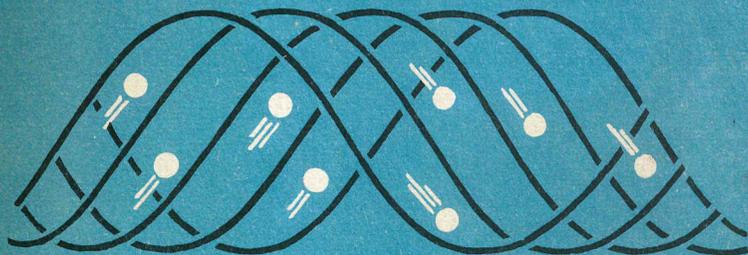


Е.Н. ТЕВЕРОВСКИЙ
Е.С. ДМИТРИЕВ

ПЕРЕНОС АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ турбулентными потоками



ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ

Е.Н. ТЕВЕРОВСКИЙ
Е.С. ДМИТРИЕВ

**ПЕРЕНОС
АЭРОЗОЛЬНЫХ
ЧАСТИЦ
турбулентными
потоками**



МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
1988

УДК 66.074:66–911.38

Теверовский Е.Н., Дмитриев Е.С. Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 160 с. — ISBN 5-283-02960-3

Описано движение легких и тяжелых частиц в энергетических аппаратах и окружающей среде. Приведена теория диспергирования, осаждения и диффузии частиц, показано взаимное влияние взвешенных частиц на турбулентность газовых потоков. На основе теоретического рассмотрения процессов взвешивания, переноса частиц и очистки от них газов приведены инженерные методы расчета этих процессов.

Для научных и инженерно-технических работников, а также для преподавателей и студентов вузов, занимающихся вопросами аэрозолей, очистки газов и охраны окружающей среды.

Табл. 6. Ил. 17. Библиогр. 70 назв.

Рецензент Ю.В. Сивинцев

Научное издание

**Теверовский Ефим Наумович
Дмитриев Евгений Сергеевич**

ПЕРЕНОС АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ТУРБУЛЕНТНЫМИ ПОТОКАМИ

Редактор Т.А. Зайцева

Художественный редактор А.Т. Кирьянов

Технические редакторы Н.М. Брудная, О.И. Хабарова.

Корректор С.Ю. Торочкина

ИБ № 1561

Набор выполнен в издательстве. Подписано в печать с оригинала-макета 31.08.88. Т-15859. Формат 60 х 88 1/16. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная Усл. печ.л. 9,8. Усл.кр.-отт. 10,16. Уч.-изд.л. 10,24. Тираж 2000 экз. Заказ 3095. Цена 2 р. 10 к.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Отпечатано в Московской типографии № 9 МПО "Всесоюзная книжная палата"
Госкомиздата СССР.

109033, Москва, Волочаевская ул., 40.

2304000000-488

Т 051 (01) -88 65-88

ISBN 5-283-02960-3

© Энергоатомиздат, 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

Аэрозольные частицы, т.е. твердые или жидкие частицы вещества, взвешенные в газовом потоке, в ряде случаев играют важную роль в природных и технологических процессах.

Содержание и распределение аэрозольных частиц непосредственно влияют на оптические свойства атмосферы и тем самым определяют условия работы оптических систем различного назначения. Поступающие в атмосферу загрязняющие вещества переносятся воздушными течениями, как правило, в аэрозольной форме. Многие технологические процессы, например извлечение ценных веществ из потока газа, очистка промышленных газов от вредных веществ перед их выбросом в атмосферу, связаны с переносом аэрозольных частиц в трубах различного сечения. Одной из важнейших современных проблем является проблема теплопереноса и транспорта различных дисперсных сред. Вышеперечисленные задачи и многие другие так или иначе связаны с изучением и моделированием поведения мелких частиц вещества в потоках газа. В настоящее время изучению структуры и процессов движения двухфазных потоков типа газозвеси посвящено достаточно большое количество работ, большей частью в виде отдельных статей, рассматривающих частные вопросы. Кроме того, разнообразие областей науки и техники, связанных с газовыми потоками, которые содержат частицы веществ, приводит к тому, что исследование этих вопросов разными авторами проводится с различных позиций. Наибольшее разнообразие подходов здесь наблюдается при описании турбулентности газовой фазы взвесенесущего потока. В данной монографии авторы предприняли попытку обобщить полученные при изучении взвесенесущих потоков результаты на единой теоретической основе.

В главе 1 рассматриваются теоретические вопросы переноса и рассеяния легких частиц турбулентными потоками газа. Приводится критический анализ современных теоретических подходов к моделированию турбулентных течений, реально встречающихся в природе и технике. Приводятся анализ и сравнение различных методов замкнутого описания турбулентного течения, на основе такого анализа формулируется обобщенная полуэмпирическая теория, выводится уравнение турбулентной диффузии взвешенных в газовом потоке частиц. Полученное уравнение диффузии относится к классу гиперболических уравнений, описы-

вающих диффузионный процесс с конечной скоростью распространения фронта облака примеси. Впервые такое уравнение получено для случая трехмерной, т.е. пространственной, диффузии примеси. Проводится анализ этого уравнения и рассматривается параболическое приближение диффузионного процесса, т.е. диффузионного процесса с бесконечной скоростью диффузии. Рассматривается процесс переноса тяжелых частиц в турбулентном потоке газа как случайный процесс, для которого приводится вывод уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова. На основе этого уравнения предлагается система дифференциальных уравнений для осредненных характеристик переноса и рассеяния тяжелых частиц в турбулентной газовой среде.

Вопросы переноса и рассеяния атмосферных аэрозольных частиц в настоящее время привлекают все больше и больше внимания специалистов различных областей науки и техники, особенно связанных с охраной окружающей среды. Этим вопросам посвящена вторая глава в монографии. Здесь рассмотрены уравнения атмосферной диффузии для легких аэрозольных частиц, переносимых в атмосферном пограничном слое. Кроме того, на примере переноса радиоактивной примеси рассматриваются особенности поведения в атмосферном течении активной примеси, количество которой может меняться со временем в результате протекания химических реакций, радиоактивных превращений и т.д. В этой же главе рассмотрена задача распространения в атмосферном течении нагретой примеси.

В третьей главе рассмотрены механические способы очистки газового потока от взвешенных в нем частиц. Выбор оптимальных способов очистки газов и определение наиболее эффективных режимов работы таких газоочистных аппаратов, как пылеосадительные камеры, пылеотделяющие решетки, циклоны, электрофильтры, в настоящее время представляется актуальной задачей, от успешного решения которой зависят многие проблемы в защите окружающей среды. Как правило, расчет эффективности очистки газов от взвешенных в них частиц этими аппаратами проводился упрощенно, без учета турбулентного характера проходящего через них газового потока. В книге показано, что очистка газов от взвешенных частиц должна осуществляться путем уменьшения транспортирующей способности потока за счет уменьшения его турбулентности и последующего осаждения частиц под действием приложенных к ним сил: гравитационных, инерционных, центробежных, электростатических и т.д. Предложенные в монографии формулы позволяют осуществлять в инженерной практике выбор наиболее эффективных режимов работы механических пылеуловителей. В третьей главе рассмотрены также вопросы очистки газов от взвешенных частиц в скруббере Вентури. В основе работы скруббера Вентури лежит дробление струй воды в турбулентном потоке газа и захват образующимися каплями взвешенных в потоке частиц. В дальнейшем эти капли с частицами пыли укрупняются и выводятся из потока механическим пылеуловителем. Среди

газоочистных аппаратов скрубберы Вентури обладают наибольшей эффективностью. В книге показано, что эффективность дробления выше всего в турбулентном потоке. Наиболее эффективно в турбулентном потоке проходит и коагуляция капель, т.е. их укрупнение. Предложенные в монографии формулы позволяют выбрать оптимальные режимы работы скрубберов Вентури.

Рассмотренные в книге вопросы могут оказаться полезными специалистам в области охраны окружающей среды и ядерной энергетики, например, при моделировании проявлений аварийных процессов в атмосфере и проектировании систем газоочистки.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту рукописи, профессору Ю. В. Сивинцеву, сделавшему ряд ценных критических замечаний, которые были учтены при редактировании.

ДВИЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

1.1. Общие соображения о поведении частиц в турбулентных потоках газов

Газовые потоки с твердыми частицами представляют собой двухфазную среду, динамика которой существенно зависит от таких параметров, как объемная концентрация и размер частиц, содержащихся в среде. Объемная концентрация определяется как часть объема двухфазной среды, занятой твердыми частицами, т.е.

$$S = Q_T / (Q_T + Q_C),$$

где Q_C — объем, занимаемый газовой фазой; Q_T — объем, занимаемый твердыми частицами.

Объемная концентрация, определяющая многие свойства двухфазного потока, может служить критерием определения ориентировочных границ существования различных видов дисперсных газовых течений.

Предложена следующая классификация газовых потоков с твердыми частицами в зависимости от их объемной концентрации S [1]:

Слабозапыленный поток газа	$0 - 4 \cdot 10^{-4}$
Поток газозвеси	$4 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-2}$
Флюидные потоки	$3 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-1}$
Потоки в плотной фазе	$0,3 - 0,5$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двухфазных течений с объемной концентрацией содержащихся в них твердых частиц меньше $3 \cdot 10^{-2}$, называя их далее потоками газозвеси. По приведенной выше классификации в рассматриваемые виды газовых течений с твердыми частицами будут попадать как сами потоки газозвеси, так и слабозапыленные потоки газа. Динамику таких потоков в отличие от флюидных потоков и потоков в плотной фазе можно рассматривать с единых позиций.

Основной особенностью потоков газозвеси является совместное движение сплошной газовой среды и распределенных в ней твердых частиц. При этом сплошная среда играет роль несущей, и ее движение является определяющим в движении твердой фазы. Как правило, течение газа в аппаратах и технических установках, а также природные течения газа являются турбулентными, т.е. для них характерным является хаотическое, пульсационное изменение скорости течения и других параметров потока. Турбулентный характер движения несущего потока газа приводит к

тому, что и движение твердых частиц становится хаотическим, приобретая все основные черты турбулентного движения.

Поведение твердой частицы в турбулентном потоке газа можно охарактеризовать параметром τ_T , который называется временем релаксации. Время релаксации определяет скорость реакции частицы на изменение скорости течения несущего ее газового потока. Этот параметр оценивают, не прибегая к строгим теоретическим расчетам. Действительно, изменение скорости течения газа приводит к тому, что частица либо ускоряется, либо замедляется, приспособляясь к несущему ее потоку. Когда скорость движения частицы и скорость течения газа сравниваются, сила инерции и сила сопротивления, действующие на частицу, уравновешиваются. Силу инерции оценивают следующим образом:

$$f_{ин} \sim m_T W / \tau_T,$$

где W — скорость движения частицы относительно газовой среды; m_T — масса частицы.

Сила сопротивления, действующая на частицу со стороны потока газа, определяется выражением

$$f_{сопр} = 0,5 C_d S_m \rho_0 W^2,$$

где C_d — коэффициент сопротивления; S_m — эффективная площадь сечения частицы; ρ_0 — плотность газовой среды. Приравняв эти силы, получим для времени релаксации следующее выражение:

$$\tau_T = 2m_T / (S_m \rho_0 C_d W).$$

Для сферических частиц диаметром d_T со стоксовским характером обтекания внешним потоком газа время релаксации примет следующий вид:

$$\tau_T = \frac{1}{18} \frac{\rho_T}{\rho_0} \frac{d_T^2}{\nu}. \quad (1.1)$$

Зная порядок величины времени релаксации, выясняют характер поведения твердой частицы в турбулентном потоке газа. Для этого достаточно сравнить время релаксации частицы с характерным временем турбулентных движений газового потока, которым может служить время жизни турбулентных молей. Так, если время релаксации значительно больше времени жизни турбулентного моля, то данный молекул движение частицы практически не влияет. Если же время релаксации меньше времени жизни турбулентного моля, то частица в большей или меньшей степени будет увлекаться таким турбулентным молекул.

Опишем качественную картину поведения твердой частицы в турбулентном потоке газа. Частицы, время релаксации которых значительно меньше минимального временного масштаба турбулентности несущего их потока газа, полностью увлекаются всеми турбулентными молями.

Такие частицы в турбулентном течении ведут себя подобно газовой примеси. Частицы, время релаксации которых сравнимо или больше минимального временного масштаба, частично увлекаются турбулентными молями, при этом степень увлечения зависит от характерного временного масштаба турбулентного образования, увлекающего частицу. Расчеты показали, что облако частиц, размер которых меньше или равен 0,1 мкм, ведет себя аналогично газовой примеси, так как образующие его частицы практически безынерционны. Частицы размером более 100 мкм практически не реагируют даже на крупномасштабные турбулентные пульсации в силу их достаточно большой инерционности. Поведение таких частиц в турбулентном потоке определяется только осредненными параметрами несущего газового течения. Таким образом, турбулентность сказывается на движении частиц, размер которых не превышает 100 мкм. Такие частицы подразделяют на три группы [2]: высокодисперсные, тонкодисперсные и грубодисперсные аэрозоли. Динамические характеристики частиц каждой группы приведены в табл. 1.1.

В турбулентных потоках газа с твердыми частицами наблюдается не только воздействие турбулентности несущего потока на движение твердых частиц, но и влияние самих частиц на параметры турбулентности несущего их потока газа. Так, при определенных условиях взвешенные в потоке частицы могут гасить его турбулентность. Такой эффект наблюдается в каналах, трубопроводах и других технических устройствах. В связи с этим при изучении турбулентных потоков газа с твердыми частицами возникают две фундаментальные проблемы: первая — это изучение влияния турбулентности несущего газового потока на движение твердых частиц и вторая — влияние частиц на параметры течения несущего их турбулентного потока газа.

Решению первой задачи посвящено достаточно много работ как теоретического, так и экспериментального характера. Как правило, эта задача решается для слабозапыленных потоков, т.е. предполагают, что объем-

Таблица 1.1. Дисперсионные и динамические характеристики твердых частиц единичной плотности $\rho_T = 1 \text{ г/см}^3$ в воздушной среде при нормальных условиях

Класс аэрозольных частиц	Диаметр частиц d , мкм	Время релаксации T_T , с	Скорость гравитационного оседания v_g , см/с
Высокодисперсные	$10^{-3} - 0,8$	$1,3 \cdot 10^{-9} - 2,5 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6} - 2,5 \cdot 10^{-3}$
Тонкодисперсные	1–10	$3,5 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-1}$
Грубодисперсные	20–100	$1,2 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-2}$	1,2–25

ная концентрация частиц мала. Размеры частиц также играют заметную роль и прямо влияют на наблюдаемые эффекты. Высокодисперсные частицы, как уже указывалось, ведут себя подобно газовой примеси. Для тонкодисперсных аэрозольных частиц горизонтальные скорости движения совпадают со скоростью течения несущего их потока газа. Оседание же таких частиц складывается из гравитационного оседания внутри турбулентного моля и хаотического движения вверх – вниз самого моля.

Гравитационное оседание внутри турбулентного моля происходит с теми же скоростями, что и в неподвижной среде. Хаотические же движения в вертикальном направлении вместе с турбулентными молями приводят к уменьшению реальной скорости оседания. Этот эффект связан с тем, что турбулентные моли проницаемы для частиц, в результате чего при гравитационном оседании концентрация частиц внизу больше, чем вверху. За счет такого перераспределения частиц турбулентные моли, двигаясь вверх, захватывают больше частиц, чем моли, двигающиеся вниз, хотя в статистическом смысле частота и интенсивность и тех, и других молей одинаковы. Таким образом, турбулентные моли взвешивают тонкодисперсные аэрозольные частицы, совершая над ними работу. Впервые выражение для работы взвешивания получили [3] при описании движения взвешенных речных наносов. Очевидно, что эта величина тем больше, чем выше концентрация частиц в потоке газа. При определенных условиях она составляет уже заметную долю в балансе кинетической энергии турбулентного движения. Впервые работа взвешивания была учтена в балансе кинетической энергии турбулентности [4] путем введения в соответствующее уравнение дополнительного члена, записанного аналогично предложенному в [3] выражению для работы взвешивания.

Процесс оседания грубодисперсных аэрозольных частиц отличается от рассмотренного выше. Действительно, грубодисперсные аэрозольные частицы обладают заметной скоростью гравитационного оседания, поэтому такие частицы не могут длительное время находиться внутри одного турбулентного моля. В процессе своего движения они пересекают множество молей. Оседание грубодисперсных аэрозольных частиц было проанализировано в работе [5]. Показано, что для таких частиц также может наблюдаться эффект взвешивания турбулентными движениями несущего газового потока. Однако в данном случае эффект взвешивания не связан с перераспределением концентрации частиц в потоке, как это имело место для тонкодисперсных аэрозольных частиц, а имеет совершенно иную природу. Взвешивание грубодисперсных частиц определяется режимом обтекания частицы внешним для нее газовым потоком. Режим обтекания частицы внешним газовым потоком характеризуется числом Рейнольдса

$$Re_d = |W|d_T/\nu,$$

где W — скорость обтекания газового потока частицы; d_T — диаметр частицы; ν — коэффициент кинематической вязкости.

При стоксовском обтекании в области $Re < 0,1$ турбулентность несущего потока газа не влияет на скорость оседания частиц. Эта скорость в таких условиях равна скорости гравитационного оседания в неподвижной среде. Действительно, пусть частица в спокойной неподвижной среде имеет скорость гравитационного оседания v_g , а результирующая скорость ее обтекания в турбулентном потоке газа

$$W = v_g + \alpha \langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sin \omega t,$$

где α — постоянная величина.

Пульсационная составляющая u' скорости турбулентного течения для простоты записана в виде синусоидального закона. При $Re < 0,1$ сила сопротивления линейно зависит от скорости обтекания частицы, т.е.

$$f_{\text{сопр}} = \alpha_1 W,$$

где α_1 — постоянная величина.

За период пульсационного движения среды сила сопротивления равна

$$\overline{f_{\text{сопр}}} = \frac{\alpha_1}{T} \int_0^T [v_g + \alpha \langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sin \omega t] dt = \alpha_1 v_g.$$

Из этого соотношения следует, что скорость оседания стоксовских частиц в турбулентном газовом потоке такая же, как и в неподвижной среде.

При $Re > 0,1$ сила сопротивления нелинейно зависит от скорости обтекания частицы потоком газа. Чаще всего эту зависимость описывают квадратичным законом

$$f_{\text{сопр}} = \alpha_1 W^2.$$

В этом случае, проводя осреднение за период турбулентной пульсации скорости течения, получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} f_{\text{сопр}} &= \frac{\alpha_1}{T} \int_0^T [v_g + \alpha \langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \sin \omega t]^2 dt = \\ &= \left[1 + \frac{\alpha}{2} \frac{\langle u'^2 \rangle}{v_g^2} \right] \alpha_1 v_g^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Как видно, скорость оседания частицы в турбулентном потоке газа меньше, чем скорость оседания в неподвижной среде, так как в первом случае возрастает сила сопротивления. Для скорости оседания грубодисперс-

ных аэрозольных частиц в турбулентной среде можно записать следующее выражение:

$$\frac{W^2}{v_g^2} = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\langle u'^2 \rangle}{v_g^2} \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

На рис. 1.1 показана зависимость отношения скоростей частицы в турбулентном потоке газа и неподвижной среде от параметра $\xi^2 = \langle u'^2 \rangle / v_g^2$. Из этой зависимости видно, что в слабо турбулизованных течениях, когда $\xi \ll 1$, скорости оседания W и v_g практически одинаковы. Однако они различаются уже на 23% при $\xi = 1$. С увеличением турбулизации несущего потока газа отношение W/v_g уменьшается и может иметь очень малые значения.

Рассмотренный эффект уменьшения скорости оседания частиц в турбулентных потоках газа играет важную роль в работе аппаратов химической технологии и газоочистных установок. В настоящее время при проектировании таких аппаратов и установок не учитывают турбулентность протекающих через них газовых потоков, в результате чего не учитывают и снижение скорости оседания частиц вследствие рассмотренного выше эффекта. По этой причине эффективность работы многих газоочистных сооружений и других установок оказывается ниже ожидаемого.

Увеличение объемной концентрации частиц приводит к тому, что эффекты воздействия частицы на турбулентность несущего потока газа начинают играть заметную роль. Воздействие частиц на поток газа связано прежде всего с тем, что мгновенные и осредненные скорости движения газового потока и частиц не совпадают в силу инерционности последних. Очень крупные частицы реагируют только на крупномасштабные пульсации несущего потока. Для мелких частиц осредненные скорости движения совпадают с осредненными скоростями течения, однако пульсационные значения скоростей не совпадают, и этим обусловлено влияние частиц на турбулентность несущего их газового потока. При появлении в газовом потоке с твердыми частицами дополнительной диссипации турбулентной энергии может наблюдаться гашение турбулентности газового потока. Например, было показано [1], что присутствие инерционных

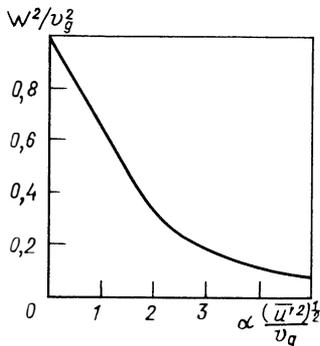


Рис. 1.1. Зависимость скорости осаждения частиц от интенсивности турбулентности газового потока

частиц в газе приводит на конечном этапе вырождения изотропной турбулентности к более быстрому, экспоненциальному затуханию турбулентных пульсаций. При этом энергетический спектр и пространственные масштабы турбулентности оказываются подобными тем же характеристикам чистого газа. Объясняется это практической неподвижностью частиц относительно движения турбулентных образований в потоке. Уменьшение инерционности частиц приводит к искажению энергетического спектра турбулентности и к уменьшению пространственных масштабов турбулентности несущего потока.

Несложный анализ гашения турбулентности взвешенными частицами приведен в [6], где предполагается, что сами частицы не вносят вклад в порождение турбулентности несущего их потока газа. Пусть в потоке содержатся только мелкие частицы, время релаксации которых значительно меньше времени жизни энергосодержащих вихрей, т.е. $\tau_T \ll \tau$. Над такими частицами за интервал времени, сравнимый с временем релаксации, совершается работа за счет относительной скорости движения. Оценить эту работу можно следующим образом:

$$3\pi\mu d_T \langle u'^2 \rangle \tau_T.$$

Пусть в единице объема содержится N частиц, тогда за время существования турбулентного моля в единице объема будет совершена работа, равная

$$3\pi\mu N d_T \langle u'^2 \rangle \tau_T.$$

Время релаксации частицы оценивают с помощью выражения (1.1). Теперь для работы в единице объема в единицу времени можно записать следующее соотношение:

$$\rho_T^* \langle u'^2 \rangle / \tau, \text{ где } \rho_T^* = \frac{1}{6} \pi d_T^2 N \rho_T.$$

Эта работа представляет собой дополнительную по отношению к чистому турбулентному течению диссипацию турбулентной кинетической энергии. В чистом газовом потоке диссипация турбулентной энергии определяется следующим образом:

$$\rho_0 \langle u'^2 \rangle / \tau.$$

В стационарных течениях скорость порождения турбулентности равна скорости ее диссипации. Следовательно, можно записать соотношение следующего вида:

$$\rho_0 \langle u'^2 \rangle l (du/dy)^2 \sim (\rho_0 + \rho_T^*) \langle u'^2 \rangle^{\frac{3}{2}} / l,$$

где l — масштаб турбулентности.

Если объемная концентрация частиц невелика, то масштабы турбулентности и профили осредненной скорости течения газового потока остаются теми же, что и для чистого газа. При таких условиях можно получить для отношения средних квадратических значений пульсационных скоростей в потоке с частицами и в потоке без частиц следующее выражение:

$$\langle u'^2 \rangle / \langle u'^2 \rangle_0 = (1 + \rho_T / \rho_0)^{-1}. \quad (1.4)$$

Для более крупных частиц, когда $\tau_T \leq \tau$, отношение средних квадратических значений пульсационных скоростей принимает следующий вид:

$$\langle u'^2 \rangle / \langle u'^2 \rangle = [1 + \tau \rho_T^* / (\tau_T \rho_0)]^{-1}. \quad (1.5)$$

Присутствие в потоке газа очень крупных частиц, для которых $\tau_T \gg \tau$, также приводит к гашению турбулентности потока. Причина гашения турбулентности, однако, в данном случае отличается от рассмотренной выше и обусловленной диссипацией турбулентной энергии. В потоке газа с очень крупными частицами, имеющими достаточно большую инерционность, образуется совокупность фиксированных центров сопротивления, аналогичных каскаду решеток. Действие такого каскада решеток приводит к выравниванию профиля скорости газового течения, что, в свою очередь, приводит к гашению турбулентности.

Механизм гашения турбулентности частицами, вероятно, такой же, как и механизм поглощения звука аэрозольными частицами [7]. Действительно, при небольшой частоте турбулентных пульсаций скорости потока частицы двигаются вместе с потоком газа как одно целое. При увеличении частоты турбулентных пульсаций скорости в силу инерционности частиц появляется относительная скорость колебаний частиц и газовой среды. Это, в свою очередь, приводит к рассеянию кинетической энергии турбулентных молей.

Рассмотренная качественная картина поведения твердых частиц в турбулентных газовых потоках указывает на то, что мы имеем дело со сложным физическим процессом, конкретные механизмы реализации которого зависят как от содержания частиц в потоке, так и от их размера.

1.2. Математические методы моделирования турбулентности газовых потоков

Итак, на движение твердых частиц в потоке газа существенно влияет турбулентность газовой среды. Проведенный качественный анализ взаимодействия частиц с несущим их турбулентным потоком позволил оценить степень такого влияния для турбулентных движений различных масштабов, а также найти связь некоторых характеристик движения

частиц, например скорости оседания под действием силы тяжести, с параметрами турбулентности газового течения. Более подробный анализ поведения частиц в потоках и разработка соответствующих теоретических моделей этого процесса не могут быть выполнены без привлечения теоретических моделей турбулентности незапыленного течения, поэтому целесообразно рассмотреть способы описания турбулентности без учета твердых частиц в потоке.

Впервые попытку построить теоретическую модель турбулентности предпринял Рейнольдс, выдвинув для этого ряд гипотез, суть которых сводится к следующему.

1. Движение газа описывается уравнениями Навье—Стокса для сплошной среды.

2. При $Re > Re_{кр}$, где $Re_{кр}$ — критическое значение постоянной Рейнольдса, движение газа становится неустойчивым.

3. Движение неустойчивого течения может быть описано лишь с помощью осреднения, осредненными должны быть и уравнения Навье—Стокса.

По аналогии с кинетической теорией газов Рейнольдс выделил в турбулентном течении осредненное и пульсационное движения:

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + u'(x, t).$$

В отличие от кинетической теории газов операция осреднения в теории турбулентности, предложенной Рейнольдсом, оказалась не определенной. Рейнольдс полагал, что осреднение параметров газового течения проводится интегрированием по некоторому объему с центром тяжести в точке x либо по некоторому интервалу времени. Однако ни одно из этих предположений не получило должного обоснования. Таким образом, из замкнутой системы уравнений Навье—Стокса при осреднении получены две незамкнутые системы уравнений для осредненного течения и для пульсационного движения газа. Для обозначения операции осреднения и самих осредненных величин в турбулентном течении используются скобки вида $\langle \cdot \rangle$ или черта сверху. Система уравнений для осредненного течения имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i, \quad (1.6)$$

где τ_{ik} — неизвестный тензор турбулентных напряжений, который определяется следующим образом:

$$\tau_{ik} = \langle u'_i u'_k \rangle.$$

Предложенный Рейнольдсом способ описания турбулентных течений породил огромное число работ, направленных на замыкание системы уравнений Рейнольдса для осредненного течения, среди которых выделяются следующие наиболее важные направления.

Прандтль [8] и Карман [9] пытались замкнуть систему уравнений Рейнольдса с помощью простейших физических соображений, основанных на теории размерности и аналогии с кинетической теорией газов. Существенную роль в этих исследованиях играли эмпирические данные, полученные Никурадзе в ходе систематических экспериментов по изучению течения в гладких и шероховатых трубах. Тензор турбулентных напряжений удалось представить в следующем виде:

$$\tau = l^2 (du/dy)^2,$$

где l — длина пути смещения турбулентного моля, аналог длины свободного пробега в кинетической теории газа.

Используя экспериментальные данные для длины пути смещения, Прандтль и Карман определили с достаточно высокой точностью закон сопротивления в трубах. Позже эта сугубо эмпирическая теория была перенесена на течение в пограничном слое. Предпринимались также попытки использовать ее для расчета параметров сверхзвуковых и гиперзвуковых течений. Последующие экспериментальные исследования показали ограниченность применимости теории Прандтля и Кармана, так как удовлетворительные результаты удавалось получить лишь для таких типов турбулентных течений, для которых имелись экспериментальные данные о длине пути смещения.

Неизвестный тензор турбулентных напряжений в уравнениях Рейнольдса можно найти, решая соответствующую систему уравнений для его составляющих τ_{ij} . Такую систему уравнений можно получить из уравнений Навье–Стокса, используя при этом операцию осреднения Рейнольдса. Однако в полученной системе уравнений для τ_{ij} появляются новые неизвестные в виде тензоров третьего порядка. Для этих тензоров также можно из уравнений Навье–Стокса получить соответствующую систему уравнений, но при этом появляются неизвестные в виде тензоров четвертого порядка. Продолжая такую операцию, для параметров турбулентного течения можно записать бесконечную цепочку с зацепляющимися уравнениями. Впервые такую цепочку уравнений получили Фридман и Келлер [10]. Многочисленные попытки оборвать эту цепочку уравнений и замкнуть задачу путем отбрасывания неизвестных тензорных величин не привели к удовлетворительным результатам. До сих пор не найдено достаточно убедительных аргументов в пользу возможности проведения такой операции, даже с учетом тензоров очень высоких порядков.

В течение длительного времени большинство работ по турбулентности было посвящено теории однородной и изотропной турбулентности. Первоначально считалось, что такая абстрактная модель турбулентного течения более доступна математическому описанию и анализу, чем реальная турбулентность. Однако выяснилось, что математические трудности описания однородной и изотропной турбулентности велики, а вклад этой теории в понимание процессов реальной турбулентности

весьма ограничен. Действительно, многочисленные экспериментальные исследования показывают, что для всех реальных турбулентных течений наличие сдвига скорости течения приводит к достаточно сложным и весьма существенным воздействиям на динамику турбулентных движений всех масштабов. Теорию однородной и изотропной турбулентности подробно описал Дж. Бэтчелор [11].

В последние годы в исследовании турбулентности возникло новое направление, связанное с таким математическим понятием, как странный аттрактор. Рюэль и Такенс [12] высказали предположение о том, что система гидродинамических уравнений, записанная как детерминированная система, при определенных условиях приводит к стохастическому решению, которому отвечает движение на странном аттракторе в фазовом пространстве. Существенные результаты в этом направлении получил Лоренц [13], который рассмотрел двумерные решения гидродинамических уравнений, описывающих конвекцию между двумя бесконечными пластинками с разными температурами. Решение этих уравнений должно периодически зависеть от расстояния вдоль пластинок. Поля температуры и скорости течения были разложены в ряды Фурье и для дальнейшего решения и анализа задачи оставлены для поля температуры две гармоники, а для поля скоростей — одна. Для их амплитуд возникла система обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений Лоренца):

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y;$$

$$\dot{Y} = -XZ - Y + rX;$$

$$\dot{Z} = XY - bZ.$$

В этой системе уравнений параметры σ , r и b связаны с постоянной Прандтля, пространственным периодом конвекции и разностью температур на пластинках. В фазовом пространстве (X, Y, Z) каждому решению системы уравнений Лоренца соответствует своя траектория. Путем численного решения обнаружено, что при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и $r \geq 24,74$ любая траектория притягивается к странному аттрактору. Работа Лоренца послужила толчком к появлению большого числа работ, в которых делается попытка объяснить природу турбулентности с качественных позиций, опираясь на понятие странного аттрактора [14]. Однако в настоящее время мало математических результатов, так или иначе связанных со странными аттракторами. Более или менее изученным является лишь странный аттрактор, связанный с системой уравнений Лоренца. В данный момент ничего нельзя сказать о структуре странных аттракторов в пространствах размерностью больше трех. Не ясно, к каким результатам приведет увеличение числа мод при аппроксимации гидродинамических уравнений. Таким образом, попытка построить теорию турбулентности на основе странных аттракторов привела к

появлению большего числа вопросов, чем дала ответов для реальной турбулентности.

Господствующее положение при решении прикладных задач, связанных с турбулентными течениями, с момента появления работ Прандтля и Кармана и до сегодняшнего дня заняли полуэмпирические методы, которые существенно усложнились и приобрели большую область применимости. Как правило, в число определяющих уравнений помимо системы уравнений Рейнольдса включаются и уравнения для напряжений Рейнольдса τ_{ij} , а замыкающие модели разрабатываются для тензорных величин третьего порядка. Были попытки включить в число определяющих уравнений и соответствующие уравнения для тензорных величин третьего порядка и строить модели замыкания уже для тензоров четвертого порядка, но эти попытки оказались неудачными, так как получаемая при этом система дифференциальных уравнений оказалась слишком громоздкой и не поддавалась решению и анализу.

Запишем систему уравнений для напряжений Рейнольдса:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = R_{ij} + S_{ij} + D_{ij} + E_{ij}. \quad (1.7)$$

R_{ij} обозначает член, который описывает процесс порождения напряжений Рейнольдса. Этот член может быть представлен следующим выражением:

$$R_{ij} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}. \quad (1.8)$$

Взаимодействие поля пульсаций скорости течения u' с полем пульсаций давления P' описывается в уравнении (1.7) членом S_{ij} , который мы можем записать следующим образом:

$$S_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left\langle u'_i \frac{\partial P'}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \left\langle u'_j \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (1.9)$$

В турбулентном потоке напряжения Рейнольдса диффундируют, и этот процесс в уравнении (1.7) учитывается членом D_{ij} , который состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое определяет молекулярную диффузию, второе – турбулентную. Для D_{ij} запишем следующее выражение:

$$D_{ij} = -\frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_k} + \nu \Delta \tau_{ij}. \quad (1.10)$$

Важную роль в турбулентных течениях играют диссипативные процессы, которые учитываются в уравнении (1.7) членом E_{ij} :

$$E_{ij} = -2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \nu \Delta \tau_{ij} . \quad (1.11)$$

В уравнения для напряжений Рейнольдса входят неизвестные величины: диссипативный член; член, связанный с пульсациями давления; тензорные величины третьего порядка.

