

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОННОВ

С.А. ЧАПЫГНА

Т. I

II

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

СЕРГЕЯ АЛЕКСЕЕВИЧА

ЧАПЛЫГИНА

II



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
ЛЕНИНГРАД
1933

~~2258155~~
~~1933~~

~~ПРОВЕРЕНО~~
~~1936 г. №~~

~~ГОСУДАРСТВЕННЫЙ~~
~~НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ~~
~~ИНСТИТУТ АКАДЕМИИ НАУК СССР~~

1992 $\frac{1}{60}$ Н
7903

~2

Октябрь 1933 г.

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Непременный секретарь академик В. Волин

Редактор издания академик А. Н. Крылов

Технический редактор С. А. Шабуневич. — Ученый корректор Е. В. Ростовцева

Сдано в набор 15 октября 1932 г. — Подписано к печати 31 октября 1933 г.

Тит. л. + 290 стр.

Формат бум. 72 × 110 см. — 18 $\frac{1}{4}$ печ. л. — 63294 печ. зн. — Тираж 3200

Ленгортит № 16983. — АНИ № 142. — Заказ № 2092.

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ВЫПУСКА

	Стр.
О газовых струях (с 7 фиг.)	3
Предисловие (3). I. Общие основания методы исследования (5). II. Некоторые свойства функций z_n , u_n , x_n . Доказательство сходимости рядов ψ и φ (19). III. Истечение газа из бесконечно широкого сосуда (39). IV. О давлении газового потока на пластинку (59). V. Приближенная метода решения задач о газовых струях (78). Дополнительные заметки (87).	
О трении смазочного слоя между шипом и подшипником (с 4 фиг.)	91
К теории гидрокона. Статья первая (с 4 фиг.)	107
1. Введение (107). 2. Простейший вид гидрокона в случае отсутствия вращения воды в трубе (108). 3. Правило приближенного построения простейшего типа всасывающей трубы и гидрокона (118).	
К теории гидрокона. Статья вторая (с 8 фиг.)	120
2. Гидрокон в виде изогнутой трубы с внутренним ядром (120). 2. Правило построения гидрокона (130).	
К вопросу о вычислении силы сопротивления воздуха полету снарядов с различными очертаниями головной части (с 3 фиг.)	134
О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела [к теории аэроплана] (с 16 фиг.)	144
Результаты теоретических исследований о движении аэропланов (с 14 фиг.)	179
Теория решетчатого крыла (с 6 фиг.)	191
К общей теории крыла моноплана (с 4 фиг.)	205
Схематическая теория разрезного крыла аэроплана (с 7 фиг.)	246
К теории открывка и закрывка (с 3 фиг.)	277
Резюме на английском языке	289
Библиографический указатель	290

THEORY OF THE EARTH

The theory of the earth is a branch of geology which deals with the origin and development of the earth and its various parts. It is a science which seeks to explain the processes which have shaped the earth and its features. The theory of the earth is based on the study of the earth's history and the changes which have taken place in its structure and composition. It is a science which is constantly developing and changing as new discoveries are made and new theories are proposed. The theory of the earth is a branch of geology which deals with the origin and development of the earth and its various parts. It is a science which seeks to explain the processes which have shaped the earth and its features. The theory of the earth is based on the study of the earth's history and the changes which have taken place in its structure and composition. It is a science which is constantly developing and changing as new discoveries are made and new theories are proposed.

О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В своем мемуаре: «Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen» ¹⁾ Гельмгольц показал возможность математического анализа таких течений несжимаемой жидкости, при которых образуются так называемые лучи (Strahle) или струн, бегущие среди спокойной области. Вслед за работой Гельмгольца, в иностранной и русской научной литературе появилось довольно много исследований, посвященных той же задаче; в настоящее время мы имеем вполне выработанную методику проф. Н. Е. Жуковского ²⁾, которая позволяет направиться на решение любого вопроса об установившемся невихревом течении идеальной жидкости при следующих условиях: во-первых, жидкость везде движется параллельно некоторой плоскости, причем поток может быть прегражден перпендикулярными к этой плоскости плоскими стенками; и, во-вторых, движение происходит в отсутствии сил ³⁾.

Та же задача для идеального газа едва затронута. Нам известна лишь одна работа, в которой трактуется о газовых струях; это — статья Р. Мольенброэка: «Ueber einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials» ⁴⁾. Мольенброэк составил дифференциальные уравнения, от которых зависит вопрос о струевых течениях газов, и указал некоторые частные интегралы этих уравнений, едва ли, впрочем, соответствующие даже теоретически мыслимому движению газа.

Мы в предлагаемой работе даем прием, при помощи которого возможно во многих случаях найти решение заранее поставленной задачи о прерывном течении идеального газа. При этом приходится поставить все те условия, которые в аналогичных задачах о несжимаемой жидкости принимаются в цитированном выше сочинении Н. Е. Жуковского; но, сверх того, применимость развитого здесь анализа ограничивается еще и специальным требованием: именно, скорость газовых частиц нигде не должна превышать

¹⁾ Mber. Königl. Akad. zu Berlin, 1868.

²⁾ «Видоизменение метода Кирхгофа» и т. д. Мат. сб., т. XV, 1890.

³⁾ Те же условия ставятся почти во всех работах этого рода.

⁴⁾ Arch. d. Math. u. Phys., Gauthier-Villars, 1890.

скорости звука при том физическом состоянии газа, в котором он находится в данной точке: соответственные стеснения наложатся и на границы, в которых может изменяться давление. Если это дополнительное условие не выполнено, то, повидимому, установившегося движения и быть не может. Мы полагаем, однакоже, что при помощи некоторой гипотезы, указанной в нашем сочинении, возможно анализировать вопрос и в том случае, если дополнительное условие не соблюдается — но математическую обработку этой задачи отлагаем до следующей статьи.

Переходим к краткому обзору содержания нашей работы.

В главе I мы выводим дифференциальные уравнения задачи о течении газа в двух измерениях и указываем те частные интегралы, которые разрешают задачу о струях; при этом мы пользуемся теми же самыми независимыми переменными, как и Moisewitsch но находим выгоднее рассматривать иные функции. Соответствующие вопросу функцию тока и потенциал скоростей мы изображаем в виде рядов.

Исследование сходимости этих рядов в связи с некоторыми свойствами функций, в них входящих, составляет предмет главы II.

В главе III мы решаем задачу об истечении газа из бесконечного сосуда с плоскими стенками.

В IV — рассматриваем удар газовой струи в пластинку и подробнее останавливаемся на том предельном случае, когда эта струя расширяется до бесконечности, обращаясь в газовый поток. Этим самым разрешается и вопрос о сопротивлении газовой среды полету пластинки.

Наконец, в главе V указана приближенная метода, позволяющая проще решать вопросы о струевых течениях в том случае, если скорости газа (скорости тел в газе) не очень значительны.

В конце работы приложены дополнительные заметки, из которых вторая устанавливает связь анализа главы V с некоторыми задачами теории минимальных поверхностей.

Позволяем себе еще отметить здесь следующее любопытное обстоятельство: полученные нами в главах III и IV результаты, по крайней мере с качественной стороны, довольно хорошо согласуются с данными опыта, хотя экспериментальные исследования над явлениями, сопровождаемыми образованием струй, производились при условиях, далеко не похожих на принятые в наших теоретических изысканиях.

Основы излагаемой здесь методы с приложением ее к задаче об истечении вкратце были сообщены Московскому математическому обществу вначале 1896 г.; в более подробном виде эта работа докладывалась на XI Съезде естествоиспытателей и врачей в 1901 г.

Заканчивая на этом вступительные замечания, считаем своим приятным долгом, в заключение, выразить искреннюю благодарность Е. А. Болотову за его любезную помощь при корректуре.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Представим себе бесконечную массу совершенного газа, заключенную между двумя параллельными плоскостями и отчасти ограниченную сверху некоторыми цилиндрическими поверхностями, перпендикулярными к упомянутым плоскостям. Одну из этих плоскостей примем за плоскость координат XU . Пусть масса газа находится в установившемся движении, и пусть направление скорости везде параллельно XU . Будем пренебрегать влиянием внешних сил и предположим, что скорости имеют потенциал. Так как мы желаем избежать образования вихрей, то необходимо считать давление функцией плотности. Будем принимать

$$(1) \quad p = k\rho^2,$$

останавливаясь, таким образом, на адиабатном процессе

Количество γ , равное для атмосферного воздуха 1.4025¹⁾, есть отношение удельных теплот. Мы предпочитаем рассматривать движение с сохранением тепла всякою частицею газа в виду малой теплопроводности и малой лучеиспускательной способности газа; благодаря этим обстоятельствам адиабатный процесс при значительных скоростях нам кажется наиболее близким к действительности. Во всяком случае, на результат нашего анализа придется смотреть как на первое приближение уже по тому одному, что мы совершенно не принимаем в расчет сцепления между частицами газа и возникающих отсюда сил вязкости, трения о стенки и тому подобных факторов, в задаче о газовой массе, может быть, более влиятельных, чем в случае движения капельной жидкости.

При высказанных предположениях, потенциал скоростей φ есть функция x и y , и мы имеем для компонентов скорости u , v выражения

$$(2) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Обозначив через ρ плотность газа, пишем условие неразрывности

$$(3) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0.$$

¹⁾ Emden. Ausströmungserscheinungen permanenten Gase. Ann. d. Phys. u. d. Chem., Bd. 69, II. 2, S. 445.

Закон Бернулли, в нашей задаче, при помощи ур-ния (1), поведет к соотношению

$$(4) \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{V^2}{2\alpha}\right)^\beta,$$

причем

$$(4') \quad V^2 = u^2 + v^2, \quad \alpha = \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma-1}, \quad \rho_0 = \text{const};$$

здесь ρ_0 , очевидно, представляет плотность в той точке текущего газа, где $V=0$.

Положим для краткости

$$\frac{V^2}{2\alpha} = \tau,$$

так что

$$(5) \quad \rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta.$$

Ур-ние (3) указывает на существование функции ψ , определяемой равенствами

$$(6) \quad \frac{\rho}{\rho_0} u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Из ур-ний (2) и (6), через посредство (5), мы получаем зависимость между функциями φ и ψ , характеризуемую формулами

$$(7) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = (1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - (1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Функция ψ представляет собою функцию тока; уравнение $\psi = \text{const}$ есть уравнение линий тока. Придавая постоянному последовательно значения C_1 и C_2 , легко убедиться, что $(C_1 - C_2)\rho_0$ выражает массу газа, протекающую через сечение струи между линиями тока

$$\psi = C_1, \quad \psi = C_2$$

в секунду.

Преобразуем ур-ния (7), приняв за независимые переменные количества φ , ψ и считая x , y функциями φ и ψ . Легко находим соотношения

$$D \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad D \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$D \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad D \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

где

$$D = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = (1 - \tau)^\beta V^2;$$

из этих уравнений получаем обратную величину квадрата скорости:

$$(7') \quad \frac{1}{V^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Ур-ния (7) переходят в

$$(8) \quad \begin{aligned} (1 - \tau)^\beta \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ (1 - \tau)^\beta \frac{\partial x}{\partial \psi} &= - \frac{\partial y}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Рассмотрим производные по φ и ψ от переменных $\tau = \frac{V^2}{2\alpha}$ и

$$(8') \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} = - \operatorname{arctg} \frac{\frac{\partial x}{\partial \psi}}{\frac{\partial y}{\partial \psi}};$$

θ есть, очевидно, угол наклона скорости к оси OX .

Дифференцируя V^2 по ψ , находим:

$$\frac{\partial (V^2)}{\partial \psi} = -2V^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \right),$$

или, на основании ур-ния (8),

$$\frac{\partial (V^2)}{\partial \psi} = -2V^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \right) (1 - \tau)^\beta;$$

дифференцирование θ по φ дает

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\partial x}{\partial \psi}}{\frac{\partial y}{\partial \psi}} = - \frac{\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2},$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -V^2 (1 - \tau)^{2\beta} \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \right);$$

Эти соотношения приводят к уравнению

$$(9) \quad \frac{\partial \lg V^2}{\partial \psi} = 2(1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}.$$

Далее найдем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} = V^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} \right);$$

при помощи ур-ния (8) получаем отсюда

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = V^2 (1 - \tau)^\beta \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} \right);$$

но

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{V^2} (1 - \tau)^{-2\beta} \right\} = \frac{1}{4\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{(1 - \tau)^{-2\beta}}{\tau} = \\ &= -\frac{1}{4\alpha\tau^2} [1 - (2\beta + 1)\tau] (1 - \tau)^{-2\beta - 1} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

теперь, совершив окончательное приведение в формуле для $\frac{\partial \theta}{\partial \psi}$ и вводя τ вместо V^2 в соотношение (9), мы приходим, наконец, к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} &= 2\tau(1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \\ (10) \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} &= -2\tau \frac{(1 - \tau)^{\beta + 1}}{1 - (2\beta + 1)\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Переходя затем к независимым переменным τ , θ и приняв φ и ψ за их функции, мы легко получаем формулы, отыскание которых было нашей целью; они суть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 2\tau(1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= -\frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)} (1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ (12) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ 2\tau(1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\} + \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau(1 - \tau)} (1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ур-ния (11) и (12) решают вопрос о течении газа, если известна область переменных τ , θ , соответствующая этому течению, если даны значения ψ на граничных линиях тока, если везде внутри площади τ , θ функция ψ вместе с своими первыми производными конечна, однозначна и непрерывна, а количество τ не превышает $\frac{1}{2\beta + 1}$ и обращается в нуль лишь в некоторых точках контура. Площадь τ , θ будем считать односвязной и замкнутой.

Чтобы обнаружить полную определенность функции ψ при указанных условиях, применим доказательство от противного: предположим, что существуют две функции ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющие всем нашим требованиям, и покажем, что $\psi_1 - \psi_2 = 0$. Функция $\psi_3 = \psi_1 - \psi_2$ везде в заданной области значений τ , θ конечна и непрерывна, удовлетворяет ур-нию (12) и на границах области обращается в нуль.

Умножаем левую часть уравнения (12) на $\psi d\tau d\theta$ и интегрируем в пределах площади τ, θ ; обозначая через I результат интегрирования, легко находим, по замене ψ через ψ_3 :

$$I = - \int \int \left\{ 2\tau(1-\tau)^{-\beta} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\tau d\theta + \\ + \int \left\{ 2\tau(1-\tau)^{-\beta} \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} d\theta + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} d\tau \right\} = 0;$$

здесь двойной интеграл распространен на всю площадь τ, θ , однократный — на ее контур. Так как на контуре $\psi_3 = 0$, то равенство $I = 0$ может иметь место лишь при условии обращения в нуль двойного интеграла; но при высказанных выше условиях подынтегральная функция в этом интеграле может быть или положительна, или равна нулю; ясно, что надо принять последнее; а это поведет к равенствам

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} = 0, \quad \text{и} \quad \psi_3 = \text{const} = 0.$$

Требуемое таким образом доказано.

В числе необходимых условий определенности решения мы указали на то, что везде внутри области течения газа должно иметь место неравенство

$$\tau < \frac{1}{2\beta+1};$$

выясним смысл этого требования. Обращаемся для этого к ф-лам (4), (4'); при

$$(13) \quad \tau = \frac{V^2}{2\alpha} \leq \frac{1}{2\beta+1} = 0.17$$

мы имеем

$$V^2 \leq \frac{2\alpha}{2\beta+1}, \quad V^2 \leq \frac{2k\gamma p_0^{\gamma-1}}{1+\gamma}$$

там, где

$$V^2 = \frac{2k\gamma p_0^{\gamma-1}}{1+\gamma}, \quad \tau = \frac{1}{2\beta+1}, \quad \rho^{\gamma-1} = \rho_0^{\gamma-1}(1-\tau), \quad \rho^{\gamma-1} = \frac{2\rho_0^{\gamma-1}}{1+\gamma};$$

а отсюда

$$V^2 = k\gamma \rho^{\gamma-1};$$

или, воспользовавшись соотношением (1),

$$(13') \quad V^2 = \frac{p}{\rho}.$$

Таким образом, стеснение, наложенное на τ , равносильно требованию, чтобы скорость текущего газа нигде не превышала скорости распространения звука при тех физических условиях, которые имеют место

в рассматриваемой точке. Мы полагаем, что таких скоростей, по крайней мере при установившихся течениях, и существовать не может¹⁾.

Предельная величина $\tau = \frac{1}{2\beta + 1}$ устанавливает также границы, в которых может измениться давление в области, занятой движущейся газовой массой. В самом деле, если переменное τ везде менее своей предельной величины, то

$$p \geq p_0 \left(1 - \frac{1}{2\beta + 1}\right)^\beta, \quad p \leq p_0 \left(1 - \frac{1}{2\beta + 1}\right)^{\beta\gamma},$$

но $\beta\gamma = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = 1 + \beta$, а потому

$$\frac{p}{p_0} \geq \left(\frac{2\beta}{2\beta + 1}\right)^{\beta+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{2}} = 0.53, \quad \frac{p_0}{p} \leq 1.89,$$

если мы примем приблизительно $\gamma = 1.40$.

Обратимся к выводу других весьма важных теорем о рассматриваемом движении.

Докажем, во-первых, что *потенциал скоростей* φ , рассматриваемый как функция координат, нигде в области течения не может иметь ни *maximum'a*, ни *minimum'a*. Для доказательства этого положения можно было бы ограничиться следующим рассуждением: если бы существовала точка, в которой φ имело бы *maximum*, то вокруг нее должна была бы существовать сомкнутая кривая, на которой φ имело бы постоянное значение, меньшее максимального; в таком случае газ втекал бы через эту кривую снаружи ограниченной ею площади внутрь; масса его, ограниченная кривою, увеличивалась бы с течением времени, и движение не могло бы быть установившимся. Подобное же рассуждение устраняет и предположение о *minimum'e* φ . Но так как теорема о функции φ имеет место и для функции ψ , в виду того, что она справедлива также и для координат x , y , рассматриваемых как функции независимых переменных φ и ψ , то мы дадим и другое ее доказательство, годное для всех этих функций.

Из ф-л (7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} (1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (1 - \tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

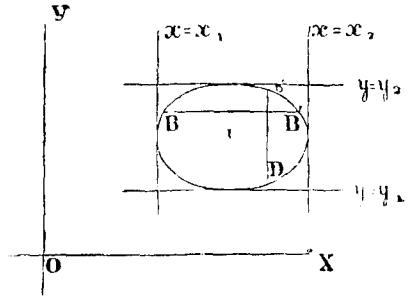
Пусть в некоторой точке A области течения φ имеет *maximum* (или *minimum*). Отметим сомкнутую, окружающую эту точку кривую (C) , вдоль которой φ сохраняет постоянное значение k , меньшее максимального (или большее минимального). Умножаем приведенное выше уравнение для φ

¹⁾ См. также: Lamb. Hydrodynamics, 1895, pp. 28, 29, и цитируемых им авторов. В настоящее время (1933 г.) взгляды в этом отношении изменились.

на $F(\varphi) dx dy$ и интегрируем по площади, ограниченной кривою (C). Совершив интегриацию по частям, находим

$$(a) \quad F(k) \int_{y_1}^{y_2} \int_B^{B'} (1-\tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + F(k) \int_{x_1}^{x_2} \int_B^{B'} (1-\tau)^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx - \\ - \int \int F'(\varphi) (1-\tau)^\beta \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0.$$

В этом соотношении знак подстановки $\int_B^{B'}$ показывает, что подинтегральная функция составляет разность значений $(1-\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ в точках B' и B (фиг. 1); аналогичное значение имеет и вторая подстановка. Так как, в случае maximum'a, φ при переходе с контура (C) внутрь его увеличивается, то в точках B , B' мы имеем $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx > 0$ при переходе внутрь области интеграции; а так как в первой из этих точек $dx > 0$, а во второй < 0 , при движении вдоль BB' , то



Фиг. 1.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B > 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{B'} < 0 \quad \text{и} \quad \int_B^{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0;$$

точно так же и

$$\int_B^{B'} \frac{\partial \varphi}{\partial y} < 0.$$

Выбираем $F(\varphi)$ так, чтобы $F(\varphi)$ и $F'(\varphi)$ везде внутри (C) были более нуля. Обращаясь теперь к выведенному соотношению (а), убеждаемся, что все его слагаемые менее нуля, а следовательно, оно невозможно; стало быть невозможен и предположенный maximum φ . [Предположив minimum, мы имели бы противоположный знак у подстановок, выбрали бы функцию F так, чтобы имело место неравенство $F(\varphi) F'(\varphi) < 0$, и опять пришли бы к невозможности равенства (а)].

Совершенно то же рассуждение докажет справедливость выведенной теоремы и в других упомянутых выше случаях, причем для функций $x(\varphi, \psi)$ и $y(\varphi, \psi)$ придется пользоваться ф-лами (8).

При помощи ур-ний (10) нетрудно доказать аналогичную теорему и для функции τ ; τ , а следовательно, и скорость течения не может иметь maximum'a в области переменных φ, ψ ; minimum может существовать,

но минимальное значение τ есть нуль. Чтобы обнаружить это, составим, на основании ф-л (10), уравнение

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau} (1 - \tau)^{-\beta-1} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{(1 - \tau)^2}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} = 0.$$

Предположим, что существует в плоскости φ, ψ точка, где τ имеет максимум или минимум. Отметим окружающую эту точку кривую (C) с постоянным значением τ , умножим уравнение для τ на некоторую функцию $f(\tau)$ и интегрируем левую часть по площади, ограниченной кривою (C) . Совершив интеграцию по частям, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \int \left/ \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau} (1 - \tau)^{-\beta-1} f(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} d\psi + \int \left/ \frac{(1 - \tau)^2}{\tau} f(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial \psi} d\varphi - \right. \\ & \left. - \int \int \left\{ \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau} (1 - \tau)^{-\beta-1} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{(1 - \tau)^2}{\tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi} \right)^2 \right\} f(\tau) d\varphi d\psi = 0. \right. \end{aligned}$$

Совершенно так же, как и в случаях, рассмотренных выше, доказываем невозможность соотношения; но легко видеть, что доказательство будет иметь силу лишь при условии: $\tau \leq \frac{1}{2\beta + 1}$ внутри области течения,

а это условие уже принято нами и выяснен его физический смысл. Случай $\tau = 0$ исключается сам собою из области применимости приведенных рассуждений и вот почему: в точке $\tau = 0$, если эта точка лежит внутри текущей массы, сходятся струи; легко непосредственно усмотреть, что в таком случае координаты x, y не могут оказаться однозначными функциями φ, ψ ; область φ, ψ будет представляться в виде, по крайней мере, двулистной Римановской поверхности, чего не предполагалось при составлении двукратных интегралов, фигурировавших в наших рассуждениях. Но легко без всяких формул убедиться, что значение $\tau = 0$ есть минимум τ ; для этого достаточно вспомнить, что $\tau = \frac{u^2 + v^2}{2\alpha}$, а так как эта функция

везде положительна, то значение нуль, действительно, представляет ее минимум. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие течения газа, при которых критическая точка $\tau = 0$ лежит на граничном контуре области τ, θ и поверхность области φ, ψ однолистная.

Составив по ф-лам (10) дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \tau (1 - \tau)^{-\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\tau (1 - \tau)^{\beta+1}}{1 - (2\beta + 1)\tau} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = 0$$

и применив описанный уже прием, мы убеждаемся, что функция $\theta(\varphi, \psi)$ не может иметь ни максимум'a, ни минимум'a. Подобным же образом установим отсутствие поворотных значений и функций φ, ψ от τ и θ , если эти последние величины примем за независимые переменные; для сего придется воспользоваться ф-лами (11).

Из доказанных теорем явствует, что в области φ, ψ не может существовать замкнутых кривых, вдоль которых функция x, y, τ, θ сохраняли бы постоянные значения; все такие кривые должны оканчиваться на границах области. Точно так же в области τ, θ расположатся кривые $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$.

В приложениях мы будем иметь в виду лишь такие задачи, которым соответствует область τ, θ , ограниченная концентрическими кругами и проходящими через их центр отрезками прямых. Количества τ, θ при этом будут представлять полярные координаты точек их области, и общий центр граничных кругов будет полюсом координат.

При таких условиях, из теоремы о невозможности maximum'a и minimum'a $\tau(\varphi, \psi), \theta(\varphi, \psi)$ мы можем заключить, что внутренним точкам области φ, ψ соответствуют внутренние же точки области τ, θ .¹⁾ Заметим еще, что пользуясь положением об отсутствии maximum'a и minimum'a у функции $\psi(\tau, \theta)$, мы снова можем получить доказанную уже ранее теорему об определенности этой функции, если она непрерывна внутри области τ, θ и задана на ее границах. *Ряд граничных значений может быть вообще и прерывным.*

Пусть теперь нам дана некоторая задача о течении газа; пусть мы знаем соответственный контур области переменных τ, θ , удовлетворяющий

условию $\tau < \frac{1}{2\beta + 1}$; пусть, наконец, ψ на контуре известно; если из каких-

либо соображений можно заключить, что поставленная задача имеет решение, и если мы найдем непрерывную функцию ψ , выполняющую поставленные требования, то эта функция действительно будет представлять функцию тока, так как другой быть не может¹⁾.

Но такие побочные соображения не всегда могут а priori иметь место; а раз этого нет, то отыскав функцию ψ и по ней φ , позволительно еще сомневаться, точно ли эти функции дают возможное течение газа. Чтобы эти сомнения устранить, необходимо показать всякий раз, что формулы для φ и ψ определяют τ и θ в зависимости от x и y , однозначно.

Для разъяснения этого пункта рассуждаем следующим образом: пусть определена однозначная функция $\psi(\tau, \theta)$; тогда из формулы

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

и аналогичных ей мы, на основании соотношений (8) и формул

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}},$$

¹⁾ По поводу теоремы об определенности решения дифференциальных уравнений того же типа, как и уравнения для функции ψ , см. также: Picard, Traité d'analyse, t. II, pp. 23 — 32.

получаем

$$V\sqrt{2\pi\tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta (1 - \tau)^{-\beta} \text{ и подобные.}$$

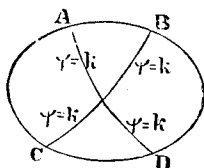
Таким образом, производные от $x(\tau, \theta)$ и $y(\tau, \theta)$ определяются однозначно в зависимости от τ и θ . Если Якобиевский определитель $\begin{pmatrix} x, y \\ \tau, \theta \end{pmatrix}$ не обращается в нуль внутри области τ, θ , то эти последние величины, как известно, определяются однозначно в зависимости от x, y . Но

$$\begin{pmatrix} x, y \\ \tau, \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, y \\ \varphi, \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi, \psi \\ \tau, \theta \end{pmatrix},$$

а, на основании (8) и (11) соотношений

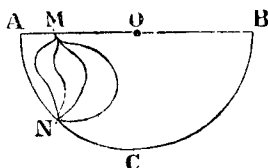
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x, y \\ \varphi, \psi \end{pmatrix} &= \frac{(1 - \tau)^{-\beta}}{\tau}, \\ -\begin{pmatrix} \varphi, \psi \\ \tau, \theta \end{pmatrix} &= 2\tau(1 - \tau)^{-\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau} (1 - \tau)^{-\beta-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что если везде $\tau \leq \frac{1}{2\beta + 1}$, то равенство $\begin{pmatrix} x, y \\ \tau, \theta \end{pmatrix} = 0$ возможно лишь при одновременном обращении в нуль обеих частных производных функций ψ . Это может иметь место в узловой точке одной из



Фиг. 2.

линий $\psi = \text{const}$, буде узловая точка на этой кривой существует. Вообще отвергать существование таких узловых точек мы не можем; но можем утверждать, что линия $\psi(\tau, \theta) = \text{const}$ ни в каком случае не будет образовывать петель, так как тогда внутри петли существовали



Фиг. 3.

бы замкнутые линии $\psi = \text{const}$. Стало быть, образовав узел, наша кривая должна своими ветвями упираться в границы области, примерно так, как указано на фиг. 2. Но если, хотя бы из условий задачи, нам известно, что все кривые $\psi = \text{const}$ выходят из одной и той же точки контура τ, θ и вновь сходятся в одной и той же его точке, то уже указанное на фиг. 2 расположение невозможно, а следовательно, невозможно и исчезновение определителя $\begin{pmatrix} x, y \\ \tau, \theta \end{pmatrix}$; то же самое справедливо и в том случае, если, выходя из одной и той же точки границы области, кривые $\psi(\tau, \theta) = \text{const}$ затем дойдут до пучка, причем каждый пучок собирается опять в одну точку.

Совсем другая картина будет представляться, если мы отыскиваем установившееся течение газа при таких обстоятельствах, что τ выходит за предельное значение $\frac{1}{2\beta + 1}$. Тогда определитель $\begin{pmatrix} \varphi, \psi \\ \tau, \theta \end{pmatrix}$ в той части области τ, θ ,

где τ более предельной величины, представляет разность двух положительных количеств и будет обращаться в нуль вдоль некоторой кривой. Рассмотрим, например, тот случай, когда границам области φ, ψ в области τ, θ соответствует полуокружность ACB и стягивающий ее диаметр AB , причем центр полуокружности находится в точке $\tau=0$; пусть ψ вдоль этого контура имеет те или другие постоянные значения.

Вдоль линии OA мы имеем, очевидно, $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$; на полуокружности ACB $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$. Поэтому, при переходе по любой кривой из некоторой точки M диаметра в точку N полуокружности, отношение $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2 : \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2$ проходит всевозможные значения от 0 до ∞ . Отсюда следует, что если мы выберем какое-либо значение $\tau_0 > \frac{1}{2\beta+1}$ для τ , то на всякой из кривых, соединяющих M и N , будет такая точка, в которой выражение

$$2\tau_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1 - (2\beta+1)\tau_0}{2\tau_0} (1 - \tau_0) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2$$

обращается в нуль. Ряд этих точек будет представлять в области τ, θ некоторую кривую; точка встречи этой линии с линией $\tau = \tau_0$ и будет тем пунктом, в котором имеет место равенство

$$(1 - \tau)^\beta \left(\frac{\psi, \varphi}{\tau, \theta}\right) = 2\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1 - (2\beta+1)\tau}{2\tau} (1 - \tau) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2 = 0,$$

а стало быть, по вышеприведенным формулам, и равенство

$$\left(\frac{x, y}{\tau, \theta}\right) = 0.$$

Очевидно, из того, как мы получили одну из таких точек, надо сделать вывод, что они займут сплошь некоторую кривую. Таким образом, $\tau(x, y)$ и $\theta(x, y)$ не будут однозначны, как это необходимо в действительном движении газа.

Итак, если из условий задачи можно заключить, что давление текущего газа и скорости его частиц должны выйти из пределов, определяемых неравенством $\tau < \frac{1}{2\beta+1}$, то установившееся движение, по крайней мере, не всегда возможно.

Обратимся к разрешению того вопроса, который мы специально имели в виду при постановке нашего анализа. Будем рассматривать течения газа, прегражденные плоскими стенками, с краев которых газ срывается, обтекая далее области постоянного давления: при этом мы остановимся подробнее на разборе задач об истечении газа из весьма большого сосуда и о давлении беспредельного газового потока на пластинку.

Рассмотрим частное решение ур-ния (12) вида

$$(14) \quad \psi_n = z_n \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

где z_n есть функция одного τ . Для определения этой функции, мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(15) \quad \frac{d}{d\tau} \left\{ \tau(1-\tau)^{-\beta} \frac{dz_n}{d\tau} \right\} - \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\beta} n^2 z_n = 0,$$

или, в раскрытой форме:

$$(16) \quad \tau^2(1-\tau) \frac{d^2 z_n}{d\tau^2} + \tau[1 + (\beta - 1)\tau] \frac{dz_n}{d\tau} - n^2[1 - (2\beta + 1)\tau] z_n = 0.$$

Положив

$$(17) \quad z_n = \tau^n y_n,$$

где $n > 0$, находим для определения y_n , уравнение

$$(18) \quad \tau(1-\tau) \frac{d^2 y_n}{d\tau^2} + [2n + 1 + (\beta - 2n - 1)\tau] \frac{dy_n}{d\tau} + \beta n(2n + 1) y_n = 0.$$

Это уравнение — гипергеометрическое.

Интегралы его имеют вид

$$y_n^{(1)} = K(\tau), \quad y_n^{(2)} = \tau^{-2n} \cdot K(\tau),$$

где $K(\tau)$ обозначает ряд

$$c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \dots$$

Если мы желаем иметь в (14) выражение ψ , не обращающееся в бесконечность в критической точке $\tau=0$, то должно взять тот из интегралов ур-ния (16), который остается конечным при $\tau=0$. Поэтому мы полагаем, пользуясь обозначением Гаусса,

$$(19) \quad y_n = F(a_n, b_n, 2n + 1, \tau);$$

количества a_n и b_n определяются из уравнений

$$a_n + b_n = 2n - \beta, \quad a_n b_n = -\beta n(2n + 1).$$

Посмотрим, какие из задач вышеуказанного типа могут быть разрешены при помощи функции ψ , выражаемой формулой

$$(20) \quad \psi = A + B\theta + \sum B_n \psi_n,$$

где A, B, B_n — некоторые постоянные, а ψ_n определяется ф-лами (14), (17) и (19).

Обратим прежде всего внимание на граничные условия наших задач. Так как газовая масса должна быть ограничена линиями тока, то вдоль граничного контура области (τ, θ) ψ должно приобретать те или другие постоянные значения. При этом если рассматриваемая часть контура соответствует плоской стенке, то на ней θ , угол скорости с осью x , должен сохранять постоянную величину; а стало быть, эта часть границы будет

представлять отрезок прямой, проходящей через полюс $\tau = 0$. Если же дело идет о поверхности струи, то вдоль нее мы имеем давление $p = \text{const.}$, а следовательно, по теореме Бернулли, и скорость v должна здесь сохранять постоянное значение v_0 ; но $\frac{v^2}{2\alpha} = \tau$, и потому τ также вдоль струи имеет постоянную величину; ее мы будем обозначать через τ_0 . Ясно, что часть границы области τ , θ , соответствующая струе, будет изображаться дугою окружности, центром которой служит полюс.

Сравним теперь поставленную задачу о движении газообразных масс с соответствующею задачею о течении несжимаемой жидкости, при одних и тех же граничных условиях (при одинаковом расположении преграждающих стенок, одинаковых скоростях в бесконечно удаленных точках и при одной и той же скорости на границе струй, сбегающих с преград).

Последняя задача решается при помощи известной метода проф. Н. Е. Жуковского. Пользуясь этою методою, мы можем найти зависимость между мнимыми переменными $\lg \frac{v_0}{v} + i\theta = \lg \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau} + i\theta}$ и $w = \varphi_1 + i\psi_1$, где φ_1 и ψ_1 суть потенциал скоростей и функция тока, соответствующие задаче. Допустим, что мы получили

$$(21) \quad w = f\left(\lg \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau} + i\theta}\right)$$

и что эта функция может быть разложена в ряд вида

$$w = k + B \left(\lg \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau} + i\theta}\right) + \sum k_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n e^{2ni\theta};$$

тогда

$$(22) \quad \psi_1 = A + B\theta + \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \sin(2n\theta + \alpha_n).$$

Утверждаем, что та же задача о течении газа разрешится формулою

$$(23) \quad \lambda\psi = A + B\theta + \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n),$$

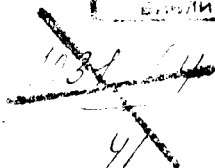
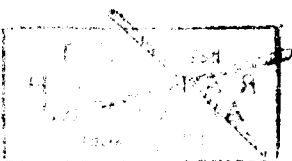
где y_n есть гипergeометрический ряд, определяемый ф-лою (19), $y_{n,0}$ — его частное значение по замене τ через τ_0 , а λ — некоторое постоянное.

Справедливость сказанного отчасти может быть выяснена теперь же. В самом деле, легко видеть, что при $\tau = \tau_0$ правые части ф-л (22) и (23) совпадают; стало быть, если при $\tau = \tau_0$ $\psi_1 = \text{const.}$, то и $\psi = \text{const.}$ Если далее при каком-нибудь значении $\theta = \theta_0$ функция, определяемая ф-лой (22), не зависит от τ , то это может иметь место лишь при выполнении условия: $\sin(2n\theta_0 + \alpha_n) = 0$ при всяком n , фигурирующем под знаком Σ ; но тогда и правая часть ф-лы (23) при таком θ будет иметь постоянную величину. Таким образом, граничные условия, налагаемые на функцию ψ , выполнены.

Собр. соч. С. А. Чаплыгина. II

ГОС. ПУБЛИЧНАЯ
УЧЕБНО-НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
СОВЕТСКОГО СОЮЗА

1992/60



Заметим затем, что ряд ψ формально удовлетворяет уравнению (12), так как представляет сумму его частных интегралов. Если теперь мы покажем, что при всяком $\tau < \tau_0$ ряд (23) сходится, а при $\tau = \tau_0$ стремится к тому же пределу, как и ряд (22), то выражаемая им функция, действительно, будет искомою функциею тока. Если, кроме того, будет показано, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно вместе с рядами, получающимися от его почленного дифференцирования по τ и θ , то мы будем в праве считать эти последние ряды выражением частных производных основного ряда; а тогда, воспользовавшись (7'), (8') и (11), по известному ψ найдем φ , x , y . Что касается φ , то оно найдется на основании ф-л (11), которые приведут к соотношению

$$d\varphi = -B \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau} (1 - \tau)^{-\beta-1} d\tau + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\tau_0^n y_{n,0}} \left[2 \sin(2n\theta + \alpha_n) d'\theta z_n' \tau (1 - \tau)^{-\beta} - \right. \\ \left. - 2n (\cos 2n\theta + \beta_n) d\tau z_n \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{2\tau} (1 - \tau)^{-\beta-1} \right];$$

отсюда легко получаем, воспользовавшись уравнением (15) и следующими:

$$(24) \quad \varphi = C + B(1 - \tau)^{-\beta} - \frac{B}{2} \int \frac{(1 - \tau)^{-\beta}}{\tau} d\tau - \\ - (1 - \tau)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left(1 + \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n} \right) \cos(2n\theta + \alpha_n).$$

Функции $1 + \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n}$, которые мы в дальнейшем изложении будем обозначать через x_n , играют важную роль в нашей задаче, так как через них выражаются характерные в различных вопросах постоянные. Некоторые свойства этих функций и приемы их вычисления, а также существенные для нас свойства функций z_n и y_n будут выяснены в следующей главе. Лишь ознакомившись со всеми этими свойствами, мы получим возможность обнаружить справедливость наших утверждений относительно основного ряда ψ , оставшихся недоказанными.

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ z_n , y_n И x_n . ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ РЯДОВ ψ И φ

Функция z_n есть тот из интегралов уравнения

$$(25) \quad \tau \frac{d}{d\tau} \tau (1 - \tau)^{-\beta} \frac{dz_n}{d\tau} = n^2 [1 - (2\beta + 1)\tau] (1 - \tau)^{-\beta-1} z_n,$$

который не обращается в бесконечность при $\tau=0$. Интеграл этот имеет вид $z_n = \tau^n y_n$, где $n > 0$ и y_n представляет из себя гипергеометрическую функцию

$$y_n = F(a_n, b_n, 2n + 1, \tau);$$

параметры a_n и b_n определяются формулами

$$a_n + b_n = 2n - \beta, \quad a_n b_n = -\beta(2n + 1).$$

Покажем прежде всего, что z_n не имеет действительных корней между значениями 0 и $\frac{1}{2\beta + 1}$ переменного τ . Предположим обратное, и пусть $\tau = a$ есть наименьший положительный корень функции z_n . Так как z_n обращается в нуль также и при $\tau=0$, то между значениями 0 и a должно существовать такое количество b , которое служит корнем уравнения $\frac{dz_n}{d\tau} = 0$. Таким образом, функция, стоящая под знаком дифференцирования в левой части уравнения (25), будет иметь корни $\tau=0$, $\tau=b$, а следовательно, производная ее должна обладать корнем $\tau=c$, причем $0 < c < b < a$. В виду того, что в правой части того же уравнения коэффициент z_n не может обратиться в нуль при $\tau < \frac{1}{2\beta + 1}$, мы должны предположить, что $z_n(c) = 0$ и, стало быть, функция z_n должна иметь корень $\tau = c < a$. Повторяя то же рассуждение, мы придем к заключению, что на протяжении значений переменного от 0 до a должно заключаться бесчисленное множество корней функции z_n ; но в таком случае она не могла бы выражаться степенным рядом.

Из только что доказанного положения следует, что z_n есть функция возрастающая. В самом деле, так как z_n' не имеет корней меньших

$\frac{1}{2\beta+1}$, то z_n должно изменяться все время в одном и том же смысле; так как оно положительно при весьма малом τ , то таков же знак его будет и для всякого значения переменного, заключенного в указанных пределах; таким образом, z_n возрастает при значениях τ , близких к нулю, а потому оно будет возрастать и далее, пока z_n' не переменит знака. Заметим, что

$$z_n' = z_n \left(\frac{n}{\tau} + \frac{y_n'}{y_n} \right) = \frac{z_n n}{\tau} x_n;$$

отсюда заключаем, что *при* $0 < \tau < \frac{1}{2\beta+1}$, *функции* x_n *корней не имеют и все время больше 0*, ибо в этих пределах $z_n' > 0$.

Обратимся теперь к функции y_n , голоморфному интегралу уравнения

$$(26) \quad y_n'' \tau (1 - \tau) + y_n' [(2n+1)(1-\tau) + \beta\tau] + \beta n (2n+1) y_n = 0,$$

или, что все равно,

$$(26') \quad \frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1-\tau)^{-\beta} y_n' + \beta n (2n+1) \tau^{2n} (1-\tau)^{-\beta-1} y_n = 0.$$

Из доказанной выше теоремы заключаем, что y_n *не имеет корней между значениями* τ , *заключенными в рассматриваемых пределах*. То же самое можно доказать и относительно всех последовательных производных этой функции. Прежде всего из ур-ния (26') заключаем, что сказанное справедливо по отношению к функции y_n' ; в самом деле, раз существовал бы корень у этой функции, производная

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1-\tau)^{-\beta} y_n'$$

имела бы также корень; а это невозможно, потому что второе слагаемое в левой части ур-ния (26') не может обращаться в нуль в пределах изменения τ . Продифференцировав m раз ур-ние (26), получим

$$y_n^{(m+2)} \tau (1-\tau) + y_n^{(m+1)} [(2n+m+1)(1-\tau) - (m-\beta)\tau] + \\ + [\beta n (2n+1) - m(2n-\beta) - m^2] y_n^{(m)} = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+m+1} (1-\tau)^{m-\beta} y_n^{(m+1)} + \\ + [\beta n (2n+1) - m(2n-\beta) - m^2] \tau^{2n+m} (1-\tau)^{m-\beta-1} y_n^{(m)} = 0.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и ранее, заключаем, что $y_n^{(m+1)}$ не может иметь корней в пределах изменения τ , если $y_n^{(m)}$ не имеет корней в этих пределах. Полагая $m=1, 2, 3, \dots$, убедимся в справедливости нашего утверждения.

Положив $\tau = 0$, имеем

$$y_n(0) = 1, y_n'(0) = -\beta n, y_n''(0) = \frac{\beta n}{2n+2} [\beta n(2n+1) - 2n + \beta - 1],$$

$$y_n'''(0) = -\frac{\beta n}{2n+2} \frac{\beta n(2n+1) - 2n + \beta - 1}{2n+3} [\beta n(2n+1) - 4n + 2\beta - 4];$$

так как β приблизительно равно 2.5, а n — число положительное, то знаки приведенных количеств чередуются; то же будет и при всяком τ , удовлетворяющем неравенствам $0 < \tau < \frac{1}{2\beta+1}$. Таким образом, $y_n > 0$, $y_n' < 0$, $y_n'' > 0$, $y_n''' < 0$, и количества y_n , y_n' , y_n'' численно убывают.

Рассмотрим теперь функцию $s_n = y_n(1-\tau)^{-m}$. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет эта функция, легко составляется по (26) и имеет вид

$$(1-\tau) \frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1-\tau)^{2m-\beta} s_n' + \tau^{2n} (1-\tau)^{2m-\beta} \left[(\beta n - m)(2n+1) + \right. \\ \left. + m(m-\beta-1) \frac{\tau}{1-\tau} \right] s_n = 0. \quad (27)$$

Положив $m = \beta n$, мы видим, что при $n > 1 + \frac{1}{\beta}$ количество, заключенное в квадратные скобки, сохраняет знак $+$, каково бы ни было τ ¹⁾; если n — целое, то указанное обстоятельство имеет место для всякого $n \geq 2$; при $n = 1$, это количество будет иметь знак $-$. Предположим пока, что $n > 1 + \frac{1}{\beta}$.

Полагая $m = \mu \beta n$, при надлежащем выборе μ мы будем иметь в квадратных скобках количество отрицательное при всяком τ , если оно отрицательно или равно нулю при наибольшем, доступном для τ , значении $\frac{1}{2\beta+1}$. Для этого достаточно подобрать μ так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$(1-\mu)(2n+1) + \frac{\mu}{2\beta} (\mu \beta n - \beta - 1) = 0,$$

или, по приведении,

$$\mu^2 n - 2\mu \left(2n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2\beta} \right) + 2(2n+1) = 0. \quad (28)$$

Наибольшее значение μ получает при весьма большом n ($n = \infty$); в таком случае $\mu = 2$. Вообще $\mu < 2$; так, при $n = 2$, $\beta = 2.5$, $\mu = 1.083$; при $n = 3$, $\mu = 1.181$.

¹⁾ Разумеется, заключенное в пределах 0 и $\frac{1}{2\beta+1}$; это замечание надо иметь в виду и во всех последующих рассуждениях.

При указанном подборе количества m , функция s_n' не может иметь отличного от нуля корня в пределах изменения τ ; в этом мы убеждаемся тем же рассуждением, которым неоднократно пользовались выше.

Заметим, что $s_n(0)=1$; а из ур-ния (27) получаем $s_n'(0)=m-\beta n$; при $m=\mu\beta n$, $s_n'(0)>0$, и следовательно, функция

$$(29) \quad y_n(1-\tau)^{-\mu\beta n}$$

возрастает вместе с переменным и будет превышать единицу; если же $m=\beta n$, то $s_n'(0)=0$, но $s_n''(0)=-\beta n \frac{\beta n - \beta - 1}{2n + 2}$, а это количество при $n > 1 + \frac{1}{\beta}$ есть величина отрицательная; поэтому и $s_n'(\tau)$, как функция убывающая, должна при $\tau > 0$ быть менее нуля; отсюда заключаем, что

$$(30) \quad y_n(1-\tau)^{-\beta n}$$

при $n > 1 + \frac{1}{\beta}$ есть функция убывающая и представляет правильную дробь.

В случае $n < 1 + \frac{1}{\beta}$ количество, заключенное в квадратные скобки в ур-нии (27), будет меньше 0 при $m=\beta n$; $s_n'(0)=0$, $s_n''(0)>0$, а потому $s_n'(\tau)>0$ и

$$(29') \quad y_n(1-\tau)^{-\beta n}$$

будет представлять функцию возрастающую.

Меньший корень ур-ния (28), назовем его просто μ , будет при этом меньше 1; легко убеждаемся, что если $m=\mu\beta n$ и $0 < \tau < \frac{1}{\beta\mu + 1}$, то опять будет иметь место постоянство знака для не раз упоминавшегося коэффициента при s_n в ур-нии (27); знак этот будет $+$. Поэтому получим $s_n'(\tau) < 0$, ибо $s_n'(0) < 0$, а следовательно, заключаем, что функция

$$(30') \quad y_n(1-\tau)^{-\mu\beta n}$$

убывает с возрастанием τ . Таким образом имеем, например, для $n=1$, $\mu=0.93$ (β принято 2.5), и следовательно, при возрастающем $y_1(1-\tau)^{-\beta}$, $y_1(1-\tau)^{-0.93\beta}$ будет функцией убывающей.

Отмеченные свойства y_n дают предельные функции, между которыми это количество остается заключенным, именно:

$$\begin{aligned} \text{при } n > 1 + \frac{1}{\beta} \quad & (1-\tau)^{\beta n} > y_n > (1-\tau)^{\mu\beta n}, \\ \text{» } n < 1 + \frac{1}{\beta} \quad & (1-\tau)^{\beta n} < y_n < (1-\tau)^{\mu\beta n}, \end{aligned}$$

где μ определяется ур-нием (28) и равняется меньшему из его корней.

Отметим еще, что функция

$$y_n(1-\tau)^{-\beta n}$$

возрастает а fortiori; в случае $n < 1 + \frac{1}{\beta}$ это очевидно; а при $n > 1 + \frac{1}{\beta}$, на основании вышеуказанного, ее можно рассматривать как произведение двух возрастающих функций $y_n(1-\tau)^{-\beta n}$ и $(1-\tau)^{-(2-\beta)n}$; поэтому, если наибольшее значение, которое в данной задаче получает τ , мы обозначим через τ_0 и соответственное значение y_n — через $y_{n,0}$, то будет справедливо неравенство

$$\frac{y_n(1-\tau)^{-2\beta n}}{y_{n,0}(1-\tau_0)^{-2\beta n}} < 1$$

или

$$(31) \quad \frac{y_n}{y_{n,0}} < \left(\frac{1-\tau}{1-\tau_0} \right)^{2\beta n}.$$

Обратимся, наконец, к функции $x_n = 1 + \frac{\tau y_n'}{n y_n}$, от которой, как мы указали выше, зависит вычисление весьма важных в различных задачах интересующего нас типа постоянных. Составим прежде всего дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция x_n . Оно получится из гипергеометрического ур-ния (26), если мы положим в нем

$$\int_0^{\tau} \frac{x_n - 1}{\tau} n d\tau.$$

$$y_n = e$$

Таким образом находим

$$(32) \quad x_n' \tau (1-\tau) + n x_n^2 (1-\tau) + x_n \beta \tau - n [1 - (2\beta + 1) \tau] = 0.$$

Это уравнение, вместе с условием $x_n(0) = 1$, вполне определяет функцию x_n . Выше уже было указано, что функция x_n при изменении переменного в рассматриваемых границах все время остается большею нуля. Покажем, что она убывает с возрастанием τ . Для сего дифференцируем ур-ние (32), имеем

$$x_n'' \tau (1-\tau) + x_n' [2n(1-\tau)x_n + (\beta - 1)\tau + 1 - \tau] = n x_n^2 - x_n \beta - n(2\beta + 1)$$

Заменяя в квадратных скобках x_n его значением $1 + \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n}$ и умножив уравнение на $\tau^{2n}(1-\tau)^{-\beta} y_n^2$, приводим его к виду

$$\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1-\tau)^{-\beta+1} y_n^2 x_n' = [n x_n^2 - x_n \beta - n(2\beta + 1)] \tau^{2n} (1-\tau)^{-\beta} y_n^2.$$

По $x_n < 1$, ибо $x_n - 1 = \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n}$ есть величина отрицательная на основании сказанного о знаках функции y_n и ее производной. Поэтому правая часть полученного уравнения есть знакпостоянное отрицательное количество; если бы x_n' , равное $-\beta$ при $\tau = 0$, обладало корнем в пределах изменения τ , то $\frac{d}{d\tau} \tau^{2n+1} (1-\tau)^{-\beta+1} y_n^2 x_n'$ также обращалось бы в нуль при некотором значении τ , меньшем этого корня, что невозможно. Но x_n' , всюду

конечное, как нетрудно убедиться, не может изменять знака иначе, как переходя через корень. Итак, x_n' остается меньшим нуля, и следовательно, x_n убывает.

Обращаемся к отысканию функций, ограничивающих значение x_n . Для этого докажем следующую теорему: *Если, подставив в уравнение, определяющее x_n , голоморфную функцию k_n , мы получим в левой части знакпостоянную положительную величину, то $k_n > x_n$; знак неравенства будет обратный, если результат подстановки окажется менее нуля.* При $\tau = 0$, k_n может равняться 1. Вычтем из предполагаемого неравенства

$$(33) \quad k_n' \tau (1 - \tau) + n k_n^2 (1 - \tau) + k_n \beta \tau - n [1 - (2\beta + 1) \tau] \geq 0$$

уравнение (32). Имеем

$$(33') \quad (k_n' - x_n') \tau (1 - \tau) + (k_n - x_n) [\beta \tau + n (1 - \tau) (k_n + x_n)] \geq 0.$$

Пологаем

$$k_n = 1 + \frac{\tau}{n} \frac{l_n'}{l_n}; \quad l_n = e^{\int_0^{\tau} \frac{k_n - 1}{\tau} n d\tau} > 0;$$

тогда, по замене в квадратных скобках последнего неравенства k_n и x_n их значениями через l_n и y_n и умножении его на положительный множитель $y_n l_n \tau^{2n-1} (1 - \tau)^{-\beta}$, получим

$$\frac{d}{d\tau} (k_n - x_n) \tau^{2n} (1 - \tau)^{-\beta} y_n l_n \geq 0;$$

интегрируя это неравенство в пределах от 0 до τ , получим

$$(k_n - x_n) \tau^{2n} (1 - \tau)^{-\beta} y_n l_n \geq 0,$$

откуда и вытекает искомое неравенство

$$k_n > x_n.$$

Покажем теперь, как функцию x_n можно вычислить с любой точностью, изображая ее в виде непрерывной дроби. Введем в дифференциальное уравнение (32) новое независимое переменное s по формуле $s = \frac{\tau}{1 - \tau}$; при изменении τ от 0 до $\frac{1}{2\beta + 1}$, s изменяется от 0 до $\frac{1}{2\beta}$. Дифференциальное уравнение для x_n будет таково:

$$(34) \quad x_n' s (1 + s) + x_n \beta s + n x_n^2 - n (1 - 2\beta s) = 0.$$

Из этого уравнения находим $x_n(0) = 1$, $x_n'(0) = -\beta$. Если какая-либо функция k_n удовлетворяет неравенству (33), то, по подстановке в (34), будем иметь также

$$(35) \quad k_n' s(1+s) + k_n \beta s + n k_n^2 - n(1-2\beta s) \geq 0,$$

откуда попрежнему следует соотношение $k_n \geq x_n$, при $k_n(0) = 1$.

Изобразим ур-ние (34) вместе с неравенством (35) в виде

$$(36) \quad x_n' s(1+s) + x_n \beta s + n x_n^2 - n(1-2\beta s) \leq 0.$$

Эту формулу следует понимать так: если по подстановке какой-либо конечной в пределах изменения s функции, равной 1 при $s=0$, мы получим нуль в левой части соотношения (36), то эта функция есть точное выражение x_n ; если в результате подстановки получится положительное количество, то подставленная функция все время более x_n ; в противном случае имеем обратное неравенство.

Положим

$$(37) \quad x_n = 1 - \frac{\beta s}{1 - c^{(n)} s},$$

где $c^{(n)}$ — новая, подлежащая определению, функция. После приведенный и изменения знака будем иметь из (36)

$$(37') \quad c^{(n)} s(1+s) + c^{(n)} (2n+2-\beta s) - (2n+1) c^{(n)2} s - n\beta + \beta + 1 \leq 0;$$

знак неравенства пришлось при этом изменить на обратный; смысл его таков: если после подстановки в левую часть какой-либо функции вместо $c^{(n)}$ мы получим в результате величину отрицательную, то заменив в ф-ле (37) $c^{(n)}$ этим его значением, мы найдем *верхнюю граничную функцию* x_n , т. е. функцию, превышающую x_n .

Положим далее

$$(38) \quad c^{(n)} = \frac{c_0^{(n)}}{1 - \partial^{(n)} s},$$

где $c_0^{(n)} = c^{(n)}(0) = \frac{\beta}{2} - \frac{2\beta+1}{2n+2}$, функция ∂ должна удовлетворять соотношению

$$(38') \quad \partial^{(n)} s(1+s) + \partial^{(n)} [2n+3+(\beta+1)s] - \partial^{(n)2} s(2n+2) - (2n+1) c_0^{(n)} - \beta \leq 0.$$

Отсюда имеем

$$\partial_0^{(n)} = \partial^{(n)}(0) = \frac{\beta}{2} + \frac{2\beta+1}{2n+2} - 2 \frac{2\beta+1}{2n+3}.$$

Полагая затем последовательно

$$(39) \quad \begin{aligned} \partial^{(n)} &= \frac{\partial_0^{(n)}}{1 - c_1^{(n)}s}, & c_1^{(n)} &= \frac{c_{1,0}^{(n)}}{1 - \partial_1^{(n)}s}, & \partial_1^{(n)} &= \frac{\partial_{1,0}^{(n)}}{1 - c_2^{(n)}s}, \\ c_2^{(n)} &= \frac{c_{2,0}^{(n)}}{1 - \partial_2^{(n)}s}, & \partial_2^{(n)} &= \frac{\partial_{2,0}^{(n)}}{1 - c_3^{(n)}s}, \dots, \end{aligned}$$

мы будем иметь, для определения $c_1, \partial_1, c_2, \partial_2, \dots$, соотношения

$$\begin{aligned} c_1^{(n)}s(1+s) + c_1^{(n)}(2n+4-\beta s) - (2n+3)c_1^{(n)2}s - \\ - \partial_0^{(n)}(2n+2) + \beta + 1 &\equiv 0, \\ \partial_1^{(n)}s(1+s) + \partial_1^{(n)}[2n+5+(\beta+1)s] - (2n+4)\partial_1^{(n)2}s - \\ - c_{1,0}^{(n)} - (2n+3) - \beta &\equiv 0, \\ c_2^{(n)}s(1+s) + c_2^{(n)}(2n+6-\beta s) - (2n+5)c_2^{(n)2}s - \\ - \partial_{1,0}^{(n)}(2n+4) + \beta + 1 &\equiv 0, \\ \partial_2^{(n)}s(1+s) + \partial_2^{(n)}[2n+7+(\beta+1)s] - (2n+6)\partial_2^{(n)2}s - \\ - c_{2,0}^{(n)}(2n+5) - \beta &\equiv 0. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} c_{1,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} + 2 \frac{2\beta+1}{2n+3} - 4 \frac{2\beta+1}{2n+4}, \\ \partial_{1,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} + 4 \frac{2\beta+1}{2n+4} - 6 \frac{2\beta+1}{2n+5}, \\ c_{2,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} + 6 \frac{2\beta+1}{2n+5} - 9 \frac{2\beta+1}{2n+6}, \\ \partial_{2,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} + 9 \frac{2\beta+1}{2n+6} - 12 \frac{2\beta+1}{2n+7}, \\ &\dots \end{aligned}$$

По этим формулам нетрудно составить уравнения для определения $c_m^{(n)}$, $\partial_m^{(n)}$ и формулы $c_{m,0}^{(n)}$, $\partial_{m,0}^{(n)}$. Эти последние имеют вид

$$\begin{aligned} c_{m,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} + m(m+1) \frac{2\beta+1}{2n+2m+1} - (m+1)^2 \frac{2\beta+1}{2n+2m+2}, \\ \partial_{m,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} + (m+1)^2 \frac{2\beta+1}{2n+2m+2} - (m+1)(m+2) \frac{2\beta+1}{2n+2m+3}, \end{aligned}$$

или, но приведении,

$$(40) \quad \begin{aligned} c_{m,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} - (2\beta+1) \frac{(m+1)(2n+m+1)}{(2n+2m+1)(2n+2m+2)}, \\ \partial_{m,0}^{(n)} &= \frac{\beta}{2} - (2\beta+1) \frac{(m+1)(2n+m+1)}{(2n+2m+2)(2n+2m+3)}. \end{aligned}$$

Уравнения же, определяющие c_m и ∂_m , таковы:

$$\begin{aligned} c_m^{(n)} s(1+s) + c_m^{(n)} (2n+2m+2-\beta s) - (2n+2m+1) c_m^{(n)2} s - \\ - \partial_{m-1,0}^{(n)} (2n+2m) + \beta + 1 \leq 0, \\ \partial_m^{(n)} s(1+s) + \partial_m^{(n)} [2n+2m+3+(\beta+1)s] - (2n+2m+2) \partial_m^{(n)2} s - \\ - c_{m,0}^{(n)} (2n+2m+1) - \beta \leq 0. \end{aligned}$$

Все эти формулы легко проверяются методом перехода от m к $m+1$.

Знак $<$ в последнем из этих соотношений остается справедливым до тех пор, пока значок m не превзойдет некоторого предельного значения, именно, пока $c_{m,0}^{(n)}$ положительно; если $c_{m,0}^{(n)} < 0$, то в соотношении для $\partial_m^{(n)}$ знак $<$ должен быть заменен через $>$. Это потому, что среди упрощений, которые были произведены при преобразовании означенного соотношения, имело место сокращение на $c_{m,0}^{(n)}$.

Собирая результаты, окончательно выразим x_n формулой

$$(41) \quad x_n = 1 - \frac{\beta s}{1 - c_{n,0}^{(n)} s} \frac{1 - \partial_{n,0}^{(n)} s}{1 - c_{n,0}^{(n)} s} \frac{1 - \partial_{n,0}^{(n)} s}{1 - c_{n,0}^{(n)} s} \dots,$$

где $c_{m,0}^{(n)}$ и $\partial_{m,0}^{(n)}$ выражаются формулами (40).

Обратим теперь внимание на величины количеств $c_{m,0}^{(n)}$, $\partial_{m,0}^{(n)}$. Нетрудно видеть, что они всегда заключены между $\frac{\beta}{2}$ и $-\lambda$; первая из этих величин получится при n весьма большом ($n=\infty$); вторая вообще мало отличается от $-\frac{1}{4}$ и получится, если мы будем искать minimum выражения

$$c_{k-1,0}^{(n)} = \frac{\beta}{2} - \frac{(2\beta+1)k(2n+k)}{2(2n+2k-1)(n+k)}$$

в зависимости от изменения k . Этот minimum имеет место либо при $k = En \sqrt{4n^2 - 1} + n(2n-1)$, либо при $k = En \sqrt{4n^2 - 1} + n(2n-1) + 1$; эти значения при n целом равны

$$4n^2 - n - 1 \quad \text{и} \quad 4n^2 - n.$$

Коэффициенты при $\frac{2\beta+1}{2}$ в формуле $c_{k-1,0}^{(n)}$ получают, соответственно величины

$$\frac{1}{2 - \frac{2n^2-1}{(4n^2-n-1)(4n^2-1+n)}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{16n^2-1} \right)};$$

из них вторая больше первой. Таким образом, наименьшее значение $c_{k-1,0}^{(n)}$ есть $\frac{\beta}{2} - \frac{2\beta+1}{4 \left(1 - \frac{1}{16n^2-1}\right)}$.

Легко далее убедиться, что непрерывная дробь (41) всегда представляется сходящейся. Противоположное явление могло бы быть лишь в том случае, если бы выражение

$$\frac{c_0^{(n)}s}{1 - \frac{c_0^{(n)}s}{1 - \frac{c_1^{(n)}s}{\dots}}}$$

стремилось к единице. Но даже в самом неблагоприятном случае, при $n = \infty$, это количество обращается в

$$\frac{\frac{1}{2}\beta s}{1 - \frac{1}{2}\beta s} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\beta s}, \dots$$

и наибольшая его величина, получающаяся при наибольшем возможном значении $s = \frac{1}{2\beta}$, есть

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Что касается знаков коэффициентов c и ∂ (для простоты письма опускаем значки), то те из них, для которых $m = 0, 1, 2, \dots$, до некоторого предельного значения будут положительны, все остальные отрицательны, если только n имеет конечную величину. Граничное значение $1 + m$ получится из неравенства

$$\frac{\beta}{2} - (2\beta + 1) \frac{k(2n + k)}{(2n + 2k - 1)(2n + 2k)} < 0$$

или, по приведении,

$$k^2 + (2n + \beta)k - \beta n(2n - 1) > 0;$$

это неравенство выполнится, как только $m + 1 = k$ превысит больший из корней уравнения

$$k^2 + (2n + \beta)k - \beta n(2n - 1) = 0;$$

граничное значение m будет поэтому выражаться формулой

$$m = E \left\{ -n - \frac{\beta}{2} + \sqrt{n^2 (2\beta + 1) + \frac{\beta^2}{4}} \right\}.$$

Ограничиваясь целым n , мы будем иметь следующие граничные m и $c_{m,0}^{(n)}$:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} n=1, \quad m=0, \quad c_{0,0}^{(1)} = -\frac{1}{4}, \\ n=2, \quad m=1, \quad c_{1,0}^{(2)} = -\frac{1}{28}, \\ n=3, \quad m=3, \quad c_{3,0}^{(3)} = -\frac{17}{4 \cdot 7 \cdot 13}, \\ n=4, \quad m=4, \quad c_{4,0}^{(4)} = -\frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 7}; \end{array} \right. \quad \beta = 2.5.$$

m , как и должно быть, возрастает вместе с n . Что касается $\partial_{m,0}^{(n)}$, то оно также делается отрицательным, но при больших значениях m ; для того чтобы $\partial_{m,0}^{(n)}$ было менее нуля, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\beta}{2} - (2\beta + 1) \frac{k(2n + k)}{(2n + 2k + 1)(2n + 2k)} < 0,$$

или

$$k^2 + (2n - \beta)k - \beta n(2n + 1) > 0;$$

обозначим граничное m через m_1 ; выразится оно формулой

$$m_1 = E \left\{ -n + \frac{\beta}{2} + \sqrt{n^2 (2\beta + 1) + \frac{\beta^2}{4}} \right\}.$$

Но если $p > q$ и $p = E(p) + \theta$, $q = E(q) + \vartheta$, где θ и ϑ — правильные дроби, то $p - q = E(p) - E(q) + \theta - \vartheta$; таким образом,

$$E(p - q) = E(p) - E(q) \quad \text{или} \quad E(p) - E(q) = 1.$$

Поэтому, сравнивая найденные значения m_1 и граничного m , убеждаемся, что m_1 будет равно граничному m для коэффициента $c_{m,0}^{(n)}$ плюс $E(\beta)$ или плюс $E(\beta) + 1$. Так, имеем для

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} n=1, \quad m_1=2, \quad \partial_{2,0}^{(1)} = 0, \\ n=2, \quad m_1=4, \quad \partial_{4,0}^{(2)} = -\frac{1}{28}, \\ n=3, \quad m_1=5, \quad \partial_{3,0}^{(3)} = -\frac{1}{76}, \\ n=4, \quad m_1=7, \quad \partial_{7,0}^{(4)} = -\frac{3}{100}. \end{array} \right. \quad \beta = 2.5.$$

Все коэффициенты $c_{m,0}^{(n)}$, начиная с того, который соответствует граничному значению указателя m , точно так же, как и все $\partial_{m,0}^{(n)}$, для $m \gg m_1$, суть количества отрицательные, и остаточная часть

$$1 - \frac{\partial_{m_1,0}^{(n)} s}{1 - c_{m_1+1,0}^{(n)}} = 1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + c \dots}};$$

ее числовое значение заключено между $1 + \frac{a}{1 + b}$ и $1 + \frac{a}{1 + c}$.

Из функций x_n особенно простою оказывается x_1 , которое при принятом значении β представится как частное двух многочленов третьей степени. Для $n=1$ имеем

$$c_0^{(1)} = -\frac{1}{4}, \quad \partial_0^{(1)} = \frac{7}{20}, \quad c_{1,0}^{(1)} = -\frac{7}{20}, \quad \partial_{1,0}^{(1)} = \frac{3}{28},$$

$$c_{2,0}^{(1)} = -\frac{5}{14}, \quad \partial_{2,0}^{(1)} = 0 \text{ [по (43)],}$$

$$x_1 = 1 - \frac{\frac{5s}{2}}{1 + \frac{s}{4}} = \frac{1 - \frac{7s/10}{1 + \frac{7s/20}{1 + \frac{3s/28}{1 + \frac{5s}{14}}}}}{1 + \frac{s}{4}}$$

или, по приведении,

$$(44) \quad x_1 = \frac{32 - 64s - 14s^2 - 2s^3}{(4 + s)(s^2 + 2s + 8)}.$$

Имея эту формулу, легко найдем y_1 ; для сего введем прежнее переменное $\tau = \frac{s}{1 + s}$; получим

$$(44') \quad x_1 = 1 + \tau \frac{y_1'}{y_1} = \frac{32 - 160\tau + 210\tau^2 - 84\tau^3}{32 - 80\tau + 70\tau^2 - 21\tau^3},$$

откуда, приняв в расчет, что $y_1(0) = 1$, получим

$$32y_1 = (4 - 3\tau)(8 - 14\tau + 7\tau^2).$$

Указанное упрощение имеет место лишь вследствие принятого нами округленного значения для β : $\beta = 2.5$, $\gamma = 1.40$; более точная величина γ для атмосферного воздуха есть 1.4025, и β несколько менее 2.5; в таком случае все x_n выражаются бесконечными непрерывными дробями.

В приложениях пользоваться точными формулами для x_n оказывается невозможным, так как это создает весьма большие трудности, преодолеть которые нам не удалось. Но за то, употребляя даже простейшие подходящие дроби, мы получаем x_n с довольно значительной точностью. Вполне удовле-

творительные результаты получаются уже в том случае, если мы удовольствуемся третьей подходящею дробью и будем выражать x_n так:

$$(45') \quad x_n = 1 - \frac{\beta s}{1 - \frac{\partial_s^{(n)} s}{1 - \partial_s^{(n)} s}}$$

или, по приведении и вставке значений коэффициентов,

$$(45) \quad x_n = 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 (2n + 3) (\beta n - \beta - 1)}{(2n + 2) [2n + 3 - (2\beta n - \beta - 2)s]}.$$

Ошибка при таком исчислении x_n тем более значительна, чем больше величина s . *Ограничиваясь предположением n целых*, оценим величину этой ошибки.

При $n=1$, мы имеем точное значение x_n и можем произвести непосредственное сравнение результатов вычисления этой функции по ф-лам (44) и (45). Сделаем подсчет для s максимального $= \frac{1}{2.3}$ или $s=0.2$, принимая попережнему $\beta=2.5$.

При этом точное значение x_1 будет

$$\frac{776}{1477} = 0.525893.$$

По ф-ле (45) имеем

$$x_1 = 0.525510,$$

разность приблизительно $= 0.00012$.

При других значениях указателя n , для оценки погрешности приходится поступать иначе.

Заметим, прежде всего, что для всех $n > 2$ ф-ла (45') дает функцию, большую x_n ; обратное имеет место при $n=2$. Чтобы в этом убедиться, обратим внимание на ур-ние (38'), определяющее $\partial^{(n)}$; это уравнение можно написать так:

$$\partial^{(n)} s (1 + s) + \partial^{(n)} [2n + 3 + (\beta + 1)s] - \partial^{(n)} s (2n + 2) - (2n + 3) \partial_0^{(n)} = 0.$$

Вставим в левую часть $\partial_0^{(n)}$ вместо $\partial^{(n)}$. Имеем

$$\partial_0^{(n)} s [\beta + 1 - (2n + 2) \partial_0^{(n)}],$$

или, по замене в скобках $\partial_0^{(n)}$ его значением по ф-лам (40),

$$\partial_0^{(n)} s \left[1 - \beta n + \frac{(2\beta + 1)(2n + 1)}{2n + 3} \right] = \partial_0^{(n)} s \left[2 - \beta(n - 2) - \frac{2(2\beta + 1)}{2n + 3} \right].$$

При $n > 2$ эта величина будет < 0 ; а отсюда, как было сказано выше, надобно заключить, что по вставке в формулу x_n вместо $\partial^{(n)}$ испытываемого

его значения, мы получим функцию большую x_n ; при $n=2$, мы, напротив, имеем в квадратных скобках количество

$$2 - 2 \frac{2\beta + 1}{7} > 0,$$

что и доказывает правильность обратного неравенства (x_2 больше того, что получится по замене $\partial^{(2)}$ через $\partial_0^{(2)}$ в формуле для x_2) при значении указателя $n=2$.

Что касается до x_2 , то низшая граничная функция будет следующая подходящая дробь. Таким образом,

$$1 - \beta s - \frac{\beta s^2 c_0^{(2)}}{1 - (c_0^{(2)} + \partial_0^{(2)})s} < x_2 < 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 c_0^{(2)}}{1 - (c_0^{(2)} + \partial_0^{(2)})s - \frac{\partial_0^{(2)} c_{1,0}^{(2)}}{1 - c_{1,0}^{(2)} s} s^2};$$

вычисляя значения ограничивающих функций для случая наибольшего расхождения их значений, когда $s = \frac{1}{2\beta} = 0.2$, имеем

$$0.47034 < x_2(0.2) < 0.47037.$$

В случае $n > 2$, полагаем, в уравнении для $\partial^{(n)}$, $\partial^{(n)} = \frac{\partial_0^{(n)}}{1 - ks}$, где k — постоянное, подлежащее определению, и подбираем k так, чтобы результат подстановки был более нуля при $0 < s < \frac{1}{2\beta}$. Это требование приведет нас к неравенству

$$k(2n + 4 - \beta s) - k^2 s(2n + 3) - (2n + 4) c_{1,0}^{(n)} \geq 0.$$

Меньший корень левой части этого неравенства выражается формулой

$$n + 2 - \frac{\beta s}{2} - \sqrt{\frac{(n + 2)(1 - 2\beta s) + 4s(n + 1)(2\beta + 1) + \frac{\beta^2 s^2}{4}}{(2n + 3)s}};$$

наибольшее его значение соответствует $s = \frac{1}{2\beta} = 0.2$ и равно

$$(46) \quad 5 - \frac{n + 1.75 - \sqrt{\frac{24(n + 1)}{5} + \frac{1}{16}}}{2n + 3}.$$

Если мы примем k равным этой величине, то вышеприведенное неравенство будет выполнено.

Теперь мы имеем возможность указать пределы, в которых заключается x_n : высший выражается ф-лой (45'), низший получается заменой в этой формуле величины $\partial_0^{(n)}$ через $\frac{\partial_0^{(n)}}{1 - ks}$. Совершив все приведения, будем иметь окончательно

$$(47) \quad 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 (\beta n - \beta - 1)}{(2n + 2) \left(1 - \frac{2\beta n - \beta - 2}{2n + 3} s \right)} > x_n > 1 - \beta s - \frac{\beta s^2 (\beta n - \beta - 1)}{(2n + 2) \left(1 - \frac{2\beta n - \beta - 2}{2n + 3} s - \lambda s^2 \right)},$$

где $\lambda = \frac{k\partial_0}{1 - ks}$, $\partial_0 = \frac{\beta}{2} - \frac{(2\beta + 1)(2n + 1)}{(2n + 2)(2n + 3)}$, а k определяются ф-лой (46).

Укажем числовые величины, при $s = 0.2$, граничных функций для x_n при $n = 3, 4, 5$ и 6:

$$\begin{aligned} 0.4348 &> x_3(0.2) > 0.4343, \\ 0.4095 &> x_4(0.2) > 0.4073, \\ 0.3905 &> x_5(0.2) > 0.3872, \\ 0.3755 &> x_6(0.2) > 0.3704. \end{aligned}$$

Мы видим, таким образом, что ошибка возрастает, или, точнее говоря, может возрасти вместе с указателем, но, тем не менее, для малых указателей она невелика. При n сколько-нибудь значительном пределы ошибки расширяются. Так, при

$$\begin{aligned} n = 12 &\dots 0.326 > x_{12}(0.2) > 0.308, \\ n = 24 &\dots 0.293 > x_{24}(0.2) > 0.251. \end{aligned}$$

Это невыгодное обстоятельство, при вычислениях, которые нам придется совершать, парализуется однакоже до известной степени тем, что функции x_n с большими указателями входят в удаленные члены ряда; коэффициенты же таких членов сравнительно малы.

Укажем еще граничные функции для x_n с большими указателями. Эти функции будут полезны при вычислении пределов, в которых заключается остаточный член рядов, разрешающих задачи о газовых струях. Для сей цели опять обращаемся к дифференциальному уравнению, определяющему x_n :

$$x_n' s(1 + s) + x_n \beta s + n x_n^2 - n(1 - 2\beta s) = 0.$$

Подставим в левую часть выражение $\sqrt{1 - 2\beta s + 2ns^2}$ и подберем функцию u так, чтобы результат подстановки был более нуля; тогда по доказанной выше теореме будем иметь

$$\sqrt{1 - 2\beta s + 2ns^2} > x_n.$$

Эта подстановка дает в левой части уравнения для x_n выражение

$$(47') \quad k = \frac{u's(1+s) + 2u[1 + (1+\beta)s] - \beta(1+2\beta) + 2nu\sqrt{1-2\beta s + 2us^2}}{\sqrt{1-2\beta s + 2us^2}} s^2,$$

оно, как легко видеть, будет более нуля, если мы положим

$$u = \beta \sqrt[3]{\frac{\beta(1+2\beta)^2}{2n^2}} = \frac{5}{2} \sqrt[3]{\frac{4\beta}{n^2}},$$

в самом деле, при таком значении u $\sqrt{1-2\beta s + 2us^2}$ есть убывающая функция s ; произведение же этого корня на $2nu$, при наибольшем возможном значении переменного $s = \frac{1}{2\beta}$, равно $(1+2\beta)\beta$, и следовательно, количество k останется при этом положительным. С другой стороны, оно окажется отрицательным, каково бы ни было s , если

$$u = \frac{\beta(1+2\beta)}{2n+2},$$

так как числитель формулы k в таком случае равен нулю при $s=0$ и, как функция убывающая, будет менее нуля при $s>0$. Таким образом имеем

$$(48) \quad \sqrt{1-2\beta s + 2\beta s^2} \sqrt[3]{\frac{\beta(1+2\beta)^2}{2n^2}} > x_n > \sqrt{1-2\beta s + \frac{s^2(1+2\beta)}{n+1}}.$$

Несколько повышая верхнюю границу функции x_n , мы можем также изобразить первую часть найденного нами двойного неравенства в форме

$$\sqrt{1-2\beta s} + \sqrt[3]{\frac{2\beta^2(1+2\beta)}{n}} s > x_n$$

и, следовательно, x_n выразить формулой

$$(49) \quad x_n = \sqrt{1-2\beta s} + \lambda s \sqrt[3]{\frac{2\beta^2(1+2\beta)}{n}},$$

где λ — правильная дробь.

Легко доказать, что x_n при одном и том же значении переменного уменьшается с возрастанием указателя n . Это явствует из уравнения для x_{n+m}

$$x'_{n+m}s(1+s) + x_{n+m}\beta s + (n+m)x_{n+m}^2 - (n+m)(1-2\beta s) = 0;$$

подставив в левую часть x_n вместо x_{n+m} , получим, на основании уравнения для x ,

$$m[x_n^2 - (1-2\beta s)],$$

величину большую нуля, вследствие неравенств (48), а потому заключаем, что

$$(50) \quad x_n > x_{n+m},$$

каково бы ни было положительное число m .

Покончив на этом с исследованием важных для последующего свойств функции x_n , отметим еще два неравенства, которым удовлетворяют функции y_n . Первое из этих неравенств выводим следующим образом: составим дифференциальное уравнение, определяющее $\eta_n = \frac{y_n'}{y_n}$, оно будет

$$(\eta_n' + \eta_n^2) \tau (1 - \tau) + [(2n + 1)(1 - \tau) + \beta \tau] \eta_n + \beta n (2n + 1) = 0.$$

Положив, далее, $\eta_n = \xi_n - \frac{2\beta n}{1 - \tau}$, имеем

$$(51) \quad (\xi_n' + \xi_n^2) \tau (1 - \tau) + (2n + 1)(1 - \tau) - \beta(4n + 1) \tau \xi_n - \beta n (2n + 1) + \frac{2\xi_n \tau}{1 - \tau} (2\beta n - \beta - 1) = 0.$$

К этому уравнению, как нетрудно убедиться, приложима теорема, доказанная нами для ур-ния (36), характеризующего функцию x_n : если при замене ξ_n какою-нибудь голоморфною функциею мы найдем в левой части выражение, большее нуля, то подставленное выражение будет более ξ_n . Подставив $2\beta n$, получаем как раз такой результат, а стало быть, $\xi_n < 2\beta n$.

Подставим, далее, в уравнение, определяющее ξ_{n+m} , на место ξ_{n+m} функцию ξ_n . Результат подстановки, на основании ур-ния (51), которому удовлетворяет ξ_n , приведет к

$$m \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{1 - \tau} [2\xi_n(1 - \tau) - \beta(4n + 1) - 2\beta m] - \frac{(2\beta + 1)2\beta m \tau}{1 - \tau}.$$

Это выражение отрицательно при всяком τ , ибо оно дает результат, меньший нуля даже при замене ξ_n большим его количеством $2\beta n$. Поэтому $\xi_n < \xi_{n+m}$ или, иначе,

$$\frac{y_n'}{y_n} + \frac{2\beta n}{1 - \tau} < \frac{y_{n+m}'}{y_{n+m}} + \frac{2\beta(n+m)}{1 - \tau}.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах от τ до τ_0 и переходя от логарифмов к числам, найдем

$$(52) \quad \frac{y_n}{y_{n,0}} \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_0} \right)^{-2\beta n} > \frac{y_{n+m}}{y_{n+m,0}} \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_0} \right)^{-2\beta(n+m)},$$

где $y_{n,0}$, по принятому способу, обозначает $y_n(\tau_0)$. Таким образом, функция $\frac{y_n}{y_{n,0}} \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau_0} \right)^{-2\beta n}$ убывает с возрастанием индекса.

Второе неравенство, которое мы имели в виду вывести, вытекает из соотношения (50). Из этого соотношения выводим неравенство

$$\frac{y_n'}{y_n} > \frac{y_{n+m}'}{y_{n+m}};$$

интегрируя его в пределах x и x_0 , имеем, по переходе от логарифмов к числам.

$$(53) \quad \frac{y_n}{y_{n,0}} < \frac{y_{n+m}}{y_{n+m,0}}.$$

Таким образом, частное $\frac{y_n}{y_{n,0}}$ возрастает с возрастанием индекса.

