	3	11	13	15	130	132	5	11	13	15	134	136
1	13	15	17	170	172	3	13	15	17	172	174	5	13	15	17	176	178
...

Уже эти шестерки чисел позволяют сформировать множество бесконечных последовательностей шестерок чисел рассмотрением соседних пар, например, заполнить таблицу 16 при $x_0=1$.

Таблица 16.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t
...
1	46	29	29	51	80	1	75	58	29	155	184	1	104	87	29	317	346
1	8	5	5	9	14	1	13	10	5	27	32	1	18	15	5	55	60
1	2	1	1	3	4	1	3	2	1	7	8	1	4	3	1	13	14
1	4	1	1	9	10	1	5	2	1	15	16	1	6	3	1	23	24
1	22	5	5	51	56	1	27	10	5	83	88	1	32	15	5	125	130
...
1	104	29	29	201	230	1	133	58	29	363	392	1	162	87	29	583	612
1	18	5	5	35	40	1	23	10	5	63	68	1	28	15	5	101	106
1	4	1	1	9	10	1	5	2	1	15	16	1	6	3	1	23	24
1	6	1	1	19	20	1	7	2	1	27	28	1	8	3	1	37	38
1	32	5	5	105	110	1	37	10	5	147	152	1	42	15	5	199	204
...
1	162	29	29	467	496	1	191	58	29	687	716	1	220	87	29	965	994
1	28	5	5	81	86	1	33	10	5	119	124	1	38	15	5	167	172
1	6	1	1	19	20	1	7	2	1	27	28	1	8	3	1	37	38
1	8	1	1	33	34	1	9	2	1	43	44	1	10	3	1	55	56
1	42	5	5	179	184	1	47	10	5	231	236	1	52	15	5	293	298
...
1	220	29	29	849	878	1	249	58	29	1127	1156	1	278	87	29	1463	1492
1	38	5	5	147	152	1	43	10	5	195	200	1	48	15	5	253	258
1	8	1	1	33	34	1	9	2	1	43	44	1	10	3	1	55	56
1	10	1	1	51	52	1	11	2	1	63	64	1	12	3	1	77	78
1	52	5	5	273	278	1	57	10	5	335	340	1	62	15	5	407	412
...
1	278	29	29	1347	1376	1	307	58	29	1683	1712	1	336	87	29	2077	2106
1	48	5	5	233	238	1	53	10	5	291	296	1	58	15	5	359	364
1	10	1	1	51	52	1	11	2	1	63	64	1	12	3	1	77	78
1	12	1	1	73	74	1	13	2	1	87	88	1	14	3	1	103	104
1	62	5	5	387	392	1	67	10	5	459	464	1	72	15	5	541	546
...
1	336	29	29	1961	1990	1	365	58	29	2355	2384	1	394	87	29	2807	2836
1	58	5	5	339	344	1	63	10	5	407	412	1	68	15	5	485	490
1	12	1	1	73	74	1	13	2	1	87	88	1	14	3	1	103	104
1	14	1	1	99	100	1	15	2	1	115	116	1	16	3	1	133	134
1	72	5	5	521	546	1	77	10	5	603	608	1	82	15	5	695	700
...
1	394	29	29	2691	2720	1	423	58	29	3143	3172	1	452	87	29	3653	3682
1	68	5	5	465	470	1	73	10	5	543	548	1	78	15	5	631	636
1	14	1	1	99	100	1	15	2	1	115	116	1	16	3	1	133	134
1	16	1	1	129	130	1	17	2	1	147	148	1	18	3	1	167	168
1	82	5	5	675	680	1	87	10	5	767	772	1	92	15	5	869	874
...

Эти последовательности позволяют продлить их как угодно далеко во всех четырех направлениях. Процесс поиска компонент многомерных пифагоровых чисел можно продолжать сколь угодно долго. Этот процесс позволяет найти компоненты n -мерных чисел и составить числовые последовательности из них.

Удачно работает многомерное уравнение

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2) / d) - d) / 2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2) / d) + d) / 2)^2,$$

где $d = t - x_{n+1}$.

В этой работе рассмотрены лишь некоторые малочисленные примеры. С ростом n процесс поиска компонент и составления числовых последовательностей из них усложняется. Тем не менее, он остается достаточно простым. Важным случаем является случай восьмимерного пространства-времени (таблица 17).