При анализе диссипативных членов предполагается, что даже при больших постоянных Рейнольдса вязкая диссипация является основным механизмом рассеяния турбулентной кинетической энергии. При больших значениях постоянной Рейнольдса турбулентные вихри, в которых происходит диссипация кинетической энергии турбулентности, существенно меньше вихрей, получающих энергию от осредненного течения. В диссипативный член входит слагаемое, которое описывает молекулярную диффузию напряжений Рейнольдса. Можно показать, что это слагаемое пренебрежимо мало в турбулентных течениях при больших значениях Re . Действительно, для молекулярной диффузии количества движения справедлива оценка

$$\nu \Delta \tau_{ij} \sim \nu \frac{b}{l^2} = \frac{\nu}{\sqrt{b} l} \frac{b^{3/2}}{l} = Re^{-1} \frac{b^{3/2}}{l} ,$$

где b – характерное значение кинетической энергии турбулентности; l – масштаб размеров турбулентных образований; $Re = \sqrt{b} l / \nu$. Для атмосферного течения, например, характерное значение кинетической энергии турбулентности порядка $1 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, масштаб турбулентных образований порядка 300 м, постоянная Рейнольдса порядка 10^7 . Таким образом, слагаемое в диссипативном члене, обусловленном молекулярной диффузией, пренебрежимо мало.

Для аппроксимации второго слагаемого в диссипативном члене обычно применяется выражение

$$-2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle = -\frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} ,$$

где ϵ – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности:

$$\epsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle . \quad (1.12)$$

Аппроксимационное выражение диссипативного члена предполагает изотропную турбулентность. Для анизотропной модели диссипативного процесса применяли аппроксимацию следующего вида [15]:

$$-2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle = -\frac{2}{3} C_1 \epsilon \delta_{ij} - C_2 \nu \frac{\epsilon^2}{b^3} \tau_{ij} , \quad (1.13)$$

где b – кинетическая энергия турбулентности:

$$b = \frac{1}{2} (\langle u_1'^2 \rangle + \langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle).$$

Последнее слагаемое в правой части соотношения (1.13) описывает процесс релаксации анизотропной турбулентности к изотропной.

Члены, содержащие пульсации давления [в уравнении (1.7) это S_{ij}], характеризуют перераспределение кинетической энергии турбулентности между различными компонентами тензора напряжений Рейнольдса.

Нетрудно показать, что эти члены не меняют энергии турбулентности. Для этого S_{ij} запишем следующим образом:

$$S_{ij} = \frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial u_i' P'}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\overline{\partial u_j' P'}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \left\langle P' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle.$$

Объемный интеграл по области пространства, занятой турбулентным течением, от первых двух членов правой части этого выражения равен нулю. Следовательно, эти члены не меняют кинетической энергии турбулентности. Последний член в правой части выражения для S_{ij} представляет собой ковариацию типа "давление – деформация". Так как рассматриваемое турбулентное течение несжимаемое, то и этот член не изменяет турбулентную энергию.

Обычно S_{ij} представляют в виде двух слагаемых S_{ij}' и S_{ij}'' . Первое слагаемое характеризует процесс возвращения к изотропии напряжений Рейнольдса. Для его аппроксимации предлагается следующее выражение:

$$S_{ij}' = -C_3 \frac{\epsilon}{b} \left(\tau_{ij} - \frac{2}{3} b \delta_{ij} \right). \quad (1.14)$$

Такая аппроксимация в настоящее время общепринята и используется во всех работах по моделированию турбулентности. Второе слагаемое S_{ij}'' характеризует взаимодействие турбулентных движений с полями осредненных значений, а именно со средним сдвигом скорости течения, с силой плавучести в температурно-стратифицированных течениях и т.п. На необходимость введения этого слагаемого впервые указано в работе [16], где и определена его структура:

$$S_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{3} B_{kk} \delta_{ij}.$$

Здесь B_{ij} – тензорная величина, зависящая от среднего сдвига скорости течения, напряжений Рейнольдса и т.п.

В настоящее время для аппроксимации S_{ij}'' предлагаются различные выражения, наиболее интересные из которых следующие.

Модель Дональдсона. Предполагается, что S''_{ij} описывает процесс диффузии напряжений Рейнольдса, следовательно, можно записать выражение вида

$$S''_{ij} = -C_4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \tau_{jk} \right) - C_4 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \tau_{ik} \right), \quad (1.15)$$

где C_4 – эмпирическая постоянная.

Модель Лаундера. Предполагается, что S''_{ij} описывает процесс, приводящий к изотропии тензора порождения напряжений Рейнольдса. В этом случае можно записать выражение вида

$$S''_{ij} = -C_5 \left(R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1.16)$$

где C_5 – эмпирическая постоянная.

Модель Лаундера–Морса. Эта модель обобщает предыдущую модель Лаундера с учетом влияния осредненной деформации потока. В этом случае применяются аппроксимационное выражение

$$S''_{ij} = -C_5 \left(R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kk} \delta_{ij} \right) - C_6 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right) + C_7 b \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.17)$$

где C_6, C_7 – эмпирические постоянные;

$$G_{ij} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i}.$$

Модель Земана–Ламли. Эта модель представляет собой обобщение модели Лаундера–Морса на случай сильно неоднородных напряжений Рейнольдса. Для S''_{ij} в рамках этой модели предложено следующее аппроксимационное выражение:

$$S_{ij} = -C_5 (R_{ij}^* - 1/3 R_{kk} \delta_{ij}) - C_6 (G_{ij}^* - 1/3 G_{kk} \delta_{ij}) + C_7 b (\partial \bar{U}_i / \partial x_j + \partial \bar{U}_j / \partial x_i). \quad (1.18)$$

R_{ij}^* и G_{ij}^* обозначены следующие величины:

$$R_{ik}^* = -(\tau_{ik} - 2/3b \delta_{ik}) (\partial \bar{U}_j / \partial x_k) - (\tau_{jk} - 2/3b \delta_{jk}) (\partial \bar{U}_i / \partial x_k);$$

$$G_{ij}^* = -(\tau_{ik} - 2/3b \delta_{ik}) (\partial \bar{U}_k / \partial x_j) - (\tau_{jk} - 2/3b \delta_{jk}) (\partial \bar{U}_k / \partial x_i).$$

В рассмотренные аппроксимационные модели входят эмпирические постоянные C_4 , C_5 , C_6 и C_7 .

Ковариации третьего порядка связаны с процессами переноса напряжений Рейнольдса из одной области пространства в другую без их генерации и затухания. Модели замыкания для этих членов носят, как правило, диффузионный характер. На основе метода инвариантного моделирования было получено следующее выражение:

$$-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} = C_8 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{b^2}{\epsilon} \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (1.19)$$

Другой тип аппроксимации был предложен Лаундером и Ханджаликом [17] на основе решения усеченного уравнения для τ_{ijk} . При усечении из соответствующего уравнения были исключены все те члены, которые содержали тензоры четвертого и старшего порядков. В результате было получено выражение

$$-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} = C_8 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{b}{\epsilon} \left(\tau_{il} \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_l} + \tau_{jl} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_l} + \tau_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_l} \right) \right]. \quad (1.20)$$

Упрощенная форма этого выражения

$$-\frac{\overline{\partial u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} = C_8 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b}{\epsilon} \tau_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

была использована Харлоу и Дейли [18]. Лаундер [17], а также Риса и Роди [19] показали, что с помощью упрощенной формы аппроксимации можно получить результаты, которые практически не отличаются от тех, которые были получены с помощью более общего соотношения (1.20).

При использовании моделей замыкания второго порядка появляется новая неизвестная величина – скорость диссипации турбулентной энергии. Эта величина задается выражением

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nu \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle. \quad (1.21)$$

Используя это определение скорости диссипации, из уравнений Навье–Стокса для ϵ можно вывести уравнение

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = - \frac{\partial \overline{\epsilon' u'_k}}{\partial x_k} - 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle -$$

$$- 2\nu^2 \left\langle \left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \right\rangle. \quad (1.22)$$

Из этого уравнения следует, что скорость диссипации турбулентной энергии в потоке газа меняется вследствие адвекции или переноса течением, вследствие диффузии, а также несбалансированности генерации и затухания энергии турбулентности. При интегрировании по всей области турбулентного течения, ограниченного ламинарным потоком газа, в уравнении (1.22) сохраняется только член, который определяется разбалансом генерации и затухания кинетической энергии, так как именно этот процесс приводит к изменению скорости диссипации во всем объеме пространства, а остальные члены уравнения (1.22) лишь перераспределяют по пространству скорость диссипации ϵ .

Диффузионный член в уравнении (1.22) аппроксимируется обычным образом:

$$- \frac{\partial \overline{\epsilon' u'_k}}{\partial x_k} = C_9 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b}{\epsilon} \tau_{kl} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right). \quad (1.23)$$

Член уравнения (1.22), связанный с разбалансом между генерацией и затуханием кинетической энергии, наиболее простым образом аппроксимируется как

$$- 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle = 2\nu^2 \left\langle \left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \right\rangle \sim R_{kk} + C_{10} \epsilon, \quad (1.24)$$

где C_{10} — эмпирическая постоянная.

Оценка членов уравнения (1.22) показывает, что изменение скорости диссипации кинетической энергии турбулентности со временем может быть охарактеризовано временным параметром τ :

$$\tau = C_{11} b / \epsilon.$$

Отсюда следует, что разбалансный член может быть аппроксимирован так:

$$(C_{10} \epsilon + C_{11} R_{kk}) \epsilon / b. \quad (1.25)$$

Замкнутое уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности можно представить в виде

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = C_9 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b}{\epsilon} \tau_{kl} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right) + (C_{10} \epsilon + C_{11} R_{kk}) \frac{\epsilon}{b}. \quad (1.26)$$

Таким образом, при использовании моделей замыкания второго порядка для математического описания турбулентного течения несжимаемого газа применяют уравнения Рейнольдса совместно с уравнениями для турбулентных напряжений Рейнольдса, которые можно в наиболее общем виде представить так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} &= (C_5 - 1) \left(\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) + \\ &+ C_6 \left(\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} + \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(C_5 \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \right. \\ &+ C_6 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left. \right) \tau_{lk} \delta_{ij} - \left(\frac{2}{3} C_5 + \frac{2}{3} C_6 - C_7 \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) b - \\ &- \frac{2}{3} (C_1 - C_3) \epsilon \delta_{ij} - \left(C_3 + C_2 \nu \frac{\epsilon}{b^2} \right) \frac{\epsilon}{b} \tau_{ij} + \\ &+ C_8 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b}{\epsilon} \tau_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Наиболее полное статистическое описание турбулентного течения в рамках механики сплошных сред можно получить с помощью функции плотности вероятности ФПВ. Типичной ФПВ является функция $\Phi(u_i; x, t)$, которая по определению представляет собой вероятность того, что значения i -й компоненты скорости течения в фиксированной точке x в момент времени t лежит в интервале от u_i до $u_i + du_i$.

Наряду с функцией плотности вероятности для одного параметра применяют и более сложные ФПВ для двух и более параметров турбулентного течения, задаваемых в различных точках пространства и в различные моменты времени. В первом случае мы имеем дело с многоточечными функциями плотности вероятности, а во втором — с многомоментными функциями плотности вероятности. Например, функция $\Phi(u; x, t)$ обладает тем свойством, что величина $\Phi(u; x, t) du$ является вероятностью того, что в точке x в момент времени t значения вектора скорости турбулентного течения лежат в интервале $(u, u + du)$.

Примером многоточечной многомоментной функции плотности вероятности является функция $\Phi(u, u'; x, t; x', t')$. Эта функция связа-

на с вероятностью того, что в точке x в момент времени t значения вектора скорости течения u лежат в интервале от u до $u + du$, а в точке x' в момент времени t' значения вектора скорости течения лежат в интервале от u' до $u' + du'$.

Функция плотности вероятности обладает рядом специфических свойств, одним из которых является свойство нормировки. Суть этого свойства заключается в том, что из функции плотности вероятности, определенной для многих параметров, можно получить функцию плотности вероятности, зависящую от меньшего числа параметров. Например, между функциями $\Phi(u_1; x, t)$ и $\Phi(u; x, t)$ с помощью свойства нормировки можно установить следующую зависимость:

$$\Phi(u_1; x, t) = \int \Phi(u; x, t) du_2 du_3.$$

Функция плотности вероятности позволяет достаточно просто определить операцию осреднения параметров турбулентного течения с помощью следующего соотношения:

$$\langle a \rangle = \int a(u) \Phi(u; x, t) du. \quad (1.28)$$

Уравнения, которым удовлетворяет функция плотности вероятности в турбулентной среде, могут быть получены различными способами. Впервые эти уравнения вывели Ландгрэн в работе [20] с помощью дифференциальных уравнений механики сплошных сред, описывающих течение вязкой жидкости, и А.С. Монин в работе [21]. В настоящее время способу Ландгрэна отдается больше предпочтения, так как он обладает большей наглядностью и позволяет проводить обобщения на различные типы задач, связанных с турбулентными процессами.

Рассмотрим вывод уравнения для функции $\Phi_1(u; x, t)$, используя для этого способ Ландгрэна. Согласно этому способу предполагается существование и единственность так называемой фазовой плотности вероятности, которую для сплошной газовой среды можно определить как

$$\varphi_1(u; x, t) = \delta[u - \tilde{u}(x, t)], \quad (1.29)$$

где $\tilde{u} = \{\tilde{u}_1(x, t), \tilde{u}_2(x, t), \tilde{u}_3(x, t)\}$ – вектор скорости турбулентного течения, представляет собой отдельную реализацию случайного поля скоростей в точке x в момент времени t ; $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор, выполняющий роль независимой переменной.

Искомая функция плотности вероятности является средним значением фазовой плотности вероятности по всем реализациям случайного поля скоростей, т.е.

$$\Phi_1(u; x, t) = \langle \varphi_1(u; x, t) \rangle. \quad (1.30)$$

Введение фазовой плотности вероятности является чисто математическим приемом, который, однако, как будет видно в дальнейшем, позво-

ляет установить достаточно сложные количественные и функциональные зависимости для параметров турбулентного течения. Далее, продифференцируя по времени соотношение (1.29), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = (\partial \tilde{u}_i / \partial t) (\partial \varphi_1 / \partial u_i). \quad (1.31)$$

На этой стадии нам понадобятся уравнения, которые описывают отдельные реализации турбулентного течения. К таким уравнениям относятся уравнения Навье—Стокса и уравнение неразрывности. Из уравнений Навье—Стокса можно выразить производные $\partial \tilde{u}_i / \partial t$. Подставив полученные выражения в уравнение (1.31), получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} + \nu \Delta \tilde{u}_i(x, t) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}. \quad (1.32)$$

Последний член в правой части этого уравнения можно переписать следующим образом:

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k} \left[\nu \tilde{u}_i(x', t) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} \right].$$

Если теперь воспользоваться соотношением

$$\tilde{u}_i(x', t) = \int u_i^* \delta [u^* - \tilde{u}(x', t)] du^*,$$

то это выражение можно преобразовать к следующему виду:

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k} \left[\nu \frac{\partial}{\partial u_i} \int u_i^* \varphi_2(u^*, u; x', x, t) du^* \right]. \quad (1.33)$$

Здесь введена новая функция $\varphi_2(u^*, u; x', x, t)$, которая представляет собой двухточечную фазовую плотность вероятности. Двухточечная фазовая плотность определяется следующим соотношением:

$$\varphi_2(u^*, u; x', x, t) = \varphi_1(u^*; x', t) \varphi_1(u; x, t). \quad (1.34)$$

Первый член в правой части уравнения (1.32) связан с полем давления в потоке газа. Это давление зависит от поля скоростей течения, при этом связь полей давления и скоростей задается уравнением Пуассона

$$\Delta P = - \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_k(x, t) \tilde{u}_l(x, t)}{\partial x_k \partial x_l},$$

где Δ — оператор Лапласа.

Как известно, решение уравнения Пуассона можно представить так:

$$P(x, t) = - \frac{\rho}{4\pi} \int \Psi_{kl}(x - x') \tilde{u}_k(x', t) \tilde{u}_l(x', t) dx',$$

где

$$\Psi_{kl}(x - x') = \frac{\partial^2 |x - x'|^{-1}}{\partial x'_k \partial x'_l}.$$

Теперь первый член в уравнении (1.32) выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} \times \\ \times u_k^* u_l^* \varphi_2(u^*, u; x', x, t) dx' du^*. \quad (1.35)$$

Теперь для фазовой плотности можно записать уравнение

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} = \nu \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \int u_i^* \varphi_2 du^* \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial u_i} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* \varphi_2 du^* dx'. \quad (1.36)$$

К этому уравнению можно применить операцию осреднения и получить уравнение для искомой функции плотности вероятности распределения вектора скорости движения газа в турбулентном течении:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} = \nu \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \int u_i^* \Phi_2 du^* \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial u_i} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* \Phi_2(u^*, u; x', x, t) du^* dx'. \quad (1.37)$$

Далее воспользуемся теоремой Байесса [22], и двухточечную функцию плотности вероятности выразим через одноточечную функцию плотности вероятности:

$$\Phi_2(u_i^*, u; x', x, t) = \Phi_1(u; x, t) \Phi_{12}(u_i^* | u; x', x, t),$$

где $\Phi_{12}(u_i^* | u; x', x, t)$ — условная плотность вероятности, т.е. плотность вероятности распределения параметра u_i^* при фиксированных значениях параметров u_j ($j \neq i$) и u . Для условной плотности вероятности можно определить и условное среднее значение параметра u_i^* :

$$E(u_i^* | u; x', x, t) = \int u_i^* \Phi_{12}(u_i^* | u; x', x, t) du_i^*.$$

Используя это определение условного среднего, второй член в правой части уравнения (1.37) для функции плотности вероятности приведем к следующему виду:

$$\nu \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\Phi_1(u; x, t) \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} E(u_i^* | u; x', x, t) \right]. \quad (1.38)$$

Рассмотрим теперь первый член в правой части уравнения для функции плотности вероятности. Используя аналогию с кинетической теорией газов [23], введем обобщенную силу, действующую на поток газа, и интеграл "столкновений" в турбулентной среде. Эти величины вводятся с помощью соотношений

$$F_i(x, t) = \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* \varphi_1(u^*; x', t) du^* dx'; \quad (1.39)$$

$$J(u; x, t) = \frac{\partial}{\partial u_i} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* [\Phi_2(u^*, u; x', x, t) - \Phi_1(u^*; x', t) \Phi_1(u; x, t)] du^* dx'. \quad (1.40)$$

Нетрудно показать, что обобщенная сила $F_i(x, t)$ в потоке газа связана с градиентом осредненного давления, т.е.

$$F_i(x, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}.$$

Теперь уравнение для одноточечной функции плотности вероятности распределения скорости течения в турбулентном потоке газа может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_k} = \nu \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\Phi_1(u; x, t) \times \right. \\ \left. \times \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 E(u_i^* | u; x', x, t)}{\partial x_k' \partial x_k'} \right] + J(u; x, t). \quad (1.41)$$

Полученное уравнение для одноточечной функции плотности вероятности является незамкнутым, так как в него входит неизвестная двухточечная функция плотности вероятности. Для двухточечной функции можно вывести соответствующее уравнение, в которое будет входить неизвестная трехточечная функция. Выводя уравнение для трехточечной функции, опять получаем незамкнутое уравнение. Продолжая этот процесс, приходим к цепочке зацепляющихся уравнений, последнее уравнение в которой будет содержать неизвестную функцию плотности вероятности на единицу большего порядка, чем само уравнение. Таким образом, применение функции плотности вероятности для описания турбулентного течения приводит к проблеме замыкания цепочки за-

цепляющихся уравнений для функций плотности вероятности различного порядка. Эта проблема аналогична проблеме замыкания цепочки ББКГИ-уравнений (уравнения Борна, Боголюбова, Кирквуда, Грина, Ивона) в кинетической теории газов. Кроме того, сами уравнения для функции плотности вероятности распределения скорости течения в турбулентном потоке газа по своему виду похожи на ББКГИ-уравнения. Такая аналогия позволяет надеяться на то, что методы газовой кинетической теории и неравновесной статистической механики и полученные с их помощью результаты окажутся полезными и в теории турбулентности.

Как правило, из всей цепочки уравнений рассматриваются либо первые два уравнения, либо одно первое. Для двух уравнений возникает необходимость в разработке модели замыкания для трехточечной функции плотности вероятности. Задача в этом случае становится громоздкой и трудно поддается анализу и решению. Из-за этого методы замыкания двухточечной функции и соответственно использование только одного первого уравнения цепочки получили наибольшее распространение, и с их помощью были получены наиболее значительные результаты.

Уравнение (1.41) содержит неизвестные члены двух типов. Члены первого типа зависят от условных средних величин и связаны с локальными свойствами турбулентности. Член второго типа — это интеграл столкновений, в который входит двухточечная функция плотности вероятности. Интеграл столкновений связан уже не с локальными свойствами турбулентности, а определяется ее глобальной структурой.

Условные средние величины непосредственно связаны с таким математическим понятием, как регрессия. Действительно, если дано совместное распределение случайных величин, например u^* и u , то зависимость u_i^* от остальных величин можно изучать с помощью соотношения

$$u_i^* = \omega_i(u_{j \neq i}^*, u) + h_i(u_{j \neq i}^*, u),$$

где h_i — остаточный член.

Средней квадратичной регрессией u_i^* на $u_{j \neq i}^*$, u называют функцию вида

$$\omega_i(u_{j \neq i}^*, u) = \int u_i^* \Phi_{12}(u_i^* | u_{j \neq i}^*, u, x', x, t) du_i^*,$$

которая минимизирует квадратичный функционал

$$\int [u_i^* - \omega_i(u_{j \neq i}^*, u)]^2 \Phi_2(u^*, u; x', x, t) du_i^*.$$

Из определения средней квадратичной регрессии следует, что функция ω_i , минимизирующая квадратичный функционал, есть условное среднее значение u_i^* при фиксированных $u_{j \neq i}^*$, u . Это свойство квадратичного функционала используется при построении моделей замыкания членов первого типа в уравнении (1.41).

Как уже указывалось, условные средние величины в уравнении (1.41) связаны с локальными процессами турбулентного обмена, поэтому при их аппроксимации турбулентность можно рассматривать как локально однородную и изотропную. Это предположение позволяет регрессионные соотношения записать как $u_i^* \sim u_i$. В этом случае условные средние величины, которые содержатся в уравнении (1.41), должны иметь следующий вид:

$$E(u_i^* | u; x', x, t) = \bar{u}_i(x', t) + \frac{\langle u_i'(x, t) u_i'(x', t) \rangle}{\langle u_i'^2(x, t) \rangle} (u_i - \bar{u}_i).$$

Это соотношение удовлетворяет свойству минимизации квадратичного функционала. Двухточечные корреляционные функции можно разложить в ряд Тейлора в окрестностях точки x , т.е.

$$\frac{\langle u_i'(x, t) u_i'(x', t) \rangle}{\langle u_i'^2(x, t) \rangle} \approx 1 - \frac{(x - x')^2}{\lambda_i^2},$$

где λ_i — микромасштабы турбулентности тейлоровского типа. Микромасштабы турбулентности зависят от второй производной корреляционных функций в точке x и могут зависеть как от переменной x , так и времени t .

Подставляя полученные приближенные значения условных средних величин в окрестностях точки x в соответствующие члены уравнения для одноточечной функции плотности вероятности, получим соотношение

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2 E(u_i | u; x', x, t)}{\partial x'_k \partial x'_k} = \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{6[u_i - \bar{u}_i(x, t)]}{\lambda_i^2}.$$

Теперь уравнение для одноточечной функции плотности вероятности можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left\{ \left[\nu \Delta u_i(x, t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{6\nu}{\lambda_k^2} (u_k - \bar{u}_k(x, t)) \right] \Phi_1 \right\} + J(u; x, t). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Для аппроксимации интеграла столкновений в уравнении (1.42), как правило, используют методы газокINETической теории и неравновесной статистической механики, например методы Крука (Крука — Бхатнагара) и Кирквуда.

Метод Крука был применен Ландгреном в работе [20]. При этом использовалось предположение о том, что главная роль пульсаций дав-

ления заключается в разупорядочении поля скоростей турбулентного течения и приведении, следовательно, турбулентности потока к изотропии. Такое предположение позволило Ландгрёну применить релаксационную модель, записав интеграл столкновений в уравнении (1.42) следующим образом:

$$J(u; x, t) = \frac{\Phi_1(u; x, t) - \Phi_g(u; x, t)}{\tau_p}, \quad (1.43)$$

где τ_p – время релаксации, которое определяется выражением

$$\tau_p = \frac{5}{\langle u'^2 \rangle} \left(\epsilon + \frac{3}{2} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial t} \right).$$

Гауссовское распределение $\Phi_g(u; x, t)$, к которому, как предполагается, стремится распределение скоростей течения под действием пульсаций давления, можно записать как

$$\Phi_g(u; x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \langle u'^2 \rangle^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \frac{(u - u)^2}{2 \langle u'^2 \rangle} \right\}.$$

Здесь появляется такой параметр, как скорость диссипации кинетической энергии турбулентности ϵ . Для определения этого параметра следует разработать специальную модель. Можно воспользоваться способами вычисления скорости диссипации, применяемыми в полуэмпирической теории турбулентности.

Метод Кирквуда был применен в работе [24] А.Т. Онуфриевым для построения модели замыкания интеграла столкновений в уравнении для одноточечной функции плотности вероятности. Согласно этой модели была введена усеченная функция $\tilde{\Phi}_1$ в соответствии со следующим соотношением:

$$\tilde{\Phi}_1(u; x, t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Phi_1(u; x, t + \eta) d\eta.$$

Следует отметить, что операция усечения приводит к сглаживанию функции. Покажем это.

Рассмотрим производную

$$\frac{d\tilde{\Phi}_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \Phi_1(u; x, \eta) d\eta \right\},$$

которую можно переписать так:

$$\frac{d\tilde{\Phi}_1}{dt} = \frac{\Phi_1(u; x, t + \tau) - \Phi_1(u; x, t)}{\tau}.$$

Видно, что тангенс угла наклона в точке t зависит от значения функции Φ_1 в двух точках — в точке t и в точке $t + \eta$ — и не чувствителен к значению функции Φ_1 между этими двумя точками. Очевидно, что чем больше τ , тем более гладкой получается усеченная функция.

Онуфриев предположил, что за время от t до $t + \eta$ рассматриваемое турбулентное образование или моль в потоке газа взаимодействует не более чем с еще одним молекул. В этом случае интеграл столкновений можно записать

$$J(u; x, t) = - \frac{\tilde{\Phi}_1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \int \tilde{\Phi}_1(u - \Delta u; x, t) \times \\ \times W(u - \Delta u : \Delta u) d(\Delta u),$$

где τ — время корреляции для функционала $\Phi_1(u; x, t)$; $W(u - \Delta u : \Delta u)$ — вероятность отклонения на Δu . В этом соотношении была использована условная запись вида

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3);$$

$$u - \Delta u = (u_1 - \Delta u_1, u_2 - \Delta u_2, u_3 - \Delta u_3).$$

Полагая время корреляции τ малым по сравнению с характерным временем изменения функции плотности вероятности, подынтегральную функцию можно разложить в ряд Тейлора и получить при этом следующее соотношение:

$$J(u; x, t) = - \frac{\tilde{\Phi}_1(u; x, t)}{\tau} - \frac{1}{\tau} \int \tilde{\Phi}_1(u; x, t) W(u : \Delta u) d(\Delta u) - \\ - \frac{\partial \|\Delta u_k\| \tilde{\Phi}_1}{\partial u_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_k} [\|\Delta u_i \Delta u_k\| \Phi_1(u; x, t)].$$

Здесь были использованы следующие обозначения:

$$\|\Delta u_i\| = \int \Delta u_i W(u - \Delta u : \Delta u) d(\Delta u);$$

$$\|\Delta u_i \Delta u_k\| = \int \Delta u_i \Delta u_k W(u - \Delta u : \Delta u) d(\Delta u).$$

Можно предположить, что флуктуации скорости турбулентного течения пропорциональны пульсирующим значениям скорости, т.е.

$$\|\Delta u_i\| = -C_1 u_i'.$$

Для флуктуаций квадратичных величин естественно предположить пропорциональность средним квадратическим значениям соответствующих величин, характерных для локально-однородного и равновесного состояния, т.е.

$$\|\Delta u_i \Delta u_k\| = -C_1^2 \langle u_i'^2 \rangle \delta_{ik}.$$

Интеграл столкновений в уравнении для одноточечной функции плотности вероятности распределения скорости течения в турбулентном потоке газа можно представить теперь следующим образом:

$$J(u; x, t) = \frac{C_1}{\tau} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(u'_i \tilde{\Phi}_1 + \frac{2}{3} C_1 b \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial u_i} \right). \quad (1.44)$$

Нетрудно видеть, что это выражение представляет собой разложение вблизи равновесного состояния интеграла столкновений, полученного методом Крука. Само же уравнение для одноточечной функции в данном случае примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left\{ \left[\nu \Delta \bar{u}_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{6\nu}{\lambda_k^2} (u_k - \bar{u}_k) \right] \tilde{\Phi}_1 \right\} + \frac{C_1}{\tau} \frac{\partial}{\partial u_k} \times \\ \times \left(u'_k \tilde{\Phi}_1 + \frac{2}{3} C_1 b \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial u_k} \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Аналогичное уравнение, полученное методом Крука, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left\{ \left[\nu \Delta u_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{6\nu}{\lambda_k^2} (u_k - \bar{u}_k) \right] \tilde{\Phi}_1 \right\} + \frac{\Phi_1(u; x, t) - \Phi_g(u; x, t)}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Рассмотренные модели замыкания интеграла столкновений являются простейшими вариантами описания сложного процесса взаимодействия поля пульсаций давления с полем пульсаций скорости. Опираются эти модели на недостаточно обоснованные предположения, часть которых носит интуитивный характер. В то же время рассмотренные модели замыкания интеграла столкновений в некоторых случаях приводят к вполне приемлемым практическим результатам. Однако считать задачу окончательно решенной нельзя. Необходимость в модели замыкания, обладающей большей обоснованностью и, следовательно, более широкой областью применимости, очевидна.

Более строгую модель замыкания интеграла столкновений можно получить при детальном рассмотрении структуры интеграла столкновений. Интеграл столкновений определяется крупномасштабными процессами в турбулентной среде. Эти крупномасштабные процессы приводят к флуктуациям фазовой плотности вероятности, которые определяются следующим образом:

$$\delta\varphi_1(u; x, t) = \varphi_1(u; x, t) - \Phi_1(u; x, t).$$

Воспользовавшись этим определением, можно показать, что

$$\langle \delta\varphi_1(u; x, t) \delta\varphi_1(u^*; x', t) \rangle = \varphi_2 - \varphi_1(u; x, t) \varphi_1(u^*; x', t).$$

Это соотношение позволяет установить новую форму записи интеграла столкновений в турбулентном течении:

$$J(u; x, t) = \frac{\partial}{\partial u_i} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* \times \\ \times \langle \delta\varphi_1(u; x, t) \delta\varphi_1(u^*; x', t) \rangle du^* dx'. \quad (1.47)$$

Из этого выражения видно, что интеграл столкновений зависит от корреляций флуктуаций фазовой плотности вероятности.

Для флуктуаций фазовой плотности вероятности можно получить уравнение, описывающее динамику этих флуктуаций в соответствующем фазовом пространстве. Для этого необходимо из уравнения для фазовой плотности вычесть соответствующее уравнение для функции плотности вероятности, в результате чего получается уравнение вида

$$\frac{\partial \delta\varphi_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial \delta\varphi_1}{\partial x_i} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k} \times \\ \times \left[\nu \frac{\partial}{\partial u_i} \int u_i^* (\varphi_2 - \Phi_2) du^* + \frac{\partial}{\partial u_i} \times \right. \\ \left. \times \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* (\varphi_2 - \Phi_2) du^* dx' \right].$$

Для $\varphi_2 - \Phi_2$ можно получить соотношение

$$\varphi_2 - \Phi_2 = \Phi_1(u^*; x', t) \delta\varphi_1(u; x, t) + \Phi_1(u; x, t) \times \\ \times \delta\varphi_1(u^*; x', t) + \delta\varphi_1(u^*; x', t) \delta\varphi_1(u; x, t) - \\ - \langle \delta\varphi_1(u^*; x', t) \delta\varphi_1(u; x, t) \rangle.$$

Подставим это соотношение в уравнение для флуктуаций и получим

$$\frac{\partial \delta\varphi_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial \delta\varphi_1}{\partial x_i} = \nu \Delta \tilde{u}_i(x, t) \frac{\partial \delta\varphi_1}{\partial u_i} + \nu [\Delta(\tilde{u}_i(x, t) - \\ - \bar{u}_i(x, t))] \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i} - \nu \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial u_i} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int u_i^* \langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_1 \rangle du^* - F_i \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial u_i} - \delta F_i \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial u_i} - \\
& - \delta F_i \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i} + J(u; x, t), \tag{1.48}
\end{aligned}$$

где δF_i — флуктуация обобщенной силы, действующей в потоке газа, определяется соотношением

$$\delta F_i(x, t) = \int \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi_{kl}(x - x')}{\partial x_i} u_k^* u_l^* \delta \varphi_1(u^*, x', t) du^* dx'.$$

В уравнении (1.48) есть члены, в которые входят $\langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_1 \rangle$. Если выразить $\langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_1 \rangle$ через одноточечные и двухточечные функции плотности вероятности, то эти члены можно записать следующим образом:

$$\int u_i^* \langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_2 \rangle du^* = \int u_i^* \Phi_2 du^* - \Phi_1(u; x, t) \int u_i^* \Phi_1 du^*.$$

Выразив двухточечную функцию плотности вероятности через условную функцию плотности вероятности в соответствии с теоремой Байесса, можно получить соотношение

$$\int u_i^* \langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_1 \rangle du^* = [E(u_i^*/u; x', x, t) - \bar{u}_i(x', t)] \Phi_1(u; x, t).$$

Используя это соотношение, перепишем уравнение (1.48):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial x_i} &= \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \nu \Delta \tilde{u}_i(x, t) \right] \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial u_i} + \\
&+ \left[\frac{6\nu}{\lambda_i^2} (u_i - \bar{u}_i) + \nu \Delta (\tilde{u}_i - \bar{u}_i) - \delta F_i \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i} - \\
&- \frac{\partial \Delta F_i \delta \varphi_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \langle \delta F_i \delta \varphi_1 \rangle}{\partial u_i}. \tag{1.49}
\end{aligned}$$

Молекулярными процессами переноса в турбулентном потоке газа можно пренебречь при больших значениях постоянной Рейнольдса. В таких случаях из уравнения для флуктуации фазовой плотности можно исключить величины $\nu \Delta \bar{u}_i$ и $\nu \Delta \tilde{u}_i$.