Переходим к *доказательству сходимости* рядов, в которых разрешаются задачи о газовых струях. Излагая общий прием решения этого рода задач, мы пришли (см. гл. I) к следующим формулам для выражения функции тока и потенциала скоростей:

$$\begin{aligned} \psi &= B\theta + \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n), \\ \varphi &= B(1-\tau)^{-\beta} - \frac{B}{2} \int (1-\tau)^{-\beta} \frac{d\tau}{\tau} - \\ &- (1-\tau)^{-\beta} \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \cos(2n\theta + \alpha_n). \end{aligned}$$

Это — ф-лы (23) и (24) главы I. Указатели n , в них входящие, возрастают, как члены арифметической прогрессии. Докажем, что приведенные ряды сходятся абсолютно и равномерно при всяком $\tau < \tau_0$, если это имеет место относительно рядов

$$\begin{aligned} \psi_1 &= B\theta + \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \sin(2n\theta + \alpha_n), \\ \varphi_1 &= B - \frac{B}{2} \int \frac{d\tau}{\tau} - \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \cos(2n\theta + \alpha_n), \end{aligned}$$

выражающих функцию тока и потенциал скоростей для той же задачи в случае несжимаемой жидкости. Ряды ψ_1 и φ_1 будут, очевидно, абсолютно сходящимися, как только $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} < 1$, где n и n_1 — два последовательные значения указателя. Предположим, что это условие выполнено. Тогда, на основании соотношения (31), мы можем утверждать, что члены ряда ψ соответственно менее членов ряда

$$(54) \quad \sum [B_n] \left\{ \frac{\tau(1-\tau)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}}}{\tau_0(1-\tau_0)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}}} \right\}^n;$$

а это — ряд *абсолютно сходящийся* при $\tau < \tau_0$, если $\tau_0 < \frac{1}{2\beta+1}$; ибо в таком случае

$$\frac{d}{d\tau} \tau(1-\tau)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} = [1 - (2\beta+1)\tau](1-\tau)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}-1} > 0,$$

и следовательно, $\frac{\tau(1-\tau)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}}}{\tau_0(1-\tau_0)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}}}$ представляет из себя правильную дробь.

Остаточный член ряда ψ

$$B_n = \sum_{n=n}^{n=\infty} B_n \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin(2n\theta + \alpha_n)$$

численно менее остаточного члена B_n' ряда (54)

$$B_n' = \sum_{n=n}^{n=\infty} B_n \left\{ \frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}} \right\}^n$$

но B_n' стремится к нулю с возрастанием n , каково бы ни было τ меньше τ_0 . Отсюда мы заключаем, что ряд ψ *сходится равномерно*.

Так как ряд, входящий в состав функции φ , отличается от рассмотренного заменой $\sin$ 'ов через $\cos$ 'ы и умножением последовательных членов на ряд убывающих положительных количеств, то доказанные теоремы имеют место и для ряда φ . Легко далее видеть, что теми же свойствами обладают производные по θ от функции φ и ψ , а следовательно, и производные их по τ , так как последние с первыми связаны линейными соотношениями (11) главы I. Следствием этих теорем является непрерывность функций φ и ψ и их производных внутри рассматриваемой области переменных τ, θ ¹⁾.

Докажем, наконец, что *при стремлении τ к предельному значению τ_0 , ряды φ и ψ стремятся к пределу, который представляет из себя значения этих рядов, получаемые ими при замене τ через τ_0* . Рассмотрим для этого суммы σ и σ' p членов, следующих за n -ым в рядах φ и ψ . Пусть $n_1, n_2, \dots, n_p$ — последовательные значения указателя; тогда, обозначив дроби

$$\frac{\tau}{\tau_0} \left(\frac{1-\tau}{1-\tau_0} \right)^{2\beta}, \quad \frac{y_n}{y_{n,0}} \left(\frac{1-\tau}{1-\tau_0} \right)^{-2\beta n},$$

соответственно, через ξ и η_n , мы можем изобразить означенные суммы в виде

$$\sigma = -(1-\tau)^{-3} \sum_{n_1}^{n_p} B_n \xi^n \eta_n x_n \cos(2n\theta + \alpha_n),$$

$$\sigma' = \sum_{n_1}^{n_p} B_n \xi^n \eta_n \sin(2n\theta + \alpha_n).$$

Обозначим, засим, через u_n и u_n' выражения

$$B_n \xi^n \cos(2n\theta + \alpha_n), \quad B_n \xi^n \sin(2n\theta + \alpha_n).$$

Ряды $\sum u_n$ и $\sum u_n'$ равномерно сходятся при всяком ξ , меньшем единицы, так как они совпадают с рядами, входящими в состав функции φ_1 и ψ_1 ; предположим, что они сходятся и при $\xi=1$, тогда, по известной теореме анализа, значение их при $\xi=1$ есть предел, к которому они стремятся при

¹⁾ Jordan. Cours d'analyse, I, p. 310 et suiv.

стремлении ξ к пределу 1 (и, следовательно, τ к τ_0). Но в таком случае указателю n можно придать всегда столь большое значение, чтобы суммы

$$u_{n_1}, u_{n_1} + u_{n_2}, u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3}, \dots, u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_p}$$

были заключены между сколько угодно малыми численно величинами ϵ и δ , каково бы ни было меньшее или равное единице количество ξ . А так как, на основании исследованных в этой главе свойств функций x_n, y_n , входящие в выражения σ и σ' количества η_n, x_n более нуля и убывают с возрастанием указателя, то, по теореме Абеля, σ заключено между пределами

$$-(1 - \tau)^{-\beta} \delta \eta_{n_1} \quad \text{и} \quad -(1 - \tau)^{-\beta} \epsilon \eta_{n_1}.$$

По тем же причинам σ' оказывается заключенным между другими сколь угодно малыми численно пределами. А раз это так, то желаемое доказано.

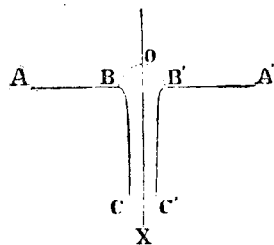
В результате всех обнаруженных нами свойств рядов φ и ψ , мы приходим к заключению, которое было целью наших изысканий: *найденными формулами действительно разрешаются поставленные задачи о течении газов.*

ГЛАВА III

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ БЕСКОНЕЧНО ШИРОКОГО СОСУДА

Приложим описанную методику к задаче об истечении газа из бесконечного сосуда с плоскими стенками, причем остановимся на том простейшем случае, когда одна стенка служит продолжением другой.

Пусть мы имеем несжимаемую жидкость, вытекающую из такого сосуда; течение это изображено на фиг. 4. AB и $A'B'$ — следы стенок сосуда, OX — след его плоскости симметрии. BCB' — вытекающая струя. Если мы обозначим через Q количество вытекающей в секунду жидкости, через φ_1 и ψ_1 соответственно потенциал скоростей и функцию тока и будем считать $\psi_1 = 0$ на OX , то в области течения φ_1 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, ψ_1 — от $-\frac{Q}{2}$ до $+\frac{Q}{2}$. Свяжем мнимое переменное



Фиг. 4.

$$w = \varphi_1 + i\psi_1$$

с другим мнимым переменным u ¹⁾ соотношением

$$w = \frac{Q}{\pi} \lg \frac{u}{ci}.$$

Области переменного w при этом соответствует верхняя полуплоскость области u .

Обозначим далее через ϑ логарифм отношения скоростей $\frac{v_0}{v}$ на струе и в рассматриваемой точке жидкости, через θ — угол скорости с осью OX ; тогда задача разрешается, если мы положим

$$\vartheta + i\theta = i \arcsin \frac{c}{u}.$$

¹⁾ См.: Н. Е. Жуковский. Видоизменение метода Кирхгофа. Мат. сб., т. XV.

В самом деле, на границе ABC $\phi_1 = -\frac{Q}{2}$, φ_1 изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; при этом u проходит отрицательную часть действительной оси от 0 до $-\infty$; $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\infty > \vartheta > 0$, пока $0 > u > -c$; $\vartheta = 0$, $v = v_0$, $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ при $-c > u > -\infty$. На границе $A'B'C'$ $\phi_1 = \frac{Q}{2}$, φ_1 изменяется в тех же пределах; $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\infty > \vartheta > 0$ при $0 < u < c$; $\vartheta = 0$, $v = v_0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, если $c < u < \infty$. Точка $u=0$ соответствует, таким образом, бесконечно удаленной части сосуда, где $\vartheta = \infty$ и скорость обращается в нуль; $u = \infty$ дает бесконечно далекую часть струи. Наконец, при $\theta = 0$, u — чисто мнимое и $\phi = 0$, и мы получаем среднюю линию тока, совпадающую с осью X .

Из приведенных формул находим

$$w = -\frac{Q}{\pi} \lg \left(i \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} \right)$$

или, обозначив $\vartheta + i\theta$ через σ ¹⁾,

$$(55) \quad w = -\frac{Q}{\pi} \lg i \sin \frac{\sigma}{i} = -\frac{Q}{\pi} \lg \frac{e^{\sigma} - e^{-\sigma}}{2} = -\frac{Q}{\pi} (\sigma - \lg 2) - \\ - \frac{Q}{\pi} \lg (1 - e^{-2\sigma}).$$

Отметим, что $\varphi_1 = 0$ в точках схода струи со стенок; α в этих точках имеет значения $\pm i \frac{\pi}{2}$.

Разлагая в ряд $\lg$, входящий в ф-лу (55), получим

$$\pi \frac{\varphi_1 + i\phi_1}{Q} = \lg 2 - (\vartheta + i\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} (\cos 2n\theta - i \sin 2n\theta),$$

откуда

$$\frac{\pi}{Q} \phi_1 = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} \sin 2n\theta.$$

Введем в эту формулу наше переменное τ , определяемое равенством $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{v^2}{v_0^2} = e^{-2\vartheta}$; получаем искомое выражение

$$\frac{\pi}{Q} \phi_1 = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \sin 2n\theta.$$

¹⁾ В случае сосуда со сходящимися под углом стенками придется заменить в этой формуле σ через $\frac{\sigma}{q}$, а в последующих соотношениях ϑ через $\frac{\vartheta}{q}$, θ через $\frac{\theta}{q}$. Угол между стенками в таком случае будет равен $q\pi$.

Так как этот ряд есть ряд абсолютно сходящийся, то по данной выше методе, применив ф-лу (23), приходим к выражению функции тока ψ , определяющей истечение газа из такого же сосуда; получим

$$(56) \quad \frac{\pi}{Q} \psi = -\theta - \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin 2n\theta.$$

Все линии $\psi = \text{const}$ в области τ, θ исходят из точки $\tau=0$ и вновь собираются в точку $\tau=\tau_0, \theta=0$.

Потенциал скоростей по (24) определится соотношением

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \varphi = C + \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^3} - (1-\tau)^{-3} + \\ + (1-\tau)^{-3} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \cos 2n\theta. \end{aligned}$$

Имея формулу для φ , нетрудно построить уравнение струи. По ф-лам (8) главы I имеем

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\tau\alpha}} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (1-\tau)^3 \frac{\partial y}{\partial \psi}, \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\tau\alpha}} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi}; \end{aligned}$$

отсюда

$$\sqrt{2\tau\alpha} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (1-\tau)^3 \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Воспользовавшись формулами для φ и ψ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \sqrt{2\tau\alpha} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -2(1-\tau)^{-3} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} (\cos 2n\theta \cos \theta + x_n \sin 2n\theta \sin \theta) \\ - \cos \theta (1-\tau)^{-3}. \end{aligned}$$

Совершив интегрирование по θ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{Q} \sqrt{2\tau\alpha} y = \Phi(\tau) - (1-\tau)^{-3} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right] \\ + (1-\tau)^{-3} \sum_1^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right] \\ - \sin \theta (1-\tau)^{-3}. \end{aligned}$$

Так как при $\theta = 0$ мы должны иметь $y = 0$, то $\Phi(\tau) = 0$. Таким образом окончательно:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{Q} \sqrt{2\tau\alpha y} (1-\tau)^{\frac{1}{2}} = -\sin \theta + \\ (57) \quad & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]$$

можно изобразить в виде

$$(58) \quad \sum \xi_n \zeta_n \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right],$$

где

$$\xi = \frac{\tau(1-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\tau_0(1-\tau_0)^{\frac{1}{2}}} < 1, \quad \zeta_n = \frac{y_n(1-\tau)^{-\frac{1}{2}n}}{y_{n,0}(1-\tau_0)^{-\frac{1}{2}n}}.$$

По доказанной в конце предшествующей главы теореме, ζ_n представляют ряд количеств, убывающих по мере возрастания индекса. Так как выраже:

$$\sum \xi_n \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right]$$

при стремлении ξ^n к 1, иначе говоря при стремлении τ к совпадению с τ_0 , стремится к

$$I = \sum \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right],$$

то к тому же пределу приближается и входящая в состав формулы для координат u более сложная сумма (58). Изобразив I в виде

$$I = -\sin \theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} &= R \lim_{t \rightarrow 0} 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(t+i\theta)}}{2n-1} = \\ &= R \lim_{t \rightarrow 0} i \lg \frac{1+e^{-t-i\theta}}{1-e^{-t-i\theta}} = R \left(i \lg \frac{1+\cos \theta - i \sin \theta}{1-\cos \theta + i \sin \theta} \right); \end{aligned}$$

знаком R мы показываем, что надо взять действительную часть от рассматриваемого выражения. Легко видеть, что при непрерывном изменении θ от 0 до θ

$$\lg \frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \lg \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} e^{-i \frac{\pi}{2}},$$

а потому

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \pm \frac{\pi}{2},$$

смотря по знаку θ ; таким образом,

$$I = \pm \frac{\pi}{2} - \sin \theta.$$

В виду важности полученного соотношения, укажем более строгий способ его вывода. Исходим из равенства

$$\sum_{n=1}^m \cos (2n-1) \theta = \frac{\sin 2m\theta}{2 \sin \theta}.$$

Интегрируя его в пределах 0 и θ , находим

$$\sum_{n=1}^m \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \int_0^{\theta} \frac{\sin 2m\theta}{\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{\sin m\theta}{\theta} \frac{\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Но этот предел, как известно, равен $\frac{\pi}{2}$, если θ положительно, и $-\frac{\pi}{2}$, если оно отрицательно (Jordan. Cours d'analyse, t. II, p. 233).

Отсюда

$$\begin{aligned} I &= -\sin \theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \\ &= -\sin \theta + 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} = \pm \frac{\pi}{2} - \sin \theta. \end{aligned}$$

Что касается второго ряда в ф-ле (57), то он стремится при $\tau = \tau_0$ к выражению

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[\frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} - \frac{\sin (2n+1) \theta}{2n+1} \right],$$

представляющему сходящийся ряд, каково бы ни было θ . Доказать это можно, рассматривая остаточный член этого ряда:

$$R_n = \sum_{n=\infty}^{\infty} x_n \left[\frac{\sin (2n-1) \theta}{2n-1} - \frac{\sin (2n+1) \theta}{2n+1} \right].$$

Если мы подставим в эту формулу вместо x_n его выражение, определяемое равенством (49), то найдем

$$R_n = \sqrt{1 - 2\beta s} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + k \sum \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right],$$

где k — конечное число, λ_n — правильная дробь.

Отсюда легко видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Полагая теперь в формуле для координаты y $\tau = \tau_0$, приходим к уравнению границы струн:

$$\sqrt{2\alpha\tau_0} (1 - \tau_0)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{Q} y = \mp \frac{\pi}{2} + \sum_1^{\infty} x_{n,0} \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \right].$$

Верхний знак количества $\frac{\pi}{2}$ соответствует θ , большему нуля.

Обозначим ширину бесконечно удаленной части струн через $2b$; тогда

$$2b \sqrt{2\alpha\tau_0} (1 - \tau_0)^{\frac{3}{2}} = Q,$$

ибо $\sqrt{2\alpha\tau_0}$ есть скорость в удаленной части струи, плотность же $\rho = \rho_0 (1 - \tau)^{\frac{3}{2}}$, и мы имеем

$$(59) \quad \frac{\pi y}{2b} = \mp \frac{\pi}{2} - \sum_1^{\infty} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \right] x_n.$$

Обращаясь к определению сжатия, заметим, что при рассматриваемых условиях $\left(\tau_0 \leq \frac{1}{2\beta + 1} \right)$, оно имеет место в бесконечно удаленной части струи, как и в случае истечения жидкости несжимаемой. В самом деле, если бы наибольшее сжатие было на конечном расстоянии от отверстия, то за ним последовало бы расширение; линии тока были бы обращены вогнутостью внутрь струи, давление падало бы от поверхности внутрь и в некоторой точке линии симметрии имело бы minimum; в этой точке скорость получала бы maximum, что невозможно. Таким образом, сжатие будет равно отношению ширины $2b$ бесконечно удаленной части струи к ширине $2a$ отверстия сосуда. Это отношение определится из ф-лы (59), если мы положим в ней $\theta = \frac{\pi}{2}$, причем $y = -a$, а у первого слагаемого правой части возьмем верхний знак; таким образом находим

$$\frac{\pi a}{2b} = \frac{\pi}{2} + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4n}{4n^2 - 1} x_{n,0};$$

отсюда — сжатие

$$(60) \quad \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 8 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0}}$$

Ряд $S = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0}$, несомненно, сходящийся, так как знаки

членов его чередуются, а по величине эти члены убывают с возрастанием индекса. Иначе можно в этом убедиться, вставляя вместо $x_{n,0}$ его выражение по ф-ле (49) предшествующей главы. Таким образом найдем остаточный член ряда S в виде

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_n^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} \sqrt{1 - 2\beta s_0} + k s_0 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda_n}{n^{4/3}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{1 - 2\beta s_0} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1} + k s_0 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\lambda_n}{n^{4/3}}; \end{aligned}$$

ясно, что он стремится к нулю с увеличением n , ибо k — некоторое постоянное, λ_n — правильные дроби.

При $\tau_0 = 0$, $x_{n,0} = 1$, и мы приходим к Кирхгоффовою формуле

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0.61.$$

Это будет приближенное значение сжатия при малых скоростях истечения.

Для вычисления $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_n$ при конечных скоростях и конечной разности давлений в резервуаре и пространстве, в которое происходит истечение газа, пользуемся приближенной формулою x_n .

Границы, в которых заключено количество $\frac{b}{a}$, найдутся, если мы, взяв *четное* или *нечетное* число начальных членов ряда

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0},$$

в первом случае заменим положительные члены их нижними граничными значениями, отрицательные — верхними, а во втором поступим наоборот.

Сделаем это вычисление для определенного случая $\tau_0 = \frac{1}{2\beta + 1}$, причем ограничимся пятью членами ряда для определения его верхнего предела и шестью — для нижнего.

Воспользовавшись значениями $x_1, \dots, x_6$, вычисленными в предыдущей главе, и обозначив через A и B соответственно верхний и нижний предел

$\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_n$, найдем

$$\begin{aligned} B &= \frac{0.5254}{3} - \frac{2 \cdot 0.4703}{15} + \frac{3 \cdot 0.4343}{35} - \frac{4 \cdot 0.4095}{63} + \\ &+ \frac{5 \cdot 0.3872}{99} - \frac{6 \cdot 0.3755}{143}, \end{aligned}$$

откуда, с точностью до 0.001,

$$B = 0.128.$$

А найдем, отбросив последнее слагаемое и прибавив возможные погрешности: эти последние будут выражаться в сумме лишь 0.0003 и не играют роли при той точности, которую мы будем довольствоваться. Поэтому

$$A = 0.128 \pm 0.015.$$

Подставляя найденные граничные значения Σ в ф-лу (60), имеем

$$\frac{\pi}{\pi + 1.14} < \frac{b}{a} < \frac{\pi}{\pi + 1.02},$$

или, производя подсчет,

$$0.73 < \frac{b}{a} < 0.75, \quad \frac{b}{a} = \text{приблизительно } 0.74.$$

Таким образом, *струя расширяется по мере повышения давления в резервуаре до предельного*; ее крайние размеры в ширину суть $0.61 \cdot 2a$ и $0.74 \cdot 2a$, если через $2a$ обозначим, как и прежде, ширину отверстия.

Приближенная функциональная формула для сжатия найдется, если мы воспользуемся приближенным выражением функции x_n по ф-ле (45). Эту формулу мы можем изобразить в виде

$$x_n = 1 - \beta s - \frac{\beta s^2}{2} K,$$

где

$$K = L + \frac{M}{n+1} + \frac{N}{2n(1-\beta s) + 3 + (\beta+2)s};$$

коэффициенты L , M , N не заключают параметра n и имеют значения

$$L = \frac{\beta}{1-\beta s}, \quad M = -\frac{2\beta+1}{1+(3\beta+2)s},$$

$$N = 2(2\beta+1) \left[\frac{1-\beta s}{1+(3\beta+2)s} - \frac{1}{1-\beta s} \right].$$

Приняв, попрежнему, $\beta = 2.5$, получаем окончательно

$$x_n = 1 - \frac{5s}{2} - \frac{25s^2}{4(2-5s)} + \frac{15s^2}{2+19s} \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{15s^2}{n+1} \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right],$$

причем

$$\mu = \frac{6+9s}{4-10s}.$$

Легко видеть, что ряд S , входящий в ур-ние (60), можно вычислить, полагая

$$\begin{aligned}
 S = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} x_{n,0} &= \left[1 + \frac{5s}{2} - \frac{25s^2}{4(2-5s)} \right] \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} + \\
 (61) \quad &+ \frac{15s^2}{2+19s} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(4n^2-1)} + \\
 &+ 15s^2 \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right] \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+\mu)(4n^2-1)},
 \end{aligned}$$

где, для простоты письма, s_0 заменено через s . Что касается первой Σ , входящей в выражение для S , то она представляется в виде

$$\frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \dots \right] = \frac{1}{4}.$$

Обратимся к вычислению

$$\sigma(\mu) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+\mu)(4n^2-1)};$$

частным случаем этого ряда, соответствующим значению $\mu=1$, будет вторая из имеющихся в формуле S сумм. $\sigma(\mu)$ можно представить следующим образом:

$$\sigma(\mu) = \int_0^1 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} dt.$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла, можно суммировать. В самом деле,

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} = \frac{t^{\mu-1}}{4} \left[t + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{3} - \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{5} + \frac{t^3}{7} - \frac{t^4}{7} - \frac{t^4}{9} + \dots \right]$$

Так как ряд, заключенный в скобки, есть абсолютно сходящийся при $t < 1$, то порядок его членов можно изменить, и мы имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} &= \frac{t^{\mu-\frac{1}{2}}}{4} \left(t^{\frac{1}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{5} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{7} + \dots \right) - \\
 &- \frac{t^{\mu-\frac{3}{2}}}{4} \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{5} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{7} - \dots \right) + \frac{t^{\mu-1}}{4} = \frac{t^{\mu-1}}{4} \left[1 - \frac{1-t}{\sqrt{t}} \operatorname{arctg} \sqrt{t} \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 4\sigma(\mu) &= 4 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+\mu)(4n^2-1)} = \\
 &= \frac{1}{\mu} - \int_0^1 t^{\mu-\frac{3}{2}} (1-t) \operatorname{arctg} \sqrt{t} dt,
 \end{aligned}$$

или, совершив интегриацию по частям,

$$(62) \quad 4\sigma(\mu) = \frac{2}{2\mu + 1} - \frac{\pi}{4\mu^2 - 1} + \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t},$$

отсюда

$$4\sigma(1) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \lg 2 = 0.5437.$$

Суммируя результаты, получаем: сжатие

$$(63) \quad \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 8S}, \\ 8S = 2 - 5s_0 - \frac{25s_0^2}{2(2 - 5s_0)} + \frac{15s_0^2}{2 + 19s_0} [1.0874 - 8\sigma(\mu)] + \\ - \frac{30s_0^2}{(2 - 5s_0)^2} \sigma(\mu), \end{cases}$$

причем $\mu = \frac{6 + 9s_0}{4 - 10s_0}$, $\sigma(\mu)$ определяется по ф-ле (62), а s_0 — по отношению давлений в сосуде и в свободном пространстве. В самом деле, $s_0 = \frac{\tau_0}{1 - \tau_0}$; а по формулам главы I упомянутое отношение

$$\frac{p_0}{p_1} = (1 - \tau_0)^{-1-\beta} = (1 + s_0)^{1+\beta} = (1 + s_0)^{\frac{7}{2}}.$$

Наиболее любопытною является величина сжатия струи при давлении, близком к предельному, т. е. такому, при котором скорость вытекающей струи равняется скорости распространения звука в спокойном газе того же физического состояния. Это предельное давление соответствует, как было в свое время указано, значению $\tau_0 = \frac{1}{2\beta + 1}$, $s_0 = \frac{1}{2\beta}$ и имеет величину $p_0 = p_1 \left(1 + \frac{1}{2\beta}\right)^{1+\beta} = 1.89p_1$, т. е. $1.89atm$, если давление в свободном пространстве равно атмосферному. Положим в формуле

$$\mu = \frac{6 + 9s_0}{4 - 10s_0},$$

$\tau_0 = \frac{1}{2\beta} = 0.2$; имеем $\mu = 3.9$. Вычислить точно определенный интеграл

$$j(\mu) = \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t}$$

при таком значении μ представляется довольно хлопотливым делом; но в виду того, что все наше вычисление, начиная с замены x_n близкой к нему по числовым значениям функцией, носит приближенный характер, мы можем упростить задачу; вычисляем $j(4)$ и $j(3.75)$ и потом, в виду близости значений этих интегралов, найдем $j(3.9)$ путем простейшего интерполирования (предположив пропорциональность приращений функции и аргумента).

Легко получим

$$j(4) = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t} dt = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \lg 2 = 0.1402,$$

$$j(3.75) = \int_0^1 \frac{t^{11.4}}{1+t} dt = 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \right) - \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \lg \cotg \frac{\pi}{8} = 0.1500.$$

Отсюда $j(3.9) = 0.144$; а по (62)

$$4\sigma(3.9) = \frac{2}{8.8} - \frac{\pi}{8.8 \cdot 6.8} + \frac{15.6}{8.8 \cdot 6.8} \cdot 0.144 = 0.212.^1)$$

Подставив это значение $\sigma(\mu)$ и соответствующее ε_0 в формулу (63), находим для

$$(64) \quad 8N = 0.5 + \frac{3}{29} \cdot 1.087 - \frac{159}{145} \cdot 0.424 = 1.08$$

значение, среднее между полученными выше предельными величинами ряда $8N$ (стр. 56). Сжатие при этом выразится числом

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 1.08} = 0.74.$$

Коэффициент этот, с уменьшением давления в резервуаре, падает вследствие возрастания величины S ; это падение совершается довольно равномерно, как видно из прилагаемой таблицы:

(65)

ε_0	0.2	0.182	0.154	0.137	0.117
$\frac{F_0}{F_1}$	1.89	1.79	1.65	1.56	1.48
$\frac{b}{a}$	0.74	0.73	0.71	0.70	0.68
μ	3.90	3.56	3.06	2.75	2.50

Обратимся, наконец, к выражению количества вытекающего газа. Это количество E выразится так:

$$E = 2a \cdot \frac{b}{a} \sqrt{2\alpha\tau_0} \rho_0 (1 - \tau_0)^{\frac{1}{2}},$$

где ρ_0 — плотность газа в сосуде (в его удаленной от отверстия области), $2a$, поперечному, — ширина отверстия; количество α определяется формулой

$$\alpha = \frac{k_1}{\gamma - 1} \rho_0^{\gamma-1},$$

¹⁾ Спелые проверки можно поступить так: вычислить точные значения $4\sigma(4) = 0.2079$ и $4\sigma(3.75) = 0.2193$; отсюда, путем той же интерполяции, находим $4\sigma(3.9) = 0.212$ — значение, совпадающее с найденным выше.

причем

$$\gamma = 1.40 = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Будем сначала рассматривать случай *истечения* газа из газометров с различным давлением *в такое пространство, где давление постоянно* (например, истечение в атмосферу).

Тогда

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{p_1} \frac{p_1}{p_0}, \quad 1 - \tau_0 = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{1+\beta}}, \quad s_0 + 1 = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{1+\beta}},$$

и мы имеем окончательную формулу

$$(66) \quad E = 2a \sqrt{p_1} \sqrt{p_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{b}{a}} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \right]},$$

или, приняв опять $\gamma = 1.40$, $\beta = 2.5$,

$$(66') \quad E = 2a \sqrt{p_1 p_0} \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{7}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{7}} \right]}.$$

Так как сжатие $\frac{b}{a}$ есть функция s_0 и, стало быть, зависит от отношения

$\frac{p_0}{p_1}$, то при неизменности этого отношения расход газа прямо пропорционален корню из плотности или обратно пропорционален корню из температуры.

Представим себе теперь, что неизменным остается состояние газа в газометре, и будем рассматривать истечение в среду при различных давлениях в этой среде. Обозначим через c_0 скорость звука в газе при тех физических условиях, в которых он находится в отдаленной от отверстия части резервуара. Тогда

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{k \gamma p_0^{\gamma-1}} = \sqrt{(\gamma - 1) \alpha},$$

и формулу расхода можно представить в виде

$$(67) \quad E = 2ac_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \frac{b}{a}} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]},$$

или, положив $\gamma = 1.4$,

$$(67') \quad E = 2ac_0 \rho_0 \sqrt{5} \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{10}{7}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{7}} \right]}.$$

В этой формуле для E' изменяются лишь два последние множителя, зависящие исключительно от отношения давлений в открытой среде и газометре.

Что касается сжатия струи, или *коэффициента истечения*, как мы будем еще называть количество $\frac{b}{a}$, то он в точности определяется ф-лой (60), а приближенное его значение дается ф-лами (63). Довольствуясь приближением до 0.01, мы указали числовые значения этого коэффициента при предельном давлении и некоторых других, меньших его. Оказывается, что практический результат той же точности получится, если, вместо весьма грузной ф-лы (63), мы примем для $\frac{b}{a} = \lambda$ выражение

$$(68) \quad \lambda = \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2 - ks_0},$$

где k — некоторый постоянный коэффициент. Эта формула весьма хорошо выразит величину сжатия при малой разнице давлений в резервуаре и открытом пространстве, т. е. при s_0 близком к нулю; при $s_0 = 0$, величины $\frac{b}{a}$ по (60) и (68) совпадают с Кирхгоффовою формулою сжатия. Определим k так, чтобы при $s_0 = \frac{1}{2\beta} = 0.2$ результаты (68) и (63) совпадали; для сего необходимо, чтобы

$$2 - k \cdot 0.2 = 8S(0.2),$$

а это значение $8S$ найдено выше [см. равенство (64)] и равно 1.08. Таким образом, $k = 4.6$. Величины $8S$ для значений s_0 , приведенных в табл. (65); в той же последовательности соответственно равны числам 1.08; 1.16; 1.28; 1.35; 1.44.

Им соответствуют следующие числовые значения двучлена $2 - 4.6s_0$, входящего в ф-лу (68) вместо $8S$:

$$1.08; \quad 1.17; \quad 1.29; \quad 1.37; \quad 1.46.$$

Такая разница не отразится на результате при принятой нами точности до второго десятичного знака.

Совпадение будет еще лучше, если мы выразим коэффициент истечения формулой

$$(69) \quad \lambda = \frac{b}{a} = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5s_0 + 2s_0^2}.$$

Тогда ряд значений функции $2 - 5s_0 + 2s_0^2$ для тех же s_0 с точностью до 0.01 будет представляться числами: 1.08; 1.16; 1.28; 1.35; 1.44, которые соответственно равны полученным выше приближенным значениям количества $8S$, входящего в истинную формулу сжатия.

Таким образом, ф-лы (69) или (68), при $k = 4.6$, вполне хорошо выражают функцию λ и очень удобно могут применяться для практических целей. Что касается формулы расхода (67), то и она, при принятых

округленных значениях $\gamma = 1.4$ и $\beta = \frac{1}{\gamma - 1} = 2.5$, принимает довольно простой вид, если мы введем в нее переменное s_0 ; это переменное, как уже было указано, следующим образом связано с отношением $\frac{p_0}{p_1}$ давлений в резервуаре и открытом пространстве:

$$s_0 = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{2}{7}} - 1;$$

преобразовав указанным образом равенство (67), получаем формулу расхода:

$$(70) \quad E = 2ac_0 \rho_0 \lambda \frac{\sqrt{5s_0}}{(1+s_0)^3}.$$

Заметим, что из двух упрощенных формул для λ последняя, (69) является более рациональной. В самом деле, вернемся на минуту к ф-ле (60)

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi + 8 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} x_{n,0}}$$

и подставим в нее вместо $x_{n,0}$ трехчлен

$$x_n(0) + s_0 x_n'(0) + \frac{s_0^2}{2} x_n''(0),$$

приблизительно выражающий функцию x_n .

Из уравнения для x_n

$$x_n' s(1+s) + x_n s^2 + n x_n^2 - n(1-2s) = 0$$

имеем при $x_n(0) = 1$, $x_n'(0) = -\beta$:

$$x_n''(0) = -\beta \frac{n\beta - \beta - 1}{n+1} = -\beta^2 + \beta \frac{2\beta + 1}{n+1}.$$

Подставляем эти значения в вышеприведенный трехчлен и вычисляем входящий в знаменатель формулы λ ряд S :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} \left(1 - \beta s_0 - \frac{\beta^2}{2} s_0^2 \right) + \\ + \beta \frac{2\beta + 1}{2} s_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2 - 1)(n+1)},$$

но

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{4}; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2 - 1)(n+1)} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^n}{4n^2 - 1} dt = \\ = \int_0^1 \left(1 + \frac{t-1}{\sqrt{t}} \operatorname{arctg} \sqrt{t} \right) dt,$$

или, по выполнении интегриации,

$$4 \sum (-1)^{n-1} \frac{n}{(4n^2-1)(n+1)} = \frac{4}{3} \lg 2 - \frac{\pi-2}{3} = 0.5437;$$

отсюда

$$8S = 2 \left(1 - \beta s_0 - \frac{\beta^2}{2} s_0^2 \right) + \beta (2\beta + 1) 0.5437 s_0^2.$$

Положив, попрежнему, $\beta = 2.5$, получим

$$8S = 2 - 5s_0 + 1.9s_0^2$$

и

$$\lambda = \frac{\pi}{\pi + 2 - 5s_0 + 1.9s_0^2}.$$

Ограничиваясь приближением до 0.01, мы должны эту формулу считать тождественною с (69).

Считаем излишним, наконец, обратить внимание читателя на весьма простую связь между переменным s_0 , в котором мы выражаем все характерные для задачи постоянные, и температурой струи. Мы имели для плотности и давления внутри текущего газа формулы

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 (1 - \tau)^3, \\ p &= k \rho^\gamma = k \rho_0^\gamma (1 - \tau)^{3\gamma} = p_0 (1 - \tau)^{3\gamma}; \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 - \tau)^{3\gamma-1} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 - \tau);$$

а так как, по закону Мариотта и Ге-Люссака, $\frac{p}{\rho} = R \cdot T$, где T —абсолютная температура в рассматриваемой точке, то полученное равенство можно переписать так:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \tau = \frac{1}{1 + s},$$

так как $s = \frac{\tau}{1 - \tau}$ (см. гл. II). Применив это соотношение к удаленной от отверстия части струи и обозначая температуру газа в этом месте через T_1 , будем иметь

$$(70') \quad \tau_0 = \frac{T_0 - T_1}{T_0}, \quad s_0 = \frac{T_0 - T_1}{T_1}.$$

Дополним наше исследование об истечении газов, сопоставляя добытые результаты, с одной стороны, с приближенными теоретическими формулами, принимавшимися для вычисления расхода, и, с другой, с данными опыта. Мы совершенно не будем касаться чисто эмпирических формул, хотя некоторые из них хорошо выражают явление в известных пределах, какова, например, формула Parenty¹⁾.

¹⁾ Parenty. Ecoulement et débit des gaz et de la vapeur. Ann. de chem. et de phys., VII série, t. VIII, 1896, et t. XII, 1897.

При рациональной постановке приближенных теоретических построений принимался, как и в нашем исследовании, адиабатный закон; при этом допускалось, что вытекающая струя имеет в известном расстоянии от отверстия наибольшее сужение и что в точках этого сужения скорость газовых частиц постоянна. Таким образом, в результате получается формула расхода

$$(67a) \quad E = Sc_0 \rho_0 \lambda \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]},$$

где S — площадь отверстия, а λ , *коэффициент истечения*, равен отношению площади суженного сечения к площади отверстия.

Эта формула не отличается по виду от нашей ф-лы (67); разница лишь в том, что коэффициент истечения не был определен ни для какого, хотя бы частного, вида выходного отверстия. Обыкновенно принималось, что он имеет постоянную величину, зависящую лишь от формы сосуда и отверстия. Такое допущение, как мы усматриваем из разрешенной здесь задачи, далеко от истины: в нашем случае коэффициент этот при изменении $\frac{p_1}{p_0}$ от 1 до предельной величины 0.53, возрастает от 0.61 до 0.74; прибавок, таким образом, составляет более 21% нижнего предельного значения. Если отверстие будет круглое, а не щелевидное, как в нашем случае, то надо ожидать еще более резкой разницы в значениях λ ; ибо тогда струйки будут сбегаться к отверстию во всех азимутах, а не в двух, как это имеет место в нашей задаче. Поэтому, когда формулу расхода с постоянным λ пытались применять к определению действительного расхода, то опыт не оказывался в согласии с теорией. В видах этого Parenty ¹⁾, опираясь на опыты Hirn'a ²⁾, полагал, что применять к задаче об истечении формулы, основанные на адиабатном законе изменения давления, неправильно. Однако же, из приводимых им самим результатов опытов Hirn'a явствует как раз то самое возрастание коэффициента истечения λ , которое предвидит наша теория. Возможность такого изменения подозревал и сам Parenty; по, высказав это подозрение, он совершенно на нем не останавливается, так как не имеет средств для количественной оценки возрастания λ .

Перейдем к рассмотрению другого представляющегося здесь обстоятельства. Получив формулу расхода (67a), Saint-Venant обратил внимание на следующий парадокс: если бы эта формула была применима при любом отношении давлений в резервуаре и открытой среде, то расход, в зрастая от 0, проходил бы через максимум при некотором значении отношения давлений и за сим должен бы был вновь уменьшаться, обращаясь в нуль при

¹⁾ Loc. cit.

²⁾ Опубликованы в С. R., t. CIII, 1886.

$\frac{p_1}{p_0} = 0$; величина P для $\frac{p_1}{p_0}$, соответствующая максимуму расхода, определяется из условия

$$\frac{\partial \frac{p_1}{p_0} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}}}{\partial p_1} = 0,$$

откуда

$$P = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{1}{2\gamma+1} \right)^{\beta+1} = 0.53.$$

Это — как раз предельное отношение давлений, соответствующее тому моменту, когда в суженной части струи газ движется со скоростью распространения звука в этом месте, как заметил Houdoniot¹⁾. Само собою разумеется, отмеченное обстоятельство не может иметь места в действительности. И вот, когда Saint-Venant произвел опыты с истечением газов, то он нашел, что при понижении давления в открытой среде и изменении $\frac{p_1}{p_0}$ от 1 до 0.53 расход газа возрастает; а при дальнейшем понижении p_1 процесс становится регулярным — дальнейшего повышения расхода не происходит. К этому удивительному результату долго отнеслись с недоверием; однако же, опыты Hirn'a, произведенные не так давно, подтвердили результат Saint-Venant'a, с тою разницею, что Hirn наблюдал повышение расхода за предельном, указанным его предшественником; по его опытам выходит, что расход достигает максимальной величины при $\frac{p_1}{p_0} =$ приблизительно 0.26. Однако же, изменение расхода при понижении $\frac{p_1}{p_0}$ от 0.53 до 0.26 — незначительно, почему это обстоятельство и могло быть упущено Saint-Venant'ом при менее тщательных наблюдениях.

Если бы мы попробовали применять нашу ф-лу (71) при λ , определяемом соотношением (69), за законными пределами ее применимости, то пришли бы к тому же парадоксальному результату, с тем различием, что максимуму расхода соответствовало бы значение $\frac{p_1}{p_0}$, несколько меньшее 0.27; величина — весьма близкая к Hirn'овскому пределу. Это любопытное совпадение, как нам кажется, показывает, что предлагаемая нами формула довольно хорошо выражает, в существенных чертах, исследуемое явление.

Естественно теперь спросить себя, какого характера будет движение в том случае, если давление в открытой среде, в которую происходит истечение газа, ниже предельного, т. е. если $\frac{p_1}{p_0} < 0.53$. Если бы мы предположили, что течение останется установившимся с непрерывным изменением

¹⁾ С. R., t. CIII, 1886.

скоростей и давлений в границах движущейся газовой массы, то область переменных τ , θ представлялась бы в виде полукруга радиуса $> \frac{1}{2\beta + 1}$; такая область как раз рассматривалась в главе I, и при этом было показано, что установившееся движение интересующего нас тина не принадлежит к числу возможных. Hougouiot, в цитированных выше статьях, высказывает следующее положение: если $p_1 < 0.53p_0$, то вытекающая струя рассекается поверхностью, на которой скорость частиц равна скорости звука, на две части, причем давление при переходе через эту поверхность меняется скачком; выше этой разграничивающей поверхности по струе давление равно $0.53p_0$, а ниже оно равно p_1 ¹⁾; но течение газа Hougouiot считает установившимся в обеих частях вытекающей струи; что касается самой поверхности раздела давлений, то он считает ее всюду нормальной к линиям тока.

Это последнее утверждение нам представляется очень мало вероятным, так как характер движения в верхней части потока должен был бы радикально измениться тотчас по переходе давления в открытой среде за предел $0.53p_0$.

В самом деле, легко убедиться, прежде всего, что ширина всякой элементарной струйки будет наименьшею в той точке, где господствует предельное давление: это потому, что поперечное сечение определяется как частное от деления несомой струйкою количества газа на $p_0 \sqrt{2\alpha\tau_0(1-\tau_0)^2}$; а этот делитель проходит через максимум при $\tau = \frac{1}{2\beta + 1}$. Раз это так, то, приняв струйки нормальными к линии $\tau = \frac{1}{2\beta + 1}$, мы будем иметь наименьший расход газа из сосуда в том случае, если указанная линия представляет из себя отрезок, замыкающий отверстие. Но тогда коэффициент истечения, очевидно, равен 1; а следовательно, при переходе через предельное давление в приемнике этот коэффициент и расход газа сразу должен был бы возрасти более чем на 30%, что совершенно не соответствует действительности.

Мы, со своей стороны, полагаем, что явление могло бы быть истолковано следующим образом; вместе с цитированным автором мы думаем, что струя будет рассекается некоторою граничною поверхностью, при переходе через которую давление весьма резко изменяется. Остановливаясь на разобранной выше теоретической задаче, мы можем себе представить след означенной поверхности на плоскости, параллельно которой происходит течение, в виде кривой, опирающейся на края отверстия; далее, кривая, напоминая собою очертания языка пламени, выдвигается в открытую среду. Выше этой границы (внутри сосуда и прилежащей части струи) течение будет установившимся и давление падает от p_0 в далеких частях сосуда до

¹⁾ Явление это напоминает Rayenau обстоятельства разрыва твердых тел.

$0.53p_0$ на описанной граничной кривой; в дальнейшей же части струи волпуется¹⁾; волны эти будут иметь облегающую граничную кривую. В весьма тонком слое этой части струи, соседнем с кривою, среднее давление будет $< 0.53p_0$, и скорость распространения звука $c_2 < c_1$, представляющей ту же скорость для пограничного слоя, лежащего за линиею раздела. Пониженное давление стремится распространиться за линию раздела, следуя по струе в виде плоской волны; но каждую бесконечно тонкою струйкою волна эта относится назад, и так как скорость газовых частиц есть также c_1 , то в верхних частях газового потока никаких волн и не наблюдается. Чтобы линия раздела могла служить облегающею приходящих к ней волн, как нам кажется, достаточно предположить, что нормальная к означенной линии скорость волны одна и та же, будет ли эта волна распространяться сверху вниз или снизу вверх. Если мы обозначим через λ угол, который образует с граничною кривою пробегаящая через данную ее точку струйка, то, определив обе нормальные скорости по правилу Римана, сравнив их и применив, кроме того, весьма простые гидродинамические соображения, получим

$$\sin \lambda = - \frac{c_1 - c_2}{c_1 \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)};$$

если бы давление и плотность изменялись, хотя и весьма резко, но непрерывно, то $\rho_1 : \rho_2 = 1$; таким образом, мы видим, что *струйки пересекают линию раздела под постоянным углом*.

Если принять эту гипотезу, то установившееся течение выше линии раздела может быть строго математически определено, независимо от того, что происходит в дальнейшей части струи; именно, нетрудно показать,

что на означенной кривой, характеризующей равенством $\tau = \tau_0 = \frac{1}{2g} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right)$, извест место соотношение

$$\varphi (g \lambda (1 - \tau_0)^2 \pm \psi = 0;$$

один знак соответствует левой половине линии раздела, другой — правой, а ψ и φ обозначают поперечную функцию тока и потенциал скоростей. Приняв это соотношение в число граничных условий, можно засим доказать, что его, вместе с прочими условиями, совершенно достаточно для определения φ и ψ в области τ, θ . А раз φ и ψ найдутся, то легко будет определить

¹⁾ Эти волны наблюдались и изучались в недавнее время немецким ученым Emden'ом. Результаты его опытов описаны в статье: «Ausströmungserscheinungen permanenten Gase». (Ann. d. Phys. u. Chem., Bd. 69, H. 1 u. 2, 1899). Волны появляются тотчас, лишь только давление в приемнике падает ниже $0.53 p_0$; длина их тем значительнее, чем ниже давление в приемнике. Emden дает и теорию явления, но, на наш взгляд, совершенно несостоятельную: достаточно сказать, что, несмотря на существование волн, он считает постоянным давление во всей струе, чего, очевидно, быть не может; а это кладется в основу его анализа.

величину секундного расхода газа. Нам думается, что если бы этот расход оказался строго постоянным или мало меняющимся с изменением λ от нуля до его предельной величины, то приводимое нами объяснение было бы близко к истине. Скажем, кстати, что границы, в которых может изменяться λ , нешироки; угол этот будет невелик; поэтому приведенное выше соотношение между ψ и φ , по всей вероятности, даст результат, не слишком уклоняющийся от того, который мы получили бы, просто приняв $\psi = \pm Q$ вдоль граничной кривой. Малой изменчивости расхода можно ожидать также и на том основании, что величина его будет зависеть от $\int \sin \lambda \cdot ds$ распространенного на граничную кривую; этот интеграл равен, очевидно, полной длине этой линии, умноженной на $\sin \lambda$; а эта длина будет уменьшаться с увеличением λ . Заметим, наконец, что, приняв рассматриваемое истолкование явлений истечения, мы будем иметь вполне непрерывный переход от разрешенной выше задачи к тем случаям, когда данный нами анализ неприменим. Математическую разработку предлагаемой гипотезы мы надеемся дать в ближайшем будущем.

ГЛАВА IV

О ДАВЛЕНИИ ГАЗОВОГО ПОТОКА НА ПЛАСТИНКУ

Исследование этой задачи мы начнем с рассмотрения удара струи газа в пластинку, перпендикулярную к начальному направлению струи, причем предположим, что струя симметрично делится пластинкою на две части. Обращаемся опять к соответствующей задаче для случая несжимаемой жидкости. Решение этого вопроса изложено в цитированном уже сочинении проф. Н. Е. Жуковского: «Видоизменение метода Кпрхгоффа». Вводя те же переменные, как и в предшествующей главе, мы полагаем

$$\begin{aligned} w &= \varphi_1 + i\psi_1, \\ z &= x + iy, \quad \lg r_0 \frac{dz}{dw} = \vartheta + i\theta, \\ (71) \quad \varphi_1 + i\psi_1 &= -\frac{Q}{2\pi} \lg \left[1 - \frac{\sin^2 m}{\sin^2(\theta - i\vartheta)} \right]; \end{aligned}$$

m есть угол, под которым каждая из двух частей струи, после ее раздела в удаленных точках, наклонена к OX ; за эту ось мы принимаем линию симметрии рассматриваемой струи; начальное направление струи в таком случае будет параллельно оси X .

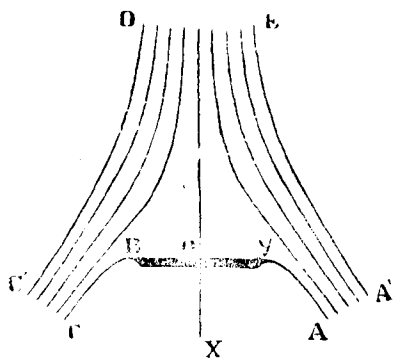
Покажем, что ф-ла (71) выражает как раз такое течение жидкости, которое нам нужно. Обратим прежде всего внимание на области мнимых переменных w и $\vartheta + i\theta$, которые соответствуют изображенному на фиг. 5 течению.

Область w ограничена двумя параллельными действительной оси прямыми, симметрично относительно нее расположенными и отстоящими от нее на расстоянии $\frac{Q}{2}$; этим прямым на чертеже (фиг. 5) соответствуют наружные границы струи EA' и DC'' . Границам течения CBO и $A'YO$ соответствуют нижняя и верхняя сторона положительной части действительной оси области w ; точке O соответствует $w=0$.

Область $\vartheta + i\theta$ ограничена, во-первых, лежащими вправо от мнимой оси частями прямых, параллельных оси ϑ и имеющих координаты $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = -\frac{\pi}{2}$; во-вторых, отрезком мнимой оси, заключенным между упомяну-

тыми параллелями. На чертеже (фиг. 5) прямой $\theta = \frac{\pi}{2}$ соответствует правая, а прямой $\theta = -\frac{\pi}{2}$ — левая часть плоскости; часть мнимой оси, заключенная между точками $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = m$, соответствует границе YA течения, ибо здесь скорость равна v_0 , $\vartheta = 0$; часть, симметричная только что указанной, соответствует кривой BC ; наконец, граница $C'D$ изображается в области $\vartheta + i\theta$ отрезком, заключенным между точками $\theta = -m$ и $\theta = 0$ мнимой оси, а кривая EA' — отрезком, ограниченным точками $\theta = 0$ и $\theta = m$.

Пройдем теперь по границам области $\vartheta + i\theta$ и выясним, что точка w при этом будет перемещаться по описанным выше границам области w .



Фиг. 5.

Выходим из точки $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \infty$; из

(71) видим, что при этих значениях ϑ и θ $w = Qki$, где k — произвольное целое число.

Выберем его равным нулю; если теперь точка $\vartheta + i\theta$ будет продвигаться вдоль прямой

$\theta = \frac{\pi}{2}$, то w пойдет по действительной

оси своей области и притом с верхней стороны этой оси, так как при $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ мы

будем иметь, при бесконечно малом ε , $\psi = k \cdot \varepsilon$ где k — некоторое положительное количество.

Когда точка $\vartheta + i\theta$ придет в положение

$\vartheta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, w успеет пройти отрезок своей действительной оси от 0,

до $\varphi_1 = -\frac{Q}{2} \lg(1 - \sin^2 m)$. Когда, далее, $\vartheta + i\theta$ двинется вдоль мнимой

оси, точка w будет продолжать свое движение по оси φ_1 в том же направлении до $\varphi_1 = \infty$, где она окажется, при $\vartheta = 0$, $\theta = m$; при прохождении точки $\vartheta = 0$, $\theta = m$, $\lg$ ф-лы (71) получит приращение $-\pi i$, и w

при $\vartheta = 0$, $m > \theta > 0$ будет продвигаться по прямой $w = i \frac{Q}{2}$

от $+\infty + i \frac{Q}{2}$ до $-\infty + i \frac{Q}{2}$; в последнее положение w приходит

при $\theta = 0$. Прохождение через точку $\vartheta = 0$, $\theta = 0$ даст логарифму ф-лы (71) приращение $2\pi i$, причем w скачком перейдет с верхней границы

своей области на нижнюю и продвинется по ней из $-\infty - i \frac{Q}{2}$ до

$+\infty - i \frac{Q}{2}$ при изменении $\vartheta + i\theta$ от 0 до $-im$; далее, при проходе $\vartheta + i\theta$

через $-im$, $\lg$ возрастет на $-\pi i$, w перескочит в точку $+\infty$ и по ниж-

ней стороне положительной части оси φ_1 возвратится в начальное положение при движении $\vartheta + i\theta$ из $-im$ в $-i\frac{\pi}{2}$ и из $-i\frac{\pi}{2}$ в $\infty - i\frac{\pi}{2}$ по границам области этого переменного.

Таким образом, желаемое выяснено: ф-ла (71) действительно решает задачу об ударе жидкой струи в пластинку. Чтобы решить эту же задачу для газовой струи, поступим согласно данному нами правилу. Разложим выражение w в ряд и отделим его мнимую часть. Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{2\pi w}{Q} &= 2 \lg \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \lg \left(\sin^2 \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \sin^2 m \right) = \\ &= 2 \lg \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \lg \left(\cos 2m - \cos 2 \frac{\vartheta + i\theta}{i} \right) + \lg 2 = \\ &= 2 \lg \sin \frac{\vartheta + i\theta}{i} - \lg \sin \frac{\vartheta + i\theta - im}{i} - \lg \sin \frac{\vartheta + i\theta + im}{i};\end{aligned}$$

введя показательные функции вместо тригонометрических, легко находим отсюда

$$\begin{aligned}\frac{2\pi w}{Q} &= 2 \lg (1 - e^{-2\vartheta - 2i\theta}) - \lg (1 - e^{-2\vartheta - 2i(\theta - m)}) - \lg (1 - e^{-2\vartheta - 2i(\theta + m)}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} \left\{ \cos 2n(\theta - m) - i \sin 2n(\theta - m) + \right. \\ &\quad \left. + \cos 2n(\theta + m) - i \sin 2n(\theta + m) - 2 \cos 2n\theta + 2i \sin 2n\theta \right\},\end{aligned}$$

или, по приведении,

$$\frac{2\pi w}{Q} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} (1 - \cos 2nm) (\cos 2n\theta - i \sin 2n\theta),$$

и наконец, для ψ_1 получаем

$$\frac{\pi \psi_1}{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\vartheta}}{n} \sin 2n\theta (1 - \cos 2nm).$$

Так как

$$e^{-\vartheta} = \frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (r \text{ скорость} = \sqrt{2a\tau}),$$

т. е. иначе,

$$\frac{\pi \psi_1}{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \sin 2n\theta (1 - \cos 2nm).$$

Таково в переменных τ , θ выражение функции тока для жидкой струи; следовательно, для струи газовой та же задача должна разрешаться формулой

$$(72) \quad \frac{\pi \psi}{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} \sin 2n\theta (1 - \cos 2nm).$$

По ф-ле (24) главы I отсюда находим для φ выражение

$$(73) \quad \frac{\tau^2}{Q} = C - (1 - \tau)^{-\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \frac{y_n}{y_{n,0}} x_n \cos 2n\theta (1 - \cos 2nm).$$

Если мы положим $C=0$, то, как и в задаче о жидкой струе, будем иметь, при $\tau=\theta=0$, $\varphi=0$ и $\psi=0$.

Ряды φ и ψ суть ряды абсолютно и равномерно сходящиеся при всяком $\tau < \tau_0$, как это явствует из общих соображений главы II, и следовательно, вопрос, поставленный нами, разрешается соотношениями (72) и (73).

Обратимся к определению ширины пластинки и давления на нее. Ширину пластинки будем обозначать через $2l$. Мы найдем l , если, оставив выражение координаты y , положим в нем $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\tau = \tau_0$.

Но

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi, \quad \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} y = \left(\int dy \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}};$$

а так как при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0 = \text{const}$, то

$$(dy)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau = \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau.$$

Вводя найденную формулу для φ и заметив, что

$$\tau = \tau_0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \\ l = \int y,$$

получим отсюда

$$(74) \quad l = \frac{Q}{\pi \sqrt{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{n\tau_0^n y_{n,0}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{d\tau} (1 - \tau)^{-\beta} \times \right. \\ \left. \times \left(\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y_n' \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \right\}.$$

Для вычисления интегралов, входящих в этот ряд, замечаем, прежде всего, что

$$\frac{d}{d\tau} (1 - \tau)^{-\beta} \tau \left(\tau^{n-1} y_n + \frac{\tau^n}{n} y_n' \right) = \frac{1}{n} \frac{d}{d\tau} \tau (1 - \tau)^{-\beta} z_n',$$

а на основании уравнения для z_n ,

$$\frac{d}{d\tau} \tau (1 - \tau)^{-\beta} z_n' = n^2 [1 - (2\beta + 1)\tau] (1 - \tau)^{-\beta-1} \frac{z_n}{\tau}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 J(\tau_0) &= \int_0^{\tau_0} \frac{d}{d\tau} (1-\tau)^{-\beta} \tau \left(\tau^{n-1} y_n + \frac{\tau_n}{n} y_n' \right) \frac{d\tau}{1-\tau} = \\
 (75) \quad &= \frac{1}{n} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{V\tau} \frac{d}{d\tau} \tau (1-\tau)^{-\beta} z_n' = \frac{1}{n} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau_0}{V\tau_0} (1-\tau_0)^{-\beta} z_{n,0}' + \\
 &\quad + \frac{1}{2n} \int_0^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^{-\beta} z_n'}{V\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^{-\beta} z_n'}{V\tau} d\tau = \frac{(1-\tau_0)^{-\beta}}{V\tau_0} z_{n,0} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau V\tau} (1-\tau)^{-\beta-1} z_n d\tau;$$

а так как, на основании дифференциального уравнения для функции z_n ,

$$\frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau} (1-\tau)^{-\beta-1} z_n = \frac{1}{n^2} \frac{d}{d\tau} \tau (1-\tau)^{-\beta} z_n',$$

то

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^{-\beta} z_n'}{V\tau} d\tau &= \frac{(1-\tau_0)^{-\beta}}{V\tau_0} z_{n,0} + \frac{1}{2n^2} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{V\tau} \frac{d}{d\tau} \tau (1-\tau)^{-\beta} z_n' = \\
 &= \frac{(1-\tau_0)^{-\beta}}{V\tau_0} z_{n,0} + \frac{1}{2n} J(\tau_0).
 \end{aligned}$$

Сопоставляя это соотношение с (75), находим

$$(76) \quad \frac{4n^2-1}{4n} J(\tau_0) = (1-\tau_0)^{-\beta} \left(\frac{z_{n,0}}{2V\tau_0} + V\tau_0 z_{n,0}' \right),$$

или, иначе,

$$J(\tau) = \frac{4n}{4n^2-1} (1-\tau)^{-\beta} \frac{d}{d\tau} z_n V\tau = \frac{4n}{4n^2-1} (1-\tau)^{-\beta} z_n V\tau \frac{d}{d\tau} \lg z_n V\tau;$$

так как $z_n = \tau^n y_n$, $1 + \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n} = x_n$, то отсюда

$$(76') \quad J(\tau) = \frac{2n}{4n^2-1} \tau^{n-\frac{1}{2}} y_n (1+2nx_n) (1-\tau)^{-\beta}.$$

На основании этой формулы, равенство (74) переписывается в форме

$$\begin{aligned}
 (77) \quad l &= \frac{2Q}{\pi V 2\alpha\tau_0} \left\{ \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos 2nm}{4n^2-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-\cos 2nm}{4n^2-1} 2nx_{n,0} \right\} (1-\tau_0)^{-\beta}.
 \end{aligned}$$

Первая из сумм, входящих в формулу для l , представляет из себя абсолютно сходящийся ряд; ее вычисляем так:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2 - 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{4n^2 - 1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{4n^2 - 1} &= \cos m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{4n^2 - 1} - \\ (78) \quad &- \sin m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{4n^2 - 1}; \end{aligned}$$

но легко видеть, что

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m - i \sin (2n-1)m}{4n^2 - 1} = \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n}}{2n-1} [\cos (2n-1)m - i \sin (2n-1)m] dt = \\ &= \int_0^1 t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt, \end{aligned}$$

где $\zeta = te^{-im}$.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\zeta^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} \zeta$, то полученный интеграл выражается так:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 t \operatorname{arctg} te^{-im} dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{-im} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2 e^{-im} dt}{1 + t^2 e^{-2im}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{-im} - \frac{e^{im}}{2} + \frac{e^{im}}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2 e^{-2im}} = \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{im}) \operatorname{arctg} e^{-im} - \frac{e^{im}}{2}; \end{aligned}$$

а так как

$$\operatorname{arctg} e^{-im} = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \lg \sqrt{\frac{1 + \sin m}{1 - \sin m}},$$

то

$$K = \frac{\pi}{8} (1 + \cos 2m) - \frac{\cos m}{2} + \frac{\sin 2m}{8} \lg \frac{1 + \sin m}{1 - \sin m} + \\ + i \left(\frac{\pi}{8} \sin 2m - \frac{\sin m}{2} + \frac{1 + \cos 2m}{8} \lg \frac{1 + \sin m}{1 - \sin m} \right).$$

Обращаясь к исходной формуле для K , видим, что первая строка его нового выражения представляет выражение в конечной форме функции $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{4n^2-1}$, а коэффициент мнимой единицы во второй строке равен

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{4n^2-1};$$

имея это, составляем по (78)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \cos m - 1 \right),$$

и, наконец,

$$(79) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} (1 - \cos m).$$

Воспользовавшись этой формулой, окончательно преобразуем (77) в следующее соотношение:

$$(80) \quad l = \frac{Q}{\pi \sqrt{2\alpha\tau_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} (1 - \cos m) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4nx_{n,0}}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) \right\} (1 - \tau_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ряд, оставшийся в этой формуле, — несомненно сходящийся. Чтобы в этом убедиться, составляем, пользуясь ф-лой (49) главы II для x_n , остаточный член. Имеем

$$x_{n,0} = \sqrt{1 - 2\beta s_0} + k\lambda_n \frac{s_0}{n^{\frac{1}{3}}}, \\ R_n = \sqrt{1 - 2\beta s_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4n}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) + \\ + Ks_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (1 - \cos 2nm) \lambda_n'}{n^{\frac{4}{3}}};$$

ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, ибо λ_n и λ_n' суть правильные дроби.

Переходя к вычислению R — равнодействующей давлений на рассматриваемую пластинку, обозначим давление позади ее через p_1 и замечаем, что

$$R = 2 \int_0^l (p - p_1) dy = 2 \int_0^{\tau_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\alpha\tau}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau \right\}_{\theta=\frac{\pi}{2}} - 2p_1 l;$$

но

$$p = k\rho_0^\gamma = k\rho_0^\gamma (1 - \tau)^{\beta+1},$$

ибо $\rho = \rho_0 (1 - \tau)^\beta$, а потому интеграл, входящий в выражение R , назовем его через T , по вставке значения функции φ , получает вид

$$T = \frac{Qk\rho_0^\gamma}{\pi \sqrt{2\alpha}} \sum_1^\infty \left\{ (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{n\tau_0^n y_{n,0}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta+1} \frac{d}{d\tau} (1 - \tau)^{-\beta} \left(\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y_n' \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \right\}.$$

Далее, приняв в расчет выражение

$$J(\tau) = \int_0^\tau \frac{d}{d\tau} (1 - \tau)^{-\beta} \left(\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y_n' \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

имеем

$$S(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta+1} \frac{d}{d\tau} (1 - \tau)^{-\beta} \left(\tau^n y_n + \frac{\tau^{n+1}}{n} y_n' \right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \\ = \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta+1} dJ = (1 - \tau_0)^{\beta+1} J(\tau_0) + (\beta + 1) \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^\beta J(\tau) d\tau;$$

по (76)

$$J(\tau) = \frac{4n}{4n^2 - 1} (1 - \tau)^{-\beta} \frac{d}{d\tau} z_n \sqrt{\tau};$$

поэтому

$$S(\tau_0) = (1 - \tau_0)^{\beta+1} J(\tau_0) + \frac{4n(\beta + 1)}{4n^2 - 1} z_{n,0} \sqrt{\tau_0}.$$

Вставив это выражение в вычисляемую сумму, получаем

$$T \frac{\pi}{Q} = \frac{k\rho_0^\gamma (1 - \tau_0)^{\beta+1}}{\sqrt{2\alpha}} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{n\tau_0^n y_{n,0}} J(\tau_0) + \\ + 4 \frac{(\beta + 1) k\rho_0^\gamma}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{\tau_0} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{1 - \cos 2nm}{4n^2 - 1};$$

первое из этих слагаемых, на основании (74), представляет из себя величину

$$k\rho_0^\gamma (1 - \tau_0)^{\beta+1} l = p_1 l;$$

а потому, воспользовавшись (79) и замечая, что

$$k\rho_0^\gamma(1+\beta) = \frac{k\gamma}{\gamma-1}\rho_0^\gamma = \alpha\rho_0,$$

имеем

$$T = p_1 l + \frac{Q\rho_0\sqrt{\alpha\tau_0}}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}(1 - \cos m).$$

Обращаясь к вышеприведенной формуле R , получим

$$(81) \quad R = Q\rho_0\sqrt{2\alpha\tau_0}(1 - \cos m).$$

Разделив это уравнение почленно на (80) и приняв в расчет соотношение: $\sqrt{2\alpha\tau_0} = v_0$ — скорости струи в удаленных ее точках, $\rho_0(1 - \tau_0)^3 = \rho_1$ — плотности газа в тех же точках, получим искомую формулу для R :

$$(82) \quad R = 2lp_1v_0^2 \frac{\pi}{\pi + \frac{8}{1 - \cos m} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2 n_0}{4n^2 - 1} (1 - \cos 2nm)}.$$

Что касается угла m , то он определяется из ур-ния (80), в котором все величины кроме m даны. В самом деле,

$$v_0 = \sqrt{2\alpha\tau_0}, \quad \alpha = k \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_0^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{1 - \tau_0},$$

где p_0 и ρ_0 суть давление и плотность в критической точке разветвляющейся линии тока; отсюда

$$(82') \quad \tau_0 = \frac{\rho_1 v_0^2}{\rho_1 v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} p_1}, \quad s_0 = \frac{\tau_0}{1 - \tau_0} = \frac{(\gamma-1)\rho_1 v_0^2}{2\gamma p_1};$$

наконец, разность значений ψ на границах струи — количество, обозначенное нами через Q , определяется из условия

$$Q\rho_0 = 2\rho_1 b v_0 = 2b v_0 (1 - \tau_0)^3 \rho_0,$$

если $2b$ есть ширина падающей струи в бесконечно удаленной ее части. Величины b , v_0 , ρ_1 , p_1 , конечно, должны считать данными.

Равнодействующую давлений, после того как m найдено, проще, конечно, вычислять по ф-ле (81). Кстати заметим здесь, что эту формулу можно вывести весьма просто из теоремы о количестве движения; при этом оказывается, что она несколько не зависит ни от вида пластинки, лишь бы пластинка эта была симметрична по отношению средней линии струи, ни от связи между давлением и плотностью. В самом деле, назовем через M количество движения газа, заключенного в струе и ограниченного с одной стороны перпендикулярным сечением начальной струи в удаленных ее точках,

с другой — двумя подобными же сечениями, проведенными через удаленные точки ветвей струи, сбегавших с пластинки. Приращение M через бесконечно малый промежуток времени Δt равно $2b\rho_1 v_0 \Delta t (\cos m - 1) v_0 = Q\rho_0 v_0 (\cos m - 1) \Delta t$, так как $2b$ есть начальная ширина струи, а $Q\rho_0$ — проносимое ею через поперечное сечение секундное количество газа. Импульс внешних сил выразится через $-R \Delta t$. По теореме о количестве движения имеем

$$Q\rho_0 v_0 (\cos m - 1) \Delta t = -R \Delta t,$$

а это равенство, по упрощении, и приводит нас к ф-ле (81). Для наших целей более существенной является, однако, менее общая ф-ла (82). Пользуясь ею, мы *приближенно* решим вторую основную задачу нашего исследования, задачу о давлении беспредельного потока газа на преграждающую его пластинку.

Начнем с приближенного суммирования ряда, входящего в знаменатель ф-лы (82). Для сего пользуемся употреблявшимся уже в задаче об истечении приближенным выражением функции x_n [при выводе формулы (61)]:

$$2x_n = 2 - 5s - \frac{25s^2}{2(2-5s)} + \frac{30s^2}{2+19s} \frac{1}{n+1} + \frac{30s^2}{n+\mu} \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right],$$

где

$$\mu = \frac{6+9s}{4-10s}, \quad s = \frac{\tau}{1-\tau}.$$

Обозначив для краткости вычисляемую Σ через L и опустив, для простоты письма, значок при s , будем иметь

$$\begin{aligned} 2L = & \left[2 - 5s - \frac{25s^2}{2(2-5s)} \right] \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4n^2 - 1} (1 - \cos 2nm) + \\ (83) \quad & + \frac{30s^2}{2+19s} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+1)(4n^2-1)} (1 - \cos 2nm) + \\ & + 30s^2 \left[\frac{2}{(2-5s)^2} - \frac{1}{2+19s} \right] \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+\mu)(4n^2-1)} (1 - \cos 2nm). \end{aligned}$$

Назовем ряды первой, второй и третьей строки соответственно через N_1 , N_2 , N_3 , и заметим, что, вычислив N_3 и N_1 , мы найдем и N_2 , положив в N_3 $\mu = 1$.

N_1 рассматриваем как предельное значение величины N_1' :

$$N_1' = \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm); \quad N_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} N_1'.$$

Имеем

$$\begin{aligned} 4N_1' = & \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) - \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{2n-1} - \\ & - \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nm}{2n+1}; \end{aligned}$$

первая из этих сумм имеет значение

$$1 + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k+1};$$

вторая может быть представлена в виде

$$\cos m \sum_1^k (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{2n-1} - \sin m \sum_1^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1},$$

и третья — в виде

$$- \cos m \sum_2^{k+1} (-1)^{n-1} \frac{\cos (2n-1)m}{2n-1} - \sin m \sum_2^{k+1} (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1}.$$

Пользуясь этими формулами, получим для $4N_1'$ выражение

$$4N_1' = (-1)^{k-1} \frac{1 - \cos 2km}{2k+1} + 2 \sin m \sum_1^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1},$$

откуда

$$N_1 = \frac{\sin m}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1}.$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_1^k (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)m}{2n-1} &= \int_0^m \sum_1^k (-1)^{n-1} \cos (2n-1)m \cdot dm, \\ \sum_1^k (-1)^{n-1} \cos (2n-1)m &= \frac{1}{2 \cos m} \sum_1^k (-1)^{n-1} [\cos 2nm + \cos (2n-2)m] = \\ &= \frac{1}{2 \cos m} [1 + (-1)^{k-1} \cos 2km]. \end{aligned}$$

и следовательно,

$$N_1 = \frac{\sin m}{4} \int_0^m \frac{dm}{\cos m} + \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin m}{4} \int_0^m \frac{\cos 2km}{\cos m} dm.$$

Что касается последнего слагаемого, то оно есть нуль. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^m \frac{\cos 2km}{\cos m} dm &= \int_0^m \frac{\cos (2k-1)m \cos m - \sin (2k-1)m \sin m}{\cos m} dm = \\ &= \frac{\sin (2k-1)m}{2k-1} - \int_0^m \frac{m \sin m \sin (2k-1)m}{\cos m \cdot m} dm; \end{aligned}$$

а на основании свойств интегралов Фурье ¹⁾

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^m \frac{m \sin m \sin (2k-1)m}{\cos m \cdot m} dm = 0.$$

¹⁾ Jordan. Cours d'analyse, t. II, p. 233.

Поэтому и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^m \frac{\cos 2km}{\cos m} dm = 0.$$

Итак,

$$(84) \quad N_1 = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) = \frac{\sin m}{4} \int_0^m \frac{dm}{\cos m} = \\ = \frac{\sin m}{4} \log \cot g \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right).$$

Обращаемся к вычислению N_3 :

$$N_3 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n+\mu)(4n^2-1)} (1 - \cos 2nm) = \\ = \int_0^1 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} (1 - \cos 2nm) dt.$$

Подынтегральная функция может быть выражена в конечной форме через низшие трансцендентные. Для сего рассматриваем ее как действительную часть от

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} (1 - e^{2nmi}).$$

В таком случае представляющий N_3 интеграл можно выразить как

$$R \int_0^1 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^{n+\mu-1}}{4n^2-1} (1 - e^{2nmi}) dt;$$

R здесь употреблено как знак действительной части сопровождаемого им комплексного количества. Но

$$4 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^n}{4n^2-1} = \left[t + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{3} - \frac{t^2}{5} + \frac{t^3}{5} + \frac{t^3}{7} - \frac{t^4}{7} - \frac{t^4}{9} + \dots \right] = \\ = \sqrt{t} \operatorname{arctg} \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} (\operatorname{arctg} \sqrt{t} - \sqrt{t}) = 1 - \frac{1-t}{\sqrt{t}} \operatorname{arctg} \sqrt{t}; \\ 4 \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nt^n e^{2nmi}}{4n^2-1} = 1 - \frac{1-te^{2mi}}{\sqrt{te^{mi}}} \operatorname{arctg} \sqrt{te^{mi}}.$$

Таким образом,

$$4N_3 = R \int_0^1 t^{\mu-\frac{3}{2}} \{ (e^{-mi} - te^{mi}) \operatorname{arctg} \sqrt{te^{mi}} - (1-t) \operatorname{arctg} \sqrt{t} \} dt.$$

Применив интегриацию по частям, получаем

$$J_m = \int_0^1 t^{\mu-\frac{3}{2}} (e^{-mi} - te^{mi}) \operatorname{arctg} \sqrt{te^{mi}} dt = \\ = \left(\frac{e^{-mi}}{\mu-\frac{1}{2}} - \frac{e^{mi}}{\mu+\frac{1}{2}} \right) \operatorname{arctg} e^{mi} + \frac{1}{\mu(2\mu+1)} - \frac{4\mu}{4\mu^2-1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1+te^{2mi}} dt;$$

НО

$$\frac{e^{-mi}}{\mu - \frac{1}{2}} - \frac{e^{mi}}{\mu + \frac{1}{2}} = \frac{4 \cos m}{4\mu^2 - 1} - \frac{8\mu i \sin m}{4\mu^2 - 1};$$

$$\operatorname{arctg} e^{im} = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \lg \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right);$$

$$\int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1 + te^{2mi}} dt = \int_0^1 \frac{(1+t \cos 2m) t^{\mu-1}}{1 + 2t \cos 2m + t^2} dt - i \sin 2m \int_0^1 \frac{t^{\mu} dt}{1 + 2t \cos 2m + t^2};$$

таким образом,

$$J_m = \frac{\cos m - 2\mu i \sin m}{4\mu^2 - 1} \left[\pi + 2i \lg \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) \right] + \frac{1}{\mu(2\mu + 1)} - \\ - \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{(1+t \cos 2m) t^{\mu-1}}{1 + 2t \cos 2m + t^2} dt + \frac{4\mu i \sin 2m}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu} dt}{1 + 2t \cos 2m + t^2}.$$

Что касается интеграла, вычитаемого в формуле для N_3 , то он равен J_m при $m=0$. Поэтому окончательно имеем

$$4N_3 = \frac{\pi(\cos m - 1)}{4\mu^2 - 1} + \frac{4\mu \sin m}{4\mu^2 - 1} \lg \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) + \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t} - \\ - \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{(1+t \cos 2m) t^{\mu-1}}{1 + 2t \cos 2m + t^2} dt; \\ \frac{4N_3}{1 - \cos m} = -\frac{\pi}{4\mu^2 - 1} + \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \frac{\sin m}{1 - \cos m} \lg \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) - \\ (85) \quad - \frac{8\mu(1 + \cos m)}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu}(1-t) dt}{(1+t)(1+t^2+2t \cos 2m)}.$$

Положив в этой формуле $\mu=1$, получим, наконец, величину $4N_2$; [N_2 есть вторая Σ , входящая в состав ф-лы (83)]:

$$\frac{4N_2}{1 - \cos m} = -\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3} \frac{\sin m}{1 - \cos m} \lg \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{2} \right) - \\ (86) \quad - \frac{8(1 + \cos m)}{3} \int_0^1 \frac{t(1-t) dt}{(1+t)(1+t^2+2t \cos 2m)};$$

имеющийся здесь определенный интеграл легко вычисляется; он равен

$$(87) \quad m \cotg m + \frac{\cos 2m}{1 - \cos 2m} \lg \cos m - \lg 2.$$

Теперь мы имеем все нужное для приближенного вычисления $2L$ по ф-ле (83), и могли бы составить выражение силы давления на пластинку любой газовой струи. Обратимся к тому случаю, когда струя бесконечно широка, т. е. к задаче о действии беспредельного потока газа на пластинку.

При таком условии $m=0$, ибо, обтекая пластинку, поток в конце концов вновь принимает начальное направление.

Мы должны, следовательно, вычислить

$$\lim_{m=0} \frac{8L}{1 - \cos m},$$

причем точное значение L представляется рядом, входящим в знаменатель ф-лы (82), а приближенное его выражение дается соотношением (83). Пользуясь ф-лами (84), (85), (86) и (87), имеем

$$\lim_{m=0} \frac{N_1}{1 - \cos m} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{m=0} \frac{N_2}{1 - \cos m} = \frac{4}{3} \lg 2 - \frac{4 + \pi}{12} = 0.32907,$$

$$\lim_{m=0} \frac{N_3}{1 - \cos m} = \frac{2\mu}{4\mu^2 - 1} - \frac{\pi}{4(4\mu^2 - 1)} - \frac{4\mu}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^\mu (1-t) dt}{(1+t)^3};$$

а так как

$$\int_0^1 \frac{t^\mu (1-t) dt}{(1+t)^3} = \frac{2\mu + 1}{4} - \mu^2 \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t},$$

то

$$\lim_{m=0} \frac{N_3}{1 - \cos m} = \frac{4\mu^3}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t} - \frac{\mu}{2\mu + 1} - \frac{\pi}{4(4\mu^2 - 1)}$$

Засим, по (83)

$$\begin{aligned} \lim_{m=0} \frac{8L}{1 - \cos m} &= 4 - 10s - \frac{25s^2}{2 - 5s} + \frac{30s^2}{2 + 19s} 1.3163 + \\ &+ 30s^2 \left[\frac{2}{(2 - 5s)^2} - \frac{1}{2 + 19s} \right] \left(\frac{16\mu^3}{4\mu^2 - 1} \int_0^1 \frac{t^{\mu-1} dt}{1+t} - \frac{4\mu}{2\mu^2 + 1} - \frac{\pi}{4\mu^2 - 1} \right) = P(s), \end{aligned}$$

причем

$$(88') \quad \mu = \frac{6 + 9s}{4 - 10s}, \quad s = \frac{\tau}{1 - \tau}, \quad s = s_0.$$

Ф-ла (82) принимает вид

$$(88) \quad R = 2l\rho_1 v_0^2 \frac{\pi}{\pi + P}.$$

При этом s_0 определяется ф-лой (82'):

$$s_0 = \frac{(\gamma - 1)\rho_1 v_0^2}{2\gamma p_1},$$

которую можно переписать в виде

$$s_0 = \frac{v_0^2}{5c^2},$$

вводя скорость звука c в отдаленных частях потока и заменяя γ его значением 1.40.

При $s=0$, найденное для R выражение дает формулу Кирхгоффа

$$R = 2l\rho_1 v_0^2 \frac{\pi}{\pi + 4} = 0.44 \cdot 2l\rho_1 v_0^2,$$

годную для давления потока несжимаемой жидкости. К этому же значению стремится при $s=0$ и точная ф-ла (82). Но чем значительнее скорость, тем больше величина $\frac{\pi}{\pi + P}$, и следовательно, реакция газового потока с увеличением скорости возрастает несколько энергичнее, чем в случае потока жидкости. Вычислим коэффициент $\frac{\pi}{\pi + P}$ при предельном значении s , равном 0.2, и при значениях, недалеких от предельного. Счет будем вести с точностью до 0.01.

Полагая $s_0 = 0.2$, имеем

$$\mu = 3.9, \quad \int_0^1 \frac{t^{\mu-1}}{1+t} dt = j(\mu) = 0.144;$$

$$k(\mu) = \frac{16\mu^2}{4\mu^2 - 1} j(\mu) - \frac{4\mu}{2\mu + 1} - \frac{\pi}{4\mu^2 - 1} = 0.459;$$

$$P(0.2) = 1 + \frac{6}{29} \cdot 0.857 + \frac{12}{5} \cdot 0.459 = 2.28;$$

$$\frac{\pi}{\pi + P} = 0.58;$$

при этом $v_0 = c$, скорости звука в далеких частях газового потока; если p_1 давление в этой области, равно 1^{atm} , то, в случае воздуха, $c = 333$ м/сек.

$$\text{При } s_0 = \frac{2}{11} = 0.1818:$$

$$\mu = 3.5; \quad v_0 = c \sqrt{\frac{10}{11}} = \text{около } 318 \text{ м/сек}; \quad j(\mu) = 0.1625; \quad k(\mu) = 0.508$$

$$P(0.1818) = 4 - 1.818 - \frac{1.818^2}{4 \cdot 1.091} + \frac{3 \cdot 1.818^2}{54.54} \cdot 0.808 +$$

$$+ \frac{3 \cdot 1.818^2}{1.091^2} \cdot 0.102 = 2.42; \quad \frac{\pi}{\pi + P} = 0.56.$$

$$\text{При } s_0 = \frac{2}{17} = 0.1176:$$

$$\mu = 2.5; \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{17}} c = 255 \text{ м/сек}; \quad j(\mu) = 0.2375; \quad k(\mu) = 0.676;$$

$$P(0.1176) = 4 - 1.176 - \frac{1.176^2}{4 \cdot 1.412} + \frac{3 \cdot 1.176^2}{42.354} \cdot 0.640 +$$

$$+ \frac{3 \cdot 1.176^2}{1.412^2} \cdot 0.135 = 2.93; \quad \frac{\pi}{\pi + P} = 0.52.$$

При $s_0 = \frac{2}{29} = 0.069$:

$$\mu = 2; \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{29}} c = 195.5 \text{ м/сек}; \quad j(\mu) = 0.3069; \quad k(\mu) = 0.8035;$$

$$P(0.069) = 4 - 0.69 - \frac{0.69^2}{4 \cdot 1.655} + \frac{3 \cdot 0.69^2}{33.11} \cdot 0.508 + \frac{3 \cdot 0.69^2}{1.655^2} \cdot 0.162 = 3.34;$$

$$\frac{\pi}{\pi + P} = 0.485.$$

При $s_0 = \frac{2}{53} = 0.0377$:

$$\mu = 1.75; \quad v_0 = \sqrt{\frac{10}{53}} c = 144.6 \text{ м/сек}; \quad j(\mu) = 0.3578; \quad k(\mu) = 0.8925;$$

$$P(0.0377) = 4 - 0.377 + 0.010 = 3.63; \quad \frac{\pi}{\pi + P} = 0.464.$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент формулы давления резко падает с уменьшением скорости вблизи предельных скоростей, а затем падение его замедляется. Так, при уменьшении скорости с 333 м/сек до 318 м/сек он падает с 0.58 на 0.56, убывая на 0.02, т. е. 3.4% своей величины. Такова же числовая величина падения его при изменении скорости от 196 м/сек до 145 м/сек, хотя разность этих скоростей в 3.4 раза больше. Заметим, сверх того, что при скорости в 145 м/сек коэффициент давления уже близок к тому значению, которое вычисляется из формулы Кирхгоффа ($\frac{\pi}{\pi + 4} = 0.44$); разность этих значений равна всего 0.024, около 5% большего из них. Полное приращение коэффициента $0.58 - 0.44 = 0.14$ составляет около 32% его нижней величины.