Таблица 17.

| x_0, x_1, \dots, x_7, t |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1,1,1,1,1,1,3,4 | 1,1,1,1,1,2,2,6,7 | 1,1,1,1,1,3,3,11,12 | 1,1,1,1,1,4,4,18,19 |
| 1,1,1,1,1,1,3,7,8 | 1,1,1,1,1,2,4,12,13 | 1,1,1,1,1,3,5,19,20 | 1,1,1,1,1,4,6,28,29 |
| 1,1,1,1,1,1,5,15,16 | 1,1,1,1,1,2,6,22,23 | 1,1,1,1,1,3,7,31,32 | 1,1,1,1,1,4,8,42,43 |
| 1,1,1,1,1,1,7,27,28 | 1,1,1,1,1,2,8,36,37 | 1,1,1,1,1,3,9,47,48 | 1,1,1,1,1,4,10,60,61 |
| 1,1,1,1,1,1,9,43,44 | 1,1,1,1,1,2,10,54,55 | 1,1,1,1,1,3,11,67,68 | 1,1,1,1,1,4,12,82,83 |
| 1,1,1,1,1,1,11,63,64 | 1,1,1,1,1,2,12,76,77 | 1,1,1,1,1,3,13,91,92 | 1,1,1,1,1,4,14,108,109 |
| 1,1,1,1,1,1,13,87,88 | 1,1,1,1,1,2,14,102,103 | 1,1,1,1,1,3,15,119,120 | 1,1,1,1,1,4,16,138,139 |
| 1,1,1,1,1,1,15,115,116 | 1,1,1,1,1,2,16,132,133 | 1,1,1,1,1,3,17,151,152 | 1,1,1,1,1,4,18,172,173 |

Не будем останавливаться на поиске многомерных пифагоровых чисел и построении числовых последовательностей из них. Напомним, что каждая из этих таблиц дает множество бесконечных последовательностей, собранных по этому признаку. Мы подробно остановились на решении двумерных и четырехмерных уравнений Пифагора. Это связано с возможностью использования пифагоровых пятерок для задачи разложения квадратов целых чисел в сумму четырех квадратов, а также часто встречающейся задачи нахождения решений двумерных уравнений Пифагора.

Очередной практически важной задачей в этом плане является задача разложения квадратов натуральных чисел в сумму восьми квадратов, что возможно в связи с имеющимся решением задачи такого разложения. Это важно в связи с рассмотрением дискретизации восьмимерного пространства-времени.

Укажем на одну особенность формирования числовых последовательностей из пифагоровых чисел. Она связана с тем обстоятельством, что числовые последовательности могут представлять собой не только линейки произвольной длины, но также плоскости произвольной площади. Так из одной последовательности $\dots, 1, 1, 5, 29, \dots$ направленной в

перпендикулярных и противоположных направлениях формируется числовая плоскость (таблица 18), которая обладает свойствами симметрии в горизонтальном, вертикальном и в диагональных направлениях.

Таблица 18.

...
...	28561	4901	845	169	169	845	4901	28561	...
...	4901	841	145	29	29	145	841	4901	...
...	845	145	25	5	5	25	145	845	...
...	169	29	5	1	1	5	29	169	...
...	169	29	5	1	1	5	29	169	...
...	845	145	25	5	5	25	145	845	...
...	4901	841	145	29	29	145	841	4901	...
...	28561	4901	845	169	169	845	4901	28561	...
...

Эта последовательность чисел определяет оси симметрии в горизонтальном, вертикальном и диагональных направлениях. Вдоль вертикальных и горизонтальных осей действует рекуррентное соотношение

$$y_{n+1} = 6 * y_n - y_{n-1}$$

а вдоль диагоналей -его квадрат, определяемый тождеством

$$y_{n+1} = 35 * (y_n - y_{n-1}) + y_{n-2}.$$

Таблица 19.

...
...	28565	4913	913	565	2477	14297	83305	485533	...
...	4913	845	157	97	425	2453	14293	83305	...
...	913	157	29	17	73	421	2453	14297	...
...	565	97	17	5	13	73	425	2477	...
...	2477	425	73	13	5	17	97	565	...
...	14297	2453	421	73	17	29	157	913	...
...	83305	14293	2453	425	97	157	845	4913	...
...	485533	83305	14297	2477	565	913	4913	28565	...
...

Аналогично, для последовательности ...,425,73,13,5,17,97,...имеем совершенно иной (антисимметричный) результат, причем вдоль вертикальных и горизонтальных осей действует то же рекуррентное соотношение

$$y_{n+1}=6*y_n-y_{n-1}$$

а вдоль диагоналей -его квадрат

$$y_{n+1}=35*(y_n-y_{n-1})+y_{n-2}.$$

Каждая ячейка из соседних четырех чисел дает один и тот же определитель на всей числовой плоскости. В первом случае определитель равен нулю, а во втором-144. Очевидна исключительная симметричность таких структур чисел. Причем, эти структуры определяются четверкой начальных значений в данном случае цифрами 1,1,1,1 и 5,13,5,13. Такая симметричность структур аналогична идеальной кристаллической решетке твердых тел.