Уравнение (1.48) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Это уравнение является нелинейным, так как в него входят нелинейные флуктуации вида $\delta(\delta F_i \delta \varphi_1)$. Полагая эти нелинейные флуктуации величинами второго порядка малости по сравнению с $-F_i \delta \delta \varphi_1 / \partial u_i$ или с $\delta F_i \partial \Phi_1 / \partial u_i$, уравнение (1.48) можно линеаризовать. Линеаризованное уравнение для флуктуации фазовой плотности можно

записать следующим образом:

$$\frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial x_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \varphi_1}{\partial u_i} - \delta F_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} +$$

$$+ \frac{6\nu}{\lambda_i^2} (u_i - \bar{u}_i) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_i} .$$

Это линейное интегро-дифференциальное уравнение может выполнять роль замыкающего условия для интеграла столкновений в уравнении для одноточечной функции плотности вероятности распределения скорости течения в турбулентном потоке газа. В то же время следует иметь в виду, что практическая реализация этого способа замыкания связана с большими трудностями, которые пока еще не преодолены.

Уравнение для одноточечной функции плотности вероятности позволяет получить уравнения для осредненных параметров турбулентного течения. Так, уравнения Рейнольдса можно вывести, если умножить уравнение для одноточечной функции плотности вероятности на $u_i u_j$ и проинтегрировать полученное соотношение по u . После несложных преобразований получим уравнения Рейнольдса следующего вида:

$$\frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u'_i u'_j u'_k \rangle) + \frac{1}{T_{ij}} \langle u'_i u'_j \rangle \frac{4}{3} \frac{b}{\tau_p} \delta_{ij} , \quad (1.50)$$

где T_{ij} – временные параметры, которые вычисляются по формуле

$$T_{ij} = \frac{2}{\tau_p} + 6\nu \left(\frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_j^2} \right) .$$

Рассмотренные до сих пор методы описания турбулентных течений разрабатывались в рамках механики сплошных сред, так как в них в том или ином виде использовались уравнения Навье–Стокса, которые описывают движение вязкой среды на основе эмпирических законов вязкого трения. Принципиально новое направление в теории турбулентности было предложено В.В. Струминским в серии работ, где развивались идеи кинетической теории газов применительно к турбулентным течениям. В кинетической теории основную роль играет интегро-дифференциальное уравнение для функции распределения молекул в шестимерном фазовом пространстве координат и скоростей, полученное Больцманом интуитивно из общих физических соображений. Исследуя это уравнение, В.В. Струминский пришел к выводу, что из уравнения Больцмана может быть получена система гидродинамических уравнений, опре-

деляемых молекулярными процессами. Одним из приближений этой системы, получаемым при учете только парных взаимодействий молекул является система уравнений Навье—Стокса.

Теоретическое обоснование уравнения Больцмана было дано Н.Н. Боголюбовым, Борном и Кирквудом. При выводе уравнения предполагалось, что функция распределения $F_N(x_1, \dots, x_N, t)$ является симметричной относительно перестановки любой пары динамических координат. Это предположение приводит к основному допущению Больцмана относительно того, что $F_1(x_1, t) = NF_0(x_1, t)$ [24]. Таким образом, ламинарные течения характеризуются движениями отдельных молекул и их интенсивным перемешиванием при парном взаимодействии во всей области течения.

Турбулентные течения характеризуются уже движениями не отдельных молекул, а целых групп молекул. На довольно простом и наглядном примере В.В. Струминский показал [25], почему при определенных значениях постоянной Рейнольдса ламинарные течения и классическая кинетическая теория становятся несправедливыми и что происходит при этом в потоке движущегося газа. С помощью общих теоретических положений свободного блуждания частиц и статистики он показал, что вероятность нахождения частицы в момент времени t в интервале от R до $R + dR$ при начальном ее положении в начале системы координат равна

$$W(R, t) = \left(\frac{3}{2\pi n \overline{r^2} t} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(- \frac{3R^2}{2n \overline{r^2} t} \right) \Delta R,$$

где $\overline{r^2}$ — среднее квадратичное перемещение частицы при свободном ее блуждании; n — число перемещений в единицу времени. Для вероятности перемещения в однородном потоке со скоростью u получим

$$W(R, t) = (2\pi \nu t)^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ - \frac{(x - ut)^2 + y^2 + z^2}{2\nu t} \right\},$$

где $\nu = n \overline{r^2}$.

В этом соотношении основную роль играет экспоненциальный множитель, поэтому наиболее вероятная область локализации частиц ограничена параболоидом:

$$(x - ut)^2 + y^2 + z^2 = 2\nu t,$$

или в безразмерном виде:

$$(\bar{x} - \bar{u}\tau)^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 2\text{Re}^{-1}\tau.$$

Отсюда следует, что с ростом Re уменьшается возможная область локализации молекул в потоке газа. При больших значениях Re интенсив-

ность перемешивания молекул уменьшается, создаются условия для накопления в потоке неоднородностей. Неоднородности теперь выравниваются не вследствие движения отдельных молекул, как это происходит в ламинарном потоке, а вследствие группового перемещения молекул.

Основываясь на проведенных исследованиях уравнения Больцмана, В.В. Струминский установил, что основным ограничением кинетической теории, препятствующим ее распространению на класс турбулентных течений, является введение принципа симметрии функции распределения молекул в шестимерном фазовом пространстве координат и скоростей. Новый принцип — принцип ассиметрии функции распределения для систем, состоящих из одинаковых частиц, который позволил построить локально-кинетическую теорию, описывающую и турбулентные течения, выдвинут В.В. Струминским.

В неравновесных и неоднородных потоках газа функция распределения молекул симметрична по отношению к одной из групп молекул и несимметрична по отношению к другим группам. В результате этого из функции F_N можно получить N одночастичных функций распределения, среди которых часть функций тождественно равна друг другу. Такие тождественные одночастичные функции относятся к определенной группе молекул. Из них можно построить одночастичные функции распределения уже не отдельных молекул, а целых групп молекул:

$$f_s(x, u, t) = n_s F_s = F_s + F_{s+1} + \dots + F_{s+k}.$$

Одночастичные групповые функции f_s определяют все основные характеристики молекулярных групп. Так, для s -й группы можно определить с помощью f_s следующие параметры:

плотность молекул в группе

$$n_s(x, t) = \int f_s(x, u, t) du ;$$

среднюю скорость молекул группы

$$\bar{u}_s(x, t) = \frac{1}{n_s} \int u f_s(x, u, t) du ;$$

среднюю кинетическую энергию хаотического движения молекул в группе

$$E_s(x, t) = \frac{1}{2n_s} \int (u - \bar{u}_s)^2 f_s(x, u, t) du.$$

Одночастичная функция распределения отдельных групп молекул является решением системы кинетических уравнений, которая по своему виду напоминает систему кинетических уравнений для смеси газов. Запишем эту систему уравнений следующим образом:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + u_k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = \sum_{\tau=1}^M (f_s' f_{\tau} - f_s f_{\tau}') g_{s\tau} b db d\varphi du_{\tau}, \quad (1.51)$$

где b , φ и $g_{s\tau}$ — параметры, которые характеризуют взаимодействие молекул и отдельных групп молекул.

Аналогия с системой кинетических уравнений для газовой смеси здесь лишь формальная, по существу система уравнений (1.51) не имеет с ней ничего общего. Действительно, у газовых смесей без химических реакций число молекул каждого сорта должно сохраняться. В нашем же случае число молекул в каждой группе может быть и переменным. Число молекул сохраняется только в тех группах, которые не взаимодействуют с соседними группами.

Для всей системы молекул в целом одночастичная функция распределения определяется следующим образом:

$$f(x, u, t) = \sum_{\tau=1}^M f_{\tau}(x, u, t),$$

где M — число групп молекул в системе. Эта функция определяет основные параметры газового потока, а именно:

плотность молекул в потоке газа

$$n(x, t) = \sum_{s=1}^M n_s(x, t);$$

средняя скорость газового потока

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{n(x, t)} \sum_{s=1}^M n_s(x, t) \bar{u}_s(x, t);$$

средняя кинетическая энергия нерегулярного движения

$$E(x, t) = \frac{1}{n(x, t)} \sum_{s=1}^M n_s(x, t) E_s(x, t).$$

Теперь без особых трудностей можно определить пульсационную скорость течения в турбулентном потоке, которая представляет собой разность между групповой скоростью молекул и средней скоростью течения, т.е.

$$u_s' = \bar{u}_s - u_s.$$

Можно убедиться в том, что выполняется условие

$$\sum_{s=1}^M n_s u_s' = 0,$$

т.е. среднее от пульсационной скорости равно нулю. Это условие здесь получается автоматически и является следствием определений пульсационной скорости и средней скорости течения.

Система уравнений (1.51) решалась во многих работах различными методами. Наибольшее распространение получил классический метод Чепмена—Энскога, в котором последовательно находятся приближенные решения более высокого порядка точности. Однако наилучшие результаты были получены с помощью метода, предложенного В.В. Струминским в работе [26]. В методе Чепмена—Энскога приходится вычислять высшие достаточно сложные приближения. Это обусловлено тем, что в нулевом приближении предполагается термодинамическое равновесие молекул и, следовательно, все интегралы столкновений равны нулю. В новом методе В.В. Струминского в нулевом приближении в состоянии термодинамического равновесия находится только одна группа молекул. Вследствие этого уже в нулевом приближении нулю равен только один интеграл столкновений, остальные интегралы точно определяются. В этом и состоит обобщение метода Чепмена—Энскога, предложенное В.В. Струминским для неравновесных систем молекул. Следует иметь в виду, что чем больше интегралы столкновений в нулевом приближении, тем дальше система молекул от состояния равновесия.

Применяя новый метод решения газокинетического уравнения (1.51), можно получить систему гидродинамических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_s}{\partial t} + u_{s,k} \frac{\partial n_s}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial u_{s,i}}{\partial t} + u_{s,k} \frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_k} &= - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P_s}{\partial x_i} + \sum_{l \neq s}^M B_{sl}^{(0)}; \\ \frac{\partial E_s}{\partial t} + u_{s,k} \frac{\partial E_s}{\partial x_k} &= \sum_{l \neq s}^M C_{sl}^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

В этих уравнениях опущены известные члены, связанные с тензором вязких напряжений и молекулярным потоком тепла. Параметры $B_{sl}^{(0)}$ и $C_{sl}^{(0)}$ в уравнениях (1.52) определяются здесь следующими выражениями:

$$\begin{aligned} B_{sl}^{(0)} &= \frac{3}{8} d_{sl} \left[\sqrt{\pi} \left(\omega + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{4\omega^2} \right) \operatorname{erf}(\omega) + \right. \\ &\left. + \left(1 + \frac{1}{2\omega^2} \right) e^{-\omega^2} \right] (u_{l,i} - u_{s,i}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{s,l}^{(0)} = & d_{sl} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(\omega + \frac{1}{2\omega} \right) \operatorname{erf}(\omega) + \frac{1}{2} e^{-\omega^2} \right] (E_s - E_l) + \\
& + \frac{3}{8} d_{sl} \left[\sqrt{\pi} \left(\omega + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{4\omega^2} \right) \operatorname{erf}(\omega) + \left(1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2\omega^2} \right) e^{-\omega^2} \right] \frac{1}{2} (u_l - u_s)^2,
\end{aligned}$$

где ω и d_{sl} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\omega = & \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{|u_l - u_s|}{\sqrt{E_s + E_l}}; \\
d_{sl} = & \left(\frac{8}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \rho_s \rho_l \sqrt{E_s + E_l} \frac{\sigma^2}{2m}.
\end{aligned}$$

Если разность относительных скоростей групп молекул мала по сравнению с тепловой скоростью молекул, то выражения для $B_{sl}^{(0)}$ и $C_{sl}^{(0)}$ существенно упрощаются, а сами уравнения (1.52) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_s}{\partial t} + u_{s,k} \frac{\partial n_s}{\partial x_k} &= 0; \\
\frac{\partial u_{s,i}}{\partial t} + u_{s,k} \frac{\partial u_{s,i}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P_s}{\partial x_i} &= \sum_{l \neq s} \frac{d_{sl}}{\rho_s} (u_{l,i} - u_{s,i}); \quad (1.53) \\
\frac{\partial E_s}{\partial t} + u_{s,k} \frac{\partial E_s}{\partial x_k} &= \sum_{l \neq s} \frac{d_{sl}}{\rho_s} (E_l - E_s) + \\
+ \sum_{l \neq s} \frac{d_{sl}}{\rho_s} \frac{E_s}{(E_s + E_l)} \frac{(u_l - u_s)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Эта система уравнений, описывающая отдельные реализации турбулентного течения, существенно отличается от аналогичных систем уравнений, полученных в рамках механики сплошных сред. Это отличие проявляется в том, что правая часть уравнений для количества движения и энергии содержит члены, которые описывают сложные процессы взаимодействия отдельных групп молекул. Такие взаимодействия связаны с междугрупповым обменом количества движения и энергии. Полностью турбулентное движение должно описываться не одной системой уравне-

ний типа (1.53), а различными системами таких уравнений. Если же мы хотим определить осредненные характеристики турбулентного течения газа, то для этого необходимо найти вероятность реализаций отдельных состояний системы молекул или установить закон осреднения.

В рассматриваемом случае имеется не одно статистическое состояние молекул, как в теории Больцмана, а M различных статистических состояний. Молекулы при этом распределены между этими статистическими состояниями по некоторым законам распределения. Для вероятности определенного состояния можно использовать полиномиальный закон распределения:

$$P_m(m_1, \dots, m_M) = \frac{m!}{m_1! \dots m_M!} P_1^{m_1} \dots P_M^{m_M},$$

где m_i — количество молекул в i -й группе; P_i — вероятность появления молекулы в i -й группе. При $m \rightarrow \infty$ на основе многомерной локальной теоремы теории вероятности полиномиальное распределение можно свести к нормальному распределению:

$$P_m(m_1, \dots, m_M) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} \right\}}{(2\pi)^{\frac{M-1}{2}} \sigma_1 \dots \sigma_{M-1}},$$

где

$$\alpha_i = m_i - m p_i; \quad \sigma_i^2 = m p_i.$$

С помощью этой функции распределения система гидродинамических уравнений для отдельных статистических состояний может быть осреднена, в результате чего может быть получена уже новая система гидродинамических уравнений для осредненного турбулентного течения газа. Запишем систему осредненных уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + u_k \frac{\partial E}{\partial x_k} &= (\sigma_{ik} - \tau_{ik}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sum_{s,l} d_{sl} \frac{(u_l - u_s)^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Эта система гидродинамических уравнений является аналогом уравнений Рейнольдса, которые опираются, как известно, на механику сплош-

ных сред. Однако от уравнений Рейнольдса ее отличает наличие дополнительного члена в уравнении для кинетической энергии турбулентности.

Для решения системы уравнений (1.54) необходимо задать начальные и краевые условия, а также определить пульсационные параметры турбулентного течения, которые, в свою очередь, определяют тензор турбулентного трения. Чтобы определить пульсационные параметры течения, можно, как обычно, использовать разложение мгновенных параметров течения на пульсационную и осредненную части, т.е.

$$\rho_s = \rho_0; u_s = \bar{u} + u'_s; P_s = \bar{P} + P'_s.$$

Если теперь эти разложения подставить в уравнения (1.53), а затем вычесть соответствующим образом уравнения (1.54), то получим уравнение, которое описывает пульсационное движение турбулентного течения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_{s,i}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_{s,i}}{\partial x_k} + u'_{s,k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'_s}{\partial x_i} = \\ = \sum_{l \neq s}^M d_{sl} (u_{l,i} - u_{s,i}) + \nu_s \frac{\partial^2 u'_s}{\partial x_k \partial x_k}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Исследование возможных решений уравнения (1.55), где $s = 1, \dots, M$, является теперь центральной проблемой в рассматриваемой теории турбулентности. От успешного разрешения этой проблемы зависит как дальнейшее развитие самой теории турбулентности, так и возможность ее применения для решения прикладных задач на более рациональной основе, чем полуэмпирические теории.

Способ линеаризации уравнений пульсационного движения газа в турбулентном течении предложен в работе [27]. Для линеаризации использовалось преобразование Хопфа, которое для рассматриваемого здесь случая должно иметь вид

$$u'_{s,i} = -a \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \varphi_s^{-1}.$$

Это преобразование позволяет с достаточно высокой степенью точности привести уравнение (1.55) к линейному виду:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \frac{P'_s}{\rho} \varphi_s = \sum_{l \neq s}^M d_{sl} (\varphi_l - \varphi_s) + \nu_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2}.$$

Пульсация давления здесь играет роль внешнего воздействия, порождающего пульсации полей скорости. Ее можно задать, например, в виде

$$P'_s(x) = \gamma \exp(-\gamma^2 x),$$

где γ – случайный параметр с нормальным законом распределения, нулевым средним и дисперсией $\bar{\gamma}^2 = \sigma^2$.

Интересный пример использования новой теории турбулентности для решения прикладных задач был приведен в работе [25], где решалась задача определения осредненной скорости турбулентного течения несжимаемой жидкости в плоском канале. Так как турбулентный поток слабо зависит от начальных условий, то зависимость пульсационной скорости турбулентного течения учитывают, опуская в уравнении (1.55) явную зависимость от времени. Опустив также и квадратичные члены скорости, как малые, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'_s}{\partial x} = \sum_{l \neq s} d_{sl} (u'_l - u'_s) + \nu \frac{\partial^2 u'_s}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u'_s}{\partial x} + \frac{\partial v'_s}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где

$$d_{sl} = \delta^2 \sqrt{\frac{E}{m}} \left(1 + \frac{E'_l + E'_s}{4E} \right).$$

При линеаризации первого члена в правой части первого уравнения можно получить систему уравнений уже следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u'_s}{\partial y^2} - k_0^2 u'_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P'_s}{\partial x}; \\ \frac{\partial u'_s}{\partial x} + \frac{\partial v'_s}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где

$$k_0^2 = \frac{Md}{\mu}; \quad d = \frac{8}{3} n \rho \sqrt{\frac{E}{m}} \sigma^2.$$

Из первого уравнения с учетом краевого условия на стенке канала получаем следующее соотношение:

$$u'_s(t) = [k_0^2 \mu \operatorname{ch}(k_0 h)]^{-1} \frac{\partial P'_s}{\partial x} [\operatorname{ch}(k_0 y) - \operatorname{ch}(k_0 h)].$$

Из второго уравнения находим соотношение, которому должна удовлетворять v'_s :

$$v'_s(y) = \alpha^2 [k_0 \mu \operatorname{ch}(k_0 h)]^{-1} \frac{\partial P'_s}{\partial x} \int_0^y A(y) dy,$$

где

$$A(y) = \text{ch}(k_0 y) - \text{ch}(k_0 h).$$

Для осредненного движения газа в канале можно записать систему уравнений

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{u'_s u'_s}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_s v'_s}}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial \overline{u'_s v'_s}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_s v'_s}}{\partial y} = 0.$$

Второе уравнение удовлетворяется тождественно, решение же первого уравнения можно представить в виде

$$U = \frac{1}{\mu} \int_{-h}^y dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \left\{ \frac{\partial \overline{u'_s u'_s}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_s v'_s}}{\partial y} \right\} \right]$$

Воспользуемся законом осреднения:

$$(\overline{\dots}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) d\alpha,$$

и для подынтегральной функции в формуле для вычисления осредненной скорости турбулентного течения получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{\partial \overline{u'_s u'_s}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_s v'_s}}{\partial y} \right) = \frac{1}{k_0^4 \mu^2 \text{ch}^2(k_0 h)} \alpha \left(\frac{\partial P'_s}{\partial x} \right)^2 \times$$

$$\times \left[A'(y) \int_0^y A(y') dy' - A^2(y) \right].$$

Подставив эту функцию и выполнив операцию интегрирования, придем к следующему выражению для осредненной скорости турбулентного течения в канале:

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[1 - \frac{\rho(1 + \text{ch}^2 k_0 h)}{k_0^4 \mu^2 \text{ch}^2 k_0 h} \times \right.$$

$$\times \left(\alpha \frac{\partial P'_s}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^{-1} \left. \right] (y^2 - h^2) + \frac{\rho}{k_0^6 \mu^3 \text{ch} k_0 h} \left(\alpha \frac{\partial P'_s}{\partial x} \right)^2 \times$$

$$\times [k_0 h \text{sh}(k_0 h) - k_0 y \text{sh}(k_0 y) - 4(\text{ch} k_0 h - \text{ch} k_0 y)].$$

Полученное выражение для осредненной скорости турбулентного течения

в плоском канале показывает, что профиль скорости состоит из двух слагаемых: первое слагаемое имеет характер квадратичной зависимости, второе характеризуется гиперболической зависимостью, образованной гиперболическими синусом и косинусом. Вблизи стенки основную роль играет параболический профиль скорости течения, который описывает ламинарный подслои течения, впервые обнаруженный в опытах Никурадзе. Выполненные В.В. Струминским расчеты являются первым теоретическим обоснованием этого экспериментального факта.

Гиперболический профиль скорости турбулентного течения, т.е. второе слагаемое, описывает течение газа в окрестностях ядра потока. Этот результат также хорошо согласуется с экспериментальными данными, в том числе и с полученными в опытах Никурадзе.

Приведенный здесь пример расчета параметров турбулентного течения демонстрирует возможности нового подхода к описанию турбулентных процессов в газовых потоках. В настоящее время подобного рода примеров пока мало, однако дальнейшее развитие этого направления в теории турбулентности и его использование уже сейчас для решения прикладных задач представляется перспективным.

1.3. Перенос и рассеяние высокодисперсных аэрозольных частиц в турбулентных потоках газа

Высокодисперсные частицы, размер которых не превышает 1 мкм, имеют малое время релаксации ($\sim 3 \cdot 10^{-6}$ с) и небольшую скорость гравитационного оседания в спокойной среде. Такие частицы полностью увлекаются турбулентными образованиями всех масштабов вплоть до самых малых, поэтому их поведение в турбулентном газовом потоке отождествляется с поведением непрерывно распределенной газовой примеси.

Высокодисперсные аэрозольные частицы играют большую роль во многих технологических и природных процессах. Так, мелкие аэрозольные частицы являются основными носителями атмосферного электричества [28] и радиоактивности [29]. Такие частицы выполняют роль ядер конденсации атмосферной влаги и принимают самое активное участие в процессах облакообразования. Изменение оптических свойств атмосферы также обусловлено поведением атмосферных аэрозольных частиц. Частицы аэрозоля участвуют в радиационных процессах в атмосфере Земли, изменяя ее энергетику и влияя, таким образом, на климатообразующие процессы. Большая часть загрязняющих атмосферу веществ, в том числе и радиоактивных, находится в воздухе в виде мелких частиц. Размеры частиц загрязняющих веществ определяют условия их проникновения в дыхательные органы человека и, следовательно, определяют их токсические свойства. Роль высокодисперсных аэрозольных частиц не ограничивается перечисленными выше технологическими и природными процессами, однако и этого достаточно, чтобы понять,

насколько важно уметь правильно прогнозировать и моделировать их поведение в турбулентных потоках газа.

Как уже указывалось, поведение высокодисперсных частиц в турбулентных газовых потоках отождествляется с поведением газовой примеси. Однако необходимо учитывать, что аналогия с переносом и рассеянием газовой примеси для высокодисперсных частиц не может быть полной, так как в турбулентной среде с мелкими частицами могут происходить специфические процессы, приводящие к изменению самих частиц. Например, при переносе потоком воздуха мелкие частицы могут объединяться в более крупные агрегаты, частицы могут захватывать окружающие их газовые молекулы, увеличиваясь в размерах. Специфический характер может носить и взаимодействие мелких частиц с твердыми поверхностями, которые ограничивают турбулентное течение. Таким образом, применяя аналогию с переносом и рассеянием газовой примеси, необходимо проанализировать возможность протекания специфических для мелких частиц процессов, оценить их роль и внести в математические модели соответствующие поправки.

Если спецификой дискретных частиц можно пренебречь, то распространение примеси в турбулентном течении газа может быть описано с позиций механики сплошных сред уравнением неразрывности, которое для данной задачи имеет следующий вид:

$$\partial c / \partial t + u_k (\partial c / \partial x_k) = \nu_c \Delta c, \quad (1.56)$$

$c \equiv c(x, t)$ — мгновенная концентрация непрерывно распределенной в среде примеси в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t ; $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор мгновенной скорости течения в точке x в момент времени t ; ν_c — коэффициент молекулярной диффузии высокодисперсных аэрозольных частиц. Если известны скорость течения u и коэффициент молекулярной диффузии ν , то при задании начальных и краевых условий это уравнение может быть решено, причем решение будет единственным. Коэффициент молекулярной диффузии можно сравнительно просто определить с помощью газокинетических соотношений. Если примесь состоит из высокодисперсных частиц различных размеров, газокинетические соотношения позволяют определить средний эффективный коэффициент молекулярной диффузии, вычисляя для этого коэффициенты диффузии для отдельных фракций частиц с одинаковыми или близкими размерами, а затем усредняя полученные значения с учетом высокого вклада каждой фракции в общем балансе частиц.

Значительно сложнее обстоит дело с заданием скорости течения. В турбулентном потоке газа эта скорость представляет собой случайную величину, состоящую из детерминированной осредненной скорости течения и случайной пульсационной скорости. Присутствие случайных величин в уравнении (1.56) приводит к тому, что определяемая из уравнения концентрация непрерывно распределенной в пространстве примеси должна быть величиной случайной, состоящей из детерминированной величины

осредненной концентрации $\bar{c}(x, t)$ и случайной величины пульсации концентрации $c'(x, t)$. Таким образом, поле концентрации примеси в турбулентном потоке является случайным и найти его точные мгновенные значения не представляется возможным. Для описания распределения случайных величин используют наборы осредненных параметров: математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение, асимметрию, эксцесс и т.п. Следует иметь в виду, что ни один конечный набор таких параметров не может достоверно охарактеризовать распределение случайной величины, однако для решения большинства практических вопросов вполне достаточно ограничиться рассмотрением набора из нескольких первых осредненных параметров. Как правило, вполне достаточно найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Моделирование переноса и рассеяния примеси в турбулентном потоке представляет собой частный случай более общей задачи, связанной с описанием параметров турбулентного течения. В связи с этим основные положения, методы и приемы описания турбулентных течений, рассмотренные в предыдущем разделе, остаются справедливыми и при решении задачи распространения примеси.

Применяя операцию осреднения к уравнению (1.56), получаем уравнение для математического ожидания концентрации примеси или для осредненной концентрации. Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u'_k c' \rangle}{\partial x_k} = \nu_c \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (1.57)$$

В этом уравнении появляется новая величина $\langle u'_k c' \rangle$, представляющая собой турбулентный поток примеси. Исследования показали, что этот поток намного превышает поток примеси, обусловленный молекулярными процессами. По этой причине при описании переноса и рассеяния примеси в турбулентном потоке газа из уравнения (1.57) исключают член в правой части.

Для замыкания уравнения (1.57) в течение длительного времени исследователи параметризацию, предложенную Буссинеску:

$$\overline{u'_k c'} = -D_{ik} (\bar{c} / \partial x_k),$$

где D_{ik} — коэффициенты турбулентной диффузии, которые в наиболее общем случае образуют тензор второго ранга. Дальнейшее развитие такого подхода к замыканию уравнения (1.57) было дано Прандтлем, Карманом и Тейлором, предложившими соответствующие полуэмпирические теории.

Стремление расширить область применения методов моделирования турбулентных течений и распространения примесей привело к разработке и использованию в прикладных задачах методов замыкания второго порядка. Применительно к уравнениям Рейнольдса эти методы

достаточно подробно рассмотрены в предыдущем разделе. Здесь же мы остановимся на особенностях моделей второго порядка при решении задач распространения примеси в турбулентном потоке газа. примеси в турбулентном потоке газа.

Для турбулентного потока примеси из уравнения неразрывности и уравнений Навье – Стокса можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i' c' \rangle}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \langle u_i' c' \rangle}{\partial x_k} + \left(\langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \langle u_k' c' \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{1}{\rho} \langle c' \frac{\partial P'}{\partial x_i} \rangle - \frac{\partial \langle u_i' u_k' c' \rangle}{\partial x_k} + \\ + \nu_c \left\langle u_i' \frac{\partial^2 c'}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle + \nu \left\langle c' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить уравнение и для среднего квадратического отклонения концентрации примеси от металлического ожидания. Это уравнение запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c'^2 \rangle}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \langle c'^2 \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u_k' c' \rangle \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} = \nu_c \frac{\partial^2 \langle c'^2 \rangle}{\partial x_k \partial x_k} - \\ - 2\nu_c \left\langle \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k} \right\rangle - \frac{\partial \langle u_k' c'^2 \rangle}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

В полученные уравнения для $\langle u_i' c' \rangle$ и $\langle c'^2 \rangle$ входят неизвестные величины двух типов. К первому типу следует отнести диссипативные члены

$$\begin{aligned} \nu_c \left\langle u_i' \frac{\partial^2 c'}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle + \nu \left\langle c' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle ; \\ \nu_c \frac{\partial^2 \langle c'^2 \rangle}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu_c \left\langle \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ко второму типу относятся члены, зависящие от поля пульсации давления в турбулентном течении:

$$\frac{1}{\rho} \left\langle c' \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Третью группу неизвестных членов образуют ковариации третьего порядка, например $\langle u_i' u_k' c' \rangle$.

Для аппроксимации диссипативных членов используется метод инвариантного моделирования. Согласно этому методу аппроксимационные соотношения должны обладать всеми свойствами исходных выражений и величин. Так, должны сохраняться тензорные свойства, приближенные аппроксимационные соотношения должны иметь ту же размерность, что и исходные величины.

Тензорная величина

$$\left\langle \frac{\partial c^f}{\partial x_k} \frac{\partial u_i^f}{\partial x_k} \right\rangle$$

имеет нечетное число индексов, поэтому при зеркальном отражении эта величина должна менять знак на противоположный. В то же время предположение об изотропности турбулентности должно приводить к неизменности этого тензора при зеркальном отражении. Следовательно, тензор должен быть равен нулю.

Для аппроксимации величины

$$\frac{1}{\rho} \left\langle c^f \frac{\partial P^f}{\partial x_i} \right\rangle$$

используют соотношения двух типов. Первый тип предложен Дональдсоном и имеет диффузионный характер. Само соотношение можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} \left\langle c^f \frac{\partial P^f}{\partial x_i} \right\rangle = -C_1 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle u_i^f c^f \rangle}{\partial x_k} \right),$$

где b – кинетическая энергия турбулентности; ϵ – скорость диссипации энергии турбулентности. Аппроксимационное выражение второго типа можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \left\langle c^f \frac{\partial P^f}{\partial x_i} \right\rangle = -\frac{1}{T} \langle u_i^f c^f \rangle - C_2 R_i.$$

Здесь первое слагаемое обусловлено процессами нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций. Такие процессы приводят к возвращению изотропии турбулентного потока примеси. Временной масштаб T с точностью до постоянного множителя равен отношению кинетической энергии турбулентности к скорости ее диссипации. Второе слагаемое представляет собой полную скорость порождения потока примеси под действием средней деформации течения. Для этого слагаемого использовалось выражение

$$R_i = -C_3 \langle u_k^f c^f \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - C_4 \langle u_k^f c^f \rangle \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}.$$

Ковариационные члены третьего порядка, которые здесь описывают перенос турбулентных потоков примеси из одной области пространства в другую без их генерации и затухания, аппроксимируют, как правило, выражениями, имеющими диффузионный характер. На основе метода инвариантного моделирования для ковариаций третьего порядка были получены следующие соотношения:

$$-\frac{\partial \langle u_i' u_k^o c' \rangle}{\partial x_k} = C_5 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle u_i' c' \rangle}{\partial x_k} \right);$$

$$-\frac{\partial \langle u_k' c'^2 \rangle}{\partial x_k} = C_5 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \frac{\partial \langle c'^2 \rangle}{\partial x_k} \right).$$

Систему дифференциальных уравнений, моделирующую процессы переноса и рассеяния примеси в турбулентном потоке газа, теперь можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_k' c' \rangle}{\partial x_k} = 0;$$

$$\frac{\partial \langle u_i' c' \rangle}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \langle u_i' c' \rangle}{\partial x_k} + \langle u_i^o u_k' \rangle \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} =$$

$$= \left[(C_3 - 1) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + C_4 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right] \langle u_k' c' \rangle + C_6 \frac{\epsilon}{b} \langle u_i' c' \rangle;$$

$$\frac{\partial \langle c'^2 \rangle}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \langle c'^2 \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u_k' c' \rangle \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} +$$

$$+ C_7 \frac{\epsilon}{b} \langle c'^2 \rangle = 0.$$

Здесь C_i представляют собой эмпирические постоянные величины, которые определяют путем экспериментальных наблюдений за переносом примеси турбулентными течениями.

1.4. Движение отдельных грубодисперсных аэрозольных частиц в турбулентных потоках газа

При малых концентрациях аэрозольных частиц в турбулентной среде процессы их гидродинамического взаимодействия и столкновения становятся маловероятными, а движение каждой отдельно взятой частицы происходит независимо от поведения других частиц в потоке газа. В таких случаях вместо "коллектива" частиц в потоке газа можно ограничиться изучением поведения одной частицы.

Движение частицы в газовом потоке определяется гидродинамическими и массовыми силами. Массовые силы обусловлены физическими внешними полями, например гравитационными, электромагнитными, электростатическими и др. Гидродинамические силы обусловлены взаимодействиями частицы с несущими их потоками. К такого рода силам следует отнести силы сопротивления трения и давления, а также силы, создаваемые продольными и поперечными градиентами давления и температуры газовой среды, и подъемные инерционные силы, связанные с ускорением частицы в потоке газа. Кроме того, при движении в потоке жидких или газовых частиц на их движение могут существенно влиять циркуляционные движения внутри частицы. В общем случае степень воздействия гидродинамических сил на дискретную частицу зависит от масштабов турбулентного течения, прежде всего микро- и макромасштабов турбулентности, а также от размера частиц, скорости течения и многих других факторов.