Итак, при скоростях, не очень значительных, коэффициент в формуле давления потока на пластинку, или, все равно, сопротивления газовой среды движению в ней пластинки, меняется очень медленно; поэтому при таких условиях среда сопротивляется приблизительно по закону квадрата скорости. Но, когда скорость движения пластинки близка к звуковой, сопротивление возрастает весьма заметно. Этот вывод наш вполне подтверждается имеющимися опытными данными¹⁾.

Отметим, далее, сравнительно простую формулу, которая при принятой точности счета дает результаты, совершенно согласные с теми, которые мы получили по ф-ле (88). Она такова:

$$(89) \quad P(s_0) = 4 - 10s_0 + 7s_0^2.$$

Подсчитываем $P(s_0)$ по (89) и по (88), и для сравнения пишем друг под другом результаты. Получаем следующую таблицу:

s_0	0.2	0.1818	0.1176	0.069	0.0377
$P(s_0)$ по (88)	2.28	2.42	2.93	3.34	3.63
$P(s_0)$ по (89)	2.28	2.41	2.92	3.34	3.63.

¹⁾ См. ниже.

Получаемая по сравниваемым формулам разница значений R несколько не влияет на величину коэффициента сопротивления при принятом приближении.

Окончательная формула сопротивления принимает теперь вид

$$(90) \quad K = \frac{\pi}{\pi + 4 - 10s_0 + 7s_0^2} 2l\rho_1 v_0^2;$$

при этом

$$s_0 = \frac{v_0^2}{5c^2},$$

где c представляет скорость распространения звука в далеких частях потока, равную 333 м/сек, если движение пластинки происходит в атмосфере.

Если v_0 не очень велико $\left(v_0 < \frac{c}{\sqrt{10}}\right)$, то член $7s_0^2$ незначителен, и в пределах точности им можно пренебречь; тогда

$$(90') \quad R = \frac{\pi}{\pi + 4 - 2\frac{v_0^2}{c^2}} 2l\rho_1 v_0^2.$$

Приближенная ф-ла (90) может быть получена из точного выражения для силы давления газовой струи на пластинку совершенно тем же путем, как и соответственная ф-ла (69) в предшествующей главе. Нетрудно убедиться, что если мы заменим в знаменателе соотношения (82) $x_{n,0}$ приближенно через

$$x_n(0) + s_0 x_n'(0) + \frac{s_0^2}{2} x_n''(0),$$

то, совершив вычисления и положив $m=0$, придем к ф-ле (90); разница будет лишь в том, что знаменатель окажется равным $\pi + 4 - 10s_0 + 7.2s_0^2$, а это не имеет значения при принятой нами точности счета.

Посмотрим теперь, что даст нам ф-ла (90), если мы попытаемся определить по ней сопротивление воздуха движению, применяя ее за пределами ее применимости. Остановим при этом наше внимание на коэффициенте

$$K = \frac{\pi}{\pi + 4 - 10s_0 + 7s_0^2};$$

пока скорость пластинки не превосходит звуковой, коэффициент этот возрастает сначала очень медленно, потом значительно быстрее вместе с возрастанием скорости, как было показано выше; при этом пределы изменения его ограничены крайними значениями 0.44 и 0.58. Это возрастание продолжается и после того, как s_0 перейдет значение 0.2, соответствующее равенству $v_0 = c$; так, при $v_0 = \frac{3}{2}c =$ около 500 м/сек, $s_0 = 0.45$, $K = 0.77$:

при $s_0 = \frac{5}{7}$, $v_0 = \frac{5}{7} \sqrt{7} \text{ с} \approx \text{около } 629 \text{ м/сек}$, K достигает своего максимального значения 0.88, вдвое превышающего величину его при малых скоростях. Далее K убывает, и при $v_0 = 2.5 \text{ с} \approx \text{около } 833 \text{ м/сек}$, $s_0 = 1.25$ мы имеем $K = 0.56$.

Отмеченные результаты, с качественной стороны, находятся в довольно хорошем согласии с данными опыта. Это тем более любопытно, что опыты производились в условиях, чрезвычайно далеких от условий рассмотренной теоретической задачи, так как, на деле, K вычислялся из наблюдений над полетом артиллерийских снарядов. Полученные таким путем данные приведены в руководство по баллистике проф. Забудского¹⁾, которым мы главным образом и пользовались в целях сравнения. В действительности, изменение коэффициента K при скоростях, не превышающих 240 м/сек, почти незаметно; затем он очень быстро начинает возрастать, увеличиваясь в 2.8 раза при изменении скорости снаряда от 240 до 420 м/сек; далее, он держится на одной и той же высоте, пока скорость не превзойдет 550 м/сек, а затем спадает, приобретая при 1100 м/сек ту же величину, как и при скорости в 340 м/сек. Таким образом, действительное изменение K отличается большею резкостью: с большею ясностью выступает закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости при скоростях, не очень значительных или очень больших, и более быстрым оказывается рост коэффициента при скоростях, сопредельных с звуковой. Такое явление до некоторой степени можно было и предвидеть: в самом деле, в нашей теоретической задаче струйки обтекают с движущейся пластинки лишь в двух направлениях, тогда как при полете артиллерийского снаряда они срываются с него во всех меридиональных плоскостях; если бы в каждой из этих плоскостей движение происходило как в рассмотренном нами случае, то коэффициент сопротивления должен был бы изменяться как наше K^2 ; в действительности, колебания его не так значительны; это потому, что струйки, разбегаясь по снаряду, расширяются и, стало быть, должны слабее давить на тело снаряда вблизи его контуров. Лучших результатов нельзя было ожидать и по той причине, что мы прилагаем ф-лу (90) вне тех пределов, в которых доказана ее применимость.

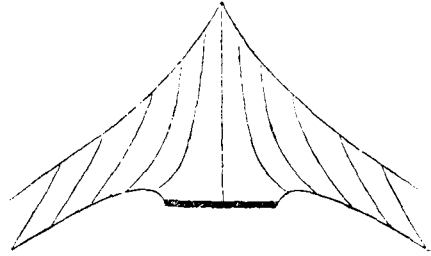
Кроме указанных причин, имеется и еще один уклоняющий фактор — это вязкость воздуха и трение его о бока движущегося тела; благодаря вязкости, позади пластинки должны образоваться вихри, понижающие давление в этой области и ведущие вследствие этого к увеличению сопротивления. Это обстоятельство сказывается уже и при малых скоростях; так, из опытов Тибо оказалось, что коэффициент K равен приблизительно 0.64, вместо 0.14, если скорость колеблется в границах от 0.5 до 11 м/сек²⁾.

¹⁾ См. его сочинение «Внешняя баллистика», Спб., 1895, стр. 47 — 57, а также таблицу 4, фиг. 30.

²⁾ См. цитир. сочинение Забудского, стр. 14.

Нам представляется, что при значительных скоростях влияние вязкости не будет так велико.

В заключение этой главы укажем способ построения теоретической формулы, разрешающей задачу о сопротивлении в том случае, если скорость движения пластинки превосходит звуковую. В этом случае по тем же причинам, как и при истечении газа из сосуда, нельзя ожидать сплошного установившегося движения. Здесь, как и там, должна образоваться некоторая поверхность раздела, рассекающая область текущего газа на две части, движение в которых обладает различным характером. Эту поверхность, состоящую в рассматриваемом случае из двух полостей и представленную на чертеже (фиг. 6), мы будем считать облегающую звуковых волн. Внутри уплотненного и разогретого воздушного слоя, выделяемого ею из атмосферы, движение будет



Фиг. 6.

установившееся, и наше переменное τ везде менее $\frac{1}{2\beta + 1}$; на самой поверх-

ности $\tau = \frac{1}{2\beta + 1}$ и относительная скорость проникающих в рассматриваемый слой воздушных частиц равна скорости звука, которая в этом месте наблюдалась бы при спокойном газе и которая равна скорости летящей пластинки. При переходе через границу слоя во внешнюю атмосферу мы встретим резкое падение давления; здесь движение будет неустановившееся¹⁾. Приняв ту же гипотезу, как и в задаче об истечении, мы найдем, что угол, под которым струйки в их относительном движении (при неподвижности пластинки) пересекают границы области сгущенного слоя, будет иметь постоянную величину во всех точках поверхности раздела. Этого добавочного условия достаточно для математического анализа движения внутри выделенного воздушного слоя, а следовательно, и для решения вопроса о давлении воздуха на пластинку. Заметим, что самое существование поверхности раздела и сжатого воздушного слоя отнюдь нельзя считать гипотетичным, так как эти явления, с несомненностью, констатированы были Mach'ом и другими учеными наблюдателями.

¹⁾ Работа наша относится к 1902 г. В настоящее время (1933 г.) намечены новые решения вопроса и найдены установившиеся формы течений со скоростями, превышающими звуковую.

ГЛАВА V

ПРИБЛИЖЕННАЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ГАЗОВЫХ СТРУЯХ

Если скорости течения газа в рассматриваемой задаче достаточно далеки от предельной скорости c , определяемой равенством $\tau_0 = \frac{1}{2\beta + 1}$, то формулы, разрешающие вопрос, приближенно могут быть представлены в более простой и компактной форме при помощи введения некоторого минимального переменного.

В главе I выведены были следующие основные формулы, связывающие производные от потенциала скоростей и функции тока по независимым переменным τ и θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 2\tau(1-\tau)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Это — ф-лы (11) главы I. Введем обозначение

$$(91) \quad \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^2}{2\tau} d\tau = \sigma,$$

где τ_0 — максимальная величина τ , соответствующая границе струи. Тогда приведенные формулы могут быть изображены в форме

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} &= K \frac{\partial \psi}{\partial \theta},\end{aligned}$$

причем

$$K = \frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}.$$

В области течения коэффициент K изменяется; но если скорости движения газа не близки к предельной, то K остается заключенным в весьма тесных пределах.

Покажем, прежде всего, что K уменьшается с увеличением τ . Для сего составляем производную $\frac{dK}{d\tau}$:

$$\frac{dK}{d\tau} = -\frac{2\beta(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+2}}.$$

Ясно, что она сохраняет знак минус, каково бы ни было положительное количество τ , а потому утверждение наше правильно. Затем сделаем вычисление значений K при крайних величинах τ , допускаемых рассматриваемой задачей; тогда, на основании сказанного, K будет заключаться между найденными таким образом граничными его значениями.

Переходя для удобства вычислений от переменного τ к переменному $s = \frac{\tau}{1-\tau}$, мы получим для K значение

$$K = (1 - 2\beta s)(1 + s)^{2\beta},$$

или, положив β попрежнему равным 2.5,

$$K = (1 - 5s)(1 + s)^5.$$

Отсюда находим при

$$s = \frac{1}{12\beta} = \frac{1}{30} \dots 1 > K > 0.982;$$

$$s_0 = \frac{1}{14\beta} = \frac{1}{35} \dots 1 > K > 0.987;$$

$$s_0 = \frac{1}{16\beta} = \frac{1}{40} \dots 1 > K > 0.990;$$

$$s_0 = \frac{1}{18\beta} = \frac{1}{45} \dots 1 > K > 0.9920;$$

$$s_0 = \frac{1}{24\beta} = \frac{1}{60} \dots 1 > K > 0.9957;$$

$$s_0 = \frac{1}{32\beta} = \frac{1}{80} \dots 1 > K > 0.9976;$$

$$s_0 = \frac{1}{50\beta} = \frac{1}{125} \dots 1 > K > 0.9992;$$

$$s_0 = \frac{1}{200\beta} = \frac{1}{500} \dots 1 > K > 0.99995.$$

Соответственные величины максимальной скорости v_0 определяются по формуле $v_0^2 = 5c^2 s_0$, где c — скорость звука при том физическом состоянии газа, в котором он находится на границах струй. При приведенных выше значениях s_0 , предположив вместе с тем, что вблизи границ струй господствуют средние атмосферные условия, мы получим для v_0 , соответственно следующие значения:

$$136; 126; 118; 111; 96; 83; 66.6; 33.3 \text{ м/сек}^1).$$

¹⁾ Числа для простоты округлены; c принято равным 333 м/сек.

Приближение, которое мы теперь допустим, состоит в том, что K принимается равным единице. Тогда имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma},$$

и следовательно,

$$(92) \quad w = \varphi + i\psi = F(\sigma + i\theta),$$

причем σ определяется ф-лой (91).

Будем опять, наряду с разрешаемой задачей о течении газа, рассматривать соответственное движение жидкости несжимаемой, оставляя те же граничные условия: преграждающие стенки — плоские, область течения беспредельно простирается в некоторых направлениях; позади стенок, с которых срывается текущая масса, господствует постоянное давление и имеется спокойная жидкость или газ. Задача о струях в несжимаемой жидкости разрешается соотношением

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = F(\vartheta + i\theta), \quad \vartheta + i\theta = \lg \frac{v_0 dz}{dw_1},$$

где $\vartheta = \lg \frac{v_0}{v}$, θ — тот же угол скорости с осью OX , как и в задаче о газах.

На всех границах ψ_1 имеет то или другое постоянное значение; на преграждающих стенках $\theta = \text{const}$, а на струях скорость $v = \text{const} = v_0$, и следовательно, $\vartheta = 0$. Таковы условия, налагаемые на w_1 , функцию много переменного $\vartheta + i\theta$. Способ отыскания такой функции дастся методом проф. Н. Е. Жуковского в выше цитированном его сочинении «Видоизменение методы Кирхгоффа».

Ясно, что найдя функцию F , решающую данную задачу о несжимаемой жидкости, мы получим отыскиваемое решение той же задачи о движении газа, положив

$$\varphi + i\psi = F(\sigma + i\theta),$$

т. е. просто заменив ϑ через σ ; тогда, при прохождении переменными θ и σ границ их области, ψ будет получать те же постоянные значения, как и ψ_1 ; где $\vartheta = 0$, там, конечно, и $\sigma = 0$, а следовательно, $\tau = \tau_0$.

Раз функция $\varphi + i\psi$ найдена в зависимости от $\sigma + i\theta$, легко найти координаты в зависимости от переменных σ и θ , изучить контуры струй и определить характерные для задачи постоянные — количества несомого струями газа и равнодействующие давлений на преграды.

Для определения зависимости координат от σ и θ , прежде всего, выразим τ через σ . На основании ф-лы (91), имеем

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{1}{V\tau} = -\frac{1}{2\tau V\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{(1-\tau)^2}{V\tau},$$

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\sqrt{\tau}} = - \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau\sqrt{\tau}} (1-\tau)^{-\beta-1} \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{K}{\sqrt{\tau}};$$

а так как мы приняли

$$K = [1 - (2\beta + 1)\tau] : (1 - \tau)^{2\beta+1} = 1,$$

то из этих соотношений выводим

$$(92) \quad \frac{d^2}{d\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}; \quad \frac{1}{\sqrt{\tau}} = \frac{C_1 e^\sigma + C_2 e^{-\sigma}}{2}; \quad \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\sqrt{\tau}} = \frac{C_1 e^\sigma - C_2 e^{-\sigma}}{2}.$$

Положив $\tau = \tau_0$, найдем

$$(93) \quad \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}}, \quad \frac{C_1 - C_2}{2} = \frac{1 - \tau_0)^{-\beta}}{\sqrt{\tau_0}}.$$

Обратимся теперь к ф-лам (7') и (8) главы I, дающим производные от координат по φ и ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\alpha\tau}}; \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\sin \theta (1-\tau)^{-\beta}}{\sqrt{2\alpha\tau}}, & \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{\cos \theta (1-\tau)^{-\beta}}{\sqrt{2\alpha\tau}}. \end{aligned}$$

Отсюда, приняв в расчет (93) и положив $x + iy = z$, $\varphi + i\psi = w$, $\varphi - i\psi = w'$, получим

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= C_1 e^{\sigma+i\theta} + C_2 e^{-\sigma-i\theta}; \\ 2\sqrt{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial \psi} &= i(C_1 e^{\sigma+i\theta} - C_2 e^{-\sigma-i\theta}); \\ 2\sqrt{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial \sigma} &= C_1 e^{\sigma+i\theta} \frac{\partial w}{\partial \sigma} + C_2 e^{-\sigma-i\theta} \frac{\partial w'}{\partial \sigma}; \\ 2\sqrt{2\alpha} \frac{\partial z}{\partial \theta} &= C_1 e^{\sigma+i\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + C_2 e^{-\sigma-i\theta} \frac{\partial w'}{\partial \theta}; \\ 2\sqrt{2\alpha} z &= C_1 \int e^{\sigma+i\theta} dw + C_2 \int e^{-\sigma-i\theta} dw'. \end{aligned} \right.$$

Интеграция может быть произведена, так как

$$w = f(\sigma + i\theta), \quad w' = f_1(\sigma - i\theta),$$

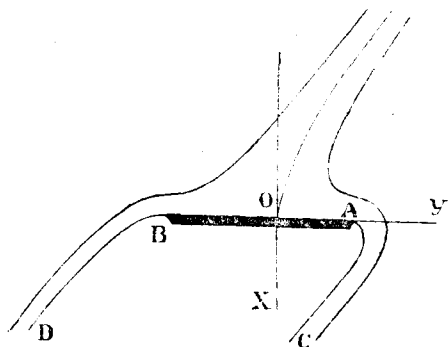
где f_1 — функция, сопряженная f .

В качестве примера рассмотрим приближенное решение задачи о давлении на пластинку беспредельного газового потока, или, иначе, о сопротивлении газовой среды движению в ней пластинки. Предположим при этом, что направление потока образует некоторый угол λ с перпендикуляром

к пластинке. Пользуясь методом П. Е. Жуковского, легко находим следующее решение этой задачи для несжимаемой жидкости:

$$\varphi_1 + i\psi_1 = \frac{\cos^2 \lambda}{u} = \sin \lambda + \sin(\theta - i\lambda).$$

Области течения соответствует в таком случае верхняя полуплоскость переменного u . Границам $\theta = 0$, которые определяют убегающие с пластинки струи CA и BD , соответствуют части действительной оси области u от $u = +\infty$ до $u = 1 - \sin \lambda$ и от $u = -1 - \sin \lambda$ до $u = -\infty$; точка $u = \pm \infty$ дает $\theta = 0$, $\theta = -\lambda$. Той части пластинки, где $\theta = \frac{\pi}{2}$, соответствует отрезок действительной оси плоскости u , ограниченный точками $u = 0$ и $u = 1 - \sin \lambda$; наконец, на границе OB $\theta = -\frac{\pi}{2}$ и u изменяется от 0 до $-1 - \sin \lambda$.



Фиг. 7.

С другой стороны, при u действительном $\psi_1 = 0$ и φ_1 изменяются от 0 до $+\infty$ при изменении u от 0 до $+\infty$. Мнимая ось области u дает также $\psi_1 = 0$; φ_1 при этом растет от $-\infty$ до 0, в то время как u пробегает значения от $+\infty i$ до 0; θ и θ изменяются, соответственно, в пределах 0 и $+\infty$, $-\lambda$ и 0; отсюда ясно, что

мнимой оси полуплоскости u соответствует в области течения линия тока EO , разветвляющаяся на пластинке в OAC и OBD .

На основании высказанного выше правила, мы получим решение интересующей нас задачи о газовом потоке, полагая

$$(95) \quad \varphi + i\psi = ku^2, \quad \frac{\cos^2 \lambda}{u} = \sin \lambda + \sin(\sigma - i\theta).$$

Отыщем теперь выражения координат через σ и θ . Для этого обращаемся к последней из ф-л (94). Она дает

$$2\sqrt{2}az = C_1 e^{\sigma+i\theta} w + C_1 e^{-\sigma+i\theta} w' - C_1 \int w e^{\sigma+i\theta} d(\sigma+i\theta) + \\ + C_2 \int w' e^{-\sigma+i\theta} d(\sigma-i\theta).$$

Положив, для краткости, под знаками интегралов

$$e^{\sigma+i\theta} = l, \quad e^{-\sigma+i\theta} = l'$$

и вводя выражения w и w' из (95), получим

$$2V\overline{2\alpha z} = C_1 e^{\sigma+i\theta} w + C_2 e^{-\sigma+i\theta} w' - 4kC_1 \cos^4 \lambda \int \frac{t^2 dt}{(2 \sin \lambda t + i - it^2)^2} - \\ - 4kC_2 \cos^4 \lambda \int \frac{t'^2 dt'}{(2 \sin \lambda t' + i - it'^2)^2}.$$

По интегриации будем иметь

$$2V\overline{2\alpha z} = C_1 e^{\sigma+i\theta} w + C_2 e^{-\sigma+i\theta} w' + 2k \cos^2 \lambda C_1 \frac{it \cos 2\lambda + \sin \lambda}{2 \sin \lambda t + i - it^2} + \\ + 2k \cos^2 \lambda C_2 \frac{it' \cos 2\lambda + \sin \lambda}{2 \sin \lambda t' + i - it'^2} - 2ik \cos \lambda C_1 \operatorname{arctg} \frac{t + i \sin \lambda}{i \cos \lambda} - \\ - 2ik \cos \lambda C_2 \operatorname{arctg} \frac{t' + i \sin \lambda}{i \cos \lambda} + L.$$

Или, вводя сумму и разность имеющихся в этой формуле arctg' ов и умножая все равенство на i :

$$\frac{2V\overline{2\alpha z}i}{k} = C_1 i e^{\sigma+i\theta} \frac{\cos^4 \lambda}{[\sin \lambda + \sin(\theta - i\sigma)]^2} + C_2 i e^{-\sigma+i\theta} \frac{\cos^4 \lambda}{[\sin \lambda + \sin(\theta + i\sigma)]^2} - \\ - C_1 \cos^2 \lambda \frac{\cos 2\lambda - i \sin \lambda e^{-\sigma-i\theta}}{\sin \lambda + \sin(\theta - i\sigma)} - C_2 \cos^2 \lambda \frac{\cos 2\lambda - i \sin \lambda e^{\sigma-i\theta}}{\sin \lambda + \sin(\theta + i\sigma)} + \\ + \cos \lambda (C_1 + C_2) \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta} + 2i \sin \lambda}{\cos 2\lambda + e^{2i\theta} + i \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta}} \frac{\cos \lambda}{i} \right\} + \\ + \cos \lambda (C_1 - C_2) \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(e^\sigma - e^{-\sigma}) e^{i\theta}}{1 - e^{2i\theta} - i \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta}} \frac{\cos \lambda}{i} \right\} + Li. \quad (96)$$

Нетрудно убедиться, что оба arctg' а, входящие в эту формулу, всюду изменяются непрерывно; что при стремлении σ к ∞ , каково бы ни было θ , первый из них стремится к $-\frac{\pi}{2} + \lambda$, а второй — к $\frac{\pi}{2} - \lambda$, и следовательно, L , произвольное постоянное интегрирования, можно определить так, чтобы при $\sigma = \infty$ было $z = 0$.

Заметим, далее, что первый из этих arctg' ов нигде не достигает значения $\frac{\pi}{2}$, ибо знаменатель его аргумента нигде не обращается в нуль; второй переходит через $\frac{\pi}{2}$ на линии, которая определяется равенством

$$2 \sin \theta + \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) = 0.$$

Составим теперь выражение длины пластинки $2l$. Для сего по ф-ле (96) определяем $2l = -iz_1 + iz_2$, равное разности результатов подстановки в выражение $-iz$ значений $\sigma = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ и $\sigma = 0, \theta = -\frac{\pi}{2}$; заметим, что, на

основании сказанного нами об изменении второго arctg' а ф-лы (96),

$$\begin{array}{c} \sigma = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \\ \swarrow \\ \operatorname{arctg}' \frac{(e^\sigma - e^{-\sigma}) e^{i\theta} \cos \lambda}{i - i e^{2\theta i} + \sin \lambda (e^\sigma + e^{-\sigma}) e^{i\theta}} = -\pi. \\ \searrow \\ \sigma = 0, \theta = -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Такая же подстановка в первый из arctg' ов дает в результате нуль. Приняв это во внимание, легко находим после простых приведений:

$$\frac{2l}{k} \frac{2\alpha}{2} = 4 \frac{C_1 + C_2}{2} + \pi \cos \lambda \frac{C_1 - C_2}{2},$$

а отсюда, на основании ф-л (93'),

$$(97) \quad 2l \frac{\sqrt{2\alpha\tau_0}}{k} = 4 + \pi \cos \lambda (1 - \tau_0)^{-\beta}.$$

Обратимся к вычислению равнодействующей R давления на пластинку. Пользуемся для сего формулой

$$p = p_0 (1 - \tau)^{\beta+1},$$

где p_0 — давление в критической точке; оно определяется через p_1 , давление, имеющее место позади пластинки и господствующее во всей спокойной области газовой среды, формулой

$$p_0 (1 - \tau_0)^{\beta+1} = p_1.$$

Для определения R имеем

$$R = \int_0^{l_1} p_0 (1 - \tau)^{\beta+1} dy_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \int_{-l_2}^0 p_0 (1 - \tau)^{\beta+1} dy_{\theta=-\frac{\pi}{2}} - 2p_1 l;$$

здесь через l_1 и l_2 обозначены соответственно длины частей пластинки OA и OR , от критической точки до концов.

Совершив интеграцию по частям, получаем

$$\begin{aligned} R &= p_0 (1 - \tau_0)^{\beta+1} (l_1 + l_2) - 2p_1 l + \\ &+ (\beta + 1) p_0 \int_0^{\tau_0} (1 - \tau)^{\beta} d\tau (y_{\theta=\frac{\pi}{2}} - y_{\theta=-\frac{\pi}{2}}). \end{aligned}$$

Введем в это выражение переменное α ; на основании связи между τ и σ [ф-лы (91) и (93)],

$$(1 - \tau)^{\beta} d\tau = -2\tau d\sigma = -\frac{8}{(C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma})^2} d\sigma,$$

пределы интегрирования по σ суть ∞ и 0; заметим, кроме того, что первые два слагаемые в формуле R сокращаются, так как $l_1 + l_2 = 2l$, $p_0(1 - \tau_0)^{\beta+1} = p_1$. Поэтому

$$R = 8(\beta + 1)p_0 \int_0^{\infty} (y_{\theta=\frac{\pi}{2}} - y_{\theta=-\frac{\pi}{2}}) \frac{d\sigma}{(C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma})^2},$$

или, проинтегрировав по частям,

$$\begin{aligned} \frac{C_1 R}{4(\beta + 1)p_0} = & - \int_0^{\infty} (y_{\theta=\frac{\pi}{2}} - y_{\theta=-\frac{\pi}{2}}) \frac{1}{C_1 e^{2\sigma} + C_2} + \\ & + \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} \right\} \frac{d\sigma}{C_1 e^{2\sigma} + C_2}. \end{aligned}$$

Подстановка дает результат $\frac{2l}{C_1 + C_2}$.

Что касается оставшегося интеграла, то по (94), положив $\theta = \frac{\pi}{2}$ и помня, что при этом $\psi = 0$, имеем

$$2\sqrt{2\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma}) \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)_{\theta=\frac{\pi}{2}};$$

при $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, получим

$$2\sqrt{2\alpha} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -(C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma}) \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)_{\theta=-\frac{\pi}{2}}.$$

Воспользовавшись этими формулами и совершив в выражении R новую интеграцию по частям, приводим это выражение к виду

$$\begin{aligned} \frac{C_1 R \sqrt{2\alpha}}{2(\beta + 1)p_0} = & \frac{4l\sqrt{2\alpha}}{C_1 + C_2} + \int_0^{\infty} (\varphi_{\theta=\frac{\pi}{2}} + \varphi_{\theta=-\frac{\pi}{2}}) e^{-\sigma} + \\ & + \int_0^{\infty} (\varphi_{\theta=\frac{\pi}{2}} - \varphi_{\theta=-\frac{\pi}{2}}) e^{-\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Из ф-л (95) имеем

$$\varphi_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{k \cos^4 \lambda}{\left(\sin \lambda + \frac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} \right)^2}, \quad \varphi_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = \frac{k \cos^4 \lambda}{\left(\sin \lambda - \frac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} \right)^2};$$

а потому, выполнив подстановку и вводя в интеграл переменное $\xi = e^{-\alpha}$, получаем

$$\frac{C_1 R \sqrt{2\alpha}}{2(\beta+1)p_0} = \frac{4l \sqrt{2\alpha}}{C_1 + C_2} - 2k(1 + \sin^2 \lambda) + 4k \cos^4 \lambda \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2 + 2\xi \sin \lambda)^2} +$$

$$+ 4k \cos^4 \lambda \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2 - 2\xi \sin \lambda)^2}.$$

Эти определенные интегралы имеют, соответственно, значения

$$\frac{1}{2 \cos^2 \lambda} \left\{ \frac{\sin \lambda - \cos 2\lambda}{2 - 2 \sin \lambda} - \sin \lambda + \frac{1}{\cos \lambda} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2} \right) \right\}$$

и

$$\frac{1}{2 \cos^2 \lambda} \left\{ -\frac{\sin \lambda + \cos 2\lambda}{2 - 2 \sin \lambda} + \sin \lambda + \frac{1}{\cos \lambda} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right) \right\},$$

и следовательно, но сложении дают

$$\frac{1}{2 \cos^2 \lambda} \left(-1 + \frac{\pi}{2 \cos \lambda} \right);$$

подставив это выражение в формулу для R , получаем

$$\frac{C_1 R \sqrt{2\alpha}}{2(\beta+1)p_0} = \frac{4l \sqrt{2\alpha}}{C_1 + C_2} - 4k + \pi k \cos \lambda.$$

Так как [см. (97)]

$$C_1 + C_2 = \frac{2}{\sqrt{\tau_0}}, \quad 2l \sqrt{2\tau_0 \alpha} = 4k + \pi k \cos \lambda (1 - \tau_0)^{-\frac{1}{2}},$$

$$C_1 = \frac{1 + (1 - \tau_0)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\tau_0}},$$

то

$$(98) \quad R = \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha}} k \cos \lambda \sqrt{\tau_0} (\beta + 1) p_0.$$

Из только что приведенной формулы для $2l$ имеем

$$\frac{k}{\sqrt{2\alpha}} = \frac{2l \sqrt{\tau_0}}{4 + \pi (1 - \tau_0)^{-\frac{1}{2}}};$$

кроме того,

$$p_0 = k \rho_0^\gamma, \quad (\beta + 1) p_0 = \frac{\gamma k \rho_0^\gamma}{\gamma - 1} = \alpha p_0 = \alpha p_1 (1 - \tau_0)^{-\frac{1}{2}};$$

ибо, по определению постоянного α (см. гл. I),

$$\alpha = \frac{k \gamma \rho_0^{\gamma-1}}{\gamma - 1},$$

а плотность на струе — ρ_1 , равная плотности в далеких областях потока, связана с плотностью в критической точке — ρ_0 формулой

$$\rho_1 = \rho_0 (1 - \tau_0)^{\frac{2}{\beta}};$$

наконец, приняв в расчет формулу $\sqrt{2\alpha\tau_0} = v_0$, скорости на струе и в бесконечно удаленных частях движущейся массы газа, получим из (98) окончательно

$$R = \frac{\pi \cos \lambda}{4(1 - \tau_0)^{\frac{2}{\beta}} + \pi \cos \lambda} 2/v_0^2 \rho_1.$$

Эта формула при $\beta = 0$, как и должно быть, обращается в формулу лорда Rayleigh'a для потока несжимаемой жидкости, а при $\lambda = 0$ дает приближенное решение задачи о давлении на пластинку симметричного газового потока. Вычисляя коэффициент $\frac{\pi \cos \lambda}{4(1 - \tau_0)^{\frac{2}{\beta}} + \pi \cos \lambda}$ при принятых в начале этой главы значениях s_0 , для которых применима указанная нами приближенная метода, и ограничиваясь при этом лишь случаем симметричного потока, мы приходим к следующему результату: при изменении s_0 от 0 до $\frac{1}{12\beta}$ и скорости потока от 0 до 136 м/сек, коэффициент $\frac{\pi}{4(1 - \tau_0)^{\frac{2}{\beta}} + \pi}$ колеблется в пределах 0.440 и 0.460, причем растет в конце быстрее, чем в начале: так, при $s_0 = \frac{1}{24\beta}$ и $v_0 = 96$ м/сек он еще равен только 0.449. Таким образом, при не очень значительных скоростях оказывается почти точным закон пропорциональности сопротивления квадрату скорости.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕТКИ

1

К главе II. Любопытно отметить, что функция y_n непременно будет иметь действительные корни в пределах изменения τ от его критического значения $\frac{1}{2\beta+1}$ до 1, если только указатель n достаточно велик; так, для функций с целыми указателями это справедливо при $n > 1$; число корней безгранично возрастает вместе с указателем. Эти результаты мы почерпываем из статьи J. Porter'a — «On the roots of the hypergeometric and Bessel's functions» (Amer. Journ. of Math., 1899).

Уже отсюда легко заключить, что решения задач об истечении газа из сосуда и о сопротивлении воздуха движущейся пластинке, данные в главах III и IV, ненриложны вне указанных в нашей работе границ вследствие расходимости рядов, выражающих функцию тока и потенциал скоростей.

2.

К главе V. Выражение $K = [1 - (2\beta + 1)\tau](1 - \tau)^{-2\beta - 1}$, которое при изложении «приближенной методы» мы приняли равным единице, будет ей в точности равно в двух случаях:

1) если $\beta = 0$; это — случай движения несжимаемой жидкости, так как формула для плотности, $\rho = \rho_0(1 - \tau)^2$, приводится к равенству $\rho = \text{const}$;

2) при $\beta = -\frac{1}{2}$: тогда $\rho = k\rho^{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{k}{\rho}$. Если движущаяся материя есть идеальный газ, то для осуществления этого требования надо известным образом отнимать тепло от текущей массы газа. Создать такую обстановку движения газа в действительности не представляется возможным. Но задача, к которой мы приходим, положив $\beta = -\frac{1}{2}$, имеет интерес с совершенно иной точки зрения.

В самом деле, обратим внимание на начальные уравнения (7) главы I. Подставим в них на место τ его значение $\frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]$, причем 2α равным -1 и заменим для краткости производные от φ по x и y соответственно через p и q ; тогда означенные уравнения дадут

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\frac{p dy - q dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = d\psi.$$

Отсюда ясно, что если мы положим $\varphi = z$, то x, y, z будут прямоугольными координатами точек минимальной поверхности.

Ф-лы (91)...(95) главы V, по замене в них τ через u , приводят к следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = C_1 e^{\sigma} + C_2 e^{-\sigma}, \quad \sqrt{1 + \frac{u}{u_0}} = C_1 e^{\sigma} - C_2 e^{-\sigma},$$

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{\sqrt{u_0}}, \quad C_1 - C_2 = \sqrt{\frac{1 + u_0}{u_0}};$$

здесь произвольным постоянным придано несколько иное значение, чем в формулах главы V.

Если мы положим $\sigma + i\theta = t$, $\sigma - i\theta = t_1$, то

$$z + i\psi = f(t),$$

$$x + iy = C_1 \int e^t f'(t) dt + C_2 \int e^{-t_1} f_1'(t_1) dt_1;$$

при этом

$$u = p^2 + q^2, \quad \theta = \text{arctg} \frac{q}{p}.$$

Для квадрата линейного элемента поверхности легко находим выражение

$$ds^2 = (C_1 e^{\tau} - C_2 e^{-\tau})^2 (dz^2 + d\psi^2) = \frac{1 + p^2 + q^2}{p^2 + q^2} (dz^2 + d\psi^2).$$

Если плоскость xy горизонтальна, то кривые $z = \text{const}$ будут горизонталями поверхности; $\psi = \text{const}$ суть их ортогональные траектории.

Эти формулы позволяют определить многие формы минимальных поверхностей.

1) Положив

$$f(t) = e^{nt},$$

находим

$$x + iy = \frac{nC_1}{n+1} (z + i\psi)^{\frac{n+1}{n}} + \frac{nC_2}{n-1} (z - i\psi)^{\frac{n-1}{n}}.$$

При n произвольном мы получаем, таким образом, алгебраические поверхности весьма разнообразного вида; исключение представляет $n=1$, когда поверхность оказывается трансцендентною.

Положив $f(t) = At$, получим при A действительном катеноид, при A мнимом — геликоид.

2) Гораздо более любопытна другая группа минимальных поверхностей, получаемая из приведенных выше формул: мы можем с их помощью отыскать минимальную поверхность, вписанную в некоторый заданный многоугольный контур. Для сего он должен состоять из горизонтальных и вертикальных прямолинейных отрезков (за плоскость xy , попрежнему, принимаем какую-нибудь горизонтальную плоскость).

Положив в найденных выше формулах для простоты $u_0 = \infty$ и, вследствие этого, $C_1 = -C_2 = \frac{1}{2}$, замечаем следующее: на каждом горизонтальном звене граничного контура мы будем иметь, очевидно, $z = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$; если же рассматриваемый граничный отрезок вертикален, то на нем $\psi = \text{const}$, $p^2 + q^2 = \infty$ и $\tau = 0$. Таким образом, области $z + i\psi$ и $\tau + i\theta$ будут ограничены прямыми линиями. Отыскав по известному способу конформное изображение этих областей на верхней полуплоскости вспомогательного мнимого переменного s , мы приведем решение задачи к выполнению квадратур.

В качестве весьма простого примера укажем поверхность, вписанную в пятиугольный контур следующего вида: одною его стороною служит отрезок оси y , делящийся пополам в начале координат; от концов этого отрезка отходят две равные стороны, параллельные оси z ; из их конечных точек проводим два бесконечных отрезка параллельно положительному направле-

нию оси x , дополняющие контур. Эта поверхность выразится следующими уравнениями:

$$\sin \frac{2y\sqrt{1-k^2}}{a} = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{\psi}{a} \operatorname{cn} \frac{\psi}{a} \operatorname{dn} \frac{iz}{a}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\psi}{a} \operatorname{sn}^2 \frac{iz}{a}};$$

$$\sinh \frac{2x\sqrt{1-k^2}}{a} = - \frac{2ki \operatorname{sn} \frac{iz}{a} \operatorname{dn} \frac{iz}{a} \operatorname{cn} \frac{\psi}{a}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\psi}{a} \operatorname{sn}^2 \frac{iz}{a}}.$$

Они легко получаются помощью указанных выше общих формул, если мы положим

$$\sigma + i\theta = ig \frac{k\sqrt{1-s^2} + \sqrt{1-k^2s^2}}{\sqrt{1-k^2}},$$

$$z + i\psi = ai \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Заметим в заключение, что задание поверхности может быть несколько изменено: так, в число условий можно включить требование, чтобы одна из горизонталей была линией кривизны поверхности; тогда плоскость этой горизонтали пересекает искомую поверхность под постоянным углом, и следовательно, мы будем иметь, при некотором заданном значении z , $p^2 + q^2 = \text{const}$, а стало быть, $\sigma = \text{const}$. Точно так же, если известно, что одна из линий $\psi = \text{const}$ есть плоская кривая, то, как нетрудно убедиться, вдоль этой линии будет иметь постоянное значение угол θ .

О ТРЕНИИ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ШИПОМ И ПОДШИПНИКОМ ¹⁾

§ 1. Движение вязкой жидкости, заключенной в смазочном слое между шипом и подшипником, было сначала исследовано Н. П. Петровым, который положил основание гидродинамической теории трения шипа. Н. П. Петров ²⁾ принимал смазочный слой ограниченным двумя концентрическими цилиндрами. Влияние на рассматриваемое явление эксцентricности шипа и подшипника было, с помощью приближенного анализа, обстоятельно исследовано Осборном Рейнольдсом ³⁾. В этом году довольно сложный анализ Рейнольда упрощен Зоммерфельдом ⁴⁾, который установил теоретическую зависимость между моментом сил трения, нагрузкою и скоростью шипа, и показал, что пропорциональность момента сил трения его скорости или его нагрузке суть два предельные случая общего закона трения шипа в подшипнике, причем первый предельный случай получается при больших, а второй — при малых скоростях шипа (сравнительно с нагрузкою). Зоммерфельд упоминает в начале своей статьи, что точное решение задачи о движении вязкой жидкости в двух измерениях между двумя эксцентricескими окружностями, равно как и решение аналитической задачи о равновесии упругой пластинки, ограниченной двумя эксцентricескими окружностями, до сих пор еще не найдено. В предлагаемой статье мы даем это точное решение задачи о движении смазочного слоя и получаем из него, при предположении, что слой весьма тонок, формулы Зоммерфельда.

§ 2. Мы будем пользоваться биполярными координатами Неймана, некоторые формулы, относящиеся к которым, здесь приведем.

Связь между прямоугольными декартовыми координатами x, y и координатами Неймана ξ, η устанавливается следующими соотношениями между мнимыми переменными $z = x + yi$ и $\zeta = \xi + \eta i$:

$$(1) \quad \lg \frac{z-a}{z+a} = i\zeta, \quad z = ai \cotg \left(\frac{\zeta}{2} \right).$$

¹⁾ В сотрудничестве с Н. Е. Жуковским.

²⁾ N. Petroff. Neue Theorie der Reibung, deutsch von Wurzel, Hamburg 1887.

³⁾ Osborne Reynolds, Philosoph. Trans. of R. Soc. of London, 1886

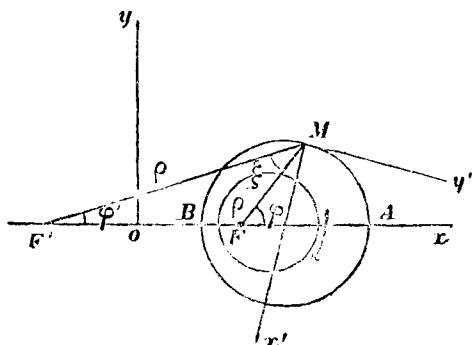
⁴⁾ Sommerfeld, Ztschr. für Math. u. Phys., 1904.

Первая из этих формул показывает, что

$$\xi = \varphi - \varphi',$$

$$\eta = \lg \frac{\rho'}{\rho},$$

где ρ и ρ' — радиусы-векторы, проведенные к рассматриваемой точке от полюсов F и F' , отстоящих (фиг. 1) от начала координат O на расстояния a , а φ и φ' суть углы между этими радиусами и осью абсцисс OX .



Фиг. 1.

Вторая из ф-л (1) приводится к виду

$$x + yi = ai \frac{\sin(\xi + i\eta)}{1 - \cos(\xi + i\eta)}$$

и дает по сравнению действительных и мнимых частей:

$$(2) \quad x = a \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad y = a \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

Линии $\xi = \text{const}$ суть окружности, вмещающие хорду FF' , а линии $\eta = \text{const}$ суть ортогональные окружности, уравнения которых получаются чрез исключение ξ из ф-л (2).

Это исключение удобно сделать, составив сначала выражение

$$(3) \quad x^2 + y^2 = a^2 \frac{\cosh \eta + \cos \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}$$

и потом подставляя сюда

$$\cos \xi = \frac{x \cosh \eta - a \sinh \eta}{x}.$$

Мы получаем уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax \coth \eta + a^2 = 0,$$

которое показывает, что радиус r упомянутых кругов выражается формулою

$$(4) \quad r = \frac{a}{\sinh \eta}.$$

а их центры лежат на оси OX на расстояниях

$$(5) \quad l = a \coth \eta$$

от начала координат O .

Величина H первого дифференциального параметра рассматриваемой изотермической системы координат найдется по формуле

$$\frac{1}{H^2} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2$$

и будет, на основании ур-ния (2), такой:

$$(6) \quad H = \frac{1}{a} (\cosh \eta - \cos \xi).$$

Вся рассматриваемая система криволинейных координат может быть охарактеризована величинами r_1 и r_0 радиусов двух ее кругов и разностью $\sigma = \tau_1 - \tau_0$ соответствующих им параметров. Определяем τ_1 и τ_0 по σ . Пусть $r_0 - r_1 = z$, $\frac{z}{r_1} = k$. На основании ф-лы (4)

$$z = \frac{r_1}{\sinh \tau_0} (\sinh \tau_1 - \sinh \tau_0),$$

откуда

$$(7) \quad \sinh \tau_1 = (1 + k) \sinh \tau_0.$$

Далее,

$$\sinh (\tau_0 + \sigma) = \sinh \tau_1 = (1 + k) \sinh \tau_0,$$

$$\sinh (\tau_1 - \sigma) = \sinh \tau_0 = \frac{\sinh \tau_1}{1 + k},$$

и потому

$$(8) \quad \begin{aligned} \operatorname{cogh} \tau_0 &= \frac{1 + k - \cosh \sigma}{\sinh \sigma}, \\ \operatorname{cogh} \tau_1 &= \frac{(1 + k) \cosh \sigma - 1}{(1 + k) \sinh \sigma}. \end{aligned}$$

Так как наименьшая величина $\operatorname{cogh} \tau_0$ получается при $\tau_0 = \infty$ и есть единица, то σ может изменяться от значения 0 до значения $\lg (1 + k)$.

На основании ур-ния (5), эксцентрическое расстояние e между центрами рассматриваемых кругов будет

$$(9) \quad e = \frac{r_1 \sinh \sigma}{\sinh \tau_0},$$

так что, называя, вместе с Зоммерфельдом, через α отношение $\frac{e}{\delta}$, найдем

$$(9') \quad \alpha = \frac{\sinh \sigma}{\sinh \tau_1 - \sinh \tau_0}.$$

К сказанному следует еще прибавить указание на некоторые определенные интегралы, которое будет весьма полезно в дальнейшем изложении.

Легко показать, что

$$(10) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} (x \cos m\xi \cosh m\eta + y \sin m\xi \sinh m\eta) d\xi = 2\pi a, \\ \int_0^{2\pi} (x \cos m\xi \sinh m\eta + y \sin m\xi \cosh m\eta) d\xi = 2\pi a, \\ \int_0^{2\pi} x \cos m\xi d\xi = 2\pi a e^{-m\eta}, \end{cases}$$

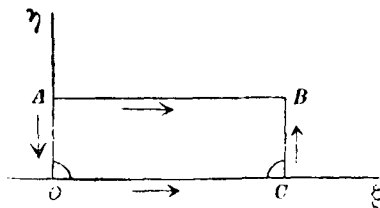
где m — какое-нибудь целое и положительное число, которое для первой и третьей формул может быть и нулем.

Третья из ф-л (10) получается чрез сложение первых двух, предварительно умноженных на $\cosh m\eta$ и $-\sinh m\eta$.

Первая формула может быть выведена из рассмотрения интеграла

$$\int_0^{2\pi} \cotg \frac{\zeta}{2} \cos m\zeta d\zeta,$$

в котором, при интегрировании, η считаем постоянным. Этот интеграл на плоскости мнимого переменного $\xi + \eta i$ берется (фиг. 2) по отрезку прямой $AB = 2\pi$, параллельной оси $o\xi$, и может быть заменен интегралом, взятым по контуру $AOCB$ с обходом точек бесконечности, находящихся в O и C ; при этом обходе мы пройдем по четвертям весьма малых кругов, имеющих центры в O и C . Так как в этих центрах



Фиг. 2.

$$\lim (\zeta \cotg \frac{\zeta}{2} \cos m\zeta) = 2,$$

то при упомянутых обходах интеграл получает приращение $-\frac{\pi}{2} \cdot i \cdot 2$, и все приращение его при обходах будет $-2\pi i$. Что касается до интеграции по отрезкам AO и CB , то здесь результаты интеграции сократятся, так как от замены ζ и на $\zeta + 2\pi$ подинтегральная функция не изменяется. Точно так же результат интегрирования по отрезку OC будет нуль, так как в точках $(\xi, 0)$ и $(2\pi - \xi, 0)$ подинтегральная функция имеет значения, равные по величине, но противоположные по знаку. На основании всего сказанного,

$$\int_0^{2\pi} \cotg \frac{\zeta}{2} \cos m\zeta d\zeta = -2\pi i,$$

что, на основании ф-л (1), можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} (x + yi) (\cos m\xi \cosh m\eta - i \sin m\xi \sinh m\eta) d\xi = 2\pi a.$$

Сравнение действительных частей дает нам первую из ф-л (10). Чтобы получить вторую ф-лу (10), рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cotg \frac{\zeta}{2} \sin m\zeta d\zeta.$$

Заменяв интеграцию по прямой AB (фиг. 2) интеграцией по контуру $AOCB$, мы не должны будем обходить точки O и C , так как они не являются точками бесконечности. Результаты интеграции по AO и по CB взаимно уничтожаются, а результат интеграции по OC может быть представлен в виде

$$2 \int_0^{\pi} \cotg \left(\frac{\xi}{2} \right) \sin m\xi d\xi,$$

и так как ¹⁾

$$\int_0^{\pi} \cotg \left(\frac{\xi}{2} \right) \sin m\xi d\xi = \pi,$$

то

$$\int_0^{2\pi} \cotg \left(\frac{\zeta}{2} \right) \sin m\zeta d\zeta = 2\pi.$$

Подстановка сюда ф-л (1) и сравнение мнимых частей дает нам вторую ф-лу (10).

§ 3. Уравнения движения вязкой жидкости в двух измерениях при отбрасывании сил инерции, которые малы сравнительно с силами трения, могут быть представлены в виде

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial 2\omega}{\partial y}, \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial 2\omega}{\partial x}, \end{aligned}$$

где ω представляет угловую скорость вихря, определенную по компонентам u , v скорости жидкости формулою

$$(12) \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

и считаемую положительной при вращении вихря по стрелке часов, p есть гидродинамическое давление, а μ — коэффициент вязкости жидкости.

¹⁾ Bertrand. Traité de calcul intégral, Paris, 1870, § 190.

Ф-ла (11) показывает, что комплексная мнимая величина $\frac{p}{\mu} + 2\omega i$ есть функция от z , а следовательно, и функция от ζ . Введем обозначения операций:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

На основании сказанного имеем

$$(13) \quad \Delta(2\omega) = 0, \quad \nabla(2\omega) = 0.$$

Назовем чрез W функцию тока, т. е. количество жидкости, протекающей в единицу времени между двумя линиями тока, и положим

$$(14) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v &= -\frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в ф-лу (12), найдем по ур-нию (6):

$$(15) \quad 2\omega = \Delta(W) = \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}{a^2} \nabla W,$$

вследствие чего по ф-ле (13)

$$(16) \quad \Delta \Delta W = \nabla \{ (\cosh \eta - \cos \xi)^2 \nabla W \} = 0.$$

Определив функцию тока W , удовлетворяющую ур-нию (16) и граничным данным задачи, мы будем знать по ф-ле (15) величину 2ω , а следовательно, и величину $\frac{p}{\mu}$, так как

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial 2\omega}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \eta} &= -\frac{\partial 2\omega}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Функцию W мы представим в виде суммы членов, удовлетворяющих порознь ур-нию (16). Такими членами, очевидно, являются

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad \eta, \quad \frac{x^2 + y^2}{2a^2} + 1 = \frac{\cosh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \\ \frac{x^2 + y^2}{2a^2} - 1 &= \frac{\cos \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad \frac{x\eta}{a} = \frac{\eta \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \\ \frac{2x \cos \xi \cosh \eta}{a} &= \frac{\sinh 2\eta \cos \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad \frac{x^2 + y^2}{2a^2} - 1 + \\ &+ \frac{2x \cos \xi \sinh \eta}{a} = \frac{\cosh 2\eta \cos \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}. \end{aligned}$$

При этом, для оправдания сказанного относительно трех последних членов, надо обратить внимание на формулы

$$(19) \quad \begin{aligned} \Delta f \cdot f_1 &= f \Delta f_1 + f_1 \Delta f + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right), \\ \nabla f \cdot f_1 &= f \nabla f_1 + f_1 \nabla f + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Сумму из членов (18) мы возьмем в следующем виде:

$$(20) \quad W = D(\eta - \eta_0) + \frac{A \sinh(\eta - \eta_0) + B(\eta - \eta_0) \sinh \eta + C \cos \xi [\sinh(\tau - 2\eta) - \sinh \sigma]}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

Здесь принимается, что $\eta = \eta_0$ есть окружность подшипника радиуса r_1 , $\eta = \eta_1$ есть окружность шипа радиуса r_1 , $\sigma = \eta_1 - \eta_0$, $\tau = \eta_1 + \eta_0$, а A , B , C , D суть четыре коэффициента, которые, как сейчас увидим, могут быть определены так, чтобы удовлетворить всем граничным данным нашей задачи.

Представим ф-лу (20) в виде

$$(20') \quad W = \frac{M}{\cosh \eta - \cos \xi} + N$$

при

$$(21) \quad \begin{cases} M = A \sinh(\eta - \eta_0) + B(\eta - \eta_0) \sinh \eta + \\ + C \cosh \eta [\sinh(\tau - 2\eta) - \sinh \sigma], \\ N = D(\eta - \eta_0) - C [\sinh(\tau - 2\eta) - \sinh \sigma]. \end{cases}$$

Граничные условия будут такие: на поверхности подшипника и шипа W постоянно; на поверхности подшипника тангенциальная скорость

$$(22) \quad H \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0,$$

а на поверхности шипа

$$(23) \quad H \frac{\partial W}{\partial \eta} = -U.$$

где U — скорость шипа, считаемая положительной при его вращении (на фиг. 1) по часовой стрелке.

Так как при $\eta = \eta_0$ (на поверхности подшипника) имеем $M = N = 0$, то W на этой поверхности постоянно. Мы удовлетворим всем остальным граничным условиям положениями

$$(24) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)_{\eta = \eta_0} = 0, \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)_{\eta = \eta_0} = 0, \\ (M)_{\eta = \eta_1} = 0, \end{cases}$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (N)_{\eta=\eta_1} = -Q, \\ \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_1} = -Ua, \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_1} = 0, \end{array} \right.$$

где Q есть секундный объем жидкости, протекающей между шипом и под-шипником в сторону вращения шипа.

Ф-ла (21) показывает нам, что второе и шестое из написанных условий между собою тождественны и вместе с четвертым условием служат для определения D и Q по C :

$$(25) \quad \begin{aligned} D + 2C \cosh \sigma &= 0, \\ D\sigma + 2C \sinh \sigma + Q &= 0. \end{aligned}$$

Для определения A , B и C у нас останутся еще первое, третье и пятое условия (24), которые напишутся так:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B \sinh \eta_0 - 2C \cosh \eta_0 \cosh \sigma = 0, \\ A \sinh \sigma + B \sigma \sinh \eta_1 - 2C \cosh \eta_1 \sinh \sigma = 0, \\ A \cosh \sigma + B(\sinh \eta_1 + \sigma \cosh \eta_1) - 2C \cosh(\eta_1 + \sigma) = -aU. \end{array} \right.$$

Ф-лы (25) и (26) решают всю рассматриваемую задачу о движении смазочного слоя, кругом охватывающего шип, причем все коэффициенты могут быть определены по σ .

Исключаем из первой и второй ф-л (26) коэффициент A :

$$B(\sinh \sigma \sinh \eta_0 - \sigma \sinh \eta_1) - 2C(\cosh \eta_0 \cosh \sigma - \cosh(\sigma + \eta_0)) \sinh \sigma = 0,$$

или

$$B[\sinh \sigma \sinh \eta_0 - \sigma \sinh \eta_1] + 2C \sinh^2 \sigma \sinh \eta_0 = 0.$$

Эта формула, по разделении на $\sinh \eta_0$ и по упрощении на основании соотношения (7), приводится к следующей:

$$(27) \quad 2C = \frac{B}{\sinh^2 \sigma} [\sigma(1+k) - \sinh \sigma].$$

Исключаем A из второй и третьей ф-лы (26):

$$\begin{aligned} & B(\sigma \sinh \eta_1 \cosh \sigma - \sinh \eta_1 \sinh \sigma - \sigma \sinh \sigma \cosh \eta_1) - \\ & - 2C[\cosh \eta_1 \sinh \sigma \cosh \sigma - \sinh \sigma \cosh(\eta_1 + \sigma)] = Ua \sinh \sigma. \end{aligned}$$

Делаем здесь преобразование:

$$B(\sigma \sinh \eta_0 - \sinh \sigma \sinh \eta_1) + 2C \sinh^2 \sigma \sinh \eta_1 = Ua \sinh \sigma.$$

По разделении этой формулы на $\sinh \eta_1$, на основании ф-л (7) и (4) найдем

$$B \left[\frac{\sigma}{1+k} - \sinh \sigma \right] + 2C \sinh^2 \sigma = U r_1 \sinh \sigma.$$

Если подставим сюда величину C из (27), то получим окончательно

$$(28) \quad B = \frac{Ur_1(1+k)\sinh\sigma}{\sigma - 2(1+k)\sinh\sigma + (1+k)^2\sigma},$$

а следовательно, по ф-ле (27)

$$(29) \quad 2C = \frac{Ur_1(1+k)[\sigma(1+k) - \sinh\sigma]}{\sinh\sigma[\sigma - 2(1+k)\sinh\sigma + (1+k)^2\sigma]}.$$

Теперь мы можем выразить через σ количество Q жидкости, протекающей между шином и подшипником. Мы имеем по ф-ле (25):

$$(30) \quad \begin{aligned} Q &= 2C(\sigma \cosh\sigma - \sinh\sigma) = \\ &= \frac{Ur_1(\sigma \cosh\sigma - \sinh\sigma)[\sigma(1+k) - \sinh\sigma](1+k)}{[\sigma - 2(1+k)\sinh\sigma + (1+k)^2\sigma]}. \end{aligned}$$

В предельном случае, когда шип и подшипник делаются концентрическими, надо в ф-ле (8) принять $\eta_0 = \infty$, так что

$$\begin{aligned} \sinh\sigma + \cosh\sigma &= e^\sigma = 1+k, \\ 2Q \sinh\sigma &= Ur_1(\sigma e^\sigma - \sinh\sigma). \end{aligned}$$

В случае очень тонкого слоя, k близко к нулю и σ тоже очень близко к нулю. Так как при σ , приближающемся к нулю, можно принять

$$\begin{aligned} \frac{\sigma \cosh\sigma - \sinh\sigma}{\sigma(1+e^{2\sigma}) - 2e^\sigma \sinh\sigma} &= \frac{1}{2}, \\ \sigma e^\sigma - \sinh\sigma &= \sigma^2, \end{aligned}$$

то определяемое значение Q будет

$$(31) \quad Q = \frac{Ur_1\sigma}{2} = \frac{Ur_1k}{2} = \frac{U\delta}{2}.$$

Это совпадает со случаем, рассмотренным Н. П. Петровым. В общем же случае количество протекающей жидкости определяется по параметру σ , который, как будет показано ниже, находится по радиусам шипа и подшипника и по нагрузке P на шип.

§ 4. Когда функция W найдена, то ф-лой (15) сейчас же определяется 2ω . Совершаем операцию ∇ над членами, входящими в состав правой части ф-лы (20), пользуясь при этом ф-лами (18) и (19):

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\sinh(\eta - \eta_0)}{\cosh\eta - \cos\xi} \right) &= \frac{-2\sinh\eta_0}{(\cosh\eta - \cos\xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{(\eta - \eta_0)\sinh\eta}{\cosh\eta - \cos\xi} \right) &= \frac{2 - 2\cos\xi \cosh\eta}{(\cosh\eta - \cos\xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{\cos\xi \sinh 2\eta}{\cosh\eta - \cos\xi} \right) &= \frac{-2\sinh 2\eta \cos 2\xi + 4\sinh\eta \cos\xi}{(\cosh\eta - \cos\xi)^2}, \end{aligned}$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \nabla \left(\frac{\cos \xi \cosh 2\eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \right) &= \frac{-2 \cosh 2\eta \cos 2\xi + 4 \cosh \eta \cos \xi}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}, \\ \nabla \left(\frac{\cos \xi [\sinh (\tau - 2\eta) - \sinh \sigma]}{\cosh \eta - \cos \xi} \right) &= \\ &= \frac{-2 \cos 2\xi \sinh (\tau - 2\eta) + 4 \cos \xi \sinh (\tau - \eta) - 2 \sinh \sigma}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}. \end{aligned} \right.$$

Пользуясь этими формулами, находим, что

$$(33) \quad 2\omega a^2 = -2A \sinh \eta_0 + 2B - 2C \sinh \sigma - 2B \cos \xi \cosh \eta + \\ + 4C \cos \xi \sinh (\tau - \eta) - 2C \cos 2\xi \sinh (\tau - 2\eta).$$

Рядом с 2ω , согласно ур-нию (17), сейчас же определяется давление жидкости:

$$(34) \quad \frac{p}{\mu} a^2 = -2B \sin \xi \sinh \eta - 4C \sin \xi \cosh (\tau - \eta) + 2C \sin 2\xi \cosh (\tau - 2\eta).$$

Мы не прибавляем здесь произвольного постоянного, потому что имеем в виду рассматривать только переменную часть давления.

Так как нами определены только коэффициенты B и C [ф-лы (28) и (29)], то исключим из ф-лы (33) коэффициент A с помощью первой ф-лы (26):

$$(33') \quad 2\omega a^2 = 2B \cosh^2 \eta_0 - 2C (\sin 2\eta_0 \cosh \sigma + \sinh \sigma) - 2B \cos \xi \cosh \eta + \\ + 4C \cos \xi \sinh (\tau - \eta) - 2C \cos 2\xi \sinh (\tau - 2\eta).$$

Если теперь положим $\eta = \eta_0$, то найдем угловую скорость вихря и давление при поверхности подшипника. Представим их так:

$$(35) \quad 2\omega^2 = 2B \cosh \eta_0 (\cosh \eta_0 - \cos \xi) - 2C [\sinh \sigma (1 + \cos 2\xi - 2 \cos \xi \cosh \eta_0) + \\ + \cosh \sigma (\sinh 2\eta_0 - 2 \cos \xi \sinh \eta_0)],$$

$$(36) \quad \frac{p}{\mu} a^2 = -2 \left[B + 2C \frac{(1+k) \cosh \sigma - 1}{\sinh \sigma} \right] \sinh \eta_0 \sin \xi + 2C \sin 2\xi \cosh \sigma.$$

При этом, для получения ф-лы (36), мы воспользовались соотношениями (7) и (8).

Ф-ла (36) показывает, что переменная часть гидродинамического давления зависит от двух членов с множителями $\sin \xi$ и $\sin 2\xi$. Для всех точек подшипника, соответствующих параметрам ξ и $2\pi - \xi$, давления одинаковы, так что равнодействующая всех этих давлений направлена перпендикулярно оси OX (фиг. 1). При очень малых k и σ ф-лы (28) и (29) принимают вид

$$B = \frac{Ur_1}{k^2}, \quad 2C = \frac{Ur_1}{k\sigma},$$

и ф-ла (36) обращается в такую:

$$\frac{p}{\mu} a^2 = \frac{U r_1}{k^2} \left\{ -2 \left(1 + \frac{k^2}{\sigma^2} \right) \sinh \eta_0 \sin \xi + \frac{k}{\sigma} \sin 2\xi \right\};$$

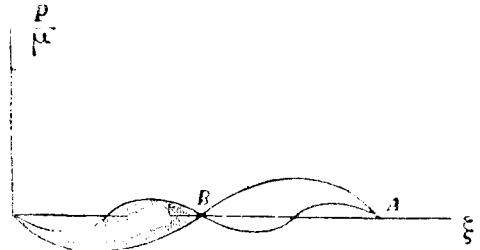
а так как, при малых k и σ , ф-ла (8) дает нам

$$\operatorname{colgh} \eta_0 = \frac{k}{\sigma}.$$

то, согласно ф-ле (4),

$$(37) \quad \frac{p}{\mu} = \frac{U}{k^2 r_1 \sinh^3 \eta_0} [-2 \cosh 2\eta_0 \sin \xi + \cosh \eta_0 \sin 2\xi].$$

Эта величина p представляется графически отрезками ординат между двумя синусоидами, из которых синусоида с аргументом 2ξ имеет меньшую амплитуду, нежели синусоида с аргументом ξ , так как $\cosh 2\eta_0 > \cosh \eta_0$. Заштрихованная часть на фиг. 3) представляет отрицательное давление, а незаштрихованная — положительное. Во всей верхней части подшипника (изменение ξ от 0 до π) давление будет отрицательно, а во всей нижней (изменения ξ от π до 2π) — положительно. Самое большое изменение давления получается при приближении к точке B .



Фиг. 3.

§ 5. Обращаемся к определению силы P и момента L пары, с которыми смазочный слой действует на шип или, что все равно, с которыми подшипник действует на смазочный слой. На каждый элемент площади смазочного слоя, прилегающего к подшипнику, будет действовать некоторая нормальная и тангенциальная сила. Отнесем эти силы к единице площади и назовем их чрез n и t , причем эти величины мы будем считать положительными, когда соответствующие им силы направлены в сторону осей Mx' и My' , указанных на фиг. 1. Если u' и v' суть проекции скорости точки движущейся вязкой жидкости на указанные оси, то, по известным формулам движения вязкой жидкости, найдем

$$(38) \quad n = p - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'},$$

$$t = -\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right).$$

Легко усмотреть, что в нашей задаче для точки подшипника M имеем место условия

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0.$$

Действительно, если выразим функцию тока W в координатах x' и y' , то надем подобно уравнению (14):

$$u' = \frac{\partial W}{\partial y'}, \quad v' = -\frac{\partial W}{\partial x'}.$$

Так как во всех точках подшипника

$$u'^2 + v'^2 = 0,$$

то во всех этих точках

$$\frac{\partial W}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y'} = 0.$$

Возьмем от написанных равенств полные производные по y' , предполагая, что x' выражено чрез y' с помощью уравнения окружности подшипника

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} \frac{dx'}{dy'} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y' \partial x} \frac{dx'}{dy'} = 0$$

Так как для точки М мы имеем $\frac{dx'}{dy'} = 0$, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0.$$

Прибавляя сюда, что угловая скорость вихря в точке М будет

$$2\omega = \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial v'}{\partial x'}$$

представим ф-лу (38) в следующем простом виде.

$$(38') \quad n = p,$$

$$t = 2\mu\omega.$$

Сила P образуется от действия сил n и t на каждый элемент смазочного слоя, прилегающего к подшипнику. Так как, согласно ф-ле (36), в точках подшипника, соответствующих значению параметра ξ и $2\pi - \xi$, давление p одинаково по величине, но различно по знаку, а значения 2ω в этих точках одинаковы по величине и по знаку, то проекция равнодействующей на ось OX (фиг. 1) будет нуль, и вся равнодействующая P будет направлена по оси OY . Косинусы углов, которые оси (фиг. 1) Mx' и My' образуют с OY , будут даны формулами

$$\cos \eta : H = H \frac{\partial y}{\partial \eta} = H \frac{\partial x}{\partial \xi},$$

$$\cos \xi : H = H \frac{\partial x}{\partial \xi} = -H \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Вследствие этого, на основании ф-лы (38'),

$$P = \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{p}{\mu} \frac{\partial x}{\partial \xi} - 2\omega \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi = \\ = \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{p}{\mu} x - 2\omega y \right) - \mu \int_0^{2\pi} \left[x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\mu} \right) - y \frac{\partial}{\partial \xi} (2\omega) \right] d\xi.$$

Вставка между пределами пропадает, и мы получаем

$$(39) \quad P = -\mu \int_0^{2\pi} \left[x \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\mu} \right) - y \frac{\partial}{\partial \xi} (2\omega) \right] d\xi.$$

При составлении производных по ξ от вторых частей ф-лы (33) и (34) раскроем гиперболические функции, содержащие τ , и напишем

$$(40) \quad a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p}{\mu} \right) = -2B \cos \xi \sinh \eta_0 - 4C \{ \cosh \tau (\cos \xi \cosh \eta_0 - \\ - \cos 2\xi \cosh 2\eta_0) - \sinh \tau (\cos \xi \sinh \eta_0 - \cos 2\xi \sinh 2\eta_0) \}, \\ a^2 \frac{\partial (2\omega)}{\partial \xi} = 2B \sin \xi \cosh \eta_0 + 4C \{ \cosh \tau (\sin \xi \sinh \eta_0 - \\ - \sin 2\xi \sinh 2\eta_0) - \sinh \tau (\sin \xi \cosh \eta_0 - \sin 2\xi \cosh 2\eta_0) \}.$$

Подставляя эти выражения в ф-лу (39) и воспользовавшись ф-лой (10), увидим, что все члены при коэффициенте C сокращаются, и у нас получается

$$(41) \quad P = \frac{4\pi\mu B}{a}.$$

Подставляем сюда величину B из ф-лы (28):

$$P = \frac{4\pi\mu U r_1}{a} \cdot \frac{(1+k) \sinh \sigma}{\sigma - 2(1+k) \sinh \sigma + (1+k)^2 \sigma},$$

откуда, заменяя $r_1 = a \sinh \eta_1$ и воспользовавшись ф-лой (8), найдем окончательно:

$$(42) \quad P = \frac{4\pi\mu U \sqrt{(1+k)^2 + 1} - 2(1+k) \cosh \sigma}{\sigma((1+k)^2 + 1) - 2(1+k) \sinh \sigma}.$$

Так как эта величина положительна, то сила P направлена на фиг. 1 вверх.

Переходим к определению момента L , который будем отыскивать в предположении, что сила P приложена в центре шипа. Приведем всю рассматриваемую систему сил к силе P , приложенной в центре подшипника, и

к паре с моментом L' . При переносе силы P в центр шина получается пара с несколько иным моментом L , причем

$$L = L' - Pe,$$

или, по ф-ле (9),

$$(43) \quad L = L' - P \frac{r_1 \sinh \sigma}{\sinh \gamma_0}.$$

Что касается момента L' , то он будет, согласно ф-ле (38'), иметь следующую величину:

$$L' = \int_0^{2\pi} \frac{2\mu\omega d\xi}{H},$$

или, по ф-лам (6) и (2):

$$(44) \quad L' = \frac{\mu r_0}{\sinh \gamma_0} \int_0^{2\pi} 2\omega r d\xi.$$

Подставляя сюда 2ω из ф-лы (35) и пользуясь последнюю ф-лой (10), мы увидим, что коэффициент при $\sinh \sigma$ сократится, и получим

$$L' = \frac{4\pi\mu r_0}{a} (B \cosh \gamma_0 - 2C \sinh \gamma_0 \cosh \sigma),$$

или по (4)

$$L' = 4\pi\mu [B \operatorname{cotgh} \gamma_0 - 2C \cosh \sigma].$$

Подставляем это выражение в ф-лу (43), в которой P заменяем по формуле (41):

$$L = 4\pi\mu \left\{ [B \operatorname{cotgh} \gamma_0 - 2C \cosh \sigma] - B \frac{\sinh \sigma}{\sinh \gamma_0 \sinh \gamma_1} \right\};$$

это дает

$$(45) \quad L = 4\pi\mu [B \operatorname{cotgh} \gamma_1 - 2C \cosh \sigma].$$

Подставляем сюда значения коэффициентов B и C из ф-л (28) и (29) и пользуемся ф-лой (8):

$$(46) \quad L = -4\pi\mu r_1 U \frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{cotgh} \sigma - 2(1+k) \cosh \sigma - 1}{\sigma[(1+k)^2 + 1] - 2(1+k) \sinh \sigma};$$

ф-лы (42) и (46) решают нашу задачу. При данном $\frac{P}{U}$, из (42) определяем σ и, подставив эту величину в (46), находим момент ($-L$) пары, поглощаемой трением. Величина σ , как было сказано, изменяется от значения 0 до значения $\sigma_0 = \lg(1+k)$. Пользуясь величиною σ_0 , представим P в таком виде:

$$(47) \quad \frac{P}{4\pi\mu U} e^{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{\cosh \sigma_0 - \cosh \sigma}{\sigma \cosh \sigma_0 - \sinh \sigma}.$$

Посмотрим, как будет изменяться отношение $\frac{P}{U}$ при непрерывном изменении σ от 0 до σ_0 . При $\sigma=0$, знаменатель обращается в нуль и при дальнейшем возрастании σ возрастает до тех пор, пока

$$\frac{d}{d\sigma} (\sigma \cosh \sigma_0 - \sinh \sigma) = \\ = \cosh \sigma_0 - \cosh \sigma > 0,$$

т. е. до значения $\sigma = \sigma_0$. Числитель дроби (47) идет, убывая от значения $\sigma=0$ до значения $\sigma = \sigma_0$. Таким образом, при изменении σ от 0 до σ_0 дробь $\frac{P}{U}$ убывает от бесконечности до 0, как это представлено на фиг. 4.

Составим величину коэффициента трения λ :

$$(48) \quad \lambda = \frac{(-L)}{Pr_1} = \frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{coth} \sigma + 1 - 2(1+k) \cosh \sigma}{V(1+k)^2 + 1 - 2(1+k) \cosh \sigma} = \\ = \frac{\left(\frac{(1+k)^2 \operatorname{coth} \sigma + 1 - \cosh \sigma}{2(1+k)} \right) V/2(1+k)}{V \cosh \sigma_0 - \cosh \sigma}.$$

Эта величина обращается в бесконечность при $\sigma=0$ и $\sigma=\sigma_0$; вследствие этого она имеет непременно minimum между указанными пределами: около этого minimum'a λ можно рассматривать как величину постоянную и считать момент силы трения пропорциональным силе нагрузки шина P , как это следует из закона трения твердых тел. Другой предельный случай получается при σ , близком к σ_0 . При этом ф-лу (48) преобразуем так

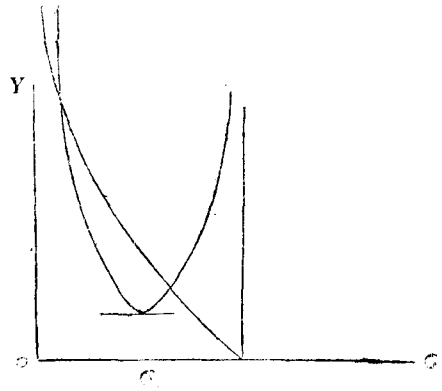
$$\lambda = V/2(1+k) \left[V \cosh \sigma_0 - \cosh \sigma + \frac{(1+k)(\sigma \cosh \sigma - \sinh \sigma)}{2 V \cosh \sigma_0 - \cosh \sigma \sinh \sigma} \right].$$

При σ близком к σ_0 первый член пропадает перед вторым, и мы получаем на основании ф-лы (47):

$$(49) \quad \lambda = 2\pi \mu \frac{1+k}{\sinh \sigma_0} \frac{U}{P} = 4\pi \mu \frac{(1+k)^2}{(1+k)^2 - 1} \frac{U}{P}.$$

При заданном P рассматриваемый предельный случай соответствует значительным скоростям U . Это дает нам гидродинамический закон трения шина в подшипнике, по которому момент сил, поглощенных трением смазочного слоя, пропорционален окружной скорости U и не зависит от давления P .

§ 6. Переходим к предположению, что k есть малая величина. На основании соотношения $\sigma_0 = \lg(1+k)$, σ_0 будет порядка малости k , а следо-



Фиг. 4.

вательно, и переменная величина σ , заключенная в пределах 0 и σ_0 , будет малая величина порядка малости k . Преобразуем ф-лу (47) через отбрасывание малых величин высших порядков перед малыми величинами низших порядков:

$$(50) \quad \frac{P}{U} = \frac{12\pi\mu \sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}{\sigma(3\sigma_0^2 - \sigma^2)},$$

$$(51) \quad \frac{(-L)}{r_1 U} = \frac{4\pi\mu(3\sigma_0^2 - 2\sigma^2)}{\sigma(3\sigma_0^2 - \sigma^2)},$$

$$(52) \quad \lambda = \frac{1}{3} \frac{3\sigma_0^2 - 2\sigma^2}{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}.$$

Наименьшее значение λ , о котором мы упоминали в предыдущем параграфе, здесь находится очень просто. Оно получается при

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_0$$

и таково:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sigma_0 = 0.94 \cdot \sigma_0.$$

При малом k ф-ла (8) дает нам

$$\begin{aligned} \operatorname{cotgh} \eta_0 &= \frac{k}{\sigma} = \frac{\sigma_0}{\sigma}, \\ \sigma &= \sigma_0 \operatorname{tgh} \eta_0. \end{aligned}$$

Подставляя это в ф-лу (50) и (51), получаем

$$\begin{aligned} \frac{P}{U} &= \frac{12\pi\mu \cosh^2 \eta_0}{\sigma_0^2 \sinh \eta_0 (2 \cosh^2 \eta_0 + 1)}, \\ \frac{(-L)}{U r_1} &= \frac{4\pi\mu (\cosh^2 \eta_0 + 2)}{\sigma_0 (2 \cosh^2 \eta_0 + 1)}. \end{aligned}$$

Так как при весьма малом k ф-ла (9') дает нам

$$\alpha = \frac{1}{\cosh \eta_0}$$

и в то же время

$$\sigma_0 = \lg(1 + k) = k = \frac{\delta}{r_1},$$

то

$$(53) \quad \frac{P}{U} = 12\pi\mu \frac{r_1^2}{\delta^2} \frac{\alpha}{(2 + \alpha^2) \sqrt{1 - \alpha^2}},$$

$$\frac{(-L)}{r_1 U} = 4\pi\mu \frac{r_1}{\delta} \frac{1 + 2\alpha^2}{\alpha^2 + 2}.$$

Это суть приближенные формулы Зоммерфельда.

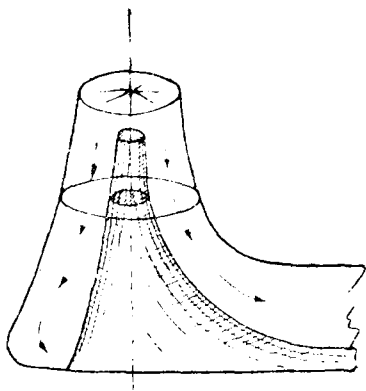
К ТЕОРИИ ГИДРОКОНА

СТАТЬЯ ПЕРВАЯ

1. Введение

Для увеличения полезного действия воды в турбинах, в последнее время начали устраивать особым образом всасывающие трубы, отводящие отработанную воду турбины; а именно, внутри этих труб стали помещать твердые тела (ядра) разных очертаний с тем, чтобы осевая часть, где образовались бы вихревые массы и куда мог бы засасываться воздух, оказалась недоступной для отходящей воды. Всасывающие трубы с такими внутренними ядрами приобрели название *гидроконов*.

Для прохода воды, таким образом, остается пространство, имеющее кольцеобразное сечение, как изображено на фиг. 1. Для наилучшего действия таких приспособлений их надлежит устраивать так, чтобы в пространстве, предоставленном для отходящей воды, могло образоваться невихревое течение; в противном случае вихревые массы, постепенно накапливаясь в разных местах всасывающего пространства,



Фиг. 1.

стали бы срывать время от времени, и образовалось бы течение с весьма неприятными и вредными, в смысле снижения к.п.д. работы турбины, колебаниями и перебоями. Так как введенные в практику американскими инженерами гидроконы устраиваются почти ощупью без всякого теоретического освещения правильности их очертаний, то нам представляется небесполезным, хотя бы приблизительно, подойти к разрешению вопроса о том, как же следует подбирать очертания поверхностей гидроконов для того, чтобы во всасывающих трубах было возможно невихревое течение известного типа с определенным распределением скоростей во всех точках пространства, занятого отходящей водой. При математическом построении теории, мы, конечно, предполагаем воду лишенную вязкости, несжимаемую жидкостью. Наличие вязкости изменит течение у стенок гидрокона; но весьма вероятно, что при плавных очертаниях поверхностей обоих тел влияние сил трения о стенки не будет

сказываться слишком большими пертурбациями течения, тем более, что пробег по трубе будет проходить в довольно короткое время.

Начнем рассмотрение с простейшего случая и, построив соответствующий гидрокон, укажем затем и более сложные пути построения. Разумеется, впоследствии необходимо произвести экспериментальные исследования различных типов гидроконов, очертания которых явятся в результате предлагаемого способа, с тем, чтобы выбрать из них наиболее подходящий, так как все же оценить теоретически влияние вязкости не представляется возможным.

2. Простейший вид гидрокона в случае отсутствия вращения воды в трубе

Представим себе два равных источника внутри безграничной по всем направлениям массы идеальной несжимаемой жидкости. Направим ось координат OZ по линии, соединяющей источники, а начало координат расположим посредине между источниками. На чертеже (фиг. 2) A и B суть источники; расстояния $AO = OB = a$. Течение будет происходить одинаково во всех меридиональных плоскостях, проходящих через OZ . Потенциал скоростей φ и функция тока ψ при всяком таком течении связаны между собою соотношениями

$$(1) \quad s \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

$$(2) \quad s \frac{\partial \varphi}{\partial s} = - \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$(3) \quad s^2 = x^2 + y^2.$$

В нашем случае

$$(4) \quad \varphi = - \frac{M}{r} - \frac{M}{r_1},$$

$$(5) \quad \psi = - M \frac{z-a}{r} - M \frac{z+a}{r_1},$$

$$(6) \quad r^2 = s^2 + (z-a)^2,$$

$$(7) \quad r_1^2 = s^2 + (z+a)^2.$$

Через положительный коэффициент M определяется секундный объем q жидкости, выбрасываемый каждым источником.