Высокой степенью симметрии обладают структуры с совпадающими значениями цифр значащего квадрата, например, цифры 1,3,1,3 дают последовательность, также определяющую диагональные симметрии.

Таблица 20.

...
...	1	3	17	99	577	3363	19601	114243	...
...	3	1	3	17	99	577	3363	19601	...
...	17	3	1	3	17	99	577	3363	...
...	99	17	3	1	3	17	99	577	...
...	577	99	17	3	1	3	17	99	...
...	3363	577	99	17	3	1	3	17	...
...	19601	3363	577	99	17	3	1	3	...
...	114243	19601	3363	577	99	17	3	1	...
...

Четверка различных чисел значащего квадрата дает менее серьезную симметрию последовательностей. Например, диагональная симметрия также нарушается (таблица 21).

Таблица 21.

...
...	-17745	-3044	-519	-70	99	664	3885	22646	...
...	-3043	-522	-89	-12	17	114	667	3888	...
...	-513	-88	-15	-2	3	20	117	682	...
...	-35	-6	-1	0	1	6	35	204	...
...	303	52	9	2	3	16	93	542	...
...	1853	318	55	12	17	90	523	3048	...
...	10815	1856	321	70	99	524	3045	17746	...
...	63037	10818	1871	408	577	3054	17747	103428	...
...

Степень симметрии плоскостных последовательностей чисел определяется совокупностью четырех чисел значащего квадрата, чем задается тот или иной вид симметрии. Эти же четыре цифры определяют набор линейных последовательностей, используемых при формировании плоскости.

Таким образом, задача получения значений пифагоровых чисел для большого числа измерений пространства вполне разрешима. Также разрешима задача получения последовательностей пифагоровых чисел для большого числа измерений пространства. Возможность представления пифагоровых чисел и их последовательностей в виде координат физического пространства- времени позволяет рассмотреть вопрос решения уравнения для квадрата интервала такого пространства в целых числах. При этом уравнению «светового конуса» соответствует значение $x_0=0$, что отвечает теореме Пифагора для многомерного пространства.

Число решений уравнения Пифагора либо уравнения квадрата интервала в целых числах бесконечно велико. Бессмысленно рассматривать все варианты решения этой задачи, однако, для большинства практических задач целесообразно иметь набор, как значений многомерных пифагоровых чисел, так и набора их последовательностей. Возможен также набор плоскостных пифагоровых чисел, что может представлять интерес для кристаллографии, причем не только плоской, но и пространственной.

Литература

1. В.И.Сяхович, *Пифагоровы точки*, Изд. Центр БГУ, Минск (2007).
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц, *Теория поля*, Изд-во Наука, Москва (1988).
3. А.В.Коротков, *Элементы классификации пифагоровых чисел*, Изд-во Набла, Новочеркасск (2009).

ПРИЛОЖЕНИЕ

УДК 004.27

ТРОИЧНЫЙ КОМПЬЮТЕР В БРАУЗЕРЕ

000. Предыстория

В 1959 году Н. П. Брусенцов разработал для МГУ уникальную вычислительную машину «Сетунь». Она была основана на троичной системе счисления и хотя элементная база была частично двоичной, что приводило к перерасходу деталей, машина зарекомендовала себя как экономичная и надёжная. Сегодня троичную машину можно увидеть разве что в музее, двоичный код победил.

Но, как я говорил ранее, всегда найдутся люди, готовые сохранять технологии прошлого в виде эмуляторов.