Уравнение движения дискретной частицы можно представить следующим образом:

$$m \frac{dv}{dt} = \Sigma F_i,$$

где m – масса частицы; v – вектор скорости движения частицы; $\Sigma F_i = F_C + F_M + F_K + F_U + F_g + F_T + \dots$ – сумма действующих на частицу сил.

Сила аэродинамического сопротивления F_C всегда направлена в сторону, противоположную вектору скорости относительного движения частицы. Эта сила всегда стремится выравнять скорость движения частицы со скоростью несущего ее газового потока. В наиболее общем виде силу аэродинамического сопротивления можно записать так:

$$F_C = - \frac{1}{2} \rho_a S_m C_x (v - u) |v - u|,$$

где C_x – коэффициент сопротивления; S_m – площадь миделевого сечения частицы. Здесь использовано понятие обобщенного коэффициента сопротивления, которое эквивалентно сопротивлению твердой сферы такого же объема, как и рассматриваемая частица. Коэффициент сопротивления не является постоянной величиной. Он зависит от постоянной Рейнольдса Re , которая для данного случая определяется следующим образом:

$$Re = \rho_a |u - v| d / \mu,$$

где d – диаметр частицы; v – скорость частицы; ρ_a , μ и u – соответственно плотность, вязкость и скорость газового потока. В диапазоне $10^{-4} < Re < 1,0$ применима формула Стокса:

$$C_x = 24/Re.$$

При выводе этой формулы используются уравнения Навье—Стокса, в которых исключены инерционные члены. Учет таких инерционных членов был выполнен Озееном [30], который получил для коэффициента сопротивления соотношение

$$C_x = (1 + 0,188 \text{ Re})^{24}/\text{Re}.$$

Достаточно часто силу аэродинамического сопротивления рассчитывают с привлечением различных эмпирических зависимостей для коэффициента сопротивления. Так, в диапазоне $10 < \text{Re} < 10^3$ применима эмпирическая формула следующего вида:

$$C_x = 12/\sqrt{\text{Re}}.$$

В работе [1] предложена формула вида

$$C_x = \exp [3,271 - 0,8893 \ln \text{Re} + 0,034 (\ln \text{Re})^2 + 0,0144 (\ln \text{Re})^3].$$

Эта зависимость применима в диапазоне $1 < \text{Re} < 2 \cdot 10^4$.

Сопротивление жидких частиц в потоке газа может существенно отличаться от сопротивления твердых частиц тех же размеров. Такое различие объясняется деформацией жидкой частицы, а также циркуляционным течением внутри самой частицы и процессами тепло- и массообмена, возникающими в процессе испарения. Существенную роль могут играть и нестационарные процессы. Так, при деформации жидкой частицы могут возникать вынужденные колебания формы частицы, нарастающие со временем. Коэффициент сопротивления жидкой частицы в потоке газа определяют [32] следующим образом:

$$C_x = C_x^* C_{x0},$$

где C_{x0} — коэффициент сопротивления твердого аналога рассматриваемой жидкой частицы. На рис. 1.2 показаны результаты измерения коэффициента сопротивления водяных капель, падающих в воздухе. В этих экспериментах эффекты внутрикапельной циркуляции и нестационарной деформации были несущественны, поэтому коэффициент сопротивления зависел только от одного параметра — постоянной Вебера We ,

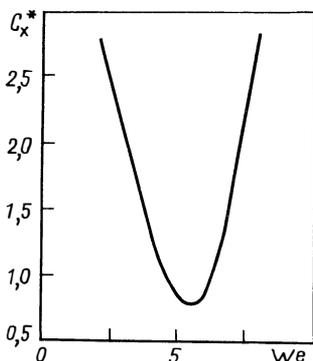


Рис. 1.2. Зависимость относительного коэффициента сопротивления жидкой частицы от постоянной Вебера

которую определяют из выражения

$$We = \rho_a (u - v)^2 d / \sigma,$$

где σ – поверхностное напряжение.

При стационарном обтекании жидкой частицы маловязкой жидкостью может возникнуть внутрикапельное циркуляционное течение, которое заметно влияет на коэффициент сопротивления. Воздействие циркуляционного внутрикапельного движения на сопротивление частицы характеризуется постоянной Чао:

$$Ch = \left(2 + 3 \frac{\mu_T}{\mu} \right) / \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_T}{\mu} \frac{\rho_T}{\rho}} \right),$$

где μ, μ_T – вязкость соответственно несущего газового потока и жидкости; ρ, ρ_T – плотность соответственно несущего газа и жидкости частицы.

Эмпирическая зависимость для расчета коэффициента сопротивления жидкой частицы в потоке газа с учетом влияния циркуляционного внутрикапельного движения предложена в работе [33]:

$$C_x = \frac{2}{3} Ch \left(1 + \frac{0,81}{\sqrt{Re}} \right) \frac{24}{Re}.$$

Эта зависимость применима для интервалов $150 < Re < 950$ и $2,27 < Ch < 3,45$.

Адамар и Рыбчинский [30] теоретически решили задачу о влиянии внутрикапельного движения на сопротивление в потоке газа при $Re < 1$. Для C_x в этом случае предлагается следующая формула:

$$C_x = \frac{\left(2 - 3 \frac{\mu_T}{\mu} \right)}{\left(3 + 3 \frac{\mu_T}{\mu} \right)} \frac{24}{Re}.$$

Достаточно подробно особенности поведения жидких частиц в газовых потоках рассмотрены в работах [30, 35]. Эти особенности приводят к тому, что коэффициенты аэродинамического сопротивления твердых сферических частиц и жидких капельных частиц в градиентных потоках газа различаются. Визуальные исследования показали, что форма капли с момента ее появления в потоке газа значительно меняется. Степень деформации капли зависит от ее размера. Деформация формы представляет собой нестационарный процесс, более того, исследования показали, что этот процесс является пульсирующим.

В потоке газа с неравномерным распределением скоростей течения частица может совершать вращательное движение относительно собствен-

ного центра масс. В этом случае на частицу действует сила Магнуса F_M , которая стремится переместить частицу в поперечном направлении. Для определения угловой скорости частицы воспользуемся уравнением сохранения момента количества движения:

$$J (d\omega/dt) = L (\omega - \omega_a),$$

где $J = 0,1 V d^2 \rho$ – момент инерции частицы; $V = 1/6 \pi d^3$ – объем частицы; L – вращающий момент, который определяется как $L = -\pi \mu d^3 \omega_a$; ω_a – угловая скорость газового потока. Для погранично-го слоя можно принять соотношение

$$\omega_a = 0,5 (du/dz).$$

Теперь, воспользовавшись уравнением сохранения момента количества движения, найдем угловую скорость вращения твердой частицы в потоке газа:

$$\omega_k = \omega_a \left[1 - \exp \left(\frac{-60 \mu t}{d^2 \rho} \right) \right].$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что угловая скорость вращения твердой частицы в потоке газа мало отличается от угловой скорости вращения газа в этой точке при отсутствии твердой частицы. Теперь проекции F_M на координатные оси можно представить следующим образом:

$$F_M = 1/8 \pi^2 d^3 \rho (u - v) \omega_k.$$

Сила Кориолиса действует на частицу под прямым углом к вектору относительной скорости движения частицы в потоке газа. Если скорость частицы меньше скорости внешнего течения, то сила Кориолиса действует в сторону центра кривизны линии тока течения газа, в противном случае она действует в сторону от центра кривизны. Вычислить силу Кориолиса можно по формуле

$$F_K = -2m\omega_a (u - v),$$

где ω_a – угловая скорость вращения газового потока относительно центра кривизны линии тока.

Сила инерции, обусловленная реакцией частицы на изменения скорости внешнего течения, составляет

$$F_H = -m \frac{d(u - v)}{dt}.$$

Кроме перечисленных выше сил на твердую частицу в потоке газа могут действовать и другие силы гидродинамической природы. Так, на частицу, форма которой не симметричная, в отсутствие вращения действует подъемная сила Жуковского.

При медленном относительном движении частицы в газовом потоке на нее действует сила вязкого последействия или сила Бассэ, которая определяется следующим выражением:

$$F_B = \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho_a \mu} \int_{t_0}^t \frac{d(u-v)}{d\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}.$$

Искажение внешнего газового течения при обтекании частицы приводит к появлению силы, необходимой для ускорения присоединенной массы:

$$F_{\Pi} = \zeta m \frac{d(u-v)}{dt},$$

где ζ — коэффициент присоединенной массы. Для твердой сферической частицы коэффициент присоединенной массы равен 0,5. Для частиц в форме плоского диска, двигающегося перпендикулярно к своей плоскости, коэффициент присоединенной массы равен уже 10. Присоединенной может оказаться не только масса окружающего частицу газа, но и вихри, которые возникают во внешнем потоке вследствие вращения частицы.

Известно, что очень мелкие частицы в неравномерно нагретом потоке газа перемещаются в сторону меньших значений температуры. Этот эффект получил название термофореза. Возникновение термофореза обусловлено взаимодействием газовых молекул с частицами, при этом вследствие температурной неоднородности потока молекулы имеют различную среднюю скорость движения. Проведенные исследования показали, что силы термофореза пропорциональны градиенту температуры в газе. Кроме того, эти силы зависят от размера частиц, от коэффициентов теплопроводности газа и вещества частицы, а также от отношения длины свободного пробега молекул газа λ к радиусу частицы r . Выражение для силы термофореза, учитывающее скачок температур на границе раздела "частица—газ", получено в работе [37]:

$$F_{TF} = - \frac{3\pi\mu^2 r}{\rho T} \left[\frac{8\lambda + \lambda_T + 2C_t(\lambda/r)\lambda_T}{2\lambda + \lambda_T + 2C_t(\lambda/r)\lambda_T} \right] \text{grad } T,$$

где C_t — коэффициент тепловой аккомодации. Более простое выражение для $\lambda/r \ll 1$ и $\lambda_T/\lambda \ll 16$ было предложено в работе [38]:

$$F_{TF} = - \frac{9\pi\mu^2 r}{\rho T} \left(\frac{\lambda}{2\lambda + \lambda_T} \right) \text{grad } T.$$

Силы термофореза играют заметную роль только для частиц размером менее 2 мкм, для крупных частиц размером более 10 мкм силы термофореза несущественны [39].

Рассмотренные здесь силы, действующие на частицу, не являются единственно возможными. Так, в электрофильтрах поведение твердых и жидких частиц определяется силами электростатической природы. Если частицы несут на себе электрический заряд, то на них может воздействовать сила электромагнитной природы. В то же время не все силы, в том числе и перечисленные выше, в каждом конкретном случае проявляют себя в одинаковой мере. Их влияние на характер движения частицы зависит от многих факторов, связанных с характером течения газа, содержания в нем дискретных частиц и т. д.

Рассмотрим более подробно случай медленного относительно газовой среды движения твердой частицы, который был проанализирован в [40]. Уравнение медленного движения было получено Бассэ, Буссинеску и Озееном. В [40] обобщены эти результаты для газового потока с переменной скоростью течения:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d^3 \rho}{6} \frac{d^2 X_i}{dt^2} = & 3\pi \mu d \left[u_i(X, t) - \frac{dX_i}{dt} \right] - \\ & - \frac{\pi d^3 \rho_a}{6} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\pi d^3 \rho_a}{6} \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{d^2 X_i}{dt^2} \right) + \\ & + \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \rho_a \mu} \int_{t_0}^t \frac{d(u_i - v_i)}{d\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{t - \eta}} + \\ & + \frac{\pi d^3}{6} (\rho - \rho_a) g_i. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения представляет собой результирующую силу, действующую на частицу. Результирующая сила складывается из силы аэродинамического сопротивления, которая в уравнении медленного движения записана в форме Стокса, а также из силы, обусловленной градиентом давления в потоке газа, силы ускорения присоединенной массы, силы Бассэ и внешней потенциальной силы, равной весу частицы за вычетом силы Архимеда или выталкивающей силы.

Предположим, что частица не влияет на несущий ее поток газа. Это предположение позволяет записать градиент давления в окрестности твердой частицы как

$$-\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\mu}{\rho_a} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}.$$

Так как скорость внешнего относительно частицы потока зависит от пространственных координат и от времени, то должно выполняться соотношение

$$\frac{du_i [X(t), t]}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{dX_k}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_{x=X(t)}$$

Теперь для градиента давления, действующего на твердую частицу, можно записать следующее выражение:

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)_{x=X(t)} = \rho_a \left[u_k(X, t) - \frac{dX_k}{dt} \right] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_{x=X(t)} + \rho_a \frac{du_i(X, t)}{dt}.$$

Первые два члена в правой части этого выражения представляют собой поправку, впервые предложенную в работе [41]. С учетом этой поправки уравнение медленного относительно внешнего газового потока движения твердой сферической частицы примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d^3 \rho}{6} \frac{d^2 X_i}{dt^2} &= 3\pi \mu d \left(u_i - \frac{dX_i}{dt} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\pi d^3 \rho_a}{6} \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{d^2 X_i}{dt^2} \right) + \\ &+ \frac{\pi d^3 \rho_a}{6} \left[\frac{du_i}{dt} + \left(u_k - \frac{dX_k}{dt} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{\rho_a} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right] + \frac{3}{2} d^2 \sqrt{\pi \mu \rho_a} \int_{t_0}^t \left(\frac{du_i}{d\eta} - \frac{d^2 X_i}{d\eta^2} \right) \times \\ &\times \frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}} + \frac{\pi d^3}{6} (\rho - \rho_a) g_i. \end{aligned}$$

Уравнение движения частицы можно существенно упростить, если учесть следующие соотношения:

$$\partial u_i / \partial \bar{x} \ll 1; \quad \partial^2 u_i / \partial \bar{x}^2 \ll 1,$$

где

$$\bar{x} = x/d.$$

Выполнение этих соотношений позволяет записать уравнение движения частиц малого размера в турбулентном потоке газа следующим образом:

$$\frac{dw_i}{dt} + aw_i + b \int_{t_0}^t \frac{dw_i(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}} = - \frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2} \rho_a} \frac{du_i}{dt}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$w_i(t) = \frac{dX_i}{dt} - u_i[X(t), t] - \frac{(\rho - \rho_a)}{\left(\rho + \frac{1}{2}\rho_a\right)^a} \frac{g_i}{a};$$

$$a = \frac{18\mu}{d^2 \left(\rho + \frac{1}{2}\rho_a\right)};$$

$$b = \frac{9}{\left(\rho + \frac{1}{2}\rho_a\right)} \sqrt{\frac{\mu\rho_a}{\pi d^2}}.$$

Рассмотрим решение уравнения медленного относительно потока газа движения твердой частицы, принимая t_0 равным $-\infty$. Интегро-дифференциальное уравнение движения частицы решается с помощью преобразования Фурье, т. е. путем представления функции $W_i(t)$ и $u_i(t)$ в виде интегралов:

$$w_i(t) = \int_0^\infty [\tilde{w}_i(\omega) \cos \omega t + \tilde{w}_i^*(\omega) \sin \omega t] d\omega;$$

$$u_i(t) = \int_0^\infty [\tilde{u}_i(\omega) \cos \omega t + \tilde{u}_i^*(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

В дальнейшем образы Фурье $\tilde{u}_i(\omega)$ и $\tilde{u}_i^*(\omega)$ функции $u_i(t)$ будем считать известными.

Подставив разложения скорости течения $u_i(t)$ и скорости частицы $W_i(t)$ в интегралы Фурье в уравнение движения и проведя элементарные преобразования, получим для $\tilde{W}_i(\omega)$ и $\tilde{W}_i^*(\omega)$ систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{w}_i(\omega) - \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{w}_i^*(\omega) = \\ & = - \frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2}\rho_a} \omega \tilde{u}_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{w}_i(\omega) + \left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{w}_i^*(\omega) = \\ & = - \frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2}\rho_a} \omega \tilde{u}_i^*. \end{aligned}$$

Решение этой алгебраической системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$w_i(\omega) = - \frac{(\rho - \rho_a)}{\left(\rho + \frac{1}{2} \rho_a\right)} \omega \frac{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{u}_i(\omega)}{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2 + \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2} -$$

$$- \frac{(\rho - \rho_a)}{\left(\rho + \frac{1}{2} \rho_a\right)} \omega \frac{\left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{u}_i^*(\omega)}{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2 + \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2},$$

$$\tilde{w}_i^*(\omega) = - \frac{(\rho - \rho_a)}{\left(\rho + \frac{1}{2} \rho_a\right)} \omega \frac{\left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{u}_i(\omega)}{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2 +}$$

$$\rightarrow \frac{(\rho - \rho_a)}{\left(\rho + \frac{1}{2} \rho_a\right)} \times$$

$$\frac{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right) \tilde{u}_i^*(\omega)}{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2 + \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2}.$$

В турбулентном потоке газа скорость течения — случайная величина, свойства которой могут быть охарактеризованы корреляционной функцией

$$R_{ij}(t) = \langle u_i(\tau) u_j(t - \tau) \rangle / \langle u_i(\tau) u_j(\tau) \rangle.$$

Скобками $\langle \rangle$ обозначена операция временного осреднения. Как правило, временное осреднение предполагает интегрирование по времени в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Однако в турбулентных потоках корреляционные зависимости наблюдаются на конечных временных интервалах, равных как минимум интегральному временному масштабу турбулентности T . В связи с этим при временном осреднении по бесконечно большому временному интервалу интегрирование за пределами временного масштаба турбулентности приводит к нулевым значениям и вклада в корреляционную функцию не дает. Таким образом, при осреднении можно заменить бесконечно большой интервал интегрирования конечным интервалом времени. Для $\langle u_i(\tau) u_j(t - \tau) \rangle$ можно записать соотно-

шение

$$\langle u_i(\tau) u_j(\tau - t) \rangle = \frac{1}{2T - t} \int_{-T}^{+T} u_i(\tau) u_j(\tau - t) d\tau.$$

Нетрудно показать, что выполняется соотношение следующего вида:

$$\langle u_i(\tau) u_j(\tau - t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} [\tilde{u}_i(\omega) \tilde{u}_j(\omega) - \tilde{u}_i(\omega) \tilde{u}_j^*(\omega) + \tilde{u}_i^*(\omega) \tilde{u}_j(\omega) + \tilde{u}_i^*(\omega) \tilde{u}_j^*(\omega)] d\omega.$$

Из этого соотношения, в частности, следует выражение для $\langle u_i^2 \rangle$:

$$\langle u_i^2 \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} [\tilde{u}_i^2(\omega) + \tilde{u}_i^{*2}(\omega)] d\omega.$$

Так как скорость газового потока, несущего частицы, — случайная величина, то и скорость движения твердых частиц также величина случайная. Эту скорость также можно охарактеризовать корреляционной функцией, аналогичной корреляционной функции R_{ij} для газового потока. Используя полученное решение уравнения медленного относительного движения твердой частицы, можно найти связь между корреляционными функциями для скорости газового потока и для скорости движения частицы. Чтобы найти эту связь, воспользуемся очевидным соотношением

$$\begin{aligned} \langle v_i(\tau) v_i(\tau - t) \rangle &= \frac{1}{2T - t} \int_{-T}^{+T} [w_i(\tau) w_i(\tau - t) + \\ &+ 2u_i(\tau) w_i(\tau - t) + u_i(\tau) u_i(\tau - t)] d\tau + \\ &+ \frac{2T}{2T - t} \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2} \rho_a} \right)^2 \frac{g_i^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения теперь можно получить выражение для $\langle v_i^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle v_i^2 \rangle &= \frac{1}{2T} \int_0^{\infty} \left[\tilde{w}_i^2(\omega) + \tilde{w}_i^{*2}(\omega) + \tilde{u}_i^2(\omega) + \right. \\ &+ \tilde{u}_i^{*2}(\omega) + 2\tilde{u}_i(\tilde{w}_i - \tilde{w}_i^*) + 2\tilde{u}_i^*(\tilde{w}_i + \tilde{w}_i^*) + \\ &+ \left. 2T \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2} \rho_a} \right)^2 \frac{g_i^2}{a^2} \frac{\sin^2 \omega T}{\omega^2 T^2} \right] d\omega. \end{aligned}$$

Подставим сюда функции \tilde{w}_i и \tilde{w}_i^* , полученные в результате решения

уравнения движения твердой частицы. Теперь можно записать выражение для спектральной функции параметра $\langle v_i^2 \rangle$:

$$E_{Ti} = E_i(\omega) + \frac{(\rho - \rho_a)^2}{\left(\rho + \frac{1}{2}\rho_a\right)^2} \times \\ \times \frac{g_i^2}{a^2} \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2 T^2} - \frac{(\rho - \rho_a)}{\left(\rho + \frac{1}{2}\rho_a\right)} \omega \times \\ \times \frac{\left(\omega + 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega} - 2a\right)}{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2 + \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2} E_i(\omega).$$

Из этого выражения видно, что при $\rho = \rho_a$ спектральная функция $E_{T,i}(\omega)$ совпадает со спектральной функцией $E_i(\omega)$. Если же ρ близко к ρ_a , то выражение для спектральной функции $E_{T,i}$ примет следующий вид:

$$E_{T,i} = E_i - \frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2}\rho_a} \omega \times \\ \times \frac{\left(\omega + 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega} - 2a\right)}{\left(\omega + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2 + \left(a + \sqrt{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{\omega}\right)^2} E_i.$$

Если же $\rho \gg \rho_a$, то спектральная функция $E_{T,i}$ описывается следующим выражением:

$$E_{T,i} = \frac{g_i^2}{a^2} \frac{\sin^2 \omega T}{\omega^2 T^2} + E_i - \omega \frac{\omega - 2a}{\omega^2 + a^2} E_i(\omega).$$

Этот случай имеет наибольший практический интерес, так как плотность частиц, как правило, намного превышает плотность несущего их газа. В такой ситуации, как показали исследования, уравнение движения твердой частицы в потоке газа с достаточно высокой степенью точности описывается уравнением движения

$$m(dv/dt) = F_C + F_g, \quad (1.59)$$

т. е. на частицу действуют в основном две силы — аэродинамического сопротивления и тяжести.

Проведенный анализ позволяет установить ряд качественных закономерностей поведения твердых частиц в турбулентном потоке газа. Для более детального исследования этого процесса следует применить функцию плотности вероятности распределения частиц в потоке. Рассмотрим вывод уравнения, которому удовлетворяет такая функция плотности вероятности, с помощью уравнения движения твердых частиц (1.59). Правая часть уравнения движения частицы представляет собой случайную величину du_i/dt , связанную с мгновенной скоростью течения газового потока. Статистические свойства мгновенной скорости несущего частицы газового потока можно описать функцией плотности вероятности $P_1(u, x, t)$, для которой можно, в свою очередь, записать уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + u_k \frac{\partial P_1}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left[\left(F_k + \frac{u_k - \bar{u}_k}{\tau_c} \right) P_1 \right] + \frac{2}{3} \frac{C_1 b_T}{\tau} \frac{\partial^2 P_1}{\partial u_k^2}. \quad (1.60)$$

Здесь b_T обозначает кинетическую энергию турбулентности, т. е.

$$b_T = 1/2 (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}),$$

а τ_c — характерное время турбулентного движения, которое можно вычислить по формуле

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{C_1}{\tau} + 6\nu(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}).$$

Из теории марковских процессов известно, что уравнению (1.60) можно поставить в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{u_i}{\tau_c} = \frac{\bar{u}_i}{\tau_c} - F_i(x, t) + \sqrt{\frac{4C_1 b_T}{3\tau N_i}} \tilde{\omega}_i(t), \quad (1.61)$$

где $\tilde{\omega}_i(t)$ — "белый шум", т. е. нормальный стационарный случайный процесс с нулевым средним и дельтаобразной корреляционной функцией, т. е.

$$\langle \tilde{\omega}_i(t) \rangle = 0; \quad \langle \tilde{\omega}_i(t') \tilde{\omega}_i(t'') \rangle = -\frac{1}{2} N_i \delta(t' - t'').$$

Из уравнения (1.61) выразим производную du_i/dt и полученное для нее выражение подставим в уравнение движения твердой частицы. В результате такой операции уравнение движения твердой частицы приобре-

дает вид стохастического уравнения, которое можно записать

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{dt} + aw_i + b \int_{t_0}^t \frac{dw_i(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}} = \\ = g_i + \frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2} \rho_a} F_i - \frac{\rho - \rho_a}{\rho + \frac{1}{2} \rho_a} \times \\ \times \sqrt{\frac{4C_1 b T}{3\tau N_i}} \tilde{\omega}_i(t) + \frac{u_i - \bar{u}_i}{T_c}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

где

$$T_c = \frac{\rho + \frac{1}{2} \rho_a}{\rho - \rho_a} \tau_c; \quad w_i = v_i - u_i.$$

Это уравнение существенно упрощается для случая $\rho \gg \rho_a$, когда параметр b приобретает малые значения и интегральным членом в уравнении (1.62) можно пренебречь.

Итак, при $\rho \gg \rho_a$ стохастическое уравнение, описывающее случайный процесс движения твердой частицы в турбулентном потоке газа, можно записать следующим образом:

$$\frac{dw_i}{dt} + aw_i = \frac{u_i - \bar{u}_i}{T_c} + F_i + g_i - \sqrt{\frac{4C_1 b T}{3\tau N_i}} \tilde{\omega}_i(t), \quad (1.63)$$

где $w_i = v_i - u_i$ — относительная скорость движения твердой частицы в потоке газа.

Многомерному случайному процессу вида

$$\Lambda = (x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3),$$

компоненты которого u и w удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям (1.61) и (1.63), можно поставить в соответствие уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для функции плотности вероятности распределения параметров u и w в потоке газа. В нашем случае это ФПК-уравнение можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_s}{\partial t} + (u_k + w_k) \frac{\partial P_s}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial u_k} \left\{ \left(F_k + \frac{u_k - \bar{u}_k}{\tau_i} \right) P_s \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(aw_k - F_k - \frac{u_k - u_k}{\tau_i} - g_k \right) P_s \right\} = \\ = \frac{2C_1 b T}{3\tau} \left(\frac{\partial^2 P_s}{\partial u_k^2} + \frac{\partial^2 P_s}{\partial w_k^2} - 2 \frac{\partial^2 P_s}{\partial u_k \partial w_k} \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Теперь с помощью этого уравнения можно получить соответствующие дифференциальные уравнения для параметров, характеризующих осредненное движение частицы в турбулентном течении. По определению осредненного значения некоторой функции Ψ , зависящей от случайных переменных u и w , равно интегральному выражению

$$\overline{\Psi} = \int \Psi(u, w) P_s(u, w; x, t) du dw. \quad (1.65)$$

Если в качестве функции $\Psi(u, w)$ выбрать $\delta(x - X(u, w, t))$, то, используя определение (1.65), из уравнения (1.64) можно получить уравнение для осредненной концентрации числа частиц в турбулентном потоке газа, которое запишем здесь следующим образом:

$$\frac{\partial \overline{c_s}}{\partial t} + (\overline{u_k} + \overline{w_k}) \frac{\partial \overline{c_s}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{(u'_k + w'_k) c'_s}}{\partial x_k} = 0. \quad (1.66)$$

В этом уравнении $\overline{w_k}$ — осредненная скорость относительного движения твердой фазы, а $\langle (u'_k + w'_k) c'_s \rangle$ — турбулентный поток частиц примеси. Если предположить, что частицы не влияют на динамику несущего их потока газа, то осредненная скорость движения газа будет описываться, как обычно, уравнениями Рейнольдса.

Умножив уравнение (1.65) на w_i и применив операцию осреднения, т. е. проинтегрировав полученное соотношение по u и w , получим уравнение, которое описывает динамику и пространственное изменение осредненной скорости относительного движения твердой фазы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{w_i}}{\partial t} + (\overline{u_k} + \overline{w_k}) \frac{\partial \overline{w_i}}{\partial x_k} + a \overline{w_i} + \overline{w_i} \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(u'_k + w'_k) w'_i} = F_i + g_i. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Уравнение для ковариаций вида $\langle u_i^2 c_s^2 \rangle$ можно получить аналогично, т. е. умножив уравнение (1.65) на $u_i c_s$ и проинтегрировав затем по u и w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i^2 c_s^2}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i^2 c_s^2}}{\partial x_k} + \overline{u_i^2 c_s^2} \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial x_k} + \\ + \overline{u_i^2 c_s^2} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + (\overline{u'_i u'_k} + \overline{w'_k u'_i}) \frac{\partial \overline{c_s}}{\partial x_k} + \overline{w_k u'_i} \frac{\partial \overline{c_s}}{\partial x_k} = \\ = \overline{c_s} \left(\overline{w_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{w_k^2} \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial x_k} \right) + \overline{c_s^2 w_k^2} \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Для $\langle w'_i c'_s \rangle$ уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{\partial w'_i c'_s}}{\partial t} + (\bar{u}_k + \bar{w}_k) \frac{\overline{\partial w'_i c'_s}}{\partial x_k} + \overline{(u'_k + w'_k) w'_i} \frac{\partial \bar{c}_s}{\partial x_k} \\ & + \overline{w'_k c'_s} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_k} + \overline{w'_i c'_s} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial x_k} + a \overline{w'_i c'_s} - \frac{\overline{u'_i c'_s}}{\tau_c} + \\ & + \frac{\overline{\partial (u'_k + w'_k) w'_i c'_s}}{\partial x_k} = 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

При выводе этих уравнений появились новые неизвестные величины $\langle u'_i w'_j \rangle$ и $\langle w'_i w'_j \rangle$; характеризующие турбулентный процесс. Соответствующие уравнения для этих величин выводятся аналогично из уравнения (1.65):

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{\partial u'_i w'_j}}{\partial t} + (\bar{u}_k + \bar{w}_k) \frac{\overline{\partial u'_i w'_j}}{\partial x_k} + \\ & + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_k} + \overline{w'_k u'_i} \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_k} + \\ & + \overline{u'_k w'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{w'_j w'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{w'_j u'_i} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial x_k} + \\ & + a \overline{u'_i w'_j} + \bar{w}_j \left(\bar{w}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial u'_i w'_k}}{\partial x_k} \right) + \\ & + \frac{\overline{\partial (u'_k + w'_k) u'_i w'_j}}{\partial x_k} = \frac{(u'_j + w'_j) u'_i}{\tau_c} - \frac{4C_1}{3\tau} b_T. \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{\partial w'_i w'_j}}{\partial t} + (\bar{u}_k + \bar{w}_k) \frac{\overline{\partial w'_i w'_j}}{\partial x_k} + 2a \overline{w'_i w'_j} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{w}_i \bar{w}_j}{\partial x_k} + \\ & + \overline{(w'_i u'_k + w'_i w'_k)} \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_k} + \overline{(w'_j u'_k + w'_j w'_k)} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_k} = \frac{\overline{u'_i w'_j} + \overline{u'_j w'_i}}{\tau_c} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{(u'_k + w'_k) w'_i w'_j} + \frac{4C_1}{3\tau} b_T. \end{aligned} \quad (1.71)$$

С помощью последнего уравнения можно получить уравнение, которое описывает динамику и пространственное изменение кинетической энергии турбулентного движения твердых частиц в потоке газа. Для этого следует воспользоваться определением кинетической энергии турбулентного движения. В газовом потоке кинетическая энергия, как известно, определяется следующим образом:

$$b_T = 1/2 \overline{u_k^o u_k^o}.$$

Для частиц в потоке газа кинетическая энергия турбулентного движения составляет

$$b_{ST} = 1/2 \overline{v'_k v'_k}, \quad (1.72)$$

где v' — пульсация скорости движения частицы.

Если теперь воспользоваться относительной скоростью движения частицы, то выражение для кинетической энергии b_{ST} примет вид

$$b_{ST} = b_T + \overline{u'_k w'_k} + \frac{1}{2} \overline{w'_k w'_k}. \quad (1.73)$$

Таким образом, кинетическая энергия турбулентного движения частиц в турбулентном потоке газа складывается из кинетической энергии турбулентного движения чистого газового потока, энергии взаимодействия турбулентного движения газового потока с турбулентным относительным движением частиц и турбулентной энергии относительного движения частиц. Если турбулентная энергия движения чистого газового потока и относительного движения частиц может принимать только положительные значения, то энергия взаимодействия турбулентных движений газа и частиц может принимать как положительные значения, так и отрицательные.

Рассмотренная в данном разделе математическая модель для определения распределения концентрации твердых частиц в турбулентном потоке газа может быть эффективно использована для решения многих практических задач, однако для этого ее необходимо замкнуть, так как в уравнениях (1.70) и (1.71) входят не определенные здесь ковариации третьего порядка. Кроме того, в уравнениях содержатся параметры, характеризующие турбулентность чистого газового потока. Эти параметры могут быть определены с помощью соответствующей модели турбулентности чистого газового потока независимо от рассматриваемой здесь задачи. Такая модель может носить чисто теоретический характер и может быть основана на эмпирических данных. Для определения ковариаций третьего порядка следует использовать соответствующие модели замыкания. Простейшая из таких моделей предусматривает просто отбрасывание ковариаций третьего порядка. Более сложные модели замыкания могут быть построены по аналогии с моделями замыкания для чистого газового потока.

1.5. Гравитационная теория движения и гидравлическое сопротивление потоков газовзвеси

Гравитационная теория, предложенная М. А. Великановым [3], — одна из первых теорий, позволяющих описать движение потоков газа со взвешенными частицами. Существенный вклад в развитие этой теории внес также Г. И. Баренблатт [4].