Чтобы найти выражение q , составим выражения для скоростей вблизи источника A . Обозначив через v и w проекции скорости на направления s и z , мы будем иметь

$$\frac{1}{M} v = \frac{1}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{s}{r^3} + \frac{s}{r_1^3},$$

$$\frac{1}{M} w = \frac{1}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{z-a}{r^3} + \frac{z+a}{r_1^3}.$$

Если мы назовем через Θ угол радиуса-вектора r с направлением оси z , то проекция скорости на этот радиус-вектор v_r будет иметь выражение

$$\frac{v_r}{M} = \frac{1}{M} \left(v \frac{s}{r} + w \frac{z-a}{r} \right) = \frac{1}{r^2} + \frac{r}{r_1^3} + \frac{2a \cos \Theta}{r_1^3}.$$

Расход q определится так:

$$q = \int v_r r^2 d\omega = M \int d\omega + M \int \left(\frac{r^3}{r_1^3} + \frac{2ar^2 \cos \Theta}{r_1^3} \right) d\omega,$$

где $d\omega$ есть телесный угол, под которым из точки A виден элемент поверхности сферы радиуса r с центром в точке A , ибо сквозь поверхность сферы протекает вся жидкость, выбрасываемая источником A . Предположив, что r стремится к нулю, получаем

$$(8) \quad q = M \int d\omega = 4\pi M.$$

Приравняв ψ постоянному, мы получим соответственную поверхность тока, сечение которой меридиональную плоскостью (так мы всегда будем называть любую плоскость, проходящую через ось z) представляет собою линию тока. В частности, поверхность

$$\psi = 0$$

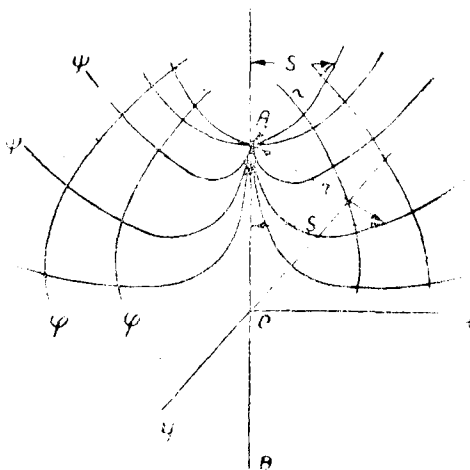
состоит из части оси Z между источниками и из плоскости XU ; отрицательное значение постоянного в уравнении

$$\psi = C$$

определяет при выходе из источника A поверхность тока, расширяющуюся затем и уходящую в бесконечность, не пересекая плоскости XU ; в далеких частях этой поверхности ординаты z неограниченно возрастают.

При малых абсолютных значениях C поверхность при выходе из источника представляет весьма узкую трубку. В пределе C может достигнуть значений $-2M$ или $+2M$; первое из этих предельных значений соответствует части ∞A оси Z , представляющей собою предел бесконечно тонкой трубки, охватывающей эту ось; $-\infty B$ соответствует второму предельному значению постоянного; таким образом, мы будем иметь всюду

$$(9) \quad -2M < C < 2M.$$



Фиг. 2.

Количество жидкости, вытекающее из верхнего источника между двумя поверхностями тока

$$\psi = C_1 \text{ и } \psi = C_2 \text{ при } C_1 > C_2,$$

определяется формулой

$$(10) \quad Q = 2\pi (C_1 - C_2).$$

Вертикальная скорость w и горизонтальная v определяются формулами

$$(11) \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = M \frac{z-a}{r^3} + M \frac{z+a}{r_1^3},$$

$$(12) \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = Ms \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_1^3} \right).$$

На плоскости XY , как и надлежит,

$$w = 0,$$

а величина горизонтальной скорости

$$v = \frac{2Ms}{(s^2 + a^2)}.$$

Преобразуем теперь наше течение, сложив его с течением, имеющим постоянную скорость v_0 , направленную по оси X . Так как скорости вблизи источников бесконечно велики, то прибавленное течение не изменит характера движения в соседстве с источником. Обозначив скорости этого нового течения по осям X , Y , Z через u , v , w , получим для них выражения

$$(13) \quad \frac{u}{M} = \frac{x}{r^3} + \frac{x}{r_1^3} + \frac{1}{b^2},$$

$$(14) \quad \frac{v}{M} = \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r_1^3},$$

$$(15) \quad \frac{w}{M} = \frac{z-a}{r^3} + \frac{z+a}{r_1^3},$$

где

$$(16) \quad b^2 = \frac{M}{v_0}$$

и попрежнему

$$(6') \quad r^2 = s^2 + (z-a)^2 = x^2 + y^2 + (z-a)^2,$$

$$(7') \quad r_1^2 = s^2 + (z+a)^2 = x^2 + y^2 + (z+a)^2.$$

По значениям скоростей, интегрируя выражение

$$d\varphi = u dx + v dy + w dz,$$

определяем потенциал скорости:

$$(17) \quad \varphi = M \left(\frac{x}{b^2} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Ту же формулу нового потенциала находим путем сложения потенциалов слагаемых течений $-\frac{M}{r} - \frac{M}{r_1}$ и $v_0 x = \frac{M}{b^2} x$.

Займемся исследованием этого нового течения. Оно попрежнему имеет плоскость симметрии XU , ибо на этой плоскости вертикальная скорость обращается в нуль. Рассмотрим, как расположатся линии тока, находящиеся в этой плоскости. Прежде всего отметим то, что ось X состоит из линий тока. В самом деле, при $y=0$, мы имеем $v=0$, что и доказывает правильность нашего утверждения. Посмотрим, каковы будут скорости вдоль этой прямой. Они определяются формулой

$$(13') \quad \frac{1}{M} u = \frac{2x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{b^2}.$$

Поворотные значения u соответствуют корням уравнения

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

и будут таковы:

$$(18) \quad u = \pm \frac{4M}{3a^2 \sqrt{3}} + \frac{M}{b^2} = v_0 \pm \frac{4M}{3a^2 \sqrt{3}}.$$

Если $v_0 < \frac{4M}{3a^2 \sqrt{3}}$, что мы и предположили, то оба рассматриваемые значения переменного x дают максимум абсолютной величины скорости. Для нас важен тот из двух максимумов, который соответствует отрицательной абсциссе. Здесь абсолютное значение максимальной скорости

$$|u_{\max}| = M \left(\frac{4}{3 \sqrt{3} a^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

Так как первое из слагаемых в вышеприведенной ф-ле (13') для $\frac{u}{M}$ при изменении x от $-\infty$ до 0, оставаясь все время отрицательным, изменяется от нуля до крайнего значения

$$(19) \quad k = - \frac{4}{3 \sqrt{3} a^2}$$

и затем снова стремится к нулю при $x=0$, то полная величина скорости на отрицательной части осн абсцисс, вначале положительная, переходит через нуль к отрицательным значениям и, вновь пробегая через нулевое

значение, опять приобретает положительную величину, каковую имеет всюду на остальной части оси x .

Итак, на оси X , при рассматриваемом течении, мы имеем две точки нулевой скорости; величины абсцисс этих точек определятся решением уравнения

$$(20) \quad (x^2 + a^2)^3 = 4b^4x^2$$

или, заменяя x^2 через t ,

$$(21) \quad (t + a^2)^3 - 4b^4t = 0.$$

Левая часть этого уравнения положительна при $t=0$ и $t=\infty$ и отрицательна при $t = \frac{a^2}{2}$, если выполнено неравенство, наложенное нами на величину b^2 . Пользуясь произволом выбора b^2 , лишь бы удовлетворилось указанное неравенство, мы можем задать один из интересующих нас положительных корней уравнения. Пусть это будет меньший из них t_0 ; тогда больший определится из решения квадратного уравнения, которое мы получим, заменив в кубичном величину b^2 ее значением

$$(22) \quad 4b^4 = \frac{(t_0 + a^2)^3}{t_0}.$$

Таким образом получим для разрешения уравнение

$$(23) \quad t_0(t + a^2)^3 - t(t_0 + a^2)^3 = 0,$$

которое, по выделении корня $t=t_0$ и приведении, обратится в

$$(23') \quad t_0t^2 + tt_0^2 + 3a^2tt_0 - a^6 = 0$$

с положительным корнем

$$(24) \quad t_1 = -\frac{3a^2 + t_0}{2} + \sqrt{\frac{(3a^2 + t_0)^2}{4} + \frac{a^6}{t_0}}.$$

Нетрудно убедиться, что при $t_0 = \frac{a^2}{2}$ и $t_1 = \frac{a^2}{2}$; при $t_0 < \frac{a^2}{2}$, $t_1 > \frac{a^2}{2}$; это последнее обстоятельство всего проще подтверждается исследованием уравнения в неразрешенной (23') форме, ибо подстановка в него $\frac{a^2}{2}$ на место t обращает левую часть в выражение

$$\frac{a^2}{2}t_0^2 + \frac{7}{4}a^4t_0 - a^6,$$

сохраняющее отрицательный знак, пока t_0 заключено между 0 и $\frac{a^2}{2}$.

Исследуем теперь характер критических точек

$$x = x_0 = -\sqrt{l_0}$$

и

$$x = x_1 = -\sqrt{l_1}.$$

Для этой цели составим выражение потенциала скоростей в соседних с ними точках плоскости $X\Gamma$. Обозначая координаты точек, соседних с первой из критических, через

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi, \\ y &= \eta \end{aligned}$$

и условившись сохранять степени ξ , η не выше вторых, легко получаем разложение функции φ в виде

$$(25) \quad \varphi = \varphi_0 + \xi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_0 + \frac{\xi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 + \xi \eta \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 + \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0,$$

сводящееся, по подстановке значений коэффициентов, к следующему выражению:

$$(26) \quad \frac{\varphi}{M} = \frac{\varphi_0}{M} + \frac{\xi^2 (a^2 - 2x_0^2)}{(x_0^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{\eta^2}{(x_0^2 + a^2)^{3/2}},$$

ибо в критической точке $x = x_0$, $y = 0$ будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

вторые производные составляем непосредственным дифференцированием и затем подставляем в них $x = x_0$, $y = 0$.

Вблизи второй критической точки соответственное разложение имеет вид

$$(27) \quad \frac{\varphi}{M} = \frac{\varphi_1}{M} + \frac{\xi^2 (a^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{\eta^2}{(x_1^2 + a^2)^{3/2}},$$

если через ξ , η опять будем обозначать текущие координаты точек, соседних с этой критической точкой по отношению к осям, имеющим начало в критической точке.

Положив в первом уравнении

$$\frac{\varphi}{M} = \frac{\varphi_0}{M} + \epsilon_0,$$

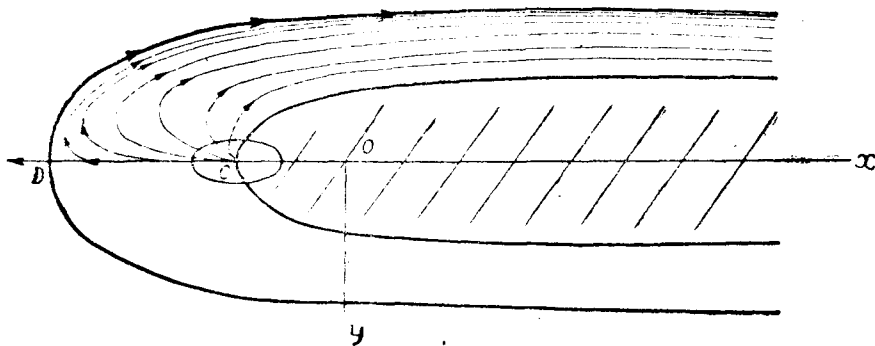
во втором

$$\frac{\varphi}{M} = \frac{\varphi_1}{M} + \epsilon_1,$$

где ϵ_0 и ϵ_1 — малые постоянные, убеждаемся, что изображенное первым из этих уравнений сечение эквипотенциальной поверхности есть эллипс; во

втором случае оно оказывается гиперболой, ибо, вследствие неравенств $x_0^2 < \frac{a^2}{2} < x_1^2$, коэффициенты при ξ^2 и η^2 в уравнении (26) будут оба положительными, а в (27) первый из них отрицателен.

Из эллиптической критической точки C будет исходить пучок линий тока, уходящих в бесконечность в направлении положительной оси x ; в соседстве со второю точкою D гиперболического типа линии тока имеют вид частей гипербол, ортогональных к гиперболе, изображенной вторым уравнением.



Фиг. 3.

Изложенные соображения дают нам представление о ходе линий тока в плоскости XU . Они изображены схематически на чертеже (фиг. 3). Две особые линии тока, изображенные на чертеже с утолщенными очертаниями, пересекают ось X под прямым углом.

Из них внутреннюю мы принимаем за сечение с горизонтальной плоскостью поверхности искомого ядра, а внешнюю — за сечение внешней поверхности гидрокона.

Чтобы еще яснее представить себе эти очертания, покажем, что указанные кривые имеют асимптоты, параллельные оси X . Для этой цели нам придется обратиться к дифференциальным уравнениям линий тока, лежащих в плоскости XU . Они, очевидно, будут таковы:

$$(28) \quad \frac{1}{M} \frac{dx}{dt} = \frac{u}{M} = \frac{1}{b^2} + \frac{2x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}},$$

$$(29) \quad \frac{1}{M} \frac{dy}{dt} = \frac{v}{M} = \frac{2y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Эти уравнения, к сожалению, не поддаются интегрированию. Определяемые ими кривые можно, однако, вычертить с любой точностью; для этого необходимо вычертить семейство кривых пересечения с плоскостью XU эквипотенциальных поверхностей; семейство это определяется уравнением

$$(30) \quad \varphi = \frac{x}{b^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} = \text{const},$$

левая часть которого получается из ф-лы (17) для φ путем приравнения в ней при помощи выражений (6') и (7') $z=0$; вычертив, при достаточно частых значениях постоянного, кривые семейства, следует затем построить ортогональные траектории указанных кривых; это и будут искомые линии тока.

Однако, ход линий тока в далеких точках плоскости будет не так ясен, и потому вопрос о существовании асимптот подлежит особому рассмотрению.

Обращаясь к доказательству существования асимптот, прежде всего введем вспомогательное переменное σ дифференциальным соотношением

$$(31) \quad M dt = d\sigma (x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}.$$

Тогда уравнения линий тока преобразуются к виду

$$(32) \quad \frac{dy}{d\sigma} = 2y,$$

$$(33) \quad \frac{dx}{d\sigma} = 2x + \frac{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}{b^2}$$

Первое из этих уравнений, по интегрировании, дает

$$(34) \quad y = C e^{2\sigma}.$$

Если мы докажем, что бесконечно большим значениям абсциссы x соответствуют конечные σ , то ясно будет, что в далеких точках y остаются конечными, и следовательно, каждая линия тока будет асимптотически приближаться к соответствующей ей, параллельной оси X , прямой. Чтобы это обнаружить, рассмотрим, вместо второго дифференциального уравнения (33), которого интегрировать мы не умеем, уравнение

$$(33') \quad \frac{dX}{d\sigma} = 2X + \mu \frac{X^3}{b^2},$$

где μ — некоторое постоянное число.

Представив (33') в виде

$$\frac{dX}{X} - \frac{\mu X dX}{2b^2 + \mu X^2} = 2d\sigma,$$

легко усматриваем, что, интеграл этого уравнения можно изобразить в форме

$$(35) \quad \frac{X}{\sqrt{\mu X^2 + 2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{2\sigma - 2\sigma_0}.$$

Так как

$$\frac{\sqrt{\mu} X}{\sqrt{\mu X^2 + 2b^2}} = \sqrt{\frac{\mu X^2}{\mu X^2 + 2b^2}}$$

есть правильная дробь, то ясно, что при неограниченном возрастании X , σ , оставаясь все время менее σ_0 , стремится к предельному значению σ_0 .

Но, подставив функцию x на место X в определяющее X дифференциальное уравнение, написанное в форме

$$\frac{dX}{d\sigma} - 2X - \frac{\mu X^3}{b^2} = 0,$$

мы получим в левой части выражение

$$(56) \quad \frac{1}{b^2} \left\{ (x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \mu x^3 \right\},$$

которое будет всегда, при достаточно больших значениях x , положительно при $\mu = 1$ и отрицательно, как только μ сколь угодно мало превысит единицу¹⁾.

Но доказанной нами теореме, если результат подстановки в дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0$$

вместо y какой-либо функции, имеющей то же начальное значение при $x = x_0$, что и искомый интеграл, окажется более нуля, то при $x > x_0$ подставляемая функция будет более интеграла; обратное имеет место при противоположном знаке подстановки.

Сопоставляя сказанное выше с этой теоремой, убеждаемся, что x будет превышать определенную нами функцию X , если в формуле, характеризующей эту функцию, мы заменим μ единицей; если же мы положим $\mu = 1 + \alpha$, то при каком угодно малом α найдем верхнюю границу неизвестного нам выражения x . И то и другое справедливо лишь при достаточно больших значениях x ; при этом вместо σ_0 нужно подставить соответственную величину, определенную из того соображения, что при каком-нибудь начальном значении σ , например $\sigma = 0$, $X = x$. Назовем функцию X , соответствующую значению $\mu = 1$, нижним пределом, а ту функцию, которая получится при $\mu > 1$, верхним пределом неизвестного интеграла x . Так как бесконечные значения как верхнего, так и нижнего предела интеграла получаются при конечном значении σ , то то же самое должно иметь место и для бес-

¹⁾ Правильность последнего вытекает из следующего соображения: предположив даже одновременное неограниченное возрастание функций x и y , мы из определяющих их дифференциальных уравнений легко убеждаемся, что $\lim \frac{dy}{dx}$, а стало быть, и $\lim \frac{y}{x}$ при этом стремится к нулю, а потому выражение во внешних скобках, которое можно изобразить в виде

$$-x^3 \left\{ \mu - 1 - \frac{3}{2} \frac{y^2 + a^2}{x^2} - \frac{3}{8} \frac{(y^2 + a^2)^2}{x^4} - \dots \right\},$$

непрерывно отрицательно, если x^2 достаточно велико, как бы мало ни было положительное число $\mu - 1$.

конечно больших значений функции x , содержащейся между пределами; а раз это так, то из формулы

$$(37) \quad y = C e^{2x}$$

мы усматриваем, что удаленные точки исследуемых кривых действительно имеют конечные ординаты.

Обращаемся, далее, к изучению хода линий тока, расположенных в плоскости ZX . Они являются ортогональными траекториями семейства кривых пересечения эквипотенциальных поверхностей с указанною плоскостью. Уравнение этого семейства изображается в виде

$$F = \frac{x}{b^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a)^2}} = \text{const.}$$

Построив достаточно густую сеть этих кривых и вычертив их ортогональные траектории, мы с достаточной точностью наметим искомые линии тока.

Все линии тока, лежащие выше оси X , исходят из верхнего источника; только этими кривыми мы и займемся.

Прежде всего составим разложение функции F вблизи выше определенных, расположенных на оси X , критических точек течения, абсциссы которых x_0 и x_1 обращают в нуль производные F по x и z . Обозначив координаты соседних с первой из этих точек через $x_0 + \xi$, z , получим

$$(38) \quad F = F_0 + \frac{\xi^2(a^2 - 2x_0^2) + z^2(x_0^2 - 2a^2)}{(x_0^2 + a^2)^{3/2}},$$

а вблизи второй критической точки:

$$(39) \quad F = F_1 + \frac{\xi^2(a^2 - 2x_1^2) + z^2(x_1^2 - 2a^2)}{(x_1^2 + a^2)^{3/2}}.$$

При достаточно большой скорости v_0 мы можем продвинуть дальнюю критическую точку к началу координат так, чтобы было

$$x_1^2 < 2a^2.$$

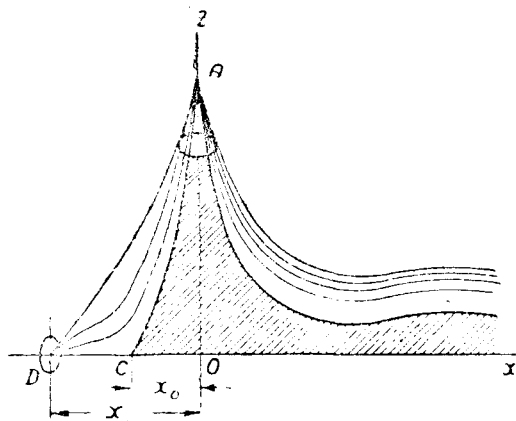
Тогда, при $F = F_0 + \epsilon_0$, $F = F_1 + \epsilon_1$, где ϵ_0 и ϵ_1 — малые постоянные сечения эквипотенциальных поверхностей изображаются уравнениями

$$(40) \quad \xi^2(a^2 - 2x_0^2) + z^2(x_0^2 - 2a^2) = \epsilon_0(x_0^2 + a^2)^{3/2},$$

$$(41) \quad \xi^2(a^2 - 2x_1^2) + z^2(x_1^2 - 2a^2) = \epsilon_1(x_1^2 + a^2)^{3/2}.$$

Первая из них будет гиперболой, а вторая — эллипсом. Это позволяет нам представить себе схему расположения интересующих нас линий тока,

изображенную на чертеже (фиг. 4). Способом, аналогичным употребленному для выяснения поведения в данных точках линий тока в плоскости XU , мы



Фиг. 4.

можем убедиться, что и на этот раз отходящие вправо ветви исследуемых кривых обладают асимптотами, параллельными осп X . Две из линий тока, идущие от источника A к критическим точкам, представляют собой сечение вертикальной осевой плоскостью внешней и внутренней поверхностей гидрокона слева от оси. Справа границы будут намечаться соответственными каждой из них ветвями линий тока, лежащих на поверхностях тока, определяемых сечениями AC и AD с плоскостью XZ и изображенными на чертеже (фиг. 3) сечениями плоскостью XU .

3. Правило приближенного построения простейшего типа всасывающей трубы и гидрокона

На основании изложенного в предыдущем параграфе, мы можем составить правило построения для обеих поверхностей гидрокона. Правило это будет давать лишь известное приближение к теоретическому, так как невозможность проинтегрировать уравнения линий тока чрезвычайно затрудняет нахождение очертаний указанных поверхностей гидрокона в боковых их частях; как указано выше, мы можем с достаточной точностью вычертить сечение этих поверхностей с вертикальной плоскостью симметрии и с плоским дном всего устройства. Однако, имея эти направляющие кривые, можно, я полагаю, довольно надежно построить приблизительно и полный вид обеих искомых поверхностей гидрокона, *задаввшись предварительно характером горизонтальных сечений этих поверхностей*. Разумеется, тип этих выбираемых кривых должен быть возможно простой, так как осуществление постройки все равно потребует такого упрощения. *Я предлагаю делать эти сечения в форме эллипсов*, располагая большую ось каждого эллипса в вертикальной плоскости симметрии. Что касается длины большой оси, то она задается для обеих поверхностей гидрокона их известными нам профилями в плоскости симметрии. Малая ось подлежит подбору.

Приняв для очертания тела гидрокона в плоскости XZ кривую приблизительно того же вида, как левая граница той и другой поверхности в плоскости симметрии XZ , мы этим определим все элементы эллиптических сечений.

Таким приемом все построения доводятся до конца.

Построив модель, можно затем ее подправить, определяя в различных точках поверхности направление скорости и подтачивая модель так, чтобы это направление оказалось расположенным в соответственной касательной плоскости.

Разумеется, верхняя часть трубы и тела гидрокона, примыкающая непосредственно к источнику *A*, должна быть отброшена, как область весьма больших скоростей. Распределение скоростей при входе в трубу в действительности будет, конечно, не таково, как это определится в результате вычисления по предлагаемой теории; но мне представляется, что и того приближения, которое дается таким образом, окажется практически совершенно достаточно, так как без поправочных коэффициентов при практических вычислениях все же обойтись едва ли возможно, какова бы ни была теоретическая подкладка изысканий по сооружению.

Что касается расхода воды, то он определится прежней формулой, соответствующей первоначальному потоку, который возникает лишь при существовании источников, ибо добавленное течение внутрь всасывающей трубы при указанном выше ее построении ничего не внесет.

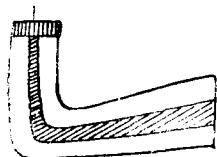
К ТЕОРИИ ГИДРОКОНА

СТАТЬЯ ВТОРАЯ

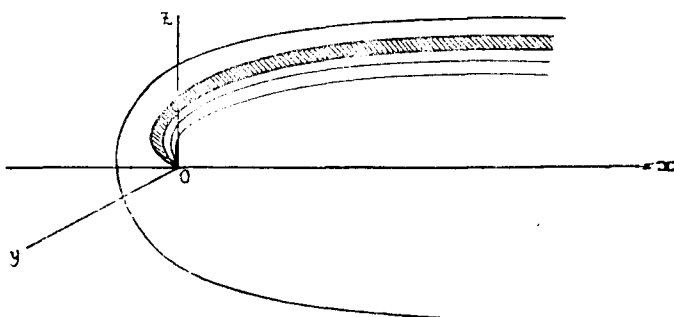
1. Гидрокон в виде изогнутой трубы с внутренним ядром¹⁾

Сечение рассматриваемого гидрокона изображено на фиг. 1.

Чтобы получить течение теоретического типа, близкого к трактуемому, поступаем следующим образом: вообразим в неограниченной, распространяющейся беспредельно по всем направлениям, массе жидкости некоторый неподвижный источник, который мы примем за начало координат, и рассмотрим течение несжимаемой жидкости, состоящее из того, которое зависит от присутствия источника, и добавочного с постоянной скоростью, направленной по оси x (фиг. 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Потенциал скоростей φ будет в нашем случае иметь выражение

$$(1) \quad \varphi = v_0 x - \frac{M}{r},$$

где $M = \frac{Q}{4\pi}$, если через Q обозначим секундный объем жидкости, выбрасываемый источником, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В виду симметрии всего движения по отношению к оси x , все линии тока будут плоские кривые и расположатся в плоскостях, проходящих через ось x . Эти плоскости будем называть меридиональными плоскостями.

¹⁾ Идея такого гидрокона принадлежит проф. В. Т. Бовину.

Каждая линия тока получится в пересечении некоторой меридиональной плоскости с определенной поверхностью вращения (около оси x), уравнение которой получится, если мы приравняем постоянному функцию тока ψ , соответствующую нашей потенциальной функции. Обозначим через s расстояние какой-либо точки от оси x , так что

$$s = \sqrt{y^2 + z^2};$$

мы имеем для определения ψ , как известно, уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= s \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= s \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \end{aligned}$$

В нашем случае получим таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= \frac{Mxs}{r^3} = v_0 s, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{Ms^2}{r^3} = -\frac{M}{r^3}(r^2 - x^2) = -\frac{M}{r} + \frac{Mx^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Легко усмотреть, что функция ψ будет такова:

$$(2) \quad \psi = v_0 \frac{s^2}{2} - M \frac{x}{r}.$$

Отсюда, положив $y = 0$, найдем уравнение семейства линий тока, лежащих в плоскости xz ; его можно представить в виде

$$(3) \quad z^2 - 2b^2 \frac{x}{r} = C,$$

положив $b^2 = \frac{M}{v_0}$ и обозначив через C постоянный для каждой кривой параметр. Вдоль оси x имеем

$$z = 0, \quad \frac{x}{r} = \pm 1,$$

причем верхний знак последнего равенства соответствует положительной части оси x , а нижний — отрицательной.

Параметр C для действительных линий тока, вытекающих из источника, может получать лишь значения, заключенные между пределами $-2b^2$ и $+2b^2$:

$$-2b^2 < C < +2b^2;$$

при этом на положительной части оси x постоянное отрицательно: $C = -2b^2$; а на отрицательной, наоборот, $C = +2b^2$, как это видно из уравнения исследуемого семейства линий тока.

Линия тока, соответствующая предельному положительному C , заслуживает особого внимания. Ее уравнение

$$z^2 - 2b^2 \frac{x}{r} = 2b^2$$

весьма просто выражается в полярных координатах; положив

$$x = r \cos \theta,$$

$$z = r \sin \theta,$$

легко найдем из нашего уравнения:

$$z = 2b \cos \frac{\theta}{2}, \quad r \sin \frac{\theta}{2} = b.$$

Кривая проходит через точку $z=0$; $r=b$, где $\theta=\pi$; это — критическая точка нулевой скорости, ибо, как нетрудно непосредственно усмотреть, в ней производные потенциала скоростей обращаются в нуль (этим устанавливается геометрическое значение постоянного b). Кривая простирается в бесконечность в направлении оси x , которую пересекает в критической точке под прямым углом. При $\theta=0$ мы имеем $r=\infty$; но при этом $z=2b$, а следовательно, исследуемая кривая имеет асимптоту, параллельную оси x и отстоящую от нее на расстоянии $2b$.

Такой особенностью будут обладать и все прочие линии тока; каждая из них имеет свою асимптоту, меньшую $2b$. Рассмотрим ветви линий тока, исходящие из источника в области положительных ординат. Для этих кривых, как выше сказано, постоянный параметр заключен между $-2b^2$ и $+2b^2$, и потому можно положить

$$C = 2b^2 \cos \alpha,$$

где постоянный для каждой кривой угол α может иметь любое значение заключенное между 0 и π . Значение $\alpha=0$ определяет обследованную уже предельную кривую; $\alpha=\pi$ соответствует положительной части оси x ; остальные кривые, исходя из начала координат, расположатся между предельною кривою и указанною частью оси x , как показано на фиг. 2.

Уравнение каждой линии тока, таким образом, может быть выражено в форме

$$(4) \quad z^2 = 2b^2 (\cos \alpha + \cos \theta)$$

или

$$(5) \quad r^2 \sin^2 \theta = 2b^2 (\cos \alpha + \cos \theta);$$

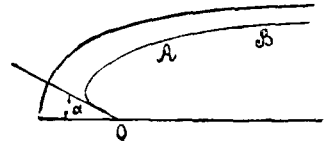
при $\theta=0$ имеем $r=\infty$; $z=2b \cos \frac{\alpha}{2}$, стало быть, кривая обладает асим-

птотой, отстоящей на расстоянии $2b \cos \frac{\alpha}{2}$ от оси x . Угол λ касательной к кривой с радиусом-вектором определяется формулой

$$(6) \quad \operatorname{tg} \lambda = r \frac{d\theta}{dr} = -2 \frac{(\cos \alpha + \cos \theta) \sin \theta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \theta + \cos^2 \theta}.$$

Касательная при этом направлена в сторону возрастания угла θ .

При $\theta = \pi - \alpha$ мы имеем $r = 0$, $z = 0$; $\lambda = \pi$. а следовательно, всякая из исследуемых ветвей линий тока, например OAB (фиг. 3), исходя из начала координат, прикасается здесь к своему радиусу-вектору, и ее касательная образует в этой точке угол α с отрицательным направлением оси x (фиг. 3); этим определяется геометрическое значение угла α . Для кривой OAB угол θ , очевидно, заключен в пределах 0 и $\pi - \alpha$, ибо лишь при таком его значении z и r будут вещественными количествами.



Фиг. 3.

Введя вместо угла λ угол $\mu = \pi - \lambda$ противоположного направления касательной с радиусом-вектором, мы получим выражение

$$(7) \quad \operatorname{tg} \mu = 2 \frac{\sin \theta (\cos \alpha + \cos \theta)}{1 + 2 \cos \alpha \cos \theta + \cos^2 \theta},$$

из которого усматриваем, что угол μ , равный нулю в начале координат и в точке бесконечно удаленной, в определенной точке кривой достигает максимума; но он, во всяком случае, будет менее прямого угла, так как знаменатель приведенной формулы $\operatorname{tg} \mu$ не обращается в нуль, если α отлично от нуля.

Приравняв нулю производную $\operatorname{tg} \mu$ по θ , получим для определения положения точки, где угол μ достигает своего максимального значения, уравнение

$$\cos^3 \theta \cos \alpha + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta \cos \alpha + \cos 2\alpha = 0.$$

Это уравнение дает для $\cos \theta$ отрицательную величину, если $\alpha < \frac{\pi}{4}$, положительную — при $\alpha > \frac{\pi}{4}$; для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ имеем $\cos \theta = 0$ и соответственный

$$\operatorname{tg} \mu = 2 \cos \alpha = \sqrt{2}.$$

Составим по выражению потенциала скоростей формулы компонентов скорости по осям x и z , которые обозначим через u и w :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 \left(1 + \frac{b^2 x}{r^3} \right),$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_0 b^2 \frac{z}{r^3};$$

эти равенства дают возможность удобно выразить наклон касательной к линии тока относительно оси x формулой

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} = \frac{b^2 z}{b^2 x + r^2} = \frac{b^2 \sin \theta}{r^2 + b^2 \cos \theta},$$

а для величины скорости мы находим

$$(8) \quad v^2 = u^2 + w^2 = v_0^2 \left(1 + \frac{2b^2}{r^2} \cos \theta + \frac{b^4}{r^4} \right).$$

Составляем выражение радиуса кривизны кривой.

Опять рассматриваем траекторию, лежащую в плоскости zx .

Найдем сначала ускорения по осям x и z :

$$J_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2},$$

$$J_z = \frac{\partial}{\partial z} \frac{v^2}{2}.$$

Затем составим выражения проекций ускорения J_r и J_θ на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему, направленный в сторону увеличения угла θ .

Имеем

$$J_r = \frac{x}{r} J_x + \frac{z}{r} J_z = \frac{\partial}{\partial r} \frac{v^2}{2} = -\frac{2b^2 v_0^2}{r^3} \left(\cos \theta + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

$$J_\theta = \frac{x}{r} J_z - \frac{z}{r} J_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{v^2}{2} = -\frac{b^2 v_0^2}{r^3} \sin \theta.$$

По ним составляем проекцию ускорения на нормаль к траектории, или центростремительное ускорение,

$$\frac{v^2}{\rho} = -J_r \sin \mu - J_\theta \cos \mu = -\sin \mu (J_r + J_\theta \cotg \mu).$$

Выражение $\cotg \mu$ можно изобразить в виде

$$\cotg \mu = \cotg \theta + \frac{\sin \theta}{2 (\cos \theta + \cos \theta)},$$

откуда, вследствие (5),

$$\sin \theta \cotg \mu = \cos \theta + \frac{b^2}{r^2},$$

после чего для центростремительного ускорения, на основании найденных выражений для компонентов J_r и J_θ ,

$$\frac{v^2}{\rho} = -\frac{2b^2 v_0^2}{r^3} \sin \mu \left(\cos \theta + \frac{b^2}{r^2} + \frac{\sin \theta \cotg \mu}{2} \right),$$

или, воспользовавшись выражением $\operatorname{tg} \mu$,

$$(9) \quad \frac{r^2}{\rho} = \frac{3b^2 v_0^2 \cos \mu \sin \theta}{r^3};$$

зная r^2 , отсюда находим кривизну траекторий. В частности, для начала координат имеем $r=0$, $\mu=0$, но $r^2 r^3 = \infty$.

Для кривой, которая соответствует $\alpha = \frac{\pi}{4}$ в точке ее, где касательная образует максимальный угол с осью x , когда $\cos \theta = 0$, имеем, например:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2b^2 \cos \alpha = b^2 \sqrt{2}, \\ \operatorname{tg} \mu &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ r^2 &= v_0^2 \left(1 + \frac{b^4}{r^4} \right) = \frac{3r_0^2}{2}, \\ \rho &= b \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что формулы для определения μ и ρ могут быть написаны в явном виде, а именно — прямо в координатах без постоянного параметра. Для этого исключим его при помощи уравнения

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{z^2}{2b^2} - \frac{x}{r}, \\ (10) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \mu &= \frac{z^3 r}{b^2 \left(r^2 - 2xr \frac{z^2}{2b^2} - 2x^2 + x^2 \right)} = \frac{zr}{b^2 + xr}, \\ \cos \mu &= \frac{b^2 + xr}{\sqrt{b^4 + 2b^2 xr + r^4}}, \\ r^2 &= \frac{v_0^2}{r^4} (r^4 + b^4 + 2b^2 rx), \quad \cos \mu = \frac{(b^2 + xr) v_0}{vr^2}, \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{3b^2 v_0^2 \sin \theta \cos \mu}{r^3 r^2} = \frac{3b^2 z (b^2 + xr)}{(r^4 + b^4 + 2b^2 xr)^{3/2}}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Заменяя x, z через полярные координаты и приняв во внимание уравнение кривой, выразим $\frac{1}{\rho}$ через θ и параметр. Формула получается довольно сложная и, как будто, неспособная упроститься.

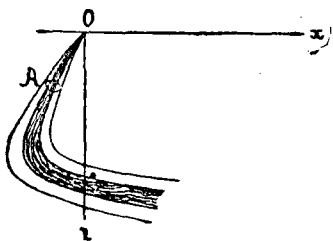
Обратимся теперь к вопросу о том, как воспользоваться рассмотренным течением, чтобы построить интересующий нас гидрокон.

Для этого наметим какой-нибудь определенный тип входного сечения гидрокона; пусть это будет кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями. Расположим это кольцо так, чтобы прямая, соеди-

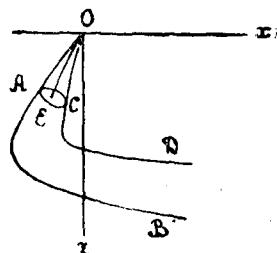
няющая его центр с началом координат, была перпендикулярна к плоскости кольца. Ничто не мешает нам предположить, что центр кольца лежит в плоскости xz . Внутренняя поверхность всасывающей трубы будет образована исходящими из источника линиями тока, пересекающими внешнюю окружность кольца; линии же тока, проходящие через внутреннюю окружность, дадут очертание ядра. Размер кольца надо подобрать с таким расчетом, чтобы образующийся при источнике телесный угол ω , образованный между двумя построенными таким образом поверхностями, соответствовал требуемому расходу воды q . Так как полный секундный расход источника есть $4\pi M$, то

$$\frac{\omega}{4\pi} = \frac{q}{4\pi M}; \quad \omega = \frac{q}{M} = \frac{q}{v_0 b^2}.$$

Далее, мы увидим, как ω связано с площадью кольца.



Фиг.



Фиг. 5.

Обратимся к изысканию тех линий тока, которые опираются на наружный периметр кольца. Пусть радиус его есть a , расстояние OE его центра E от начала координат обозначим через c (фиг. 5); угол EOz пусть будет β . Прежде всего определим граничные линии AB и CD . Координаты точки C таковы:

$$x_0 = -c \sin \beta + a \cos \beta, \quad z_0 = c \cos \beta + a \sin \beta, \\ r_0^2 = c^2 + a^2;$$

точка A определяется координатами

$$x_1 = -c \sin \beta - a \cos \beta, \quad z_1 = c \cos \beta - a \sin \beta, \\ r_1^2 = c^2 + a^2.$$

Эти координаты должны удовлетворять уравнениям линий токов AB и CD .

Для второй

$$z^2 = 2b^2 \cos \alpha_1 + 2b^2 \frac{x}{r};$$

подставляя сюда x_1 , z_1 , находим

$$\cos \alpha_1 = \frac{(c \cos \beta - a \sin \beta)^2}{2b^2} + \frac{c \sin \beta + a \cos \beta}{\sqrt{c^2 + a^2}}.$$

для первой точно так же получаем

$$\cos \alpha_0 = \frac{(c \cos \beta + a \sin \beta)^2}{2b^2} + \frac{c \sin \beta - a \cos \beta}{\sqrt{c^2 + a^2}}.$$

Таким образом, параметры граничных линий определены.

Обратимся теперь к определению линии тока, проходящей через заданную точку окружности, не лежащую в плоскости xz ; пусть она находится в меридиональной плоскости, угол которой с плоскостью xz есть δ .

Окружность определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 + a^2, \\ z \cos \beta - x \sin \beta &= c; \end{aligned}$$

сверх того, имеем

$$y = z \operatorname{tg} \delta.$$

Отсюда получаем для определения z^2 и x следующие выражения:

$$(11) \quad \frac{z^2 \tau}{2b^2} mA - \frac{x}{\sqrt{c^2 + a^2}} B - C = 0,$$

$$(12) \quad \frac{z^2 m \tau}{2b^2} + \frac{x^2}{c^2 + a^2} = 1;$$

здесь положено для краткости

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \delta} &= \tau, & \frac{2b^2}{c^2 + a^2} &= m, & \tau A &= \tau + \cot^2 \beta, \\ \cos \gamma &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}}, & B &= \frac{2 \cos \gamma}{\sin \beta}, & C &= 1 + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

2γ есть угол, под которым диаметр круга виден из начала координат.

Подстановки этих координат в уравнения линий тока при помощи соотношения (2), в котором $\psi = v_0 b^2 \cos \alpha$, дают

$$(13) \quad \begin{aligned} y &= z \operatorname{tg} \delta, \\ \frac{z^2 \tau}{2b^2} &= \cos \alpha + \frac{x}{\sqrt{c^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

Определим $\frac{z^2}{2b^2}$ и $\frac{x}{\sqrt{c^2 + a^2}}$ из уравнений (11) и (13) и подставим в уравнение (12). Получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{c^2 + a^2}} &= \frac{C - mA \cos \alpha}{mA - B}, \\ \frac{z^2 \tau}{2b^2} &= \frac{C - B \cos \alpha}{mA - B}. \end{aligned}$$

$$m(mA - B)(C - B \cos \alpha) + (C - mA \cos \alpha)^2 - (mA - B)^2 = 0$$

или

$$m^2 A^2 \cos^2 \alpha - m [2AC + B(mA - B)] \cos \alpha + C^2 + \\ + Cm(mA - B) - (mA - B)^2 = 0.$$

Отсюда находим два значения $\cos \alpha$, соответствующие двум линиям тока, лежащим в меридиональной плоскости, которая наклонена под углом δ к zx .

Нам вскоре будет нужно выражение разности корней этого уравнения:

$$\cos \alpha' - \cos \alpha'' = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{a_0},$$

a_0, a_1, a_2 — сокращенные обозначения коэффициентов при $\cos^2 \alpha$, $\cos \alpha$ и 1 в нашем квадратном уравнении.

Составим это выражение, после упрощений получим

$$(14) \quad \cos \alpha' - \cos \alpha'' = 2 \frac{mA - B}{\tau mA^2} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sqrt{\cos^2 \beta - \tau (\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)}.$$

Обратимся к определению расхода воды через гидрокон. Для сего представим себе бесконечно малую часть трубки тока, исходящей из источника и опирающейся на площадь круга a , часть, находящуюся в непосредственном соседстве с источником. Пересечем ее сферой весьма малого радиуса r , имеющей центр в начале координат, и определим поверхность сечения сферы трубкой. Элемент поверхности сферы можно изобразить в виде

$$r^2 \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\delta,$$

а вся поверхность

$$S = r^2 \int \int \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\delta,$$

где интеграция распространяется на все значения α и δ , соответствующие линиям тока, которые текут внутри трубки.

Расход

$$q_1 = \frac{v_0 b^2}{r^2} S = v_0 b^2 \int \int \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\delta = v_0 b^2 \int (\cos \alpha' - \cos \alpha'') d\delta;$$

так как

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{\tau}, \quad 2 \cos \delta \cdot \sin \delta \cdot d\delta = \frac{d\tau}{\tau^2},$$

то

$$d\delta = \frac{d\tau}{2\tau \sqrt{\tau - 1}},$$

и, воспользовавшись приведенной выше формулой для $\cos \alpha' - \cos \alpha''$, мы

получаем

$$\frac{q_1}{v_0 b^2} = \frac{2 \cos \beta}{m \sin^2 \beta} \int_1^{\tau_0} \frac{m\tau + m \cot^2 \beta - \frac{2\tau \cos \gamma}{\sin \beta}}{\tau(\tau + \cot^2 \beta)^2} R d\tau,$$

где

$$R = \sqrt{\frac{\cos^2 \beta - \tau(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)}{\tau - 1}}.$$

τ_0 есть значение τ для меридиональной плоскости, прикасающейся к окружности круга; так как при этом две линии тока, лежащие во всякой из плоскостей, пересекающих окружность, сливаются, то, очевидно, мы в этом предельном случае должны иметь

$$\cos \alpha' - \cos \alpha'' = 0,$$

и следовательно, по (14)

$$\tau_0 = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta}.$$

Интеграл вычисляем так: введем новое переменное ξ , положив

$$\frac{\cos^2 \beta - \tau(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)}{\tau - 1} = \xi^2, \quad \sqrt{\frac{\cos^2 \beta - \tau(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta)}{\tau - 1}} = \xi,$$

$$\tau(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta + \xi^2) = \cos^2 \beta + \xi^2,$$

$$(\tau - 1)(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta + \xi^2) = \sin^2 \gamma,$$

$$\sin^2 \gamma \frac{d\tau}{(\tau - 1)^2} = -2\xi d\xi; \quad d\tau = -\frac{2 \sin^2 \gamma \xi d\xi}{(\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta + \xi^2)^2},$$

$$\tau A = \tau + \cot^2 \beta = \frac{\xi^2 + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma - \sin^2 \beta + \xi^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \beta}.$$

После упрощений мы будем иметь для интегрирования сумму двух функций:

$$f_1 = \frac{m\xi^2}{(\xi^2 + \cos^2 \beta)(\xi^2 + \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma)} = \\ = \frac{m}{\sin^2 \gamma} \left(\frac{1}{\xi^2 + \cos^2 \beta} - \frac{\cos^2 \gamma}{\xi^2 + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma} \right)$$

и

$$f_2 = -\frac{2 \cos \gamma \sin \beta \xi^2}{(\xi^2 + \cos^2 \beta \cos^2 \gamma)^2}.$$

Так как

$$\int \frac{d\xi}{\xi^2 + h^2} = \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{h} + c,$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + h^2)^2} = -\frac{1}{2h} \frac{d}{dh} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + h^2} = \frac{1}{2h^3} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{h} + \frac{\xi}{2h^2(\xi^2 + h^2)} + c^1,$$

то, по взятии интегралов и подстановке пределов, получим

$$\frac{q_1}{v_0 b^2} = 4 \cos \beta \left(\frac{\pi}{2 \cos \beta} - \frac{\pi \cos \gamma}{2 \cos \beta} \right) - \frac{4 \cos \beta \cos \gamma \sin \beta \sin^2 \gamma}{m} \frac{\pi}{2 \cos \beta \cos \gamma},$$

или, по приведении,

$$\frac{q_1}{v_0 b^2} = \frac{4\pi \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{m} \left(m - 2 \sin \beta \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right).$$

Найденный расход q_1 имел бы место в том случае, если бы всасывающая труба была полая; в случае наличия ядра, из q_1 следует вычесть q_2 — расход, который приходится на занятую ядром сердцевину трубы. Этот последний расход определится, конечно, той же самой формулой, если только сечение внутреннего тела также представляет собою круг. Для общности можно предположить даже, что этот круг расположен в другой плоскости и что прямая, соединяющая его центр с началом координат, наклонена под другим углом к оси z . Обозначим поэтому через a_1 , c_1 , β_1 , γ_1 , и m_1 величины, играющие по отношению к ядру ту же роль, какую играют соответственные коэффициенты, обозначенные буквами без значка, для внутренней поверхности гидрокона.

Тогда

$$\frac{q_2}{v_0 b^2} = \frac{4\pi \sin^2 \frac{\gamma_1}{2}}{m_1} \left(m_1 - 2 \sin \beta_1 \cos^2 \frac{\gamma_1}{2} \right).$$

Расход определится формулой

$$q = q_1 - q_2.$$

Если, как было предположено вначале, круглые сечения внутренней поверхности и ядра суть концентрические окружности, то $\beta_1 = \beta$, $c_1 = c$, но прочие коэффициенты остаются различными. В самом деле,

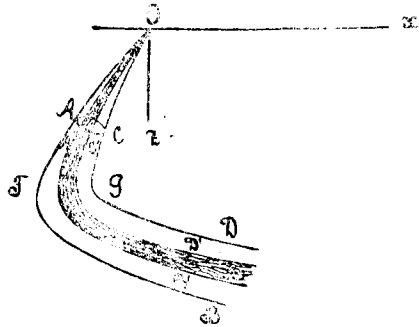
$$m_1 = \frac{2b^2}{c^2 + a_1^2}, \quad m = \frac{2b^2}{c^2 + a^2},$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a_1^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}}.$$

2. Правило построения гидрокона

Это правило мы можем изложить и в более общем предположении, что одно из сечений внутренней поверхности и одно из сечений ядра независимо друг от друга заданы в виде определенных симметричных плоских кривых, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к вертикальной плоскости симметрии всего гидрокона.

Пусть на фиг. 6 линии AB и CD , $A'B'$ и $C'D'$ суть граничные линии профиля внутренней поверхности и ядра в плоскости симметрии, которую мы принимаем за координатную (фиг. 6) плоскость xz . Проводим между граничными кривыми всевозможные линии тока в плоскости xz , определяемые рассматриваемым течением, и затем каждую из них представим себе повернутой около оси x так, чтобы она пересекала в соответственном месте направляющее сечение AC или сечение $A'C'$; при повороте угол ее касательной в точке O с направлением оси x должен оставаться неизменным и плоскость кривой все время должна проходить через Ox . Тогда кривые, которые лягут на периметр AC , очертят нам поверхность внутри трубы, а те, которые обопрутся на $A'C'$, определяют вид ядра. Что касается расхода воды, то он всегда определится формулой



Фиг. 6.

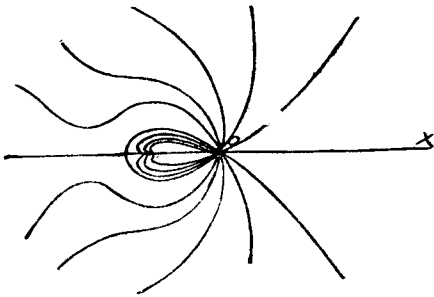
$$q = V_0 b^2 \omega$$

через телесный угол ω при точке O , соответствующей внутреннему объему гидрокона; но вычислить его по формуле

$$\omega = \int \int \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot d\delta$$

может оказаться делом очень трудным, если заданное сечение — более сложная кривая, чем окружность, как было нами предположено выше.

Если бы при точном вычерчивании труба оказалась не вполне удовлетворительной по внешности или, по проверке экспериментом, дала бы недостаточно хорошие результаты, то ее очертания можно изменить путем некоторого осложнения течения, помощью которого она получается. Ее, например можно несколько спрямить, на протяжении OF , OG (фиг. 6), введя дополнительный поглотитель A на отрицательной части осп x . Тогда течение от источника O при слабом поглотителе A будет иметь, примерно, вид, изображенный на фиг. 7. При этом часть



Фиг. 7.

линий тока с общим расходом, равным поглощаемому в точке A , потечет в этот центр; остальные рассеются по всему беспредельному пространству. Между точками O и A скорость направлена влево, равно как на всем протяжении — ∞B ; на участках BA и Ox течение направляется вправо. На участке OA скорость, весьма большая в его концах, в некоторой точке имеет минимум; если отношение поглощаемого количества воды в точке B

к расходу источника мы обозначим через μ , то полная величина скорости в какой-либо точке оси, отстоящей на расстоянии r от O , будет иметь величину

$$V = M \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{(a-r)^2} \right),$$

где M есть отношение к 4π полного расхода источника, a — расстояние между источником и поглотителем.

Легко находим, что минимум V имеет место при

$$r = \frac{a}{1 + \mu^{\frac{1}{3}}}, \quad a - r = \frac{a\mu^{\frac{1}{3}}}{1 + \mu^{\frac{1}{3}}};$$

при этом

$$V_{\min} = \frac{M}{a^2} \left(1 + \mu^{\frac{1}{3}} \right)^3.$$

Если мы теперь прибавим к нашему течению постоянный поток слева из бесконечной дали со скоростью $V_0 > V_{\min}$, то картина радикально изменится. Новое течение изображено на фиг. 8.

Мы видим, что в этом случае поглотитель будет питаться за счет бесконечного источника, а весь расход источника, как и в случае, ранее рассмотренном, будет уходить вдаль вправо от источника; в пространство, определяемое вращением кривой DCE , не попадает ничего из потока, но здесь протекает вся жидкость, подаваемая источником. Таким образом, внутри этой граничной поверхности все обстоит аналогично тому, как было указано в подробном анализе, приведенном ранее. Но вид линий тока, конечно, несколько изменится: они наклонятся влево и изогнутся несколько в этом направлении, а стало быть, будут прямее, так сказать, в частях OF , OG , прилежащих к источнику.

Весь анализ, само собою разумеется, осложняется, но трудностей интеграции по существу не возникает, хотя интеграл для определения расхода должен оказаться значительно сложнее.

Я не буду проводить всего анализа, но укажу вид соответствующих формул для потенциала скоростей φ , функции тока ψ и проекций скорости u , v , w на оси x , y , z :

$$\begin{aligned} \varphi &= v_0 \left(x - \frac{b^2}{r} + \mu \frac{b^2}{r_1} \right), & v_0 b^2 &= M; \\ \psi &= v_0 \left[\frac{s^2}{2} - \frac{b^2 x}{r} + \mu \frac{b^2 (x+a)}{r_1} \right], & 4\pi M &= Q; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + s^2, & r_1^2 &= (x+a)^2 + s^2, & s^2 &= y^2 + z^2; \\
 u &= v_0 \left(1 + \frac{b^2 x}{r^3} - \mu \frac{b^2 (x+a)}{r_1^3} \right); \\
 v &= v_0 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{\mu}{r_1^3} \right) y b^2; \\
 w &= v_0 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{\mu}{r_1^3} \right) z b^2.
 \end{aligned}$$

Полная скорость определяется формулой

$$V^2 = v_0^2 \left[1 + \left(\frac{b^4}{r^3} - \frac{\mu b^4}{r_1^3} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{r_1} \right) + \frac{a^2 \mu b^4}{r^3 r_1^3} + \frac{2b^2 x}{r^3} - \frac{2b\mu^2 (x+a)}{r_1^3} \right].$$

Приравняв в выражении ψ $y=0$, $s=z$, мы соотношением $\psi = \text{const}$ определяем семейство лежащих в этой плоскости линий тока, по отношению к которому и надлежит вести дальнейшее исследование, следуя вышеприведенному для более простого случая приему.

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА ПОЛЕТУ СНАРЯДОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ОЧЕРТАНИЯМИ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ

Задача о сопротивлении воздуха, вообще говоря, разделяется на две существенно различные части. Первую часть задачи составляет определение функции скорости, вторую — определение влияния формы летящего тела.

Эти задачи по существу связаны между собою, но решить их совместно удается лишь при таких условиях, которые довольно далеки от задач артиллерии. Мне удалось поставить точно анализ задачи о движении потока, брошенного на пластинку, с которой он срывается. Применение точного анализа к артиллерийскому снаряду совершенно, по моему мнению, превосходит силы современного анализа, не говоря уже о моих собственных силах. Поэтому приходится разбивать задачу.

Тот доклад, который я теперь делаю, касается выделенного вопроса о форме снаряда, отказываясь от сжатия воздуха, который и влияет на функцию скорости, так как для воды квадрат скорости может применяться в очень широких пределах, может быть даже во всей широте должен применяться.

Решить задачу о влиянии формы снаряда на сопротивление можно в двух различных направлениях. Можно ставить плоскую задачу и решить ее совершенно точным анализом, но не задавая наперед точного контура, который определяется вместе с решением задачи. Это не то, что желательно, так как желательно дать наперед контур и с него срывать струю. Но в той формуле, которая мною найдена, имеется весьма большое число коэффициентов, которые имеют известное соотношение с некоторыми физическими обстоятельствами и позволяют предусматривать характер очертания и, пользуясь этими коэффициентами, подбирать очертание, чтобы оно было похоже на то, которое имеется.

Общий характер очертания такой, что можно дать спереди точку заострения с определенным углом между касательными; угол этот можно задавать. Стенки можно свести так, что струя будет сбегать, наклоняясь внутрь, а затем расширяться, уходя в бесконечность. Будет то явление, которое в действительности наблюдается, когда происходит срыв струи с этих тел.

Общий характер решения такой, что я, пользуясь теорией мнимого переменного, изображаю поток на верхней полуплоскости мнимого переменного, из которой вырезан некоторый полукруг. Оказывается, тогда можно, при

помощи простых рациональных функций и их интегралов, получить изображение на этой полуплоскости мнимого переменного — потенциальной функции скоростей и линий тока.

Для того чтобы в действительности построить кривые и вычертить контуры, нужно произвести вычисления. Сделать это я был лишен возможности за неимением вычислителя.

Любопытно вот что: получился неожиданный результат — возможно такое очертание, что хотя поток с формы срывается, но все-таки давление его получается равным нулю¹⁾. (Тут, конечно, не принято во внимание трение и волнообразование.) Любопытно было бы построить модель, подходящую под это очертание, и посмотреть, насколько действительное давление будет мало. До некоторой степени получены намеки на выгодное очертание.

Разумеется, для того чтобы иметь решение настоящее, надо иметь пространственную задачу, а не плоскую, и мне хотелось поставить их в связь и посмотреть, насколько влияет уплощение потока на результат решения. Благодаря тому, что я напал на счастливую мысль (на которую меня толкнул В. М. Трофимов) обследовать параболические очертания, я получил возможность в этом частном случае сравнить плоскую и пространственную задачу и нашел таким образом любопытный результат. Я ставлю на первый раз задачу как будто бы совершенно нереальную, именно рассматриваю параболоид эллиптический, бесконечно длинный, и на него устремляю поток. Параболоид довольно узкий. Смысл задачи: представить приближенно струйное течение так, что передняя часть параболоида представляет не что иное, как головку летящего снаряда, а остальная его поверхность — поверхность срывающихся струй. Чтобы приближение было удовлетворительное, нужно, чтобы скорость мало менялась на струе. Когда высота головки равна $\frac{7}{4}$ калибра, условие это удовлетворяется, а если высота еще больше — еще лучше. Скорость на срывающейся струе не точно равна скорости потока в бесконечной дали от снаряда, но отклонение достигает всего только 1% у самого края. Вообще, ожидать большей точности, ближе чем в 1%, совершенно невозможно. Задача о снаряде с параболической головкой оказывается решенной с достаточным приближением.

У меня получается коэффициент $k = 0.04$, вместо 0.25 у В. М. Трофимова (несжимаемая жидкость и решение задачи без волн).

Любопытно, насколько нужно ожидать отклонения от числовых коэффициентов. Численный коэффициент выходит особый для всякой определенной высоты головки.

Коэффициент $k = A \lg^2 \alpha_1 \cdot \lg \frac{1}{\sin \alpha_1}$, где α_1 — угол между касательной в точке схождения потока с головки и направлением набегающего потока.

Чрезвычайно простое выражение получилось для скорости на поверх-

¹⁾ Всюду я рассматриваю избыточное давление над атмосферным.

ности обтекаемого параболоида. Скорость есть не что иное, как проекция бесконечно удаленной скорости на касательную к струе:

$$v = v_0 \cos \alpha.$$

Вследствие этого получается, что, собственно говоря, давление выходит пропорционально квадрату $\sin \alpha$; таким образом, в этом случае мы приближаемся к формуле Ньютона.

Функция скорости — прямо квадрат. Иного ничего и выйти не могло, ибо для несжимаемой жидкости без трения, кроме квадрата скорости, ничего и ожидать невозможно.

Для того чтобы рассмотреть, какое средство между задачами плоскими и пространственными, я рассмотрел еще плоскую задачу: плоско-параллельный поток обтекает преграждающую ему путь часть боковой поверхности параболического цилиндра, с которой он затем срывается. Потенциал скоростей получается вида $v_0(z + k\sqrt{z})$. Скорости и для поверхности параболического цилиндра будут те же самые, что и для параболоида, т. е. $v_0 \cos \alpha$. Но в определении силы сопротивления имеется существенная разница. На цилиндре давления малые распределяются на такие же (по величине) элементарные площади, как и большие давления, тогда как на теле вращения малые давления, соответствующие краям, распределяются на большую площадь, а большое давление в лобовой части — на меньшую площадь. Поэтому для параболоида коэффициент k получается 0.04, а для параболического цилиндра 0.10, т. е. в $2\frac{1}{2}$ раза больше.

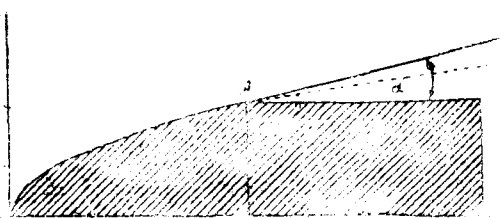
Вообще, в столь сложной задаче, как сопротивление воздуха полету снарядов, можно идти весьма различными путями, так как и природа сопротивлений также различна: трение, волнообразование, срыв струй, сбегающие вихри и т. п. Один из таких путей, которые я себе хотел наметить, есть идея о поглощающих вихрях.

Перехожу теперь к краткому изложению математической части произведенных мною работ.

Принятые в артиллерии способы для вычисления силы сопротивления по формуле Ньютона и ее заменяющим представляются в высшей степени неточными, не дают и не должны давать удовлетворительных результатов. Повидимому, более близкий к истине результат получится, если в формулах изменять силу давления на элемент поверхности снаряда пропорционально первой степени $\cos \alpha$ угла нормали элемента с направлением скорости потока. Но и тогда, если совершенно не принять во внимание характера течения, результат не может представлять какую-либо точность. Представляется загадочным, отчего отношение сил давлений, определенных столь несовершенным приемом, оказывается соответственным опытам.

Чтобы показать, насколько далека по своему виду рациональная формула

для силы сопротивления от того результата, который получается обычным приемом, рассмотрим один пример, приводимый В. М. Трофимовым в его докладе Артиллерийскому комитету—«О влиянии формы головной части снаряда на сопротивление воздуха». Я говорю о случае, когда головная часть очерчена поверхностью параболоида вращения, причем уравнение производящей параболы $y^2 = 2px$, высота головки $OC = H = h \cdot 2AC =$



Фиг. 1.

$= h \cdot 2B$, а по уравнению параболы тогда $R = 4ph$, $H = 8ph^2$ (фиг. 1).

По формуле В. М. Трофимова будем иметь

$$(a) \quad k = \frac{F}{\pi R^2 v_0^2} = \frac{1}{8h^2} (\sqrt{16h^2 - 1} - 1) = 2 \lg^2 \alpha_1 \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} - 1 \right],$$

если через α_1 обозначим угол, составляемый касательной в точке перехода от головки к цилиндрической части с осью снаряда.

Потенциальную функцию течения определяем как предел функции, соответствующей эллипсоиду вращения, ось которого неограниченно возрастает.

Потенциал силы притяжения такого эллипсоида найдем из формулы Дирихле в таком виде:

$$(1) \quad U = \pi ab^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2 + z^2}{b^2 + s} \right] \cdot \frac{ds}{(b^2 + s) \sqrt{a^2 + s}}.$$

Перенесем начало из центра в вершину, для чего вместо x подставим $x - a$, и, заменяя затем s через $a\sigma$, b^2 через ap , будем иметь в пределе при $a = \infty$

$$(2) \quad U = \pi p \int_0^1 \left[\sigma + 2x - \frac{y^2 + z^2}{p + \sigma} \right] \frac{d\sigma}{p + \sigma},$$

где

$$\lim \lambda = \infty, \\ \mu = \lim \frac{\lambda}{a}.$$

Так как λ определялось из формулы

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + \lambda} - 1 = 0,$$

в которой нужно произвести те же замены, то μ определится из уравнения

$$(3) \quad \mu + 2x - \frac{y^2 + z^2}{p + \mu} = 0,$$

которое есть уравнение семейства софокусных параболоидов с переменным параметром $p + \mu$. На поверхности граничного параболоида $\mu = 0$, если начало координат выберем на нем.

Потенциал скоростей в потоке, в бесконечной дали имеющем скорость v_0 в направлении оси X и набегающем на параболоид, обтекаая его поверхность, будет иметь вид

$$(4) \quad \varphi = v_0 x + A^1 \frac{\partial U}{\partial x} = v_0 \left[x + Ap \log \frac{p + \mu}{p} \right],$$

где A — еще подлежащий определению числовой коэффициент. Для проекций скоростей имеем, обозначив для краткости $y^2 + z^2$ через r^2 :

$$(5) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 \left[1 + \frac{Ap}{p + \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right], \\ v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_0 \frac{Ap}{p + \mu} \frac{\partial \mu}{\partial r}, \end{aligned}$$

а из ф-лы (3):

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{r^2}{(p + \mu)^2} \right] \frac{\partial \mu}{\partial x} &= -2, \\ \left[1 + \frac{r^2}{(p + \mu)^2} \right] \frac{\partial \mu}{\partial r} &= \frac{2r}{p + \mu}. \end{aligned}$$

Скорость по нормали к поверхности параболоида будет

$$v_n = \frac{v_x - \frac{r}{p + \mu} v_r}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{(p + \mu)^2}}},$$

а после подстановок

$$v_n = - \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{(p + \mu)^2}}} \left[1 - \frac{2Ap}{p + \mu} \right].$$

Если мы положим $A = \frac{1}{2}$, то для $\mu = 0$ имеем $v_n = 0$, и значит, параболоид будет обтекаться струями на всем своем протяжении.

Выражение квадрата полной скорости на основании ф-л (5) имеет вид

$$V^2 = v_0^2 \left[1 + \frac{2Ap}{p + \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{A^2 p^2}{(p + \mu)^2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} \right)^2 \right] \right],$$

что, по замене

$$A = \frac{1}{2}, \quad \mu = 0,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = - \frac{2}{1 + \frac{r^2}{p^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{2 \frac{r}{p}}{1 + \frac{r^2}{p^2}},$$

даст для поверхности параболоида простую формулу

$$(6) \quad V^2 = v_0^2 \frac{r^2}{r^2 + \rho^2} = v_0^2 \cos^2 \alpha,$$

если α — угол касательной с осью параболоида.

Для давления получаем следующую формулу на основании теоремы Бернулли:

$$(7) \quad P = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} - \rho \frac{v^2}{2} \quad \text{или} \quad P = P_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Выходит, что давление (сверхатмосферное) пропорционально квадрату $\sin \alpha$.

Элементарный поясok $2\pi r ds$, если s — элемент дуги, будет испытывать в направлении OX силу давления

$$P \sin \alpha \cdot 2\pi r ds = P \cdot 2\pi r dr,$$

ибо

$$\sin \alpha = \frac{dr}{ds},$$

и для полной силы F_1 давления на головку получится, в виду свойства параболы,

$$(8) \quad r^2 + p^2 = \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \quad \text{и} \quad r dr = -p^2 \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin^3 \alpha}$$

(p — параметр параболы),

$$F_1 = P_0 \pi R^2 + \pi \rho v_0^2 p^2 \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin^3 \alpha} = P_0 \pi R^2 + \pi \rho v_0^2 p^2 \lg \frac{1}{\sin \alpha_1}.$$

В применении к отрезку параболоида высотой $h = 7/4$ имеем численно

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{p}{R} = \frac{1}{4h} = \frac{1}{7},$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{50}},$$

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{1 - 0.02}.$$

Значит, скорость в точке схода

$$v_1 = v_0(1 - 0.01)$$

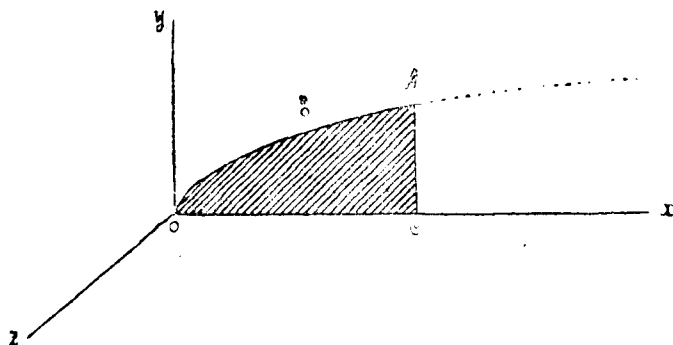
отличается лишь на 1% от скорости v_0 .

Давление же в той же точке

$$P = P_0 + \frac{1}{50} \frac{\rho v_0^2}{2}$$

в 50 раз меньше давления в вершине (где $\sin \alpha = 1$).

Чтобы оценить ф-лу (8), рассуждаем так: точное решение задачи получилось бы, если бы мы сумели найти срывающийся с головки поток, причем поверхность разрыва должна заменить часть поверхности параболоида, обозначенную на фиг. 1 и 2 пунктиром. Решение такой задачи неизвестно, но за приближение можно с большим правом принять указанные выше течения; ибо при сколько-нибудь длинной головке, как в примере В. М. Тро-



Фиг. 2.

фимова, скорость на пунктирной части поверхности, определяющаяся ф-лой (6), стремится к постоянной величине v_0 в виду близости $\cos \alpha_1$ к 1. Для применения ее к рассматриваемому случаю, надо лишь отбросить первый член $P_0 \pi R^2$, в виду уравновешения атмосферного давления спокойной жидкостью позади снаряда, и тогда находим из (8)

$$(9) \quad k = \frac{F_1}{\pi \rho R^2 v_0^2} = \frac{p^2}{R^2} \lg \frac{1}{\sin \alpha_1} = \lg^2 \alpha_1 \lg \frac{1}{\sin \alpha_1},$$

вместо получаемого по (а)

$$(a) \quad k = 2 \lg^2 \alpha_1 \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} - 1 \right].$$

Для рассматриваемого случая имеем числа: по (9)

$$k = \frac{1}{98} \lg 50 = \frac{1}{98} [\lg 2 + 2 \lg 5] = 0.04^1)$$

и по (а)

$$k = 0.25.$$

¹⁾ По формуле

$$\lg \frac{1+u}{u} = 2 \left[\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{3(2u+1)^3} + \frac{1}{5(2u+1)^5} + \dots \right]$$

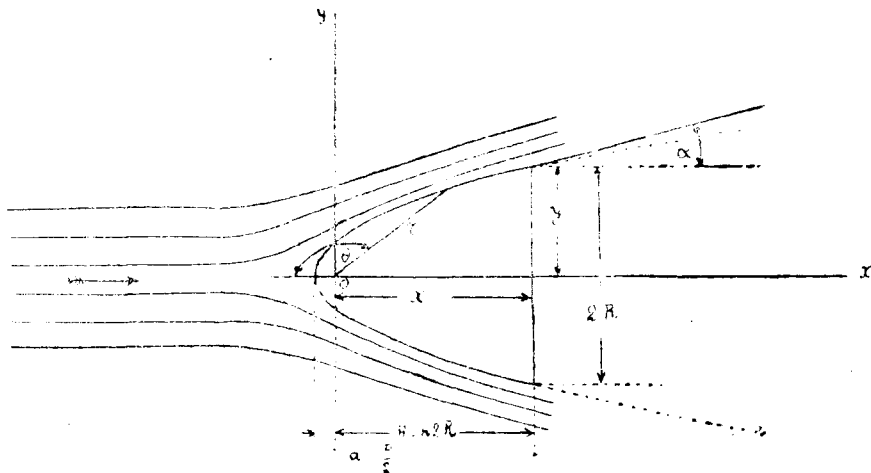
имеем

$$\lg 2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right],$$

$$\lg 5 = 2 \lg 2 + 2 \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \dots \right]$$

$$k = \frac{1}{98} \left[5 \lg 2 + \frac{4}{9} \right] = \frac{1}{98} \left[\frac{10}{3} + \frac{10}{81} + \frac{4}{9} \right] = 0.04.$$

Для сравнения рассмотрим еще плоскую задачу: плоскопараллельный поток обтекает преграждающую ему путь часть боковой поверхности параболического цилиндра, ось которого перпендикулярна к плоскости потока; поток затем срывается с цилиндра.



Фиг. 3.

Уравнение параболы в полярной системе координат, отнесенной к полярной оси OX и к полюсу O (фиг. 3):

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{a}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

или

$$(10) \quad \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{a} = 0.$$

Берем за функцию тока

$$(11) \quad \Psi = 2v_0 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \left[\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} - \sqrt{a} \right] = v_0 \left[r \sin \theta - 2\sqrt{a} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right].$$

Тогда линия тока $\Psi = 0$ будет состоять из отрицательной части оси абсцисс $\left[\sin \frac{\theta}{2} = 0 \right]$ и параболы (1).

Для определения потенциала скоростей возьмем следующую функцию комплексной величины $z = x + yi$:

$$F(z) = v_0 (z - 2\sqrt{a} \sqrt{z}).$$

На основании свойств комплексных величин имеем

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r e^{i\theta},$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

и

$$F(z) = v_0 \left\{ r \cos \theta - 2 \sqrt{a} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + i \left[r \sin \theta - 2 \sqrt{a} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\}.$$

Раскладывая $F(z)$ на две части: вещественную и мнимую

$$F(z) = \varphi + \Psi i,$$

найдем для потенциала скоростей:

$$\varphi = v_0 \left[r \cos \theta - 2 \sqrt{a} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

и для функции тока — указанное выше (11).

Выражения для скоростей потока u и v получим непосредственно, взяв производную от $F(z)$ и отделяя часть действительную от части мнимой:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} i = u - vi = \frac{\partial F}{\partial z},$$

ибо $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, как следствие ортогональности линий эквипотенциальных $\varphi = \text{const}$ и линий тока $\Psi = \text{const}$,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= v_0 \left[1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z}} \right] = v_0 \left[1 - \frac{\sqrt{a} \sqrt{z}(x - yi)}{r^2} \right] = \\ &= v_0 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \left[\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right] \right\}, \\ u &= v_0 \left[1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \right], \\ v &= -v_0 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Выражение квадрата полной скорости

$$V^2 = v_0^2 \left[1 - 2 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{a}{r} \right]$$

на параболе, в виду (10), будет иметь вид

$$V^2 = v_0^2 \left[1 - \frac{a}{r} \right].$$

На основании свойств параболы

$$r = x + \frac{p}{2} = \frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2} = \frac{y^2 + p^2}{2p}$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y},$$

он преобразовывается в (12):

$$(12) \quad V^2 = v_0^2 \frac{y^2}{y^2 + p^2} = v_0^2 \cos^2 \alpha,$$

т. е. и скорость струи на поверхности обтекаемого параболического цилиндра равна проекции на касательную к струе скорости потока в бесконечной дали.

Для давления получим выражение

$$P = P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho V^2}{2} = P_0 + \frac{\rho a v_0^2}{2r}.$$

Полная сила давления потока на цилиндр

$$\begin{aligned} F_2 &= \rho a v_0^2 \int_0^{y_1} \frac{\sin \alpha \, ds}{r} = \rho a v_0^2 \int_0^{y_1} \frac{dy}{r} = \\ &= \rho v_0^2 p^2 \int_0^{y_1} \frac{dy}{y^2 + p^2} = \rho v_0^2 p \operatorname{arctg} \frac{y_1}{p} \end{aligned}$$

и окончательно

$$F_2 = \rho v_0^2 p \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right].$$

Коэффициент k

$$k = \frac{F_2}{2\rho R v_0^2} = p \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha_1}{2R} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right).$$

При размере цилиндра $H = \frac{7}{4} \cdot 2R$ численная величина коэффициента выходит

$$k = \frac{1}{14} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \right] = \text{около } \frac{1}{14} \left[\frac{1}{2} \frac{22}{7} - \frac{1}{7} \right] = \text{около } \frac{5}{49} \sim 0.10.$$

О ДАВЛЕНИИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА НА ПРЕГРАЖДАЮЩИЕ ТЕЛА (К ТЕОРИИ АЭРОПЛАНА)

§ 1. Введение. Одним из существенных вопросов в теории аэроплана является вопрос о давлении воздуха на крыло. Решить эту задачу во всей ее сложности представляется делом весьма трудным и едва ли посильным современному анализу. А потому представляется не лишенным интереса, хотя приблизительно, выяснить источники возникновения давления на поддерживающие планы и оценить при этом связь между углами их наклона к направлению движения и подъемною силою.

С указанною целью мы ставим следующую задачу: невихревой поток несжимаемой жидкости течет параллельно плоскости с определекою постоянною скоростью в бесконечной дали. Определить его давление на преграждающий цилиндр или изогнутую пластинку. То обстоятельство, что мы рассматриваем, вместо воздуха, несжимаемую жидкость, не играет существенной роли, так как нам удалось показать, что при скоростях, далеких от скорости звука в воздухе, его сжимаемость не имеет значения (см. нашу работу «О газовых струях» в Уч. зап. Моск. унив., 1903).

Если бы потенциал скорости представлял однозначную непрерывную функцию во всей области, занятой жидкостью, то, по теореме Эйлера, полное давление на преграждающее тело было бы нулем. По этой причине источниками давления могут быть следующие обстоятельства: во-первых, образование струй (поверхностей раздела скоростей); во-вторых, присоединенные вихри и, в третьих, особенности бесконечно удаленной точки потока и связанная с нею многозначность потенциальной функции скоростей.

Вопрос о давлении на преграждающий цилиндр с образованием струй хорошо выяснен для плоских пластинок даже и в случае сжимаемой жидкости. Закон давления характеризуется для пластинки, с которой срывается несжимаемый поток, как известно, формулой лорда Рэли

$$(1) \quad P = \frac{\pi \sin \lambda}{4 + \pi \sin \lambda} \rho v_0^2,$$

где ρ — плотность жидкости, v_0 — скорость потока в бесконечной дали, l — ширина пластинки, а λ — угол ее с направлением скорости потока; P — полная сила давления.

Проф. Н. Е. Жуковскому удалось найти удобные формулы для выражения поддерживающей силы давления и в том случае, когда поток срывается с несколько изогнутой пластинки, причем, однако, форма ее не может быть наперед задана (см. Дневн. XII Съезда естествоисп. и вр. в 1909-м акад. году). Этому вопросу касался также и доклад автора в Московском математическом обществе несколько лет тому назад, причем были даны формулы для распределения скоростей в срывающемся потоке, и указан путь для определения давления; форма пластинки и в этом решении не могла быть наперед задана.

Переходя к вопросу о втором возможном источнике возникновения поддерживающей силы, открытом проф. Н. Е. Жуковским, необходимо отметить замечательный, по своему изысканию и простоте, закон давления

$$(2) \quad P = \rho C v_0^2,$$

где P , ρ и v_0 имеют те же значения, что и в формуле Рэли, а C есть сумма циркуляций скорости, возникающая вследствие присоединенных вихрей¹⁾.

В настоящей работе я преследую цель вычислить давление, возникающее из третьего источника. Оно обязано своим возникновением циркуляции скорости вокруг бесконечно удаленной точки. В этом случае может совершенно не быть вихрей в области, занятой жидкостью; отсутствуют и воображаемые присоединенные вихри внутри преграждающего цилиндра, который может сводиться к простой изогнутой пластинке.

Тем не менее, давление выражается той же самой формулой проф. Н. Е. Жуковского, в которой под C следует разуметь циркуляцию скорости около бесконечности. Направление поддерживающей силы, как и в случае присоединенных вихрей, перпендикулярно к направлению потока в бесконечной дали. Само собою разумеется, что скорости всюду в потоке остаются конечными и изменяются непрерывно. Если бы при этом потоке существовали стоячие вихревые шнуры, то их присутствие, как оказывается, лишь косвенно повлияло бы на давление, вызывая изменение циркуляции около бесконечно удаленной точки; циркуляции около самих вихрей никакой результирующей силы не вносят.

Формулы, при этом получающиеся, по моему мнению, дают хорошее объяснение действия воздуха на крылья аэроплана и согласуются с наблюдающимися явлениями.

§ 2. Вывод общей формулы для определения слагающих сил давления. Примем за плоскость XU направляющую плоскость потока. Пусть поток прегражден цилиндром определенной формы. Мы можем изобразить область, занятую жидкостью, область мнимого переменного $z = x + iy$, на круге или на верхней полуплоскости вспомогательного мнимого переменного u или на какой-либо иной площади, смотря по удобству в целях простоты решения задачи. При этом контуру цилиндра будет соответствовать гра-

¹⁾ Н. Е. Жуковский. О присоединенных вихрях. Тр. Физ. отд. Общ. любит. естеств., М. 1906.

ница области u , а бесконечно удаленной точке области z — определенная точка области u .

Займемся, прежде всего, разрешением вопроса о давлении потока на цилиндр; при этом, для определенности, будем предполагать, что z изображено на верхней полуплоскости вспомогательного переменного u .

Обозначим через X и Y слагающие полной силы давления на цилиндр. Давление p определяется формулой

$$p = p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} - \rho \frac{v^2}{2},$$

где p_0 и v_0 — давление и скорость в бесконечно удаленной точке, v — переменная скорость в потоке.

Легко находим

$$X = + \frac{\rho}{2} \int v^2 \frac{dy}{ds} ds, \quad Y = - \frac{\rho}{2} \int v^2 \frac{dx}{ds} ds,$$

$$Y + iX = - \frac{\rho}{2} \int v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) v ds,$$

где ds — элемент контура цилиндра, и интеграл взят по этому контуру.

Обозначив через φ потенциал скоростей, через ψ — функцию тока, постоянную на контуре, и через w — мнимое переменное

$$w = \varphi + i\psi,$$

имеем на контуре:

$$v ds = d\varphi = dw, \quad v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) = \frac{dw}{dz},$$

$$(3) \quad Y + iX = - \frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw.$$

Интеграл этот легко выразить через коэффициенты разложения функций z и w около точки полуплоскости u , соответствующей бесконечно удаленной точке потока: $u = u_0$, $z = \infty$, $w = \infty$. В самом деле, z может иметь в области течения лишь единственную особую точку, могущую дать Rés, — это простой полюс при $u = u_0$; для w та же точка является полюсом и вместе с тем логарифмической точкой, так как $\left(\frac{dw}{dz} \right)_{\infty}$ есть конечная величина.

Разложения $\frac{dz}{du}$ и $\frac{dw}{du}$, поэтому, должны иметь вид

$$\frac{dw}{du} = \frac{A}{(u - u_0)^2} + \frac{B}{u - u_0} + f(u - u_0),$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{D}{(u - u_0)^2} + F(u - u_0),$$

где F и f суть голоморфные функции $u - u_0$.

При этих обстоятельствах разложение $\frac{dw}{dz}$ имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho} (u - u_0) + (u - u_0)^2 \Phi,$$

$$\frac{dw}{du} du = \frac{du}{(u - u_0)^2} [A + B(u - u_0) + (u - u_0)^2 f];$$

функция Φ — голоморфна.