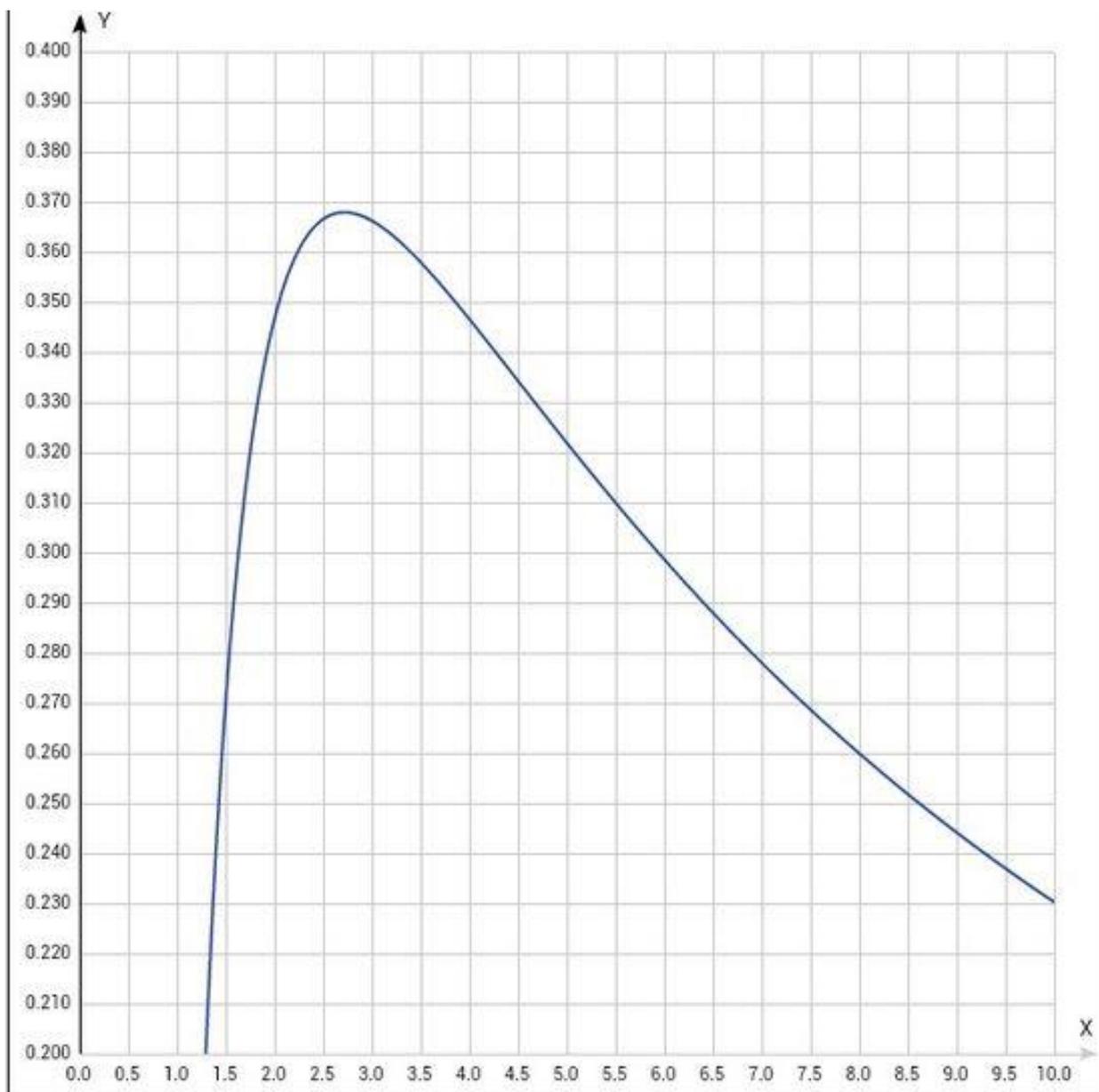
00+. Теоретические основы

В этой статье рассматривается троичная симметричная система счисления. Цифры в ней положительные и отрицательные, то есть -1/0/1 или более общепринятое -/0/+. Из этого свойства вытекает нативная поддержка нашим будущим компьютером отрицательных чисел.

Есть еще пара аргументов в защиту троичной системы счисления и троичной логики. Экономичность хранения данных для каждого разряда очевидна, экономия линий в шинах, большая емкость привычных типов данных.

Существует формула $y = \ln(x)/x$, физический смысл которой я понимаю как «соотношение объема хранимой информации к сложности ее хранения», где сложность возрастает по оси X.