Основным предположением гравитационной теории является допущение о малости взвешенных в потоке газа твердых частиц по сравнению с характерными масштабами турбулентности самого газового потока. Это предположение позволяет использовать представления механики сплошных сред и считать, что взвешенные частицы образуют непрерывно распределенную в основном потоке примесь. Объемную концентрацию частиц примеси, т. е. относительную долю газовой среды, занимаемой твердыми частицами, обозначим, как обычно, S . Таким образом, доля объема, приходящаяся на газовую среду, составит $(1 - S)$. Объемную концентрацию S иногда называют мутностью потока. Полную плотность смеси газа и твердых частиц представим в виде

$$\rho = \rho_0(1 - S) + \rho_T S = \rho_0 + (\rho_T - \rho_0) S,$$

где ρ_T, ρ_0 — плотности соответственно частиц и газа. Плотность частиц и плотность газовой среды не меняются, однако полная плотность потока со взвешенными частицами флуктуирует. При этом пульсации полной плотности выражают соотношением

$$\rho' = (\rho_T - \rho_0) S'.$$

Скорость движения центра тяжести смеси газа и частиц в бесконечно малом объеме вокруг заданной точки пространства можно определить следующим образом. Полный импульс этого элементарного объема складывается из импульса движения газовой фазы и импульса движения твердой фазы потока, т. е. для скорости движения центра тяжести бесконечно малого объема потока

$$\rho U_i = \rho_0 (1 - S) u_i + \rho_T v_i,$$

где u_i — составляющая по оси ox_i скорости движения газа; v_i — составляющая по оси ox_i скорости движения частиц. Запишем уравнение движения смеси газа и твердых частиц:

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho_0 (1 - S) u_i u_k + \rho_T S v_i v_k + P \delta_{ik} - \sigma_{ik}] = - \rho g \delta_{i3},$$

где P — полное гидродинамическое давление в данной точке потока газа с частицами; σ_{ik} — тензор вязких напряжений; $\rho g \delta_{i3}$ — сила тяжести, действующая на элементарный объем потока.

Уравнение сохранения массы газовой фазы потока

$$\frac{\partial \rho_0(1 - S)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0(1 - S)u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Тогда уравнение для твердой фазы потока

$$\frac{\partial \rho_T S}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_T S v_k)}{\partial x_k} = 0.$$

Объединим эти два уравнения и получим уравнение сохранения массы полного потока газа с твердыми частицами:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_k}{\partial x_k} = 0.$$

С учетом малости частиц и малости их индивидуальных ускорений в турбулентном потоке газа по сравнению с ускорением силы тяжести будем считать, что горизонтальные составляющие газовой и твердой фаз потока совпадают. Вертикальные же составляющие твердой и газовой фаз потока отличаются друг от друга на значение скорости гравитационного оседания, т. е.

$$U_i = u_i - \frac{\rho_T}{\rho} S v_g \delta_{i3}.$$

Теперь уравнение движения для смеси газа и твердых частиц можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho U_i U_k + P \delta_{ik} - \sigma_{ik}) = \\ & = -\rho \left\{ g + \frac{\rho_0 \rho_T}{\rho^2} \frac{\partial [S(1 - S) v_g^2]}{\partial x_3} \right\}. \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности для всего потока

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = -(\rho_T - \rho_0) \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{S(1 - S) v_g}{\rho} \right].$$

Используя полученные уравнения сохранения массы, уравнения движения и неразрывности потока, состоящего из смеси газа и твердых частиц, рассмотрим задачу о распределении взвешенных частиц в стационарном турбулентном потоке газа, который ограничен снизу плоскостью $x_3 = 0$. Поток в среднем однороден вдоль осей ox_1 и ox_2 , т. е.

осредненные характеристики потока зависят только от вертикальной координаты z или x_3 .

Осредним уравнение сохранения массы всего потока:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho U_3}) = 0,$$

из которого следует, что $\overline{\rho U_3} = \text{const}$.

Так как в стационарном режиме переноса массы вертикальный перенос отсутствует, то должно выполняться соотношение

$$\overline{\rho U_3} + \overline{\rho' U_3'} = 0.$$

Следует отметить, что из самого существования стационарного распределения взвешенных в потоке частиц должно следовать условие

$$\overline{\rho' U_3'} = 0.$$

Действительно, при стационарном режиме регулярное гравитационное оседание частиц вниз должно быть сбалансировано турбулентным переносом этих частиц вверх. Турбулентный поток массы

$$\overline{\rho' U_3'} = (\rho_T - \rho_0) \overline{U_3' S'}.$$

Следовательно, осредненное движение смеси газа и частиц имеет составляющую скорости движения, направленную вниз.

Осредняя уравнение неразрывности всего потока, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U_3}}{\partial z} &= -(\rho_T - \rho_0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\overline{S(1-S)v_g}}{\rho} \right] \approx \\ &\approx - \frac{\rho_T - \rho_0}{\overline{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} [\overline{S(1-S)v_g}]. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, находим

$$\overline{U_3} = - \frac{\rho_T - \rho_0}{\overline{\rho}} \overline{S(1-S)v_g} + \text{const}.$$

При $z \rightarrow \infty$ величины \overline{S} , $\overline{U_3' S'}$ и $\overline{U_3}$ стремятся к нулю, следовательно, постоянная в последней формуле также должна быть равна нулю.

Принимая объемную концентрацию частиц (или мутность потока) значительно меньше единицы, для турбулентного потока частиц в вертикальном направлении получаем соотношение

$$\overline{U_3' S'} = \overline{S(1-S)v_g} \approx v_g \overline{S}.$$

Распределение частиц по высоте плоскопараллельного потока газа можно найти из этого соотношения, если принять какую-либо связь вертикального турбулентного потока частиц со средней концентрацией таких частиц. Эту связь можно установить, например, с помощью полуэмпирической градиентной гипотезы, позволяющей записать соотношение

$$\overline{U'_3 S'} = -K_z (\partial \overline{S} / \partial z).$$

Для определения вертикального коэффициента турбулентной диффузии можно воспользоваться уравнением Рейнольдса, которое для рассматриваемого случая должно иметь следующий вид:

$$K_z (\partial \overline{u} / \partial z) = u_*^2,$$

где u_* — динамическая скорость или скорость трения, имеет постоянное значение. С помощью этого уравнения для осредненной объемной концентрации частиц получим

$$\frac{\partial \ln \overline{S}}{\partial z} = - \frac{v_g}{u_*^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z},$$

откуда

$$\frac{\overline{S}}{\overline{S}_0} = \exp \left(- \frac{v_g}{u_*^2} z \right),$$

где \overline{S}_0 — значение объемной концентрации частиц на высоте шероховатости z_0 , на которой осредненная скорость течения обращается в нуль. Напомним, что полученное выражение описывает распределение твердых частиц в плоскопараллельном потоке газа.

Если пренебречь вкладом диффузии турбулентной энергии, уравнение баланса турбулентной энергии в газовом потоке со взвесью можно записать:

$$\overline{u'_1 u'_3} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \epsilon + \frac{\rho_T - \rho_0}{\overline{\rho}} \overline{S' U'_3} = 0.$$

Это уравнение отличается от аналогичного уравнения баланса турбулентной энергии незапыленного газового потока последним членом, который выражает собой затрату турбулентной энергии на турбулентное взвешивание частиц потоком. По смыслу этот член представляет собой работу взвешивания частиц турбулентным потоком. Относительная затрата турбулентной энергии на взвешивание частиц потоком характеризуется безразмерным параметром

$$K_0 = - \frac{\rho_T - \rho_0}{\rho} g \frac{\overline{S' U'_3}}{\overline{u'_1 u'_3}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z},$$

который называется постоянной Колмогорова.

Выражение для работы взвешивания получено следующим образом [3]. Работу взвешивания частиц рассчитывают исходя из того, что масса частиц в единице объема за вычетом вытесненного ими объема газа будет равна $g(\rho_T - \rho_0)S$. Так как все частицы падают с относительной скоростью $(1 - S)v_g$, то для сохранения их в данном единичном объеме необходимо совершить работу в единицу времени

$$T = g(\rho_T - \rho_0)v_g S(1 - S).$$

Турбулентная энергия единицы массы для насыщенного частицами потока

$$b = b_0(1 - K_0).$$

При отсутствии взвешенных частиц постоянная Колмогорова равна нулю и турбулентная энергия равна b_0 . Таким образом, взвешенные частицы в потоке способствуют уменьшению энергии турбулентности. В то же время они существенно влияют и на гидравлическое сопротивление в трубах и газоходах. Как известно, перепад давления, затрачиваемый на преодоление гидравлического сопротивления и скоростного напора при прохождении газохода, в соответствии с уравнением Бернулли записывается как

$$\Delta P_0 = \varphi \rho_0 u^2 / 2g,$$

где ρ_0 — плотность газа; φ — коэффициент местного гидравлического сопротивления.

Если в потоке имеются твердые взвешенные частицы, то плотность смеси становится больше по сравнению с чистым газом на значение массовой концентрации пыли, т. е.

$$\rho = \rho_0 + c_T.$$

Если не учитывать работу взвешивания частиц потоком газа, например, в случае очень мелких частиц, скорость падения которых близка к нулю, то перепад давления будет вычисляться следующим образом:

$$\Delta P_{\Pi} = \varphi(\rho_0 + c_T)u^2 / 2g.$$

В потоке газа со взвешенными частицами часть перепада давления обязательно должна расходоваться на взвешивание частиц, т. е.

$$\Delta P_{\Pi} = \varphi \left[\frac{(\rho_0 + c_T)u^2}{2g} + \Delta P_{\text{взв}} \right].$$

Потерю давления на взвешивание частиц в объеме Ω можно найти, разделив работу взвешивания в этом объеме на сам объем газового потока, т. е.

$$\Delta P_{\text{взв}} = T_{\Pi} / \Omega.$$

Работу взвешивания в объеме газа Ω можно вычислить по формуле

$$T = Mgv_g.$$

Это соотношение справедливо при условии сравнительно небольшой концентрации частиц, когда они не взаимодействуют. Введем массовую концентрацию частиц

$$c_T = Mg/\Omega,$$

с помощью которой можно вычислить работу взвешивания в объеме Ω :

$$T = c_T v_g \Omega.$$

Полную работу взвешивания в потоке можно найти, умножив T на время прохождения объема Ω через поток, т. е.

$$T_{\Pi} = c_T v_g \Omega t.$$

Время прохождения объема Ω через поток найдем, разделив этот объем на объемную скорость течения, т. е.

$$t = \Omega/q.$$

Таким образом, полная работа взвешивания объема Ω при прохождении его потоком составляет

$$T_{\Pi} = c_T v_g \Omega^2 / q.$$

Потерю давления на взвешивание частиц в объеме Ω можно вычислить теперь по формуле

$$\Delta P_{\text{взв}} = \frac{T_{\Pi}}{\Omega} = v_g c_T t = v_g c_T \frac{\Omega}{q}.$$

С помощью этого выражения перепад давления запыленного потока можно определить из зависимости

$$\Delta P_{\Pi} = \varphi \left[\frac{(\rho_0 + c_T)u^2}{2g} + v_g c_T \frac{\Omega}{q} \right].$$

Отношение перепада давления запыленного газа к перепаду давления чистого газа запишем так:

$$\frac{\Delta P_{\Pi}}{\Delta P_0} = \left(1 + \frac{c_T}{\rho_0} + \frac{2g v_g c_T \Omega}{\rho_0 u^2 g} \right)^{-1}.$$

Так как коэффициент гидравлического сопротивления вычисляют делением перепада давления на скоростной напор, то отношение коэффициентов гидравлического сопротивления запыленного и чистого газо-

вых потоков можно представить в виде

$$\varphi = 2g\Delta P / (\rho u^2).$$

Таким образом, перепад давления и соответственно коэффициент сопротивления уменьшаются с ростом запыленности потока. В табл. 1.2 приведены экспериментальные и расчетные данные, подтверждающие такой вывод.

На основе анализа этих данных можно сделать вывод о том, что учет работы взвешивания частиц полностью объясняет понижение гидравлического сопротивления при прохождении запыленного газа через газоды. Работа взвешивания добавляется к работе сопротивления, и, следовательно, поток, несущий частицы, действительно должен был бы иметь меньшую скорость, чем такой же поток без частиц. Однако при одинаковом расходе газа работа взвешивания твердых частиц ведет к уменьшению гидравлического сопротивления. Объясняется это следующим образом.

Гидравлическое сопротивление потоку определяется его турбулентностью, интенсивность которой, в свою очередь, зависит от скорости и масштаба течения. Взвешенные частицы способствуют уменьшению масштаба вихрей, сравнимых с масштабом самого потока. Чем крупнее частицы и чем их больше, тем более интенсивно происходит измельчение вихрей, так как падающая частица пересекает уже не один вихрь, а целую их совокупность. Соответственно с уменьшением масштаба вихрей становится меньше гидравлическое сопротивление потока, которое определяется именно крупными вихрями.

Полученные выше результаты для перепада давления запыленного потока можно уточнить, если учесть влияние концентрации частиц пыли на скорость их падения. Однако такие поправки оказываются существенными лишь в потоках с большой концентрацией частиц пыли, например при пневмотранспорте. При обычных концентрациях c_T (порядка 2–10 г/м³) такими поправками можно пренебречь.

Таблица 1.2. Коэффициенты сопротивления запыленного потока

Номер опыта	Концентрация пыли, г/м ³	$\varphi_{\text{экс}}$	$\varphi_{\text{расч}}$
1	15	56,2	55,6
2	15	71,0	69,7
3	5	79,9	80,5
4	5	85,3	83,2
5	5	101,3	98,5
6	5	91,0	89,9

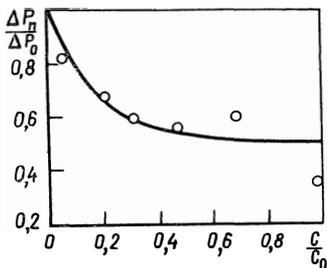


Рис. 1.3. Зависимость отношения гидравлических сопротивлений запыленного (ΔP_n) и чистого (ΔP_0) газовых потоков от концентрации пыли

Работу взвешивания частиц с учетом зависимости скорости их падения от концентрации $v_{g,1} = v_g (1 - c_T/\rho_0)$ можно записать следующим образом:

$$T = c_T v_g \Omega t (1 - c_T/\rho_0).$$

Из этого соотношения следует, что при массовой концентрации частиц, равной плотности газовой среды, работа взвешивания становится равной нулю при любой крупности частиц пыли. В этом случае речь идет не о потоке газа с твердыми частицами, а о потоке твердых частиц, отделенных друг от друга тонкой прослойкой газа. Частицы уже не могут свободно падать, так как они задерживаются другими частицами. По своим свойствам такой газовый поток с большой концентрацией твердых частиц подобен жидкостному однородному потоку.

Из выражения для работы взвешивания, полученного с учетом влияния концентрации частиц на скорость их падения, следует, что максимальное значение этой работы определяется зависимостью $c_T (1 - c_T/\rho_0)$. Такая зависимость приводит к максимуму работы взвешивания при $c = 0,5\rho_0$. Таким образом, максимальная концентрация пыли, которая может быть перенесена газовым потоком во взвешенном состоянии, не может превышать половины плотности газовой среды. Для воздуха это значение близко к 0,5 кг пыли/кг воздуха. С ростом гидравлической крупности частиц допустимая максимальная концентрация уменьшается. Превышение максимально допустимой концентрации приводит как бы к конденсации газового потока с частицами в "жидкостный" пылевой или флюидный поток. Этому процессу предшествует прекращение уменьшения гидравлического сопротивления с ростом запыленности. Действительно, такая картина изменения гидравлического сопротивления наблюдается на практике [41].

Зависимость отношения перепадов давления запыленного и чистого потоков газа от относительной концентрации пыли показана на рис. 1.3

$$\Delta P_n/\Delta P_0 = [1 + c + Ac(1 - c)]^{-1}, \quad (1.74)$$

A обозначает величину, которая определяется соотношением

$$A = 8gv_g/(\pi D^2 u^3). \quad (1.75)$$

Из этой зависимости видно, что при $c = 0$, т. е. при отсутствии частиц в потоке $\Delta P_{\text{п}}/\Delta P_0 = 1$.

Согласно экспериментальным данным при $c = 0,5$ $\Delta P_{\text{п}}/\Delta P_0 = 0,5$. С помощью этих результатов получаем $A = 2$. Формула (1.74) в этом случае примет вид

$$\Delta P_{\text{п}}/\Delta P_0 = [1 + c + 2c(1 - c)]^{-1}. \quad (1.76)$$

Эта зависимость отношения перепада давления запыленного и чистого потоков от концентрации пыли и использовалась при построении теоретической кривой на рис. 1.3. Точками показаны экспериментальные данные, хорошо подтверждающие теоретическую зависимость (1.76) (непрерывная линия).

Глава 2

ПЕРЕНОС АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ АТМОСФЕРНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

2.1. Аэрозольные частицы в атмосфере

Неотъемлемой частью атмосферы являются аэрозольные частицы, которые в значительной степени определяют основные физико-химические свойства атмосферы. Даже в самых отдаленных от источников промышленного загрязнения районах, например в центральных районах Антарктиды, в 1 см^3 воздуха содержится не менее 100 аэрозольных частиц.

Размер атмосферных аэрозольных частиц меняется в широком диапазоне. Одним из важнейших открытий последних лет явилось обнаружение в атмосфере высокодисперсных частиц, размер которых составляет от тысячных до десятых долей микрона, и определение роли этих частиц в формировании среды обитания человека. Именно эти частицы определяют качество воздуха, от которого зависит степень жизненного и трудового комфорта человека, урожайность полей и т. п. Высокодисперсные аэрозольные частицы определяют также функционирование атмосферы как тепловой машины, преобразуя и отражая в космос энергию солнечного излучения. Они являются основными носителями атмосферного электричества и радиоактивности, служат ядрами конденсации воды в облаках, замутняют воздух, определяя тем самым условия видимости и ограничивая условия применимости оптических инженерных систем. Таким образом, главная задача борьбы за чистоту атмосферного воздуха – это не освобождение от малых примесей и частиц, а борьба за сохранение и улучшение их количественного и качественного состава. Выбрасываемые в атмосферу промышленными предприятиями и энергетическими установками химические и радиоактивные вещества захватываются аэрозольными частицами, в результате чего резко

меняются их свойства. Порожденные промышленными выбросами аэрозольные частицы длительное время сохраняются в воздухе и переносятся атмосферными течениями на сотни и тысячи километров от источника выброса. Таким образом, в изучении атмосферной аэрозольной системы важную роль играют вопросы, связанные с переносом частиц турбулентными воздушными течениями. Рассмотрению именно этих вопросов и посвящена данная глава. Однако полное понимание поведения атмосферной аэрозольной системы, а самое главное, корректное применение методов моделирования переноса аэрозольных частиц в реальных ситуациях невозможны без хотя бы качественного анализа совокупности процессов образования и развития аэрозольных частиц в атмосфере. Само по себе такое комплексное рассмотрение образования и развития аэрозольных частиц является сложной задачей, которую невозможно дать в краткой форме, да она и выходит за рамки данной книги. Поэтому мы прибегнем к достаточно упрощенной схеме (рис. 2.1) [42].

Среди поступающих в атмосферу веществ как естественного, так и искусственного происхождения выделяются горячие газы и примесные газы-предшественники, т. е. соединения, способные стать исходным материалом для образования аэрозольных частиц. Из горячих газов в результате процесса нуклеации образуются молекулярные агрегаты, которые называются кластерами. Выделяются два случая нуклеации – медленная, когда вероятность образования конденсированной частицы экспоненциально зависит от высоты термодинамического барьера или свободной энергии образования кластера [43], и быстрая, когда термодинамический барьер отсутствует и кинетическая энергия образования частиц определяется эффективностью трехчастичных столкновений между молекулами пара, ведущих к образованию связанных состояний. При медленном процессе нуклеации кластер способен как испариться, так и увеличиться в размере. Однако он стремится к росту в тех случаях, когда размеры кластера превышают некоторое критическое значение, соответствующее максимуму свободной энергии его образования. При быстрой нуклеации кластер не испаряется, однако скорость его роста ограничена вследствие того, что не каждое столкновение приводит к образованию связанного состояния.

Для того чтобы примесные газы-предшественники образовывали аэрозольные частицы, необходимо, чтобы они превратились в радикалы или бирадикалы и положили начало цепочкам ионных реакций, завершающихся синтезом новых малолетучих соединений. Радикалы и бирадикалы образуются под действием солнечного или ионизирующих излучений естественных или искусственных радиоактивных веществ. Определенный вклад в этот процесс вносит космическое излучение, а также воздействие всегда существующих в атмосфере окисляющихся радикалов. Таким образом, ионные реакции с примесными газами-предшественниками приводят к образованию паров аэрозолеобразующих соединений, которые синтезируются в ничтожных количествах.

пары аэрозолеобразующих соединений, в результате чего происходит рост кластеров и образование частиц другого диапазона размеров, составляющих микродисперсную фракцию атмосферных частиц. В эту фракцию входят частицы с радиусом примерно от 1 до 80 нм.

Конденсация влаги на частицах таких размеров, так же как и на кластерах, не происходит, так как размеры частиц все еще малы для этого. Однако на микродисперсных частицах активно происходит процесс прилипания молекул паров аэрозолеобразующих соединений. Кроме того, микродисперсные частицы исчезают вследствие прилипания к более крупным частицам атмосферного аэрозоля. Скорость роста микродисперсных частиц невелика: за 1 ч радиус этих частиц увеличивается примерно на 0,3–1,0 нм. Время жизни таких частиц составляет от нескольких десятков минут до двух-трех часов. За время жизни микродисперсные частицы успевают либо прилипнуть к более крупным атмосферным аэрозольным частицам, либо вырасти до размеров более крупных частиц вследствие захвата паров аэрозолеобразующих соединений.

Исследования вещества частиц микродисперсного диапазона размеров показали, что оно имеет переходно-кристаллическую структуру, т. е. состояние вещества переходное между газообразным и конденсированным. Только тогда, когда размеры частиц достигают 1–5 нм, внутри частицы начинают формироваться кристаллические структуры, характерные для твердого тела. Однако такая структура занимает сравнительно малый объем частицы, окруженный покровным слоем особой структуры. Объем покровного слоя составляет долю общего объема частицы, примерно равную $3d/r$, где $d = 1$ нм — толщина покровного слоя, r — радиус частицы. Поэтому многие механические свойства частицы не зависят от кристаллического ядра, а определяются покровным слоем и зависят от размера частицы.

Субмикронная фракция состоит из частиц размером от 40 нм до 1–2 мкм. Перейдя в субмикронную фракцию, частицы продолжают расти путем захвата паров аэрозолеобразующих соединений, однако вследствие уменьшения количества более крупных частиц процесс прилипания играет уже незначительную роль. Его место занимает процесс удаления частиц из атмосферы путем вымывания осадками или осаждения на подстилающую поверхность. Именно эти процессы удаления определяют время жизни субмикронных частиц, которое составляет в зависимости от погодных условий от 1 до 10 сут. Этого времени вполне достаточно для переноса частиц на достаточно большие расстояния. Важную роль для субмикронных частиц играют процессы поглощения и выделения влаги, которые не происходят с частицами других, более мелких фракций. Наиболее крупные гигроскопические частицы начинают при этом играть роль ядер конденсации. Поглощение атмосферной влаги может менять и размеры субмикронных частиц вымыванием из них легко растворимых веществ.

В естественных условиях процессы образования высокодисперсных аэрозольных частиц регулируются медленно меняющимися метеорологическими условиями в атмосфере. Вымывание и удаление осаджением на подстилающую поверхность субмикронных частиц приводят к тому, что вся цепочка сложных и многообразных процессов образования высокодисперсных аэрозольных частиц находится в динамическом равновесии. Однако при резких изменениях внешних условий, например при сильном дожде, динамическое равновесие, существующее до этого, нарушается и достаточно быстро устанавливается новое равновесное состояние с другими характеристиками. Следует иметь в виду, что такое новое равновесное состояние не всегда бывает благоприятным. Особенно существенные изменения происходят при антропогенном воздействии на атмосферу, когда в нее выбрасывается большое количество примесных газов и грубодисперсных частиц. Из рассмотренной схемы образования и развития частиц атмосферного аэрозоля видно, что внесение дополнительного по сравнению с естественным количества примесных газов приводит к увеличению образования паров аэрозолеобразующих соединений, к нарушению равновесного состояния атмосферной аэрозольной системы в целом. В свою очередь, это приводит к изменению не только качества атмосферного воздуха, но и многих физических характеристик атмосферы. Могут меняться ее прозрачность и электрические характеристики. Наиболее существенно такие изменения будут происходить вблизи источников загрязняющих веществ, однако в результате загрязнения атмосферного воздуха могут происходить и глобальные изменения. Эти вопросы в настоящее время находятся в зоне самого пристального внимания и изучения учеными различных специальностей. Немаловажную роль при изучении таких процессов играют вопросы переноса частиц турбулентными атмосферными течениями.

Среди антропогенных выбросов загрязняющих веществ в атмосферу особое внимание уделяется выбросам радионуклидов предприятиями атомной промышленности и АЭС, так как радиоактивные вещества обладают высокой токсичностью и специфическим действием на биологические объекты. В результате длительной и целенаправленной работы радиоактивные выбросы, как правило, не представляют опасности для населения и окружающей природы. Однако в последнее время многие исследователи ставят вопрос о влиянии радионуклидов на состояние атмосферы как сложной физической системы, в частности об изменении электрических свойств атмосферы вследствие накопления в ней ^{85}Kr [44].

Рассмотренная схема образования и развития атмосферных аэрозольных частиц показывает, что радиоактивные вещества в атмосфере могут существенно изменить процесс образования высокодисперсных частиц. Действительно, вследствие дополнительной ионизации примесных газов увеличится число образующихся радикалов и бирадикалов, что, в свою

очередь, приведет к большому количеству паров аэрозолеобразующих соединений в атмосфере. Естественно, что это вызовет нарушение естественного баланса образования аэрозольных частиц различных фракций и может изменить многие характеристики атмосферы. Например, не исключена возможность образования смогов в промышленных районах при дополнительном выбросе радионуклидов, особенно если этому способствуют и естественные условия данного района. По отмеченным причинам воздействию радиоактивных веществ на состояние атмосферной аэрозольной системы должно уделяться большое внимание, эти вопросы должны найти свое отражение при выборе площадок для строительства новых объектов ядерной энергетики, при проведении экологической экспертизы строящихся и действующих предприятий, выбрасывающих радионуклиды. При решении этих вопросов существенную роль играет исследование и моделирование переноса как аэрозольных частиц, так и радиоактивных газов атмосферными течениями.

2.2. Моделирование течения в атмосферном пограничном слое

В нижнем слое атмосферы в результате действия сил вязкого трения у поверхности земли формируется течение, для которого типичными являются высокие вертикальные градиенты скорости. Они, как правило, превышают критические градиенты, при которых происходит переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Таким образом, нижний слой атмосферы, на формирование которого влияет трение о подстилающую поверхность, является турбулизированным. Такой слой атмосферного течения носит название атмосферного пограничного слоя (АПС). Толщина АПС зависит от многих факторов, основными из которых являются внешние условия, формируемые течением свободной атмосферы, где влияние сил трения о поверхность земли пренебрежимо мало, а также характер шероховатости подстилающей поверхности и температурная стратификация. В зависимости от этих факторов высота АПС меняется от нескольких сот метров до 1–2 км. Для АПС характерным является также изменение направления вектора скорости течения с высотой. Такое изменение в основном обусловлено действием сил Кориолиса.

Атмосферный пограничный слой представляет собой пример температурно-стратифицированного турбулентного течения со сдвигом. Методы моделирования течения такого типа были подробно описаны в гл. 1. Используя приведенные там результаты, рассмотрим моделирование течения в атмосферном пограничном слое.

Изменения в температурно-стратифицированной среде описываются уравнениями Навье–Стокса в приближении свободной конвекции. Свободной конвекцией обычно называют движения неоднородно нагретого газа или жидкости в поле гравитационных сил, когда температурные изменения приводят к изменению плотности среды, что влечет за

собой появление объемной выталкивающей силы. При выводе уравнений движения газа в приближении свободной конвекции для температурно-стратифицированного турбулентного течения обычно предполагают, что скорость течения не столь велика, чтобы нельзя было бы пренебречь изменениями плотности за счет давления. В этом случае течение описывается уравнениями

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f \epsilon_{kzi} u_k, \quad (2.2)$$

где ϵ_{ijk} – символ Леви–Чивита; f – параметр Кориолиса. Последний член в правой части уравнения (2.2) представляет собой кориолисову силу, обусловленную вращением системы координат.

Давление обычно представляют в виде двух слагаемых, первое из которых зависит от высоты z (x_3), а второе – только от горизонтальных координат x_1 и x_2 , т. е.

$$P = P_1(z) + P_2(x_1, x_2).$$

Такое приближение обычно применяют в теории атмосферного пограничного слоя, однако его используют и при моделировании других видов турбулентного сдвигового течения. В дальнейшем давление P_2 будем считать известным и запишем для него соотношение

$$P_2 = f\rho(-U_g x_2 + V_g x_1), \quad (2.3)$$

где (U_g, V_g) – вектор скорости геострофического ветра, является внешним по отношению к АПС параметром, зависящим от течения в свободной атмосфере. Местное статическое давление можно представить двумя членами: $P_a(z)$ – гидростатическое давление, определяемое давлением покоящейся среды; P_d – динамическое давление, обусловленное течением. Динамическое давление находят из основных уравнений движения вместе с полями скорости и температуры среды.

Конвективные движения не будут наблюдаться при равновесной температуре, которая для нижнего слоя атмосферы выражается следующим образом:

$$T_a = T_0 - \gamma_a z, \quad (2.4)$$

где γ_a – сухоадиабатический градиент, равный $0,01$ °С/м. В такой среде

$$P_a = -\rho_a g z,$$

где ρ_a – плотность среды, соответствующая температуре T_a . Если от-

клонения температуры и гидростатического давления от их равновесного значения T_a и P_a малы, то плотность среды можно разложить в ряд Тейлора:

$$\rho = \rho_a + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T_a, P_a} (T - T_a) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T_a, P_a} (P - P_a) + \dots$$

Коэффициент теплового объемного расширения

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P .$$

Для идеального газа из уравнения состояния $P = R\rho T$ можно получить $\beta = T^{-1}$. Таким образом, если выполняется условие

$$\beta_a (T - T_a) \ll 1,$$

то для плотности $\rho(T, P)$ можно записать выражение

$$\rho - \rho_a = \beta_a \rho_a (T - T_a).$$

Теперь уравнения Навье–Стокса в приближении свободной конвекции можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial z} \delta_{i3} + \nu \Delta u_i -$$

$$- f \epsilon_{ik3} (u_k - u_{g,k}) - g T^{-1} (T - T_a) \delta_{i3}. \quad (2.5)$$

Для атмосферного пограничного слоя величину $T - T_a$ можно заменить потенциальной температурой θ , для которой уравнение сохранения имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \nu_\theta \Delta \theta, \quad (2.6)$$

где ν_θ – коэффициент молекулярной теплопроводности среды. Полученные уравнения являются основой для вывода уравнений, описывающих осредненные характеристики турбулентного течения атмосферного пограничного слоя. Так, применяя статистическое осреднение, для осредненной скорости течения скорости ветра и осредненной температуры воздуха получаем уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = - \frac{\overline{\partial u'_i u'_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} +$$

$$+ \nu \Delta \bar{u}_i + g_i \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k; \quad (2.7)$$

$$\partial \bar{u}_k / \partial x_k = 0; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = - \frac{\overline{\partial u'_k T'}}{\partial x_k} + \nu \theta \Delta \bar{T}, \quad (2.9)$$

где Ω – угловая скорость вращения Земли.

Уравнение для скорости течения (2.7) отличается от аналогичного уравнения (1.6) двумя последними членами в правой части, обусловленными соответственно действием сил плавучести и сил Кориолиса. Уравнение для потенциальной температуры в температурно-стратифицированном турбулентном течении совпадает по своему виду с уравнением турбулентной диффузии пассивной примеси. Объясняется это тем, что потенциальная температура выполняет роль пассивной примеси в турбулентном температурно-стратифицированном потоке газа или жидкости. Как обычно, в уравнении (2.9) можно пренебречь членом, описывающим молекулярную диффузию потенциальной температуры, по сравнению с членом, описывающим турбулентную диффузию.

Уравнения для напряжений Рейнольдса в температурно-стратифицированном атмосферном пограничном слое можно записать так:

$$\frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = R_{ij} + R'_{ij} + R''_{ij} +$$

$$+ S_{ij} + D_{ij} + E_{ij}. \quad (2.10)$$

Здесь в отличие от уравнения (1.7) в правой части появились дополнительные члены

$$R'_{ij} = g_i \frac{\overline{u'_j \theta'}}{\bar{T}};$$

$$R''_{ij} = -2\epsilon_{ilk} \Omega_k \overline{u'_j u'_l},$$

которые связаны с порождением напряжений Рейнольдса соответственно силами плавучести и Кориолиса.

Для турбулентного потока тепла в температурно-стратифицированном турбулентном атмосферном пограничном слое уравнение можно

записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{\partial u'_i \theta'}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\overline{\partial u'_i \theta'}}{\partial x_k} &= -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \\
 - \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u'_k \theta'} &+ g_i \frac{\overline{\theta'^2}}{T} - \frac{\overline{\theta' \partial P'}}{\rho \partial x_i} - \\
 - \frac{\overline{\partial u'_i u'_k \theta'}}{\partial x_k} + \nu \theta' \overline{\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k^2}} &+ \nu \theta' \overline{\frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_k^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Физический смысл отдельных членов в этом уравнении тот же, что и в уравнении (2.10), с той лишь разницей, что в уравнении (2.11) эти члены относятся к турбулентному потоку тепла, а в уравнении (2.10) – к турбулентному потоку количества движения.

Уравнение для турбулентного потока тепла следует дополнить еще уравнением для среднего квадратичного значения пульсации потенциальной температуры, которое можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{\partial \theta'^2}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\overline{\partial \theta'^2}}{\partial x_k} &= -2\overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \\
 + \frac{\overline{\partial u'_k \theta'^2}}{\partial x_k} + \nu \theta' \frac{\overline{\partial^2 \theta'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \theta' \frac{\overline{\partial \theta'}}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial \theta'}}{\partial x_k}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Замыкание полученных уравнений, описывающих термодинамику турбулентного течения температурно-стратифицированного атмосферного пограничного слоя, можно осуществить в рамках полуэмпирической теории турбулентности с помощью моделей второго порядка. Подробно эти модели были рассмотрены в разд. 1.2, здесь же мы ограничимся рассмотрением аппроксимации только тех членов, которые не были рассмотрены в гл. 1.