Ур-ние (3) по формуле Коши переписывается так:

$$Y + iX = \pm 2\pi i \rho B \frac{A}{\rho}.$$

При выборе знака, необходимо принять во внимание, что при обходе в плоскости z контура в направлении от оси X к оси Y , обход около полюса z (точки u_0) в плоскости u будет совершаться обратно от мнимой оси к действительной; поэтому следует взять знак $+$. Что касается B , то это количество — чисто мнимое, и следовательно, количество

$$-2\pi i B = C$$

циркуляции скорости около бесконечно удаленной точки, есть величина, действительная, обладающая тем же знаком, как и коэффициент мнимой единицы в количестве B .

Что касается $\frac{A}{\rho}$, то оно представляет значение

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty, u=u_0} = v_0 e^{-i\theta_0},$$

где v_0 — скорость потока в бесконечно удаленной точке, а θ_0 — угол направления этой скорости с осью X .

Таким образом получаем

$$(4) \quad \begin{cases} Y + iX = -\rho C v_0 e^{-i\theta_0}, & Y = -\rho C v_0 \cos \theta_0, \\ P = \sqrt{X^2 + Y^2}, & X = +\rho C v_0 \sin \theta_0, \\ P \perp v_0 & \text{и} \quad P = \rho v_0 \bmod (C). \end{cases}$$

Направление давления получается, если мы повернем скорость потока в бесконечности на прямой угол в направлении от оси Y к оси X при C положительном и в противоположном направлении, когда оно отрицательно.

§ 3. Давление в присутствии стоячих вихрей. Ф-ла (4), выведенная в предположении отсутствия вихрей в жидкости, будет справедлива и в том случае, если имеются стоячие вихри (или установившиеся вихревые течения в отдельных конечных областях с замкнутыми линиями тока).

В самом деле, пусть в потоке имеется вихрь в точке $z = z_0$, отображением которой на плоскости u является точка $u = \alpha$ (z_0 и α , конечно, ком-

плексны). Слагающие полной силы давления определяются и в этом случае по ф-ле (3), правая часть которой равна¹⁾

$$-\pi i \rho \left[\int_{\text{Rés}}^{u=\alpha} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} + \int_{\text{Rés}}^{u=u_0} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} \right]$$

Разложение

$$\frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} = \left(\frac{dw}{du} \right)^2 : \frac{dz}{du}$$

в области $u = \alpha$ будет иметь вид

$$\left[\frac{B_1}{u - \alpha} + f_1(u - \alpha) \right]^2 : \{ z' + z''(u - \alpha) + (u - \alpha)^2 M \} = \\ = \frac{1}{z'(u - \alpha)^2} \left\{ B_1^2 + 2B_1 f_1(0)(u - \alpha) - \frac{z''}{z'} B_1^2 (u - \alpha) + (u - \alpha)^2 N \right\},$$

где z' и z'' суть $\frac{dz}{du}$ и $\frac{d^2z}{du^2}$ при $u = \alpha$; f_1 , M , N — голоморфные функции $u - \alpha$.

Таким образом,

$$\int_{\text{Rés}}^{u=\alpha} \frac{dw}{dz} \frac{dw}{du} = \frac{2B_1}{z'} \left\{ f_1(0) - \frac{B_1 z''}{2z'} \right\}.$$

Легко убедиться, что это выражение равно нулю, если вихревой шнур неподвижен. В самом деле, обозначив средние скорости на контуре, окружающем бесконечно малое сечение вихревого шнура, через $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$, имеем

$$\bar{v}_x - i\bar{v}_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dw}{dz} d\lambda,$$

где λ — угол с осью X радиуса вектора из точки z_0 в бесконечно близкую точку; так как

$$d\lambda = \frac{dz}{i(z - z_0)},$$

то

$$\bar{v}_x - i\bar{v}_y = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dw}{z - z_0}$$

по бесконечно малому контуру, окружающему точку $z = z_0$, $u = \alpha$. Пользуясь разложением $\frac{dw}{du}$ в соседстве этой точки

$$\frac{dw}{du} = \frac{B_1}{u - \alpha} + f_1(u - \alpha)$$

¹⁾ Rés — сокращение résidu в смысле, придаваемом этому термину Коши.

и принимая во внимание равенство

$$z - z_0 = (u - \alpha) z' + (u - \alpha)^2 \frac{z''}{1 \cdot 2} + \dots,$$

находим

$$\frac{dw}{z - z_0} = \left\{ \frac{B_1}{(u - \alpha)^2} + \frac{f_1(0)}{u - \alpha} - \frac{B_1}{u - \alpha} \frac{z'}{2z'} + \Phi_1(u - \alpha) \right\} \frac{du}{z'}.$$

При соблюдении выведенного выше условия

$$(5) \quad f_1(0) - B_1 \frac{z''}{2z'} = 0,$$

имеем $\overline{v_x} - \overline{iv_y} = 0$, что и доказывает неподвижность вихря.

То же заключение можно вывести из простого применения принципа динамики о движении центра тяжести: в самом деле, модуль интеграла

$$\int \frac{dw}{dz} dw,$$

взятый по контуру линии тока, охватывающей вихрь, равен силе давления окружающей жидкости на вихрь, умноженной на некоторое постоянное; если центр тяжести вихря неподвижен, то этот интеграл должен обращаться в нуль, а отсюда вытекает условие (5).

Таким образом, ф-ла (4) вполне решает вопрос о силе, поддерживающей цилиндр в потоке, и во всяком отдельном частном случае подлежит отысканию лишь один коэффициент C в зависимости от величин, характеризующих цилиндр и скорость потока.

Обратимся теперь к разрешению различных частных задач.

§ 4. Давление на часть боковой поверхности круглого цилиндра

Пусть в потоке имеется пластинка, представляющая вырез из боковой поверхности круглого цилиндра. Примем за ось OX линию, делящую пополам центральный угол, опирающийся на дугу круга, по которой эта пластинка пересекается с направляющей плоскостью, к ней перпендикулярною.

Обозначив через a радиус дуги, через 2α — центральный угол, стягиваемый дугою ABC , мы изобразим область, занятую жидкостью, на круге радиуса 1 в плоскости мнимого переменного u , положив

$$(6) \quad z = a \frac{h - u}{u(hu - 1)},$$

где $h = \sin \frac{\alpha}{2}$. При этом соответственные точки области z и u на черт-

жах (фиг. 1 и 2) изображены соответственными буквами; точка O' , где $u=0$, соответствует $z=c\sigma$.

Нетрудно убедиться, в самом деле, что на окружности круга, представляющего область u , $\operatorname{mod} z$ равен a ; кроме того, так как

$$(7) \quad \frac{dz}{du} = ah \frac{1+u^2-2hu}{u^2(hu-1)^2}$$

и обращается в нуль при $u = e^{\pm i(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})}$, где $z = ae^{\pm ai}$, соответственно, то полному обходу вокруг точек C и A в области z соответствуют полуобходы около тех же точек области u , что и требуется. Кроме упомянутых точек, особою является еще точка $u=0$, представляющая простой полюс функции z .

Обращаясь к определению возможного непрерывного течения жидкости, вводим мнимое переменное проф. Н. Е. Жуковского:

$$(8) \quad \vartheta + i\theta = \lg \frac{v_0}{v} + i\theta = \lg r_0 \frac{dw}{dz},$$

где v_0 — скорость потока в бесконечно удаленной точке, а r и θ — переменная скорость и ее угол с осью OX . Последняя величина, вполне заданная на контуре, всюду конечная и непрерывная, тем самым определяется во всей области потока. А потому искомое течение возможно лишь при условии одного определенного направления потока в бесконечности. Это

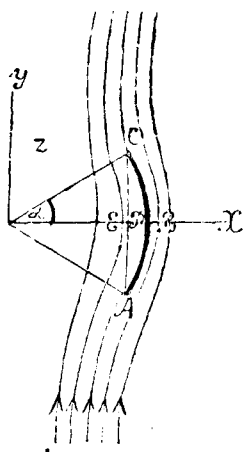
условие, как нетрудно показать, возникает всякий раз, если, при отсутствии вихря, мы имеем на контуре обтекаемого препятствия более одной критической точки такого характера, что контур образует вдающийся в поток угол, меньший полуокружности.

Переходя к определению мнимого переменного

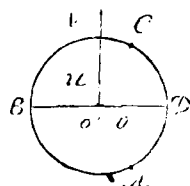
$$w = \varphi + i\psi,$$

обращаем внимание на то обстоятельство, что на граничной окружности области u ψ должно быть постоянно; это постоянное можно принять равным нулю. Бесконечно удаленная точка должна быть полюсом и логарифмической точкою, а в точках C и A $\frac{dw}{du}$ должно обращаться в нуль и при-

том так, что $\frac{dw}{dz}$ имеет конечный модуль.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Всем этим требованиям мы удовлетворим, положив

$$(9) \quad w = Ai \left(\frac{1}{u} - u + 2h \lg u \right),$$

где A реально, так что на граничной окружности

$$w = 2A (\sin \lambda - h\lambda), \quad u = e^{h\lambda};$$

при этом

$$(10) \quad \frac{dw}{du} = -\frac{Ai}{u^2} [1 + u^2 - 2hu]$$

и по (7)

$$(11) \quad \frac{dw}{dz} = -\frac{Ai}{ah} (hu - 1)^2.$$

Коэффициент A определяется из условий движения вдали от пластинки. При

$$z = \infty, \quad u = 0.$$

имеем

$$\frac{dw}{dz} = v_0 e^{-i\theta_0} = -\frac{Ai}{ah},$$

откуда

$$(12) \quad A = v_0 ah, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, в бесконечно удаленных точках жидкость течет в направлении оси OY , т. е. параллельно хорде, стягивающей дугу, на которую опирается пластинка.

Поддерживающая сила давления по ф-ле (4) определяется при помощи (10) и (12) из формулы

$$F + iX = -4\pi a \rho v_0^2 h^2 e^{-i\theta_0}, \quad F = 0, \quad X = 4\pi a \rho v_0^2 h^2,$$

а так как

$$2h^2 = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

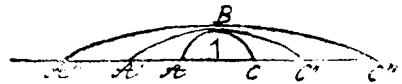
$$a(1 - \cos \alpha) = s,$$

стрелке дуги, то

$$(13) \quad P = X = 2\pi s \rho v_0^2.$$

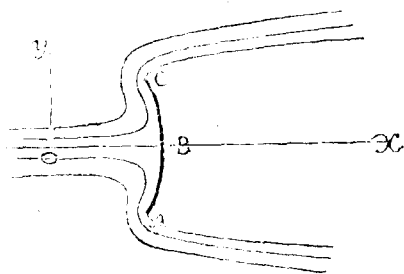
В этой формуле любопытно то, что давление зависит лишь от абсолютной величины прогиба пластинки, и следовательно, при одной и той же стрелке оно будет одно и то же, каков бы ни был радиус. Все пластинки, сечения которых изображены на чертеже (фиг. 3), давление испытывают одинаковое.

Что касается его величины, то она весьма значительна, если угол, стягиваемый дугой пластинки, достаточно велик, и может превзойти ту силу,



Фиг. 3.

которая вызывается срывающимся потоком, стремящимся на ту же пластинку параллельно ее среднему радиусу.



Фиг. 4.

В самом деле, по точной формуле Кирхгоффа мы знаем, что давление на плоскую пластинку при этих условиях равно

$$P_1 = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho l v_0^2 = 0.44 \rho l v_0^2,$$

где l — ширина пластинки. Легко убедиться, что для случая вогнутой пластинки ¹⁾ это давление, равное

$$P' = \frac{1}{2} \rho v_0^2 l - \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v^2 dy,$$

не может превзойти никоим образом предела

$$P_2 = 0.5 \rho l v_0^2,$$

где l — стягиваемая пластинкою хорда.

Давление, вытекающее из ф-лы (13), может быть изображено в виде ²⁾

$$(14) \quad P = \pi \rho l v_0^2 \lg \frac{\alpha}{2},$$

и при центральном угле $2\alpha_1 > 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{4 + \pi}$ превзойдет P_1 , а при $2\alpha_2 = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi}$ окажется равным P_2 и более P' . Первый из этих пределов приблизительно равен 32° , последний 36° .

Обращаясь к определению подъемной силы, приходящейся на один квадратный метр поверхности пластинки в воздухе, легко находим эту силу. При скорости 14 м/сек (50 км/час) она равна (приблизительно)

$$\frac{\pi^2 \cdot 1.292 \cdot 196}{48 \cdot g} \text{ (в метрах)} = 5.3 \text{ кг},$$

при таком изгибе пластинки, что ее центральный угол равен 15° ; при угле в 30° сила эта приблизительно вдвое больше.

¹⁾ Если угол касательной к дуге с хордой не превышает угла $\frac{\pi}{2}$.

²⁾ Во время печатания этой работы проф. Н. Е. Жуковский обратил внимание автора на заметку W. M. Kutta — «Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten» в Illustr. Aéron. Mit., Strassburg, II, 3, 1902, в которой сообщается решение той же задачи; формулы Kutta для функции тока имеют иной (более сложный) внешний вид, но полученное им выражение для силы давления вполне совпадает с (14).

Для наглядности приводим небольшую табличку сил давления $\bar{P}$ на квадратный метр (в килограммах) при скорости 14 м/сек, с соответствующим значением центрального угла 2α и отношения стрелки к хорде $\frac{s}{2c} = k$.

2α	k	$\bar{P}$
15°	1:30.5	5.3
30°	1:15.2	10.6
32°	1:14.2	11.4
36°	1:12.6	12.8

Обратимся к определению скоростей на пластинке. По ф-лам (11) и (12)

$$\frac{v}{v_0} = \cos(1 - he^{\lambda i})^2 = 1 + h^2 - 2h \cos \lambda.$$

Наибольшая скорость $v_0(1 + h)^2$, наименьшая $v_0(1 - h)^2$; скорость в точках входа и схода с пластинки получится, положив $\cos \lambda = h$, и равна $v_0(1 - h^2)$; $h = \sin \frac{\alpha}{2}$. Легко видеть, что скорость эта изменяется в довольно узких пределах при небольшом h .

В заключение этого параграфа укажем формулы, которые разрешают ту же задачу путем изображения области z и соответственной области w на верхней полуплоскости мнимого переменного u или на бесконечной плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми. Эти формулы понадобятся нам для сравнения при разрешении последующих задач.

Нетрудно убедиться, что положив

$$(15) \quad z = 4ain \frac{1}{(u + n - i)(u - n + i)}, \quad z = a - a \frac{u + n + i}{u + n - i} \frac{u - n - i}{u - n + i},$$

$$\frac{dz}{du} = -4ain \frac{n}{(u + n - i)^2 (u - n + i)^2},$$

мы изобразим область z , занятую потоком, на верхней полуплоскости, так что бесконечно удаленная точка действительной оси области u соответствует одному из концов дуги, принятому за начало координат в области z ; ось Y будет касательною к дуге в этой точке. Соответственные точки областей помечены одинаковыми буквами на прилагаемых чертежах (фиг. 5 и 6).

Количество n имеет простое геометрическое значение, а именно $n = s \frac{\alpha}{2}$.

Функция $\frac{dw}{du}$ изобразится в новом переменном формулою

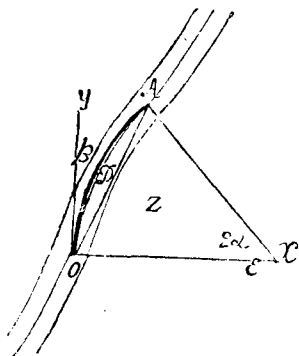
$$(16) \quad \frac{dw}{du} = K \frac{a}{(u + n - i)^2 (u - n + i)^2}.$$

причем K определяется из условия

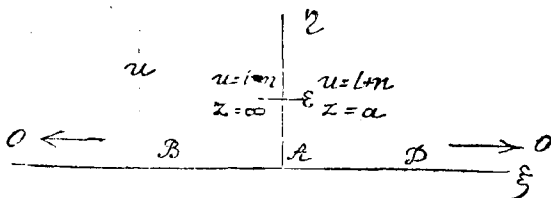
$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{\infty} = v_0 e^{-i\theta_0} = \frac{Ki}{8na} \left| \frac{u-n+i}{u+n+i} \right|^{u=-n+i} = \frac{Ki}{8na} (1+ni)^3;$$

отсюда

$$K = \frac{8nav_0}{1+n^2}, \quad e^{-i\theta_0} = ie^{i\alpha}, \quad \theta_0 = 3\frac{\pi}{2} - \alpha;$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

поток в бесконечной дали направлен параллельно хорде AO , как и следовало ожидать. Затем определяем w :

$$(17) \quad w = \frac{K}{4} \left[\frac{i-n}{u+n-i} - \frac{i+n}{u+n+i} + ni \lg \frac{u+n-i}{u+n+i} \right].$$

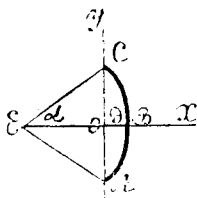
Циркуляция скорости около точки $u = -n + i$, $z = \infty$ есть

$$(18) \quad C = \frac{\pi n K}{2} = 4\pi \frac{n^2}{1+n^2} av_0 = 4\pi av_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4\pi av_0 h^2,$$

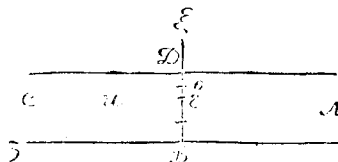
и мы снова приходим к ф-ле (13) для определения силы давления.

Если, наконец, за область u мы примем бесконечную полосу между двумя параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2π , то для изображения области z мы должны воспользоваться Неймановским изотермическим преобразованием и положить

$$(18) \quad z = c \operatorname{tg} \frac{u + \alpha}{2}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{u + \alpha}{2}}.$$



Фиг. 7.



Фиг. 8.

При этом действительная часть переменного $u = \xi + i\eta$ изменяется от 0 до 2π , мнимая — от $-\infty$ до $+\infty$; $\xi = 0$ на выпуклой и равно 2π на вогнутой стороне дуги; $\eta = -\infty$ в точке A и $+\infty$ в точке C ; $z = \infty$ при $u = \pi - \alpha$ и равно нулю при $u = 2\pi - \alpha$ (точка O); центр дуги соответствует $u = \pi - \alpha$ (точка E).

Для $\frac{dw}{du}$ и w легко получаем выражения

$$(19) \quad \frac{dw}{du} = -\frac{icv_0}{2} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2},$$

$$w = -icv_0 \left[\frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{lg} \frac{\sin \frac{\pi - \alpha + u}{4}}{\sin \frac{\pi - \alpha - u}{4}} \right];$$

а отсюда по (18)

$$\frac{dw}{dz} = -iv_0 \left\{ \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{u + \alpha}{2}}{\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} \right\}^2,$$

и при $z = \infty$, $u = \pi - \alpha$

$$\frac{dw}{dz} = -iv_0 = v_0 e^{-i\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Циркуляция около точки $z = \infty$, $u = \pi - \alpha$ определяется ф-лой (19) и равна

$$C = icv_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (-2\pi i) = 2\pi cv_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad *$$

а величина слагающих силы давления найдется из равенства

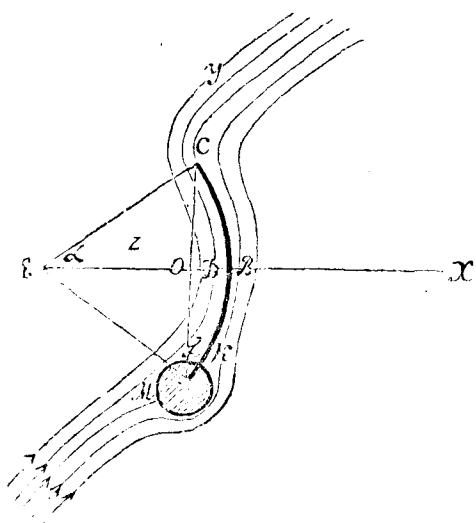
$$Y + iX = -C\rho v_0 e^{-i\theta_0} = 2\pi i\rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2\pi i\rho v_0^2 s,$$

в полном согласии с ф-лой (13).

§ 5. Давление на сложное крыло. Разрешив основную задачу о потоке, непрерывно обтекающем часть боковой поверхности круглого цилиндра, обратимся к исследованию других форм преграждающих цилиндров, позволяющих освободиться от стеснения в выборе направления потока в бесконечной дали. Это стеснение, как я уже имел случай указать, отпадает, если на преграде число критических точек с выдающимися углами менее двух.

Весьма простой и изящный по результатам пример этого рода представляет модель сложного крыла, состоящая из такой же пластинки, изогнутой в форме части боковой поверхности круглого цилиндра, как и в разобранном случае, с добавлением насадка в форме ортогонального к ней цель-

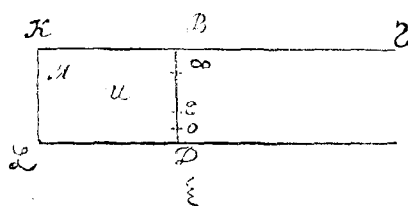
ного цилиндра на одном из концов. Очертание перпендикулярного сечения такого крыла и обтекающих струй представлено на чертеже (фиг. 9). Радиус насадка, конечно, надо предполагать небольшим, так как он должен изображать естественную притупленность передней стороны крыла, реально ни-



Фиг. 9.

когда не имеющей математически острой формы. Присутствие тако о насадка дает возможность ввести лишнее постоянное в функцию w , зависящее от положения критической точки M раздела линии тока на передней стороне сложного крыла.

Область z , занятую текущую



Фиг. 10.

жидкостью, мы изображаем путем Неймановского преобразования на части бесконечной полосы в плоскости мнимого переменного u , положив

$$(20) \quad z = c \left(\lg \frac{u + z}{2} \right),$$

как в ф-ле (18). На границе CBK действительная часть переменного $u = \xi + i\eta$ есть нуль; на линии KML $\eta = -b$, где b — некоторая положительная, очень большая величина; на LDC $\xi = 2\pi$; в точке C $\eta = +\infty$.

Случай, разобранный выше, получится при $b = \infty$.

Зависимость $w = \varphi + i\psi$ от u получится всего проще, если мы изобразим сначала w на полуплоскости вспомогательного переменного s , а затем эту полуплоскость на площади, занятой переменным u .

Для изображения полуплоскости s на площади u достаточно положить

$$(21) \quad s = \frac{\cos \frac{u + ib}{2}}{\cosh \frac{b}{2}},$$

так что

$$s = \infty, \quad u = \pi - x$$

соответствует

$$s = s_0 = m + ni = -\frac{\sin \frac{\alpha + ib}{2}}{\cosh \frac{b}{2}} = -\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tgh} \frac{b}{2},$$

откуда

$$(21') \quad m = -\sin \frac{\alpha}{2}, \quad n = \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tgh} \frac{b}{2}.$$

Затем, имея в виду свойство особой точки s_0 и соблюдая требование реальности w на действительной оси плоскости s , мы определяем w и $\frac{dw}{ds}$ формулами

$$(22) \quad w = \frac{A(s-m) + B}{(s-m)^2 + n^2} + K \lg \frac{s-m-ni}{s-m+ni},$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{A - 2Kn}{(s-m)^2 + n^2} - \frac{2(s-m) \cdot A(s-m) - B}{[(s-m)^2 + n^2]^2}.$$

Так как

$$(23) \quad s = \frac{1}{u} = \frac{\sin \frac{u + ib}{2}}{\cosh \frac{b}{2}}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{c}{2 \cos^2 \frac{u + i\alpha}{2}};$$

$$\frac{ds}{dz} = \frac{1}{c \cosh \frac{b}{2}} \cos^2 \frac{u + \alpha}{2} \sin \frac{u + ib}{2},$$

причем

$$\frac{ds}{s^3 dz} = -\frac{\cosh^2 \frac{b}{2}}{c} \frac{\cos^2 \frac{u + \alpha}{2} \sin \frac{u + ib}{2}}{\cos^3 \frac{u + ib}{2}},$$

конечно при $s = \infty$, $\eta = \infty$, а стало быть, $\frac{ds}{dz}$ обращается в этом случае в бесконечность порядка s^3 , то условием конечности в этом месте скорости является требование, чтобы коэффициент при $\frac{1}{s^2}$ в разложении $\frac{dw}{ds}$, определяемой последней из ф-л (22), был равен нулю.

Таким образом, мы имеем

$$(24) \quad A - 2Kn - 2A = 0, \quad K = -\frac{A}{2n},$$

и затем

$$(25) \quad \frac{dw}{ds} = 2 \frac{An^2 - B(s-m)}{[(s-m)^2 + n^2]^2}.$$

Обратимся к отысканию величины скорости и направления потока в бесконечной дали; для этого, обозначив через N количество

$$(25') \quad N = \frac{An^2 + Bm}{B} \cosh \frac{b}{2},$$

отыскиваем из (25) и (26) при помощи (21):

$$\lim_{z=\infty} \frac{dw}{dz} = v_0 e^{-i\theta_0} =$$

$$= \frac{2B \cos \frac{\alpha - ib}{2}}{c \cosh^2 \frac{b}{2}} \left\{ N + \sin \frac{\alpha - ib}{2} \right\} \lim_{u=\pi-\alpha} \left[\frac{\cos \frac{u+\alpha}{2}}{(s-m)^2 + n^2} \right]^2.$$

Легко находим, подставляя m и n :

$$- \cosh \frac{b}{2} (s - m - ni) = \cos \frac{u+ib}{2} - \cos \frac{\pi-\alpha+ib}{2} =$$

$$= -2 \sin \frac{u-\pi+\alpha}{4} \sin \frac{u+\pi-\alpha+2ib}{4};$$

$$- \cosh \frac{b}{2} (s - m + ni) = \cos \frac{u+ib}{2} - \cos \frac{\pi-\alpha-ib}{2} =$$

$$= -2 \sin \frac{u+\pi-\alpha}{4} \sin \frac{u-\pi+\alpha+2ib}{4},$$

а отсюда

$$\cosh^2 \frac{b}{2} [(s-m)^2 + n^2] = \left(\cos \frac{u}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{u+2ib}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\lim_{u=\pi-\alpha} \frac{\cos \frac{u+\alpha}{2}}{(s-m)^2 + n^2} = \frac{i \cosh^2 \frac{b}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha-ib}{2} \sinh \frac{b}{2}};$$

таким образом, подлежащий определению предел получает вид

$$(26) \quad v_0 e^{-i\theta_0} = \lim \frac{dw}{dz} = - \frac{B \coth^2 \frac{b}{2} N + \sin \frac{\alpha-ib}{2}}{2c \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha-ib}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$(27) \left\{ \begin{aligned} B &= -2v_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tgh}^2 \frac{b}{2} \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}}}{\sqrt{\Lambda^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}}} \\ \theta_0 &= \theta_1 + \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tgh} \frac{b}{2}, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{b}{2}}{N + \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2}}; \\ \operatorname{tg} \theta_r &= -\frac{\sinh \frac{b}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \frac{N \sin \frac{\alpha}{2} + \cosh \frac{b}{2}}{N \cosh \frac{b}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Из формулы для $\operatorname{tg} \theta_0$ ясно, что при изменении коэффициента N от $+\infty$ до $-\infty$, θ_0 может приобретать всевозможные значения в пределах μ и $\pi + \mu$.

Обратимся к исследованию положения критической точки M и распределения скоростей на крыле.

Что касается точки M , то ее место определяется корнем ур-ния (25), которое дает для определения соответственного u соотношение

$$(28) \quad N + \cos \frac{u + ib}{2} = 0;$$

количество N определяется величиною угла падения. Пока

$$-1 < N < 1,$$

точка M лежит на насадке, ибо ур-ние (28) при этом условии имеет корень

$$u = \xi - ib, \quad \cos \frac{\xi}{2} = -N;$$

при крайних значениях ± 1 для коэффициента N интересующая нас точка оказывается совпадающей соответственно с точкою L или K .

Если N выходит из указанных пределов, то критическая точка раздела M находится на вогнутой стороне крыла при $N > 0$ и на выпуклой в противоположном случае.

Скорость потока на выпуклой поверхности пластины крыла получится если мы составим модуль

$$\frac{dw}{dz} \quad \text{при } s = -\frac{\cosh \frac{\eta + b}{2}}{\cosh \frac{b}{2}},$$

где η изменяется от b до ∞ ; а для вогнутой стороны мы должны положить

$$s = - \frac{\cosh \frac{\eta + b}{2}}{\cosh \frac{b}{2}}.$$

Таким образом, мы получаем в этих двух случаях при помощи ф-л (23), (25) и (25'):

$$v = \frac{2\sqrt{B^2}}{c} \cosh^2 \frac{b}{2} \frac{\left(\cosh \frac{\eta}{2} \pm \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cosh \frac{\eta + b}{2} \pm N \right) \sinh \frac{\eta + b}{2}}{\left(\cosh \frac{\eta}{2} \mp \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cosh \frac{\eta + 2b}{2} \mp \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2},$$

где верхний знак соответствует выпуклой и нижний вогнутой стороне крыла. В точке схода $\eta = \infty$ и

$$v = v_1 = \frac{2\sqrt{B^2}}{c} \cosh^2 \frac{b}{2} e^{-b} = \\ = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sinh^2 \frac{b}{2} e^{-b} \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}}}{\sqrt{N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}}} v_0;$$

при $b = \infty$ пасажок исчезает, и мы получим формулу, найденную выше:

$$v_1 = v_0 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = v_0 (1 - h^2).$$

Скорость v на пластинке, как нетрудно видеть, не будет значительно превышать v_1 и v_0 .

Что касается до скорости на пасадке, то она получится заменив

в модуле $\frac{dw}{dz}$ величину s через $-\frac{\cos \frac{\xi}{2}}{\cosh \frac{b}{2}}$ и определяется формулой

$$v = \frac{2\sqrt{B^2}}{c} \cosh^2 \frac{b}{2} \frac{\left(\cos^2 \frac{\xi + \alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} \right) \left(N + \cos \frac{\xi}{2} \right) \sin \frac{\xi}{2}}{\left(\cos^2 \frac{\xi}{2} - 2 \cos \frac{\xi}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} \right)^2}.$$

Эта скорость в некоторых точках окружности пасадка достигает очень значительной величины, если направление потока в бесконечной дали заметно отстает от направления хорды крыла, и если при этом пасажок невелик (b весьма велико). При воздушном потоке, или, все равно, при

движении крыла в воздухе, эта скорость, при некотором определенном угле θ_0 , достигает скорости звука, после чего возможность установившегося движения стпадает, как мною было показано в сочинении «О газовых струях». Такое обстоятельство может возникнуть, если количество N будет величиною порядка $\cosh \frac{b}{2}$.

Найденная величина скорости достигает своего максимума при значениях ξ , близких к π ; вычислим поэтому v при значениях $\xi = \pi$ и примем ее приближенно за $v_{\max}$. При помощи ф-л (27), в результате весьма несложных преобразований, мы можем придать этому количеству следующий простой вид:

$$v_{\max} = v_{\xi=\pi} = 4v_0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \theta_0 \frac{N \sinh^2 \frac{b}{2} \left(\sinh^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(N \cosh \frac{b}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sinh^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)},$$

откуда, пренебрегая величиною $\sin \frac{\alpha}{2}$ по сравнению с количествами порядка $\cosh^2 \frac{b}{2}$, находим приближенно:

$$v_{\max} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} v_0 \cos \theta_0 = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} v_0 \sin \beta,$$

если через β обозначим угол направления потока в далеких точках с хордою пластинки.

Представим себе крыло с незначительным утолщением на переднем крае моделирующееся пластинкой, вырезанной из боковой поверхности круглого цилиндра и стягивающей центральный угол в 30° , с насадком в один сантиметр в диаметре, причем длина стягивающей хорды равна двум метрам. Легко убедиться, что геометрическое значение b определяется соотношением

$$\sinh b = \frac{c}{\rho},$$

где c , полухорда, и ρ , радиус насадка, в данном случае выражаются (в сантиметрах) числами 100 и 0.5.

Таким образом,

$$\sinh b = 200,$$

откуда приближенно находим

$$\cosh \frac{b}{2} = 10.025,$$

и затем имеем

$$v_{\max} = 40.65 v_0 \sin \beta.$$

Посмотрим, при каких обстоятельствах $v_{\max}$ может равняться скорости звука, соответствующей состоянию газа в том месте, где эта скорость наблюдается. Примем адиабатный закон связи плотности и давления.

Обозначив скорость звука через V , получим

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{v_0^2}{2},$$

откуда, имея в виду равенство

$$\gamma p : \rho = V^2,$$

имеем

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0}{\rho_0} + v_0^2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \sqrt{\frac{7p_0}{6\rho_0} + \frac{v_0^2}{6}},$$

вторым членом перед первым можно пренебречь по его малости, и при обычном состоянии атмосферы мы получим

$$V = 302 \text{ м/сек.}$$

Положив $v_{\max} = V$, из приведенной выше формулы найдем (приблизительно):

$$v_0 \sin \beta = 7.4 \text{ м/сек.}$$

При $v_0 < 7.4$ обтекание рассматриваемого тина возможно при всяком угле наклона, определяемого ϕ -лами (27) до самой его предельной величины $\theta_0 = \mu$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \mu$. Но если v_0 значительно превосходит величину 7.4 м/сек, то уже при гораздо меньших наклонах крыла возможность интересующего нас движения прекращается. Так, при обычной скорости движения аэроплана $v_0 = 14$ м/сек предельный угол β имеет величину около 32° .

При более остром переднем крае предельный угол окажется меньше. Так, если при той же хорде пластинки $\rho = 0.25$ см, то

$$\sinh b = 400, \quad \cosh \frac{b}{2} = 14.15,$$

и предельный угол несколько меньше 23° .

Если наклон крыла окажется более предельного, то должно наступить новое явление — течение с разрывом сплошности.

Обратимся к составлению формулы для слагающих поддерживающей силы.

По ур-ниям (22) и (24) определяем циркуляцию C в направлении часовой стрелки около точки $z = z_0 = m + ni$. Имеем

$$C = -2\pi \frac{A}{2n} = -\pi \frac{A - m \cosh \frac{b}{2}}{n^2 \cosh \frac{b}{2}} B,$$

или, после подстановки m и n из (21'),

$$C = -\pi \frac{N + \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \sinh^2 \frac{b}{2}} \cosh^2 \frac{b}{2} B.$$

Основная формула

$$Y + iX = -\rho C v_0 e^{-i\theta_0},$$

по замене C и B их значениями, дает затем

$$Y + iX = -2\pi \rho v_0^2 \frac{N + \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{b}{2}} \times \\ \times \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}} e^{-i\theta_0}}{\sqrt{N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2}}}.$$

Так как

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sinh^2 \frac{b}{2}, \\ N^2 + 2N \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{b}{2} = \\ = \left(N + \sin \frac{\alpha}{2} \cosh \frac{b}{2} \right)^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sinh^2 \frac{b}{2},$$

то, при помощи ф-л (27), это соотношение легко приводим к следующему весьма простому виду:

$$Y + iX = -2\pi \rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \theta_1}{\sin \mu} e^{-i\theta_0}.$$

или, введя в формулу угол β , образуемый направлением потока в ∞ с хордою OY , к виду

$$Y + iX = -2\pi \rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu} e^{-i\theta_0},$$

ибо

$$\theta_1 = \theta_0 - \mu = \frac{\pi}{2} - \beta - \mu.$$

Полная подъемная сила

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

попрежнему перпендикулярная к потоку, определяется формулой

$$(29) \quad P = 2\pi \rho v_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu}$$

и совпадает при $\beta = 0$ с тою величиною, которая соответствует отсутствию насадка, так как $c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ — есть стрелка пластины.

Таким образом, при условии параллельности хорды направлению потока в далеких точках, или, все равно, направлению движения крыла в спокойном воздухе (когда возможно установившееся непрерывное обтекание пластины без насадка), *поддерживающая сила давления несколько не зависит от величины насадка на переднем краю.*

Второе важное замечание, которое мы можем сделать по поводу полученной формулы, состоит в следующем: *подъемная сила быстро падает при наклоне крыла вперед по направлению движения, и при некотором угле, $\beta = -\mu$, оказывается равной нулю, а затем извращается в прямо противоположную давящую сверху силу.*

Этот критический угол зависит от конструкции крыла и ни от чего более. Легко дать геометрическое построение угла μ . В самом деле, мы уже заметили значение количества b :

$$\sinh b = \frac{c}{\rho};$$

но

$$\rho = OF \operatorname{tg} \gamma = c \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

и следовательно,

$$\sinh b = \cot \gamma; \quad \cosh b = \frac{1}{\sin \gamma},$$

$$\operatorname{tgh} \frac{b}{2} = \frac{\sinh b}{\cosh b + 1} = \frac{\cos \gamma}{1 + \sin \gamma};$$

а так как $OG' = \frac{c}{\cos \gamma}$, то

$$\operatorname{tgh} \frac{b}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\cos \gamma} + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{c}{OG' + \rho} = \frac{c}{OH};$$

а по (27) имеем

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tgh} \frac{b}{2} = \frac{c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{OH} = \frac{OG}{OH}.$$

Отметим на хорде OY точку H' , симметричную с H по отношению к Θ ; соединив H' с G , мы получаем

$$\mu = \angle GH'O,$$

а для давления P находим формулу

$$P = 2\pi \rho v_0^2 GH' \sin \sigma,$$

где σ — угол направления потока, отмеченного стрелкою на чертеже (фиг. 11) с направлением GH' .

Полученные результаты применимы до тех пор, пока возможно установившееся течение рассмотренного типа, для чего угол θ_0 не должен превышать предельного угла, пример вычисления которого дан выше. При центральном угле $2\alpha = 30^\circ$, таким образом, мы получим постепенно возрастающую по закону $\sin$ поддерживающую силу, пока угол β заключен между $-7^\circ 30'$ и $+23^\circ$, если утолщение переднего края не превышает $1/100$ полу-

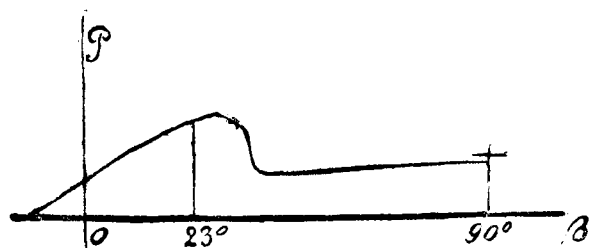
хорды ($v_0 = 14$ м/сек). Относительно последней величины следует, однако, заметить, что при близости к ней угла β наступают особые обстоятельства, а именно, характер потока воздуха около насадки будет значительно раз-

ниться от течения несжимаемой жидкости; это, впрочем, едва ли значительно повлияет на давление, в виду малости периметра насадка и характера распределения на нем скоростей. При $\beta > 23^\circ$, вероятно, позади крыла около насадка образуется замкнутая область спокойной жидкости, несущаяся вместе с крылом и в случае вязкой жидкости заменяющаяся сопутствующим вихрем; при углах, близких к прямому, должно ожидать разрывного течения обычного типа (типа Рэли); поддерживающая сила при этом должна значительно упасть по сравнению с той величиной, которой она достигает при предельном угле. Так, при разрывном потоке с образованием сбегающих струй, в случае $\beta = \frac{\pi}{2}$, оно выражается формулой

$$P_1 = 2k\rho v_0^2 c,$$

где k лежит между 0.44 и 0.5, в то время как при $\beta = 23^\circ$ мы имеем

$$P = 2\pi\rho v_0^2 c \cdot \lg 7^\circ 30' \cdot \frac{\sin 30^\circ 30'}{\sin 7^\circ 30'}$$



Фиг. 12.

и $P:P_1$ близко к 3.

Кривая изменения давления, с возрастанием угла, должна поэтому иметь приблизительно такой вид, как на чертеже фиг. 12.

§ 6. Крыло с одной критической точкой возврата. Рассмотрим подробно

сложное крыло определенной формы, на котором мы остановились с особым вниманием в виду простоты и ясности получаемых результатов, укажем

далее некоторые формы крыльев, напоминающие крылья птиц, с непрерывными и мягкими обводами и лишь с одной точкою заострения.

Простейшая форма этого рода получится, если мы, изображая область z потока на верхней полуплоскости мнимого переменного u , примем для функции z и ее производной значения, близкие к ф-лам (15) § 4. Именно, положим

$$(30) \quad \frac{dz}{du} = -8ain \frac{u+i\epsilon}{(u+n-i)^2 [u-n+i(1+2\epsilon)]^2},$$

$$z = 4ain \frac{1}{(u+n-i)[u-n+i(1+2\epsilon)]},$$

где ϵ — весьма малое количество.

Соответствующее течение характеризуется функциями

$$(31) \quad \frac{dw}{du} = N \frac{u-b}{(u+n-i)^2 (u+n+i)^2},$$

$$w = \frac{N}{4} \left\{ -\frac{n+b-i}{u+n-i} - \frac{n+b+i}{u+n+i} + (n+b)i \lg \frac{u+n-i}{u+n+i} \right\}.$$

Количество N определяется из условий течения в бесконечной дали:

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty} = v_0 e^{-i\theta_0} = \left\{ \frac{dw}{du} = -\frac{Ni}{8ain} (i-n-b)[i(1+\epsilon)-n] \right\}$$

или

$$v_0 e^{\left(\frac{3}{2}\pi - \theta_0\right)i} = \frac{N}{8ain} [1 + (n+b)i][1 + \epsilon + ni];$$

отсюда

$$(32) \quad N = \frac{8ainv_0}{[1 + (n+b)^2][(1+\epsilon)^2 + n^2]}, \quad \frac{3}{2}\pi - \theta_0 = \beta + \mu;$$

$$\lg \mu = \frac{n}{1+\epsilon}, \quad \lg \beta = n+b.$$

Посмотрим, какой вид имеет крыло, обтекаемое указанным потоком. Для разрешения этого вопроса разделим действительную и мнимую часть во второй из ф-л (30), считая u вещественным; будем иметь

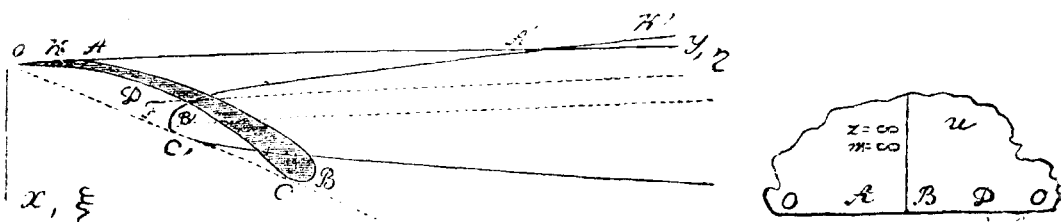
$$x + iy = 4ain \frac{1}{u^2 + 1 - n^2 + 2\epsilon + 2i(\epsilon u + n + n\epsilon)},$$

откуда на контуре крыла получаем

$$\begin{aligned}
 x &= 8an \frac{u\varepsilon + n(1 - \varepsilon)}{(u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2)^2 + 4[u\varepsilon + n(1 - \varepsilon)]^2}, \\
 y &= 4an \frac{u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2}{(u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2)^2 + 4[u\varepsilon + n(1 - \varepsilon)]^2}, \\
 x^2 + y^2 &= 16a^2n^2 \frac{1}{(u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2)^2 + 4[u\varepsilon + n(1 - \varepsilon)]^2}; \\
 4an \frac{x}{x^2 + y^2} &= \xi = 2u\varepsilon + 2n(1 + \varepsilon); \\
 4an \frac{y}{x^2 + y^2} &= \eta = u^2 + 1 + 2\varepsilon - n^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, очертание сечения исследуемого крыла представляет результат инверсии параболы, уравнение которой:

$$(33) \quad 4\varepsilon^2[\eta - 1 - 2\varepsilon + n^2] = [\xi - 2n(1 + \varepsilon)]^2.$$



Фиг. 13.

Чертеж (фиг. 13) поясняет дело. На нем соответственные точки параболы и контура крыла отмечены одинаковыми буквами; O соответствует бесконечно удаленной точке параболы. При $\varepsilon = 0$ парабола обращается в часть прямой, параллельной ее оси, $F\infty$, а сечение крыла превращается в дугу круга, центральный угол которой 2α характеризуется соотношением

$$n = \lg \frac{\alpha}{2}.$$

Мы возвращаемся, таким образом, к результатам, найденным в § 4. Точка O крыла представляет точку возврата первого рода, и малая часть контура $ОКА$ соответствует бесконечной дуге параболы $A'K'\infty$. Исследуемый контур лежит внутри угла $\angle КОС$ касательных к параболе из начала координат. Обозначив этот угол через 2γ , легко находим

$$\lg \gamma = \sqrt{\frac{n^2 + \varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon}};$$

при этом

$$(34) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \angle KOY = \frac{\epsilon^2}{V(n^2 + \epsilon^2)(1 + 2\epsilon) + n(1 + \epsilon)}, \\ \operatorname{tg} \angle COY = \frac{V(n^2 + \epsilon^2)(1 + 2\epsilon) + n(1 + \epsilon)}{1 + 2\epsilon - n^2}, \\ \angle KOY + \angle COY = 2\gamma. \end{cases}$$

Первый из этих углов чрезвычайно мал при малом ϵ . Контур имеет две точки изгиба, одна из которых лежит вблизи начала координат, а другая не遠далеке от точки, соответствующей вершине параболы. Соответственные этим точкам значения вспомогательного переменного, как нетрудно показать, определяются из уравнения четвертой степени в переменном u :

$$3\epsilon u^4 + 8n(1 + \epsilon)u^3 - 6\epsilon(1 + 2\epsilon - n^2)u^2 - \epsilon(1 + 2\epsilon - n^2)^2 - 4\epsilon n^2(1 + \epsilon)^2 - 4\epsilon^3(1 + 2\epsilon - n^2) = 0,$$

с двумя действительными корнями; один из них (отрицательный) весьма

велик при малом ϵ , другой близок к нулю и положителен. Если $n = \frac{1}{8}$,

$\epsilon = 0.01$, то последний корень равен приблизительно 0.236, а толщина крыла в соответственном месте имеет величину 0.004 a . Крыло, таким образом, представляется почти идеально тонким.

Слагающие силы да-

вления на крыло получаем на основании общего правила, при помощи соотношений (31), (32), по формуле

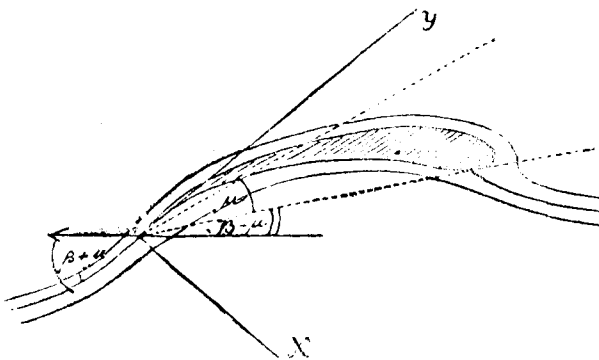
$$Y + iX = -\frac{\pi A}{2} (n + b) v_0 p e^{-i\theta_0}$$

или в иной форме

$$(35) \quad \begin{cases} Y + iX = -4\pi a p v_0^2 \sin \mu \sin \beta e^{i(\beta + \mu)} = \\ = -4\pi a p v_0^2 \sin \mu \sin \beta i e^{i(\beta + \mu)}; \\ P = \sqrt{X^2 + Y^2} = 4\pi a p v_0^2 \sin \mu \sin \beta. \end{cases}$$

Из (32) нетрудно усмотреть, что $\beta + \mu$ есть угол, образуемый направлением потока вдали от крыла с отрицательной осью ординат. Что касается μ , то из сравнения определяющей его формулы

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{n}{1 + \epsilon}$$



Фиг. 14.

с (34) мы усматриваем приблизительное совпадение его величины с γ . Таким образом, проведя равноделящую угла касательных из начала (в этом угле расположено крыло), мы получаем приблизительно то направление, с которым поток образует угол β , фигурирующий в ф-ле (35) для силы давления.

Характер этой формулы остается, следовательно, тот же, что и в ранее рассмотренном случае сложного крыла (§ 5).

Обращаясь к обследованию скоростей на контуре крыла, имеем по (30) и (31)

$$v = v_0 \frac{\sqrt{(u-b)^2}}{\sqrt{\epsilon^2 + u^2}} \cdot \frac{(u-n)^2 + (1+2\epsilon)^2}{(u+n)^2 + 1};$$

скорость, как легко усмотреть, растет при малом ϵ с приближением u к нулю и будет иметь наибольший максимум вблизи нуля. Положив $u=0$, найдем при малом ϵ приближенно:

$$v_{\max} = \frac{v_0 b}{\epsilon}.$$

Если $\epsilon=0.01$, как выше, $v_0=14$ м/сек. то, как в § 5, заменив $v_{\max}$ через 302 м/сек, найдем для b предельное значение $b=0.2$.

Затем имеем

$$\operatorname{tg} \beta = n + b = 0.336$$

при $n=1/8$, откуда получаем предельный угол β около 19° ; угол касательной к нижней поверхности крыла из начала координат с направлением потока в бесконечности, или, все равно, с направлением движения крыла, при этом будет иметь величину около 12° ($19^\circ - \mu = 12^\circ$). Поддерживающая сила обращается в нуль при $\beta=0$. Таким образом, все явления, отмеченные в случае сложного крыла § 5, имеют место и в рассматриваемом случае. Здесь так же, как и там, пределы возможных направлений движения расширяются с утолщением крыла, т. е. с увеличением ϵ , и с уменьшением скорости v_0 . Точно такой же характер имеет и кривая зависимости давления от угла.

§ 7. Крылья других очертаний. Формулы предшествующего параграфа можно расширить, охватив довольно широкий класс разнообразных очертаний крыла. Для этого достаточно, сохранив для $\frac{dw}{du}$ ф-лу (31)

$$\frac{dw}{du} = N \frac{u-b}{(u+n-i)^2 (u+n+i)^2},$$

принять

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= -8\sin \frac{(u+i\epsilon)f(u)}{(u+n-i)^2 [u-n'+i(1+2\epsilon)]^2} = \\ (36) \quad &= -8\sin \frac{F(u)}{(u+n-i)^2}, \end{aligned}$$

где $f(u)$ есть функция всюду в верхней полуплоскости переменного u конечная и непрерывная. Мы можем, например, положить

$$(37) \quad f(u) = \prod \frac{(u + g_m + h_m i)^{q_m}}{(u + k_m + l_m i)^{r_m}}, \quad \begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots p, \\ \sum q_m = \sum r_m \end{matrix}$$

и выбрать произвольно вещественные количества g, h, k, l, q, r с тем лишь, чтобы k и l были положительны. При этом, так как точка $u = i - n$ должна быть простым полюсом функции z , то должно иметь место соотношение

$$F'(i - n) = 0,$$

единственным образом определяющее коэффициенты n' и ξ' через n, ξ, g, h, k, l, q, r .

Значение N определяется из условия

$$\begin{aligned} v_0 e^{-i\theta_0} &= \int_{z=\infty}^z \frac{dz}{z} = \frac{Ni}{8an} \frac{n+b-i}{4F(i-n)}; \\ N &= 32an \frac{\operatorname{mod} F(i-n)}{\sqrt{1+(n+b)^2}} v_0; \\ \frac{3\pi}{2} - \theta_0 &= \operatorname{arctg}(n+b) - \arg i F(i-n) = \beta + \mu, \end{aligned}$$

где, попрежнему,

$$\beta = \operatorname{arctg}(n+b).$$

Для определения поддерживающей силы имеем затем

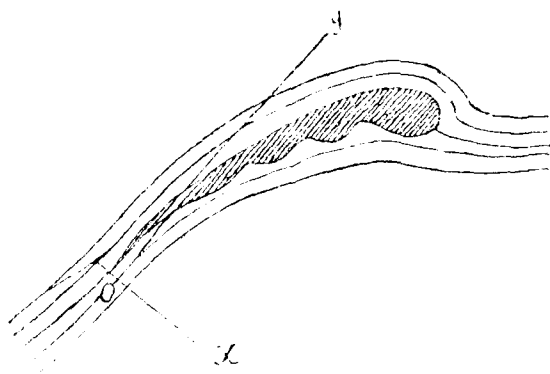
$$(38) \quad Y + iX = -\frac{\pi N(n+b)}{2} v_0 e^{-i\theta_0} = -4\pi a r v_0^2 \sigma \sin \beta e^{-i\theta_0},$$

причем

$$\sigma = 4n \operatorname{mod} F(i-n).$$

Весь характер явления и на этот раз несколько не меняется.

Во всякой частной задаче, когда очертания крыла известны, остается лишь подобрать коэффициенты ϕ -лы (37) так, чтобы контур подходил к желаемому типу. Довольно любопытный случай представляет, например, крыло с зубчатую



Фиг. 15.

вогнутой поверхностью, как показано на чертеже (фиг. 15). Такой тип получается, если мы примем количества g и k отрицательными, возрастающими с возрастанием указателя, причем численная величина k_m

заключается между $-g_m$ и $-g_{m-1}$; за h и l должно принять некоторые весьма малые (положительные, как пояснено выше) числа; все показатели q и r также следует сделать положительными; при $q_m = r_m = \frac{1}{2}$ зубцы будут приблизительно походить на прямоугольные, с закруглением в угле, выступы и впадины. Количества n' и ϵ' можно принять равными n и ϵ , если остальные коэффициенты таковы, что

$$F'(i-n) = 0,$$

т. е. если

$$\sum \frac{1}{i(1+h_m) - n + g_m} = \sum \frac{1}{i(1+l_m) - n + k_m}.$$

Количество σ получает вид

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{(1+\epsilon)^2 + n^2}} \sqrt[4]{\prod \frac{(1+h_m)^2 + (n-g_m)^2}{(1+l_m)^2 + (n-k_m)^2}}.$$

На основании сказанного выше легко видеть, что находящиеся в нашем распоряжении количества можно подобрать так, чтобы радикал четвертой степени значительно превосходил единицу.

Таким образом, по сравнению ф-лы (38) при указанном значении σ с ф-лой (35) § 6, мы убеждаемся, что присутствие зубцов надлежащей формы на нижней поверхности крыла должно увеличить подъемную силу крыла.

§ 8. Обтекание пластинки, опирающейся на дугу круга, в присутствии вихревого шнура. В § 4 был рассмотрен случай непрерывного обтекания части боковой поверхности круглого цилиндра, возможный лишь при определенном направлении потока в бесконечной дали, а именно при условии параллельности его хорде, стягивающей дугу, на которую пластинка опирается. Здесь мы покажем, что, кроме такого движения, возможно иное, также с непрерывным распределением скоростей, в присутствии неподвижного вихревого шнура определенного напряжения и определенно расположенного по отношению к пластинке; то и другое будет меняться в зависимости от скорости потока и его направления. Хотя присутствие вихря, как было показано в § 3, и не вносит непосредственно добавочного давления на обтекаемую пластинку, но влияние шнура сказывается косвенно, так как он меняет циркуляцию по главному контуру, окружающему пластинку.

При этом исследовании будем пользоваться тем же вспомогательным мнимым переменным, как и в § 4, изображая область, занятую жидкостью внутри круга радиуса, равного единице, и положим, согласно ф-лам (6) и (7),

$$(39) \quad z = a \frac{h-u}{u(hu-1)}, \quad \frac{dz}{du} = ah \frac{1+u^2-2hu}{u^2(hu-1)^2},$$

где $h = \sin \frac{\alpha}{2}$ и α — половина центрального угла, опирающегося на попе-

речную дугу пластинки. Что касается w , то вместо ф-лы (9) примем для этого переменного выражение

$$(40) \quad w = v_0 a h i \left\{ \frac{e^{3i}}{u} - e^{-3i} u + 2A \lg u + B \lg \frac{u - \rho e^{\lambda i}}{\rho u - e^{-\lambda i}} \right\},$$

при $\beta = 0$, $A = h$, $B = 0$, совпадающее с (9). Значение $u = u_0 = \rho e^{-\lambda i}$ соответствует центру вихревого шнура ($0 < \rho < 1$).

Количество β имеет очень простое геометрическое значение.

В самом деле,

$$(41) \quad \frac{dw}{du} = -v_0 a h i \left\{ \frac{e^{3i}}{u^2} + e^{-3i} - \frac{2A}{u} + B \frac{1 - \rho^2}{\rho (u^2 e^{\lambda i} + e^{-\lambda i}) - (\rho^2 + 1) u} \right\},$$

и по (39)

$$\frac{dw}{dz} = v_0 e^{-\theta_0 i} = -v_0 e^{3i},$$

$$z = \infty, u = 0,$$

откуда $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \beta$; следовательно, β есть угол, образуемый направлением потока в далеких точках (или, все равно, направлением движения пластинки в неподвижном потоке) с хордой пластинки.

Коэффициенты A и B мы должны определить из условия обращения в нуль $\frac{dw}{du}$ при $\frac{dz}{du} = 0$. Положив для краткости $\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, легко находим

$$(42) \quad B = -\frac{\sin \beta [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\lambda - \sigma)] [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\lambda + \sigma)]}{\sin \lambda \rho (1 - \rho^2)}$$

$$A = h \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \lambda} \left(\frac{1 + \rho^2}{2\rho} - h \cos \lambda \right).$$

Вставив эти значения в ф-лу (41), мы преобразуем ее к виду

$$(43) \quad \frac{dw}{du} = -v_0 a h i \frac{(1 + u^2 - 2hu) \left\{ u^2 e^{(\lambda - \beta)i} + e^{-(\lambda - \beta)i} - \frac{2N}{\rho} u \right\}}{u^2 \left(u^2 \rho^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - \frac{\rho^2 + 1}{\rho} u \right)},$$

где

$$(44) \quad 2N = (1 + \rho^2) \frac{\sin(\beta + \lambda)}{\sin \lambda} - 2h\rho \frac{\sin \beta}{\sin \lambda}.$$

При $\beta = 0$ и λ , *отличном от нуля или π* , ф-ла (43) превращается в (10), и мы вновь получаем результаты, найденные в § 4. Отвлекаясь от этого предположения, определим ρ и λ из условия неподвижности вихря. В § 3 было показано, что условие это сводится к обращению в нуль:

$$\int_{u=u_0}^{\infty} \operatorname{Re} s \frac{dw}{du} \cdot \frac{dw}{dz} = 0,$$

или, что то же самое,

$$\int_{u=u_0}^u \frac{dw}{du} \left\{ (u-u_0) \frac{dw}{du} : \sqrt{\frac{dz}{du}} \right\} = 0.$$

При помощи приведенных выше формул мы приводим это соотношение к виду

$$\int_{u=u_0}^u \frac{d}{du} \sqrt{1+u^2-2hu} (hu-1) \left\{ u^2 e^{(h-\beta)i} + e^{-(h-\beta)i} - \frac{2N}{\rho} u \right\} \frac{du}{u(\rho u - e^{-\lambda i})} = 0,$$

причем $u_0 = \rho e^{-\lambda i}$.

Свершив дифференцирование и выполнив подстановку, находим

$$\frac{h}{h\rho - e^{\lambda i}} - \frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho^2} + \frac{\rho e^{-\lambda i} - h}{\rho^2 e^{-\lambda i} + e^{\lambda i} - 2h\rho} + \frac{2\rho e^{-\beta i} - 2\frac{N}{\rho}}{\rho^2 e^{-\beta i} + e^{\beta i} - 2N} = 0,$$

а, по замене N его значением,

$$(45) \quad \frac{h}{h\rho - e^{\lambda i}} - \frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{1-\rho^2} + \frac{\rho e^{-\lambda i} - h}{\rho^2 e^{-\lambda i} + e^{\lambda i} - 2h\rho} + 2 \frac{\rho e^{\lambda i} - h}{\rho^2 e^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - 2h\rho} + \\ + \frac{1-\rho^2 \sin(\beta+\lambda)}{\rho \sin \beta} \frac{1}{\rho^2 e^{\lambda i} + e^{-\lambda i} - 2h\rho} = 0.$$

Из этого основного уравнения мы получаем два условия для определения ρ и λ . Одно из них находим, приравняв нулю мнимую часть выражения (45), а второе — сделав то же самое по умножении (45) на $e^{-\lambda i} + \rho^2 e^{\lambda i} - 2h\rho$.

Таким образом, после весьма простых приведений, мы приходим к следующим двум уравнениям:

$$(46) \quad \frac{(1-\rho^2)^2}{\rho} \frac{h}{1-h^2} \frac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin \beta} = \\ = (1-\rho^2)^2 \frac{1+\rho^2-2h\rho \cos \lambda}{(1+\rho^2-2h\rho \cos \lambda)^2 - 4\rho^2(1-h^2) \sin^2 \lambda} = \\ = 1 - \frac{1-h^2+h^2(1-\rho^2)^2}{1+h^2\rho^2-2h\rho \cos \lambda},$$

которые и определяют положение вихря в зависимости от направления потока.

Что касается поддерживающей силы потока, то ее компоненты определяются, согласно ф-ле (4) § 2, из соотношения

$$Y + iX = -\rho C v_0 e^{-i\psi_0},$$

где C — циркуляция около точки $u=0$, в направлении часовой стрелки. В нашем случае

$$C = 2\pi v_0 ah \cdot 2A.$$

Введя вспомогательный угол μ , определяемый равенством

$$(47) \quad \cotg \mu = \frac{1 + \rho^2}{2\rho h \sin \lambda} - \cotg \lambda,$$

мы легко приводим коэффициент A к виду

$$A = h \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu},$$

и для полной силы давления потока на пластинку получаем

$$(48) \quad P = 4\pi\rho v_0^2 ah^2 \frac{\sin(\beta + \mu)}{\sin \mu}.$$

При $\beta=0$, если μ отлично от нуля (λ отлично от нуля и полуокружности), мы находим, таким образом, прежнее значение P [ф-ла (13)]. Что касается ф-лы (48), то она вполне схожа с (29), ибо $2ah^2 = c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} =$ стрелке дуги. Отличие состоит в том, что на этот раз добавочный угол μ зависит от направления потока.

Зависимости, устанавливаемые ф-лами (46), (47) и (48), довольно сложны, а потому и общая картина явления представляется весьма неясною. В виду этого желательно хотя бы в частном случае провести вычисления до конца и сопоставить результаты в таблицу. Выполним это для значения h , определяемого из формулы

$$\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{65}}, \quad \frac{\alpha}{2} = 7^\circ 7' 30'', \quad 2\alpha = 28^\circ 30',$$

что соответствует стрелке $s = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{16} 2c$, равной одной шестнадцатой хорды, — значение, близкое к обычной величине стрелки крыла аэроплана.

Прежде всего, для удобства вычислений, преобразуем ур-ния (46), вводя новое переменное t при помощи соотношения

$$(49) \quad \sqrt{1-h^2}t = \frac{h(1+\rho^2) - 2\rho \cos \lambda}{1-\rho^2}$$

и положив для краткости

$$s = 1 - \rho^2, \quad k = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}.$$

Ур-ния (46), в результате преобразования, дают

$$(50) \quad \frac{s^2}{\sqrt{1-s}} \cdot k \sqrt{1+k^2} \frac{\sin(\lambda + \beta)}{\sin \beta} = ks \frac{t - ks}{1 + kst} = \frac{2-s + kst}{1+t^2}.$$

Из (49) и (47) имеем

$$-\cos \lambda = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}\sqrt{1-s}} [st - 2k + ks], \quad (51)$$

$$\cotg \mu = \frac{2-s}{2h \sin \lambda \sqrt{1-s}} \cotg \lambda.$$

Из рассмотрения основных ур-ний (46) нетрудно усмотреть, что $\cos \lambda$ должен быть заключен в пределах -1 и h . Заменив в (50) k его частным значением $1/8$, мы получаем для определения s по t :

$$s^2(1 + 2t^2 - 8t) - 8s(8 + t^3 - 2t) + 128 = 0.$$

Дальнейшие вычисления проведем, давая t различные числовые значения, возможные по смыслу задачи, и определяя последовательно переменные s , λ , β и μ . Легко убеждаемся, что условием соблюдения пределов s и $\cos \lambda$ является требование

$$t < 3.06.$$

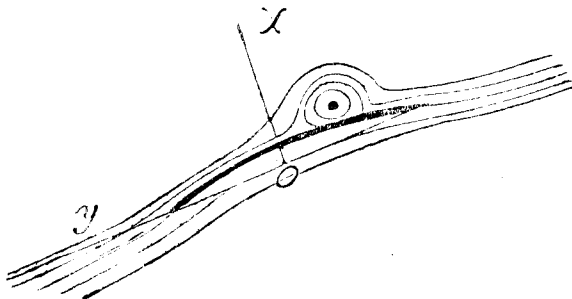
При t , близких к этому значению, переменные меняются довольно быстро, затем изменение идет гораздо медленнее. Не видя надобности в особо точных подсчетах, мы, пользуясь логарифмическими таблицами, составили следующую таблицу, поясняющую ход интересующих нас функций:

	t	s	λ	β	μ
1	3.064	0.51709	177°26'	0°36'25"	16°5"
2	3.07	0.51451	172 56	1 37	44
3	3.1	0.50191	164 1	2 49	1°39
4	3.25	0.44391	146 9	5 57	3 27
5	3.35	0.40952	139 14	6 13	4 6
6	3.5	0.36373	131 39	5 58	4 48
7	4	0.25012	116 34	5 4	5 56'
8	4.5	0.16944	106 53	2 29	6 33
9	5	0.13027	102 50	1 41	6 42
10	8	0.03175	90 14	014'37"	7 4
11	∞	0	$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = 82^\circ 52' 30''$	0	$\frac{\alpha}{2} = 7^\circ 7' 30''$

Соответственные значения количества $\sin(\beta + \mu) : \sin \mu$ при этом, постепенно уменьшаясь, изменяются в пределах 3.2 и 1.

Таким образом, мы усматриваем, что исследуемое движение возможно лишь при малых положительных углах наклона крыла к направлению скорости; максимальный наклон несколько более 6° . При меньших углах

возможны всякий раз два различных расположения вихря и, в соответствии с этим, два разных потока с весьма различающимися величинами поддерживающей силы. Эта сила, с возрастанием угла наклона при одном из воз-



Фиг. 16.

можных типов движения, не только не увеличивается, но даже падает (приблизительно на 20% своей величины при изменении β от 0 до 6°). На опыте, сколько мне известно, таких явлений не наблюдалось; по всей вероятности, вследствие неустойчивости сопутствующего вихря, опи-

санное движение неосуществимо, и полученные в этом параграфе результаты имеют потому лишь теоретический интерес.

Характер очертаний линий тока представлен на прилагаемом чертеже (фиг. 16). Вихрь располагается близ выпуклой поверхности пластинки, на которой находятся и обе критические точки с нулевой скоростью, как показывают весьма простые вычисления в рассмотренном частном примере.

§ 9. Определение вращающего момента. Вопрос о величине вращающего момента, действующего на крыло, является существенным элементом в изложенной теории. Его изучение дает особенно интересный результат в том случае, когда угол потока достигает критического значения, при котором поддерживающая сила обращается в нуль.

Назовем через $\bar{x}$, $\bar{y}$ координаты центра сил давления на крыло; компоненты X' , Y' силы, действующей на элемент сечения крыла, могут быть изображены в виде

$$X' = \rho \frac{v^2}{2} ds \frac{dy}{ds}, \quad Y' = -\rho \frac{v^2}{2} ds \frac{dx}{ds}$$

(если мы отбросим члены, зависящие от постоянного давления, как не дающие результата).

Поэтому центр сил давления, определяющийся, как легко видеть, из соотношения

$$(x + i\bar{y})(Y + iX) = \Sigma (x + iy)(Y' + iX'),$$

найдется, если мы совершим интеграцию по контуру сечения крыла в уравнении

$$(\bar{x} + i\bar{y})(Y + iX) = -\frac{\rho}{2} \int z v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) v ds.$$

Так как на указанном контуре

$$v ds = dw, \quad v \left(\frac{dx}{ds} - i \frac{dy}{ds} \right) = \frac{dw}{dz},$$

то мы приходим к окончательной формуле

$$(52) \quad (\bar{x} + iy)(Y + iX) = xY - \bar{y}X + i(\bar{x}X + \bar{y}Y) = -\frac{\rho}{2} \int z \frac{dw}{dz} dw = \\ = -\frac{\rho}{2} \int z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 du,$$

где интегриацию по контуру в области z мы должны совершить обходя его против часовой стрелки (в направлении от оси X к оси Y), а в области u — в соответственном направлении, в наших рассмотренных выше, случаях по часовой стрелке.

Из ф-лы (52) заключаем, что интересующий нас момент определяется весьма простым соотношением

$$(53) \quad M = \text{действит. части } \pi i K,$$

где K — коэффициент $\frac{1}{u - u_0}$ в разложении

$$f(u) = z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2$$

в области полюса u_0 .

Применим нашу формулу к задаче, рассмотренной в § 6. Легко находим по ф-лам (30) и (31), положив для простоты:

$$u = u_0 + s = i - n + s, \\ f(u) = -\frac{N^2 (i - n - b + s)^2 [2i(1 + \epsilon) - 2n + s]}{s^3 (2i + s)^4 [i(1 + \epsilon) - n + s]},$$

и отсюда, разложив по степеням s и собрав члены при $\frac{1}{s}$, получим

$$\frac{16iK}{N^2} = 3i - 4(n + b) - \frac{5i}{2} \left\{ 1 + i(n + b) \right\}^2 - \frac{i}{2} \frac{\{1 + i(n + b)\}^2}{(1 + \epsilon + ni)^2} + \\ + (n + b) \frac{1 + (n + b)i}{1 + \epsilon + ni}.$$

Воспользовавшись ф-лами (32) и подставив в (53) найденное значение iK , мы будем иметь по упрощении искомую формулу момента:

$$M = 4\pi\rho a^2 r_0^2 \sin^2 \mu \left\{ \sin \beta \cos \beta + \frac{\sin \beta \cos \mu \cos (\beta - \mu)}{1 + \epsilon} + \right. \\ \left. + \frac{\sin (\beta - \mu) \cos (\beta - \mu) \cos^2 \mu}{(1 + \epsilon)^2} \right\}.$$

При значительных величинах угла β момент положителен, и, как легко сообразить по расположению крыльев, на настоящем аэроплане он будет

уравновешиваться моментом веса авиатора. Иное явление возникнет при малых β .

По ф-ле (35) критическое значение β , при котором $P=0$, есть нуль. При этом момент

$$M = - \frac{4\pi\rho a^3 v_0^2}{(1+\epsilon)^2} \sin^3 \mu \cos^3 \mu,$$

и силы давления ветра не только не стремятся выправить наклонившееся вперед крыло, а, наоборот, вращают его дальше.

При значениях, принятых для n и ϵ в § 6, если мы предположим ширину крыла равной приблизительно 1 м и скорость 14 м/сек, написанная выше формула дает для момента величину, близкую к 10 кгм *на каждый метр длины крыла*. Это обстоятельство выясняет причину опасных явлений, возникающих при неосторожном наклонении вперед крыльев летящего аэроплана. С увеличением ширины крыльев, если при этом отношение стрелки и ширины не изменяется, опасный момент возрастает пропорционально *квадрату* ширины.

В заключение скажем несколько слов о том, в каком соотношении изложенная теория стоит, по нашему мнению, к явлениям, имеющим место при реальных условиях. Первое существенное усложнение вносит трение воздуха о крылья. Эта причина служит источником задерживающей силы, направленной противоположно скорости движения, и нашей теорией совершенно не захватывается. Что касается поддерживающей силы, перпендикулярной к скорости движения, то мне представляется, что ее величина едва ли может значительно измениться от влияния трения. Другое важное обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание, — это несколько иной характер потока, устремляющегося на аэроплан, чем предположено в нашей работе. Так как крыло имеет конечную длину, то окружающий воздух не может двигаться плоскопараллельным потоком; его движение за пределами крыльев будет существенно отличаться от рассмотренного нами. Я полагаю, что на оконечность каждого крыла будет опираться некоторый сопутствующий ему вихрь, образующийся благодаря разности скоростей на нижней и верхней поверхности крыльев. Крыло вместе с этим вихрем и моделируется нашим бесконечным цилиндрическим крылом.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ О ДВИЖЕНИИ АЭРОПЛАНОВ

В настоящее время накопилось очень много опытных данных, позволяющих строить превосходные летательные аппараты, на которых совершают большие путешествия.

Поэтому своевременно подумать о том, чтобы попытаться теоретически обосновать опытные данные. Как и в большинстве теоретических изысканий, идущих рядом с фактами, здесь могут быть отмечены направления последующих опытов, от которых возможно ожидать дальнейшего развития аэроплановых форм.

Для этого я постарался познакомиться с некоторыми из явлений, связанных с теорией летания, и попытался объяснить их.

При летании приходится останавливаться на нескольких существенных вопросах.

Во-первых, приходится объяснить, как возникают поддерживающие силы, которые действуют на крылья.

Во-вторых, — каков момент, опрокидывающий крыло.

Третий весьма интересный вопрос — вопрос о действии различного рода рулей. Недавно мне удалось наметить теоретический путь, выясняющий действие рулей высоты. Но я этого вопроса касаться не буду, потому что мое исследование не доведено еще до конца.

Что же касается действия потока на неподвижное крыло (или, то же, действия спокойного воздуха на летящее крыло), то некоторых результатов мне удалось достигнуть; получились формулы, весьма напоминающие и даже прямо совпадающие с эмпирическими.

Поэтому, вопросу о действии воздуха на крыло аэроплана (точнее моноплана) и будет посвящено мое сообщение.

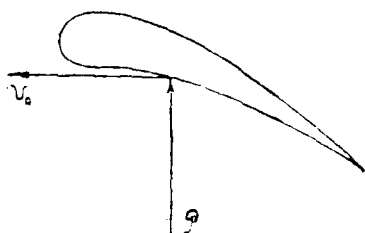
Математические затруднения не позволяют охватить вопрос во всей его сложности. Приходится, по необходимости, несколько упростить постановку задачи, отбросив те явления, которые трудно уловимы современным анализом и которые, как оказывается, не играют существенной роли.

Другими обстоятельствами можно пренебречь, так как их второстепенная роль выясняется из теоретических соображений. Так, например, можно со-

вершено игнорировать сжимаемость воздуха при установившемся движении, так как при скоростях, далеких от скорости звука в воздухе, его сжимаемость не имеет значения ¹⁾.

Скорости же аэропланов во много (10 и более) раз меньше этой последней.

Второе упрощение состоит в том, что мы не принимаем во внимание трения воздуха о крыло. Это обстоятельство более существенно. По всей вероятности, оно повлечет некоторое уменьшение подъемной силы, которая получается при отсутствии трения; а главное, оно повлечет к возникновению удерживающей силы, направленной противоположно движению крыла. Этого нет при отсутствии трения, где развивается простая поддерживающая сила, перпендикулярная к направлению относительной скорости воздуха



Фиг. 1.

(или, что все равно, к скорости полета в спокойном воздухе), и нет силы против направления полета ²⁾.

Несмотря на все это, от рассмотрения сил трения приходится отказаться в виду математической трудности дела.

Наконец, третье упрощение состоит в том, что совершенно приходится отказаться от мысли решить вопрос о движении конечного крыла, как это бывает в действитель-

ности. Приходится рассматривать бесконечно длинное цилиндрическое крыло, движущееся по направлению, перпендикулярному к образующим.

Таким образом, мы будем рассматривать, вместо конечного, бесконечное крыло, разрез которого, перпендикулярно к образующим, представлен на фиг. 1.

Если скорость его есть v , то, вследствие этой скорости, развивается поддерживающая сила P , перпендикулярная к скорости, как это выходит из теории (при отсутствии трения).

Эта необходимость рассматривать бесконечное крыло, как будто, весьма существенно изменяет задачу.

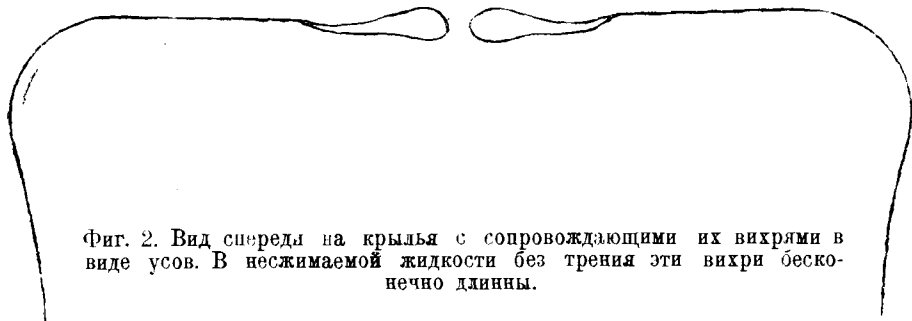
Но мне представляется, что реальное явление должно быть похоже на то, которое получается при рассмотрении бесконечно длинных крыльев, потому что, в действительности, крылья конечной длины необходимо будут сопровождаться увлекающимися на них вихорьками, вместе с которыми крылья могут быть моделированы бесконечным крылом.

¹⁾ См. мою работу «О газовых струях» в Уч. зап. Имп. Моск. унив., 1903.

²⁾ В практике летания за «поддерживающую силу» принимается вертикальная составляющая полного воздействия (давление и трение) воздуха на аэроплан, за «лобовое сопротивление» — горизонтальная составляющая той же силы, за «скорость» — горизонтальная составляющая истинной скорости аэроплана. В этом смысле и при отсутствии трения может быть «лобовое сопротивление», уменьшающее «скорость» аэроплана. Оно обращается в нуль, когда истинная скорость горизонтальна.

В существе явления будут похожи и с качественной стороны, и даже с количественной.

Эти сопровождающие крылья вихри должны иметь вид длинных усов, расходящихся далеко в обе стороны, а затем заворачивающихся назад и вниз. Приблизительный вид их представлен на фиг. 2.



Фиг. 2. Вид спереди на крылья с сопровождающими их вихрями в виде усов. В несжимаемой жидкости без трения эти вихри бесконечно длинны.

Конечно, вследствие вязкости воздуха эти вихри не могут быть бесконечными. Расходясь от концов крыла, они расширяются и исчезают, как представлено на фиг. 3.

Крыло, вместе с этими вихорьками, и будет моделироваться нашим цилиндрическим бесконечным крылом.



Фиг. 3.

При всех выше выставленных ограничениях задача формулируется так: невихревой поток несжимаемой жидкости течет параллельно плоскости с определенной постоянно скоростью в бесконечной дали. Определить его давление на преграждающий цилиндр или изогнутую пластинку.

Перейдя к изложению теории поддерживающей силы, прежде всего приходится задать вопрос: откуда происходит поддерживающая сила, в чем ее причина?

Долгое время ее искали не там, где она заключается.

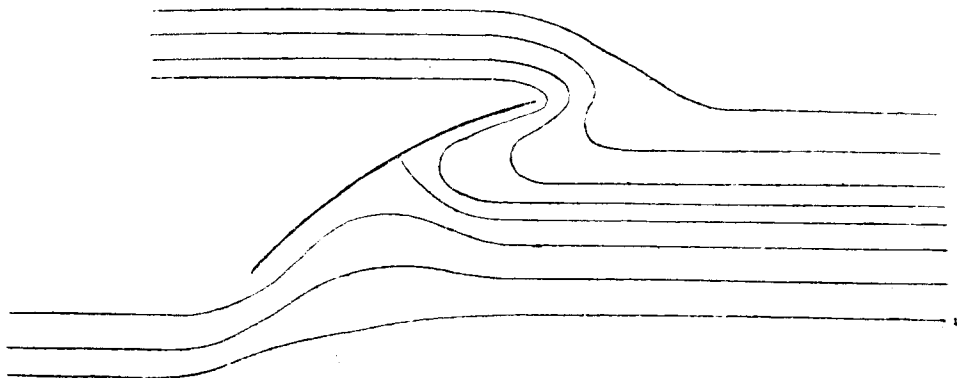
Это происходило вследствие неточного понимания знаменитого парадокса Эйлера.

Эйлер показал, что если в невихревой жидкости движется тело с постоянной скоростью, то оно не будет испытывать никакой силы сопротивления.

Если тело держать в потоке, то, опять-таки, никакой равнодействующей при этом не развивается.

Долгое время не замечали, что теорема Эйлера применяется с известными ограничениями, о которых речь будет впереди.

Поэтому поддерживающей силы искали в разрыве, который возникает благодаря острым краям крыла. Основываясь на теории разрыва, возникновение поддерживающей силы можно было бы объяснить образованием области спокойной жидкости позади крыла (фиг. 4).



Фиг. 4.

Но подсчеты давали очень небольшую величину поддерживающей силы, которую дает поток при малых углах. Этой силы далеко не достаточно, чтобы объяснить явление полета.

В 1906 г. появилась статья проф. Н. Е. Жуковского — «О присоединенных вихрях»¹⁾, в которой указано правильное отношение к знаменитому парадоксу Эйлера.

Оказывается, что не принималось во внимание одно обстоятельство: применение этого парадокса возможно только в том случае, когда потенциал скоростей представляет однозначную непрерывную функцию во всей области, занятой жидкостью.

Однако, при известных обстоятельствах возможна многозначность этой функции.

В этом и лежит источник ограничений применимости парадокса Эйлера.

Так как мне придется в формулах опираться на одно математическое количество — циркуляцию скорости, то объясню значение этого понятия.

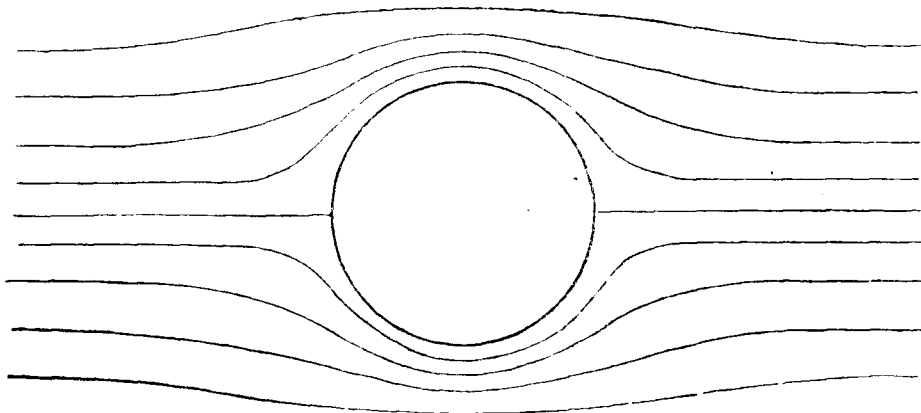
Вообразим, что у нас имеется цилиндр определенного сечения. На него устремляется установившийся поток, который обтекает его без разрыва.