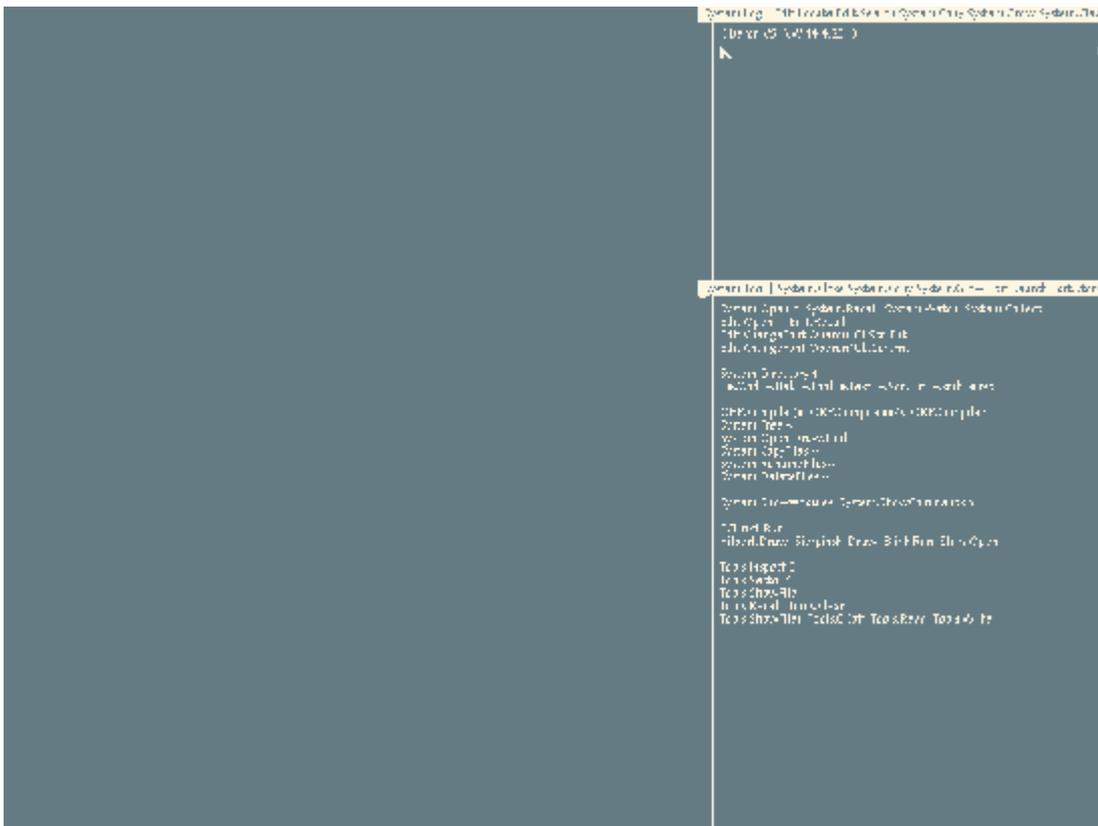
Главным же недостатком считается отсутствие базового элемента, который способен находиться в трех состояниях и при этом эффективно работать в режимах, пригодных для построения процессоров. Но для эмулятора это не проблема. Более того, схемы составных троичных элементов известны. Если прикинуть, сколько транзисторов в современных процессорах реально отвечают за систему команд, а сколько за оптимизации, то получится, что реализация самого троичного процессора не такая уж проблема.



0+-. Предпосылки

О работе Н. П. Брусенцова я узнал сравнительно недавно. Изучив некоторые материалы по Сетуни, я понял, что нет необходимости проделывать весь путь заново и можно использовать знания наших дней. Насколько я знаю, троичная виртуальная машина была так же разработана в МГУ. Но материалов по ней мало, а исходников вообще нет.

Как раз в этот момент Н. Вирт опубликовал первые наработки проекта Оберон 2013.



[Анимированный GIF >>>](#)

Собственная система команд RISC-подобного процессора, простой язык и простой компилятор для него натолкнули меня на мысль о том, что неплохо бы соединить концепции двух умных людей в одну.

Так и родился проект TRISC, троичный RISC, в рамках которого были реализованы виртуальная машина и компилятор языка Оберон в троичный код. Так же в рамках этого проекта был реализован симулятор логических троичных вентилей, но об этом в другой раз.

Проект был доведен до стадии альфы и заморожен. И вот в 2015 году в процессе изучения языка Dart возникла идея реализовать порт эмулятора для браузера.

Нетипичный для веба проект, много странных целей, что может быть интереснее?

0+0. Цели и средства

Так как компилятор в троичный код уже работал, то и троичный код у меня был. Поэтому главной целью проекта является построение эмулятора процессора. Чтобы задача не свелась к примитивному набору свичей, допустим, что виртуальная машина должна быть контролируемой, асинхронной, чтобы страничка не застыла — это же веб.

Так же, ради интереса, можно использовать собственные типы данных, которые будут характерны для троичных машин, а сам процессор реализовать в виде отдельных модулей, примерно соответствующих

реальным блокам процессора — регистры, АЛУ и т.д. Плюсом будет использование множества фиш Dart, ведь проект нужен для самообучения.

Перед глазами имеется оригинальный интерпретатор, с алгоритмической особых проблем возникнуть не должно.

0++. Математика

Для начала реализуем логику и математику. Сразу интересно.

Основной логический тип троичной системы — `trilean` (по аналогии с `boolean`). Русского аналога слову я не нашел. Для типа `trilean` существует три значения, `true/null/false`. Для этих значений существуют основные логические законы. Их сформулировал Ян Лукаевич в 20-х годах прошлого века. Из двух законов, отрицания и импликации выводятся все основные логические операции.

Описав в Dart тип `Tril`, используем возможности перегрузки операторов.

Немного тестирования, и тип готов. Используем фабричный конструктор, чтобы не плодить множество копий объектов типа `Tril`, своеобразная оптимизация.