Дополнительные члены, аппроксимация которых ранее не рассматривалась, появляются в уравнениях для турбулентного потока тепла и среднего квадратического значения пульсации потенциальной температуры:

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{\theta' \partial P'}}{\rho \partial x_i}; \\
 \frac{\overline{\partial u'_i u'_k \theta'}}{\partial x_k};
 \end{aligned}$$

$$\overline{\nu_{\theta} u_i' \frac{\partial \theta'^2}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{\nu \theta' \frac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_k \partial x_k}}.$$

Последний член можно переписать так:

$$\begin{aligned} \nu_{\theta} \overline{u_i' \Delta \theta'} + \nu \overline{\theta' \Delta u_i'} &= \nu_{\theta} \overline{\Delta u_i' \theta'} - \\ - \nu_{\theta} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i' \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\theta' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \right) - \\ - (\nu + \nu_{\theta}) \frac{\overline{\partial \theta' \partial u_i'}}{\partial x_k \partial x_k}. \end{aligned}$$

Для ковариации $\langle \theta' \partial P' / \partial x \rangle$ применяется два типа аппроксимаций. Первый тип, предложенный Дональдсоном, имеет диффузионный характер:

$$\overline{\frac{\theta'}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i}} = -C_8 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \overline{\frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_k}} \right). \quad (2.13)$$

Второй тип аппроксимации имеет следующий вид:

$$\overline{\frac{\theta'}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i}} = - \frac{\overline{u_i' \theta'}}{\tau} - T_i.$$

Здесь первое слагаемое обусловлено процессами нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций и характеризует возвращение к изотропии турбулентного потока тепла. Временной масштаб τ представляет собой с точностью до постоянного множителя отношение кинетической энергии турбулентности b к скорости ее диссипации ϵ . Второе слагаемое – полная скорость порождения теплового турбулентного потока под действием средней информации течения, эффектов плавучести и т. д. Для этого параметра было предложено следующее выражение [23]:

$$\begin{aligned} T_i &= C_9 \frac{\epsilon}{b} \overline{u_i' \theta'} + C_{10} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \right. \\ &- \left. \frac{5}{2} \epsilon_{ikl} \Omega_l \right) \overline{u_k' \theta'} + \frac{1}{4} C_{10} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} \overline{u_k' \theta'} + \frac{1}{3} g_i \frac{\overline{\theta'^2}}{T}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ковариации третьего порядка описывают процессы переноса напряжений Рейнольдса, турбулентных потоков тепла из одной области простран-

ства в другую без их генерации и затухания. Для этих ковариаций используются модели диффузионного характера. Так, на основе метода инвариантного моделирования Дональдсона можно записать следующие соотношения:

$$\frac{\overline{\partial u'_i u'_k \theta'}}{\partial x_k} = -C_{12} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \frac{\overline{\partial u'_i \theta'}}{\partial x_k} \right); \quad (2.15)$$

$$\frac{\overline{\partial u'_k \theta'^2}}{\partial x_k} = -C_{12} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b^2}{\epsilon} \frac{\overline{\partial \theta'^2}}{\partial x_k} \right). \quad (2.16)$$

Для аппроксимации диссипативных членов, как правило, используется метод инвариантного моделирования, согласно которому аппроксимационные выражения должны характеризоваться теми же свойствами тензорной природы и иметь ту же размерность, что и моделируемые

выражения. Так, тензорная величина $\frac{\overline{\partial \theta'}}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial u'_i}}{\partial x_k}$ имеет нечетное чис-

ло индексов, поэтому при зеркальном отражении этот тензор должен менять знак на обратный. В то же время предположение об изотропности должно приводить к неизменности этого тензора. Отсюда можно сделать вывод, что рассматриваемое выражение должно быть равно нулю.

Используя модели замыкания второго порядка, в том числе и рассмотренные в разд. 1.2, запишем систему уравнений для турбулентных параметров температурно-стратифицированного атмосферного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_k} = & - \left[(1 - C_5) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\epsilon_{jlk} \Omega_l \right) - C_6 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \overline{u'_i u'_k} - \\ & - \left[(1 - C_5) \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + 2\epsilon_{ilk} \Omega_l \right) - C_6 \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right] \overline{u'_j u'_k} + \\ & + (1 - C_5) \left(g_i \frac{\overline{u'_j \theta'}}{\overline{T}} + g_j \frac{\overline{u'_i \theta'}}{\overline{T}} \right) + \\ & + \left[\frac{2}{3} (C_3 - C_1) \epsilon + C_6 g \frac{\overline{u'_3 \theta'}}{\overline{T}} \right] \delta_{ij} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{C_2}{C_3} \nu \frac{\epsilon}{b} \right) C_3 \frac{\epsilon}{b} \overline{u'_i u'_j} + \\
& + \left(C_7 - \frac{2}{3} C_6 - \frac{2}{3} C_5 \right) \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) b + \\
& + C_{12} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{b}{\epsilon} \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right); \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} &= - \left[(1 - C_{10}) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{4} C_{10} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right] \overline{u'_k \theta'} - C_9 \frac{\epsilon}{b} \overline{u'_i \theta'} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} + \\
& + \frac{2}{3} g_i \frac{\overline{\theta'^2}}{T} - 2 \left(\epsilon_{ilk} + \frac{5}{4} C_{10} \epsilon_{ikl} \right) \Omega_l \overline{u'_k \theta'}; \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} = - 2 \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - C_{13} \frac{\epsilon}{b} \overline{\theta'^2}. \tag{2.19}$$

Значения входящих в эту систему уравнений эмпирических постоянных приведены в табл. 2.1.

Если подстилающая поверхность, над которой формируется атмосферный пограничный слой, ровная и однородная, то вектор скорости течения параллелен поверхности земли, а его величина и направление зависят только от высоты и времени. В случае стационарного течения зависимость от времени отсутствует. Характерным для горизонтально

Таблица 2.1. Числовые значения эмпирических постоянных по данным различных работ

Эмпирическая постоянная	[15]	[23]	[26]	Эмпирическая постоянная	[15]	[23]	[26]
	C_1	1	1		1	C_9	—
C_3	1,5	3,5	4,5	C_{10}	—	0,45	0,39
C_5	0,77	0,53	0	C_{11}	—	0,25	—
C_6	0,11	0,09	—	C_{13}	—	—	1,44
C_7	0,18	0,2	—				

однородного стационарного атмосферного пограничного слоя является зависимость всех его турбулентных параметров и осредненных характеристик только от высоты над подстилающей поверхностью. В этом случае система дифференциальных уравнений для напряжений Рейнольдса, турбулентных потоков тепла и т. д. вырождается в систему алгебраических уравнений, которую можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \tau_{i3} \frac{d\bar{u}_j}{dz} + \tau_{j3} \frac{d\bar{u}_i}{dz} + A_1 \frac{\epsilon}{b} \tau_{ij} - \frac{2}{3} A_0 \epsilon \delta_{ij} = \\ & = A_5 \left(\tau_{ik} \frac{d\bar{u}_k}{dz} \delta_{j3} + \tau_{jk} \frac{d\bar{u}_k}{dz} \delta_{i3} + \frac{2}{3} \alpha \tau_{k3} \frac{d\bar{u}_k}{dz} \right) + \\ & + A_6 \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} \delta_{j3} + \frac{d\bar{u}_j}{dz} \delta_{i3} \right) b + \\ & + \frac{g}{T} (\overline{u'_i \theta'} \delta_{j3} + \overline{u'_j \theta'} \delta_{i3} - A_7 \overline{u'_3 \theta'}); \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \overline{u'_3 \theta'} \frac{d\bar{u}_i}{dz} + A_2 \frac{\epsilon}{b} \overline{u'_i \theta'} - A_8 \overline{u'_k \theta'} \frac{d\bar{u}_k}{dz} \delta_{i3} = \\ & = \tau_{i3} \frac{d\bar{\theta}}{dz} + A_3 g \frac{\theta'^2}{T}; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$2\overline{u'_3 \theta'} \frac{d\bar{\theta}}{dz} + A_4 \frac{\epsilon}{b} \overline{\theta'^2} = 0. \quad (2.22)$$

Решить эту систему уравнений можно следующим образом.

Из уравнения (2.22) найдем среднее квадратичное значение пульсации потенциальной температуры:

$$\overline{\theta'^2} = \frac{2}{A_4} \frac{b}{\epsilon} \overline{u'_3 \theta'} \frac{d\bar{\theta}}{dz}.$$

Если теперь это выражение подставить в уравнение (2.21), то для вектора потока тепла в турбулентном потоке можно записать алгебраическое уравнение

$$A_2 \frac{\epsilon}{b} \overline{u'_i \theta'} + \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} + \frac{2A_3}{A_4} \frac{b}{\epsilon} N^2 \delta_{i3} \right) \overline{u'_3 \theta'} = -\tau_{i3} \frac{d\bar{\theta}}{dz}, \quad (2.23)$$

где N^2 — частота Вейселя—Бранта.

Частота Вейселя–Бранта характеризует влияние температурной стратификации или сил плавучести на характеристики турбулентности газового потока. Эта частота определяется соотношением

$$N^2 = \frac{g}{T} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \approx \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}.$$

Влияние динамических процессов на турбулентность потока газа характеризуется параметром, который называется частотой Гельмгольца:

$$G^2 = \left(\frac{d\bar{u}_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{u}_2}{dz} \right)^2.$$

Отношение частоты Вейселя–Бранта и частоты Гельмгольца представляет собой еще одну безразмерную характеристику температурно-стратифицированного турбулентного течения – постоянную Ричардсона:

$$Ri = N^2/G^2.$$

Решение алгебраического уравнения для $\overline{u'_i \theta'}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{u'_i \theta'} = & -\frac{1}{A_2} \frac{b}{\epsilon} \tau_{i3} \frac{d\bar{\theta}}{dz} + \\ & + \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} + \frac{2A_3}{A_4} \frac{b}{\epsilon} N^2 \delta_{i3} \right) \left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \frac{2A_3}{A_2 A_4} N^2 \right)^{-1} \frac{\tau_{33}}{A_2^2} \frac{d\bar{\theta}}{dz}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Полученное соотношение для составляющих вектора турбулентного потока тепла подставим в уравнение для напряжений Рейнольдса и после приведения подобных членов придем к уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\epsilon}{b} \tau_{ij} - \frac{2}{3} A_0 \epsilon \delta_{ij} = & - \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} + \frac{1}{A_2} \frac{b}{\epsilon} N^2 \delta_{i3} \right) \tau_{j3} - \\ & - \left(\frac{d\bar{u}_j}{dz} + \frac{1}{A_2} \frac{b}{\epsilon} N^2 \delta_{j3} \right) \tau_{i3} + \\ & + \frac{\left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} \delta_{j3} + \frac{d\bar{u}_j}{dz} \delta_{i3} + 2A_2 \alpha_1 \frac{b}{\epsilon} N^2 \delta_{i3} \delta_{j3} \right)}{\left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_2 N^2 \right)} \frac{N^2}{A_2^2} \tau_{33}, \end{aligned}$$

где α_1, α_2 — постоянные параметры, которые вычисляются с помощью универсальных эмпирических констант:

$$\alpha_1 = 4A_3A_4^{-1};$$

$$\alpha_2 = 2A_2A_3^{-1}A_4^{-1}.$$

Решая полученное алгебраическое уравнение, находим тензор напряжений Рейнольдса, компоненты которого можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \frac{2A_0}{3A_1} b \delta_{ij} \left(1 - \frac{\frac{\alpha_1}{2A_2} N^2 \delta_{i3} \delta_{j3}}{\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_2 N^2} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \frac{A_0}{A_1^2} \frac{\left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_3 N^2 \right) \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} \delta_{j3} + \frac{d\bar{u}_j}{dz} \delta_{i3} \right)}{\left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_2 N^2 \right) \left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_4 N^2 \right)} \epsilon + \\ & + \frac{4}{3} \frac{A_0}{A_1^3} \frac{\left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_3 N^2 \right)}{\left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_2 N^2 \right) \left(\frac{\epsilon^2}{b^2} + \alpha_4 N^2 \right)} b \frac{d\bar{u}_i}{dz} \frac{d\bar{u}_j}{dz}, \quad (2.25) \end{aligned}$$

где α_3, α_4 — постоянные параметры, которые вычисляются с помощью универсальных эмпирических констант:

$$\alpha_3 = 2A_2^{-3}A_3A_4^{-1}; \quad \alpha_4 = A_1^{-1}A_2^{-1}.$$

Далее воспользуемся определением кинетической энергии турбулентности и, подставив в это соотношение полученное выражение для напряжений Рейнольдса, придем к квадратичному относительно параметра $(\epsilon/b)^2$ уравнению

$$\left(\frac{\epsilon}{b} \right)^4 + (\beta_1 N^2 - \beta_2 G^2) \left(\frac{\epsilon}{b} \right)^2 + (\beta_3 N^4 - \beta_4 G^2 N^2) = 0.$$

Здесь постоянные параметры $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ вычисляются с помощью универсальных эмпирических констант:

$$\beta_1 = 3A_1^{-1}A_2^{-1} + 2A_2^{-1}A_3A_4^{-1} + \frac{2}{3}A_0A_2^{-1}A_3A_4^{-1}(A_1 - A_0);$$

$$\beta_2 = -\frac{2}{3} A_0 A_1^{-2} (A_1 - A_0)^{-1};$$

$$\beta_3 = 2A_1^{-2} A_2^{-2} + \frac{2}{3} A_1^{-2} A_3 A_4^{-1} (3A_1 - 2A_0) (A_1 - A_0)^{-1};$$

$$\beta_4 = \frac{2}{3} A_0 A_1^{-2} A_2^{-2} A_4^{-1} (2A_2 - A_4) (A_1 - A_0)^{-1}.$$

Решая это квадратичное уравнение, для параметра $(\epsilon/b)^2$ получаем выражение

$$(\epsilon/b)^2 = 1/2 \beta_2 G^2 \Psi(\text{Ri}),$$

где

$$\Psi(\text{Ri}) = 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \text{Ri} + \sqrt{1 - \frac{2\beta_1\beta_2 - 4\beta_4}{\beta_2^2} \text{Ri} + \frac{\beta_1^2 - 4\beta_3}{\beta_2^2} \text{Ri}^2}$$

характеризует интенсивность турбулентности потока в зависимости от постоянной Ричардсона.

Полученное для параметра ϵ/b выражение подставим в выражение для напряжений Рейнольдса, в результате чего получим соотношение

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \frac{2A_0}{3A_1} b \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_2 A_2} \varphi(\text{Ri}) \delta_{i3} \delta_{j3} \right) \delta_{ij} - \\ & - \frac{4}{3} A_0 A_1^{-2} \beta_2^{-1} \Phi(\text{Ri}) \epsilon G^{-2} \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} \delta_{j3} + \frac{d\bar{u}_j}{dz} \delta_{i3} \right) + \\ & + \frac{8}{3} A_0 A_1^{-3} \beta_2^{-1} \Phi(\text{Ri}) b G^{-2} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \frac{d\bar{u}_j}{dz}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Входящие в это соотношение функции $\varphi(\text{Ri})$ и $\Phi(\text{Ri})$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(\text{Ri}) = & \text{Ri} \left(\frac{2\alpha_2}{\beta_2} \text{Ri} + \Psi(\text{Ri}) \right)^{-1}; \\ \Phi(\text{Ri}) = & \left(\frac{2\alpha_3}{\beta_2} \text{Ri} + \Psi(\text{Ri}) \right) \left(\frac{2\alpha_2}{\beta_2} \text{Ri} + \Psi(\text{Ri}) \right)^{-1} \left(\frac{2\alpha_4}{\beta_2} \text{Ri} + \Psi \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Скорость диссипации кинетической энергии турбулентности связана с этой энергией следующим образом:

$$\epsilon = C_\epsilon \frac{b^{3/2}}{l},$$

где l – масштаб турбулентности или длина пути смешения; C_ϵ – универсальная эмпирическая постоянная. Воспользовавшись теперь соотношением для параметра ϵ/b , получаем следующее выражение для кинетической энергии турбулентности:

$$b = \beta_0 l^2 G^2 \Psi(\text{Ri}).$$

Теперь выражение для напряжений Рейнольдса можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \frac{2A_0}{3A_1} b \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_2 A_2} \varphi(\text{Ri}) \delta_{i3} \delta_{j3} \right) \delta_{ij} - \\ & - \frac{4}{3} A_0 C_\epsilon A_1^{-2} \beta_0 \beta_2^{-1} \Phi(\text{Ri}) \Psi(\text{Ri}) l b^{1/2} \left(\frac{d\bar{u}_i}{dz} \delta_{j3} + \right. \\ & \left. + \frac{d\bar{u}_j}{dz} \delta_{i3} \right) + \frac{8}{3} A_0 A_1^{-3} \beta_0 \beta_2^{-1} \Phi(\text{Ri}) l^2 \frac{d\bar{u}_i}{dz} \frac{d\bar{u}_j}{dz}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Кинетическая энергия турбулентности не может иметь отрицательных значений. Это требование накладывает определенные ограничения на функцию $\Psi(\text{Ri})$, которая соответственно не может принимать отрицательных значений. В свою очередь, требование неотрицательности функции $\Psi(\text{Ri})$ накладывает ограничения на допустимые значения постоянной Ричардсона, которые должны быть меньше некоторого критического значения. Детальные исследования устойчивости течения газа относительно малых возмущений, выполненные в работе [45], пока-

зали, что устойчивость течения зависит от постоянной Ричардсона для рассматриваемого течения. Если постоянная Ричардсона во всей области течения превышает некоторое критическое значение (0,25), то поток безусловно устойчив, т. е. в нем не могут развиваться турбулентные движения. С помощью полученных результатов можно определить критическое значение постоянной Ричардсона, при котором кинетическая

Таблица 2.2. Числовые значения постоянных в формуле (2.27)

Параметр	[17]	[18]
$2/3 A_0 A_1^{-1}$	0,48	0,52
$\alpha_1, \beta_2^{-1} A_2^{-1}$	4,06	3,45
$4/3 A_0 C_\epsilon \beta_0 A_1^{-2} \beta_2^{-1}$	6,85	5,91
$8/3 A_0 A_1^{-3} \beta_0 \beta_2^{-1}$	2,87	2,23

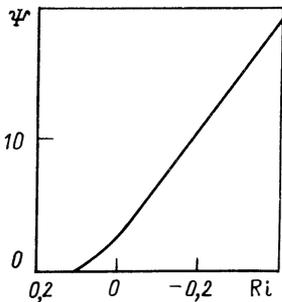


Рис. 2.2. Зависимость функции ψ от Ri

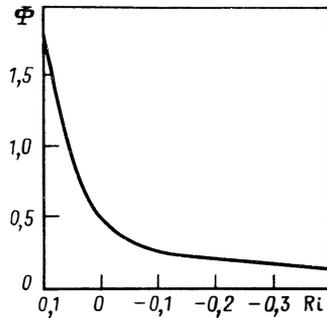


Рис. 2.3. Зависимость функции Φ от Ri

энергия турбулентности равна нулю, через универсальные эмпирические постоянные. Для критической постоянной Ричардсона из уравнения

$$\Psi(Ri, k_p) = 0$$

получаем

$$Ri = \beta_4 / \beta_3.$$

С помощью универсальных эмпирических постоянных, входящих непосредственно в систему уравнений термодинамики температурно-стратифицированного турбулентного течения, можно определить значения постоянных параметров в полученных здесь формулах для параметров турбулентности [17, 18] (табл. 2.2).

На рис. 2.2 показана функция $\Psi(Ri)$. Эту функцию с достаточно высокой точностью можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$\Psi(Ri) = \begin{cases} 2 - 27Ri & \text{при } Ri \leq 0; \\ 2 - 12Ri & \text{при } Ri \geq 0. \end{cases}$$

Функции $\Phi(Ri)$ и $\varphi_1(Ri)$ показаны на рис. 2.3 и 2.4. Эти функции могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\Phi(Ri) = \begin{cases} \frac{0,5}{1 - 7,3Ri} & \text{при } Ri \leq 0; \\ 0,5(1 + 1,5Ri) & \text{при } Ri \geq 0; \end{cases}$$

$$\varphi_1(Ri) = 1 - \frac{\alpha_1}{\beta_2 A_2} \varphi(Ri) = \begin{cases} \frac{1 - 9,3Ri}{1 - 11,3Ri} & \text{при } Ri \leq 0; \\ \frac{1 - 1,8Ri}{1 - 4,3Ri} & \text{при } Ri \geq 0. \end{cases}$$

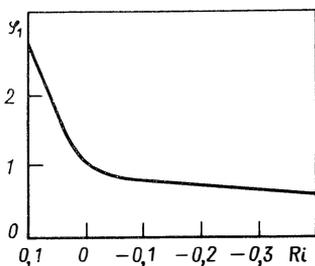


Рис. 2.4. Зависимость функции φ_1 от Ri

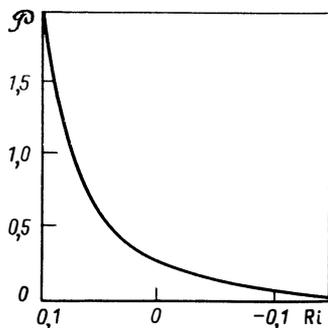


Рис. 2.5. Зависимость функции P от Ri

Вычисленная по данным работ [17, 18] критическая постоянная Ричардсона составляет 0,20 и 0,19, что близко к теоретической постоянной 0,25.

Скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, входящую в формулу (2.26), определяют решением уравнения следующего вида:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{b}{\epsilon} \tau_{33} \frac{d\epsilon}{dz} \right) - 2 \frac{C_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 2}} \left(\tau_{33} k \frac{d\bar{u}_k}{dz} - g \frac{\overline{u'_3 \theta'}}{\bar{T}} \right) \frac{\epsilon}{b} = \frac{C_{\epsilon 3}}{C_{\epsilon 2}} \frac{\epsilon^2}{b},$$

где универсальные эмпирические постоянные имеют следующие значения: $C_{\epsilon 1} = 1,45$; $C_{\epsilon 2} = 0,15$; $C_{\epsilon 3} = 1,9$. Подставив в это уравнение полученные соотношения для параметров турбулентного течения атмосферного пограничного слоя, получаем

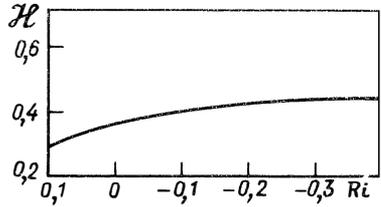
$$\frac{d}{dz} \left[\mathcal{P}(Ri) G^{-2} \frac{d\epsilon^2}{dz} \right] = \mathcal{H}(Ri) G \epsilon,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Ri) &= \left[1 - \frac{\alpha_1}{A_2 \beta_2} \varphi(Ri) \right] \Psi^{-1}(Ri); \\ \mathcal{H}(Ri) &= \frac{3A_1 C_{\epsilon 3} \beta_2}{2A_0 C_{\epsilon 2}} - \frac{4C_{\epsilon 1}}{A_1 C_{\epsilon 2}} \left[\Phi(Ri) + \right. \\ &+ \left. \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{A_2 \beta_2} \varphi(Ri) \right) \left(\Psi(Ri) + \frac{4A_3}{A_2 A_4 \beta_2} Ri \right)^{-1} Ri \right]. \end{aligned}$$

Значения этих функций показаны на рис. 2.5 и 2.6.

Рис. 2.6. Зависимость функции \mathcal{H} от Ri



В формуле (2.27) для напряжений Рейнольдса вместо скорости диссипации кинетической энергии турбулентности в качестве определяющего параметра турбулентного течения использован масштаб турбулентности l . Этот масштаб известным образом связан с кинетической энергией турбулентности и скоростью ее диссипации. Однако при моделировании течения атмосферного пограничного слоя для масштаба турбулентности применяют и более простые способы вычисления, основанные на разнообразных эмпирических формулах. Наиболее часто для этих целей применяется формула Блэкедара [46]

$$l = \frac{\mathcal{K}z}{1 + z/z_a},$$

где z_a — параметр течения, зависящий от постоянной Россби. Формула Блэкедара позволяет получить вполне удовлетворительные результаты для нейтрально-стратифицированного течения, в других случаях ее применимость сомнительна.

Необходимым этапом разработки любой расчетной модели для атмосферного пограничного слоя является ее проверка на конкретном течении, т. е. тестирование расчетной модели. Как правило, для тестирования используются характеристики течения атмосферного приземного слоя. Связано это с тем, что режим течения приземного слоя атмосферы, особенно при нейтральной стратификации, описывается достаточно надежно как теоретически, так и экспериментально. Течение приземного слоя в настоящее время изучено наиболее полно, чего нельзя сказать о течении во всем атмосферном пограничном слое.

При нейтральной стратификации приземного слоя атмосферы скорость ветра меняется с высотой по логарифмическому закону, т. е.

$$u(z) = \frac{u_*}{\mathcal{K}} \ln \frac{z}{z_0}, \quad v(z) = 0,$$

а масштаб турбулентности — по линейному закону, т. е.

$$l(z) = \mathcal{K}z,$$

где u_* — динамическая скорость течения или скорость трения; z_0 — высота шероховатости подстилающей поверхности.

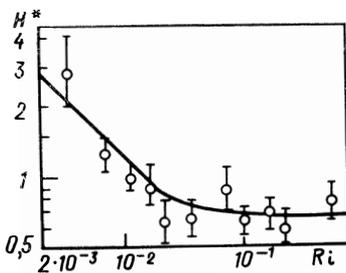


Рис. 2.7. Зависимость безразмерного потока тепла от Ri

Изучение течения атмосферного приземного слоя показало, что турбулентные потоки количества движения и тепла в пределах всего приземного слоя остаются постоянными и не меняются с высотой. Если в формулы рассматриваемой здесь расчетной модели подставить логарифмическую зависимость для скорости ветра и линейную зависимость для масштаба турбулентности, то для напряжений Рейнольдса получим постоянные значения:

Исследование течения атмосферного приземного слоя показало, что турбулентные потоки количества движения и тепла в пределах всего приземного слоя остаются постоянными и не меняются с высотой. Если в формулы рассматриваемой здесь расчетной модели подставить логарифмическую зависимость для скорости ветра и линейную зависимость для масштаба турбулентности, то для напряжений Рейнольдса получим постоянные значения:

$$\frac{\overline{u'^2}}{u_*^2} = \frac{4A_0\beta_0}{3A_1} \left(1 + \frac{2}{A_1^2\beta_2} \right);$$

$$\frac{\overline{u'^2}}{u_*^2} = \frac{4}{3} \frac{A_0\beta_0}{A_1};$$

$$\frac{\overline{u_3'^2}}{u_*^2} = \frac{4}{3} \frac{A_0\beta_0}{A_1};$$

$$\overline{u_1' u_2'} = 0;$$

$$\frac{\overline{u_1' u_3'}}{u_*^2} = - \frac{4\sqrt{2} A_0\beta_0^{3/2} C_\epsilon}{3A_1^2\beta_2}.$$

Важной характеристикой температурно-стратифицированного турбулентного течения приземного слоя атмосферы является турбулентный поток тепла:

$$H = \rho C_p \overline{u_3' \theta'}.$$

Экспериментально зависимость турбулентного потока тепла от постоянной Ричардсона изучалась Суинбенком [47], Тейлором [48]. На рис. 2.7 показаны сводные эмпирические данные для безразмерной величины турбулентного потока тепла, определяемой соотношением

$$H^* = \alpha^2 | Ri |^{-1/2} \frac{\left[\frac{H}{\rho C_p \cdot \frac{d\theta}{dz}} \right]}{l^2 \frac{d\bar{u}}{dz}}.$$

Используя расчетную модель, безразмерную величину турбулентного потока тепла можно выразить так:

$$H^* = 0,7 \kappa^2 \frac{A_1}{A_2} |\text{Ri}|^{-1/2} \frac{\Psi^{3/2}(\text{Ri})}{\alpha_1 \text{Ri} + \Psi(\text{Ri})}.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции H^* . При стремлении аргумента Ri к нулю функция H^* ведет себя следующим образом:

$$H^* \sim 0,7 \sqrt{2} \kappa^2 \frac{A_1}{A_2} |\text{Ri}|^{-1/2}.$$

При больших отрицательных значениях постоянной Ричардсона безразмерная величина турбулентного потока тепла стремится к постоянному значению:

$$H^* \sim 0,7 \kappa^2 \frac{A_1}{A_2} [\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3} + \beta_1]^{3/2} \times \\ \times [\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_3} + \beta_1 - \alpha_1 \beta_1]^{-1} \beta_2^{-1/2}.$$

Таким образом, тестирование расчетной модели показало, что она правильно описывает поведение параметров турбулентного приземного слоя, а получаемые с ее помощью числовые значения близки к экспериментально полученным.

2.3. Турбулентная диффузия высокодисперсных аэрозольных частиц в атмосферном пограничном слое

В первой главе было показано, что высокодисперсные аэрозольные частицы, обладая малым временем релаксации ($\sim 3 \cdot 10^{-6}$ с) и малой скоростью гравитационного оседания, ведут себя в турбулентных потоках газа подобно газообразной примеси. Динамику и временную эволюцию совокупности высокодисперсных аэрозольных частиц, рассматривая такую совокупность как непрерывно распределенную примесь, можно описать системой уравнений (1.58), которая в условиях горизонтально-однородного стационарного атмосферного пограничного слоя примет вид

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial u'_k c'}}{\partial x_k} = 0;$$

$$\frac{\partial \overline{u'_i c'}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i c'}}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + (1 - C_3) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \overline{u'_k c'} = C_6 \frac{\epsilon}{b} \overline{u'_i c'};$$

$$\frac{\overline{\partial c'^2}}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\overline{\partial c'^2}}{\partial x_k} + 2\overline{u'_k c'} \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_k} + C_7 \frac{\epsilon}{b} \overline{c'^2} = 0.$$

Эту систему уравнений можно решить относительно осредненной концентрации примеси. Для этого перейдем к новой системе координат с помощью преобразования

$$\overline{c}(x, t) = q(\xi, t),$$

где переменные x и ξ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \overline{u}_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad (2.28)$$

$$\xi_i(x, t=0) = x_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.29)$$

Соотношения (2.28) образуют систему дифференциальных уравнений, а соотношения (2.29) – соответствующие начальные условия. Решая эту задачу, найдем связь переменных ξ_i с переменными x_i и временем t . Такая связь для данного случая имеет вид

$$\xi_i = x_i - \overline{u}_i(z)t; \quad i = 1, 2, 3.$$

В новой системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) осредненная концентрация примеси и турбулентный поток примеси выражаются уравнениями

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \left(\delta_{ik} - \frac{d\overline{u}_i}{dz} \delta_{k3} t \right) \frac{\partial \Pi_k}{\partial \xi_i} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} + \left(\frac{\overline{u'_i u'_k}}{u'_i u'_k} - \frac{\overline{u'_i u'_3}}{u'_i u'_3} \frac{d\overline{u}_k}{dz} t \right) \frac{\partial q}{\partial \xi_k} + \frac{d\overline{u}_i}{dz} \Pi_3 = C_6 \frac{\epsilon}{b} \Pi_i.$$

Решая при нулевых начальных условиях систему уравнений для составляющих вектора турбулентного потока примеси, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \int_0^t \exp \left(- \frac{t-t'}{T} \right) \left(\frac{\overline{u'_i u'_k}}{u'_i u'_k} - \frac{\overline{u'_i u'_3}}{u'_i u'_3} \frac{d\overline{u}_k}{dz} t' - \right. \\ & \left. - \frac{\overline{u'_k u'_3}}{u'_k u'_3} \frac{d\overline{u}_i}{dz} (t-t') + \overline{u'_3}^2 \frac{d\overline{u}_i}{dz} \frac{d\overline{u}_j}{dz} (t-t')t' \right) \frac{\partial q(\xi, t')}{\partial \xi_k} dt', \end{aligned}$$

где T – временной масштаб, равный

$$T = \frac{1}{C_6} \frac{b}{\epsilon}.$$

Перейдем к исходной прямоугольной системе координат, воспользовавшись соотношением

$$\frac{\partial q}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + \frac{d\bar{u}_1}{dz} \delta_{k3t} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1}.$$

В результате такого перехода из соотношения для функции $\Pi_i(\xi, t)$ получим выражения для $\langle u_i' c' \rangle$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_i' c'}{u_i' c'} = & - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) \left[\overline{u_i' u_k'} - \overline{u_3' u_k'} \frac{d\bar{u}_i}{dz} (t-t') \right] \times \\ & \times \frac{\partial \bar{c}(x, t')}{\partial x_k} dt'. \end{aligned}$$

Полученное выражение теперь можно подставить в уравнение для осредненной концентрации примеси, которое после этого примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} = & \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) \left[u_i' u_k' - \right. \\ & \left. - \overline{u_3' u_k'} \frac{d\bar{u}_i}{dz} (t-t') \right] \frac{\partial \bar{c}(x, t')}{\partial x_k} dt' + \Phi(x, t). \end{aligned}$$

В правую часть этого уравнения включена функция $\Phi(x, t)$, которая описывает распределение в пространстве и изменение со временем мощности источника примеси. Полученное для осредненной концентрации примеси уравнение можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_*}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial c_*}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial c_*}{\partial t} + \frac{1}{T} c_* \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial c_*}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j' u_3'} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \\ + \frac{\partial \Phi_*}{\partial t} + \frac{1}{T} \Phi_*, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где c_* и Φ_* — функции вида

$$c_* = \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{1}{T} \bar{c};$$

$$\Phi_* = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{T} \Phi.$$

Уравнение (2.30) относится к классу телеграфных или гиперболических уравнений, которые применительно к диффузионному процессу описывают распространение вещества с конечной скоростью диффузии. Функция c_* , полученная в результате решения уравнения (2.30), имеет значения, отличные от нуля лишь в ограниченной области пространства, которая изменяется со временем. Сама же осредненная концентрация \bar{c} , которая связана с функцией c_* соотношением

$$\bar{c}(x, t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) c_*(x, t') dt' \quad (2.31)$$

также локализована в пространстве. Размеры области локализации ненулевых значений осредненной концентрации $\bar{c}(x, t)$ растут со временем, при этом скорость их роста, в свою очередь, зависит от коэффициентов диффузии.

Следует отметить, что в некоторых работах [49, 50] предлагалось использовать для описания процесса турбулентной диффузии уравнения гиперболического типа, однако эти предложения ограничивались случаем одномерной диффузии примеси. Обобщения на случай трехмерной диффузии примеси в пространстве были связаны с определенными трудностями, так как решения уравнений гиперболического типа для точечного мгновенного источника на границе облака примеси имеют в случае трехмерной диффузии дельтаобразный разрыв. В полученном здесь уравнении турбулентной диффузии такой дельтаобразный разрыв имеет место только для функции $c_*(x, t)$, с помощью же преобразования (2.31) он исчезает. Таким образом, полученная модель турбулентной диффузии примеси в пространстве не приводит к физически необоснованным результатам.