Тогда во всяком месте потока будет известная скорость, которую можно изобразить вектором определенной длины и направления.

¹⁾ Приходится выбросить, имея в виду статьи Kutta.

Представим себе некоторую замкнутую кривую в этом потоке.

Если мы вычислим работу, которую произвели бы силы, действующие на материальную точку массы, равной единице, при прохождении ее по



Фиг. 5.

этой кривой в предположении, что силы во всех точках пути равны соответствующим скоростям, то величина этой работы, равная $\int v ds \cos \alpha$, и называется циркуляцией скорости на данном пути. Обозначим ее буквою C . Тогда имеем

$$C = \int v ds \cos \alpha.$$

При однозначности потенциала скоростей циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру равна нулю ($C=0$).

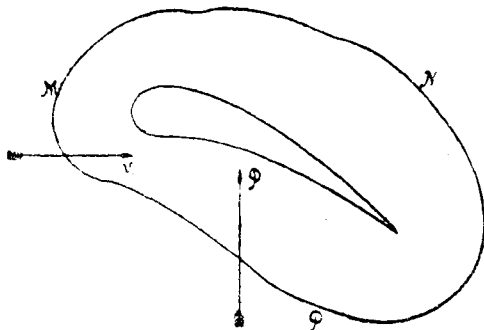
Парадокс Эйлера приложим только тогда, когда $C=0$. Тогда только не будет никаких давлений на поставленное в потоке тело.

При других обстоятельствах циркуляция может быть конечной, отличной от нуля, величиной, которая зависит от формы цилиндра и от направления потока относительно цилиндра.

Через нее, как оказывается, определенным образом будет выражаться сила, возникающая в этом случае (при $C \neq 0$).

П. Е. Жуковский показал, что если у нас имеется поток, обтекающий цилиндр, и циркуляция скорости по охватываемому ею контуру конечна и отлична от нуля, то развивается сила, перпендикулярная к направлению скорости.

Если обозначить скорость потока в бесконечно удаленных точках через v_0 , поддерживающую силу, перпендикулярную к скорости, через P (фиг. 6),



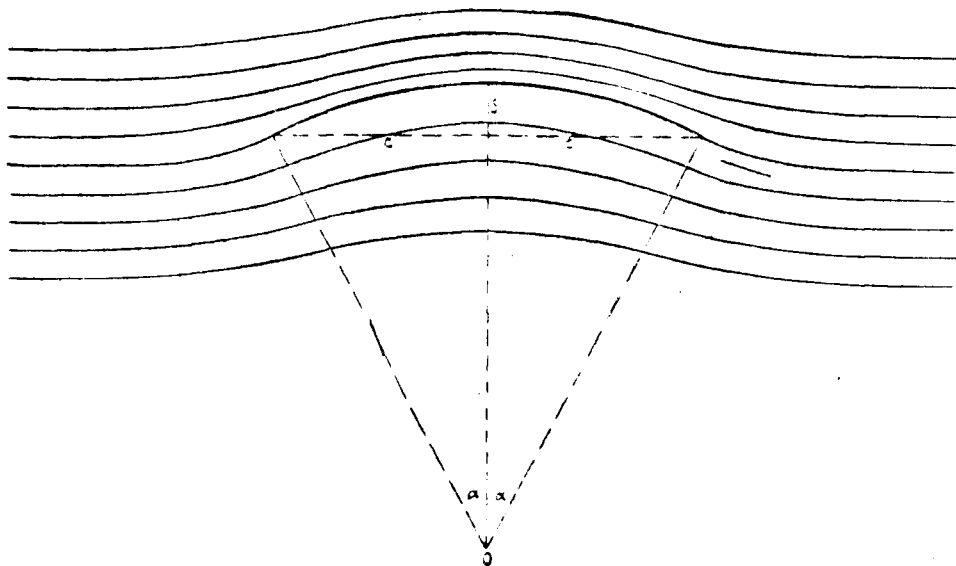
Фиг. 6.

циркуляцию скорости по произвольному, охватывающему цилиндр, контуру через C (величина C не зависит ни от формы, ни от размеров контура $MNPM$), плотность жидкости через ρ , то между этими величинами существует зависимость

$$(1) \quad P = C \rho v_0.$$

Эта формула справедлива и в случае наличия присоединенных вихрей¹⁾.

Итак, поддерживающая сила равна произведению циркуляции на плотность жидкости и на скорость потока в бесконечности. Во всякой частной



Фиг. 7.

задаче, при определенном виде сечения крыла, необходимо, таким образом подсчитать циркуляцию в связи с формой и затем выяснить, достаточно ли этого объяснения, чтобы охарактеризовать силу, поддерживающую крыло аэроплана.

Оказывается, что путем такого объяснения можно истолковать возникающее явление: величина силы близка к полученной опытным путем (несколько ее превышает).

Первая форма, которую мне пришлось рассмотреть, — это часть боковой поверхности круглого цилиндра.

В данном случае непрерывное обтекание возможно только тогда, когда направление потока параллельно хорде дуги.

Вследствие этой непрерывности, снизу поток будет течь несколько медленнее, а сверху — несколько скорее (фиг. 7); разность скоростей, в свою

¹⁾ Проф. Н. Е. Жуковский связывал циркуляцию и поддерживающую силу с присоединенными вихрями. Но оказывается, что дело, в многозначности потенциала скоростей — и безразлично, будут ли существовать присоединенные вихри, или нет.

очередь, вызывает разность гидродинамических давлений ¹⁾ под и над пластинкой, т. е. подъемную силу.

Вычисляя это давление, я получил очень простую формулу для поддерживающей силы:

$$(2) \quad P = 2\pi\rho s v_0^2,$$

где s — стрелка дуги, или

$$(3) \quad P = 2\pi\rho c v_0^2 \lg \frac{\alpha}{2},$$

где c — полухорда дуги, а α — половина центрального угла, так что $s = c \left(\lg \frac{\alpha}{2} \right)$.

Любопытно, что сила зависит исключительно от размеров стрелки. Если взять несколько дуг с одной и той же стрелкой, но разных радиусов (фиг. 8), то для всех их сила будет одинаковая.



Фиг. 8.

Для наглядности приводим небольшую табличку сил давления P (в кг на кв. метр поверхности пластинки в воздухе при обычных скоростях аэроплана: 14, 17 и 20 м/сек (50, 61 и 72 км/час.).

Обозначим центральный угол через 2α и отношение стрелки к хорде $\left(\frac{s}{2c} \right)$ через k :

2α	k	P_{14}	P_{17}	P_{20}	*)
15°	1 : 30.5	5.3	7.3	10.8	
30	1 : 15.2	10.6	15.6	21.6	
32	1 : 14.2	11.1	16.8	23.3	
36	1 : 12.6	12.8	18.8	26.2	

Конечно, если углубление будет очень значительно, то трение будет оказывать несколько больший эффект, и в зависимости от того, может возникнуть иное явление.

¹⁾ Обозначив гидродинамическое давление вдали от крыла через p_0 и v_0 , а в какой-нибудь точке около крыла через p и v , имеем по теореме Бернулли:

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2},$$

отсюда видно, что где скорость больше, там давление меньше, и наоборот.

²⁾ Когда печаталась моя работа по этому вопросу (О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела, М. 1910), Н. Е. Жуковский указал мне, что еще в 1902 г. прив.-доц. W. M. Kutta, в заметке «Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten» разрешил эту задачу. Он является и первым, обратившим внимание на то, что парадокс Эйлера не имеет места при многозначности потенциала скоростей. Kutta ограничился только случаем хорды параллельной скорости потока, и дальше этим вопросом не занимался. Формулы, которыми он пользовался при своих исследованиях, довольно сложны, потому что он не нашел удобного метода. Но полученное им выражение для силы давления вполне совпадает с (3).

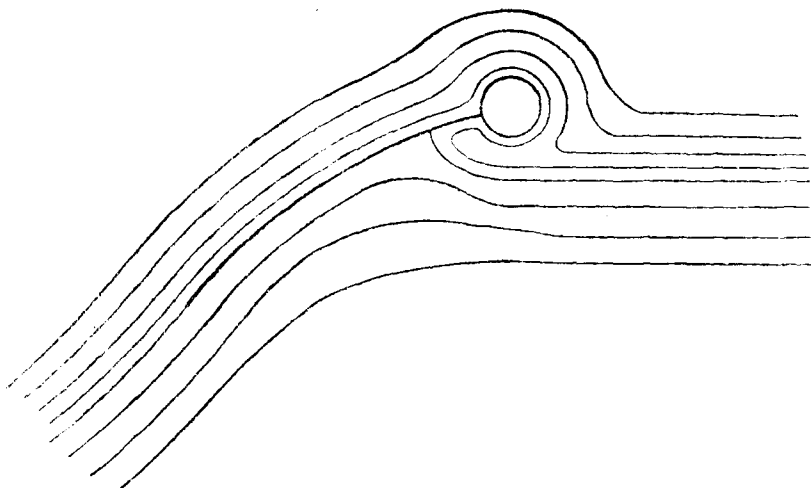
³⁾ Последние два столбца вычислены студ. Ветчинкиным.

Вероятно, есть средний размер, являющийся наиболее выгодным в вязкой жидкости.

Представляется, что эта выгодная форма соответствует сравнительно короткой дуге.

В рассмотренной задаче крайне неприятно было то, что приходилось довольствоваться одним определенным направлением потока в бесконечности, и только при нем можно было объяснить явление поддерживающей силы.

Между тем, весьма существенно рассмотреть такой случай, когда поток стремится на крыло не по направлению хорды, а как-нибудь иначе.



Фиг. 9.

Этот вопрос я также разрешил, обратив внимание на ту причину, которая не позволяет найти поток, удовлетворительно решающий дело в разобранном случае.

Все затруднение в том, что на крыле рассмотренного типа имеется два математически острых ребра.

Для того чтобы устранить указанное стеснение, достаточно было рассмотреть модель крыла с притуплением с одной стороны.

Я рассматривал именно такую модель. Сечением ее является та же самая дуга круга, но снабженная на одном из концов насадком в виде кружка, пересекающего дугу под прямым углом (фиг. 9). Радиус насадка, конечно, надо предполагать небольшим, так как он должен изображать естественную притупленность переднего края крыла, реально никогда не имеющего математически острой формы.

Оказывается, что задачу в такой форме можно разрешить вполне точно при названных углах наклона хорды к скорости потока вдаль.

Для этого случая формула подъемной силы получает вид

$$(4) \quad P = 2\pi\rho c v_0^2 l g \frac{\alpha \sin(\beta + \mu)}{2 \sin \mu},$$

где ϵ и α имеют прежние значения [ф-ла (3)], β — угол хорды с направлением потока вдаль, а μ имеет следующее значение: отметим на продолжении хорды AC (фиг. 10) точку H' , симметричную с H относительно O . Соединим H' с G . Тогда получим¹⁾

$$LGH'O = \mu.$$

При $\beta = 0$ ф-ла (4) совпадает с ф-лой (3), полученной при отсутствии насадка.

Когда крыло движется под некоторым углом, то подъемная сила может превысить первоначальную (при $\beta = 0$) в 4—5 раз.

Исследуя подробно эту форму, я пришел к заключению, что не при всех углах и скоростях возможно установившееся движение. и следовательно, выражение подъемной силы ф-лой (4).

Оказывается, что здесь является естественный предел: отклоняться от сжимаемости воздуха законно только до тех пор, пока скорость нигде в потоке не достигает скорости звука, так как при нарушении этого условия установившееся движение перестает быть возможным.

Между тем, скорость в некоторых точках на окружности насадка ($v_{\max}$) во много раз превосходит скорость потока (v_0).

Поясним на примере, каковы пределы применимости ф-лы (4). Пусть у нас будет крыло описанной формы с центральным углом в 30° ($k = \frac{1}{15.2}$) хордой в 2 м и с насадком в 1 см в диаметре.

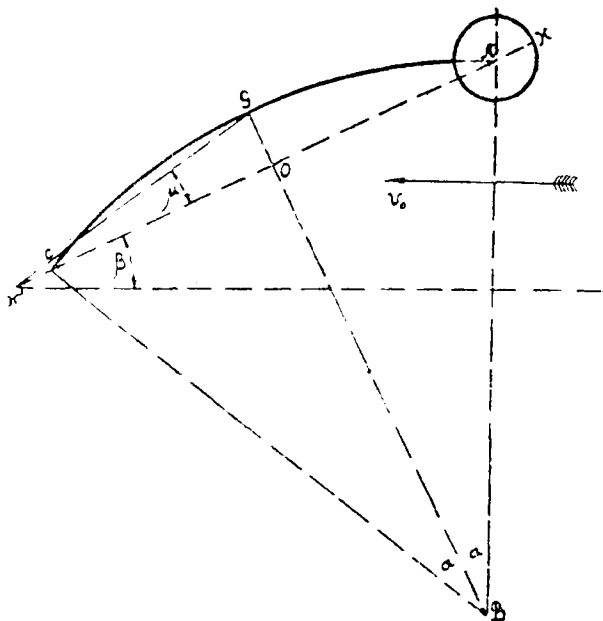
Тогда

$$v_{\max} = 40.65 v_0 \sin \beta.$$

Отсюда

$$v_0 \sin \beta = 7.4 \text{ м/сек.}$$

Следовательно, при $v_0 < 7.4$ м/сек ф-ла (4) применима при всяком угле наклона. Но если v_0 значительно превосходит величину 7.4 м/сек, то при



Фиг. 10.

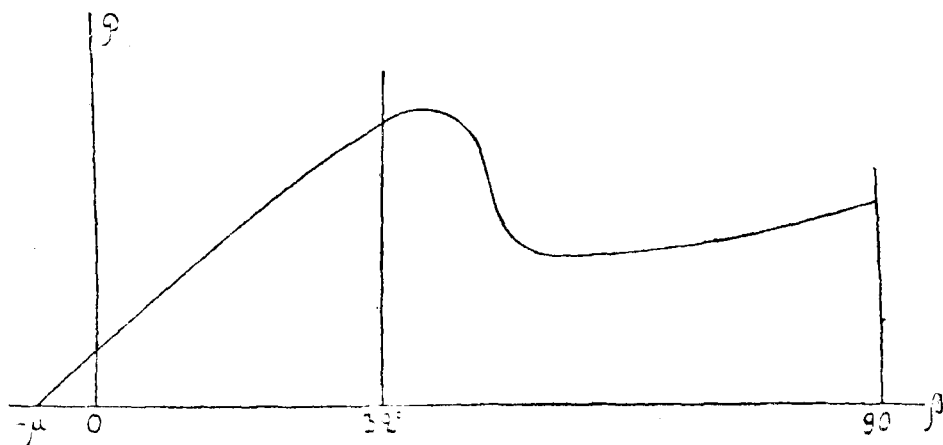
¹⁾ В аппарате Фармана $\mu \sim 7^\circ 30'$. Приблизительно $\lg \mu = \frac{s}{c} = 2 k$.

наклонах крыла, больших определенного предела, прекращается возможность непрерывного обтекания. При обычных скоростях аэропланов предельный угол $\beta_{\max}$ имеет следующие значения:

v_0	14	17	20	м/сек
$\beta_{\max}$	32°	28°	22°	

При менее остром переднем крае предельный угол будет больше.

Если наклон крыла окажется более предельного, то должно наступить новое явление: течение с разрывом сплошности. Этому течению соответствует особое исследование. Получается другая формула, определяющая



Фиг. 11.

поддерживающую силу. Эта сила будет значительно меньше той, которая определяется по ф-ле (4).

Кривая изменения давления, с возрастанием угла для описанного крыла и $v_0 = 14$ м/сек, должна иметь, приблизительно, такой вид, как на фиг. 11.

При скоростях, меньших 7.4 м/сек, максимум исчезает, и кривая обращается к синусоиду.

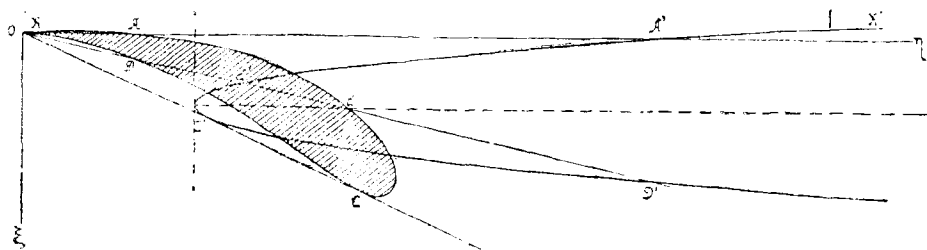
Из ф-лы (4) видно, что подъемная сила быстро падает при наклоне крыла вперед по направлению движения, при некотором определенном угле $\beta = -\mu$ обращается в нуль, а затем меняет знак и давит на крыло сверху вниз.

Из той же формулы видим, что величина поддерживающей силы при $\beta = 0$ не зависит от диаметра насадка.

Кроме описанных двух, я исследовал некоторые формы крыльев, напоминающие крылья птиц, с непрерывными и мягкими обводами и лишь с одной точкою заострения.

Простейшая форма этого рода получится, когда очертание сечения крыла представляет результат инверсии параболы (фиг. 12)¹⁾.

Кроме этой простейшей, я имею возможность выделить широкий класс таких кривых, которые можно охватить этим исследованием. В виде при-



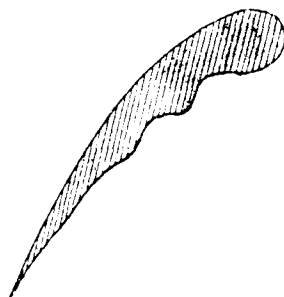
Фиг. 12.

мера укажу форму с зубцами на нижней поверхности крыла, которые можно построить так, что подъемная сила его увеличится (фиг. 13).

Надо прежде заметить, что неудачные очертания зубцов могут повлечь и уменьшение подъемной силы. В моем труде приведены формулы для расчета очертаний зубцов.

Наконец, я коснулся влияния на крыло присоединенных вихрей. Присоединенный вихрь должен иметь форму шпура, параллельного образующим крыла и расположенного близ выпуклой его поверхности (фиг. 14).

Сам по себе вихрь не вносит непосредственно добавочного давления на обтекаемую пластинку, но влияние его сказывается косвенно, так как он меняет циркуляцию по главному контуру, окружающему пластинку. Изменение может быть довольно значительно. На опыте, сколько мне известно, таких изменений не наблюдалось; по всей вероятности, сопутствующий вихрь, вследствие своей неустойчивости, не может оставаться около пластинки.



Фиг. 13.

Последним вопросом, который я затронул своим исследованием, является вопрос о величине вращающего момента, действующего на крыло. Получив общую его формулу, я подробно исследовал ее для одной простой формы сечения крыла, именно — формы, получаемой путем инверсии параболы.

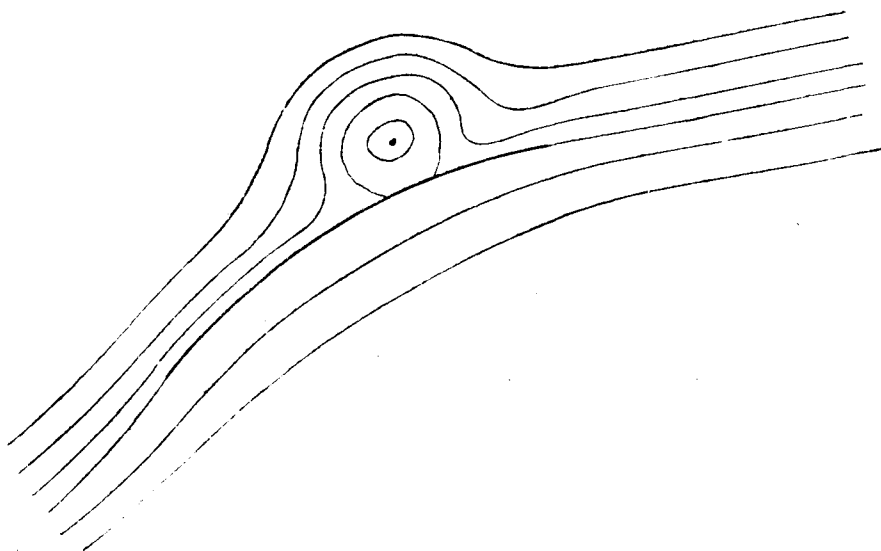
Оказалось, что при значительных величинах угла β — момент положителен (еще больше поднимает крыло). При малых углах β он уменьшается.

¹⁾ Строится эта кривая таким образом: на всяком радиусе-векторе, исходящем из начала O (точка инверсии) и пересекающем параболу, наносятся две точки так, что произведение их расстояний от начала на длину соответственных радиусов-векторов параболы есть величина постоянная. На фиг. 12

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \overline{OE} \cdot \overline{OE'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = \text{const.}$$

переходит через нуль и при критическом угле имеет уже довольно значительную отрицательную величину. При дальнейшем наклоне крыла вперед он, оставаясь отрицательным, все увеличивается по абсолютной величине, т. е. еще больше наклоняет крыло.

При этом подъемная сила переходит через нуль, начинает давить на крыло сверху вниз. Прodelав вычисления для формы, по размерам подхо-



дящей к крылу аэроплана Фармана, я нашел следующий результат: при критическом угле величина момента равна 10 кгм на каждый метр длины крыла, если скорость равна 14 м/сек, а ширина крыла 1 м.

При возрастании скорости и ширины момент растет пропорционально произведению их квадратов. Таким образом может получиться очень значительный момент, стремящийся опрокинуть аппарат. Это поясняет, насколько опасно наклонение аэроплана вперед при полете.

— — — — —

ТЕОРИЯ РЕШЕТЧАТОГО КРЫЛА

В предлагаемой статье разъясняется действие плоскопараллельного потока на преграждающую его бесконечную решетку, составленную из параллельных пластинок одинаковой ширины. Слегка изменив формулы, мы можем придать перьям решетки очертания тел с тупым передним и острым задним краем, с которого струи сбегают с конечною скоростью.

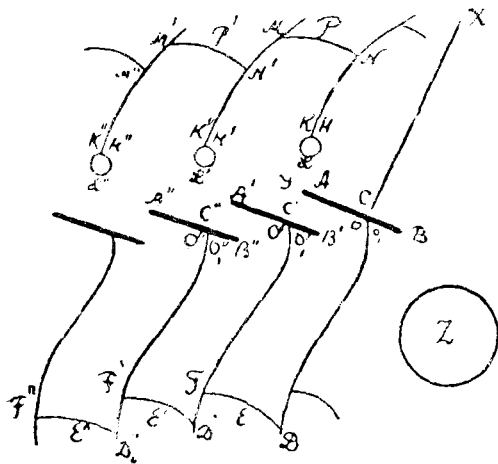
Ставя перед собою задачу о решетке, я имел в виду, хотя приблизительно, решить вопрос о решетчатом крыле аэроплана, так как представляется довольно вероятным, что аэроплан с такого рода крыльями будет более устойчив при полете. Предварительные опыты, произведенные в трубе университетской лаборатории мною совместно с М. М. Иконниковым, подтверждают это предположение; однако, для большей ясности и убедительности результатов эксперименты эти было бы желательно произвести с большей точностью и обстоятельностью, так как теория, в которой рассматривается бесконечная решетка, само собою разумеется, лишь с недостаточным приближением может быть перенесена на случай решетки с конечным числом перьев. Тот же анализ и с таким же приближением решает вопрос о многопланном крыле аэроплана, как это показано при разборе одного из частных случаев задачи.

Анализ, приводимый в этой работе, мною получен в 1911 г.; основные результаты в связи с произведенными в университетской лаборатории наблюдениями сообщены были в 1912 г. II Всероссийскому воздухоплавательному съезду и в апреле 1913 г. Московскому математическому обществу.

Решетка состоит из бесконечного ряда параллельных пластинок ширины $2l$, удаленных друг от друга на расстояние b , считая по перпендикуляру к ним; расстояние между соответственными концами пластинок в направлении, им параллельном, обозначим через a .

Представим себе область решетки, область мнимого переменного $z = x + iy$, сначала ограниченною ступенчатой линией $DEFE'F' \dots$ со стороны $x = -\infty$, а со стороны $x = +\infty$ такой же линией $NPMN'P'M' \dots$ (фиг. 1). При этом за мнимую ось принимаем одну из пластинок. Предположим, что в плоскости z проведены разрезы по всем пластинам и по некоторым линиям одного и того же вида, уходящим от пластин в направлении $-\infty$.

кроме того, из этой области вырежем малые площадки с контурами KLN , $K'L'N'$, ..., от которых отходят в $-\infty$ также однообразные кривые. Затем преобразим себе область z наложенное на полуплоскость мнимого переменного $u = \xi + i\eta$ (фиг. 2) так, что



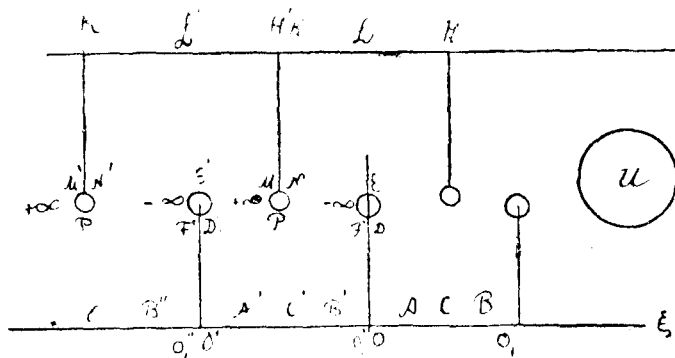
Фиг. 1.

одноименные точки совпадают. В пределе, когда ступенчатые ломанные отходят в бесконечность, кривые MNP , $M'N'P'$, ..., DEF , $D'E'F'$, ... в области u сокращаются в точки; в то же время вырезы KLN , $K'L'N'$, ... области z также обращаются в отдельные точки, которым соответствуют отошедшие в бесконечность отрезки KLN , $K'L'N'$, ... полуплоскости u . Последовательные отрезки $O'O_1$, OO_1 , ... действительной оси всеюмногомного переменного u соответствуют

обеим сторонам последовательных нервов решетки в области z .

Для осуществления указанного преобразования достаточно положить

$$(1) \quad \frac{2\pi z}{a} \cos \mu \cosh \alpha = \cos (\mu - i\alpha) \lg \frac{\operatorname{tg} \frac{i\alpha - u}{2}}{\operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}} - \cos (\mu + i\alpha) \lg \frac{\operatorname{tg} \frac{i\alpha + u}{2}}{\operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}};$$



Фиг. 2.

$\frac{dz}{du}$ изображаем при помощи той или другой из следующих формул:

$$(2) \quad \frac{\pi dz}{a du} = \frac{i \sinh \alpha}{\cos \mu} \frac{\cos (u - \mu)}{\sin^2 u + \sinh^2 \alpha}$$

или

$$(2') \quad \frac{2\pi dz}{a du} \cos \mu \cosh \alpha = \frac{\cos(\mu - i\alpha)}{\sin(u - i\alpha)} - \frac{\cos(\mu + i\alpha)}{\sin(u + i\alpha)}.$$

Связь количеств α, μ с расстоянием b между перьями решетки и их шириною $2l$ найдется¹⁾ на основании ф-л (1) и (2'), из условий,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(iu - b)}{a} \cos \mu \cosh \alpha &= 2\pi i \cdot \frac{2\pi}{a} \cos \mu \cosh \alpha \Big/ \operatorname{Res}_{\substack{u=i\alpha, \\ z=-\infty}} \frac{dz}{du} = 2\pi i \cos(\mu - i\alpha), \\ \frac{2\pi \cdot 2li}{a} \cos \mu \cosh \alpha &= \Big/ \frac{2\pi z}{a} \cos \mu \cosh \alpha = \\ &= \cos(\mu - i\alpha) \lg \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{3\pi}{4} - \frac{\mu}{2}\right)} - \cos(\mu + i\alpha) \lg \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right)}; \end{aligned}$$

эти условия, по упрощении, приводят к формулам

$$(3) \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \mu \operatorname{tgh} \alpha,$$

$$(4) \quad \frac{\pi l}{a} = \operatorname{arctg} \frac{\cos \mu}{\sinh \alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \mu \operatorname{tgh} \alpha \lg \frac{\cosh \alpha + \sin \mu}{\cosh \alpha - \sin \mu}.$$

Положив

$$(3') \quad \frac{\cos \mu}{\sinh \alpha} = n = \operatorname{tg} \beta,$$

причем, на основании ф-лы (3),

$$(4') \quad \frac{\sin \mu}{\cosh \alpha} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \beta = n \operatorname{tg} \sigma,$$

получим для определения ширины пластинки формулу

$$(5) \quad \frac{\pi l}{a} = \operatorname{arctg} n + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \lg \frac{1 + n \frac{b}{a}}{1 - n \frac{b}{a}}$$

¹⁾ Знак $\Big/ \operatorname{Res}_{\substack{u=\alpha \\ u=\infty}} f(u)$ изображает $\lim_{u \rightarrow \infty} (u - a) f(u)$.

или

$$(5) \quad \frac{\pi l}{a} = \beta + \frac{1}{2} \log \frac{\cos(\beta - \sigma)}{\cos(\beta + \sigma)}.$$

При заданных l и σ , этими формулами определяется n или β .

В частном случае, если перья решетки лежат в одной плоскости и $b=0$, $\sigma=0$, имеем

$$(6) \quad \mu=0, \quad \beta = \frac{\pi l}{a}, \quad \sinh \alpha = \cotg \frac{\pi l}{a}.$$

В другом предельном предположении, когда перья решетки лежат друг над другом так, что линия, соединяющая их середины, к ним перпендикулярна, стало быть $a=0$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$, мы должны положить

$$\mu = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 0,$$

и тогда из (4) найдем

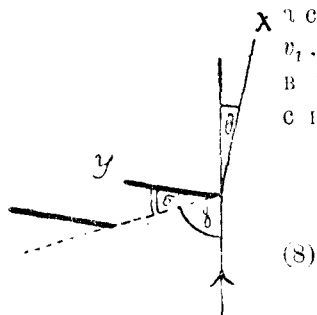
$$(7) \quad \cosh \alpha = \cotgh \frac{\pi l}{b}.$$

Обратимся к определению потока. Предполагаем, что в бесконечной дали с той стороны, откуда поток набегаёт, скорость есть v_0 и давление p_0 , а с противоположной те же количества обозначим через v_1 , p_1 ; пусть далее γ и γ_1 представляют величины углов в указанных областях потока, которые он образует с направлением линии решетки (фиг. 3).

Из чертежа легко усматриваем связь

$$\theta_0 = \gamma + \sigma - \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_1 = \gamma_1 + \sigma - \frac{\pi}{2}$$



Фиг. 3.

между углами потока с осью x и линией решетки.

Обозначив через φ и ψ потенциал скоростей и функцию тока, через v и θ — переменную скорость и ее угол с осью x , через w — мнимое переменное $\varphi + i\psi$, положим

$$(9) \quad \frac{i}{v_0} \frac{dw}{dz} = N \frac{\sin \frac{u - \lambda}{2}}{\sin \left(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)},$$

где N реально.

При этом $\frac{dw}{du}$ будет реально на контуре пера, как это и надлежит, ибо этот контур должен представить часть линии тока. Скорость имеет

бесконечно большую величину на переднем крае каждого пера, который поток обегает, меняя мгновенно свое направление.

Для определения введенных постоянных имеем, полагая в (9) последовательно

$$\begin{aligned} z &= -\infty, & u &= i\alpha, \\ z &= +\infty, & u &= \pi + ix \end{aligned}$$

и принимая во внимание ф-лы (8):

$$\begin{aligned} -e^{-\gamma i - \sigma i} &= N \frac{\sin \frac{i\alpha - \lambda}{2}}{\sin \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)}, \\ -\frac{v_1}{v_0} e^{-\gamma_1 i - \sigma i} &= N \frac{\cos \frac{ix - \lambda}{2}}{\cos \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)}; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} e^{-\gamma i} &= -N_1 \frac{\sin \frac{i\alpha - \lambda}{2} \cos(\mu - ix)}{\sin \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)}, \\ \frac{v_1}{v_0} e^{-\gamma_1 i} &= -N_1 \frac{\cos \frac{i\alpha - \lambda}{2} \cos(\mu - ix)}{\cos \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)}; \\ N_1 \cos^2 \mu + \sinh^2 \alpha &= N. \end{aligned}$$

Эти уравнения устанавливают как значения N и λ , так и соотношения между скоростями набегающего и уходящего потока. Для нас важны лишь последние, к выводу которых мы и перейдем.

Из приведенных уравнений находим

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_0} e^{i\gamma - i\gamma_1} &= \operatorname{tg} \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) \operatorname{cog} \frac{i\alpha - \lambda}{2}, \\ \frac{v_1}{v_0} e^{i\gamma + i\gamma_1} &= -\frac{\sin \left(\frac{ix}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \cos \frac{ix + \lambda}{2}}{\cos \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right) \sin \frac{i\alpha - \lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Умножив первое из этих уравнений на $\sin \left(\frac{i\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2} \right) \cosh \alpha$, второе на $\sin \left(\frac{i\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{2} \right)$ и сложив, мы, в результате простых преобразо-

ваний, получаем следующие два соотношения между скоростями уходящего и набегающего потока:

$$(16) \quad \begin{aligned} v_1 \sin \gamma_1 &= v_0 \sin \gamma, \\ v_1 \cos \gamma_1 (\cosh \alpha - \sin \mu) &= v_0 \cos \gamma (\cosh \alpha + \sin \mu) + 2v_0 \sin \gamma \cos \mu \coth \alpha. \end{aligned}$$

Первая из этих формул могла бы быть написана заранее, так как она вытекает из простого свойства несжимаемости жидкости.

Переходим к определению силы, действующей на перо решетки. Для этого пользуемся общею формулою ¹⁾

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int \frac{dw}{dz} dw,$$

в которой Y и X суть слагающие сил давления по соименным осям, ρ — плотность жидкости, а интеграция производится по контуру пера в направлении, определяемом движением от оси X к оси Y . Легко видеть, что интеграл этот будет равен сумме интегралов по бесконечно малым контурам, охватывающим полюсы $u = i\alpha$, $u = \pi + i\alpha$ в области мнимого переменного u .

Изобразив интеграл в форме

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{du} du,$$

легко убеждаемся, что сумма эта представляется в виде

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} 2\pi i \left\{ \int_{u=i\alpha}^{u=i\alpha} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \left/ \operatorname{Res} \frac{dz}{du} \right. + \int_{u=\pi+i\alpha}^{u=\pi+i\alpha} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \left/ \operatorname{Res} \frac{dz}{du} \right. \right\}.$$

Имеем прежде всего

$$(Y + iX) e^{i\sigma} = Y' + iX',$$

где Y' и X' суть слагающие силы давления по направлениям линии решетки и перпендикуляр к ней.

По ф-лам (2')

$$\begin{aligned} \int_{u=i\alpha}^{u=i\alpha} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 e^{2i\sigma} &= v_0^2 e^{-2i\gamma}, \\ \int_{u=\pi+i\alpha}^{u=\pi+i\alpha} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 e^{2i\sigma} &= v_1^2 e^{-2i\gamma_1}; \end{aligned}$$

¹⁾ Статья автора: «О давлении плоскоструйного потока на преграждающие тела». Мат. сб., т. XXVIII, 1910.

$$\int_{u=i\alpha}^{\infty} \operatorname{Res} \frac{dz}{du} = \frac{a}{2\pi} [1 + i \operatorname{tg} \sigma] = \frac{ae^{i\sigma}}{2\pi \cos \sigma},$$

$$\int_{u=\pi+i\alpha}^{\infty} \operatorname{Res} \frac{dz}{du} = -\frac{ae^{i\sigma}}{2\pi \cos \sigma}.$$

Таким образом получим

$$(11) \quad Y' + iX' = \frac{\rho a i}{2 \cos \sigma} (v_1^2 e^{-2i\gamma_1} - v_0^2 e^{-2i\gamma}).$$

Подставив в эту формулу величины скоростей уходящего потока через скорости набегающего по ф-лам (10), легко получим

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{\rho a}{\cos \sigma} v_0 \sin \gamma (v_1 \cos \gamma_1 - v_0 \cos \gamma) = \\ &= \frac{2 \rho a}{\cos \sigma} \frac{v_0^2 \sin \gamma \sin \mu}{\cosh \alpha - \sin \mu} (\cos \gamma + \sin \gamma \cotg \sigma); \end{aligned}$$

отсюда окончательная формула

$$Y' = \frac{2 \rho a}{\cos^2 \sigma} \frac{n v_0^2 \sin \gamma}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} \sin(\gamma + \sigma),$$

где $n = \operatorname{tg} \beta$ определяется по ширине пера решетки ф-лами (5), (5').

Далее, из ф-лы (11) находим

$$X' = \frac{\rho a}{2 \cos \sigma} (v_1^2 \cos^2 \gamma_1 - v_0^2 \cos^2 \gamma);$$

воспользовавшись соотношениями (10), преобразуем эту формулу и получаем для компонента, перпендикулярного к линии решетки, выражение

$$X' = \frac{2 \rho a}{\cos^2 \sigma} \frac{n v_0^2}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} \left\{ \cos \gamma + \frac{n}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} \frac{\sin(\gamma + \sigma)}{\cos \sigma} \right\} \sin(\gamma + \sigma).$$

Формулы Y' и X' легко приводят к окончательным выражениям для подъемной силы P и силы сопротивления Q , при помощи соотношений

$$\begin{aligned} P &= X' \cos \gamma + Y' \sin \gamma, \\ Q &= X' \sin \gamma - Y' \cos \gamma. \end{aligned}$$

Введя для краткости обозначения эффективной ширины пера решетки L числа h при помощи равенств

$$L = \frac{a}{\cos^2 \sigma}, \quad h = \frac{n}{1 - n \operatorname{tg} \sigma},$$

мы. после весьма понятных упрощений, получим следующие формулы для P и Q :

$$P = 2\rho L h v_0^2 \sin(\gamma + \sigma) \left\{ 1 + h \frac{\cos \gamma}{\cos \sigma} \sin(\gamma + \sigma) \right\}, \quad (12)$$

$$Q = 2\rho L h^2 v_0^2 \frac{\sin \gamma}{\cos \sigma} \sin^2(\gamma + \sigma).$$

Напомним значения постоянных в этих формулах; γ есть угол, образуемый набегающим потоком с линией решетки, σ — угол пера решетки с той же линией; следовательно, $\gamma + \sigma$ — угол атаки по отношению к пластинке, представляющей перо; что касается эффективной ширины L пластинки, то она равна отношению расстояния между серединами, или, что то же, одноименными концами двух соседних перьев к косинусу угла σ . Наконец, через ρ обозначена плотность жидкости.

Чтобы иметь более ясное представление о величине равнодействующих сил давления, рассмотрим их для двух частных случаев, а именно: 1) когда σ близко к нулю и в пределе нуль — случай плоской решетки, и 2) когда σ близко к прямому углу — случай многопланного крыла.

1) Полагая в ф-ле (5)

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \sigma = m$$

и отбрасывая в виду малости m его степени выше второй, получим

$$\begin{aligned} n &= (1 - m^2) \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}, \\ L &= \frac{a}{\cos^2 \sigma} = a(1 + m^2), \quad nL = a \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}, \\ \frac{1}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} &= \frac{1}{1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}, \\ \frac{h}{\cos \sigma} &= \frac{n(1 + m^2)}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}, \end{aligned}$$

и затем формулы для P и Q можем изобразить в виде

$$\begin{aligned} P &= 2\pi l \rho v_0^2 \sin(\gamma + \sigma) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a}} \left(\frac{1}{1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}} + \frac{\cos \gamma \sin(\gamma + \sigma)}{\left(1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}\right)^2} \frac{\pi l}{a} \right) = \\ &= 2\pi l \rho v_0^2 \sin(\gamma + \sigma) K; \end{aligned}$$

$$(14) \quad Q = 2\pi l \rho v_0^2 \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a} \sin \gamma \sin^2 (\gamma + \sigma) \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a} \left(1 - m \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a} \right)^2}.$$

Ф-ла (13) показывает, что подъемная сила, действующая на перо решетки, будет превосходить силу, которая действовала бы на пластинку той же ширины, отдельно стоящую в потоке, если $\gamma < \frac{\pi}{2}$; ибо эта последняя сила, равная $2\pi l \rho v_0^2 \sin (\gamma + \sigma)$, умножается на величину K , тогда большую единицы. Разумеется, в случае конечной решетки превышение не будет столь значительно, как дает ф-ла (13). Для предельного предположения плоской решетки $\sigma = 0$ мы имеем точные формулы

$$P = 2\pi l \rho v_0^2 \sin \gamma \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a}} \left\{ 1 + \sin \gamma \cos \gamma \operatorname{tg} \frac{\pi l}{a} \right\},$$

$$Q = 2\pi l \rho v_0^2 \sin^3 \gamma \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi l}{a}}{\frac{\pi l}{a}}.$$

Формула для силы сопротивления Q показывает, что теория не охватывает совершенно этой величины, ибо ее порядок при малых углах атаки ниже того, который дается ф-лой (14).

2) Рассмотрим теперь случай многопланной поверхности (фиг 4), когда σ близко к прямому углу и малым количеством будет

$$\cotg \sigma = q.$$

При этом предположении имеем, обозначая угол атаки на перо через δ :

$$\gamma + \sigma = \pi - \delta,$$

$$\gamma = \pi - \delta - \sigma = \frac{\pi}{2} - \delta + s,$$

где s — малый угол,

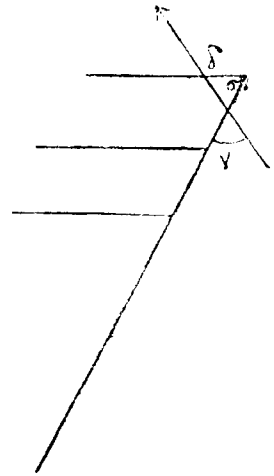
$$\operatorname{tg} s = q.$$

Далее, находим

$$L = \frac{a}{\cos^2 \sigma} = \frac{b(q^2 + 1)}{q},$$

и из ф-лы (5), сохраняя вторые слагаемые q ,

$$\frac{n}{q} = \operatorname{th} \frac{\pi l}{b} \left\{ 1 - \frac{q^2}{\cosh^2 \frac{\pi l}{b}} \right\},$$



Фиг. 4.

$$\frac{n}{1 - n \operatorname{tg} \sigma} = \frac{nq}{q - n} = \frac{q \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b} \left\{ 1 - \frac{q^2}{\cosh^2 \frac{\pi l}{b}} \right\} \left\{ 1 - \frac{q^2 \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b}}{\cosh^2 \frac{\pi l}{b} \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b} \right)} \right\}}{1 - \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b}}.$$

После подстановки в ф-лу (12), отбросив степени q выше второй, получаем для подъемной силы многопланного крыла на всякий план величину

$$(15) \quad P = \rho b v_0^2 \left(e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1 \right) \sin \delta \left(1 - q^2 \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b} \right) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{q}{2} \left(e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1 \right) \sin(\delta - s) \sin \delta \right\};$$

если поток перпендикулярен к линии, соединяющей средние точки планов, то $\delta = s$, и мы можем изобразить подъемную силу одного плана в виде

$$(16) \quad P = 2\pi l \rho v_0^2 \sin s \frac{e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1}{\frac{2\pi l}{b}} \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b} \operatorname{tg}^2 s \right) = P_1 \cdot K.$$

Множитель

$$K = \frac{e^{\frac{2\pi l}{b}} - 1}{\frac{2\pi l}{b}} \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{\pi l}{b} \operatorname{tg}^2 s \right)$$

значительно превосходит единицу при $l \geq b$; поэтому подъемная сила P плана, входящего в состав многопланного крыла, должна быть значительно больше P_1 , подъемной силы отдельного плана в бесконечном потоке.

К этому выводу, разумеется, вполне прилагается оговорка, которая была сделана при рассмотрении первого частного случая.

Укажем, далее, как изменить анализ для того, чтобы получить решетку с перьями криволинейного профиля с острием сзади (фиг. 5). Набегающий поток образует на перьях критические точки нулевой скорости $A, A', A'', \dots$ и сбегает с каждого пера в точке заострения $B, B', B'', \dots$ с конечной скоростью.

Обобщая ф-лу (2'), положим

$$(17) \quad \frac{1}{a} \frac{dz}{du} = \frac{A}{\sin(u - i\alpha) + \sin(c + i\alpha)} + \frac{B}{\sin(u + m + i\beta) - \sin(b + i\beta)},$$

где α, β — положительные числа; α', β' — числа реальные, удовлетворяющие неравенствам $\alpha > |\alpha'|$, $\beta > |\beta'|$; b, c, m — какие угодно реальные числа,

лежащие между -2π и 2π ; комплексные числа A и B определяются из условия наличия действительного корня у функции (17).

Для этого достаточно положить

$$A = \sin(g + i\lambda + i\alpha), \quad B = \sin(m + i\beta - g - i\lambda),$$

если

$$(18) \quad \sin(g + i\lambda + i\alpha) \sin(b + i\beta) - \sin(m + i\beta - g - i\lambda) \sin(c + i\alpha') = \\ = \sin(m + i\alpha + i\beta) \sin(g + i\lambda + \mu).$$

При этих условиях (17) приобретает вид

$$(19) \quad \frac{1}{a} \frac{dz}{du} = \frac{\sin(m + i\alpha + i\beta) \{ \sin(u + g + i\lambda) - \sin(g + \mu + i\lambda) \}}{[\sin(u - i\alpha) + \sin(c + i\alpha')] [\sin(u + m + i\beta) - \sin(b + i\beta)]}$$

В ф-лу (19), кроме масштабной длины a , входят 10 чисел, которые должны удовлетворять двум соотношениям, вытекающим из (18) по разделению действительной и мнимой части. Таким образом, мы получаем решетку, перья которой характеризуются восемью числами, удовлетворяющими лишь условиям в форме неравенств:

$$\alpha > |\alpha'|; \quad \beta > |\beta'|; \quad \lambda > 0.$$

Ур-ние (18) приводится к виду

$$(20) \quad \operatorname{tg}(g + i\lambda) = \\ = \frac{\sin(m + i\beta) \sin(c + i\alpha') + \sin(m + i\alpha + i\beta) \sin \mu - i \sinh \alpha \sin(b + i\beta')}{\cos(m + i\beta) \sin(c + i\alpha') - \sin(m + i\alpha + i\beta) \cos \mu + \cosh \alpha \sin(b + i\beta')}.$$

Ур-ние (17) переписывается в форме

$$\frac{1}{a} \frac{dz}{du} = \frac{A}{2 \cos(c + i\alpha')} \left\{ \cotg\left(\frac{u+c}{2} - i \frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{u-c}{2} - i \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) \right\} + \\ + \frac{B}{2 \cos(b + i\beta')} \left\{ \cotg\left(\frac{u+m-b}{2} + i \frac{\beta - \beta'}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{u+m+b}{2} + i \frac{\beta + \beta'}{2}\right) \right\}$$

откуда, по интегрировании и замене A и B их значениями,

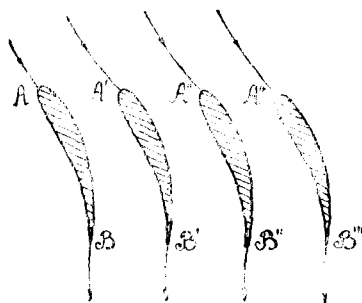
$$(21) \quad \frac{z}{a} = \frac{\sin(g + i\lambda + i\alpha)}{\cos(c + i\alpha')} \operatorname{lg} \frac{\sin\left(\frac{u+c}{2} - i \frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u-c}{2} + i \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right)} + \\ + \frac{\sin(m + i\beta - g - i\lambda)}{\cos(b + i\beta')} \operatorname{lg} \frac{\sin\left(\frac{u+m-b}{2} + i \frac{\beta - \beta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u+m+b}{2} + i \frac{\beta + \beta'}{2}\right)}.$$

Подбором свободных коэффициентов можно достичь весьма большого разнообразия в очертании пера решетки. В частности, можно получить и криволинейное очертание пера с острыми концами с обеих сторон.

В самом деле, в общем случае уравнение (19) даст два корня функции $\frac{dz}{du}$ в области переменного u , а именно:

$$1) u = \mu \quad \text{и} \quad 2) u = \pi - \mu - 2\eta - 2i\lambda;$$

первый соответствует заострению на заднем конце, второй лежит вне области, занятой жидкостью, и передний конец пера решетки. Поэтому, имеет плавные очертания.



Фиг. 5.

Ясно, что если $\lambda = 0$, то и второй корень соответствует некоторой точке контура пера, и оно будет заострено с обоих концов; такой вид имеют обычно лопасти паровой турбины.

Чтобы такое обстоятельство имело место, необходимо и достаточно удовлетворить требование $\lambda = 0$ в ф-ле (20). Это налагает на коэффициенты, характеризующие перо, требование, сводящееся к пропорциональности действительной и мнимой части в числителе и знаменателе дроби ф-лы (20).

Положив для краткости

$$\begin{aligned} \sin(c + i\alpha') &= k + in, \\ \sin(b + i\beta') &= k_2 + in_2, \\ \sin(m + i\alpha + i\beta) &= k_1 + in_1, \end{aligned}$$

мы приведем указанную пропорцию к виду

$$\begin{aligned} & \sinh \beta \cosh \beta (k^2 + n^2) - \sinh \alpha \cosh \alpha (k_2^2 + n_2^2) - \\ (22) \quad & - (kk_2 + nn_2) \cos n \sinh(\alpha - \beta) - (kk_1 + nn_1) \sinh \beta \cos(\mu + m) + \\ & + (kn_1 - nk_1) \cosh \beta \sin(\mu + m) + (k_1k_2 + n_1n_2) \sinh \alpha \cos \mu - \\ & - (k_1n_2 - n_1k_2) \cosh \alpha \sin \mu = 0. \end{aligned}$$

Условие (22) может быть удовлетворено весьма различными частными предположениями относительно входящих в него восьми свободных коэффициентов. В виде примеров укажем:

$$a) \quad \alpha = \beta; \quad k = k_2; \quad n = n_2; \quad m + 2\mu = 0$$

или

$$m + 2\mu = 2\pi;$$

тогда

$$\sin(c + i\alpha') = \sin(b + i\beta') = k + in,$$

и ф-ла (20) дает

$$(23) \quad \operatorname{tg} g = \operatorname{tg} \frac{m}{2} = -\operatorname{tg} \mu.$$

$$b) \quad \alpha = \beta; \quad k = n_2; \quad n = -k_2; \quad m = 0$$

или

$$m = \pi;$$

в этом предположении имеем

$$(24) \quad \begin{aligned} i \sin(c + i\alpha') &= \sin(b + i\beta'), \\ \operatorname{tg} g &= \operatorname{tgh} \alpha = -\operatorname{tg} \mu. \end{aligned}$$

Случай а) заслуживает особенного внимания по той причине, что каждое перо решетки в этом предположении сводится к дуге некоторой кривой. В самом деле, ур-ние (21), при соответствующих случаю а) связях между коэффициентами, приводится к виду

$$(25) \quad e^{\frac{\alpha_2}{a}} = \frac{\sin\left(\frac{u+c}{2} - i\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right) \sin\left(\frac{u+m-c}{2} + i\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u-c}{2} - i\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) \cos\left(\frac{u+m+c}{2} + i\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)},$$

где

$$\delta = \frac{\sin\left(\frac{m}{2} + i\alpha\right)}{\cos(c + i\alpha')} = \tau e^{\sigma i}.$$

Изменив направление осей поворотом их на угол σ , получим

$$e^{\frac{\alpha_2}{a}} = e^{\frac{\tau \alpha_1}{a}},$$

где z_1 — новое комплексное переменное, вводимое вместо z ; сверх того введем, вместо u , новое переменное

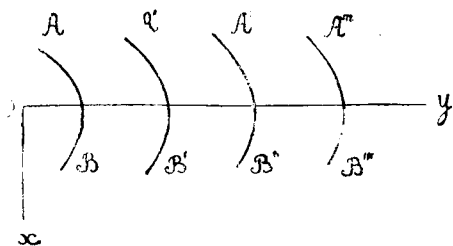
$$u_1 = u + \frac{m}{2},$$

тогда соотношение (25) получает вид

$$(25') \quad e^{\frac{2\pi z_1}{a}} = \frac{\cos(m-c+i\alpha-i\alpha') - \cos u}{\cos(m+c+i\alpha+i\alpha') + \cos u},$$

причем значки у количеств z и u отброшены для простоты письма, $\frac{a}{\tau}$ заменено через новое $\frac{a}{2\pi}$; $\frac{m}{2}$ — через m .

Так как величина z не изменяется при замене u через $2\pi - u$, то при передвижении u по действительной оси в его области от нуля до 2π , когда соответственная точка b области z обойдет контур пера, она во всякое положение будет приходить дважды: а это показывает, что перо решетки представляет собою дугу некоторой кривой.



Фиг. 6.

Период решетки, очевидно, равен по длине количеству a . В точках A и B z имеет значения, опре-

деляемые из соотношений

$$e^{\frac{2\pi i z_1}{a}} = - \frac{\sin^2 \left(\frac{m-c}{2} + i \frac{z-\alpha'}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{m+c}{2} + i \frac{z+\alpha'}{2} \right)};$$

$$e^{\frac{2\pi i z_2}{a}} = - \frac{\cos^2 \left(\frac{m-c}{2} + i \frac{z-\alpha'}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{m+c}{2} + i \frac{z+\alpha'}{2} \right)}.$$

Что касается характеристической функции потока $w = \varphi + i\psi$, то приняв во внимание соотношение (19), ее производную по u мы определяем формулой

$$(26) \quad \frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = N \frac{\sin \frac{u-\mu}{2} \sin \frac{u+\mu}{2}}{\sin(s'-if) \sin(s'+if) \cos(s''-ih) \cos(s''+ih)};$$

здесь

$$s' = \frac{u+c}{2}, \quad s'' = \frac{u-c}{2},$$

$$f = \frac{\alpha-\alpha'}{2}, \quad h = \frac{\alpha+\alpha'}{2}.$$

Поток сбегает с конечной скоростью с пера решетки в точке заострения $u = \mu$, где $\frac{dw}{du}$ и $\frac{dz}{du}$ одновременно обращаются в нуль. Из (19) и (20) имеем

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{2N}{\sin(m+i\alpha+i\beta) \{ \sin(u+i\alpha) + \sin(c-i\alpha') \} \cos \frac{u+2g+\mu+2i\alpha}{2}} \sin \frac{u+\mu}{2} \{ \sin(u+m+i\beta) - \sin(b+i\beta') \}.$$

Все вычисления как подъемной силы, так и момента, не представляют собою никаких трудностей, и я не вижу необходимости приводить их здесь.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КРЫЛА МОНОПЛАНА

§ 1. Общие формулы поддерживающей силы и вращающего момента.

В предлагаемой работе мы устанавливаем некоторые общие теоремы, имеющие место независимо от очертаний крыла, исходя из следующих обычных теоретических предположений о потоке. Поток в относительном движении представляем себе плоскопараллельным, а крыло — бесконечно длинным цилиндром, нормальное сечение которого лежит в направляющей плоскости потока. Сжимаемости воздуха и вязкости его во внимание не принимаем. Наконец, рассматриваем такое невихревое течение, при котором весь контур крыла омывается одной из линий тока, имеющей на этом контуре две точки раздела, в одной из которых поток набегаёт, а в другой стекает с крыла. Если эти точки — обыкновенные точки кривой контура, то скорость в них будет нулем; если же какая-нибудь из них представляет точку возврата, то поток может обладать в ней и конечною скоростью. Наконец, на крыле могут существовать точки заострения и в иных местах; в таких пунктах скорость течения будет иметь величину бесконечно большую. Предположим, сверх того, что поток покидает крыло всегда в одной и той же точке, независимо от угла встречи.

Область мнимого переменного z , область течения, как известно, всегда возможно конформно изобразить на верхней полуплоскости мнимого переменного u так, что действительная ось полуплоскости будет соответствовать контуру крыла.

Бесконечно удаленная точка области z при этом будет отображаться в некотором определенном пункте $u = \alpha$ на полуплоскости; значение $u = \alpha$ представляет простой полюс функции z , так как при обходе вокруг этой точки z должно вернуться к исходной величине.

Если так, то вблизи полюса мы должны иметь

$$(1) \quad \frac{z}{a} = \frac{A}{u - \alpha} + f(u - \alpha), \quad \frac{1}{a} \frac{dz}{du} = - \frac{A}{(u - \alpha)^2} + f'(u - \alpha),$$

где a — линейная величина, A — некоторое комплексное число, а f — голоморфная функция своего аргумента. Коэффициенты A , α , равно как и вид функции f , определяются исключительно формой крыла, несколько не завися от рассматриваемого течения.

Обозначим через φ и ψ соответственно потенциал скоростей и функцию тока. Так как на действительной оси области u

$$\psi = \text{const} = 0,$$

то производная функции

$$w = \varphi + i\psi,$$

характеризующей поток, должна быть на указанной оси всюду реальна; в точке $u = \alpha$ она должна иметь полюс второго порядка, так как функция

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta},$$

определяющая собою скорость v и угол ее θ с осью x в области течения, должна в указанной точке иметь заданное конечное значение $v_0 e^{-i\theta_0}$. С полюсом $u = \alpha$ совпадает логарифмическая точка функции w , причем циркуляция вокруг этой точки должна быть вещественным количеством.

Всем указанным требованиям мы удовлетворим, положив

$$(2) \quad \frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = -\frac{Ae^{-i\theta_0}}{(u-\alpha)^2} - \frac{A_1 e^{-i\theta_0}}{(u-\alpha_1)^2} + iC \left(\frac{1}{u-\alpha} - \frac{1}{u-\alpha_1} \right),$$

где α_1 и A_1 — комплексные числа, сопряженные соответственно α и A .

Реальное количество C может быть изображено в виде

$$(3) \quad C = Be^{-i\theta_0} + B_1 e^{i\theta_0},$$

причем B и B_1 — сопряженные комплексные числа.

Положив

$$(4) \quad B = -\frac{iA}{\alpha - \alpha_1}, \quad B_1 = -\frac{iA_1}{\alpha - \alpha_1},$$

мы достигаем того, чтобы производная w обладала только одним конечным корнем, и приводим (2) к виду

$$(5) \quad \frac{1}{av_0} \frac{dw}{du} = (\alpha_1 - \alpha) \frac{Ae^{-i\theta_0}(u - \alpha_1) - A_1 e^{i\theta_0}(u - \alpha)}{(u - \alpha)^2 (u - \alpha_1)^2}.$$

Эта функция обращается в нуль в точке $u = \infty$, которую можно в области z сделать соответствующей неизменной точке схода потока с крыла, и сверх того имеет, как и требовалось, один конечный реальный корень

$$u = \frac{\alpha_1 A e^{-i\theta_0} - \alpha A_1 e^{i\theta_0}}{A e^{-i\theta_0} - A_1 e^{i\theta_0}},$$

который определяет на крыле критическую точку разделения линии тока в месте набегания текущего воздуха.

Весьма важно отметить, что при принятом изображении течения *направление потока в его далеких точках, характеризуемое углом Θ_0 , совершенно не фигурирует в функции, изображающей область течения z на полуплоскости мнимого переменного u .*

Это-то обстоятельство и позволяет разрешить в любом предположении о форме крыла вопрос о характере зависимости от направления потока как поддерживающей силы давления, так и вращающего момента.

Что касается поддерживающей силы, то, как было показано в нашей работе «О давлении плоскопараллельного потока...» (Мат. сб., т. XXVIII), она определяется по формуле Н. Е. Жуковского и имеет величину

$$(6) \quad P = \rho v_0^2 K \sin \sigma.$$

В самом деле, положим

$$(7) \quad A = \lambda e^{i\mu}, \quad A_1 = \lambda e^{-i\mu}, \quad \alpha - \alpha_1 = i\beta, \quad \beta > 0, \quad \lambda > 0;$$

тогда по (3) и (4):

$$C = -\frac{2\lambda}{\beta} \cos(\Theta_0 - \mu), \quad P = -\frac{4\pi\rho v_0^2 \lambda}{\beta} \cos(\Theta_0 - \mu),$$

и если мы примем

$$(8) \quad \sigma = 3\frac{\pi}{2} - \Theta_0 + \mu,$$

то P будет иметь как раз вид (6), причем

$$(9) \quad K = \frac{4\pi\rho\lambda}{\beta}.$$

Так как при $\sigma = 0$ поддерживающая сила обращается в нуль, то σ есть не что иное, как угол, образуемый потоком вдали от крыла, с *критическим направлением*.

Так как $\frac{3\pi}{2} - \Theta_0$ есть угол потока с отрицательным направлением оси Y , то из ф-лы (8) следует, что μ равно углу критического направления с осью Y ; с осью X это направление образует угол $\frac{\pi}{2} + \mu$.

Обратимся, далее, к вычислению вращающего момента M . По формуле, данной мною в цитированной выше статье, величина M равна действительной части выражения

$$I = -\frac{\rho}{2} \int z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 du,$$

где интеграция совершается по контуру, охватывающему полюс, в направлении от оси Y к оси X на полуплоскости u .

Обозначив через Q коэффициент при $\frac{1}{u-\alpha}$ в разложении функции

$$F(u) = z \frac{du}{dz} \left(\frac{dw}{du} \right)^2,$$

мы будем иметь

$$J = \pi i Q,$$

$$M = \text{действит. части } \pi i Q.$$

Из ур-ний (1) и (5) получаем

$$-F(u) = \frac{v_0^2 a^2}{(u-\alpha)^3} \frac{1 + m(u-\alpha) + m_1(u-\alpha)^2 + \dots}{1 - m_1(u-\alpha)^2 + \dots} \times \\ \times \left\{ A e^{-i\Theta_0} - i f(u-\alpha) + \left[C - \frac{A_1 e^{i\Theta_0}}{\beta} \right] \frac{(u-\alpha)^2}{\beta} + \dots \right\}^2.$$

C попрежнему обозначает коэффициент, определяемый ф-лами (3) и (4),

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha_1}{i}, \quad m = \frac{f(0)}{A}, \quad m_1 = \frac{f'(0)}{A}.$$

Составляя, на основании приведенного разложения $F(u)$, коэффициент Q , находим

$$-\frac{1}{v_0^2 a^2} Q = 2m_1 A^2 e^{-2i\Theta_0} + 2A e^{-i\Theta_0} \left(C - \frac{A_1 e^{i\Theta_0}}{\beta} \right) \frac{1}{\beta} - C^2 - 2miCA e^{-i\Theta_0}.$$

Отсюда, раскрыв комплексные числа,

$$m = l + ik, \quad m_1 = l_1 + ik_1,$$

и воспользовавшись ф-лами (3), (4) и обозначениями (7), имеем для реальной части H от iQ следующее выражение:

$$\frac{H}{2v_0^2 a^2 \lambda^2} = \left(-l_1 + \frac{k}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) \sin 2(\Theta_0 - \mu) + \left(k_1 + \frac{l}{\beta} \right) \cos 2(\Theta_0 - \mu) + \frac{l}{\beta},$$

откуда, вводя по (8) угол σ , найдем для момента:

$$(10) \quad M = \pi r H = 2\pi r v_0^2 a^2 \frac{\lambda^2}{\beta} \left\{ -\left(l + k_1 \beta \right) \cos 2\sigma + \left(k - l_1 \beta + \frac{1}{\beta} \right) \sin 2\sigma + l \right\}.$$

Опрокидывающий момент M_0 , соответствующий критическому направлению потока, получается из (10), положив в нем $\sigma = 0$; таким образом,

$$(11) \quad M_0 = -2\pi r v_0^2 a^2 \lambda^2 k_1.$$

Положив

$$(12) \quad \begin{aligned} \lambda(l + k_1\beta) &= g, \\ \lambda\left(k - l_1\beta + \frac{1}{\beta}\right) &= \\ \lambda k_1\beta &= q \end{aligned}$$

и пользуясь (9), приводим засим ф-лу (10) к окончательному виду

$$(13) \quad 2M = a^2 v_0^2 K(-g \cos 2\sigma + h \sin 2\sigma - q + g).$$

Отметим то важное обстоятельство, что как коэффициент K ф-лы (6) определяющей поддерживающую силу, так и коэффициенты формулы вращающего момента зависят исключительно от очертаний крыла; в состав K входит множителем лишь один посторонний элемент — плотность воздуха.

§ 2. Парабола устойчивости. Перейдем теперь к определению геометрического места метacentра в крыле, и покажем, что при любом его сечении таким местом будет парабола.

Ось Y в области z направим по критическому направлению, так что угол потока с ее отрицательным направлением будет σ .

Обозначая через x и y координаты метacentра и имея в виду, что он определится как пересечение перпендикулярной к направлению потока линии действия поддерживающей силы с таковою же линией при бесконечно малом отклонении течения, легко находим для интересующих нас координат следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= M - P(x \sin \sigma + y \cos \sigma) = 0, \\ \Phi'(\sigma) &= 0. \end{aligned}$$

По приведении с помощью ф-л (6) и (13), эти уравнения обращаются в следующие:

$$\begin{aligned} (x - ag) \cos 2\sigma - (y - ah) \sin 2\sigma &= x + ag - ag, \\ (x - ag) \sin 2\sigma + (y - ah) \cos 2\sigma &= 0, \end{aligned}$$

откуда имеем уравнение искомого геометрического места:

$$(14) \quad (x - ag)^2 + (y - ah)^2 = (x + ag - ag)^2.$$

Оно представляет собою параболу с фокусом в точке, координаты которой суть

$$x_1 = ag, \quad y_1 = ah,$$

и директрисой

$$x = a(y - q),$$

параллельной критическому направлению потока. Расстояние директрисы от начала координат, очевидно, равно числовой величине количества $a(y - q)$, а параметр параболы равен aq .

Ясно, что большая или меньшая устойчивость моноплана, снабженного крыльями данного очертания, зависит от вида и расположения найденной нами параболы: чем она острее, т. е. чем меньше ее параметр, тем аппарат устойчивее, так как тем ближе к крылу будет расположен метациентр. Естественно поэтому назвать место метациентров *параболой устойчивости*.

Обратимся теперь к выяснению связи этой кривой с величиной поддерживающей силы, ее вращающим моментом и положением линии действия силы. Что касается линии действия, то она будет касательной параболы в соответственном метациентре. Так как перпендикуляр из фокуса на касательную встречает ее на прямой, прикасающейся к параболе в вершине ее, то мы приходим к следующему правилу: Пусть даны фокус и директриса параболы устойчивости; *через середину перпендикуляра из фокуса на директрису проводим параллель этой прямой, тогда та точка, где проведенное из фокуса направление потока встречает указанную параллель, будет принадлежать линии действия, которая, по свойству течения, перпендикулярна к направлению потока*.

Вычислим теперь вращающий момент M_1 по отношению к фокусу. Очевидно,

$$M = -Pd,$$

если d есть расстояние от фокуса до той касательной параболы, по которой направлена сила. Подставляя сюда величину силы из формулы (6) и замечая, что $d \cdot \sin \sigma$ есть проекция d на ось параболы, равная, по указанному выше свойству параболы, половине ее параметра, мы приходим к следующему выражению для M_1 :

$$(15) \quad 2M_1 = -Ka^2v_0^2q,$$

которое, на основании ф-л (9), (11) и (12), приводится к еще более простому виду

$$(15') \quad M_1 = M_0.$$

Таким образом, *силы давления воздуха на крыло приводятся к равнодействующей P , проходящей через фокус, и постоянной паре, момент которой равен опрокидывающему моменту и которую можно назвать опрокидывающей парой*.

Наконец, величина силы определяется следующим простым построением: *проведем через фокус окружность, прикасающуюся к оси параболы и расположенную по ту сторону оси, где находится задний конец крыла. диаметр окружности*

$$D = av_0^2K;$$

тогда эта окружность представляет собою геометрическое место конца, проведенного из фокуса вектора силы P .

В заключение этого параграфа отметим один важный особый вид профиля. Возможно подобрать такое очертание его, что коэффициент q ф-л (12) окажется нулем; для этого достаточно, чтобы k_1 равнялось нулю. Тогда параметр параболы устойчивости также обратится в нуль; опрокидывающий момент, в свою очередь, будет равен нулю.

В таком случае поддерживающая сила будет всегда проходить через неизменную точку в крыле, представляющую собою фокус дегенерированной в двойной прямолинейный отрезок параболы устойчивости.

Координаты этой точки определяются, поэтому, попрежнему, ф-лами (12) и имеют величину ay, ah .

Отмечаемые особые формы профиля выгодны для рулей самолета.

§ 3. Изображающие дуги и главная дуга. Применим указанный выше прием к простейшему случаю, когда сечением крыла будет дуга круга. Приняв за начало центр дуги и направив ось Y параллельно ее хорде, мы можем положить

$$z = -a \frac{(u + ie^{-i})(u - ie^{-i})}{(u - ie^{i})(u + ie^{i})} e^{si},$$

где s подлежит определению. Ясно, что при реальном u модуль правой части равен a и, следовательно, все точки, соответствующие таким u , находятся на окружности радиуса a . Заметим, с другой стороны, что при замене u на $-u$ функция z не меняет величины; поэтому крайними точками дуги будут те, для которых u принимает значения 0 и ∞ . Для них соответственно имеем

$$z = -ae^{(s-4\pi)i}, \quad z = -ae^{si}$$

и, положив $s = 2\tau$, видим, что точки эти расположатся симметрично относительно оси Y . Вся дуга лежит со стороны отрицательных X , причем точка $u = \infty$ имеет отрицательную ординату. Угол τ есть четверть угла, стягиваемого дугою. Таким образом,

$$\begin{aligned} z &= -a \frac{u^2 + e^{-2i}}{u^2 + e^{2i}} e^{2\tau i} = \\ (16) \quad &= -ae^{2\tau i} + \frac{2ai \sin 2\tau e^{2\tau i}}{(u - ie^{\tau i})(u + ie^{\tau i})}. \end{aligned}$$

В данном случае имеем $\alpha = ie^{-i}$, и разложение z в области этого полюса имеет вид

$$z = a \sin 2\tau e^{i\tau} \left\{ \frac{1}{u - \alpha} - \frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau} - \frac{i \sin^2 \tau}{2 \cos \tau} - \frac{e^{-2i}}{4} (u - \alpha) + \dots \right\}.$$

Сравним это выражение с общим разложением, приведенным в § 1. и приняв обозначения (7), (8) и (9) этого параграфа, получаем для данного случая:

$$\begin{aligned} \lambda e^{i\tau} &= A = \sin 2\tau e^{-i}, & m &= -\frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau} - \frac{i \sin^2 \tau}{2 \cos \tau}, \\ m_1 &= -\frac{e^{-2\tau i}}{4}, & \tau &= \mu, & \lambda &= \sin 2\mu, & \beta &= 2 \cos \mu, \\ l &= -\frac{\cos^2 \mu}{2 \sin \mu}, & k &= -\frac{\sin^2 \mu}{2 \cos \mu}, & l_1 &= -\frac{\cos 2\mu}{4}, \\ & & k_1 &= -\frac{\sin 2\mu}{4}. \end{aligned}$$

Далее, по ф-лам (12) имеем

$$(12') \quad \begin{cases} g = -\cos^3 \mu \cos 2\mu, \\ h = \cos^3 \mu \sin 2\mu, \\ q = 2 \sin^2 \mu \cos^3 \mu, \quad g - q = -\cos^3 \mu, \end{cases}$$

а по (6) и (13) для силы и ее момента находим

$$(17) \quad \begin{aligned} P &= 4\pi\rho a v_0^2 \sin \mu \sin \sigma, \\ M &= -4\pi\rho a^2 v_0^2 \sin \mu \cos^3 \mu \sin^2 (\sigma - \mu). \end{aligned}$$

Опрокидывающий момент $M_0 = -4\pi\rho a^2 v_0^2 \sin^3 \mu \cos^3 \mu$.

Так как угол потока с отрицательным направлением оси Y есть $\sigma - \mu$, как это следует из ф-лы (8), то мы приходим к известному правилу для нахождения критического направления в рассматриваемом случае: оно совпадает для крыла, опирающегося на дугу круга, с прямою, соединяющею задний конец крыла с его среднею точкою.

Если мы теперь изменим направление осей, сделав OY параллельной критическому направлению, то по § 2 ф-лы (14) определяют нам соответственную параболу устойчивости. Именно, координаты ее фокуса получатся умножением на радиус a первых двух коэффициентов g и h , а q будет параметр. $a \cdot \cos^3 \mu$ — расстояние от центра до директрисы. Так как таково же расстояние от центра до фокуса, то центр лежит на параболе устойчивости. Эта точка будет, очевидно, метacentром для потока, направленного параллельно хорде дуги, так как, в виду симметрии течения, вращающий момент по отношению к центру для такого направления будет нулем. Таким образом, парабола устойчивости дуги круга касается среднего радиуса в центре дуги.

Самое построение директрисы и фокуса крайне просто: директриса проходит через середину стрелки параллельно критическому направлению, а фокус лежит на пересечении прямой, проведенной через ту же точку параллельно линии, соединяющей середину дуги с передним концом крыла, и биссектора угла, под которым передняя половина крыла видна из центра

Указанными элементами парабола устойчивости вполне определяется.

Покажем теперь, что если имеется крыло с произвольным очертанием, то всегда возможно найти семейство дуг круга, которые имеют ту же самую параболу устойчивости, что и данное крыло; поддерживающая сила крыла и его вращающий момент в таком случае будут пропорциональны соответственной силе и моменту для дуги. Такие дуги будем называть *изображающими дугами*.

Прежде всего посмотрим, как преобразуется выражение (13) для момента, если, не изменяя направлений осей координат, мы переместим начало их в точку с координатами (b, c) .

Так как, при избранных нами осях, когда ось ординат имеет критическое направление, коэффициенты ag и ah ф-лы (13) равны координатам фокуса парабола устойчивости, имеющей совершенно определенное расположение относительно крыла, то новые значения этих коэффициентов должны иметь то же значение при новом начале.

Обозначая поэтому новые g и h через g^1 и h^1 , мы должны иметь

$$ag^1 = ag - b, \quad ah^1 = ah - c.$$

Что касается коэффициента q , то он не изменяется с переменю начала, ибо aq есть параметр парабола устойчивости. Таким образом, с перенесением начала формула момента будет

$$2M = av_0^2 K^1 [(b - ag) \cos 2\sigma + (ah - c) \sin 2\sigma - aq + ag - b].$$

При этом подъемная сила

$$P = av_0^2 K \sin \sigma.$$

Подберем новое начало так, чтобы оно было центром изображающей дуги. Обозначим радиус этой дуги через r ; тогда по ф-лам (17) имеем соответственную силу P^1 и момент M^1 :

$$P^1 = 4\pi\epsilon r v_0^2 \sin \mu \sin \sigma,$$

$$2M^1 = 4\pi\epsilon r v_0^2 \sin \mu [r \cos^3 \mu \cos 2\mu \cos 2\sigma + r \cos^3 \mu \sin 2\mu \sin 2\sigma - r \cos^3 \mu].$$

Из условия

$$\frac{M}{M^1} = \frac{P}{P^1} = T$$

имеем

$$(18) \quad \begin{cases} b - ag = r \cos^3 \mu \cos 2\mu, \\ ah - c = r \cos^3 \mu \sin 2\mu, \\ b - ag + aq = r \cos^3 \mu. \end{cases}$$

Эти формулы показывают, что новое начало, как и следовало ожидать, лежит на параболе устойчивости, ибо координаты b, c удовлетворяют ее уравнению (14).

Если мы произвольно выберем за центр изображающей дуги такую точку параболы, для которой $b - ag > 0$, $ah - c > 0$, то формулами

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{b - ag}{ah - c}, \quad r \cos^3 \mu = b - ag + ag$$

определяются ее центральный угол и радиус, а расположение ее в крыле фиксируется тем, что ее средний радиус прикасается к параболе устойчивости.

Коэффициент T , определяющий отношение подъемной силы и момента крыла к соответственным величинам для изображающей дуги, будет меняться с изменением изображающей дуги.

Возможно определить такую дугу, для которой наступают равенства

$$T = 1, \quad P = P^1, \quad M = M^1.$$

Эту дугу будем называть главной дугою крыла. Ее центр, хорду и стрелку естественно называть центром, хордою и стрелкою крыла.

Из приведенных выше формул для главной дуги имеем два соотношения:

$$2r \sin^2 \mu \cos^3 \mu = ag, \\ 4\pi r \sin \mu = aK.$$

Отсюда, для определения ее центрального угла, получаем уравнение

$$\sin \mu \cos^3 \mu = \frac{2\pi r g}{K} = n.$$

Разделив это уравнение на $(\cos^2 \mu + \sin^2 \mu)^2 = 1$, приведем его к виду

$$(19) \quad \frac{t}{(1 + t^2)^2} = n,$$

где $t = \operatorname{tg} \mu$.

Кривая

$$y = \frac{x}{(1 + x^2)^2},$$

проходя через начало координат, в положительном координатном угле всеми точками лежит выше оси абсцисс, асимптотически к ней приближаясь в бесконечной дали. Ее высшая точка имеет ординату

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Очевидно, что при

$$n < \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

мы будем иметь два возможные значения t и соответственно две различных главных дуги. Из них мы выберем ту, которой соответствует меньший центральный угол, и именно для нее сохраним принятое наименование

Что касается неравенства, обуславливающего возможность вещественного решения ур-ния (19), то оно, вообще говоря, должно выполняться для всех нормальных крыльев, так как, вследствие устойчивости их, параметр aq соответственной параболы не может иметь сколько-нибудь значительной величины.

После того как центральный угол главной дуги найден, ее радиус и центр единственным образом определяются из ур-ний (18), а тем самым будут определены центр и стрелка крыла.

Для отмеченных в конце предшествующего параграфа особых форм профиля, которым соответствует параметр параболы устойчивости, равный нулю, изображающие дуги и главная дуга, очевидно обратятся в прямолинейные отрезки.

§ 4. Крыло, опирающееся на инверсию параболы. Это крыло, впервые данное нами в цитированной уже работе, можно определить следующим приемом.

Чтобы получить соответственное выражение функции z , преобразуем несколько ф-лу (16) для изображения области, ограниченной дугой круга, сохраняя начало координат и изменив направление осей так, чтобы новая OX проходила через задний конец дуги. Новое выражение z будет

$$(20) \quad z = -a + \frac{2ai \sin 2\tau}{(u - ie^{\tau i})(u + ie^{\tau i})}.$$

Заменяя в этой формуле u на $u + i\epsilon$, получим область, ограниченную инверсией параболы, причем опять действительная ось плоскости u будет соответствовать очертанию крыла, а верхняя полуплоскость — области течения.

В самом деле, если

$$(21) \quad z + a = \frac{2ai \sin 2\tau}{(u + i\epsilon)^2 + e^{2\tau i}},$$

то при действительном u

$$\frac{2ai \sin 2\tau}{z + a} = 2a \sin \tau \frac{i(x + a) + y}{(x + a)^2 + y^2} = \frac{ix_1 + y_1}{d} = u^2 - \epsilon^2 + \\ + \cos 2\tau + i \sin 2\tau + 2u\epsilon i,$$

где d — линейный коэффициент преобразования; отсюда

$$(22) \quad \begin{aligned} x_1 - d \sin 2\tau &= 2u\epsilon d, \\ y_1 - d \cos 2\tau + \epsilon^2 &= u^2 d, \\ 4\epsilon^2 d (y_1 - d \cos 2\tau + d\epsilon^2) &= (x_1 - d \sin 2\tau)^2. \end{aligned}$$

Это уравнение изображает параболу с параметром $p = 2d\epsilon^2$ и фокусом в точке F с координатами

$$\begin{aligned} \xi_1 &= d \sin 2\tau, \\ \eta_1 &= d \cos 2\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, d есть расстояние фокуса от центра инверсии.

Фокус соответствует в плоскости u точке $u = -i\epsilon$, лежащей в нижней полуплоскости. Координаты фокуса после инверсии будут определяться ф-лой (21), если в ней положим

$$u = -i\epsilon.$$

Таким образом получаем

$$x = \xi = -a \cos 4\tau,$$

$$y = \eta = a \sin 4\tau.$$

Фокальный отрезок оси параболы $F\infty$ превращается в осевую дугу CE исследуемого крыла (фиг. 1).

Составляя затем разложение z , выраженного ф-лой (21) в области полюса

$$u = x = -i\epsilon + i\epsilon^{\tau_1},$$

находим

$$(21') \quad a + z = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left(\frac{1}{u_1 - x_1} - \frac{1}{2\alpha_1} + \frac{u_1 - x_1}{4\alpha_1^2} + \dots \right),$$

где

$$u_1 = u + i\epsilon, \quad x_1 = x + i\epsilon = i\rho^{\tau_1}.$$

Сравнив эту формулу с ф-лой (1) и имея в виду следующие обозначения

$$m = l + ik = \frac{f'(0)}{A}, \quad m_1 = l_1 + ik_1 = \frac{f''(0)}{A},$$

получим для A выражение

$$A = \sin 2\tau e^{-\tau i} = \lambda \rho^{i\mu};$$

откуда

$$\lambda = \sin 2\tau, \quad \mu = -\tau.$$

Для прочих коэффициентов те же выражения, как и в случае дуги круга:

$$(23) \quad l = -\frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau}, \quad k = -\frac{\sin^2 \tau}{2 \cos \tau}, \quad l_1 = -\frac{\cos 2\tau}{4}, \quad k_1 = \frac{\sin 2\tau}{4}.$$

Наконец,

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha_1}{i} = 2 \cos \tau - 2\epsilon.$$

По ф-лам (6) и (9) имеем

$$(24) \quad \begin{aligned} K &= 4\pi\rho \sin \tau \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon}, \\ P &= 4\pi\rho a v_0^2 \sin \tau \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \sin \tau. \end{aligned}$$

Сравнив эту формулу с первой из (17) и приняв во внимание (8), усматриваем, во-первых, что критическое направление составляет с осью Y угол τ , равный одной четверти угла, стягиваемого осевой дужкой, и совпадает с критическим направлением, построенным для этой дужки; во-вторых, *подъемная сила исследуемого крыла будет более подъемной силы его осевой дужки, ибо она равна результату умножения силы осевой дужки на неправильную дробь*

$$n = \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon}.$$

Биссектор угла между хордой осевой дужки и прикасающейся к ней в заднем конце, служащем центром инверсии, осью Y совпадает с биссектором угла касательных к параболе из того же центра; поэтому *критическое направление инверсии параболы делит пополам угол между касательными к контуру крыла из его заднего конца*.