С целыми числами тоже не все так просто. Минимальной единицей информации является трит (по аналогии с битом). В проекте Сетунь использовался шеститритный трайт (по аналогии с байтом). В своем проекте я использовал девятитритный трайт, чтобы быть ближе к восьмибитному байту по размеру. И хотя на первый взгляд, девять больше восьми, этот факт окупается мощностью получившегося типа данных — 19683 значений. От -9841 до 9841 включительно. Без обратных дополнений, без необходимости отличать арифметический сдвиг от логического.

В альтернативной вселенной у людей в 80-х не было проблем с умещением нужных символов в 256 значений одного байта. Опишем этот тип данных `tryte` на языке Dart, реализуем для него базовые арифметические операции.

Дополнительно введем тип `int27`, как можно догадаться, в нем 27 тритов, это будет размером машинного слова в нашей системе. Конечно, 27 тритов умещают больше значений, чем 32 бита. Значения от -3 812 798 742 493 до 3 812 798 742 493. Тут можно сказать, что 64 бита уместят больше значений, чем 27 тритов, но при этом понадобится вдвое больше триггеров для такого регистра.

Для самых требовательных можно ввести тип `int81`, который зарулит в минуса даже 128-битные числа. Кстати, можно заметить, что количество тритов увеличивается по степеням тройки.

Реализуем тип `int27` аналогично `tryte`.

Дополнительным типом нашей математической подсистемы будет тип `Trits`, это аналог типа SET в Обероне. Типу SET посвящена отдельная

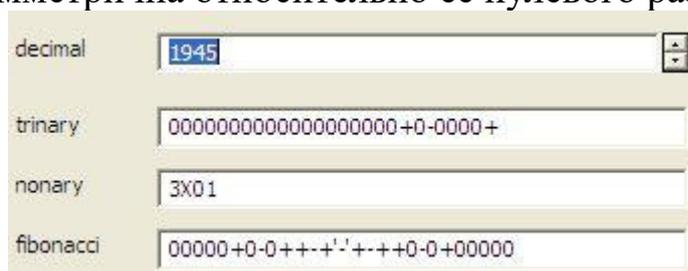
статья Н. Вирта, где он называет тип SET недооцененным. Мы же оценим его по достоинству.

Если кратко, то тип Trits (SET) представляет собой множество тригов. Он свободно конвертируем в целое число, но к типу Trits применимы все базовые операции над множествами, сложение, умножение и так далее. Поддержка данного типа упростит реализацию обработки некоторых инструкций в процессоре. А еще он поможет преобразовать троичное число в строку.

Кроме троичной записи чисел символами $-/0/+$ существует также девятиричная форма записи троичных чисел, в ней символами являются ZXUW01234. Реализуем конвертеры для такой записи чисел.

В качестве развлечения, не связанного с основной задачей — реализуем конвертер в троичную симметричную систему счисления с иррациональным основанием.

Основанием выберем квадрат золотого сечения. Подобная система счисления называется фибоначчиевой. У нее есть интересное свойство — запись числа симметрична относительно ее нулевого разряда.



Пример всех конвертеров в одной картинке.

Проведем несколько тестов. Математическая подсистема готова.

+--. Железо

Для начала опишем память. Это довольно просто, память это просто массив трайтов. Мы дополним ее только одной функцией в виде дополнительного класса — возможность читать целые слова данных.

Дополнительно, для памяти опишем MMU, устройство для управления доступом к различным областям памяти. Наше MMU простое, оно позволит подключиться к некоторым ячейкам памяти как к пинам ввода/вывода, а так же позволит использовать отрицательные адреса для доступа к этим пирам из исполняемых программ.

Для процессора я использовал асинхронные возможности языка Dart. Каждый цикл процессора планируется на будущее и исполняется асинхронно. При этом я все же схитрил и ускорил исполнение, увеличив тактовую частоту в 100 раз. Получился своеобразный разгон. Итак, основная активность процессора происходит в методе next().

Пришло время разработать систему команд процессора. Как я уже говорил, я основывался на материалах проекта Оберон 2013. Н. Вирт

разработал простую систему команд для реализации своего RISC-процессора на ПЛИС. Я модернизировал эту систему команд для троичного кода. Двух- или трех-операндная арифметика, условные переходы, прямая и косвенная адресация памяти.

В процессоре будет 27 регистров общего назначения, дополнительный регистр PC будет обозначать адрес расположения следующей команды в памяти, регистр IR будет содержать текущую команду. Также присутствует дополнительный трит NZ, который будет содержать дополнительный результат выполнения операций над регистрами. Некоторые регистры общего назначения заберет себе система Оберон для размещения адресов возврата, вершины стека и т.д.