В подавляющем числе работ, посвященных моделированию турбулентной диффузии примеси в атмосфере, для осредненной концентрации примеси применяется уравнение параболического типа, которое описывает диффузионный процесс с бесконечной скоростью. Применение такого приближения приводит к тому, что распределение концентрации примеси в пространстве не ограничено нулевыми значениями и облако примеси не имеет четко выраженных границ. Параболическое приближение процесса турбулентной диффузии приводит к искажению распределения диффундирующего вещества вблизи границы облака, однако внутри облака примеси вдали от границ параболическое приближение позволяет получить достаточно хорошие результаты, мало отличающиеся от тех, какие получаются в рамках гиперболического приближения.

Рассмотренная здесь модель процесса турбулентной диффузии примеси в атмосферном пограничном слое позволяет получить параболическое приближение путем устремления временного масштаба T к нулю. Уравнение турбулентной диффузии:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + \Phi(x, t). \quad (2.32)$$

Коэффициенты турбулентной диффузии здесь имеют следующий вид:

$$D_{ij} = T \overline{u'_i u'_j} - T^2 \overline{u'_3 u'_j} \frac{d\bar{u}_i}{dz}.$$

Как правило, в этом выражении вторым членом в его правой части можно пренебречь, так как он содержит квадрат малого значения T . Таким образом, для коэффициентов турбулентной диффузии можно записать следующее выражение:

$$D_{ij} = \frac{b}{C_\epsilon \epsilon} \overline{u'_i u'_j}.$$

Если скорость диссипации турбулентной энергии выразить через кинетическую энергию турбулентности и масштаб турбулентности с помощью известного соотношения, то выражение для D_{ij} примет вид

$$D_{ij} = (C_\epsilon C_\epsilon)^{-1} \frac{l}{\sqrt{b}} \overline{u'_i u'_j}.$$

В полученной здесь модели процесса атмосферной диффузии примеси коэффициенты турбулентной диффузии образуют тензор второго ранга. Известно, что для уравнений с тензорным характером задания коэффициентов диффузии может существовать система координат, в которой недиагональные компоненты тензора становятся равными нулю. Такая система координат называется системой главных осей тензора. Таким образом, в системе главных осей тензора коэффициентов турбулентной диффузии само уравнение диффузии приобретает наиболее простой вид, так как отличными от нуля будут лишь три составляющие тензора, соответствующие трем главным осям системы координат. В общем случае уравнение турбулентной диффузии может и не иметь системы главных осей, по крайней мере нет универсального алгоритма их определения [51]. В то же время достаточно просто можно найти систему координат, которая в определенном смысле будет близкой к системе главных осей. Для определения такой квази-главной системы координат рассмотрим преобразование

$$x'_i = x_i + \eta_i(x_3),$$

где $\eta_3 = 0$.

В новой системе координат уравнение турбулентной диффузии (2.32) примет вид

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\left(D_{ii} + D_{3i} \frac{d\eta_i}{dz} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\eta_i}{dz} \left(D_{33} \frac{d\eta_i}{dz} + D_{3i} \right) \left] \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x'_i} + \frac{\partial}{x'_3} D'_{33} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x'_3} + \right. \\
& + 2 \left(D_{33} \frac{d\eta_i}{dz} + D_{3i} \right) \frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial x'_3 \partial x'_i} + 2 \left[\frac{d\eta_2}{dz} \times \right. \\
& \times \left(D_{33} \frac{d\eta_1}{dz} + D_{31} \right) + \left(D_{12} + D_{32} \frac{d\eta_1}{dz} \right) \left. \right] \times \\
& \times \frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial x'_2 \partial x'_2} + \Phi'(x', t).
\end{aligned}$$

Если выбрать функции $\eta_i(z)$, $i = 1, 2$ так, чтобы выполнялось условие

$$D_{33} \frac{d\eta_i}{dz} + D_{3i} = 0;$$

$$\eta_i(0) = 0,$$

то уравнение турбулентной диффузии будет выглядеть так:

$$\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x'_k} D'_{kk} \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x'_k} + 2D'_{12} \frac{\partial^2 \bar{c}_1}{\partial x'_1 \partial x'_2} + \Phi'. \quad (2.33)$$

Коэффициенты турбулентной диффузии в квазиглавной системе координат связаны с коэффициентами турбулентной диффузии в исходной прямоугольной системе координат соотношениями вида

$$D'_{kk} = D_{kk} - \frac{D_{3k}^2}{D_{33}}; \quad k = 1, 2;$$

$$D'_{12} = D_{12} - \frac{D_{13}D_{23}}{D_{33}};$$

$$D'_{33} = D_{33}.$$

Переход к квазиглавной системе координат осуществляется с помощью преобразования

$$x'_t = x_i + \frac{2\beta_0 C_\epsilon}{A_1 \beta_2} \pi_i(z) \left(\frac{2\beta_0 C_\epsilon}{A_1 \beta_2} = 11 \div 14,4 \right).$$

Функции π_i вычисляются по формуле

$$\pi_i = \int_0^z \Phi(\text{Ri}) \Psi(\text{Ri}) l(\xi) (\sqrt{b(\xi)})^{-1} \frac{d\bar{u}_i}{d\xi} d\xi.$$

Для коэффициентов турбулентной диффузии в квазиглавной системе координат можно записать

$$D'_{33} = a_1 \Phi_1(\text{Ri}) l \sqrt{b}, \quad a_1 = 0,48 \div 0,52;$$

$$D'_{12} = a_2 \Phi_2(\text{Ri}) \frac{l^3}{\sqrt{b}} \frac{d\bar{u}_1}{dz} \frac{d\bar{u}_2}{dz}, \quad a_2 = 2,3 \div 2,9;$$

$$D'_{33} = a_1 l \sqrt{b} + a_2 \Phi_2(\text{Ri}) \frac{l^3}{\sqrt{b}} \left(\frac{d\bar{u}_k}{dz} \right)^2,$$

где $\Phi_2(\text{Ri})$ — функция вида

$$\Phi_2(\text{Ri}) = \left[1 - \frac{\beta_0 C \epsilon^2}{\beta_2} \Phi(\text{Ri}) \Psi(\text{Ri}) \varphi_1^{-1}(\text{Ri}) \right] \Phi(\text{Ri}) \Psi(\text{Ri}).$$

Чтобы решить уравнение турбулентной диффузии примеси, необходимо задать начальное и краевые условия. Начальное условие для осредненной мгновенной концентрации примеси при отсутствии фона рассматриваемой примеси в атмосфере должно быть нулевым, т. е.

$$\bar{c}(x, t = 0) = 0.$$

Если же есть некоторый фон того же вещества, диффузия которого рассматривается, то начальное условие должно иметь вид

$$\bar{c}(x, t = 0) = \bar{c}_\Phi,$$

где $\bar{c}_\Phi(x)$ — фоновое значение осредненной концентрации. Фоновое значение осредненной концентрации описывается стационарным уравнением диффузии

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{c}_\Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij} \frac{\partial \bar{c}_\Phi}{\partial x_j} + \Phi_0(x),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция распределения мощности фоновых источников загрязнения в пространстве. Для $\bar{c}_2 = \bar{c} - \bar{c}_\Phi$ уравнение диффузии имеет тот же вид, что и для \bar{c} , однако начальное условие для \bar{c}_2 независимо от того, есть ли фоновая концентрация, является нулевым. Таким образом, диффузионная задача с нулевым начальным условием является достаточно общей, так как к ней можно прийти с помощью простых соотношений в самом общем случае.

Краевые условия должны отражать характер поведения осредненной мгновенной концентрации примеси вблизи границы области распро-

странения примеси. В атмосферном пограничном слое примесь распространяется в полупространстве, т. е. достаточно четко можно выделить лишь одну границу — поверхность земли. В горизонтальных направлениях, как правило, нет препятствий для распространения вещества, поэтому соответствующие краевые условия можно представить в виде предельных соотношений

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \bar{c}(x, t) = 0; \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \bar{c}(x, t) = 0.$$

Эти два условия можно объединить в одно предельное соотношение

$$\lim_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty} \bar{c}(x, t) = 0.$$

Вертикальный поток вещества определяется интенсивностью турбулентного перемешивания в этом направлении. Как известно, вертикальный турбулентный обмен по мере приближения к верхней границе атмосферного пограничного слоя затухает и в идеальной структуре атмосферного течения исчезает на границе АПС. В реальных атмосферных течениях в свободной атмосфере за пределами атмосферного пограничного слоя наблюдается остаточная турбулентность, обусловленная, по-видимому, эффектами перемежаемости верхней границы АПС, возбуждением турбулентных движений гравитационными волнами и т. д. Интенсивность остаточной турбулентности свободной атмосферы вблизи верхней границы АПС намного ниже интенсивности турбулентности внутри атмосферного пограничного слоя, поэтому при решении большинства прикладных задач, связанных с переносом вещества внутри АПС, интенсивностью турбулентности свободной атмосферы можно пренебречь. Такое предположение позволяет на верхней границе АПС поставить краевое условие

$$\left[D_{33} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right]_{z=H} = \left[D_m \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right]_{z=H},$$

где H — высота атмосферного пограничного слоя; D_m — коэффициент молекулярной диффузии в атмосферном воздухе на высоте H . Следует отметить, что из-за малых значений вертикальных коэффициентов турбулентной диффузии на верхней границе АПС задание верхнего краевого условия для большинства практических задач не является критическим. Вполне удовлетворительные результаты получаются и тогда, когда верхнее краевое условие задается предельным соотношением

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{c}(x, t) = 0.$$

Наиболее важным краевым условием при решении задач распространения вещества в атмосферном пограничном слое является условие

взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью. Характер взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью зависит от многих факторов, связанных с физико-химическими свойствами как самой примеси, так и подстилающей поверхности. В самом общем виде условие взаимодействия с подстилающей поверхностью можно описать с помощью некоторого обобщенного параметра, который обычно называют скоростью оседания v_0 . С помощью этого параметра краевое условие на нижней границе области распространения примеси можно записать следующим образом:

$$\left[D_{33} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right]_{z=0} = [v_0 \bar{c}]_{z=0}.$$

Здесь слева стоит турбулентный поток вещества, направленный к поверхности земли, а справа – поток вещества непосредственно на подстилающую поверхность. Таким образом, нижнее краевое условие представляет собой балансное соотношение для потоков вещества у границы земля–воздух.

Полученная математическая модель позволяет решать широкий круг задач, связанных с переносом вещества в пограничном слое атмосферы. Для этого необходимо задать основные характеристики атмосферного течения – вертикальные профили вектора скорости ветра и температуры. В качестве таких параметров можно использовать реально измеренные величины, что позволяет проводить расчеты полей концентрации загрязняющих веществ с учетом реальных атмосферных условий.

2.4. Турбулентная диффузия радиоактивных веществ в атмосферном пограничном слое

В предыдущем разделе была рассмотрена модель процесса атмосферной диффузии для примеси, состоящей из высокодисперсных частиц, которые не меняют свой состав и другие характеристики вследствие химических, радиоактивных и других превращений. Обычно такая примесь называется консервативной. Очевидно, что консервативный тип примеси не охватывает всех возможных веществ, загрязняющих атмосферу. Достаточно часто вещество в атмосфере вступает в химические реакции с компонентами атмосферного воздуха или содержащимися в нем другими загрязняющими веществами. Трансформация загрязняющего вещества или частиц, в которых оно содержится, может происходить не только за счет чисто химических процессов. В реальных условиях наблюдаются сложные физико-химические взаимодействия между молекулами загрязняющего вещества и компонентами атмосферного воздуха, в том числе и с участием различных видов ионизирующих излучений.

Полученные уравнения как для осредненной концентрации отдельных нуклидов, так и для составляющих вектора их турбулентных потоков практически совпадают с аналогичными уравнениями для консервативной примеси, однако отличаются от них дополнительными членами, учитывающими кинетику накопления и распада радионуклидов. Так, члены $\lambda_s \bar{q}_s$; $\lambda_s \overline{u'_i q'_s}$ учитывают уменьшение соответствующих значений осредненной концентрации и турбулентного потока вещества вследствие собственно радиоактивного распада нуклида, а члены $\lambda_{s-1} \bar{q}_{s-1}$, $\lambda_{s-1} \overline{u'_i q'_s}$ учитывают увеличение соответствующих величин вследствие распада материнского радионуклида.

Решение системы уравнений для $\langle u'_i q'_s \rangle$ удобнее всего записать для образа Лапласа, т. е. для $\bar{\pi}_{i,s} \div \langle u'_i q'_s \rangle$. Соотношение для $\bar{\pi}_{i,s}(x, p)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{i,s}(x, p) = & - \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \left\{ \left[\overline{u'_i u'_k} - \right. \right. \\ & - \overline{u'_3 u'_k} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \left. \right] \frac{\partial \tilde{q}_s(x, p)}{\partial x_k} - \\ & \left. - \lambda_{s-1} \left[\bar{\pi}_{i,s-1}(x, p) - \bar{\pi}_{3,s-1} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Для $\bar{\pi}_{3,s}(x, p)$ из этого соотношения можно получить рекуррентное соотношение

$$\bar{\pi}_{3,s} = \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \left(-\overline{u'_3 u'_k} \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x_k} + \lambda_{s-1} \bar{\pi}_{3,s-1} \right),$$

решая которое, находим

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{3,s} = & \frac{-\overline{u'_3 u'_k}}{\left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)} \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{s-1} \prod_{l=1}^j \prod_{l=1}^l \times \\ & \times \frac{\lambda_{s-l} \overline{u'_3 u'_k}}{\left(p + \lambda_{s-l} + \frac{1}{\tau} \right) \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)} \frac{\partial \tilde{q}_{s-j}}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Полученные соотношения теперь подставим в уравнение (2.35), к которому предварительно применим преобразование Лапласа. После приведения подобных членов в полученном таким способом соотношении

получаем для образа Лапласа осредненной концентрации s -го радионуклида уравнение

$$\begin{aligned} & (p + \lambda_s) \tilde{q}_s - \lambda_{s-1} + \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x_k} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\overline{u'_i u'_k} \overline{u'_3 u'_k} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^{-1}}{\left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)} \frac{\partial q_s}{\partial x_k} \right\} - \\ & - \lambda_{s-1} \frac{\partial \bar{\pi}_{i, s-1}}{\partial x_i} + \lambda_{s-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\bar{\pi}_{3, s-1} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Величину $\partial \bar{\pi}_{i, s-1} / \partial x_i$ можно выразить через осредненные концентрации \tilde{q}_{s-1} и \tilde{q}_{s-2} , воспользовавшись для этого уравнением (2.35). Таким образом, можно записать

$$\frac{\partial \bar{\pi}_{i, s-1}}{\partial x_i} = -(p + \lambda_{s-1}) \tilde{q}_{s-1} + \lambda_{s-2} \tilde{q}_{s-2} - \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{q}_{s-1}}{\partial x_k}$$

и после подстановки в уравнение для $\tilde{q}_s(x, p)$ и приведения подобных членов получаем

$$\begin{aligned} & (p + \lambda_s) \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^2 \tilde{q}_s - 2\lambda_{s-1} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^2 \tilde{q}_{s-1} + \\ & + \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x_k} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x_k} \left(p + \lambda_s + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tau} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_3 u'_k} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \frac{\partial \tilde{q}_s}{\partial x_k} \right) - \lambda_{s-1} \lambda_{s-2} \times \\ & \times \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right) \tilde{q}_{s-2} + \lambda_{s-1} \left(\lambda_{s-1} - \lambda_s - \frac{1}{\tau} \right) \times \\ & \times \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right) \tilde{q}_{s-1} + \lambda_{s-1} \left(p + \lambda_s + \frac{1}{\tau} \right) \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{q}_{s-1}}{\partial x_k} - \\ & - \lambda_{s-1} \left(p + \lambda_{s-1} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_3 u'_k} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \frac{\partial \tilde{q}_{s-1}}{\partial x_k} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda_{s-1} \left(p + \lambda_{s-1} + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\overline{u'_3 u'_k}}{u'_3 u'_k} \frac{d\bar{u}_i}{dz} \times \right. \\
& \times \left. \sum_{j=1}^{s-1} \prod_{l=1}^j \frac{\lambda_{s-l}}{\left(p + \lambda_{s-l} + \frac{1}{\tau} \right)} \frac{\partial \tilde{q}_{s-j}}{\partial x_k} \right]. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Это уравнение описывает процесс турбулентной диффузии радионуклидов в атмосфере с учетом конечной скорости движения турбулентных возмущений.

Параболическое приближение процесса турбулентной диффузии радиоактивной примеси можно получить, устремив, как обычно, временной масштаб τ к нулю, соответственно к нулю будут стремиться и временные параметры T_s . В этом случае перенос и рассеяние радиоактивной примеси, состоящей из смеси нуклидов, распадающихся по одной цепочке распада, описываются так:

$$\frac{\partial \bar{q}_s}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x_k} + \lambda_s \bar{q}_s - \lambda_{s-1} \bar{q}_{s-1} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij} \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial x_j}. \quad (2.38)$$

Особенности поведения радиоактивной примеси в атмосферном течении проявляются не только в том, что процесс переноса и рассеяния примеси описывается не одним уравнением, как в случае консервативной примеси, а системой уравнений диффузии, учитывающей кинетику накопления и распада радиоактивных веществ, но и в том, что взаимодействие радиоактивной примеси с подстилающей поверхностью описывается уравнением баланса у границы раздела земля–воздух:

$$\begin{aligned}
& \left[D_{33} \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial z} \right]_{z=0} = \beta_s \bar{q}_s(x, t) |_{z=0} - \\
& - \lambda_s \alpha_s \beta_{s-1} \int_0^t \bar{q}_{s-1}(x, \eta) \exp(-\lambda_{s-1}(t-\eta)) d\eta |_{z=0}. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения представляет собой поток s -го радионуклида, направленного к поверхности земли вследствие турбулентного перемешивания. Правая часть соотношения состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое – это поглощаемый подстилающей поверхностью поток s -го радионуклида. Здесь β_s – параметр взаимодействия нуклида с подстилающей поверхностью (скорость осаждения). Второе слагаемое описывает вторичный поток s -го радионуклида, направленный от поверхности земли, который возникает вследствие осевшего на подстилающую поверхность материнского нуклида и последующего его радиоактивного распада. Степень удержания нуклида подстилающей поверх-

ностью при его образовании в результате радиоактивного распада осевшего материнского нуклида характеризуется коэффициентом α_s . В литературе нет данных о количественных соотношениях для вторичных потоков радионуклидов с подстилающей поверхности. Неявно предполагается, что образовавшийся в результате распада нуклид уже не может покинуть поверхность земли, т. е. $\alpha_s = 0$. По-видимому, это предположение выполняется не всегда. Действительно, изотопы радиоактивного иода хорошо поглощаются подстилающей поверхностью, а их дочерние изотопы радиоактивного ксенона подстилающей поверхностью практически не удерживаются. Уже этот простой пример показывает возможность появления вторичных потоков радионуклидов, следовательно, в наиболее общем виде взаимодействие радиоактивной примеси с подстилающей поверхностью должно описываться соотношением (2.39).

2.5. Турбулентная диффузия нагретой примеси в атмосферном пограничном слое

Достаточно часто вещество, загрязняющее атмосферу, поступает в виде газов или аэрозольных образований, температура которых существенно отличается от температуры окружающей среды. Возмущения поля температуры в атмосфере, вызванные нагретой примесью, приводят к тому, что в области течения, где локализована примесь, появляются дополнительные объемные силы плавучести. За счет этого течение в области, содержащей примесь, отличается от течения в чистой атмосфере. По мере переноса нагретой примеси в атмосфере температура будет уменьшаться, стремясь выравняться с температурой окружающей среды, а следовательно, и действие объемных сил плавучести, вызванных нагретой примесью, будет уменьшаться. В результате этого возмущенное течение выравнивается с внешним атмосферным потоком.

При определенных условиях перенос и рассеяние температурного возмущения происходят подобно переносу и рассеянию вещества. Если нагретая примесь представляет собой совокупность аэрозольных частиц, у которых достаточно быстро устанавливается термодинамическое равновесие с окружающим воздухом, то возмущенная температура пропорциональная концентрации аэрозольных частиц. Такая задача может решаться для переноса и рассеяния температуры без учета поведения аэрозольных частиц, если их поведение мало отличается от поведения окружающего газа. Очевидно, что это справедливо для высокодисперсных аэрозольных частиц. Если между частицами аэрозоля и окружающим их воздухом нет термодинамического равновесия и происходит интенсивный теплообмен, влияющий на температуру окружающей среды, то задача существенно усложняется. Она включает в себя теперь не только описание процессов турбулентной диффузии температурного возмущения и аэрозольного образования, но и нагрев атмосферного воздуха в результате его теплообмена с аэрозольными части-

цами. Кроме того, необходимо учитывать также и изменение температуры самих аэрозольных частиц.

Все возможные случаи переноса и рассеяния нагретой примеси в атмосфере решить в рамках единого математического метода невозможно, по крайней мере в настоящее время. Поэтому рассмотрим сравнительно простой случай распространения в атмосферном течении газобразной нагретой примеси. Такой подход применим также и к случаю переноса высокодисперсных аэрозольных образований, когда между аэрозольными частицами и окружающим их воздухом быстро устанавливается термодинамическое равновесие. В данном случае температурное возмущение можно отождествлять с концентрацией загрязняющего вещества. Кроме этого предположения используем еще одно ограничение, которое накладываем на допустимый диапазон температур нагретой примеси: температура нагретой примеси и окружающего ее воздуха не должна превышать тот предел, при котором еще можно использовать приближение свободной конвекции.

Термодинамика атмосферного течения, включая и область, где локализована нагретая примесь, описывается в приближении свободной конвекции уравнениями

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta U_i + f \epsilon_{ik3} (U_k - U_{g,k}) - g_i \frac{\theta}{T};$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \chi \Delta T,$$

где U – вектор скорости течения во всей области течения, в том числе и в области, занятой температурным возмущением; T – абсолютная температура.

Скорость атмосферного течения с температурными возмущениями, вызванными нагретой примесью, можно представить как сумму скоростей течения невозмущенной атмосферы и возмущенного течения, т. е.

$$U = u + v.$$

Аналогичным образом можно поступить и с абсолютной температурой воздуха, выделив температуру T_a в невозмущенном атмосферном течении и температуру возмущения T_n . Таким образом, для T можно записать следующее соотношение:

$$T = T_a + T_n.$$

Из уравнений Навье—Стокса в приближении свободной конвекции можно получить соответствующие уравнения для скорости возмущенного течения, воспользовавшись для этого разложением скорости течения на скорость течения в невозмущенной атмосфере и скорость возмущенного течения, а также уравнениями Навье—Стокса для чистой атмосферы. Уравнения для v_i можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i u_k + v_k u_i) = \\ = - \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P_n}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i - g_i \left(\frac{\theta}{T} - \frac{\theta_a}{T_a} \right), \end{aligned}$$

где P_n — давление, обусловленное возмущенным течением. При выводе этого уравнения мы пренебрегли членами, связанными с силой Кориолиса, так как в данном случае они малы и не влияют на динамику температурного возмущения в атмосферном пограничном слое.

Для температурного возмущения можно записать уравнение

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_n}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k T_a + u_k T_n) = \chi \Delta T_n,$$

которое получается вычитанием из уравнения для температуры соответствующего уравнения для температуры в невозмущенной атмосфере. Здесь χ — коэффициент температуропроводности, который обычно имеет постоянное значение.

Полученные уравнения термодинамики температурного возмущения являются основой для построения математической модели распространения в атмосфере нагретой примеси. Поведение нагретой примеси можно охарактеризовать полем скоростей течения в возмущенной области и полем возмущенной температуры. Очевидно то, что возмущенное течение, так же как и внешнее атмосферное течение, характеризуется турбулентным режимом движения газовой среды. Таким образом, распределение температурного возмущения и скорость возмущенного потока должны характеризоваться осредненными параметрами, прежде всего осредненной скоростью и осредненной температурой. Операция осреднения при этом должна носить статистический характер. Применяя операцию статистического осреднения к уравнению для v_i , получаем соответствующее уравнение для осредненной скорости возмущенного течения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{v}_i + \bar{u}_i \bar{v}_k) + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial x_i} = \\ = \nu \Delta \bar{v}_i - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}'_i \bar{v}'_k + \bar{v}'_i \bar{u}'_k + \bar{v}'_k \bar{u}'_i) - g_i \frac{\bar{\theta}_n}{\theta_a}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В этом уравнении появляются новые неизвестные величины, характеризующие турбулентные потоки количества движения за счет пульсаций скорости возмущенного потока $\langle v_i' v_k' \rangle$, а также за счет корреляционных связей между пульсациями скорости возмущенного течения и чистой атмосферы $\langle u_k' v_i' \rangle$.

Применяя операцию статистического осреднения к уравнению для температурного возмущения, получаем соответствующее уравнение для осредненной температуры \overline{T}_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{T}_n}{\partial t} + \overline{v}_k \frac{\partial \overline{T}_n}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v}_k \overline{T}_a + \overline{u}_k \overline{T}_n) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v_k' T_n'} + \overline{v_k' T_a'} + \overline{u_k' T_n'}) = \chi \Delta \overline{T}_n. \end{aligned} \quad (2.41)$$

В этом уравнении, так же как и в уравнении для осредненной скорости возмущенного течения, появляются новые неизвестные величины, характеризующие турбулентные потоки тепла.

Для величин \overline{v}_i и \overline{T}_n характерно, что они имеют ненулевые значения только в области возмущенного течения, а на границе этой области "избыточные" скорость течения и температура обращаются в нуль. Используя такое условие, можно получить соотношения, которым должны удовлетворять турбулентные потоки на границе области возмущенного течения. Так, из уравнения (2.40) можно получить следующее условие:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v_i' v_k'} + \overline{v_i' u_k'} + \overline{v_k' u_i'}) - \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \overline{P}_n}{\partial x_i} \right]_S = 0,$$

из которого следует, что на границе области возмущенного течения действуют турбулентные напряжения, обусловленные переносом количества движения за счет турбулентных пульсаций скорости возмущенного и невозмущенного течения. Для турбулентных потоков тепла соотношение на границе возмущенной области можно представить следующим образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v_k' T_n'} + \overline{v_k' T_a'} + \overline{u_k' T_n'}) \right]_S = 0.$$

Из этого соотношения видно, что между возмущенной областью и чистой атмосферой происходит обмен не только количеством движения, но и тепла турбулентными потоками, обусловленными пульсационным движением газовой среды как в чистой атмосфере, так и в ее возмущенной части.

Для определения турбулентных потоков количества движения и тепла, входящих в уравнения (2.41) и (2.42), можно использовать различные модели турбулентного процесса. Можно, например, попытаться построить полуэмпирическую модель, аналогичную моделям Прандтля, Кармана и Тейлора, и выразить эти величины непосредственно через осредненные параметры возмущенного течения. Замкнутая задача, описывающая распространение в атмосфере нагретой примеси, в этом случае состоит из двух уравнений для осредненной скорости и осредненной температуры. Однако следует иметь в виду, что обосновать такую модель очень сложно, так как в данном случае мы имеем дело с процессом взаимодействия, по существу, двух турбулентных течений — возмущенного течения и течения в чистой атмосфере, которые взаимодействуют сложным образом. Хотя такое взаимодействие может быть и не очень сильным, но его хватает, чтобы существенно влиять на поведение нагретой примеси. Более обоснованные результаты можно получить в рамках методов моделирования второго порядка, которые были подробно рассмотрены в разд. 1.2 и 2.2. Основой этих методов является построение аппроксимационных соотношений для многих величин, появляющихся в уравнениях для турбулентных потоков количества движения и тепла. В этом случае математическая модель процесса распространения нагретой примеси в атмосфере состоит не только из уравнений для осредненных скорости возмущенного течения и его температуры, но и из соответствующих уравнений для турбулентных потоков тепла и количества движения. Основой для получения таких уравнений являются соответственно уравнения для пульсационной скорости и температуры возмущенного течения, которые могут быть получены вычитанием из уравнений для скорости и температуры возмущенного течения соответствующих уравнений для осредненных значений этих параметров. В результате этого уравнение для v_i' получается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i'}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_i v_k' + v_i' \bar{u}_k + \bar{v}_i u_k' + \\ + \bar{u}_i v_k' + \bar{v}_k u_i') + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i' v_k' - \overline{v_i' v_k'} + v_i' u_k' - \\ - \overline{v_i' u_k'} + v_k' u_i' - \overline{v_k' u_i'}) = - \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P_n'}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i' - g_i \frac{T_n'}{T_a}. \end{aligned}$$

Для T_n' уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial T_n'}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial T_n'}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k T_n' + v_k' \bar{T}_n +$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{v_k T_a'} + v_k' \overline{T_a} + u_k' \overline{T_n} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k' T_n') + \\
& + v_k' T_a' + u_k' T_n' - \overline{v_k' T_n'} - \overline{v_k' T_a'} - \overline{u_k' T_n'} = \chi \Delta T_n'.
\end{aligned}$$

Если теперь уравнение для v_i' умножить на v_j' , а затем применить операцию статистического осреднения, то после несложных преобразований и приведения подобных членов получим уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_i' v_j'}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_k} + (\overline{u_k' v_j'} + \overline{v_j' v_k'}) \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \\
& + (\overline{v_i' v_k'} + \overline{u_k' v_i'}) \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_k} + \\
& + \left(\overline{v_i' v_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{v_j' v_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right) + \\
& + \left(\overline{v_j'} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_k} + \overline{u_j'} \frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_k} \right) \overline{v_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v_i' v_j' v_k'} + \overline{v_i' v_j' u_k'} + \\
& + \overline{u_i' v_j' v_k'} + \overline{u_j' v_i' v_k'}) = - \frac{1}{\rho_a} v_i' \frac{\partial \overline{P_n'}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_a} v_j' \frac{\partial \overline{P_n'}}{\partial x_i} + \\
& + \overline{v v_j'} \overline{\Delta v_i'} - g_i \frac{\overline{v_i' T_n'}}{\overline{T_a}} - g_j \frac{\overline{v_j' T_n'}}{\overline{T_a}}. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Уравнения для турбулентных потоков $\langle u' v' \rangle$ можно получить аналогично, если вместо v_j' уравнение для v_i' умножить на u_j' . Полученное таким способом уравнение для турбулентного потока $\langle u_j' v_i' \rangle$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{u_j' v_i'}}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{u_j' v_i'}}{\partial x_k} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_j' v_i'}}{\partial x_k} + \overline{v_k} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} + \\
& + \overline{u_k' u_j'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \overline{u_j' v_k'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} + \overline{u_j' v_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{u'_k v'_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho_a} \overline{u'_j} \frac{\partial P'_n}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_a} \overline{v'_i} \frac{\partial P'_n}{\partial x_j} - \\
& - g_i \frac{\overline{u'_j T'_n}}{T'} g_i \frac{\overline{u'_j T'_n}}{\bar{T}_a} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_j v'_i v'_k} + \overline{u'_j v'_i u'_k} + \overline{u'_j v'_k u'_i} + \\
& + \overline{v'_i u'_k u'_j}) + \nu \overline{u'_j \Delta v'_i} + \nu \overline{v'_i \Delta u'_j}.
\end{aligned}$$

Уравнения для турбулентных потоков тепла могут быть получены из уравнения для T'_n с помощью еще и уравнений для v'_i и u'_j . Так, если уравнение для T'_n умножить на v'_i , а затем применить операцию статистического осреднения, то после преобразований и приведения подобных членов получим уравнение для $\langle v'_i T'_n \rangle$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{v'_i T'_n}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i T'_n}}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{v'_i T'_n}}{\partial x_k} + \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i T'_a}}{\partial x_k} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_k} \cdot \bar{T}_n + \overline{v'_i v'_k} \cdot \bar{T}_a + \overline{u'_k v'_i} \cdot \bar{T}_n) + \\
& + (\overline{v'_i T'_n} + \overline{u'_k T'_n}) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \left(\overline{v'_k T'_n} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \right. \\
& \left. + \bar{v}_k T' \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{1}{\rho_a} \overline{T'_n} \frac{\partial P'_n}{\partial x_i} + \nu \overline{T'_n \Delta v'_i} - \\
& - g_i \frac{\overline{T'^2}}{\bar{T}_a} + \left\langle \overline{u'_i v'_k} \frac{\partial T'_a}{\partial x_k} \right\rangle - \\
& - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_k T'_n} + \overline{v'_i u'_k T'_n} + \overline{u'_i v'_k T'_n} + \overline{v'_i v'_k T'_a}). \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Уравнение для турбулентного потока $\langle u'_i T'_n \rangle$, описывающее турбулентное рассеяние температурного возмущения вследствие пульсационного движения невозмущенной атмосферы, можно представить в виде

$$\frac{\partial \overline{u'_i T'_n}}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \overline{u'_i T'_n}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \overline{u'_i T'_n}}{\partial x_k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{v}_k \frac{\overline{\partial u'_i T'_a}}{\partial x_k} + (\overline{u'_i u'_k} + \overline{u'_i v'_k}) \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x_k} + \\
& + \left(\overline{u'_k T'_n} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i v'_k} \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial x_k} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i v'_k T'_n} + \overline{v'_k u'_i T'_a} + \overline{u'_i u'_k T'_n}) = \\
& = - \frac{1}{\rho a} \overline{T'_n} \frac{\partial P'_a}{\partial x_i}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Рассеяние температурной неоднородности в атмосферном течении характеризуется не только турбулентными потоками тепла, но и такими параметрами, как среднее квадратичное значение пульсации температуры и корреляция между пульсациями температуры возмущенного и невозмущенного течения. Уравнение, которому удовлетворяет среднее квадратичное значение пульсации температуры:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{T_n'^2}}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \overline{T_n'^2}}{\partial x_k} + 2\bar{v}_k \frac{\partial \overline{T_n' T_a'}}{\partial x_k} + \\
& + 2 \left(\overline{u'_k T_n'} \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial x_k} + \overline{v'_k T_n'} \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial x_k} + \overline{v'_k T_n'} \frac{\partial \bar{T}_a}{\partial x_k} \right) + \\
& + 2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k T_n'^2} + \overline{v'_k T_n'^2}) = 0. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Для корреляции $\langle T_a' T_n' \rangle$ уравнение может быть получено с помощью уравнений для пульсационных значений температуры возмущенного и невозмущенного течения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{T_a' T_n'}}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \overline{T_a' T_n'}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \bar{v}_k \frac{\partial \overline{T_a'^2}}{\partial x_k} + \\
& + (\overline{u'_k T_a'} + \overline{v'_k T_a'}) \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k T_n' T_a'} + \\
& + \overline{v'_k T_n' T_a'}) = 0. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Таким образом, полученная система уравнений (2.41)–(2.47) описывает распространение в атмосфере нагретой примеси. Однако эта система содержит ряд величин, которые неизвестны, и для них следует применить одну из моделей замыкания второго порядка. К числу величин, для которых требуется построить аппроксимационное соотношение на основе моделей замыкания второго порядка, относятся члены в уравнениях для турбулентных потоков количества движения и тепла, содержащие пульсации давления. Так, в уравнении для напряжений $\langle v_i' v_j' \rangle$ член, содержащий пульсации давления:

$$-\frac{1}{\rho_a} \overline{v_i' \frac{\partial P_n'}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho_a} \overline{v_j' \frac{\partial P_n'}{\partial x_i}}.$$

Для его аппроксимации можно использовать, например, модель замыкания, предложенную Лаундером. Здесь эта модель представлена соотношениями (1.14) и (1.16). В нашем случае эти соотношения приводят к следующей аппроксимации членов, содержащих пульсации давления в уравнении для $\langle v_i' v_j' \rangle$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho_a} \overline{v_i' \frac{\partial P_n'}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho_a} \overline{v_j' \frac{\partial P_n'}{\partial x_i}} = -\frac{\overline{v_i' v_j'}}{\tau_n} + \\ & + C_5 \left(\overline{v_i' v_k'} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \overline{v_j' v_k'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} C_3 \epsilon_n \delta_{ij} - \\ & - \frac{2}{3} C_5 \overline{v_i' v_k'} \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

где b_n , ϵ_n – кинетическая энергия турбулентности возмущенного течения и скорость ее диссипации вследствие вязких напряжений. Кинетическая энергия турбулентности возмущенного течения определяется как

$$b_n = 1/2 (\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2}).$$

Член, содержащий пульсации давления в уравнении для турбулентного потока тепла $\langle v_i' T_n' \rangle$, имеет вид

$$\frac{1}{\rho_a} \overline{T_n' \frac{\partial P_n'}{\partial x_i}}.$$

Для аппроксимации этого выражения следует воспользоваться моделью,

предложенной Земаном—Ламли, представленной соотношением (2.14). Применяв эту модель к рассматриваемому члену, получим следующее соотношение:

$$-\frac{1}{\rho_a} \overline{T_n'} \frac{\partial P_n'}{\partial x_i} = -\frac{\overline{v_i' T_n'}}{\tau_n} - C_{10} v_k' T_n' \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} g_i \frac{\overline{T_a'^2}}{\overline{T_a}}.$$

Так как давление P_n в возмущенной области течения обусловлено возмущенным течением, имеющим скорость v , то корреляция пульсаций этого давления со скоростью невозмущенного течения должна отсутствовать, т. е. можно считать, что

$$\overline{u_j^v} \frac{\partial P_n^v}{\partial x_i} = 0.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что

$$\overline{v_j^v} \frac{\partial P_a^v}{\partial x_i} = 0.$$

Диссипативные члены в турбулентном процессе играют, как известно, огромную роль. В уравнении для турбулентного напряжения возмущенного течения диссипативную роль играет выражение $\nu v_j \Delta v_i$. Его, как обычно, можно представить следующим образом:

$$\nu \overline{v_j^v \Delta v_i^v} = -2\nu \left\langle \frac{\partial v_i^v}{\partial x_k} - \frac{\partial v_j^v}{\partial x_k} \right\rangle + \nu \Delta \overline{v_i^v v_j^v}.$$

Нетрудно показать, что второе слагаемое в этом выражении, описывающее молекулярную диффузию турбулентных потоков количества движения, пренебрежимо мало. Для аппроксимации первого слагаемого используется выражение

$$-2\nu \left\langle \frac{\partial v_i^v}{\partial x_k} - \frac{\partial v_j^v}{\partial x_k} \right\rangle = -\frac{2}{3} \epsilon_n \delta_{ij},$$

где ϵ_n — диссипация кинетической энергии турбулентности возмущенного течения.