Так как фокальный радиус-вектор параболы R , направленный к центру инверсии, имеет величину

$$(25) \quad R = \frac{p}{2 \cos^2 \tau} = \frac{d\varepsilon^2}{\cos^2 \tau}$$

и будет непременно менее расстояния d центра инверсии от фокуса, т. е. $\varepsilon < \cos \tau$, и потому n есть величина существенно положительная.

Чтобы найти выражение момента относительно начала координат, находящегося, как явствует из предшествующего изложения, в центре осевой дужки, составляем по ф-лам (12) коэффициенты g , h и q , определяющие момент и параболу устойчивости.

Воспользовавшись выражениями (23), имеем

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} g &= -\cos^3 \tau \cos 2\tau - \frac{\varepsilon \sin^2 2\tau}{2}, \\ h &= \cos^3 \tau \sin^2 \tau - \frac{\varepsilon \sin 2\tau \cos 2\tau}{2} + \frac{\varepsilon \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon}, \\ q &= 2 \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon) = 2 \sin^2 \tau \cos^3 \tau - \frac{\varepsilon \sin^2 2\tau}{2}, \\ g - q &= -\cos^3 \tau. \end{aligned} \right.$$

Если в этих равенствах положим $\epsilon = 0$, то они совпадают при $\tau = \mu$ с (12'), а потому фокус, параметр и директриса параболы устойчивости рассматриваемого крыла определяются по его осевой дуге следующим образом: *директриса крыла прямо совпадает с директрисой указанной дуги; параметр меньше соответственного параметра сравниваемой дужки; следовательно, утолщенное крыло будет более устойчиво, так как метацентр будет ближе к его оси, чем в сравниваемом случае.*

Что касается опрокидывающего момента, то он в точности равен соответственной величине для крыла, опирающегося на осевую дугу.

Ибо по (15), (15'), (24) и (26) имеем момент относительно фокуса, равный опрокидывающему моменту:

$$M_1 = M_0 = -\frac{1}{2} K a^2 v_0^2 q = -4\pi \rho a^2 v_0^2 \sin^3 \tau \cos^3 \tau,$$

выражение, совпадающее с последним из помеченных номером (17).

Для нахождения изображающих дуг, мы должны воспользоваться приведенными выше уравнениями (18). Разыщем при их помощи изображающую дугу под тем условием, чтобы ее центральный угол был равен 4τ — центральному углу осевой дужки.

Прежде всего имеем

$$aq = 2a \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \epsilon) = 2r \cos^3 \tau \sin^2 \tau,$$

отсюда находим радиус окружности, на которой лежит искомая изображающая дуга

$$r = a \frac{\cos \tau - \epsilon}{\cos^3 \tau}.$$

Тогда прочие два уравнения из группы (18) дают для координат b, c центра указанной окружности значения

$$\begin{aligned} b &= -a\epsilon \cos^3 \tau = -r\epsilon \cos \tau (\cos \tau - \epsilon), \\ c &= a\epsilon \sin \tau \cos \tau - \frac{a\epsilon \sin \tau}{\cos \tau - \epsilon} = r\epsilon \sin \tau \left(\cos \tau + \frac{1}{\cos \tau} - \epsilon \right). \end{aligned}$$

Отношение между силами P, P' и вращающими моментами M, M^1 исследуемого крыла и отмеченной изображающей дуги равно T :

$$T = \left(\frac{\cos \tau}{\cos \tau - \epsilon} \right)^2.$$

Для отыскания главной дуги нужно составить число

$$\kappa = -\frac{2\pi \rho q}{K};$$

в нашем случае по (24) и (26) имеем

$$n = \sin \tau \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon)^2.$$

Число это удовлетворяет неравенству $n < \frac{3\sqrt{3}}{16}$, в виду незначительности угла τ , и потому мы получаем реальную главную дугу.

Написав ур-ние (19) в первоначальной форме

$$F(\mu) = \sin \mu \cos^3 \mu - \sin \tau \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon)^2 = 0$$

и подставляя значения $\mu = 0$ и $\mu = \tau$, легко убедимся, что на этом пространстве изменения аргумента μ функция $F(\mu)$ меняет знак, откуда явствует, что меньший из реальных корней $\mu < \tau$.

Когда дуга довольно толстая, что соответствует более значительным величинам числа ε , то μ будет значительно менее τ : таким образом, *чем толще крыло, тем более плоскою оказывается его главная изображающая дуга и тем более устойчив снабженный такими крыльями аэроплан*. Разумеется, здесь будет существовать предел, не учитываемый теорией, вследствие возможности неполного обтекания крыла и значительного развития вихревого хвоста.

Чтобы яснее выставить на вид преимущество толстых крыльев, рассмотрим числовой пример.

Пусть

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{1}{9}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \cos \tau.$$

Тогда центральный угол осевой дужки будет

$$4\tau = 25^\circ 22'.$$

Выигрыш в подъемной силе P крыла, по сравнению его с осевой дужкой, силу которой обозначим через P^1 , определяется отношением

$$\frac{P}{P^1} = \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, выигрыш достигает 50%.

Размеры крыла всего проще характеризуются углом 4τ , под которым оно видно из центра его осевой дужки. Угол с осью Y радиуса-вектора, направленного из центра инверсии к вершине инвертируемой параболы, как нетрудно усмотреть, равен 2τ ; в самом деле, отрезок оси от вершины до бесконечно удаленной точки после инверсии обращается в часть осевой окружности, лежащую внутри крыла; так как эта окружность касается в начале координат оси I , то угол, образуемый ее касательной в конце интересующей нас дуги с хордою, будет измеряться половиною дуги и

следовательно, равен 2ν ; но, по свойству инверсии, тот же угол с направлением указанного выше радиуса-вектора, направленного по хорде, должен образовать ось параболы, в виду того, что элемент этой оси, прилегающей к вершине, превращается в соответственный элемент дуги окружности.

Из треугольника OAF имеем поэтому

$$\frac{\sin(2\nu - 2\tau)}{\sin 2\nu} = \frac{AF}{OF} = \frac{p}{2c} = \varepsilon^2;$$

отсюда

$$(27) \quad \lg(2\nu - \tau) = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \lg \tau.$$

В нашем числовом примере

$$\lg \tau = \frac{1}{9}, \quad \varepsilon = \frac{\cos \tau}{3},$$

поэтому

$$\lg(2\nu - \tau) = \frac{10 + 9 \lg^2 \tau}{8 + 9 \lg^2 \tau} \lg \tau = \frac{91}{9 \cdot 73},$$

откуда

$$2\nu - \tau = 7^\circ 53' 9'',$$

что при

$$\tau = 6^\circ 20' 30'$$

даем

$$4\nu = 28^\circ 27' 18''.$$

Таким образом, угол раскрытия стягиваемого крыла превышает угол, стягиваемый его осевой дужкой, всего на $3^\circ 5' 18''$, т. е. немного более чем на 12% , а теоретический выигрыш в подъемной силе для толстого крыла, как выше было сказано, равен 50% .

Для вычисления размеров и положения главной изображающей дуги, иначе говоря, эквивалентной дуги, мы должны вычислить прежде всего ее центральный угол, четверть которого определяется ур-нием (19)

$$t = n(1 + t^2)^2, \quad t = \lg \mu.$$

В нашем случае

$$n = \frac{\lg \tau}{(1 + \lg^2 \tau)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\cos \tau} \right)^2 = \frac{81}{41^2} = \gamma,$$

$$\frac{t}{\gamma} = s = 1 + \gamma s^2 + \frac{\gamma^2}{4} s^4, \quad \gamma = 2\gamma^2 = 0.00466.$$

Пренебрегая, в виду малости, степенями γ выше второй, найдем

$$s = 1 + \gamma + \frac{9}{4} \gamma^2 = 1.00470;$$

$$t = \lg \mu = \gamma \cdot 1.00470$$

$$\mu = 2^\circ 46' 15'', \quad 4\mu = 11^\circ 5'.$$

Так как (19) может быть записано в виде

$$\sin \mu \cos^3 \mu = \sin \tau \cos \tau (\cos \tau - \varepsilon)^2,$$

а по третьему из уравнений (26) параметр параболы устойчивости, который для главной дуги выражается формулой

$$2r \sin^2 \mu \cos^3 \mu,$$

должен быть равен

$$aq = 2a \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon),$$

то

$$r \sin \mu = \frac{a \sin \tau \cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon},$$

и в нашем случае

$$\frac{r}{a} = \frac{3}{2\sqrt{82} \sin \mu} = \frac{3}{2\sqrt{82} \sin 2^\circ 46' 15''} = 3.427.$$

Центр главной дуги определяется ф-лами (18); что касается среднего радиуса главной дуги, то его направление образует с отрицательной OX угол μ , так как директриса параболы устойчивости параллельна прямой, соединяющей задний конец главной дуги с ее серединой.

Итак, главная, или эквивалентная крылу, дуга оказывается гораздо более плоскою, чем можно было ожидать; в этом, мне думается, лежит ключ теоретического истолкования высокого качества толстых дуг; отсюда же еще более выясняется их лучшая устойчивость по сравнению с тонкими крыльями.

§ 5. Крыло нового теоретического типа с закругленным задним концом. Инверсия параболы имеет ту невыгоду, что крыло, сечение которого имеет такое очертание, заканчивается чрезвычайно тонким хвостиком, которого нет никакой возможности практически осуществить. Поэтому, в виду обнаруживающейся теоретической выгоды таких крыльев, естественно искать близких форм, свободных от указанной особенности.

Вопрос аналитически разрешается путем преобразования выражения (21), связывающего мнимые переменные z и u .

Соотношение (21), которому можно придать вид

$$z + a' = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left\{ \frac{1}{u + i\varepsilon - ie^{\tau i}} - \frac{1}{u + i\varepsilon + ie^{\tau i}} \right\},$$

слегка изменим, положив

$$(28) \quad z + a' = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left\{ \frac{(1+H)^2}{u + i\varepsilon - ie^{\tau i}} - \frac{(1-H)^2}{u + i\varepsilon + ie^{\tau i}} \right\},$$

где H — некоторое комплексное число с малым модулем; $H = \gamma e^{\delta i}$.

Тогда

$$\frac{dz}{du} = -4a \sin 2\tau e^{-\tau i} \frac{(u + i\varepsilon + Hie^{\tau i})(Hu + Hi\varepsilon + ie^{\tau i})}{(u + i\varepsilon - ie^{\tau i})^2 (u + i\varepsilon + ie^{\tau i})^2}.$$

Если модуль и амплитуда числа H подобраны так, что

$$\varepsilon + \gamma \cos(\tau + \delta) > 0, \quad \varepsilon \gamma \cos \delta + \cos \tau > 0,$$

то две единственные особые точки функции z лежат в нижней полуплоскости переменного u ; поэтому область течения, изображаемая на верхней полуплоскости, если, как и в ранее разобранном случае, мы предположим, что действительная ось u соответствует контуру крыла, никаких особых точек не имеет.

Что касается обтекаемого контура, то он представляет плавную алгебраическую кривую без точек возврата. Покажем, что число H можно определить таким образом, чтобы в точке $u = \infty$ профиль крыла обладал наибольшей кривизной; тогда будет естественно принять соответствующую точку контура за точку схода разветвляющейся на нем линии тока.

Формулу для радиуса кривизны R мы можем написать в виде

$$R = \text{mod} \frac{\left(\frac{dz}{du} \frac{dz_1}{du} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dz}{du} \frac{d^2 z_1}{du^2} - \frac{dz_1}{du} \frac{d^2 z}{du^2}} \quad \begin{aligned} z &= x + iy, \\ z_1 &= x - iy. \end{aligned}$$

Обозначая для краткости корни знаменателя выражения (28) через α и β и условившись сопряженные комплексные количества изображать теми же буквами, что и данные, с индексом 1 внизу, мы представим z_1 в виде

$$z_1 + a' = a \sin 2\tau e^{-i\tau} \left\{ \frac{(1 + H_1)^2}{u - \alpha_1} - \frac{(1 - H_1)^2}{u - \beta_1} \right\}.$$

Совершив затем дифференцирование, мы, в результате простых, хотя и довольно длинных, вычислений, приходим к следующему выражению для R при больших u :

$$R = \text{mod} \frac{\gamma a \sin 2\tau \left\{ \gamma - \frac{3}{u} [\sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) - \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)] + \dots \right\}}{\left[\cos \tau \cos \delta (1 - \gamma^2) + \sin \tau \sin \delta (1 - \gamma^2) - 2\varepsilon \gamma - \frac{6}{u} [\gamma \sin 2\tau - \varepsilon \sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) + \varepsilon \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)] + \dots \right]}$$

Многоточия соответствуют членам порядка $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{u^3}$, ...

Если мы подберем δ так, чтобы в разложении R в области $u = \infty$ отсутствовал член порядка $\frac{1}{u}$, то в соседних с нею точках кривизна будет изменяться в одном и том же направлении, т. е. возрастать или убывать по обе стороны от этого пункта. А так как при $\gamma = 0$ наш контур обращается в инверсию параболы и при $u = \infty$ мы имеем точку заостре-

ния, то ясно, что при достаточно малых γ здесь будет именно максимум кривизны. Условие отсутствия $\frac{1}{u}$ в разложении R сводится к пропорциональности двух первых коэффициентов в числителе и знаменателе приведенной выше дроби. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} & \cos \tau \cos \delta \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) + \sin \tau \sin \delta \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) - 2\epsilon = \\ & = 2 \frac{\gamma \sin 2\tau - \epsilon [\sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) - \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)]}{\sin \tau \cos \delta (1 + \gamma^2) - \cos \tau \sin \delta (1 - \gamma^2)}, \end{aligned}$$

откуда, по упрощении, находим

$$\begin{aligned} & \cos^2 \delta \sin 2\tau \left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \right)^2 - \sin^2 \delta \sin 2\tau \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right)^2 - \\ & - 2 \sin \delta \cos \delta \left(\frac{1}{\gamma^2} - \gamma^2 \right) \cos 2\tau = 4 \sin 2\tau. \end{aligned}$$

Разрешая это уравнение, имеем

$$(29) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \operatorname{tg} \tau.$$

Радиус кривизны в заднем конце крыла приобретает значение

$$R = \frac{\gamma^2 a \sin 2\tau}{\sqrt{1 + \gamma^4 + 2\gamma^2 \cos 2\tau} - 2\gamma\epsilon},$$

стремящееся к нулю вместе с γ .

Составляя далее разложения $\frac{dx}{du}$ и $\frac{dy}{du}$ в той же точке, находим

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -4a\gamma \sin 2\tau \cos(\tau - \delta) \frac{1}{u^2} + \dots, \\ \frac{dy}{du} &= +4a\gamma \sin 2\tau \sin(\tau - \delta) \frac{1}{u^2} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда усматриваем, что $\tau - \delta$ есть угол, образуемый нормалью к профилю крыла в интересующей нас точке с положительным направлением оси Y ; нормаль отклонена от оси ординат в направлении к OX ; на основании ф-лы (29)

$$\operatorname{tg}(\tau - \delta) = \frac{\gamma^2 \sin 2\tau}{1 - \gamma^2 \cos 2\tau}.$$

Разлагая z в области полюса, мы, следуя приему, развитому подробно в предшествующем параграфе для инверсии параболы, легко получим все

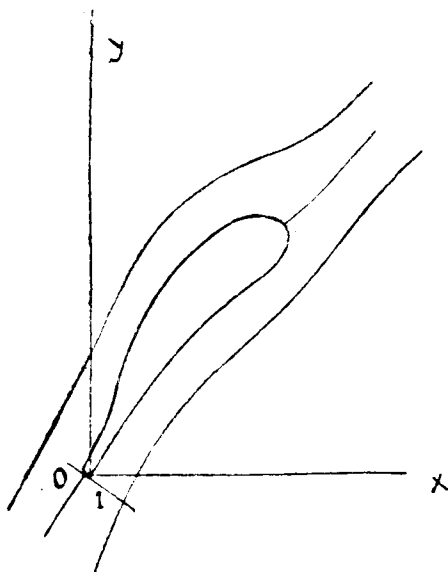
необходимые коэффициенты, по которым затем отыскиваем подъемную силу, вращающий момент и параболу устойчивости. Следует заметить, однако, что при сделанном нами предположении о точке схода, формулы оказываются довольно сложными и не поддаются ясному геометрическому истолкованию. По этой причине мы оставим в стороне требование, чтобы точка $u = \infty$, где попрежнему будем предполагать схождение струи с крыла, соответствовала наибольшей кривизне профиля, и все последующие вычисления проведем при упрощенном предположении, считая H в ф-ле (28) вещественным положительным числом, так что

$$\delta = 0, \quad \gamma = H.$$

Формулу для радиуса кривизны профиля вблизи точки схода можно в таком случае написать в виде

$$(30) \quad R = \frac{H^2 a \sin 2\tau}{(1 + H^2) \cos \tau - 2H\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{3 \sin \tau \cos \tau (1 - H^2)}{Hu [(1 + H^2) \cos \tau - 2H\varepsilon]} + \dots \right\}.$$

При небольших H контур крыла будет близок, по расположению относительно координатных осей, к разобранной выше инверсии параболы:



Фиг. 2.

ею выпуклая сторона будет отображаться на отрицательной, а вогнутая — на положительной части действительной оси полуплоскости u . Найденная для R формула показывает, что вблизи точки схода, когда u весьма велико, меньшим искривлением обладает та прилегающая к означенной точке часть контура, которая лежит со стороны выпуклости крыла, ибо R будет больше при отрицательных значениях переменного u . Поэтому вычисленная при упрощающем предположении подъемная сила будет менее теоретической величины силы, которая получится, если мы вторую критическую точку, точку схода, переместим в пункт наибольшей кривизны; в самом деле, эта точка, очевидно,

будет лежать в некотором месте контура, соответствующем большой положительной величине параметра u ; на чертеже (фиг. 2) мы отмечаем ее цифрой 1; 0 обозначает точку схода, соответствующую сделанному нами предположению. Легко непосредственно усмотреть, что мы переместим точку схода из 0 в 1 путем внесения добавочного течения, циркулирующего в том

же направлении, как и основной поток; а добавочная циркуляция повлечет прирост подъемной силы.

Обратимся теперь к подробному обследованию формы профиля. В заднем конце крыла мы имеем по ф-ле (30)

$$(30') \quad R = \frac{H^2 a \sin 2\tau}{(1 + H^2) \cos \tau - 2H\epsilon'}.$$

Нормаль в этой точке образует с осью Y угол τ , ибо в ее соседстве мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -4aH \sin 2\tau \cos \tau \frac{1}{u^2} + \frac{L}{u^3}, \\ \frac{dy}{du} &= +4aH \sin 2\tau \sin \tau \frac{1}{u^2} + \frac{L'}{u^3} \end{aligned}$$

с конечными L и L' .

Чтобы поставить исследуемый контур в связь с некоторой параболой, представим выражение (28) в виде

$$(28') \quad z + a' = 2a \sin 2\tau \frac{1 + H^2 - 2iHe^{-\tau i} (u + i\epsilon)}{(u + i\epsilon)^2 + e^{2\tau i}}.$$

Полагая, как в предыдущем параграфе,

$$(u + i\epsilon)^2 + e^{2\tau i} = \frac{ix_1 + y_1}{d},$$

мы действительную ось полуплоскости u приводим в соответствие с точками параболы; и тогда координаты изучаемого контура будут связаны с координатами соответственных точек на параболе, выражаемой уравнением (22), следующим соотношением:

$$(31) \quad z + a' = x + iy + a' = 2a \sin 2\tau e^{-\tau i} \frac{p' + ip'' - \frac{iHx_1}{\epsilon}}{x_1 - iy_1};$$

для сокращения введены обозначения

$$\begin{aligned} p' &= \left(1 + H^2 + 2H \frac{\epsilon}{\cos \tau}\right) d \cos \tau, \\ p'' &= \left(1 + H^2 + 2H \frac{\cos \tau}{\epsilon}\right) d \sin \tau. \end{aligned}$$

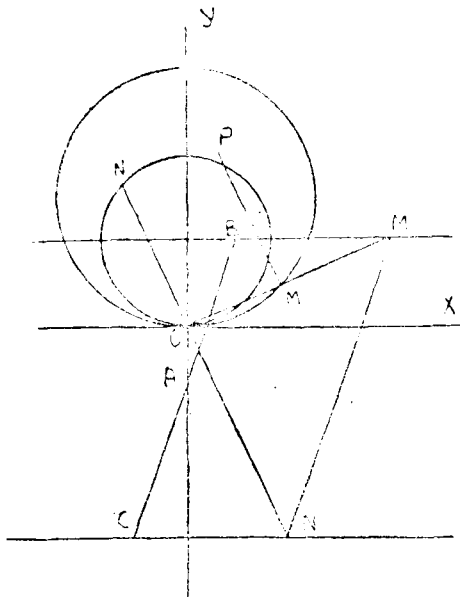
Соотношение (31) позволяет по заданной параболе построить контур крыла исследуемого типа. Для этого поступаем так: в плоскости мнимого переменного z отметим точку с координатами $-a'$, O , которую примем за новое начало координат, оставляя направление осей без изменения. На

И МЫ МОЖЕМ ПОЛОЖИТЬ

$$\begin{aligned}x' - iy' &= u + \sin \tau - i(\cos \tau - \varepsilon), \\x'' - iy'' &= u - \sin \tau + i(\cos \tau + \varepsilon).\end{aligned}$$

Тогда первое из соотношений (32) дает инверсию прямой BK в прикасающуюся к OX окружность $OB'D'$ с диаметром D_1 , а второе определяет окружность $OC'E''$ с диаметром D_2 , результат инверсии второй прямой CL . Отсюда вытекает интересное нас построение.

Строим прикасающиеся к оси X окружности с диаметрами D_1 и D_2 и центрами на положительном направлении OY . Затем проводим указанным выше путем отрезок BC и две прямые BK и CL . Точке M первой прямой, определяемой параметром $u = BM$, на второй соответствует точка N с тем же значением u , которое изображается отрезком CM . Чтобы найти точку контура, соответствующую M , проводим $MA \parallel BC$ и соединяем точки M и N с началом координат; отметим далее точки M' и N' , в которых линии OM и ON пересекают окружности. Координаты M' тогда будут x_1, y_1 , а координаты N' суть $-x_2, -y_2$. Следовательно, если мы через точку M' проведем отрезок $M'P$, равный и параллельный ON' , то точка P есть точка искомого контура.



Фиг. 4.

Геометрическое место точек P представит нам в плоскости z контур крыла, если за начало координат мы примем его задний конец и направим ось Y по нормали в этой точке к контуру.

Заметим, что если бы диаметры окружностей, при помощи которых мы строим профиль, были обратно пропорциональны расстояниям точки O от соответственных параллелей KM и CL , то место P было бы инверсией параболы, а в том частном случае, когда $D_1 = D_2$, оно оказалось бы дугой окружности.

Примечание. В указанном построении есть одно неудобство: именно, для больших значений параметра u мы можем выйти за пределы чертежа. Это неудобство устраняется следующим образом. Пусть OQ есть направление, идущее из точки O в далекую точку прямой KM . Отметим точку пересечения OQ с произвольно проведенною параллельно CB прямою GH . Эту точку соединяем с точкою B , в которой $CB \parallel GH$ пересекает прямую KM , и продолжаем эту прямую до встречи с общою касательною OD окружностей. Если последнюю точку мы соединим прямою

линией с точкою C , то найдем в пересечении с прямою GH точку искомого направления OR второго радиуса-вектора, необходимого нам для построения профиля. В виду простоты опускаю доказательство правильности этого приема.

Что касается функции течения $w = \varphi + i\psi$, то она в исследуемом теперь случае определяется тою же ф-лой (5) § 1. В отличие от разобранных ранее примеров, когда поток сбегал с крыла, имея в заднем его конце конечную скорость, на этот раз мы встретим здесь вторую критическую точку с нулевой скоростью.

Чтобы определить поддерживающую силу крыла и его вращающий момент, пишем разложение функции (28) в области полюса. Обозначая, как в предшествующем параграфе, $u + i\varepsilon$ через u' , $ie^{i\tau}$ через α' , получим аналогично ф-ле (21') этого параграфа:

$$z + \alpha' = a'' \sin 2\tau e^{-i\tau} \left\{ \frac{1}{u - \alpha'} - \frac{G}{2\alpha'} + G \frac{u' - \alpha'}{4\alpha'^2} + \dots \right\},$$

где $a'' = a(1 + H)^2$, $G = \left(\frac{1 - H}{1 + H} \right)^2$.

Выбрав $\alpha' = a(1 - H)^2 = Ga'$, будем иметь для коэффициентов k, l, k_1, l_1 те же выражения (23), как в предшествующем параграфе, но только с множителем G . Таким образом,

$$\begin{aligned} l &= -G \frac{\cos^2 \tau}{2 \sin \tau}, & k &= -G \frac{\sin^2 \tau}{2 \cos \tau}, \\ l_1 &= -G \frac{\cos 2\tau}{4}, & k_1 &= G \frac{\sin 2\tau}{4}, \end{aligned}$$

причем попрежнему

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha'}{i} = 2 \cos \tau - \varepsilon, \quad \mu = -\tau;$$

$$\lambda = a'' \sin 2\tau.$$

В дальнейшем мы можем опустить значок $''$ при букве a , не упуская, однако, из виду, что ей теперь придается новое значение.

Ф-лы (6) и (9) § 1 определяют нам подъемную силу

$$P = 4\pi\rho av_0^2 \sin \tau \frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \sin \sigma,$$

имеющую буквально то же выражение, как и в случае инверсии параболы; по ф-ле (8) мы находим критическое направление потока; оно образует угол τ с осью I и лежит в положительном координатном угле; как было выяснено выше, это будет нормаль крыла в его заднем конце, где его покидает разветвляющаяся линия тока.

Направив ось Y навстречу критическому направлению потока, мы по ф-лам (12) определяем координаты фокуса параболы устойчивости ag , ah , параметр ее aq и расстояние директрисы от начала $aq - ag$. Получим

$$\begin{aligned}cg &= -aG \left(\cos^3 \tau \cos 2\tau + \frac{\varepsilon \sin^2 2\tau}{2} \right), \\ah &= aG \left(\cos^3 \tau \sin 2\tau - \frac{\varepsilon \sin 2\tau \cos 2\tau}{2} + \frac{1}{G} \frac{\varepsilon \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon} \right), \\aq &= 2aG \sin^2 \tau \cos^2 \tau (\cos \tau - \varepsilon) = 2aG \sin^2 \tau \cos^3 \tau - Ga \varepsilon \frac{\sin^2 2\tau}{2}, \\aq - ag &= aG \cos^3 \tau.\end{aligned}$$

Директриса от заднего конца крыла отстоит на расстоянии

$$\Delta = a' - aq + ag = aG(1 - \cos^3 \tau).$$

Сравнивая приведенные формулы с соответственными им для инверсии параболы, убеждаемся, что при одном и том же определяющем линейные размеры коэффициенте крылья будут давать одну и ту же подъемную силу. Но параболы устойчивости в новом крыле будет острее и ближе приближается к крылу, а потому это последнее отличается большей устойчивостью.

Выгода его выступает еще яснее, если мы заметим, что при одном и том же a его ширина оказывается меньшею, чем для сравниваемого с ним, имеющего очертание инверсии параболы. В самом деле, легко видеть, что радиус-вектор OP точки контура будет всегда менее суммы диаметров:

$$OP < D_1 + D_2 = a \sin 2\tau \left(\frac{1}{\cos \tau - \varepsilon} + \frac{G}{\cos \tau + \varepsilon} \right);$$

при этом радиусы-векторы точек, соответствующих значениям u , близким к нулю, могут быть несколько более того радиуса OP_1 , который наклонен к OY под углом τ и, соответствуя значению $u = -\varepsilon \tan \tau$, имеет величину

$$OP_1 = (D_1 + D_2) \cos \tau,$$

весьма близкую к указанному пределу $D_1 + D_2$ в виду малости угла τ .

Те же замечания справедливы для инверсии параболы, когда $G=1$. У профиля этого крыла также будут существовать радиусы-векторы, больше соответственного

$$OP'_1 = (D'_1 + D'_2) \cos \tau = a \sin 2\tau \left(\frac{\cos \tau}{\cos \tau - \varepsilon} + \frac{\cos \tau}{\cos \tau + \varepsilon} \right).$$

Но при достаточно малом $G = \left(\frac{1-H}{1+H} \right)^2$ и небольшом τ будет иметь место неравенство

$$OP_1' > D_1 + D_2.$$

Положим, например, как в § 4, $\epsilon = \frac{\cos \tau}{3}$, и пусть $H = \frac{1}{9}$.

Тогда

$$OP_1' = \frac{9}{4} a \sin 2\tau, \quad D_1 + D_2 = \frac{99}{50} a \cos \tau \sin 2\tau;$$

$$\frac{OP_1'}{D_1 + D_2} = \frac{25}{22} \cos \tau > \frac{25}{22} \left(1 - \frac{1}{162} \right),$$

если $\lg \tau = \frac{1}{9}$, как в числовом примере к § 4.

§ 6. Крыло, опирающееся на инверсию эллипса. Рассмотренные в двух предшествующих параграфах крылья принадлежат к довольно широкому классу, который характеризуется функцией

$$z = d \frac{Lu^2 + L'u + L''}{Hu^2 + H'u + H''},$$

где d — некоторая линейная величина, а прочие коэффициенты — комплексные числа, выбор которых стеснен лишь некоторыми неравенствами. Кривая, соответствующая действительной оси в плоскости вспомогательного мнимого переменного u и дающая, как и прежде, профиль крыла, будет сомкнутой, если H имеет модуль, отличный от нуля. В области течения, отображающейся на верхней полуплоскости u , будет существовать лишь один простой полюс, если лишь один из корней знаменателя обладает положительным коэффициентом при мнимой единице. Наконец, оба корня производной функции z должны располагаться в нижней полуплоскости u . Вот все те условия, из которых вытекают упомянутые выше неравенства.

Заметим, что путем надлежащего выбора осей в плоскости z мы можем уничтожить коэффициент при квадрате в числителе ф-лы (32) и привести к единице коэффициенты H и L' . А выбором начала на действительной оси переменного u и подбором масштаба достигаем того, чтобы коэффициент H' был равен мнимой единице. Таким образом, в ф-ле (32) останется, кроме линейного множителя, характеризующего размеры кривой, четыре числа, определяющих ее тип.

Принимая во внимание приведенные замечания, мы всегда можем, вместо ф-лы (32), изобразить функцию z формулою

$$(33) \quad z = d \left(\frac{1}{u - \alpha} - \frac{G^2}{u - \alpha'} \right),$$

где

$$\alpha = b + ci, \quad \alpha' = b' - c'i, \quad G = b'' + c''i.$$

Коэффициенты c и c' должны быть положительными числами, что же касается G , то, так как корни $\frac{dz}{du}$ суть, очевидно,

$$b + ci + \frac{b' - b - i(c + c')}{1 - b'' - c''i},$$

$$b + ci + \frac{b' - b - i(c + c')}{1 + b'' + c''i},$$

мы должны потребовать, чтобы эти два выражения имели отрицательные коэффициенты при мнимой единице, а это налагает условия

$$c - \frac{(c + c')(1 - b'') + (b - b')c''}{(1 - b'')^2 + c''^2} < 0,$$

$$c - \frac{(c + c')(1 + b'') - (b - b')c''}{(1 + b'')^2 + c''^2} < 0.$$

При этом мы можем, на основании высказанных выше замечаний, положить $b = 0$, $c = 1$.

Найденные неравенства не заключают в себе противоречия, ибо их можно выполнить при произвольно заданных прочих коэффициентах, если мы примем c' достаточно большим. Исключение представляется при $b'' = \pm 1$; но в этом случае при малых c'' , имеющих надлежащий знак, опять-таки можно удовлетворить оба неравенства, придавая достаточную величину тому же коэффициенту c' .

Кривые рассматриваемого типа могут быть построены при помощи циркуля и линейки, путем, вполне аналогичным указанному в § 5. Так же, как и там, мы будем иметь две параллельные прямые, на которых от надлежащих пунктов будут откладываться равные отрезки, характеризующие значение переменного параметра u , и две прикасающиеся окружности, инверсии указанных прямых; эти окружности определяют векторы, сложение которых позволит отметить точки искомого профиля. Разница будет лишь в том, что прежде сложения один из векторов необходимо поворачивать в должном направлении на угол, равный двойному аргументу комплексного числа G . Вместо этого, очевидно, можно повернуть соответственную прямую и полученную при помощи ее инверсии окружность на тот же угол и затем уже складывать получаемые векторы без изменения их направлений.

Класс кривых, определяемых ф-лою (33), охватывает, между прочим, инверсии кривых второго порядка, а из этих последних — все эллипсы. Что касается ф-лы (33), то она включает также параболы и гиперболы, если мы отбросим условие конечности модуля коэффициента H .

В дальнейшем остановимся исключительно на крыле, очертание которого определяется инверсией эллипса. Прежде чем перейти к отысканию соответствующей функции z , в виду интереса, представляемого таким профилем, дадим его характеристику, исходя из чисто геометрических соображений,

опирающихся на свойства эллипса. Чтобы получить крыловидную форму путем инверсии эллипса, мы, очевидно, должны, во-первых, брать эллипсы с большим эксцентриситетом и располагать центр инверсии вблизи большой оси вне эллипса. При этом будет получаться изогнутое крыло с осевой дужкою в виде дуги круга, которая служит инверсией фокального отрезка. Осевая дужка при ее продолжении проходит через центр инверсии, имея здесь касательную, параллельную большой оси эллипса. Если мы соединим середину осевой дужки с центром инверсии, то получим прямую, которая разделит пополам угол между касательными, проведенными из центра инверсии к последнему контуру; это следует из известного свойства эллипса, по которому биссектор угла его касательных, проведенных из какой-либо точки, делит в то же время пополам угол, имеющий в этой точке вершину и опирающийся на фокальный отрезок.

Еще более ясное представление об последующем профиле мы получим, если обратимся к его двойным касательным, как я назову для краткости касательные, имеющие две точки прикосновения к контуру. Пара таких касательных будет существовать в том случае, если центр инверсии расположен внутри общей площади двух кругов кривизны эллипса в вершинах его малой оси: ибо в этом случае можно провести две реальные окружности двойного прикосновения, проходящие через центр инверсии, которые после нее и обратятся в двойные касательные. Любопытно отметить, что равноделящая угла между этими прямыми параллельна упоминавшемуся выше биссектору угла касательных из центра инверсии. Докажем это.

Уравнению охватывающей окружности двойного прикосновения к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

очевидно, можно придать вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (y - \lambda)^2 = 0;$$

λ определится из условия прохождения этой окружности через центр инверсии u , следовательно, представляется каждым из корней квадратного уравнения

$$m^2 + n^2 - a^2 + 2 \frac{c^2}{b^2} n\lambda - \frac{c^2}{b^2} \lambda^2 = 0, \quad c^2 = a^2 - b^2,$$

если через m , n мы обозначим координаты центра инверсии.

Углы касательных к окружностям в точке m , n с осью X определятся формулой

$$\operatorname{tg} \nu = - \frac{m}{n + \frac{c^2}{b^2} \lambda},$$

в которую нужно вставить поочередно два корня приведенного уравнения λ_1 и λ_2 . Угол равноделяющей

$$\delta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2};$$

а следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\delta = - \frac{m \left[2n + \frac{c^2}{b^2} (\lambda_1 + \lambda_2) \right]}{n^2 + \frac{c^4}{b^4} \lambda_1 \lambda_2 + n \frac{c^2}{b^2} (\lambda_1 + \lambda_2) - m^2}.$$

откуда, по замене λ , имеем

$$(34) \quad \operatorname{tg} 2\delta = \frac{2mn}{m^2 - n^2 - c^2}.$$

Та же формула определяет биссектор угла между векторами, направленными из центра инверсии к фокусам эллипса.

Между точками прикосновения двойных касательных на каждой стороне профиля располагаются по две точки перегиба, соответствующих тем точкам на эллипсе, круги кривизны для которых проходят через центр инверсии. Если этот центр окажется на круге кривизны в одной из вершин малой оси, то две точки касания соответственной двойной касательной сливаются между собою, и в таком случае эта прямая будет иметь с профилем прикосновение третьего порядка.

Если, далее, центр инверсии будет представлять внутреннюю точку лишь для одного из кругов кривизны в вершинах малой оси, то у инверсии эллипса останется лишь одна двойная касательная. Наконец, таких касательных вовсе не будет, и профиль окажется всюду выпуклым, если инверсия совершается из центра, лежащего вне обоих упомянутых кругов.

Заметим еще, что двойные касательные пересекаются на прямой, проведенной через центр инверсии параллельно большой оси эллипса.

Чтобы охарактеризовать до некоторой степени размеры профиля, определим диаметр D его осевой дужки, стягиваемый ею угол $2L$ и угол $2X$, под которым крыло видно из центра упомянутой дужки.

Что касается диаметра, то он, очевидно, будет

$$D = \pm \frac{\partial^2}{n},$$

если ∂ — коэффициент инверсии; знак надлежит подобрать так, чтобы D было положительно.

Далее,

$$N = \lambda' - \lambda'', \quad L = \mu' - \mu''.$$

если буквами λ и μ соответственно обозначим углы, образуемые с осью X

векторам, идущим из центра инверсии к вершинам большой оси и фокусам эллипса. Из этого соображения легко получаем

$$\operatorname{tg} N = \pm \frac{2na}{m^2 + n^2 - a^2}, \quad (35)$$

$$\operatorname{tg} L = \pm \frac{2nc}{m^2 + n^2 - c^2}.$$

Хорда осевой дуги, очевидно, равна $D \sin L$, а дуга, в которую превращается большая ось, стягивается хордой длины $D \sin N$. Наконец, угол 2δ , определяемый ϕ -лой (34), представляет вместе с тем угол наклона к оси эллипса хорды осевой дуги его инверсии.

Обратимся к разысканию функции z , относящейся к поставленной задаче. Чтобы изобразить на верхней полуплоскости u область s , лежащую вне данного эллипса, достаточно положить

$$s = \frac{c}{2} \left(\frac{1}{k} \frac{u+i}{u-i} + k \frac{u-i}{u+i} \right), \quad (36)$$

где k — некоторая вещественная дробь. Тогда действительная ось области u соответствует контуру эллипса с полуосями

$$a = c \frac{1+k^2}{2k}, \quad b = c \frac{1-k^2}{2k};$$

вершинам большой оси соответствуют значения

$$u = 0, \quad u = \infty,$$

концам малой оси —

$$u = \pm 1,$$

фокусы же эллипса отображаются в точках

$$u = -i \frac{1+k}{1-k}, \quad u = -i \frac{1-k}{1+k}$$

нижней полуплоскости u .

Определим z формулой

$$z = N' = \frac{\Lambda'' cd}{s - s_0},$$

в которой Λ'' есть комплексная величина с линейным модулем, Λ'' — комплексное число, d — вещественное количество линейного размера, а s_0 — результат замены в выражении (37) аргумента u его частным значением u_0 с положительным коэффициентом у мнимой единицы.

Контур, полученный нами, очевидно, принадлежит к классу, определяемому ф-лой (32). Подставив вместо s и s_0 их значения, мы придадим функции z форму

$$(37) \quad \frac{z - N'}{d} = \frac{iN'E(1 - u_0 u_1)(1 + u^2)}{2(u - u_0)(u - u_1)},$$

где E есть эксцентриситет преобразуемого эллипса, а корни знаменателя u_0 и u_1 связаны соотношением

$$(38) \quad \left(1 - i \frac{b}{a} u_0\right) \left(1 - i \frac{b}{a} u_1\right) = E^2, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - E^2}.$$

Положив в ф-ле (37)

$$N'' = \frac{2}{E(1 - u_0 u_1)}, \quad N' = -id,$$

мы преобразуем эту формулу в следующий вид:

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{z}{d} &= i \frac{(1 - u_0 u_1) \left(1 - i \frac{b}{a} u\right)}{(u - u_0)(u - u_1)} \\ &= i \frac{1 - u_0 u_1}{u_0 - u_1} \left\{ \frac{1 - i \frac{b}{a} u_0}{u - u_0} - \frac{1 - i \frac{b}{a} u_1}{u - u_1} \right\} \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} z &= 0, & \text{при } u &= \infty, \\ z &= -id, & \text{при } u &= i, \end{aligned}$$

то началом координат в плоскости z является точка, служащая инверсией дальней вершины эллипса, а ось Y проходит через центр инверсии, который лежит на расстоянии d от начала.

Соответственные точки эллипса и его инверсии определяются ф-лами (36) и (39) по замене u одним и тем же реальным значениям. Когда в этих формулах u придастся какое-либо иное значение, чисто мнимое или комплексное, то мы имеем соответствующие друг другу точки областей s и z . В частности, чисто мнимые значения u в области s определяют действительную ось, по которой направлена большая ось эллипса и которая в результате инверсии обращается в окружность, содержащую осевую дужку профиля крыла.

Значения

$$u = 0, \quad u = -i \frac{1+k}{1-k}, \quad u = -i \frac{1-k}{1+k},$$

по подстановке их в (39), определяют координаты точки, в которую инвер-

тируется ближайшая к центру инверсии вершина эллипса, и соответствующим образом его фокусам концы осевой дужки в области z .

Заметим, для ясности, что мнимая ось плоскости u отображает лишь лежащую вне фокального отрезка часть действительной оси области s и соответствующую ей часть упомянутой выше окружности. Что касается самого фокального отрезка и осевой дужки, то они в области u изображаются окружностью C , диаметром которой служит прямая, соединяющая аффиксы фокусов. Плоскости переменных s и z целиком однозначно изображаются в плоскости u , с одной стороны, на части этой плоскости, лежащей вне круга C , с другой — на самой его площади; причем всякой точке области z и s , таким образом, соответствуют по две точки плоскости u .

Чтобы удобнее вести дальнейшее вычисления, введем вместо u новое вспомогательное переменное t , а вместо эксцентриситета — число II , положив

$$u = i \operatorname{tgh} t, \\ \sqrt{1 - E^2} = \operatorname{tgh} II; \quad E = \frac{1}{\cosh II},$$

тогда

$$u_0 = i \operatorname{tgh} t_0, \quad u_1 = i \operatorname{tgh} t_1,$$

и соотношение (38) дает

$$t_1 + t_0 = -II, \quad t_1 = -II - t_0,$$

а формула (39) приводится к виду

$$(40) \quad \frac{z}{d} = -i \frac{\cosh t \cosh (t + II)}{\sinh (t - t_0) \sinh (t + t_0 + II)},$$

или

$$(40') \quad \frac{z}{d} = \frac{1}{\sinh (2t_0 + II)} \left\{ \frac{\cosh (t_0 + II)}{\cosh t_0 (u - u_0)} - \frac{\cosh t_0}{\cosh (t_0 + II) (u - u_1)} \right\}.$$

Последнюю формулу для выражения функции z мы сохранили в виду того, что по ней очень просто вычисляются необходимые для дальнейших выкладок коэффициенты. В самом деле, сравнив это выражение с ф-лой (1) § 1 и имея в виду, что линейная величина a заменена в (40') через d и $\alpha = u_0$, мы находим

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\cosh (t_0 + II)}{\cosh t_0 \sinh (2t_0 + II)}, \\ l + ik &= \frac{f(0)}{A} = i \frac{\cosh^3 t_0}{\cosh (t_0 + II) \sinh (2t_0 + II)}, \\ l_1 + ik_1 &= \frac{f'(0)}{A} = - \frac{\cosh^4 t_0}{\sinh^2 (2t_0 + II)}. \end{aligned} \right.$$

Значение комплексного числа t_0 определится, если мы заменим в ф-ле (36) для мнимого переменного s переменное u через t и примем во внимание, что частное значение $u = u_0$ с соответствующим ему $t = t_0$ определяется в плоскости эллипса центр инверсии.

Таким образом получаем

$$s = -c \cosh(2t + II), \\ s_0 = m + in = -c \cosh(2t_0 + II).$$

Фокусам эллипса, для которых производная s обращается в нуль, соответствуют значения параметра

$$t = -\frac{II}{2}, \quad t = \frac{\pi i}{2} - \frac{II}{2}$$

и величины z

$$z' = id \frac{\cosh^2 \frac{II}{2}}{\sinh^2 \left(t_0 + \frac{II}{2} \right)}, \quad z'' = id \frac{\sinh^2 \frac{II}{2}}{\cosh^2 \left(t_0 + \frac{II}{2} \right)},$$

откуда

$$(42) \quad \frac{z'' - z'}{d} = 4i \frac{\cosh t_0 \cosh(t_0 + II)}{\sinh^2(2t_0 + II)}.$$

Вершине эллипса, находящейся в точке $s = -a$, где $u = t = 0$, соответствует в области течения точка профиля крыла

$$(42') \quad z_1 = id \frac{\cosh II}{\sinh t_0 \sinh(t_0 + II)}.$$

Для определения поддерживающей силы P воспользуемся нашими общими ф-лами (6), (7), (8) и (9) § 1. Фигурирующая в них величина β будет иметь в нашем случае выражение

$$\beta = \frac{u_0 - u_0^1}{i} = \frac{\sinh(t_0 + t_0^1)}{\cosh t_0 \cosh t_0^1},$$

если мы на этот раз условимся через u_0^1 и t_0^1 обозначать комплексные числа, сопряженные u_0 и t_0 . Коэффициент K подъемной силы, на основании указанных формул, определится равенством

$$aK = \frac{4\pi\rho d}{\beta} \bmod A = 4\pi\rho d \bmod \frac{\cosh(t_0 + II) \cosh t_0^1}{\sinh(2t_0 + II) \sinh(t_0 + t_0^1)},$$

и так как ф-ла (42), связывающая линейную величину d с хордой S осевой дужки, дает

$$d = \frac{S}{4} \bmod \frac{\sinh^2(2t_0 + II)}{\cosh t_0 \cosh(t_0 + II)},$$

причем

$$\operatorname{mod} \frac{\cosh t_0^1}{\cosh t_0} = 1,$$

то

$$(43) \quad aK = \pi \rho S \operatorname{mod} \frac{\sinh (2t_0 + II)}{\sinh (t_0 + t_0^1)}.$$

Так как область u есть верхняя полуплоскость, то мы из формулы $u = i \operatorname{tgh} t$ легко заключаем, что областью t будет бесконечная полулента, ограниченная действительной осью, ее параллелью, на расстоянии π , с положительными ординатами и осью ординат, причем полулента простирается в сторону положительных абсцисс. В виду того, что центр инверсии должен лежать вблизи вершины, которой соответствуют значения $u=0$, $t=0$, действительная часть и коэффициент при мнимой единице у числа t_0 будут небольшими положительными числами. По ним приведенной выше формулой

$$m + in = -\cosh (2t_0 + II)$$

определяются координаты центра инверсии; обе они отрицательны. Приняв все это во внимание, последовательно получаем

$$\operatorname{mod} \sinh (2t_0 + II) = \operatorname{mod} \frac{\sqrt{(m + in)^2 - c^2}}{c} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c},$$

если через r_1 и r_2 обозначим радиусы-векторы, направленные из центра инверсии соответственно к дальнему и ближнему фокусу; далее,

$$\begin{aligned} -\frac{m + in}{s} &= \cosh (2t_0 + II) = \cosh (t_0 + t_0^1 + II) \cosh (t_0 - t_0^1) + \\ &+ \sinh (t_0 + t_0^1 + II) \sinh (t_0 - t_0^1); \\ \frac{m^2 + n^2 - c^2}{c^2} &= \operatorname{mod}^2 \cosh (2t_0 + II) - 1 = \sinh^2 (t_0 + t_0^1 + II) + \\ &+ \sinh^2 (t_0 - t_0^1); \\ \sqrt{\frac{(m^2 + n^2 - c^2)^2 + 4n^2 c^2}{c^4}} &= \frac{r_1 r_2}{c^2} = \sinh^2 (t_0 + t_0^1 + II) - \\ &- \sinh^2 (t_0 - t_0^1); \\ -\frac{2in}{c} &= \cosh (2t_0 + II) - \cosh (2t_0^1 + II) = \\ &= 2 \sinh (t_0 + t_0^1 + II) \cdot \sinh (t_0 - t_0^1); \end{aligned}$$

а затем, введя при помощи соотношения (35) угол L , под которым фокусное расстояние и осевая дужка видны из центра инверсии, имеем

$$(43') \quad \sinh (t_0 + t_0^1 + II) = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{c} \cos \frac{L}{2},$$

после чего (43) обращается в формулу

$$(44) \quad aK = \pi\rho \frac{S}{L} Q = 4\pi\rho r \sin \frac{L}{2} \cdot Q,$$

если через r мы обозначим радиус осевой дужки, а через Q — число

$$(44') \quad Q = \frac{\sinh(t_0 + t_0^1 + H)}{\sinh(t_0 + t_0^1)}.$$

Формула для подъемной силы может быть теперь изображена в виде

$$(45) \quad aK r_0^2 \sin \sigma = P = 4\pi\rho r v_0^2 \sin \frac{L}{2} \sin \sigma \cdot Q = P_0 \cdot Q,$$

где P_0 — подъемная сила тонкого крыла, сечением которого является осевая дужка. Число Q характеризует тот выигрыш, который возникает от утолщения и удлинения крыла при переходе к инверсии эллипса. Чтобы яснее выставить на вид этот выигрыш, преобразуем Q , пользуясь найденным выше соотношением (43'), из которого выводим

$$(46) \quad Q = \frac{\sinh(t_0 + t_0^1 + H)}{\sinh(t_0 + t_0^1 + H) \cosh H - \cosh(t_0 + t_0^1 + H) \sinh H} =$$

$$= \frac{1}{\cosh H - \sqrt{1 + \frac{c^2}{r_1 r_2 \cos^2 \frac{L}{2}} \sinh H}},$$

$$r_1 r_2 \cos^2 \frac{L}{2} = r_1 r_2 \frac{1 + \cos L}{2} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}{4},$$

как это следует из соотношения между сторонами и углами треугольника с вершинами в фокусах и центре инверсии.

Так как $r_1 + r_2$ есть большая ось софокусного с преобразуемым эллипса, проходящего через центр инверсии, то обозначив эту ось через $2a_1 = 2cE_1$ и припомним, что $\cosh H$ равен обратной величине эксцентриситета основного эллипса, найдем следующую удобную форму для коэффициента Q :

$$Q = \frac{E}{1 - \sqrt{\frac{1 - E^2}{1 - E_1^2}}}.$$

Чтобы удобнее было сравнивать между собою силы крыльев с неизменною осевою дужкой, видимых из центра этой дужки под одним и тем же углом N , который определяется первую из ф-л (36), преобразуем коэффициент Q , введя в нем этот угол.

Ф-лы (35) дают

$$-\frac{2n}{c} = \frac{1-E^2}{E} \cdot \frac{1}{E \cotg L - \cotg N} = \frac{r_1 r_2 \sin L}{c^2},$$

после чего из (44) имеем

$$(17) \quad Q = \frac{E}{1 - \sqrt{\frac{\sin N \left(\cos^2 \frac{L}{2} - E^2 \sin^2 \frac{L}{2} \right) - E \cos N \sin L}{\sin N \cos^2 \frac{L}{2}}}}.$$

Эта формула позволяет сопоставить между собою подъемные силы, развиваемые крыльями, которые получаются в результате инверсии из одного и того же центра семейства эллипсов, нарисованных на одну и ту же ось: семейство характеризуется тем, что фокальные отрезки и большие оси всех эллипсов видны из центра инверсии под неизменными углами L и N .

Обозначив через ζ обратную величину эксцентриситета, из (45) определим

$$-\frac{d\left(\frac{1}{Q}\right)}{d\zeta} = 1 - q,$$

где q будет положительная неправильная дробь, в чем легко будет убедиться, так как разность между квадратами ее числителя и знаменателя легко

приводится к простому выражению $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{L}{2}}{\sin^2 N}$.

Таким образом, Q увеличивается с уменьшением эксцентриситета E . Теоретически наименее выгодным очертанием является инверсия параболы, а наиболее выгодным — инверсия эллипса, фокусы которого равно удалены от центра инверсии.

Этому эллипсу, как легко усмотреть, соответствует эксцентриситет

$$E = \frac{\operatorname{tg} \frac{L}{2}}{\operatorname{tg} \frac{N}{2}},$$

и величина

$$Q = Q_{\max} = \frac{\sin L \cos \frac{N}{2}}{2 \left(\sin \frac{N}{2} \cos^2 \frac{L}{2} - \sqrt{\sin \frac{N-L}{2} \sin \frac{N+L}{2}} \right)};$$

для инверсии параболы $E=1$ и

$$Q = Q_{\min} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\sin(N-L)}{\sin N \cos^2 \frac{L}{2}}}}.$$

Эти два предела довольно значительно разнятся при большем изгибе крыльев. Так, если $2N=30^\circ$, $2L=27^\circ$, то подсчет дает

$$Q_{\max}=1.608, \quad Q_{\min}=1.471,$$

и следовательно, симметричная инверсия эллипса теоретически должна развивать на 9% большую подъемную силу, чем опирающаяся на те же круговые дуги инверсия параболы. Возможно, что на практике влияние вязкости, ведущее к образованию вихревого хвоста позади крыла, хвоста тем более широкого, чем задний конец тупее, сгладит эту выгоду. Вероятно, и лобовое сопротивление, при значительном притуплении кормовой части профиля, возрастет в такой мере, что оценка еще более повысится в пользу крыла с менее притупленным задним краем. Однако, в известных пределах преимущество профиля в виде инверсии эллипса может все же существовать и на деле. Вопрос этот может быть разрешен лишь экспериментальным путем.

Все изложенные соображения о подъемной силе исследуемого крыла опирались на ф-лу (6), в которой угол σ отсчитывается от критического направления. Чтобы ясно представить себе роль данного очертания, необходимо определить, как ориентировано по отношению к нему это направление. Для этого пользуемся указаниями, сопровождающими ф-лы (7) и (8) § 1: угол, образуемый критическим направлением с осью X , равен $\frac{\pi}{2}$ плюс аргумент коэффициента A , определяемого первой из ф-л (41). Отыщем, каков будет угол μ между тем же направлением и хордой осевой дужки; очевидно, μ равно разности аргументов комплексных чисел iA и $\frac{z''-z'}{d}$, из которых последнее дано ф-лой (42).

Таким образом,

$$\mu = \arg \frac{\sinh(2t_0 + H)}{\cosh^2 t_0}.$$

Но

$$\begin{aligned} c \sinh(2t_0 + H) &= V(m + in - c)(m + in + c) = V r_1 r_2 e^{\frac{s_1 + s_2}{2} i}, \\ \cosh t_0 &= \cosh\left(t_0 + \frac{H}{2}\right) \cosh \frac{H}{2} - \sinh\left(t_0 + \frac{H}{2}\right) \sinh \frac{H}{2} = \\ &= \cosh \frac{H}{2} \sqrt{\frac{\cosh(2t_0 + H) + 1}{2}} - \sinh \frac{H}{2} \sqrt{\frac{\cosh(2t_0 + H) - 1}{2}} = \\ &= \cosh \frac{H}{2} \sqrt{\frac{-m - in + c}{2c}} - \sinh \frac{H}{2} \sqrt{\frac{-m - in - c}{2c}} = \\ &= \cosh \frac{H}{2} \sqrt{\frac{r_1}{c} e^{\frac{s_1 i}{2}}} - \sinh \frac{H}{2} \sqrt{\frac{r_2}{c} e^{\frac{s_2 i}{2}}}. \end{aligned}$$

Здесь r_1 есть радиус-вектор, направленный из центра инверсии в удаленный от него фокус, r_2 направляется к ближайшему фокусу. Легко усмотреть, что так как координаты центра инверсии отрицательны, то

$$L = s_2 - s_1.$$

Приняв это в соображение, найдем из приведенных формул для искомого угла уравнение

$$(48) \quad \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \operatorname{tg} \frac{L}{4} \frac{\sqrt{\frac{r_1}{r_2} + \operatorname{tgh} \frac{H}{2}}}{\sqrt{\frac{r_1}{r_2} - \operatorname{tgh} \frac{H}{2}}}.$$

Из приведенного соотношения вытекает, что критическое направление дальше отклонено от хорды осевой дужки, чем в случае инверсии параболы, когда $r_1 = \infty$ и $\mu = \frac{L}{2}$, когда, следовательно, критические направления самой дужки и сравниваемого с нею профиля совпадают.

Указанное обстоятельство еще более подчеркивает выгодность профилей с притупленным задним краем, так как при одном и том же угле встречи потока с хордой осевой дужки образуемый им угол с критическим направлением окажется больше для инверсии эллипса с меньшим эксцентриситетом.

Чтобы не загромождать изложения излишними формулами, я не стану останавливаться на подсчете элементов параболы устойчивости и изображающих дуг для рассматриваемого крыла; в случае надобности, этот подсчет легко сделать, воспользовавшись присущими крылу коэффициентами (41) и данными в своем месте общими ф-лами (12'). Отмечу лишь более простой частный случай, в котором все вычисления особенно упрощаются: я имею в виду симметричную форму профиля, получающуюся в предположении, что центр инверсии лежит на большой оси.

В этом случае u_0 и u_1 суть количества чисто мнимые, i_0 и i_1 вещественны. Ф-лы (41) дают тогда

$$l = k_1 = 0,$$

а по (12')

$$g = q = 0.$$

Параметр параболы устойчивости и опрокидывающий момент равны нулю. Изображающие дуги и главная дуга обращаются в прямолинейные отрезки, лежащие на оси профиля.

Мы встречаем таким образом форму профиля, отмеченную в конце § 2, которую удобно принять для устройства рулей. Нетрудно для этого случая выразить все характерные для крыла величины через длину его осевой хорды S и полную длину оси профиля D . В самом деле, из ф-л (42) и (43) имеем:

$$\frac{S}{D} = \frac{\cosh^2(2t_0 + H) - \cosh^2 H}{\left\{ \cosh^2(2t_0 + H) - 1 \right\} \cosh H}.$$

но здесь

$$\cosh (2t_0 + H) = -\frac{m}{c} = \frac{a_1}{c} = \frac{1}{E_1},$$

если через a_1 и E_1 попережнему обозначим большую полуось и эксцентриситет софокусного основному эллипса, проведенного через центр инверсии.

Так как $\cosh H = \frac{1}{E}$, то мы получим

$$\frac{1 - E^2}{1 - E_1^2} = 1 - E \frac{S}{D},$$

вследствие которого формула поддерживающей силы, на основании соотношений (44), (45) и (46), принимает вид

$$(49) \quad P = \pi \rho D v_0^2 \sin \sigma \left(1 + \sqrt{1 - E \frac{S}{D}} \right).$$

Если в этой формуле $E = 1$, то очертание руля будет симметрической инверсией параболы.

Положение центра давления, т. е. той неизменной точки, через которую постоянно проходит равнодействующая, легко получится при помощи второй из ф-л (12'), в которую надлежит вставить значения l_1 и k из (41), λ заменить через A , данное теми же формулами, приравнять

$$\beta = \frac{u_0 - u_0'}{i} = 2 \operatorname{tgh} t_0$$

и линейную величину a заменить через d , которое можно затем выразить через элементы профиля при помощи (42') и (42).

Произведя все указанные операции, таким образом последовательно получим для расстояния R центра давлений от заднего конца руля:

$$R = hd = \lambda d \left(k - l_1 \beta + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{S}{4} \left\{ \frac{\cosh t_0}{\cosh (t_0 + H)} + \frac{\sinh (2t_0 + H)}{\sinh 2t_0} + \frac{\sinh 2t_0}{\sinh (2t_0 + H)} \right\}.$$

а отсюда, имея в виду (44'), где $t_0' = t_0$, (46') и (49),

$$(50) \quad R = \frac{D}{4} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{E} + \sqrt{1 - \frac{S}{ED}} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{ES}{D}} \right) \right\}.$$

При $E = 1$ (инверсия параболы)

$$R = \frac{D}{4} \left\{ 2 + \frac{S}{D} - \sqrt{1 - \frac{S}{D}} \right\}$$

будет больше, чем для инверсии эллипса.

§ 7. Заключение. Рассмотренный доселе тип крыльев. для профилей которых нами дан прием построения при помощи циркуля и линейки, не является единственным в своем роде. Если бы мы задали функцию z формулой

$$\frac{z}{a} = A \left\{ \frac{1}{u - \alpha} + \frac{a'}{u - \alpha'} + \frac{a''}{u - \alpha''} + \dots \right\},$$

то, выбрав комплексные числа α так, чтобы первое из них обладало положительным коэффициентом при мнимой единице, а у остальных эти коэффициенты были отрицательны, мы всегда можем надлежащим подбором чисел a' , a'' , ... выполнить и второе необходимое условие, чтобы все корни производной от z находились в нижней полуплоскости переменного u . Тогда, приняв за контур крыла кривую, соответствующую реальным значениям u , мы попрежнему изобразим область течения в верхней полуплоскости этого переменного. Все течение и все элементы, характеризующие крыло, определяются указанным в § 1 общим приемом. Построение контура будет отличаться от указанного в двух предшествующих параграфах лишь тем, что на этот раз придется для нахождения его точек складывать большее число векторов, так как параллельных прямых и окружностей их инверсии будет столько, сколько дробей в формуле z .

Условия выбора чисел a' , a'' , ... поведут к некоторым неравенствам. К ним можно добавить также некоторые уравнения, благодаря которым крыло будет снабжено острым задним краем в форме точки заострения первого или второго рода. Для этого достаточно потребовать, чтобы старший или два старших члена в числителе мероморфной функции, выражающей $\frac{dz}{du}$, выпадали.

Если, например, мы положим

$$\frac{z}{a} = \frac{\alpha' - \alpha''}{u - \alpha} + \frac{\alpha'' - \alpha}{u - \alpha'} + \frac{\alpha - \alpha'}{u - \alpha''},$$

то контур будет иметь клювообразное окончание. Коэффициенты α должны быть таковы, чтобы корни уравнения

$$3u^2 - 2(\alpha + \alpha' + \alpha'')u + \alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha = 0$$

имели отрицательную мнимую часть ¹⁾.

Суммируя полученные нами выводы, отметим, что при сделанных предположениях об отсутствии вязкости и пренебрежении сжимаемостью воздуха для

¹⁾ Пример $\alpha' = -i$, $\alpha = -\alpha'' = \frac{2+i}{3}$, корни приведенного квадратного уравнения будут

$$-i \pm \sqrt{\frac{2}{3}}(1+i).$$

крыла любой формы должно иметь место правильное обтекание, причем если точка схода не меняет своего места, то поддерживающая сила и вращающий момент имеют выражения

$$P = K \rho a v_0^2 \sin \sigma,$$

$$M = \rho a^2 v_0^2 (G \cos 2\sigma + N \sin 2\sigma + Q),$$

где σ — угол встречи, отсчитываемый от критического направления. Крыло характеризуется свойственной ему параболой устойчивости, облекающей линии действия поддерживающей силы при различных углах встречи. Момент относительно фокуса этой параболы имеет величину, не зависящую от угла атаки и равную опрокидывающему моменту, который будет иметь место при критическом направлении потока, когда сила обращается в нуль. Наконец, всякой форме профиля соответствует определенная, неизменно с ними связанная дуга круга, которая представляет собою сечение идеально тонкого крыла, имеющего все количественные свойства данного.

Конечно, вязкость вносит существенные искажения в нарисованную нами картину; в несравненно меньшей степени дело будет меняться от упругости воздуха. Тем не менее, при тех довольно узких пределах, в которых меняется угол атаки в реальных случаях полета, мне думается, можно ожидать довольно хорошего практического согласия между выводами развитой нами теории и опытными данными. Было бы благодарной темой для экспериментального исследования сравнение теоретических построений и вычислений с результатами непосредственного измерения сил по моделям, изготовленным на основании указанной теории.

СХЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗРЕЗНОГО КРЫЛА АЭРОПЛАНА

(Посвящается памяти Н. Е. Жуковского)

Печатаемую ныне статью я предназначал для юбилейного сборника, который предполагалось издать по случаю пятидесятилетия блестящей научной деятельности Н. Е. Жуковского. К сожалению, разные обстоятельства задержали своевременное окончание работы, и она увидит свет уже после кончины моего дорогого, глубоко чтимого учителя.

В виду того, что я в свое время делился с покойным своими соображениями по трактуемому вопросу и добытыми тогда результатами, в виду интереса, проявленного Николаем Егоровичем к поставленной задаче, интереса, с которым он неизменно относился ко всем новым начинаниям своих учеников, я позволяю себе посвятить этот труд его светлому имени.

§ 1. В 1914 г. в Математическом сборнике была опубликована моя работа под заглавием «Теория решетчатого крыла», в которой были указаны некоторые выгоды такого рода крыльев аэроплана в виду их более значительной подъемной силы и предполагаемой большей устойчивости. При этом я рассматривал задачу о преграждающей плоскопараллельный поток бесконечной решетке в форме жалюзи или плоской решетки. Перенести выводы непосредственно на крыло с конечным числом перьев было, конечно, нельзя, хотя представлялось вероятным, что и в таком случае выгода в некоторой мере могла сохраниться.

Затем мне удалось найти решение той же задачи для крыла, состоящего из двух перьев, представляющих из себя ограниченные образующими части боковой поверхности одного и того же круглого цилиндра. Решение было выражено при помощи эллиптических функций, и хотя величину поддерживающей силы удалось, в результате довольно длинных преобразований, выразить в конце концов весьма просто, но вопрос об устойчивости крыла, зависящий от вращающего момента давлений, представлялся не вполне ясным в виду большой сложности получившихся формул.

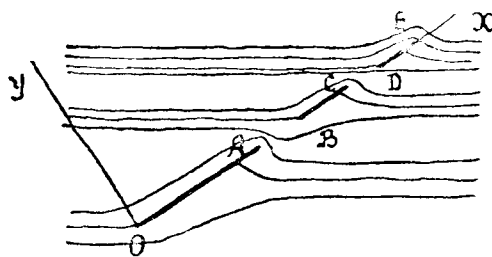
В настоящей работе я даю совершенно общие формулы, позволяющие установить решение для разрезного крыла с произвольным числом перьев. Это решение позволяет по геометрическим характеристикам крыла определить как поддерживающую силу, так и вращающий момент и положение

метacentра, не выходя за пределы простейших элементарных функций. В случае вогнутого крыла, состоящего из двух перьев, я привожу подробные вычисления и даю числовые примеры, иллюстрирующие теорию. Но при желании весь подобный подсчет может быть с несколько большей затратой времени проведен и для крыла с любым заданным числом перьев.

При всех предлагаемых расчетах воздух рассматривается как идеальная жидкость, и, таким образом, не учитывается влияние его вязкости и сжимаемости. Последняя, как это было показано в свое время в моей работе «О газовых струях» (Уч. зап. Моск. унив., 1902 г.), не играет роли при тех скоростях, которые господствуют во время полета аэроплана, хотя в некоторой степени она может проявить себя в незначительных областях, окружающих передние края перьев движущегося крыла: однако протекающая отсюда поправка, как можно заключить из формул работы «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» (Мат. сб., т. 28), должна быть очень невелика.

Влияние вязкости, наоборот, весьма важно: благодаря ей возникают вихри и порождаемое ими лобовое сопротивление, с одной стороны, и очень заметно изменяются поддерживающая сила и момент давлений — с другой. К сожалению, при современных средствах анализа подсчитать эффекты вязкости не представляется возможным. Поэтому мы можем лишь качественно охарактеризовать значение прорезов в крыле при наличии вязкости, что и будет сделано в заключительной части предлагаемой работы, где будут сгруппированы полученные результаты.

§ 2. Плоское разрезное крыло. Начнем с рассмотрения простейшего случая, когда крыло плоское. Ограничимся сначала крылом из трех перьев, плоскости которых, перпендикулярные к направляющей плоскости потока xy , пересекают ее по следам ED , CB , AO в порядке последовательных составных частей, начиная с переднего края. Задний конец крыла принимаем за начало координат в плоскости мнимого пере-



Фиг. 1.

$$z = x + iy$$

и, обозначив через a , b , c , d , e последовательно длины отрезков OA , AB , BC , CD и DE , рассмотрим значения на этой плоскости функции

$$(1) \quad R = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{a+b}{z}\right) \left(1 - \frac{a+b+c+d}{z}\right)}{\left(1 - \frac{a}{z}\right) \left(1 - \frac{a+b+c}{z}\right) \left(1 - \frac{a+b+c+d+e}{z}\right)}}.$$

Условимся считать $B = +1$ при $z = \infty$. Тогда во всей области течения, представляемой бесконечной плоскостью xy с разрезами по следам

перьев крыла, указанная функция будет всюду однозначна. Она конечна везде, кроме точек E , C и A , т. е. передних краев перьев. Во всякой точке H верхней плоскости переднего пера мы будем иметь $R = -iL$, а в точке G , на нижней стороне той же части крыла, $R = iL'$, обозначая через L и L' реальные положительные функции x .

В самом деле, положив

$$z = a + b + c + d + e + \epsilon e^{in}$$

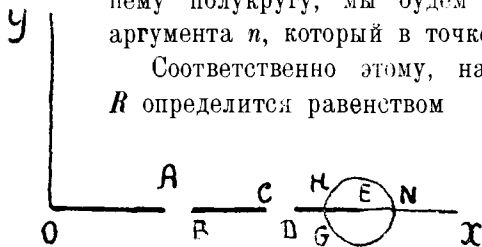
с весьма малым ϵ , мы в области точки E будем иметь

$$R = \frac{M}{V \epsilon} e^{-\frac{in}{2}}$$

При обходе точки E из N по части контура, лежащей выше OX , n будет положительно, и в точке H получит значение $+\pi$; обходя по нижнему полукругу, мы будем встречать отрицательные значения аргумента n , который в точке G приобретает величину $-\pi$.

Соответственно этому, написанное выше выражение функции R определится равенством

$$R = \mp \frac{M}{V \epsilon},$$



Фиг. 2.

причем верхний знак относится к точке H , а нижний — к точке G .

В точке E оба значения совпадут, ибо здесь

$$z = a + b + c + d + e, \\ R = 0.$$

То, что сказано о переднем перье, справедливо и для двух остальных.

Заметим, наконец, что на всей части действительной оси xl , не занятой перьями, R реально и положительно.

Чтобы яснее охарактеризовать ход изменения важной для нашей теории функции R и с несомненностью установить ее однозначность, полезно, может быть, иметь в виду еще следующее рассуждение. Обозначим через $r, r_1, \dots, r_5$ последовательные радиусы-векторы, направленные из концов перьев, помеченных на фиг. 3 соответственными цифрами, к некоторой точке M плоскости переменного z , а через $s, s_1, \dots, s_5$ — соответственные углы этих направлений с осью X , считая их от оси X к оси Y .

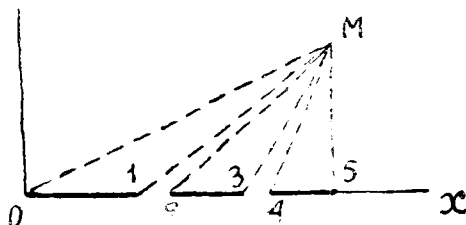
Функции R можно тогда придать вид

$$R = \sqrt{\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3 r_5}} e^{in},$$

где корень имеет арифметическое значение и

$$n = \frac{s + s_2 + s_4 - s_1 - s_3 - s_5}{2}.$$

Проследим теперь за изменением R в плоскости z вследствие перемещения точки M . При этом необходимо все векторы, направляющиеся к точке M , перемещать одновременно и рассматривать всегда лишь такие пути для M , которые не пересекают отрезков оси X , занятых перьями крыла; эти части оси, как указано выше, следует представлять себе как прорезы ее, непроходимые путями изменения функции.



Фиг. 3.

В бесконечно далекой точке все радиусы-векторы и их углы стремятся к равенству, и потому $R=1$. Далее, может возникнуть два вопроса: во-первых, придя из удаленной точки в данный пункт плоскости и обходя затем различные, допустимые принятыми условиями, замкнутые пути, вернемся ли мы в этот пункт вновь с тем же значением функции R , и, во-вторых, будут ли вполне определены значения ее на верхних и нижних сторонах перьев крыла, считая за верхнюю ту сторону, которая обращена к положительным y ?

Чтобы ответить на первый вопрос, заметим, что существенно различных путей может быть четыре типа. Первый представляет собою замкнутый контур, не охватывающий ни одного из перьев и могущий сократиться в одну точку, не пересекая поставленных границ. Тогда все углы возвращаются к своим прежним значениям, равно как и радиусы-векторы, обладающие этим свойством при всех возможных путях.

Вторым типом будем считать контур, обходящий крыло в целом. В таком случае все углы s либо прирастают на 2π , либо убывают на ту же величину, в зависимости от того, совершается ли обход в прямом направлении, от OX и OY , или в обратном. Ясно, что амплитуда функции R , выражаемая количеством n , изменения при этом не претерпевает.

Остальные два типа путей охватывают одно или два из перьев, проходя через некоторую точку оси X в промежутках между ними. При этих обходах приросты будут получать углы лишь тех радиусов-векторов, которые исходят из концов перьев, находящихся внутри контура. Легко усмотреть, что и эти приросты взаимно компенсируются в амплитуде n .

Переходя ко второму вопросу, отметим, что на верхнюю сторону каждого пера мы можем всегда прийти из далеких точек со значением углов $s_m = \pi$ для радиусов-векторов, исходящих из всех центров, лежащих внутри рассматриваемого пункта, и углом $s_m = 0$ для каждого из векторов, которые исходят из центров, расположенных ближе к началу координат.

В таком случае всегда окажется

$$n = -\frac{\pi}{2},$$

так как угол π лишний раз войдет со знаком минус в указанную амплитуду. С другой стороны, существует путь, который на нижнюю сторону приводит со значением $s_m = -\pi$ для каждого из радиусов первой группы; для второй группы попрежнему $s_m = 0$. Отсюда ясно, что во всех точках этой стороны пера будет

$$n = +\frac{\pi}{2}.$$

Всякие иные пути, приводящие из бесконечности в тот же пункт верхней или нижней стороны пера, сведутся к комбинации только что указанных очертаний с замкнутыми контурами, которые для рассматриваемых точек, как и для других, не вносят никакого изменения в значения функции R .

Переходим к определению потока. Представив себе, что всей массе жидкости и летящему крылу придана в обратную сторону скорость v_0 движения крыла, мы будем иметь поток, набегающий из безграничной дали на покоящееся крыло. Обозначим через ρ плотность воздуха, рассматривая его как идеальную несжимаемую жидкость, и, предположив, что вихри отсутствуют, назовем через φ потенциал скоростей, через ψ — функцию тока, буквою σ будем обозначать угол атаки (встречи).

Обозначая через w мнимое переменное

$$w = \varphi + i\psi,$$

через v — переменную скорость в различных точках течения, через θ — ее угол с осью x , положим

$$(2) \quad -\frac{1}{r_0} \frac{dw}{dz} = -\frac{v}{r_0} e^{-i\theta} = \frac{v}{r_0} e^{(\pi-\theta)i} = \cos \sigma + iR \sin \sigma.$$

Легко усмотреть, что таким образом все требуемые условия будут удовлетворены. В самом деле, в далеких точках потока, при $R=1$, мы имеем $\pi - \theta = \sigma$, $v = v_0$; на частях действительной оси, не занятых крылом, R реально, и функция $\frac{dw}{dz}$ комплексна; но, как и должно, она имеет реальное значение на крыле, так как на участке AO , BC и DE , по вышеизложенному, R имеет мнимую величину. Далее, в точках схода струй с перьев

$$\theta = \pi, \quad v = v_0 \cos \sigma$$

скорость имеет одно и то же значение для всех перьев. Она весьма велика

на передних краях перьев. На нижней поверхности каждого из них непременно найдется критическая точка с нулевой скоростью, ибо при

$$R = iL(x),$$

где положительная реальная функция $L(x)$ изменяется от ∞ на переднем и до нуля на заднем конце пера, правая часть равенства (2), приобретая вид

$$\cos \sigma - L(x) \sin \sigma,$$

непрерывно обращается в нуль, притом не более одного раза на каждом перье.

Найдем теперь циркуляцию скорости, чтобы определить по ней поддерживающую силу P . Нетрудно видеть, что циркуляция J будет равна

$$J = 2\pi iH,$$

если через H обозначим вычет¹⁾ функции $\frac{dw}{dz}$ в области $z = \infty$.

Разлагая $\frac{dw}{dz}$ по степеням $\frac{1}{z}$ и сохраняя лишь первые степени, легко получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} &= \cos \sigma + i \sin \sigma \left(1 - \frac{a+b}{2z}\right) \left(1 - \frac{a+b+c}{2z}\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{a}{2z}\right) \left(1 + \frac{a+b+c}{2z}\right) \left(1 + \frac{a+b+c+d+e}{2z}\right); \end{aligned}$$

отсюда

$$H = -\frac{v_0 i}{2} \sin \sigma (a + c + e) = -\frac{v_0 i l}{2} \sin \sigma,$$

если условимся через l обозначить полную ширину крыла со сдвинутыми вплотную перьями.

Воспользовавшись выражением H , находим по известной формуле Н. Е. Жуковского:

$$(3) \quad P = J\rho v_0 = \pi\rho v_0^2 l \sin \sigma.$$

Таким образом, поддерживающая сила плоского крыла не изменяется, будут ли его перья раздвинуты, или сомкнуты вплотную.

Обратимся, далее, к определению вращающего момента сил давления относительно заднего конца. По ф-ле (53), приведенной в моей статье «О давлении плоскопараллельного потока...», этот момент M определится формулой

$$M = -R(\pi\rho iK),$$

где R — знак реальной части, а K — коэффициент при $\frac{1}{z}$ в разложенной

¹⁾ Под вычетом $F(z)$ разумеется коэффициент при $\frac{1}{z}$ разложения этой функции в области $z = \infty$.

по степеням $\frac{1}{z}$ функции

$$\begin{aligned}
 F = z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 &= v_0^2 z \left[\cos \sigma + i \sin \sigma \right] \left\{ 1 - \frac{a+b}{2z} - \frac{(a+b)^2}{8z^2} + \dots \right\} \times \\
 &\times \left\{ 1 - \frac{a+b+c+d}{2z} - \frac{(a+b+c+d)^2}{8z^2} + \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{a}{2z} + \frac{3a^2}{8z^2} + \dots \right\} \times \\
 (4) \quad &\times \left\{ 1 + \frac{a+b+c}{2z} + \frac{3(a+b+c)^2}{8z^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{a+b+c+d+e}{2z} + \right. \\
 &+ \left. \frac{3(a+b+c+d+e)^2}{8z^2} + \dots \right\}^2 = v_0^2 z \left[\cos \sigma + i \sin \sigma \right] \left\{ 1 + \frac{a+c}{2z} + \right. \\
 &+ \left. \frac{3(a+c+e)^2 + 4b(c+e) + 4de}{8z^2} + \dots \right\}^2.
 \end{aligned}$$

На основании вышеприведенной формулы, при помощи найденного таким образом разложения функции F , получаем искомый момент

$$M = \pi \rho v_0^2 \sin \sigma \cos \sigma \left\{ \frac{3}{4} (a+c+e)^2 + b(c+e) + de \right\}.$$

Отсюда, воспользовавшись ф-лой (3), имеем для плеча h силы выражение

$$(5) \quad h = \frac{M}{P} = \left\{ \frac{3}{4} (a+c+e) + b + \frac{de-ab}{a+c+e} \right\} \cos \sigma = \lambda \cos \sigma;$$

выражение это показывает, что сила пересекает плоскость крыла в неизменной, не зависящей от угла атаки, точке, отстоящей от заднего края на расстоянии λ .

Изобразив формулу для λ в виде

$$\lambda = \frac{3}{4} (a+b+c+d+e) + \frac{b-3d}{4} + \frac{de-ab}{a+c+e},$$

легко убеждаемся, что надлежащим подбором промежутков b и d между перьями крыла и отношения ширины переднего и заднего пера всегда можно достичь того, чтобы два последние слагаемые в формуле для λ были положительны. Тогда метоцентр, совпадающий с центром давления на крыло, окажется ближе к переднему краю по сравнению с тем положением, которое он занимал бы даже при заполнении материалом промежутков между частями крыла, в каковом случае его расстояние, как известно, выражалось бы первым членом найденной формулы для λ .

§ 3. Если теперь мы пожелаем бы построить общие формулы для крыла, состоящего из n пластинок, то достаточно было бы в ф-ле (1) под корнем написать в числителе $n-1$ двучленных множителей вида

$$1 - \frac{\alpha_m}{z} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1),$$

где α_m были бы абсциссами всех задних краев последовательных перьев, за исключением последнего, абсцисса которого равна нулю; это — точки схода струй; знаменатель же должен представляться произведением n двучленов

$$1 - \frac{\beta_m}{z} \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

если через β_m мы условимся обозначать расстояния от заднего конца крыла режущих воздух передних краев перьев, где скорость достигает бесконечной величины.

Нетрудно усмотреть, что и в настоящем случае поддерживающая сила опять-таки будет иметь ту же величину, как при сдвинутых перьях, и что центр давления не будет менять своего места на крыле с изменением угла атаки.

§ 4. Вогнутое разрезное крыло из двух перьев. Обращаясь к построению теории вогнутого крыла, остановимся, прежде всего, подробнее на том случае, когда это крыло представляет систему двух перьев, которые являются частями боковой поверхности одного и того же круглого цилиндра.

Примем за начало координат в плоскости течения центр круга, частями которого являются вышеуказанные дуги, действительную ось направим через задний конец крыла и обозначим через α , β , γ последовательные центральные углы, из коих первый и третий опираются на перья крыла, второй измеряет промежуток между ними. Радиус окружности примем за единицу меры и будем помнить, что построенные в этом предположении формулы для поддерживающей силы и ее момента следует умножить, соответственно, на r и r^2 , если в иных единицах длина радиуса будет выражаться числом r .