Как известно, процессоры RISC обычно используют отдельные команды для загрузки и выгрузки данных в оперативную память, а все операции проводят над регистрами и данными в них.

Итак, алгоритм действий процессора такой — из памяти читается слово по адресу PC, значение записывается в IR и отправляется дешифратору команд, который отправляет сигналы тем или иным блокам на выполнение действий. Такие действия могут поменять значение регистра, при этом в регистр NZ записывается информация о том, является ли значение нулем или оно больше нуля. Вот так, одним тритом отвечают на два вопроса. В последствии этот трит может быть использован при исполнении инструкции условного перехода. В результате выполнения команды меняется состояние памяти в местах, которые исполняемый код считает переменными, меняется адрес перехода процессора на следующем шаге, итерация завершается. Завершение работы процессора происходит при переходе на -1 ячейку памяти, так как в ней записана команда с форматом — (-13).

Всю систему команд нет смысла расписывать. С ней можно ознакомиться в документе github.com/kpmy/tri/blob/master/doc/trinary-0.pdf.

Общение с внешним миром происходит с помощью записи в ячейку памяти с предустановленным адресом значения, которое обработает хост-исполнитель. Например, можно таким образом реализовать примитивную отладочную консоль.

Так как у нас веб-приложение, выведем эту консоль в аутентичном черном окошке с белыми буквами. Для этого воспользуемся готовым компонентом и возможностями стандартной библиотеки Dart по управлению веб-содержимым.

+0. Первые шаги

Так как код из рабочей виртуальной машины у меня уже был, коротко опишу особенности его исполнения.

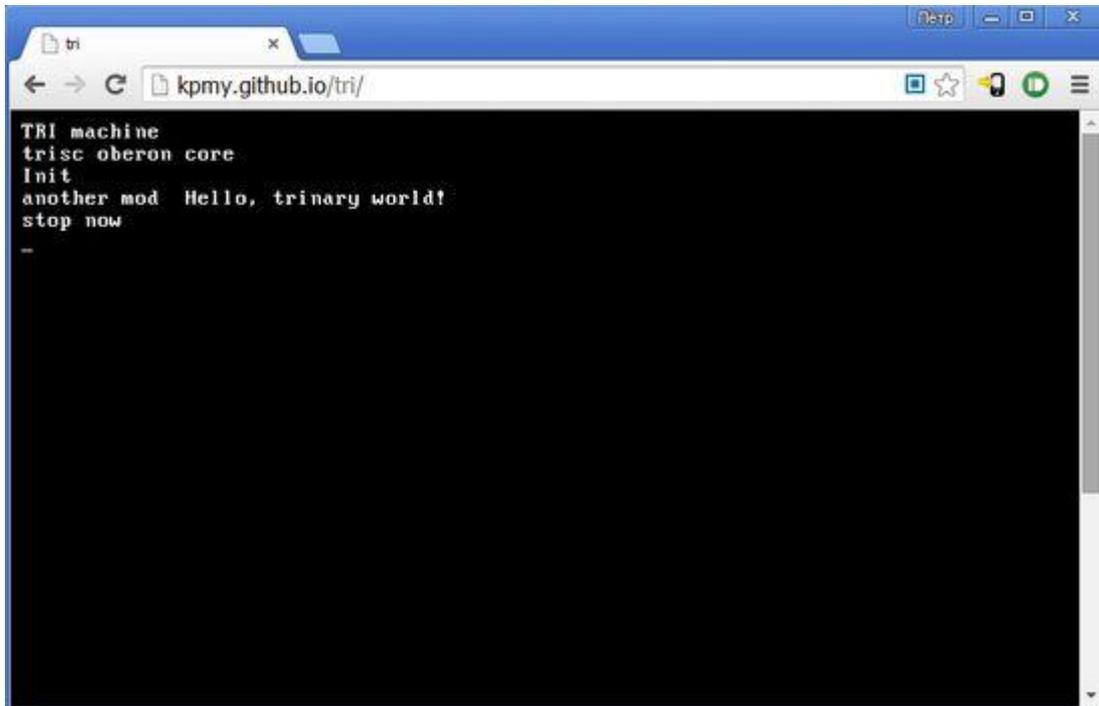
Итак, для прошивки в память готового кода опишем класс-загрузчик, который будет загружать код с сервера и записывать его в память. Код в формате JSON, странно, но факт, ведь любой бинарный формат записи был бы не совсем совместим с троичным кодом.

По канонам системы Оберон, загрузчик выполняет модификацию адресов перехода, простая математика вносит в код поправку на смещение кода загружаемого модуля относительно нулевой позиции, которую задает компилятор при компиляции.

Отдельным модулем идет bootstrap, это несколько команд, которые установят в памяти константы машины (размер памяти, адрес таблицы модулей и др.) и переведет процессор на адрес первой исполняемой команды. Bootstrap был подготовлен вручную.

Модуль Core создан по образу и подобию ядра системы Оберон, модулю Kernel, так как это ядро, в нем много прямых операций с памятью, реализация аллокатора динамических структур (глючит иногда) реализация перехватчика исключений и т.д.

Как раз в модуле Core реализуем самую примитивную консоль. Для вывода строк и чисел будем записывать значения символов в ячейку памяти, как было описано выше. Платформозависимый модуль SYSTEM является виртуальным, его вызовы компилятор переводит непосредственно в машинный код.



Невыразительный скриншот.

Проверить работоспособность получившейся виртуальной машины можно вот [здесь](#). Конечно, комплексная отладка и процессора и компилятора одновременно привела к некоторым багам (которые я еще не нашел), но как proof of concept результат работы мне показался достаточным.

+-. Итоги

В итоге мы получили вполне работоспособный, расширяемый во все стороны аналог процессора Н. Вирта из проекта Оберон 2013 с модификацией для троичной системы счисления и троичного кода и несколько модулей для работы в получившейся системе.

В оригинальном интерпретаторе я предпринял попытку развить успех и реализовать общение с внешним миром по аналогу порта rs232, с файловой системой на основе протокола 9p. И вот с чем я столкнулся. И та и другая технология, хоть и декларируются кроссплатформенными, при вводе в понятие платформы тритов и трайтов стремительно теряют свою кроссплатформенность. Основа в виде байтов и битов делает портирование таких технологий нетривиальной задачей.

Конечно, здесь можно возразить, что значимость и распространенность троичных систем равна нулю, но тут как в анекдоте про Вовочку, троичность есть, а слов про кроссплатформенность для нее нет. Возможно, это является некоторым тормозом в распространении троичных систем. Ведь все и так работает.

Лично я увидел только одно оправданное применение троичных машин — это организация защищенных от вторжений каналов связи. Ведь даже при наличии прямого доступа к каналу хакеру потребуется как минимум аппаратный дешифратор сигналов, который еще надо разработать. Таким образом, борьба брони и снаряда может дать жизнь промышленному применению описанных технологий.

+0-. Ссылки

Ну и пожалуй, несколько ссылок для тех, кто заинтересуется.

- trinary.ru красивый сайт с калькуляторами, календарями, симулятором ОС оригинальной Сетуни.
- ternarycomp.cs.msu.ru более серьезный сайт, с описанием патентов, алгоритмов
- www.inf.ethz.ch/personal/wirth/ProjectOberon/index.html авторская страница проекта Оберон 2013.
- github.com/kpmy/tri репозиторий проекта
- bitbucket.org/petryxa/trisc репозиторий оригинального эмулятора

+00. P.S

Н.П. Брусенцов скончался 4 декабря 2014 года. Надеюсь, дело его жизни не будет забыто.

Статья с сайта АКАДЕМИЯ ТРИНИТАРИЗМА 05.01.2016

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Коротков Анатолий Васильевич, базовое образование: инженер-электрик, закончил Новочеркасский политехнический институт (НПИ) в 1967 году, кандидат технических наук, доктор физико-математических наук, доцент. Длительное время работал в ОКТБ «Старт» и «Орбита» (которые были задействованы в советской космической программе) в г. Новочеркасске. Область научных интересов – обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) – как многомерной базы семимерной физической теории.

Мешков Владимир Евгеньевич, базовое образование: инженер-системотехник, НПИ в 1975 году, кандидат технических наук, доцент. Свободный исследователь.

Член Российской ассоциации искусственного интеллекта, индивидуальный член Европейской координационной комиссии по искусственному интеллекту. Область научных интересов: разработка теоретических основ применения бионических методов в решении задач синтеза сложных топологий, применение гибридных нейросетевых технологий в решении задач автоматической классификации и распознавании смыслов текстов, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В. Короткова в информатике и искусственном интеллекте.

Чураков Вадим Сергеевич, горный инженер-электрик, кандидат философских наук, доцент. Научный редактор серий «Библиотека времени» и «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии».

Только для научных библиотек

Научное издание

**Семимерная парадигма А.В. Короткова
и ее возможные приложения: сборник научных работ**

Подписано в печать 09.01.2023 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая. Тираж 500 экз.
Усл.-печ. л. 33,13. Уч.-изд. л. 37,65. Заказ 0101/23

Издательство «НОК».
346430. Новочеркасск, ул. Дворцовая, 1.

Отпечатано в ООО НПП «НОК» 346430.
Новочеркасск, ул. Просвещения, дом 155 А
nok.company@gmail.com