Функция

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{v}{v_0} e^{-i\theta}$$

в рассматриваемом случае должна, прежде всего, удовлетворять следующим условиям: во-первых, она однозначна, непрерывна и всюду конечна, кроме передних краев перьев, где имеет бесконечную величину, во-вторых, на дугах, по которым перья пересекаются с плоскостью xy , выражение $z \frac{dw}{dz}$ должно иметь чисто мнимую величину, ибо здесь dw есть реальное количество, так как указанные дуги суть части линий тока, а в виду равенства

$$z = e^{ui}$$

дифференциал от логарифма z представляет собою величину чисто мнимую.

Второе из указанных условий будет выполнено, если мы положим

$$(6) \quad \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = (A + Bi) e^{-i\theta_0} - (A - Bi) \frac{e^{i\theta_0}}{z^2} + \frac{Hi}{z} + \left\{ (A' + B'i) e^{-i\theta_0} + \right. \\ \left. + (A' - B'i) e^{i\theta_0} \frac{d^2}{z^2} + G \frac{d}{z} \right\} R,$$

где

$$(7) \quad R = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(1 - \frac{b}{z}\right)}{\left(1 - \frac{a}{z}\right) \left(1 - \frac{c}{z}\right)}},$$

$$(S) \quad a = e^{\alpha i}; \quad b = e^{(\alpha + \beta)i}; \quad c = e^{(\alpha + \beta + \gamma)i}; \quad d = e^{\frac{\alpha + \gamma}{4}i},$$

а прочие постоянные — представляют подлежащие подбору реальные отвлеченные числа.

Функция, выражаемая радикалом R , всюду на плоскости течения однозначна, в чем убеждаемся путем рассуждения, аналогичного указанному в § 2.

Чтобы убедиться в правильности нашего утверждения, заметим, что на окружности функция R имеет величину

$$R = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\sin \frac{u}{2} \sin \frac{u - \alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{u - \alpha}{2} \sin \frac{u - \alpha - \beta - \gamma}{2}}} = \frac{L}{d};$$

входящий сюда радикал L имеет на дугах, занятых перьями крыла 1 и 2 (фиг. 4), чисто мнимое значение, так как угол u на этих двух дугах заключен соответственно в пределах 0 и α , $\alpha + \beta$ и $\alpha + \beta + \gamma$.

На остальной части окружности этот радикал всюду реален. Вторая часть ф-лы (6), по умножении ее на $z = e^{ui}$, приобретает вид

$$f = \left[\frac{A' + Bi}{d} e^{i(u - \theta_0)} + (A' - Bi) e^{-i(u - \theta_0)} + G \right] L;$$

функция, заключенная в квадратные скобки, на дугах 1 и 2, очевидно, реальна, каковы бы ни были реальные числа A' , B' , θ_0 и G , а так как L , по вышеуказанному, чисто мнимое, то и функция f также есть мнимая величина.

Что касается первой строки ф-лы (6), то она, будучи умножена на z , на окружности обращается в выражение

$$f_1 = (A + Bi) e^{i(u - \theta_0)} - (A - Bi) e^{-i(u - \theta_0)} + Hi$$

и имеет во всех ее точках мнимое значение.

Таким образом,

$$(9) \quad z \frac{dw}{dz} = v_0 (f_1 + f),$$

как и следует, на дугах 1 и 2 является количеством чисто мнимым.

Переходим к подбору коэффициентов с тем, чтобы выполнить первое условие, наложенное на функцию $\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz}$. Однозначность и непрерывность ее во всей области течения, т. е. повсюду на бесконечной плоскости переменного z с прорезами по дугам 1 и 2, не вызывают сомнения. Она также будет повсюду, кроме передних краев перьев, конечна, если мы потребуем обращения в нуль коэффициентов при отрицательных степенях z в области

нуля. Здесь функция B , как явствует из ф-л (7), представляется в виде голоморфной функции

$$R = \frac{1}{d^2} \left[1 + hz + z^2 P(z) \right],$$

где

$$(10) \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - 1 \right)$$

и a, b, c, d представляются ф-лами (8).

Собирая засим в выражении (6) коэффициенты при $\frac{1}{z^2}$ и приравнявая их сумму нулю, получаем

$$(11) \quad \begin{aligned} A' - Bi &= A - Bi; \\ A &= A'; \quad B = B'. \end{aligned}$$

Прежде чем перейти к условию выпадения в рассматриваемой области члена с первой отрицательной степенью z , найдем недостающие условия для определения коэффициентов A и B .

Они получатся, если мы примем во внимание, что в далеких точках, где $v = v_0$ и $\theta = \theta_0$, должно быть выполнено вытекающее из ф-лы (6) соотношение

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = (A + Bi + A' + B'i) e^{-i\theta_0} = e^{-i\theta_0}.$$

Сопоставляя его с (11), находим для искомых чисел следующие значения:

$$(12) \quad B = B' = 0; \quad A = A' = \frac{1}{2}.$$

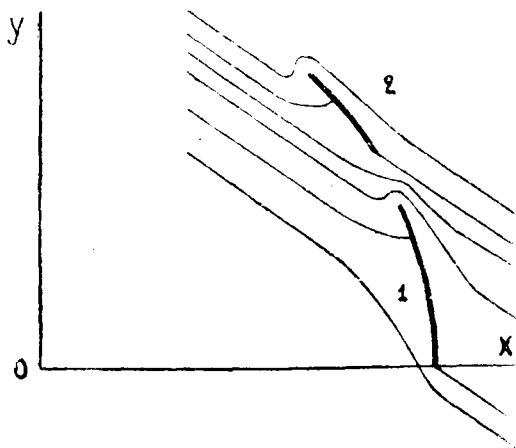
По вставке этих значений в выражение (6), получаем

$$(13) \quad \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} e^{-i\theta_0} - \frac{1}{2z^2} e^{i\theta_0} + \frac{Hi}{z} + \left(\frac{1}{2} e^{-i\theta_0} + \frac{d^2}{2z^2} e^{i\theta_0} - \frac{Gd}{z} \right) B.$$

Воспользовавшись указанным разложением B в области нуля, составив коэффициент при $\frac{1}{z}$ и приравняв его нулю, приходим к соотношению

$$(14) \quad \frac{he^{i\theta_0}}{2} + \frac{G}{d} + Hi = 0.$$

служащему для определения вещественных чисел H и G .



Фиг. 4.

Перейдем к отысканию циркуляции потенциала скорости. Для этой цели отыскиваем коэффициент iC при первой степени $\frac{1}{z}$ разложения по отрицательным степеням z производной w в области бесконечно удаленной точки. Здесь

$$H = 1 - \frac{h_1}{2z} + \frac{1}{z^2} P \left(\frac{1}{z} \right),$$

причем

$$(15) \quad 2h_1 = a + c - b - 1$$

есть комплексное число, сопряженное h , как это видно из ф-л (8) и (10).

Ф-ла (13) дает затем

$$(15') \quad iC = \frac{h_1}{2} e^{-i\theta_0} + Gd + Hi.$$

Изменив $-i$ на i в ур-нии (14), получаем

$$(16) \quad \frac{h_1}{2} e^{-i\theta_0} + Gd = Hi,$$

и следовательно,

$$(17) \quad C = 2H$$

есть количество реальное.

Из (14) и (16) находим, по исключении G :

$$(17') \quad Hi \left(d + \frac{1}{d} \right) = \frac{h_1}{2d} e^{-i\theta_0} - \frac{hd}{2} e^{i\theta_0}.$$

Введем обозначения

$$(18) \quad \alpha + \gamma = 4q, \quad \alpha - \gamma = 4q';$$

тогда, при помощи ф-л (8), (15) перепишется в виде

$$\frac{h_1}{d} = e^{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} i} \left\{ e^{q'i} \cos \left(\frac{\beta}{2} + q - q' \right) - e^{(q' - q)i} \cos \left(\frac{\beta}{2} + q + q' \right) \right\}.$$

Приняв в соображение равенство

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \sigma,$$

где σ — угол атаки, найдем, преобразуя выражение в витых скобках:

$$\begin{aligned} \frac{h_1 e^{-i\theta_0}}{d} = e^{\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)i} \left\{ \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) \sin q + \sin \frac{\beta}{2} \sin (2q' - q) + \right. \\ \left. + i \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) \cos q - i \sin \frac{\beta}{2} \cos (2q' - q) \right\}, \end{aligned}$$

а затем ф-лы (17) и (17') дают

$$(19) \quad \begin{aligned} U \cos q = \sin(\sigma + q) \left\{ \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) - \sin\frac{\beta}{2} \cos 2q' \right\} + \\ + \cos(\sigma + q) \sin\frac{\beta}{2} \sin 2q'. \end{aligned}$$

Поддерживающая сила определяется как результат умножения абсолютной величины циркуляции

$$J = -2\pi C v_0$$

на v_0 ; направление силы получится, если, в виду отрицательного знака циркуляции, мы повернем направление потока в далеких точках на прямой угол оси X к оси Y . Введя, согласно высказанному в свое время замечанию, множителем радиус окружности, получим

$$P = 2\pi r v_0^2 C.$$

Принимая во внимание выражение C , формуле для P можно придать такой простой вид:

$$(20) \quad P = 2\pi^2 r v_0^2 \frac{\sin(\sigma + q + \epsilon)}{\cos q} k,$$

при этом количества k и ϵ определяются формулами

$$(21) \quad \begin{aligned} k^2 = \sin^2\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) + \sin^2\frac{\beta}{2} - 2 \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) \cos 2q', \\ \operatorname{tg} \epsilon = \frac{\sin\frac{\beta}{2} \sin 2q'}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) - \sin\frac{\beta}{2} \cos 2q'}; \end{aligned}$$

последняя формула может быть преобразована в виде

$$(22) \quad \operatorname{tg}\left(\epsilon - \frac{\beta}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\beta}{4} \frac{\sin 2q' + \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q'\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right)}{\sin 2q' + \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2} + 2q'\right)}.$$

Имея в виду значения q и q' , определяемые ф-лами (18) и (22), усматриваем, что при достаточном превосходстве ширины заднего пера в сравнении с передним, критический угол $q + \epsilon$, на который крыло должно наклоняться вперед для того, чтобы поддерживающая сила обратилась в нуль, не только больше величины, соответствующей сомкнутому крылу, но может превзойти даже тот предел, которого такой угол достигает при заполнении материалом промежутка между перьями.

В самом деле, в последнем случае этот угол имел бы величину $q + \frac{\beta}{4}$; но если

$$\sin 2q' + \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q' \right) = 2 \sin \left(\frac{\beta}{4} + 2q' \right) \cos \frac{\beta}{4} > \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right),$$

то числитель в правой части ф-лы (22) положителен, в виду того, что знаменатель наверное более нуля, мы имеем $\epsilon > \frac{\beta}{4}$.

Что касается величины k , определяемой (ф-лой 21), то из соотношения

$$\sin^2 2q - k^2 = 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) (\cos 2q' - \cos 2q)$$

возникает неравенство

$$k < \sin 2q.$$

Неравенство обратилось бы в равенство в предположении $\beta = 0$, т. е. при сдвиге перьев вплотную.

Чтобы сравнить поддерживающую силу с соответственной величиной для крыла в закрытом состоянии, положим в (20) $\beta = 0$; приходим к известной формуле

$$P_0 = 4\pi\rho r v_0^2 \sin q \sin(\sigma + q).$$

Вследствие высказанного замечания о величине коэффициента k , входящего в ф-лу (20), легко усмотреть, что раздвижное крыло с широким передним и более узким задним пером развивает меньшую подъемную силу, так как в этом предположении

$$\frac{P}{P_0} = \frac{k}{\sin 2q} \cdot \frac{\sin(\sigma + q + \epsilon)}{\sin(\sigma + q)}$$

при отрицательном ϵ представляется в виде произведения двух дробей.

В случае, когда заднее перо шире переднего, результаты получатся в более ясной форме, если мы, вместо того, чтобы определить P ф-лой (20), придадим ее выражению иной вид, воспользовавшись для этого выражением циркуляции через коэффициент C , данный в отношении (19). Таким образом получим

$$(23) \quad P = \frac{2\pi\rho r v_0^2}{\cos q} \left\{ \sin(\sigma + q) \left[\sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) - \sin \frac{\beta}{2} \cos 2q' \right] + \right. \\ \left. + \cos(\sigma + q) \sin \frac{\beta}{2} \sin 2q' \right\}$$

и затем

$$(24) \quad N = \frac{P}{P_0} = \frac{\sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right)}{\sin 2q} + \sin \frac{\beta}{2} \frac{\sin(2q' - q - \sigma)}{\sin 2q \sin(\sigma + q)}.$$

Отсюда сразу видно, что если $2q' > q$, то при достаточно малых углах атаки и большом раздвижении перьев, коэффициент N может достичь величины, значительно превосходящей единицу.

Чтобы иметь выигрыш в подъемной силе, угол атаки должно определить из условия $N > 1$, откуда получаем

$$(25) \quad \operatorname{tg}(\sigma + q) < \frac{\sin 2q'}{\cos 2q' - \frac{\cos\left(\frac{\beta}{4} + 2q\right)}{\cos \frac{\beta}{4}}}.$$

§ 5. Числовые примеры. Для большей ясности и наглядности полученных результатов, рассмотрим числовые примеры.

1. Положим

$$\alpha = 24^\circ, \quad \beta = 9^\circ, \quad \gamma = 3^\circ,$$

откуда

$$q = \frac{\alpha + \gamma}{4} = 6^\circ 45', \quad 2q' = 10^\circ 30' = \frac{\alpha - \gamma}{2}.$$

По ф-ле (25) имеем

$$\operatorname{tg}(\sigma + q) < \frac{\sin 10^\circ 30'}{\cos 10^\circ 30' - \frac{\cos 15^\circ 45'}{\cos 2^\circ 15'}}$$

и, по подсчете, получаем

$$\sigma < 31^\circ 52' - 6^\circ 45', \\ \sigma < 75^\circ.$$

Таким образом, неравенство (25), при взятых дужках, удовлетворяется для всякого угла атаки.

Подсчитаем теперь коэффициент выигрыша при $\tau = 0$ и $\tau = 10^\circ$. В первом случае имеем

$$N = N_1 = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 13^\circ 30'} + \sin 4^\circ 30' \frac{\sin 3^\circ 45'}{\sin 13^\circ 30' \sin 6^\circ 45'},$$

во втором:

$$N = N_2 = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 13^\circ 30'} - \sin 4^\circ 30' \frac{\sin 6^\circ 15'}{\sin 13^\circ 30' \sin 16^\circ 45'}.$$

Вычисление дает

$$N_1 = 1.32370 + 0.18705 = 1.51075, \\ N_2 = 1.32370 - 0.12696 = 1.19674.$$

Добавим еще, что при угле атаки

$$\sigma = 2q' - q = 3^\circ 45', \\ N = 1.32370,$$

как это можно уметреть, приняв во внимание ф-лу (24).

Таким образом, выигрыш подъемной силы растет с уменьшением угла атаки. Он достигает 20% при угле в 10° , равен 32% для угла $3^\circ 45'$ и повышается до 51% в том случае, когда при полете хорда крыла горизонтальна.

Приведенный пример представляет известную крайность: здесь намеренно взято очень широкое отверстие в крыле с тем, чтобы указать, что и в этом случае выигрыш в подъемной силе, по сравнению с крылом сомкнутым, весьма значителен. Но если бы мы стали сравнивать ту же силу с ее величиной, определенной для крыла без выреза, то оказалось бы, конечно, что она много меньше последней.

Тем не менее, при столь значительном вырезе влияние взаимодействия перьев на изменение потока очень существенно. Можно простым подсчетом показать, что если бы мы вычислили подъемную силу каждого пера в отдельности, предположив, что другого в потоке нет, то сумма подъемных сил оказалась бы значительно меньше получаемой для крыла из двух перьев.

Положим, например, что хорда составного крыла направлена по потоку.

Обозначив через P' числовую величину давящей сверху вниз силы на отдельно взятое переднее перо в том положении, которое оно занимает в сложном крыле, и через P'' — подъемную силу одного заднего при тех же условиях, для нашего примера из формул

$$N' = \frac{P'}{P_0} = \frac{\sin \frac{\gamma}{4} \sin \left(\sigma' - \frac{\gamma}{4} \right)}{\sin^2 q},$$

$$N'' = \frac{P''}{P_0} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\sigma'' + \frac{\alpha}{4} \right)}{\sin^2 q},$$

где $\sigma' = 16^\circ 30'$, $\sigma'' = 6^\circ$ — углы атаки на последовательные перья, а P_0 — поддерживающая сила крыла со сдвинутыми перьями, произведя подсчет, найдем

$$N' = 0.2573, \quad N'' = 1.5730,$$

$$N'' - N' = 1.3167.$$

Таким образом, выигрыш должен был бы быть около 32%; между тем, он оказался равным 51%. Заметим, однако, что при полном удалении переднего пера поддерживающая сила была бы P'' и, стало быть, переднее перо уменьшает ее на 5% от величины P_0 . Это явление зависит от того, что угол атаки в отдельно взятом крыле, представляемом задним пером, имеет довольно значительную величину. Такая потеря будет иметь место до тех пор, пока ширина щели между перьями не упадет ниже известного предела.

Предел этот для крыла, составленного из перьев, опирающихся на заданные центральные углы, определится неравенством

$$\frac{\sin q \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) + \sin (2q' - q) \sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos q \cdot \sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta + \gamma}{2} \right)} \geq 1,$$

вытекающим из ф-лы (23) для силы P составного крыла, причем сила P'' крыла, представляемого одним задним пером, найдется из (23), положив:

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad q = \frac{\alpha}{4}, \quad \sigma = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Из приведенного неравенства легко получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \leq \frac{\cos q}{2 \cos q' - \cos q} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{4},$$

откуда, в виду незначительности углов q и q' , следует, что β должно быть несколько менее $\frac{\gamma}{2}$, мало отличаясь от этой предельной величины.

2. Однако, и при гораздо больших вырезах в крыле переднее перо уже начинает поддерживать аппарат, если угол атаки достаточно велик. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим новый пример, принимая

$$\gamma = 3^\circ, \quad \beta = 6^\circ, \quad \alpha = 27^\circ.$$

Самый подсчет произведем по иному плану, вводя вспомогательный угол σ . Для этого, преобразуя первую из ф-л (21) и ф-лу (22), приведем их к виду

$$(21') \quad \lambda = 1 - \frac{k^2}{\sin^2 2q} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}},$$

$$k = \sin 2q \sqrt{1 - \lambda},$$

$$(22') \quad \epsilon = \frac{\beta}{4} + \delta, \quad \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \operatorname{tg}^2 \mu,$$

$$\cos 2\mu = \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}.$$

В приводимом примере подсчет дает

$$\lambda = 0.0059; \quad \delta = 55'; \quad \epsilon = 2^\circ 25'; \quad q = 7^\circ 30'.$$

Отношение подъемной силы сложного крыла к таковой же силе для крыла, сведенного к одному заднему перу, при одном и том же направлении потока, как легко усмотреть на основании ф-лы (20), точно выражается дробью

$$N'' = \frac{\sin q \sin (\sigma + q + \epsilon) \sqrt{1 - \lambda}}{\sin \frac{\alpha}{4} \sin \left(\sigma + \frac{\gamma + \beta}{2} + \frac{\alpha}{4} \right)},$$

где σ — угол встречи для сложного крыла; тот же угол для сравниваемого простого крыла, согласно поставленному условию, имеет величину

$$\sigma = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Положив

$$\tau = \sigma + \frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\alpha}{4},$$

легко приводим неравенство $N'' > 1$ к виду

$$\operatorname{tg} \tau \geq \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right)}{\sin \frac{\alpha}{4}}.$$

$$q = \frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{4} \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{4} - \delta \right) \sqrt{1 - \lambda}}.$$

Подсчет для рассматриваемого случая дает

$$\tau = 13^{\circ} 34', \quad \sigma = 2^{\circ} 19'.$$

Произведя затем вычисление выигрыша подъемной силы по сравнению с крылом сомкнутым, в разбираемом теперь примере из формулы

$$N = \frac{P}{P_0} = \frac{k}{\sin 2q} \frac{\sin(\sigma + q + \epsilon)}{\sin(\sigma + q)} = \sqrt{1 - \lambda} \frac{\sin(\sigma + 9^{\circ} 55')}{\sin(\sigma + 6^{\circ} 45')}$$

находим

$$\begin{aligned} \sigma = 0, & \quad N = 1.461, \\ \sigma = 3^{\circ} 45', & \quad N = 1.293, \\ \sigma = 10^{\circ}, & \quad N = 1.206. \end{aligned}$$

Таким образом, выигрыш в процентах по отношению к силе, развиваемой сдвинутым крылом, выражается соответственно числами: 46%, 29% и 20%. Сравнивая эти числа с полученными в ранее разобранном примере, усматриваем, что при меньшем относительно вырезе в крыле выигрыш растет с уменьшением угла атаки несколько медленнее.

3. Чтобы яснее представить себе влияние выреза, сравним еще силу, развиваемую разрезным крылом, с подъемной силой сплошного крыла, которое получится по закрытии выреза матерьяльной дугою.

Обозначив через P_1 последнюю силу, будем иметь

$$N_1 = \frac{P}{P_1} = \frac{\sqrt{1 - \lambda} \sin q \sin \left(\sigma + q + \frac{\beta}{4} + \epsilon \right)}{\sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \sin \left(\sigma + q + \frac{\beta}{4} \right)}.$$

Ф-ла (22), определяющая δ , показывает, что этот угол менее одной четверти β ; поэтому

$$N_1 < \sqrt{1-\lambda} \frac{\sin q \sin \left(\sigma - 2q + \frac{\beta}{2} \right)}{\sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \sin \left(\sigma + 2q - \frac{\beta}{4} \right)} = \\ = \sqrt{1-\lambda} \frac{\cos \left(\sigma + \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left(\sigma + 2q - \frac{\beta}{2} \right)}{\cos \sigma - \cos \left(\sigma + 2q - \frac{\beta}{2} \right)} < 1.$$

При угле $\sigma = 0$ найдем в двух рассмотренных нами числовых примерах для отношения N_1 следующие величины: для первого примера 0.8538, для второго 0.9158.

Таким образом, потеря в первом случае простирается до 15%, во втором — до 8.5%, сравнительно с подъемною силою сплошного крыла без выреза. Она растет с увеличением величины отверстия в крыле несколько быстрее возрастания этой величины и, во всяком случае, оказывается менее, чем можно было бы ожидать, судя по размеру выреза, который в первом примере составляет 25%, а во втором — почти 17% общей поверхности крыла.

Потеря эта быстро растет с удалением отверстия от переднего края крыла. Если бы мы придали углам значения $\alpha = 24^\circ$, $\beta = 6^\circ$, $\gamma = 6^\circ$, так что вырез, сохраняя ту же величину, как во втором примере, отодвигается назад, то, производя вычисления, нашли бы

$$\delta = 10' 20'', \quad \lambda = 0.6105, \quad N_1 = 0.8595.$$

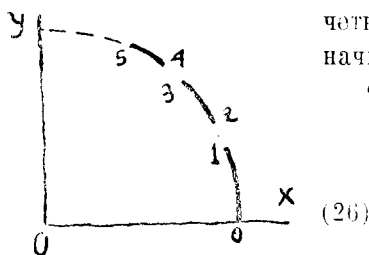
Сравнивая это значение с тем, которое соответствует первому примеру, где отверстие в полтора раза больше, отмечаем замечательный факт ничтожной разницы в потере силы. Таким образом приходим к заключению, что потеря зависит несравненно более от положения на крыле заднего края выреза, чем от величины отверстия.

§ 6. Вогнутое разрезное крыло с произвольным заданным числом перьев. Переходим к обследованию общей задачи, когда число перьев в крыле равно n , где n — произвольное целое число. Формулы, соответствующие этому случаю, получатся из (13) путем изменения, аналогичного с указанным в § 3 для плоского крыла.

Предположим опять, что последовательные перья представляются частями боковой поверхности одного и того же круглого цилиндра, которые ограничены его образующими. Помещая начало координат в плоскости мнимого переменного z в центре окружности и направив действительную ось через задний конец крыла, обозначим через λ_m углы наклона радиусов, направленных к оконечностям перьев, помеченных соответствующими

цифрами. Значек m пробегает последовательные натуральные числа до $2n - 1$ включительно, причем четные его значения соответствуют задним, а нечетные — передним краям последовательных перьев, начиная с самого заднего конца крыла $\lambda = i_n = 0$.

Обозначим, для простоты письма,



Фиг. 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{ikm} = a_m, \\ 4q = \sum_{k=1}^n \lambda_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{2k}, \\ e^q = d, \end{array} \right.$$

$4q$, очевидно, представляет собою центральный ⁰ угол, стягиваемый крылом, когда все его перья сдвинуты вплотную.

Пусть, далее,

$$(27) \quad R = \sqrt{\frac{(z-1)(z-a_2)(z-a_4)\dots(z-a_{2n-2})}{(z-a_1)(z-a_3)(z-a_5)\dots(z-a_{2n-1})}},$$

тогда всем условиям задачи можно удовлетворить, положив

$$(28) \quad \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{e^{-i\theta_0}}{2} - \frac{e^{i\theta_0}}{2z^2} + \frac{Hi}{z} + \left(\frac{e^{-i\theta_0}}{2} + \frac{e^{i\theta_0}}{2z^2} \right) d^2 + \frac{Gd}{z},$$

где v_0 попрежнему обозначает скорость в далеких точках потока, θ_0 — угол с осью x , радиус окружности принят за единицу; реальные коэффициенты G и H надлежит определить из условия выпадения члена $\frac{1}{z}$ в области нуля.

Разложив R в этой области по степеням z и сохраняя в этом разложении постоянный член и первую степень z , найдем

$$R = \frac{1}{d^2} \left\{ 1 + \frac{z}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k}} - 1 \right) \right\},$$

а затем приходим к искомому соотношению

$$(29) \quad Hi + \frac{G}{d} + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{2k}} - 1 \right) e^{i\theta_0} = 0.$$

Заменяв здесь $-i$ на i и приняв во внимание ф-лы (26), находим равенство

$$(29') \quad -Hi + Gd + \frac{1}{4} (\sum a_{2k-1} - \sum a_{2k} - 1) e^{-i\theta_0} = 0,$$

которое, вместе с предшествующим, дает

$$(30) \quad iH \left(d + \frac{1}{d} \right) = 2iH \cos q = \frac{h_1}{2d} e^{-i\theta_0} - \frac{hd}{2} e^{i\theta_0},$$

если введем обозначение

$$(31) \quad 2h_1 = \sum a_{2n-1} - \sum a_{2n} - 1,$$

а через $2h$ назовем сопряженное $\bar{h}_1$ комплексное количество, заключенное в скобках в ф-ле (29).

Соотношение (30) по внешнему виду совершенно совпадает с соответственным ему (17') для крыла с двумя перьями; изменение состоит в замене h и h_1 новыми усложненными выражениями для более сложного крыла.

Обращаясь к изысканию коэффициента при $\frac{1}{z}$ в разложении $\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz}$ в далеких точках потока, легко получаем

$$R = 1 + \frac{h_1}{z}$$

и затем составляем для указанного коэффициента соотношение

$$iC = iH + Cd + \frac{h_1}{2} e^{-i\theta_0},$$

которое, при помощи (29), дает опять прежнего вида формулу

$$(32) \quad C = 2H.$$

Вводя в формулы вместо угла θ_0 угол атаки σ , который связан с θ_0 соотношением

$$-\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{k_{2n-1}}{2} - \sigma,$$

находим окончательно при посредстве ф-л (30) и (32):

$$(33) \quad \begin{aligned} C \cos q &= \frac{h_1}{2d \sqrt{a_{2n-1}}} e^{-i\sigma} + \frac{hd \sqrt{a_{2n-1}}}{2} e^{-i\sigma} = \\ &= \frac{h_1}{2} e^{-i\left(\sigma + q + \frac{k_{2n-1}}{2}\right)} + \frac{h}{2} e^{-i\left(\sigma + q + \frac{k_{2n-1}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Определив по ф-лам (26) и (31) угол ε и число l так, чтобы удовлетворялось равенство

$$h_1 = il e^{i\left(\varepsilon - \frac{k_{2n-1}}{2}\right)},$$

изобразим (33) в виде

$$C \cos q = l \sin \left(\sigma + q + \varepsilon \right),$$

после чего получим для циркуляции скорости J выражение

$$J = -2\pi C v_0$$

и затем, изменив единицу длины и обозначая через r радиус кривизны крыла в новых мерах, составляем формулу

$$(34) \quad R = 2\pi r_0^2 l \frac{\sin(\sigma + q + \epsilon)}{\cos q}$$

для поддерживающей силы. По внешнему виду, эта формула совершенно совпадает с (20) и отличается от нее лишь величиною коэффициента l и угла ϵ , которые соответственным образом усложнятся.

Легко видеть, что вычисление для рассматриваемого случая не представляет никаких затруднений по существу и лишь будет более громоздким вследствие увеличения числа подлежащих подсчету тригонометрических функций.

§ 7. Вращающий момент. Переходя к определению вращающего момента, мы остановимся исключительно на случае двухмерного крыла, имея в виду получить более ясные заключения и не желая загромождать изложение не представляющими существенного интереса весьма сложными и длинными формулами, которые имели бы место в случае общем.

Для нашей цели опять необходимо воспользоваться формулой

$$M = -R(\pi r i K),$$

на которую мы ссылались в конце § 2. K попрежнему обозначает коэффициент при $\frac{1}{z}$ разложения по отрицательным степеням переменного z функции $z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2$.

Если

$$z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = z \left[r_0 e^{-i\theta_0} + \frac{iC}{z} + \frac{A}{z^2} + \frac{1}{z^3} P \left(\frac{1}{z} \right) \right]^2,$$

то легко уловить равенство

$$K = 2Ar_0 e^{-i\theta_0} - C^2,$$

следовательно, реальная часть выражения iK совпадает с реальной частью члена $2Ar_0 e^{-i\theta_0}$; поэтому приведенная формула момента дает

$$(35) \quad -M = 2\pi r_0 R (iA e^{-i\theta_0}).$$

При этом не следует упускать из виду, что положительный момент соответствует случаю сил, вращающих по направлению от оси X к оси Y .

Таким образом, определение вращающего момента сводится к отысканию коэффициента при $\frac{1}{z^2}$ в разложении по отрицательным степеням z функции $\frac{dw}{dz}$ в далеких точках потока.

Ф-ла (7) даст для этой области, сохраняя обратные квадраты z :

$$R = \left(1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2}\right) \left(1 - \frac{b}{2z} - \frac{b^2}{8z^2}\right) \left(1 + \frac{a}{2z} + \frac{3a^2}{8z^2}\right) \left(1 + \frac{c}{2z} + \frac{3c^2}{8z^2}\right) = \\ = 1 + \frac{h_1}{z} + \frac{g_1}{2z^2} + \frac{h_1^2}{2z^2},$$

где мы пользуемся сокращенным обозначением

$$(36) \quad \begin{aligned} 2h_1 &= a + c - b - 1, \\ 2g_1 &= a^2 + c^2 - b^2 - 1. \end{aligned}$$

Из ф-лы (13) находим

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} e^{-i\theta_0} + \frac{iK}{z} - \frac{e^{i\theta_0}}{2z^2} + \left(\frac{1}{2} e^{-i\theta_0} + \frac{Gd}{z} + \frac{d^2 e^{i\theta_0}}{2z^2} \right) \left(1 + \frac{h_1}{z} + \frac{g_1 + h_1^2}{2z^2} \right).$$

Воспользовавшись, далее, ф-лами (15') и (7) § 4, определяем искомый коэффициент A соотношением

$$\frac{1}{v_0} A = \frac{d^2 - 1}{2} e^{i\theta_0} + \frac{ih_1 C}{2} + \frac{g_1 - h_1^2}{4} e^{-i\theta_0},$$

а затем, переходя к обычным мерам длины и обозначив радиус цилиндра, из которого вырезано крыло, через r , при помощи (35) имеем

$$(37) \quad -M = \pi r^2 v_0^2 R i \left(d^2 - 1 + ih_1 C e^{-i\theta_0} + \frac{g_1 - h_1^2}{2} e^{-2i\theta_0} \right),$$

здесь знак K , по принятому нами способу, обозначает, что от рассматриваемого комплексного количества надлежит взять реальную его часть.

Введя по формуле

$$-i\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sigma - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

угол атаки σ , получим в результате простых преобразований с помощью соотношений (8) и (15):

$$(38) \quad h_1 e^{-i\theta_0} = i e^{-\sigma} \left(e^{\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} - e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

откуда, пользуясь указанными в § 4 сокращенными обозначениями (21),

$$h^2 = \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) + \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) \cos 2q',$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin 2q'}{\sin \left(\frac{\beta}{2} + 2q \right) - \sin \frac{\beta}{2} \cos 2q'}.$$

$$q = \frac{\alpha + \gamma}{4}, \quad q' = \frac{\alpha - \gamma}{4},$$

легко находим

$$(38') \quad h_1 e^{-i\theta_0} = -k e^{-i(\alpha + \epsilon)}.$$

При посредстве ф-л (8) и (36) получаем

$$g_1 e^{-2i\theta_0} = -e^{-2\sigma i} \{ e^{2i} \cos(\beta + \gamma) - e^{-\gamma i} \cos(\alpha + \beta) \}$$

или, положив

$$(39) \quad \begin{cases} m^2 = \sin^2(\beta + 4q) + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin(\beta + 4q) \cos 4q', \\ \operatorname{tg} \eta = \frac{\sin \beta \sin 4q'}{\sin(\beta + 4q) - \sin \beta \cos 4q'}, \\ i g_1 e^{-2i\theta_0} = m e^{-2\sigma + \eta i}. \end{cases}$$

Затем имеем

$$\begin{aligned} R(id^2) &= -\sin 2q, \\ R(h_1 e^{-i\theta_0}) &= -k \cos(\sigma + \epsilon), \\ R(i h_1^2 e^{-2i\theta_0}) &= k^2 \sin 2(\sigma + \epsilon), \\ R(i g_1 e^{-2i\theta_0}) &= m \cos(2\sigma + \eta). \end{aligned}$$

Вследствие чего ф-ла (37) приводится к равенству

$$\begin{aligned} \frac{M}{\pi \rho r^2 v_0^2} &= \sin 2q - \frac{k^2}{\cos q} \sin(q + \sigma + \epsilon) \cos(\sigma + \epsilon) + \\ &+ \frac{k^2}{2} \sin 2(\sigma + \epsilon) - \frac{m}{2} \cos(2\sigma + \eta), \end{aligned}$$

здесь коэффициент C выражен через

$$C = \frac{k}{\cos q} \sin(\sigma + q + \epsilon),$$

выражение, получающееся из ф-лы (19) путем легкого преобразования при помощи ф-лы (21).

Преобразуя, далее, два средние члена найденной для момента формулы, находим

$$(40) \quad \frac{M}{\pi \rho r^2 v_0^2} = \sin 2q - k^2 \operatorname{tg} q \cos^2(\sigma + \epsilon) - \frac{m}{2} \cos(2\sigma + \eta)$$

или, восстановив в последнем слагаемом явные выражения $m \cos \eta$ и $m \sin \eta$ при посредстве ф-лы (39),

$$(40') \quad \begin{aligned} \frac{M}{\pi \rho r^2 v_0^2} &= \sin 2q - k^2 \operatorname{tg} q \cos^2(\sigma + \epsilon) - \{ \sin(\beta + 4q) - \\ &- \sin \beta \cos 4q' \} \frac{\cos 2\sigma}{2} + \sin \beta \sin 4q' \frac{\sin 2\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Формулу для момента M' , в случае сомкнутого крыла, получим отсюда при

$$\beta = \epsilon = 0 \quad \text{и} \quad k^2 = \sin^2 2q.$$

Она легко приводится к следующему чрезвычайно простому виду:

$$(41) \quad M' = 4\pi\rho l^2 v_0^2 \sin q' \cos^3 q \sin^2 \sigma.$$

Наконец, момент M_1 , вращающий сплошное крыло без выреза, найдется из ф-лы (41) заменю q через $q_1 = q + \frac{\beta}{4}$:

$$(42) \quad M_1 = 4\pi\rho l^2 v_0^2 \sin q \cos^3 q_1 \sin^2 \sigma.$$

§ 8. Место метacentра. Обозначим через x и y координаты метacentра, т. е. точки пересечения линий, по которым действует поддерживающая сила при данном угле встречи и при угле, бесконечно мало от него отличающемся. Величина координат найдется из уравнения

$$x \sin \sigma - y \cos \sigma = \frac{M}{P}$$

и из результата дифференцирования его по σ .

При помощи ф-л (20) и (40) придаем этому уравнению вид

$$(43) \quad \begin{aligned} (x-a) \cos(2\sigma + q + \epsilon) + (y-b) \sin(2\sigma + q + \epsilon) = \\ = x \cos(q + \epsilon) - y \sin(q + \epsilon) - c, \end{aligned}$$

где

$$(44) \quad \begin{cases} a = \frac{r \cos q}{2k} \left\{ k^2 \cos(q - \epsilon) \operatorname{tg} q + m \cos(q + \epsilon - \eta) \right\}, \\ b = \frac{r \cos q}{2k} \left\{ k^2 \sin(q - \epsilon) \operatorname{tg} q + m \sin(q + \epsilon - \eta) \right\}, \\ c = \frac{r \cos q}{2k} (2 \sin 2q - k^2 \operatorname{tg} q). \end{cases}$$

Вспомогательные коэффициенты, как было показано выше и как можно убедиться, преобразуя ур-ния (39) тем же приемом, которым мы воспользовались в § 5 для ф-л (21) и (22), имеют следующие значения:

$$(45) \quad \begin{aligned} k &= \sin 2q \sqrt{1 - \lambda}, & \epsilon &= \frac{\beta}{4} + \delta, \\ m &= \sin 4q \sqrt{1 - \lambda'}, & \eta &= \frac{\beta}{2} + \delta', \end{aligned}$$

при этом по ф-ле (22) § 5

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\sin^2 2q}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} \operatorname{tg}^2 \mu, & \cos 2\mu &= 2 \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \gamma}{2}}, \end{aligned}$$

$$(46) \quad \lambda' = \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\sin^2 4q},$$

$$\lg \delta' = \lg \frac{p}{2} \lg^2 p', \quad \cos 2p' = \frac{2 \sin \gamma \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \gamma)},$$

отсюда легко усматриваем, что

$$\cos 2p' < \cos 2p, \quad p' > p, \quad \delta' > \delta.$$

Приведенные формулы имеют место в предположении

$$\sin \frac{\alpha - \gamma}{2} > 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Продифференцировав ф-лу (43), находим для определения координат метacentра два уравнения:

$$(47) \quad \begin{cases} (x-a) \cos (2\sigma + q + \epsilon) + (y-b) \sin (2\sigma + q + \epsilon) = \\ = x \cos (q + \epsilon) - y \sin (q + \epsilon) - c, \\ (x-a) \sin (2\sigma + q + \epsilon) - (y-b) \cos (2\sigma + q + \epsilon) = 0, \end{cases}$$

откуда, по исключении угла атаки, имеем уравнение искомого геометрического места:

$$(48) \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 - \{x \cos (q + \epsilon) - y \sin (q + \epsilon) - c\}^2 = 0.$$

Таким образом, геометрическое место метacentра есть парабола с фокусом в точке (a, b) и директрисой, уравнение которой

$$(49) \quad x \cos (q + \epsilon) - y \sin (q + \epsilon) - c = 0;$$

директриса, отстоя от центра на расстоянии c , по направлению совпадает с критическим направлением потока, когда поддерживающая сила обращается в нуль.

Параметр параболы определится как расстояние фокуса от директрисы и имеет величину

$$p = c - a \cos (q + \epsilon) + b \sin (q + \epsilon),$$

откуда, воспользовавшись ф-лами (44), имеем

$$(50) \quad p = \frac{r \cos q}{2k} \left\{ (2 - k^2) \sin 2q - m \cos (2q + 2\epsilon - \eta) \right\}.$$

Заменив k и m большими их значениями $\sin 2q$ и $\sin 4q$, легко убеждаемся, что

$$p > \frac{r \sin 2q \cos q}{2k} \left\{ 1 + \cos^2 2q - 2 \cos 2q \cos (2q + 2\epsilon - \eta) \right\} > 0,$$

таким образом, результат подстановки координат фокуса в ф-лу (42) есть величина отрицательная, и следовательно, парабола своею выпуклостью направлена в ту же сторону, как и дуга крыла.

Последнюю из ф-л (44), определяющую расстояние от центра крыла до директрисы, переписываем в виде

$$(51) \quad c = \frac{r \cos q}{2k} \left\{ 2 \sin 2q \cos^2 q - k \sin^2 2q \operatorname{tg} q \right\}.$$

Величина параметра тесно связана с опрокидывающим моментом M_0 сил давления при критическом направлении потока. В самом деле, если в ф-ле (40) мы положим

$$\sigma = -q - \varepsilon,$$

то найдем

$$\frac{2M_0}{\pi \rho r^2 v_0^2} = (2 - k^2) \sin 2q - m \cos (2q + 2\varepsilon - \gamma),$$

и следовательно, из ф-лы (50) получаем простое соотношение

$$(52) \quad p = \frac{M_0 \cos q}{\pi \rho r r_0^2 k}.$$

Эта формула имеет весьма несложное рациональное объяснение и может быть непосредственно выведена следующим образом.

Определим момент M_2 сил давления относительно фокуса параболы. Обозначая через R направленный к метациентру радиус-вектор и принимая в соображение, что линия действия подъемной силы касается параболы и составляет с указанным радиусом-вектором тот же угол

$$\tau = \sigma + q + \varepsilon,$$

как и с направлением перпендикулярной к директрисе оси параболы, получим для плеча силы d величину

$$(53) \quad d = R \sin \tau = \frac{M_2}{p} = \frac{M_2 \cos q}{2\pi \rho r r_0^2 k \sin \tau},$$

а так как, по свойству параболы,

$$p = 2d \sin \tau = 2R \sin^2 \tau,$$

то будем иметь

$$\frac{M_2 \cos q}{\pi \rho r r_0^2 k} = p.$$

При критическом направлении потока, силы давления приводятся к паре; а потому величина вращающего момента не зависит в этом случае от выбора центра моментов.

Но ф-ла (52) имеет гораздо более широкое значение: она показывает, что момент сил давления относительно фокуса не зависит от направления потока; его величина

$$M_1 = M_0 = \frac{\pi \rho r_0^2 k}{\cos q} p$$

равна опрокидывающему моменту критической пары.

Таким образом, эффект потока может быть выражен поддерживающей силой, приложенной в фокусе параболы, и дополнительной постоянной парой, вращающей крыло вперед.

Чтобы яснее представить себе расположение места метacentра относительно крыла, определим еще положение нашей параболы по отношению к центру дуги и найдем координаты x' и y' метacentра для потока, параллельного хорде крыла.

Первый вопрос решается заменю текущих координат в ур-нии (48) нулями. Тогда левая часть его приобретает значение

$$l = a^2 + b^2 - c^2 = -\frac{r^2 \cos^2 q}{4k^2} [m^2 + 2mk^2 \operatorname{tg} q \cos (2\epsilon - \eta) + 8k^2 \sin q - 4 \sin^2 2q].$$

Величина l увеличится, если в положительных слагаемых квадратных скобок мы заменим m и k большими их величинами $\sin 4q$ и $\sin 2q$, а угол $2\epsilon - \eta$ заменим нулем.

Таким образом,

$$l < \frac{r^2 \cos^2 q}{4k^2} [\sin^2 4q + 2 \sin 4q \sin^2 2q \operatorname{tg} q + 8 \sin^2 2q \sin^2 q - 4 \sin^2 2q].$$

Подсчитывая правую часть этого выражения, убеждаемся, что она равна нулю, и потому

$$l < 0.$$

Отсюда заключаем, что центр дуги лежит внутри параболы, ибо его расстояние от фокуса менее, чем от директрисы.

Обращаясь ко второму вопросу, имеем из ур-ний (47), полагая в них $c = 0$:

$$\begin{aligned} 2y' \sin (q + \epsilon) &= a \cos (q + \epsilon) + b \sin (q + \epsilon) - c = \\ &= \frac{r \cos q}{2k} (2k^2 \operatorname{tg} q \cos^2 \epsilon + m \cos \eta - 2 \sin 2q), \\ x' \sin (q + \epsilon) &= a \sin (q + \epsilon) - b \cos (q + \epsilon) + y' \cos (q + \epsilon) = \\ &= \frac{r \cos q}{2k} (k^2 \operatorname{tg} q \sin 2\epsilon + m \sin \eta) + y' \cos (q + \epsilon). \end{aligned}$$

Подставляя в множитель, заключенный в скобках в выражении y' , увеличенные значения вместо k и m и заменив ϵ и η нулями, мы увеличим

ваем эту величину; а потому

$$2y' \sin(q + \epsilon) < \frac{r \cos q}{2k} (2 \sin^2 2q \operatorname{tg} q + \sin 4q - 2 \sin 2q) = 0,$$

т. е. $y' < 0$,

поддерживающая сила лежит позади центра полной дуги крыла.

Что касается знака x' , то он может быть положительным и отрицательным; если

$$\sin \frac{\alpha - \gamma}{2} > 3 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

то надлежащим подбором углов α , β , γ всегда можно сделать $x' > 0$. В самом деле, умножив его выражение на $\sin(q + \epsilon)$ и подставив y' , мы получим соотношение

$$(54) \quad I = \frac{2x' \sin^2(q + \epsilon) k}{r \cos q} = k^2 \operatorname{tg} q \sin \epsilon \cos \epsilon \sin(q + \epsilon) + \\ + \frac{m}{2} \left\{ \cos(q + \epsilon - \eta) + \sin \eta \sin(q + \epsilon) \right\} + k^2 \sin q \cos \epsilon - \sin 2q \cos(q + \epsilon),$$

так как, при выполнении вышеприведенного неравенства, мы, на основании ф-лы (46), имеем

$$\frac{\beta}{4} < \epsilon < \frac{\beta}{2}, \quad \eta > \frac{\beta}{2},$$

$$q + \epsilon - \eta = q - \frac{\beta}{4} - \delta' + \delta < q - \frac{\beta}{4},$$

$$I > \frac{k^2}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \operatorname{tg} q + \frac{m}{2} \left\{ \cos \left(q - \frac{\beta}{4} \right) + \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) \right\} + \\ + k^2 \sin q \cos \frac{\beta}{2} - \sin 2q \cos \left(q + \frac{\beta}{4} \right).$$

Это неравенство можно переписать, пользуясь ф-лой (46), в виде

$$\frac{I}{\sin 2q} > \sin q (1 - \lambda) \left\{ \sin \frac{\beta}{2} \sin q \sin \left(q + \frac{\beta}{4} \right) + \sin 2q \cos \frac{\beta}{2} \right\} + \\ + \sqrt{1 - \lambda} \cos 2q \left\{ \cos \left(q - \frac{\beta}{2} \right) + \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\beta}{4} + q \right) \right\} \cos \left(q + \frac{\beta}{4} \right).$$

Из рассмотрения правой части ясно, что в виду малости числа λ' и незначительной сравнительно стрелки крыла, можно достичь того, чтобы эта часть была положительна; а тогда $I > 0$, и следовательно, $x' > 0$.

Вычислим эту координату для второго примера, рассмотренного в § 5. Имеем из § 5:

$$(55) \quad \alpha = 27^\circ, \quad \beta = 6^\circ, \quad \gamma = 3^\circ, \quad q = 7^\circ 30', \quad \lambda = 0.0059, \quad \epsilon = 2^\circ 25',$$

а при помощи ф-лы (46) находим

$$\lambda' = 0.02336, \quad \eta = 4^\circ 51'.$$

Подставив эти числа в ф-лу (54) и произведя подсчет, получим

$$x' = 0.264r.$$

Теперь мы имеем все, что нам нужно для сравнения геометрических мест метацентра у нашего составного крыла и крыла сплошного, которое из него получится, если вырез закрыт.

В этом последнем случае соответственная парабола получится, если мы в формулах для составного крыла положим сначала $\beta = 0$, а затем заменим q соответственной величиною $q_1 = q + \frac{\beta}{4}$, где β имеет прежнюю величину.

Так как $\epsilon = \eta = \lambda = \lambda' = 0$ при $\beta = 0$,

то из ф-л (44), (45), (48), (49) и (50) соответственно находим

$$(44') \quad a_1 = r \cos^4 q_1, \quad b_1 = r \cos^3 q_1 \sin q_1, \quad c_1 = r \cos^4 q_1,$$

$$(48') \quad (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - (x \cos q_1 - y \sin q_1 - c_1)^2 = 0,$$

$$(49') \quad x \cos q - y \sin q - c_1 = 0,$$

$$(50') \quad p = 2r \cos^3 q_1 \sin^2 q_1.$$

Подставив в (48') координаты начала координат, усматриваем, что уравнение удовлетворяется и, стало быть, парабола проходит через центр дуги.

Она касается оси x .

Сравнивая, далее, найденное значение c_1 со значением c в ф-ле (51) и имея в виду равенства

$$k < \sin 2q; \quad \cos q_1 < \cos q,$$

убеждаемся, что $c > q$. Таким образом, директриса в случае составного крыла дальше отстоит из центра, чем в случае крыла сплошного.

Переходя к сравнению параметров парабол, имеем в результате простого преобразования ф-лы (50) при помощи ф-лы (45):

$$p = \frac{r \cos q}{2k} \left[(1 + \lambda) \sin^2 2q + (1 - \sqrt{1 - \lambda'}) \sin 4q \cos 2q - \right. \\ \left. - 2m \sin \frac{\eta - 2\epsilon}{2} \sin \left(2q + \frac{2\epsilon + \eta}{2} \right) \right].$$

Последнее слагаемое в скобках есть величина отрицательная, так как из ф-лы (46) имеем

$$\frac{\cos 2\mu'}{\cos 2\mu} = \frac{\cos \left(\alpha + \beta - \frac{\gamma}{2} \right) + \cos \left(\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} \right)}{\cos \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} < 1,$$

а потому $\delta' > 2\delta$, $\eta > 2\epsilon$.

Таким образом,

$$p < p' = r \cos q \left\{ 2 \frac{1 + \lambda}{\sqrt{1 - \lambda}} \sin^2 q \cos^2 q + \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda'}}{1 - \lambda} \cos^2 2q \right\}.$$

Составим теперь отношение

$$\frac{p'}{p_1} = \frac{1 + \lambda \cos^3 q \sin^2 q}{\sqrt{1 - \lambda \cos^3 q_1 \sin^2 q_1}} + \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda'}}{\sqrt{1 - \lambda'}} \frac{\cos q \cos^2 2q}{2 \cos^3 q_1 \sin^2 q_1}.$$

При достаточной ширине отверстия в крыле, первый член будет дробью, в виду последнего его множителя, а второй является малым, так как число

$$1 - \sqrt{1 - \lambda'} < \frac{\lambda'}{2}$$

есть величина очень малая.

Поэтому всегда можно подобрать ширину отверстия и его место на крыле так, чтобы было

$$p' < p_1.$$

а тогда а fortiori окажется

$$p < p_1.$$

В подтверждение сказанного приложим формулы к рассмотренному в § 5 второму примеру и полагаем по ф-лам (55) и (56)

$$q = 7^\circ 30'; \quad q_1 = 9^\circ; \quad \lambda = 0.0059; \quad \lambda' = 0.02336.$$

После подсчета оказывается

$$\frac{p'}{p_1} = 0.7121 + 0.2298 = 0.9419.$$

Стало быть, параметр параболы, вследствие выреза в крыле, уменьшается.

Принимая в соображение все высказанные замечания, приходим к следующему заключению о взаимном расположении сравниваемых геометрических мест. Парабола, соответствующая разрезному крылу в той части, где расположены метацентры для углов встречи близких к нулю, а также больших нуля, проходит ближе к заднему краю, чем в случае сплошного крыла. Так как вследствие меньшей величины параметра и более далекой директрисы ее вершина будет лежать вне параболы сплошного крыла, ось отклонена на угол ϵ назад и метацентр для направления потока по хорде лежит выше центра крыла, ближе к дуге, то это последнее обстоятельство будет справедливо для всех углов встречи.

Таким образом, вырез в крыле делает его гораздо более устойчивым, чем крыло сплошное; разумеется, вырез этот должен быть достаточных размеров и иметь надлежащее место на крыле, располагаясь в передней его части.

Примерное расположение геометрических мест изображено на прилагаемом чертеже (фиг. 6), где пунктирная кривая есть парабола для сплошного крыла, а непрерывной линией намечена парабола для крыла с вырезом BC . Прямая M_1N_1 , проходящая через середину стрелки параллельно DE , представляет

К ТЕОРИИ ОТКРЫЛКА И ЗАКРЫЛКА ¹⁾

ОТ АВТОРОВ

За последнее время как у нас в СССР, так и за границей чрезвычайно сильно возрос интерес к так называемым разрезным крыльям, дающим значительное увеличение подъемной силы. Впервые идея применения таких крыльев была предложена проф. С. А. Чаплыгиным еще в 1910 г. в работе «Теория решетчатого крыла», и наконец, в 1922 г. им была обоснована теория разрезного крыла в работе «Схематическая теория разрезного крыла аэроплана». Предлагаемая работа «К теории открылка и закрылка» представляет новую попытку теоретического объяснения роли закрылка и открылка; она основана на изучении обтекания прямолинейного контура с отклоняемым на различные углы концом, причем поток, как всегда, предполагается несжимаемым и невихревым, а сам контур представляет одну из линий тока с двумя точками раздела — нулевой скоростью в точке набегающего и точкой схода потока, где скорость конечна.

В этом случае характер течения в области угловых точек на крыле существенно с качественной стороны отличается от того, который имел бы место в присутствии щели. Но если щель узкая, то распределение давлений в соседстве с нею на прилегающих частях крыльев, в общем, количественно мало будет различаться от того, которое было бы при закрытии щели.

Поэтому мы полагаем, что найденные в рассматриваемой нами схеме явления величины подъемной силы должны довольно близко соответствовать реальным

Допустим, что имеем течение, изображенное на фиг. 1, обтекающее прямолинейный контур OA с закрылком OB . Тогда область течения изобразится на верхней полуплоскости переменного z с помощью преобразования

$$(1) \quad z = ak \frac{u^{1-n}}{(u-1)^2 + b^2},$$

где $OA = a$, а величина n ,

$$0 < n < 1,$$

характеризует излом контура AB следующим образом: угол $AOB = (1-n)\pi$.

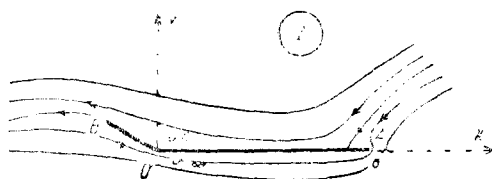
¹⁾ В сотрудничестве с Н. С. Аржаниковым.

Постоянная k определяется из соответствия точек A на фиг. 1 и 2, именно:

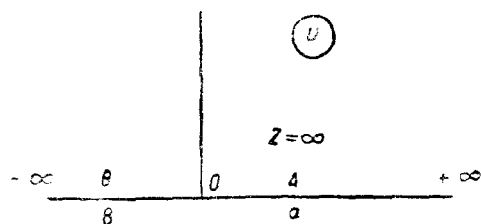
$$(2) \quad k = \frac{(\alpha - 1)^2 + b^2}{\alpha^{1-n}}.$$

Дифференцируя выражение (1) по u , получим

$$(3) \quad \frac{dz}{du} = ak \frac{(1-n)[(u-1)^2 + b^2] - 2u(u-1)}{[(u-1)^2 + b^2]^2} \cdot u^{-n},$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

или, полагая

$$(4) \quad \begin{aligned} \alpha(1+n) &= \sqrt{1+b^2(1-n^2)} + n, \\ \beta(1+n) &= \sqrt{1+b^2(1-n^2)} - n. \end{aligned}$$

мы представим выражение (3) в следующем виде:

$$(5) \quad \frac{dz}{du} = ak \frac{(u+\beta)(\alpha-u)(1+n)}{[(u-1)^2 + b^2]^2} u^{-n}.$$

Обозначим через σ отношение $\sigma = \frac{OB}{OA}$; в таком случае легко находим

$$\sigma = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-n} \frac{(\alpha-1)^2 + b^2}{(\beta+1)^2 + b^2}$$

и

$$OA + OB = a(1 + \sigma).$$

Из ф-лы (4) видно, что при b достаточно малом α (близко к единице, и следовательно, σ мало.

Полагая далее

$$(6) \quad 1 + b^2(1-n^2) = c^2,$$

будем иметь

$$\alpha = \frac{c+n}{1+n}, \quad \beta = \frac{c-n}{1+n}.$$

Так как очевидно, что

$$\alpha - 1 = \frac{c-1}{1+n},$$

$$\beta + 1 = \frac{c + 1}{1 + n},$$

$$b^2 = \frac{c^2 - 1}{1 - n^2}.$$

то получим

$$(7) \quad (\alpha - 1)^2 + b^2 = 2 \frac{(c - 1)(c + n)}{(1 + n)(1 - n^2)},$$

$$(\beta + 1)^2 + b^2 = 2 \frac{(c + 1)(c - n)}{(1 + n)(1 - n^2)}.$$

В таком случае k и σ примут следующий вид:

$$(8) \quad k = 2 \frac{c - 1}{1 - n^2} \left(\frac{c + n}{1 + n} \right)^n,$$

$$\sigma = \frac{c - 1}{c + 1} \left(\frac{c + n}{c - n} \right)^n.$$

Согласно общей теории, развитой проф С. А. Чаплыгиным (С. А. Чаплыгин. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела, 1910), вводим $\frac{dw}{dz}$, где $w = \varphi + i\psi$, причем, как везде, ставится условие, что бесконечно удаленная точка плоскости z , т. е. $u = 1 + bi$, является одновременно полюсом и логарифмической точкой функции w . Эти требования удовлетворяются, если положить

$$(9) \quad \frac{dw}{dz} = akv_0 N \frac{(u + \beta)(u - \gamma)}{(u - 1)^2 + b^2}.$$

Отсюда, в силу выражения (7), находим

$$(10) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{v_0 N}{1 + n} \frac{u - \gamma}{z} u^n,$$

где $u = \gamma$ соответствует точке с нулевой скоростью, а $u = \alpha$ — бесконечно большому значению скорости в точке A .

Так как $z = \infty$ соответствует $u = 1 + bi$, то из основного условия, что

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\infty} = v_0 e^{-ib_0},$$

найдем

$$(11) \quad e^{-ib_0} = \frac{N}{1 + n} \frac{1 + bi - \gamma}{\alpha - 1 - bi} (1 + bi)^n.$$

Положим далее

$$\frac{b}{1 - \gamma} = \operatorname{tg} \mu_1, \quad \frac{b}{\alpha - 1} = \operatorname{tg} \mu_2, \quad b = \operatorname{tg} \mu_3,$$

$$N = (1 + n) \frac{\sqrt{(\alpha - 1)^2 + b^2}}{\sqrt{(1 - \gamma)^2 + b^2}} (1 + b^2)^{-\frac{n}{2}}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sqrt{\frac{(\alpha-1)^2+b^2}{(1-\gamma)^2+b^2}} = \frac{\sin \mu_1}{\sin \mu_2}, \quad (1+b^2)^{-\frac{n}{2}} = \cos^n \mu_3,$$

$$\frac{1+bi-\gamma}{\alpha-1-bi} = \frac{\sin \mu_2}{\sin \mu_1} e^{i\mu_1} e^{i\mu_2}, \quad (1+bi)^n = \frac{1}{\cos^n \mu_3} e^{in\mu_3}.$$

В таком случае из ф-лы (11) непосредственно заключаем, что

$$-\theta_0 = \mu_1 + \mu_2 + n\mu_3,$$

или, вводя угол атаки τ , связанный с θ_0 соотношением

$$\theta_0 = -\pi + \tau,$$

будем иметь

$$(12) \quad \mu_1 = \pi - \tau - \mu_2 - n\mu_3.$$

Определение циркуляции. Коэффициент iC циркуляции C скорости около бесконечно удаленной точки $u_0 = 1 + bi$ есть коэффициент при $\frac{1}{u - u_0}$ в разложении $\frac{dw}{du}$. Таким образом, задача заключается в нахождении этого коэффициента. В нашем случае

$$\frac{dw}{du} = akv_0 N \frac{(u + \beta)(u - \gamma)}{[(u - 1)^2 + b^2]^2}.$$

Правую часть этого выражения можно представить в следующем виде:

$$(13) \quad \frac{(u + \beta)(u - \gamma)}{[(u - 1)^2 + b^2]^2} = \frac{(u + \beta)(u - \gamma)}{(u - u_0)^2 (u - \bar{u}_0)^2} = \frac{A}{(u - u_0)^2} + \frac{A_1}{u - u_0} + \frac{B}{(u - \bar{u}_0)^2} +$$

$$+ \frac{B_1}{u - \bar{u}_0}.$$

Требуется определить коэффициент A_1 этого разложения. Для этого поступим следующим образом: умножив обе части разложения (13) на $(u - u_0)^2$, получим

$$\frac{(u + \beta)(u - \gamma)}{(u - \bar{u}_0)^2} = A + A_1(u - u_0) + B \frac{(u - u_0)^2}{(u - \bar{u}_0)^2} + B_1 \frac{(u - u_0)^2}{u - \bar{u}_0},$$

или, дифференцируя по u , найдем

$$\frac{d}{du} \frac{(u + \beta)(u - \gamma)}{(u - \bar{u}_0)^2} = A_1 + 2B \frac{(u - u_0)(u - \bar{u}_0)^2 - (u - u_0)^2(u - \bar{u}_0)}{(u - \bar{u}_0)^4} +$$

$$+ B_1 \frac{2(u - u_0)(u - \bar{u}_0) - (u - u_0)^2(u - \bar{u}_0)}{(u - \bar{u}_0)^2}.$$

Отсюда для коэффициента A_1 найдем следующее выражение:

$$(14) \quad A_1 = \left|^{u=u_0} \frac{d(u+\beta)(u-\gamma)}{du} \frac{1}{(u-u_0)^2} \right|.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} & \frac{d(u+\beta)(u-\gamma)}{du} \frac{1}{(u-u_0)^2} = \\ & = \frac{(2u+\beta-\gamma)(u-1+bi)^2 - [u^2+u(\beta-\gamma)-\gamma\beta] \cdot 2(u-1+bi)}{(u-1+bi)^4}. \end{aligned}$$

откуда, выполняя вычисления на основании ф-лы (14), окончательно находим

$$(15) \quad C = -akv_0 N \frac{b^2 + (1-\gamma)(1+\beta)}{4b^3}.$$

Преобразуем правую часть этого выражения, приведя ее к тригонометрическому виду; именно мы имеем

$$b^2 + (1+\beta)(1-\gamma) = (1+\beta)(1-\gamma) \left[1 + \frac{b}{1+\beta} \cdot \frac{b}{1-\gamma} \right];$$

положим

$$\frac{b}{1+\beta} = \operatorname{tg} \mu_1;$$

в таком случае

$$(16) \quad \begin{aligned} b^2 + (1+\beta)(1-\gamma) &= (1+\beta)(1-\gamma) [1 + \operatorname{tg} \mu_1 \cdot \operatorname{tg} \mu_2] = \\ &= \frac{(1+\beta)(1-\gamma)}{\cos \mu_1 \cdot \cos \mu_2} \cos(\mu_1 - \mu_2). \end{aligned}$$

Но так как

$$\cos \mu_1 = \frac{1-\gamma}{\sqrt{(1-\gamma)^2 + b^2}}, \quad \cos \mu_2 = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1+\beta)^2 + b^2}},$$

то, подставляя значения (16) в выражение (15), окончательно найдем

$$C = akv_0(1+n) \frac{\sqrt{(1-\gamma)^2 + b^2} \sqrt{(1+\beta)^2 + b^2}}{4b^3(1+b^2)^{\frac{n}{2}}} \cos(\tau + \mu_2 + n\mu_3 + \mu_4),$$

или, еще иначе,

$$\begin{aligned} C &= -akv_0(1+n) \frac{\sqrt{(1-\gamma)^2 + b^2} \sqrt{(1+\beta)^2 + b^2}}{4b^3(1+b^2)^{\frac{n}{2}}} \times \\ &\times \sin\left(\tau + \mu_2 + \mu_4 + n\mu_3 - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание ф-лы (7), а также выражения

$$b = \sqrt{\frac{c^2 - 1}{1 - n^2}}, \quad (1 + b^2)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{c^2 - n^2}{1 - n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

получим

$$C = -\frac{akr_0\sqrt{1-n^2}}{2(c^2-1)}\sqrt{c^2-n^2}\sin\left(\tau+\mu_2+\mu_4+\mu_3-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1-n^2}{c^2-n^2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Вставляя значение

$$\frac{k}{2} = \frac{c-1}{1-n^2}\left(\frac{c+n}{1+n}\right)^n$$

и полагая

$$(17) \quad \lambda = \mu_2 + \mu_4 + \mu_3 - \frac{\pi}{2},$$

окончательно будем иметь

$$(18) \quad C = -\frac{akr_0}{c+1}\left(\frac{c+n}{1+n}\right)^{\frac{1+n}{2}}\left(\frac{c-n}{1-n}\right)^{\frac{1-n}{2}}\sin(\tau+\lambda).$$

Таково окончательное выражение для коэффициента циркуляции. Сама циркуляция по абсолютной величине равна $2\pi \cdot C$. Поддерживающая сила определится тогда, как известно, по формуле

$$(19) \quad P = 2\pi \cdot C \cdot \rho v_0.$$

Что касается сопротивления, то, как известно, циркуляционная теория дает лишь подъемную силу, совершенно не охватывая величины сопротивления.

Как видно из равенства (18), в выражение циркуляции, наряду с углом атаки τ , входит постоянный угол λ , величина которого определяется ф-лой (17). Выразим этот угол λ через известные нам величины c и n .

Очевидно, что

$$\mu_2 = \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha-1},$$

$$\mu_4 = \operatorname{arctg} \frac{b}{\beta+1};$$

в таком случае

$$\operatorname{tg}(\mu_2 + \mu_4) = \frac{b(\alpha + \beta)}{(\alpha-1)(\beta+1) - b^2};$$

но

$$\alpha + \beta = \frac{2\sqrt{1+(1-n^2)b^2}}{1+n},$$

$$(\alpha-1)(\beta+1) = \frac{[\sqrt{1+(1-n^2)b^2}-1][\sqrt{1+(1-n^2)b^2}+1]}{(1+n)^2} = \frac{1-n}{1+n}b^2.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(\mu_2 + \mu_4) = -\frac{\sqrt{1+(1-n^2)b^2}}{nb},$$

$$\mu_2 + \mu_4 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{nb}{\sqrt{1+(1-n^2)b^2}} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{n\sqrt{c^2-1}}{c\sqrt{1-n^2}},$$

откуда находим окончательное выражение для угла λ :

$$(20) \quad \lambda = \operatorname{arctg} \frac{n\sqrt{c^2-1}}{c\sqrt{1-n^2}} + n \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c^2-1}{1-n^2}}.$$

Приближенное выражение циркуляции. Постараемся теперь, предполагая n достаточно малым, получить приближенное значение для циркуляции, а следовательно, и для поддерживающей силы P . Для этого поступаем следующим образом. Согласно ф-ле (8) имеем

$$\sigma = \left(\frac{c+n}{c-n} \right) \frac{c-1}{c+1}.$$

Но, разлагая в ряд

$$\lg \left(\frac{c+n}{c-n} \right)^n = 2n \left(\frac{n}{c} + \frac{n^3}{c^3} + \frac{n^5}{5c^5} + \dots \right),$$

в виду малости n , непосредственно заключаем, что

$$\left(\frac{c+n}{c-n} \right)^n = e^{\frac{2n^2}{c} + \frac{2n^4}{3c^3} + \dots} = 1 + \frac{2n^2}{c} + \frac{2n^4}{3c^3} + \dots$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости для n , получим

$$\left(\frac{c+n}{c-n} \right)^n \cong 1 + \frac{2n^2}{c},$$

и следовательно,

$$\sigma = \frac{c-1}{c+1} \left(1 + \frac{2n^2}{c} \right).$$

Полагая

$$\frac{c-1}{c+1} = \vartheta,$$

имеем

$$\sigma = \vartheta \left(1 + \frac{2n^2}{c} \right),$$

откуда

$$\vartheta = \sigma \left(1 - \frac{2n^2}{c} \right).$$

Но так как

$$c = \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta},$$

то следовательно,

$$c = \frac{1+\sigma \left(1 - \frac{2n^2}{c} \right)}{1-\sigma \left(1 - \frac{2n^2}{c} \right)} = \frac{1+\sigma \left[1 - \frac{2n^2(1-\sigma)}{1+\sigma} \right]}{1-\sigma \left[1 - \frac{2n^2(1-\sigma)}{1+\sigma} \right]}.$$

Преобразовывая это выражение, найдем

$$c = \frac{(1+\sigma)^2 - 2n^2\sigma(1-\sigma)}{(1-\sigma^2) + 2n^2\sigma(1-\sigma)} = \frac{1+\sigma(1+\sigma) - 2n^2\sigma \frac{1-\sigma}{1+\sigma}}{(1+\sigma) + 2n^2\sigma} =$$

$$= \frac{1+\sigma(1+\sigma)^2 - 2n^2\sigma(1-\sigma)}{1-\sigma(1+\sigma)^2 + 2n^2\sigma(1+\sigma)},$$

или иначе

$$c = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \left[\frac{(1+\sigma)^2 - 2n^2\sigma(1-\sigma)}{(1+\sigma)^2} \right] \cdot \left[1 - \frac{2n^2\sigma}{1+\sigma} \right]$$

Произведя все вычисления, окончательно получим

$$(21) \quad c = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \left[1 - \frac{4n^2\sigma}{(1+\sigma)^2} \right].$$

Преобразуем несколько выражение (18) для циркуляции, положив

$$(22) \quad (1+n)^{\frac{1+n}{2}} (1-n)^{\frac{1-n}{2}} = p.$$

В таком случае

$$C = - \frac{av_0}{p} \frac{(c+n)^{\frac{1+n}{2}} (c-n)^{\frac{1-n}{2}}}{c+1} \sin(\tau + \lambda),$$

или

$$(23) \quad C = - \frac{av_0}{p} \sqrt{\frac{c^2 - n^2}{c^2 - 1}} \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \sqrt{\left(\frac{c+n}{c-n}\right)^n} \sin(\tau + \lambda)$$

Обозначая через $L = AO + OB = a(1+\sigma)$,

имеем

$$a = \frac{L}{1+\sigma}.$$

На основании вышесказанного, а также в силу ф-лы (8) выражение для коэффициента циркуляции C примет вид

$$(24) \quad C = - \frac{v_0}{p} \sqrt{\frac{c^2 - n^2}{c^2 - 1}} \cdot \frac{L \sqrt{\sigma}}{1+\sigma} \sin(\tau + \lambda)$$

В случае, когда n мало, ограничиваясь членами второго порядка малости для n , а также для всех элементов, входящих в ф-лу (24), будем иметь

$$(25) \quad p = \sqrt{1-n^2} \sqrt{\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^n} \cong (1+n^2) \sqrt{1-n^2}.$$

Из ф-лы (21) непосредственно получаем

$$c^2 - n^2 = \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^2 \left[1 - \frac{8n^2\sigma}{(1+\sigma)^2} \right] - n^2 = \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{(1+\sigma)^2 - 8n^2\sigma - n^2(1-\sigma)^2}{(1+\sigma)^2} \right].$$

Проведя упрощения, получим

$$(26) \quad c^2 - n^2 = \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \right)^2 \left[1 - n^2 - \frac{4n^2\sigma}{(1+\sigma)^2} \right],$$

аналогично

$$(27) \quad c^2 - 1 = \frac{4\sigma}{(1-\sigma)^2} (1 - 2n^2).$$

На основании ф-л (25), (26) и (27) нетрудно получить, что

$$\frac{\sqrt{c^2 - n^2}}{p\sqrt{c^2 - 1}} = \frac{1+\sigma}{2\sqrt{\sigma}} \left[1 - \frac{2n^2\sigma}{(1+\sigma)^2} \right].$$

Подставляя это значение в ф-лу (24), получим следующее приближенное выражение для C :

$$(28) \quad C = -\frac{v_0 L}{2} \left[1 - \frac{2n^2\sigma}{(1+\sigma)^2} \right] \sin(\tau + \lambda).$$

Входящий в это выражение угол λ , определяемый ф-лой (20), приближенно может быть выражен следующим образом:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{2n\sqrt{\sigma}}{1+\sigma} + \operatorname{arctg} \frac{2n\sqrt{\sigma}}{1-\sigma},$$

или иначе

$$(29) \quad \lambda = \frac{4n\sqrt{\sigma}}{1-\sigma^2}.$$

Таким образом, для малых значений n коэффициент циркуляции C , а следовательно, и поддерживающая сила чрезвычайно просто выражаются через n , σ , L , т. е. через элементы, характеризующие излом и длину пластинки, а также угол атаки τ .

В приводимых ниже таблицах подсчитаны значения T , выведенного коэффициента циркуляции C , а также подъемной силы P , выраженной в килограммах на пог. метр поверхности пластинки для различных значений угла атаки.

В табл. 1 даны значения угла $\angle AOB = \chi$ для различных значений n , из которой очевидно, что при n очень малом угол χ близок к 180° , а также те значения угла атаки τ , при которых подъемная сила равна нулю.

В табл. 2 и 3 даны значения T и P на пог. метр, подсчитанные соответственно для углов атаки:

$$\tau = 0^\circ, \quad \tau = 5^\circ, \quad \tau = 10^\circ, \quad \tau = 15^\circ.$$

Как и следовало ожидать, с уменьшением угла φ , т. е. с увеличением отклонения OB , подъемная сила сильно возрастает, что совершенно очевидно из этих таблиц.

Эти таблицы подсчитаны для пластинки, у которой

$$a = 1 \text{ м}, \quad \sigma = 0.1, \quad v = 20 \text{ м/сек.}$$

Таблица 1

Значения угла атаки τ , при котором $P=0$

n	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{100}$	0,0
χ	162°	171°	174°	175°35'	176°24'	177°	177°42'	178°12'	180°
τ	-7°17'	-3°39'	-2°26'	-1°50'	-1°50'	-2°13'	-0°55'	-0°44'	0

Значения T

Таблица 2

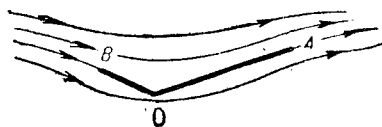
n	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{100}$	0,0
p	1,00500	1,00125	1,00056	1,00031	1,00020	1,00014	1,00008	1,00005	1,00000
T	172,502	172,716	172,76	172,770	172,776	172,780	172,783	172,784	172,787

Значения P

Таблица 3

n	τ	0°	5°	10°	15°
$\frac{1}{10}$		21,86	36,69	51,24	65,47
$\frac{1}{20}$		11,01	25,99	40,77	55,25
$\frac{1}{30}$		7,35	22,37	37,21	51,77
$\frac{1}{40}$		5,52	20,54	35,42	50,02
$\frac{1}{50}$		4,41	19,45	34,34	48,97
$\frac{1}{60}$		3,68	18,72	33,62	48,26
$\frac{1}{80}$		2,76	17,81	32,72	47,38
$\frac{1}{100}$		2,21	17,26	32,18	46,85
0,0		0,00	15,06	30,00	44,72

Частный случай. Любопытен частный случай открывка, когда жидкость входит на передний край в точке B и сходит в точке A сзади (фиг. 3).



Фиг. 3.

В таком случае

$$\gamma = a,$$

и

$$(39) \quad N = (1+n)(1+b^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Выражение для коэффициента циркуляции C в этом частном случае примет следующий вид:

$$(31) \quad C = -akv_0 N \frac{b^2 - (\alpha - 1)(1 + \beta)}{4b^3}.$$

Из ф-л (4) находим

$$(32) \quad \begin{aligned} \alpha - 1 &= \frac{\sqrt{1 + (1 - n^2)b^2} - 1}{1 + n}, \\ \beta + 1 &= \frac{\sqrt{1 + (1 - n^2)b^2} + 1}{1 + n}, \end{aligned}$$

откуда

$$(\alpha - 1)(\beta + 1) = \frac{1 - n}{1 + n} b^2,$$

и

$$b^2 - (\alpha - 1)(1 + \beta) = \frac{2n}{1 + n} b^2.$$

В силу этих соотношений, выражение для C можно представить еще в следующем виде:

$$(33) \quad C = - \frac{akv_0 n}{2b(1 + b^2)^{-\frac{n}{2}}},$$

где попрежнему

$$k = \frac{(\alpha - 1)^2 + b^2}{a^{1-n}},$$

$$1 + (1 - n^2)b^2 = c^2,$$

$$k = 2 \frac{c - 1}{1 - n^2} \left(\frac{c + n}{1 + n} \right)^n.$$

Полагая

$$(34) \quad \frac{kn}{(1 + \sigma)b(1 + b^2)^{\frac{n}{2}}} = K,$$

для поддерживающей силы

$$P = 2\pi \cdot C \rho v_0$$

найдем следующее выражение:

$$(35) \quad P = K \pi \rho v_0 L,$$

где попрежнему

$$L = a(1 + \sigma).$$

Нетрудно проверить, что выражение для K можно представить в следующем виде:

$$(36) \quad K = \frac{2n}{1 + \sigma} \sqrt{\frac{c - 1}{c + 1} \frac{1}{1 - n^2} \left(\frac{c + n}{c - n} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^{\frac{n}{2}}}.$$

Далее, так как

$$\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \left(\frac{c+n}{c-n} \right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\sigma},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}} \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{(1+n)^{\frac{1+n}{2}} (1-n)^{\frac{1-n}{2}}},$$

то для K получим

$$(37) \quad K = \frac{2n\sqrt{\sigma}}{1+\sigma} \frac{1}{(1+n)^{\frac{1+n}{2}} (1-n)^{\frac{1-n}{2}}}.$$

Обозначая для краткости

$$(33) \quad \frac{n}{(1+n)^{\frac{1+n}{2}} (1-n)^{\frac{1-n}{2}}} = \delta,$$

для поддерживающей силы P будем иметь очень простое точное выражение

$$(39) \quad P = 2\pi\epsilon v_0^2 L \delta \frac{\sqrt{\sigma}}{1+\sigma}.$$

Выражение (39) для поддерживающей силы можно представить еще иначе. Для этого положим

$$d = \sqrt{OA \cdot OB} = a \sqrt{\sigma}.$$

Кроме того, так как

$$\angle BO, \overline{OA} = A = n\pi,$$

то ф-лу (39) можно представить в следующем виде:

$$(40) \quad P = 2\pi\epsilon v_0^2 d A \epsilon,$$

полагая, что

$$\epsilon = \frac{1}{(1+n)^{\frac{1+n}{2}} (1-n)^{\frac{1-n}{2}}}.$$

Предполагая n малым, для ϵ будем иметь

$$\epsilon = \left(1 + \frac{n^2}{2} + \frac{3}{8} n^4 \right) \left(1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{4} - \frac{n^4}{24} \right) \left(1 - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{4} - \frac{n^4}{24} \right),$$

или окончательно

$$\epsilon = 1 - \frac{n^2}{2}.$$

Summary

In this article is given a solution of the problem of the flow round the aerofoil shape represented in fig. 1.

By transforming the region of the flow on the semiplane of the variable u by the method of Prof. Tchaplign, using the transformation (I) and by introducing $\frac{dw}{du}$ (expression 9) there is obtained expression (18) for the coefficient of the circulation. The lift is determined by formula (19). If n is supposed to be small the expression for C takes a simpler form (24). In the conclusion of the article is discussed a particular case (fig. 3), when the fluid impinges on the leading edge at B and leaves at the point A in the rear. The corresponding coefficient of the circulation and the lift are given by formulae (33) and (35).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ КО ВТОРОМУ ВЫПУСКУ.

1. О газовых струях. Диссертация на степень доктора прикладной математики. Впервые напечатана в Ученых записках Отделения Физико-математических наук Московского университета в 1902 г.

2. О трении смазочного слоя между шином и подшипником. Совместно с проф. Н. Е. Жуковским. Опубликовано в Трудах Отделения физических наук Общества, любителей естествознания, т. XII, в 1904 г.

3. К теории гидрокона. Статья I. Напечатана в «Материалах», издававшихся Днепровским строительством в 1924 г.

4. К теории гидрокона. Статья II. Напечатана в «Материалах», Днепровского строительства, 1925 г.

5. К вопросу о вычислении силы сопротивления воздуха полету снарядов с различными очертаниями головной части. Сообщено в заседании Комиссии особых артиллерийских опытов 30 января 1919 г. и напечатано отдельной брошюрой в том же году в Ленинграде.

6. О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана). Сообщено Московскому математическому обществу в феврале 1910 г. Напечатано впервые в Математическом сборнике, т. XXVIII, в том же году.

7. Результаты теоретических исследований о движении аэропланов. Сообщение, читанное на заседании Научно-технического комитета Московского общества воздухоплавания 27 октября 1910 г. Записано студентами В. П. Ветчинкиным и М. Адамчиком. Издано в виде отдельной брошюры в Москве в 1911 г.

8. Теория решетчатого крыла. Работа относится к 1911 г. Напечатана в Математическом сборнике, т. XXIX, 1914. При настоящем переиздании пополнена анализом для случая решетки с криволинейными перьями, с исправлением замеченных неточностей первого издания.

9. К общей теории крыла моноплана. Издано отдельной брошюрой Высшим военным редакционным советом в 1922 г.

10. Схематическая теория разрезного крыла. Посвящается памяти Н. Е. Жуковского. Опубликовано в 1921 г. в Научно-техническом вестнике, издававшемся Н. Т. О. ВСНХ, в № 4—5.

11. К теории открывка и закрывка. Совместно с П. С. Аржанниковым. Опубликовано в Трудах ЦАГИ, вып. 105, Москва, 1931. При переиздании совершенно переработаны таблицы, в виду замеченных неточностей первого издания.

H
7903
N2
1938