Диссипативные члены в уравнении для $\langle u' v' \rangle$

$$\overline{\nu u_j' \Delta v_i'} + \overline{\nu v_i' \Delta u_j'}$$

можно преобразовать к виду

$$\nu \overline{u_j' \Delta v_i'} + \overline{\nu v_i' \Delta u_j'} = -4\nu \left\langle \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right\rangle + 2\nu \overline{\Delta u_j' v_i'}$$

Последним слагаемым здесь, очевидно, можно пренебречь, первое слагаемое описывает процесс вязкой диссипации. Однако в данном случае процесс вязкой диссипации уже отличается от вязкой диссипации как невозмущенного, так и возмущенного турбулентного течения. Можно представить себе этот процесс следующим образом. В возмущенной области течения существуют вихревые образования двух сортов: первый — обусловлен турбулентностью невозмущенного течения в области температурной неоднородности, второй — турбулентностью избыточного возмущенного течения, которое как бы накладывается на невозмущенное течение. Таким образом, можно считать, что диссипативный член

$$\nu \left\langle \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right\rangle$$

описывает диссипацию в невозмущенном потоке кинетической энергии вихревых турбулентных образований, энергия которых черпается от осредненного возмущенного течения. Если предположить, что вихри, обусловленные возмущенным течением, мало или вообще не отличаются от вихрей невозмущенного атмосферного течения, то скорость диссипации их кинетической энергии будет близкой к скорости диссипации невозмущенного потока, т. е. можно записать

$$-4\nu \left\langle \frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right\rangle = -\frac{4}{3} \epsilon_a \delta_{ij}$$

Корреляции третьего порядка связаны с процессами переноса напряжений Рейнольдса или турбулентных потоков тепла из одной области пространства в другую без их затухания и генерации. Как правило, модели, аппроксимирующие члены, содержащие корреляции третьего порядка, имеют ясно выраженный диффузионный характер. Если этими членами пренебречь, то для математического моделирования переноса и рассеяния в атмосфере нагретой примеси можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{v}_i + \bar{u}_i \bar{v}_k) = \\
& = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \bar{P}_n}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_i' \bar{v}_k' + \bar{v}_i' \bar{u}_k' + \bar{v}_k' \bar{u}_i') - g_i \frac{\bar{\theta}_n}{\theta_a}; \\
& \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial x_k} + \bar{v}_3 \frac{d\bar{T}_a}{dz} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k' \bar{T}_n' + \bar{u}_k' \bar{T}_a') = 0; \\
& \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_k} + [\overline{u_k' v_j'} + (1 - C_5) \overline{v_j' v_k'}] \times \\
& \times \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{\overline{v_i' v_j'}}{\tau_n} + \frac{2}{3} (C_3 - 1) \epsilon_n \delta_{ij} - g_i \frac{\overline{v_j' T_n'}}{\bar{T}_a} - g_j \frac{\overline{v_i' T_n'}}{\bar{T}}; \\
& \frac{\partial \overline{v_i' u_j'}}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \overline{v_i' u_j'}}{\partial x_k} + \overline{u_k' u_j'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \\
& + \overline{u_j' v_k'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \overline{u_j' v_3'} \frac{d\bar{u}_i}{dz} + \overline{u_3' v_i'} \frac{d\bar{u}_j}{dz} = \\
& = -g_i \frac{\overline{u_j' T_n'}}{\bar{T}_a} - \frac{4}{3} \epsilon_a \delta_{ij}; \\
& \frac{\partial \overline{v_i' T_n'}}{\partial t} + (\bar{v}_k + \bar{u}_k) \frac{\partial \overline{v_i' T_n'}}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{v_i' T_n'}}{\partial x_k} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{v_i' v_k'} (\bar{T}_n + \bar{T}_a)] + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{T}_n \overline{u_k' v_i'}) + \\
& + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} (\overline{v_i' T_n'} + \overline{u_k' T_n'}) + \overline{v_k' T_n'} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \right. \\
& \left. + C_{10} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\overline{v_i' T_n'}}{\tau_n} - \frac{2}{3} g_i \frac{\overline{T_n'^2}}{\bar{T}_a};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{u_i' T_n'}}{\partial t} + (\overline{v_k} + \overline{u_k}) \frac{\partial \overline{u_i' T_n'}}{\partial x_k} + \overline{v_3} \frac{d \overline{u_i' T_a'}}{dz} + \\
& + (\overline{u_i' u_3'} + \overline{v_3' u_i'}) \frac{d \overline{T_a}}{dz} + \left(\overline{u_3' T_n'} \frac{d \overline{u_i}}{dz} + \overline{u_i' v_k'} \frac{\partial \overline{T_n}}{\partial x_k} \right) = 0; \\
& \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + (\overline{v_k} + \overline{u_k}) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} + 2 \overline{v_k} \frac{\partial \overline{T_n' T_a'}}{\partial x_k} + \\
& + 2 \left(\overline{u_k' T'} \frac{\partial \overline{T_n}}{\partial x_k} + \overline{v_k' T_n'} \frac{\partial \overline{T_n}}{\partial x_k} + \overline{v_3' T_n'} \frac{d \overline{T_a}}{dz} \right) = 0; \\
& \frac{\partial \overline{T_n' T_a'}}{\partial t} + (\overline{v_k} + \overline{u_k}) \frac{\partial \overline{T_n' T_a'}}{\partial x_k} + \\
& + \frac{1}{2} \overline{v_3} \frac{d \overline{T_a'^2}}{dz} + \overline{u_k' T_a'} \frac{\partial \overline{T_n}}{\partial x_k} = 0. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Возмущенная нагретой примесью область локализована в пространстве, поэтому ее движение в атмосферном течении можно рассматривать как движение некоторого обособленного образования, которое обычно называют слабо нагретым термиком. Скорость движения в атмосфере такого термика определяется как среднemasовая скорость возмущенного течения, где осреднение проводится по всей возмущенной области течения. Из уравнения движения (2.40) следует, что отлична от нуля только вертикальная составляющая термика, которая определяется действием интегральной по объему термика силой плавучести.

В заключение следует отметить, что полученные здесь результаты могут быть применены не только для решения задачи переноса и рассеяния в турбулентной атмосфере нагретой примеси. В ряде случаев в атмосферу поступают загрязняющие вещества, температура которых ниже температуры окружающей среды. На такое образование также действуют силы плавучести, однако направлены они в другую сторону. Следовательно, ускорение такого холодного термика направлено не вверх, как это имеет место в случае нагретой примеси, а вниз.

В ряде случаев в атмосферу могут попадать вещества, плотность которых отличается от плотности окружающего воздуха как в большую, так и в меньшую сторону. Поведение таких образований в атмосферном течении подобно поведению термиков, а полученные здесь результаты могут быть обобщены и на случай решения такого рода задач.

2.6. Осаждение аэрозольных частиц на подстилающую поверхность

Уже давно было обнаружено, что скорость осаждения аэрозольных частиц на поверхность земли в некоторых случаях значительно превышает скорость их гравитационного падения. Это послужило основанием для детального изучения взаимодействия аэрозольных частиц с подстилающей поверхностью, в результате чего было установлено, что основными механизмами осаждения являются поверхностная импакция, электростатическое притяжение и химическое взаимодействие. Все эти механизмы имеют достаточно сложный характер и определяют вероятность захвата аэрозольной частицы подстилающей поверхностью. В то же время было обнаружено, что осаждение загрязняющих веществ зависит от скорости ветра у поверхности земли, а также от температурного режима поверхности раздела земля—воздух.

Первые попытки изучения осаждения аэрозольных частиц на подстилающую поверхность были выполнены Грегори еще в 1945 г. Проанализировав выпадения спор, он пришел к выводу, что скорость их осаждения пропорциональна приземной концентрации:

$$v_0 \bar{c}(x_1, x_2, x_3 = 0, t).$$

Дальнейшее изучение процессов осаждения было связано с радиоактивным загрязнением атмосферы и поверхности земли ядерными взрывами или выбросами из ядерных реакторов. Особое внимание при этом уделялось выпадению ^{131}I , который, как правило, выделяется в атмосферу в паровой форме, однако достаточно быстро адсорбируется на ядрах конденсации, скорость гравитационного осаждения которых пренебрежимо мала. Несмотря на это, было обнаружено достаточно интенсивное осаждение иода на подстилающую поверхность. Специальные эксперименты были проведены на Национальной станции испытания ядерных реакторов в Айдахо (США). Результаты этих экспериментов приведены в табл. 2.3. Осаждение радиоактивного иода изучалось также и во время аварии ядерного реактора в Уиндскейле, где скорость осаждения ^{131}I на траву составила 0,4 см/с. С помощью анализа экспериментальных данных можно сделать вывод о том, что скорость осаждения иода на подстилающую поверхность может изменяться больше чем на порядок в зависимости от характера подстилающей поверхности и метеорологических условий вблизи границы раздела земля—воздух. Аналогичные результаты были получены и для других радионуклидов.

Впервые пытались построить полуэмпирическую модель переноса аэрозольных частиц на подстилающую поверхность Оуэн и Томсон [52], в дальнейшем эту модель использовали Чемберлен и Чедвик при изучении осаждения радиоактивного иода [53]. Подстилающая поверхность в этих работах рассматривалась как аэродинамически неровная поверхность с высокой степенью шероховатости. В этом случае перенос

Таблица 2.3. Результаты опытов по осаждению ^{131}I в Айдахо

Параметры	1-я серия	2-я серия	3-я серия
Скорость осаждения, см/с:			
трава	0,6	1,0	—
почва	0,8	0,4	—
снег	—	—	0,2
уголь	0,6	0,7	0,9
листья клевера	1,2	—	—
липкая бумага	0,2	0,4	0,6
Скорость ветра, м/с	7,1	9,3	6,0
Скорость трения, см/с	61	69	50
Высота шероховатости, см	3,1	1,5	2,1
Устойчивость атмосферы	Неустойчива	Неустойчива	Устойчива

потока аэрозольных частиц к поверхности земли происходит с большим аэродинамическим сопротивлением, чем перенос потока количества движения. Вследствие этого формируется избыточное сопротивление, которое, как правило, изучается во всех работах, посвященных переносу вещества к поверхности земли.

Степень переноса вещества к подстилающей поверхности характеризуется скоростью осаждения v_0 , однако этот процесс может быть охарактеризован и таким параметром, как сопротивление переносу, представляющим собой величину, обратную скорости осаждения. Сопротивления, которые поток вещества испытывает в различных частях воздушного течения у поверхности земли, складываются друг с другом подобно сопротивлениям различных частей электрической цепи. Полное сопротивление потоку аэрозольных частиц к поверхности земли можно представить следующим образом:

$$r_0 = r_T + r_{\text{и}} + r_{\text{п}} + r_{\text{г}},$$

где r_T — сопротивление потоку в турбулентной области течения между верхней частью макрошероховатостей (растительного покрова) и некоторой фиксированной высотой z_1 ; $r_{\text{и}}$ — избыточное сопротивление, обусловленное сопротивлением вязкого ламинарного подслоя вблизи поверхности земли; $r_{\text{п}}$ — сопротивление поглощению аэрозольных частиц или молекул газа подстилающей поверхностью; $r_{\text{г}}$ — сопротивление гравитационному осаждению аэрозольных частиц.

Сопротивление в турбулентной области течения может быть определено как отношение количества движения на фиксированной высоте z_1 к потоку количества движения. Приземный слой атмосферы характеризуется постоянством потока количества движения, который при условиях стратификации потока, близких к нейтральным, равен u_*^2 , где u_* — динамическая скорость или скорость трения. Таким образом, можно записать соотношение $r_T = u_1/u_*^2$.

Избыточное сопротивление $r_{\text{н}}$ характеризуется безразмерным параметром $B^{-1} = u_* r_{\text{н}}$. Из большого числа экспериментов, проведенных в аэродинамических и шероховатых трубах, Оуэн и Томсон получили эмпирическую формулу

$$B^{-1} = \alpha \left(\frac{u_* h_*}{\nu} \right)^m \left(\frac{\nu}{D_m} \right)^n,$$

где α — эмпирическая постоянная, зависящая от типа шероховатости подстилающей поверхности; h_* — эквивалентная шероховатость песчаной поверхности, связанная с высотой шероховатости как $h_* = 30z_0$; ν — коэффициент кинематической вязкости; D_m — коэффициент молекулярной диффузии; m и n — эмпирические постоянные, равные соответственно 0,45 и 0,8.

Эксперименты в аэродинамических трубах с волокнистым характером шероховатости, моделирующей травяной покров, показали, что эмпирические постоянные m и n зависят от характера шероховатости: они имеют меньшие значения, когда элементы шероховатости волнистые, а не утесообразные, как это имело место в работах Оуэна и Томсона.

Сопротивление поглощению аэрозольных частиц или молекул газа характеризует процесс захвата частиц или молекул подстилающей поверхностью. Это сопротивление определяется процессами поверхностной импакции, электростатического притяжения, химическими реакциями, которые могут происходить при контакте загрязняющего вещества с элементами подстилающей поверхности. Немаловажную роль могут играть процессы захвата вещества растительным покровом. В частности, Чемберлен и Чедвик изучали процесс поглощения радиоактивного иода зеленой массой растений путем проникновения через устьица листа. Показано, что наиболее приемлемой длиной сопротивления открытого устьица зеленого листа является 0,08 см. Это эквивалентно переносу молекулярной диффузией через инертную пленку воздуха толщиной 0,08 см. Таким образом, в данном случае для сопротивления $r_{\text{п}}$ можно записать соотношение

$$r_{\text{п}} = L_s D_m^{-1}.$$

Если вещество при контакте с подстилающей поверхностью полностью поглощается, то сопротивление $r_{\text{п}}$ должно быть равно нулю. Очевидно, это значение сопротивления переносу при поглощении подстилающей поверхностью можно использовать для получения минимальной оценки общего сопротивления переносу или, что то же самое, для получения оценки максимальной скорости осаждения.

Сопротивление гравитационному осаждению частиц аэрозоля достаточно просто определить, если известен размер частиц и их плотность. По этим данным вычисляют скорость гравитационного осаждения по формуле Стокса или по любой другой формуле с учетом различных

поправок, а затем находят обратную величину скорости гравитационного осаждения, которая и представляет собой сопротивление гравитационному осаждению. В отличие от всех других сопротивлений, которые испытывает поток аэрозольных частиц, сопротивление гравитационному осаждению действует во всех слоях воздушного течения вблизи границы раздела земля—воздух, при этом сопротивление гравитационному осаждению действует параллельно с другими сопротивлениями, присутствующими рассматриваемым частям воздушного потока.

Таким образом, для определения сопротивления переносу аэрозольных частиц на шероховатую подстилающую поверхность можно применить следующую зависимость:

$$r_0 = r_T + \alpha \left(\frac{30z_0 u_*}{\nu} \right)^m \left(\frac{\nu}{D_m} \right)^n.$$

Соответственно скорость осаждения аэрозольных частиц на подстилающую поверхность может быть определена по формуле

$$\nu_0 = r_0^{-1}.$$

Разработанная Оуэном и Томсоном полуэмпирическая модель осаждения аэрозольных частиц и газов на шероховатую поверхность и успешное применение этой модели Чемберленом и Чедвиком при изучении осаждения радиоактивного йода на травяной покров послужили толчком для дальнейшего развития моделей взаимодействия загрязняющих веществ с подстилающей поверхностью с различным типом растительного покрова. Характерными в этом отношении являются работы А.И. Жигалкина [54] и Тома [55].

Пусть высота растительного покрова характеризуется некоторой величиной z_p . Тогда поток количества движения к поверхности земли до высоты z_p

$$\overline{u'_{z_0} c'} = \rho \bar{u}^2(z) C_D = \rho \bar{u}^2 S_d (C_d / K_d),$$

где \bar{u} — эффективная постоянная скорость ветра в растительном покрове, дающая то же самое сопротивление, что и реальный профиль ветра внутри растительного покрова; C_d — коэффициент сопротивления изолированного типового элемента растительного покрова при скорости ветра \bar{u} ; K_d — коэффициент, учитывающий укрытие изолированного типового элемента в растительном покрове; S_d — совокупность элементов растительного покрова (эффективная площадь), участвующих в обмене количеством движения, на единицу площади. Из этого соотношения аэродинамическое сопротивление растительного покрова можно выразить так:

$$r_T' = \frac{1}{\mathcal{K} u_*} \ln \frac{z - z_B}{z_0}, \quad z \geq z_p,$$

где z_B — слой вытеснения; z_0 — параметр шероховатости; \mathcal{K} — постоянная Кармана.

Сопrotивление переносу количества движения можно представить в виде суммы диффузионного сопротивления над растительным покровом и эффективным сопротивлением совокупности отдельных элементов растительного покрова, т. е.

$$r'_T = R_D + (P_d/S_d)R_{и}.$$

Нетрудно заметить, что этот результат отличается от разложения общего сопротивления переносу количества движения, предложенного Оуэном и Томсоном, тем, что здесь второе слагаемое не обязательно связано с ламинарным характером течения внутри растительного покрова. Далее, для сопротивлений R_D и $R_{и}$ можно записать соотношения

$$R_D = \frac{u(z_p) - u}{u_*^2}; \quad \frac{P_d}{S_d} R_{и} = \frac{\bar{u}}{u_*^2}.$$

Следует отметить, что обычно принимается следующая зависимость:

$$\bar{u} \approx 0,5 u(z_p).$$

Избыточное сопротивление, которое испытывает поток вещества, по аналогии с изложенным выше также можно представить в виде суммы

$$R''_{и} = R'_D + (P_{п}/S_{п})R_{и}.$$

Безразмерный параметр B^{-1} теперь можно представить так:

$$B^{-1} = u_* (R'_D - R_D) + u_* \left(\frac{P_{п}}{S_{п}} R_{и} - \frac{P_d}{S_d} R_{и} \right),$$

где $P_{п}$ — коэффициент, аналогичный коэффициенту P_d , но относящийся к потоку вещества; $S_{п}$ — совокупная область элементов макрошероховатости, участвующих в обмене потоком вещества на единицу площади. В этом соотношении первый и второй члены выражают соответственно поток в растительном покрове и вклады отдельных элементов макрошероховатости в параметр B^{-1} . Полученное для безразмерного параметра B выражение можно преобразовать к виду

$$B^{-1} = \frac{\bar{u}}{u_*} \left(\frac{C_d/P_d}{C_{п}/P_{п}} \frac{S_d}{S_{п}} - 1 \right),$$

это выражение проверялось Томом в натуральных условиях и аэродинамических трубах при изучении процессов обмена некоторых бобовых культур. В результате соотношение для B^{-1} выражено следующим

образом:

$$B^{-1} = \frac{\bar{u}}{u_*} \left[\frac{C_d}{C_{\Pi}} \left(\frac{v}{D} \right)^{2/3} \frac{S_d}{S_{\Pi}} - 1 \right].$$

Полученные здесь результаты могут быть применены и для оценки осаждения аэрозольных частиц на такие макрошероховатые поверхности, как, например, городская застройка.

Глава 3

ОЧИСТКА ГАЗОВ ОТ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ И ТРАНСПОРТИРУЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ГАЗОВОГО ПОТОКА

3.1. Влияние турбулентности газового потока в пылеочистных аппаратах на очистку газов

Очистка промышленных газов и вентиляционного воздуха от аэрозольных частиц играет важную роль при решении проблем экологии и охраны окружающей среды. Кроме того, многие технологические процессы, например улавливание ценных продуктов, так или иначе связаны с выделением из газового потока твердых или жидких частиц вещества. Для очистки газов применяют различные аппараты, представляющие собой весьма сложные инженерные сооружения, которые состоят из большого числа разнообразных агрегатов. Стоимость таких инженерных сооружений достаточно велика, поэтому методы расчета характеристик газоочистных аппаратов и оптимальных режимов их работы играют большую роль при оценке стоимости оборудования промышленного предприятия.

В настоящее время для очистки газов от взвешенных в них частиц используются следующие методы:

1) сухая очистка с помощью волокнистых или зернистых фильтров, создающих на пути газового потока ряды частых решеток из волокон или кусков фильтрующего материала, на которые при обтекании осаждаются частицы аэрозоля;

2) сухая очистка, основанная на осаждении частиц в аппаратах под действием гравитационных или центробежных сил;

3) мокрая очистка путем захвата частиц аэрозоля раздробленной на мелкие капли жидкости, либо осаждение частиц аэрозоля под действием гравитационных или центробежных сил на пленку жидкости, движущуюся по стекам аппарата;

4) электрическая очистка (сухая или мокрая) газов от взвешенных частиц созданием на них электрического заряда и последующего осаждения на электродах под действием электростатических сил.

Очевидно, что удалить из потока газа крупные частицы проще, чем мелкие. Эту закономерность в газоочистке используют с помощью раз-

личных процессов, стимулирующих коагуляцию и конденсацию частиц, т. е. тех процессов, которые приводят к укрупнению частиц в газовом потоке. Стимулирующим действием на процесс коагуляции обладают также ультразвуковые колебания, возбуждаемые в газе.

Рассмотрим более подробно особенности основных аппаратов газоочистки, к которым следует отнести пылеосадительные камеры, пылеотделяющие решетки, циклоны и электрофильтры. Характерным для всех этих аппаратов является то, что для осаждения частиц из потока газа в них используются внешние силы – гравитационные, центробежные и электростатические.

Пылеосадительные камеры. В пылеосадительных камерах используется гравитационное осаждение частиц из горизонтально направленного газового потока. Для достижения высокой эффективности очистки газов необходимо, чтобы частицы находились в пылеосадительной камере возможно более продолжительное время. По этой причине пылеосадительные камеры, рассчитанные на осаждение даже достаточно крупных частиц, представляют собой громоздкие сооружения. Расчет параметров таких камер по существующим в настоящее время методикам [56] основывается на предположении о ламинарном характере течения газа внутри камеры. Принимается, что коэффициент улавливания частиц η пропорционален скорости падения частицы w , времени ее падения t и обратно пропорционален высоте падения H , т. е.

$$\eta = w (t/H) \cdot 100\%.$$

Скорость падения частицы w , как правило, рассчитывают по закону Стокса, т. е.

$$w = \frac{1}{18} \frac{\rho_T d_T^2}{\mu},$$

где ρ_T – плотность вещества, из которого состоит частицы; d_T – диаметр частицы; μ – молекулярная вязкость газа. Высоту камеры H находят из условия, что частицы заданного наименьшего размера d_T за время t успели осесть на стенки камеры, т. е.

$$H = w_{min} t.$$

Длина камеры $L = ut$, где u – линейная скорость газового потока.

При высоте и ширине камеры 3 м и скорости потока 1 м/с, температуре воздуха 15–20 °С

$$Re = Hu/\nu = 210\,000,$$

т. е. поток в такой камере характеризуется высокой степенью турбулентности. Даже при уменьшении высоты камеры до 10 см (полочные камеры типа Говарда) поток газа остается турбулентным ($Re \sim 7000$). В связи с этим методы расчета, основанные на предположении о ламинарности

потока газа внутри осадительной камеры, не могут дать правильных результатов.

Пылеотделяющие жалюзийные решетки. В пятидесятых годах широкое распространение в очистке газов от взвешенных в них частиц получили различные конструкции пылеотделяющих решеток, или, как их еще называют, жалюзийных золопылеулавливателей. В нашей стране известны конструкции таких агрегатов ВТИ, КТИС, ЛИОТ и др.

Принцип работы пылеотделяющих решеток описывается на основе представлений о движении твердых частиц в потоке газа под действием инерционных или центробежных сил, которые проявляются при искривлении потоков газа во время их прохождения через промежутки между пластинами решетки. Считается, что отделение частиц от несущего потока происходит при их ударе о пластины решетки и отбрасывании внутрь входной камеры, откуда уже воздух, обогащенный частицами пыли, отсасывается в пылеулавливающий агрегат, обычно в отсосный циклон.

В настоящее время отсутствуют эффективные методы расчета параметров пылеотделяющих решеток и их оптимальных размеров. Более того, даже качественно принцип их работы, по нашему мнению, описывается неправильно. Действительно, достаточно проанализировать основные параметры газового потока на входе в решетку и при ее прохождении, чтобы понять, что такой агрегат сильно уменьшает степень турбулизации газового потока. Происходит это из-за резкого уменьшения скорости потока при проходе через решетку $u_{пр}$ по сравнению со скоростью потока на входе в решетку $u_{вх}$. Кроме того, уменьшаются и линейные размеры газового потока в соответствии с размерами просвета решетки. В результате этого отношение R постоянных Рейнольдса на входе и на проходе решетки, которое, как нетрудно убедиться, равно отношению

$$R = u_{вх} D_{вх} / v_{пр} D_{пр},$$

где $D_{вх}$ и $D_{пр}$ — линейные размеры потока на входе в решетку и на ее проходе, значительно больше единицы. Эксперименты с пылеотделяющи-

Таблица 3.1. Коэффициенты очистки пылеотделяющих решеток

Тип решетки	$D_{вх}$, см	$u_{вх}$, см/с	$D_{пр}$, см	$u_{пр}$, см/с	$R = \frac{D_{вх} u_{вх}}{D_{пр} u_{пр}}$	η , %
Криволинейная "S"	11,5	1800	0,4	200	259	87
Империл "К"	8,5	1800	0,4	254	150	76
КТИС "Ф"	7,5	2600	0,6	200	162	76
Улитка с решеткой	13,2	810	1,0	195	55	55
ВТИ	12,2	1500	2,0	228	30	55

ми решетками показали, что степень очистки газового потока от взвешенных частиц зависит от того, насколько решетка подавляет турбулентность взвесенесущего потока. Чем больше отношение постоянных Рейнольдса для потока на входе и при прохождении решетки, которое характеризует степень подавления турбулентности, тем выше коэффициент очистки газа η . В табл. 3.1 приведены экспериментальные значения коэффициента очистки газового потока в решетках различного типа, различающихся прежде всего степенью R подавления турбулентности.

Циклоны. Циклоны нашли самое широкое распространение в практике пылеулавливания, однако идущий в них процесс отделения частиц от несущего газового потока до сих пор недостаточно изучен. В связи с этим выбор основных параметров циклонов и определение их эффективности осуществляются в основном с помощью эмпирических данных, что затрудняет принятие оптимальных решений.

В циклоне запыленный поток входит через патрубок, расположенный тангенциально к цилиндрической пылесадительной камере, проходит по окружности вокруг выходной трубы и движется спирально вниз по стенке конуса и затем вверх, в выходную трубу. Диаметр восходящего по спирали потока почти равен диаметру выхлопной трубы (рис. 3.1).

Рассмотрим современное состояние теории циклонирования [64]. Частицы пыли в циклоне перемещаются вместе с потоком газа по траектории, показанной на рис. 3.2. Движение определяется центробежной

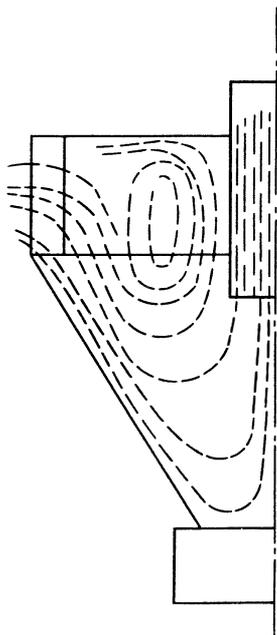


Рис. 3.1. Схема движения газового потока в циклоне

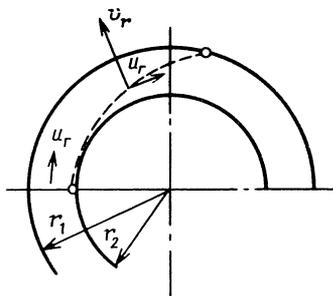


Рис. 3.2. Траектория движения частицы в циклоне

силой и силой сопротивления, при этом для определения продолжительности процесса разделения частиц пыли от газа следует сопоставить действие этих сил. Закон сопротивления для частиц зависит от режима осаждения. Можно выделить два предельных случая, когда сила сопротивления описывается законом Стокса при $Re < 0,2$ и когда сила сопротивления F_c зависит от коэффициента, который, в свою очередь, зависит от постоянной Рейнольдса. В первом случае из потока запыленного газа выделяются наиболее мелкие частицы пыли. При условии $F_c = F_{ц}$ получим

$$\frac{\pi d_T^3}{6} \rho_T \frac{u_T^2}{r} = 3\pi d_T \mu \frac{dr}{dt},$$

где $u_T(r)$ – тангенциальная составляющая скорости газа, являющаяся функцией радиального расстояния (см. рис. 3.2). Обычно полагают, что газ в циклоне вращается как твердое тело и $u_T = \omega r$, где $\omega = \text{const}$. С учетом этого можно получить выражение для времени разделения частиц пыли от газа:

$$t = \frac{18\mu}{d_T^2 \omega^2 \rho_T} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Если время прохождения газа через объем пылеосадительной камеры циклона достаточно для осаждения самых мелких частиц пыли, то рабочий объем аппарата $Q_{ц} = Q_c t$, где Q_c – заданная производительность циклона.

Приведенные формулы являются типичными для расчета процесса циклонирования, однако, как указывают все авторы, пытавшиеся применить их к расчету реальных аппаратов, они не полностью описывают процесс отделения частиц пыли от газа в циклонах. Результаты расчетов по этим формулам не сходятся с экспериментальными данными. Вероятно, в значительной степени такое расхождение с экспериментом обусловлено тем, что движение частиц пыли в циклоне происходит в сильно турбулизованном потоке газа. Особенности же поведения частиц в турбулентной среде не учитываются в приведенных выше формулах. Действительно, если взять в качестве наименьшего циклонного аппарата циклон диаметром 10 см и принять входную скорость потока равной 10 м/с, то для такого случая $Re = 66\,000$, т. е. течение газа в циклоне характеризуется сильной турбулентностью. Опыты по осаждению пыли из газового потока в криволинейном канале показали, что расчетные данные не сходятся с опытными. Так, по расчетам, вся пыль должна была осесть на стенки канала при повороте потока на $50-80^\circ$, а на опыте при повороте потока на 270° только 90% частиц пыли достигало стенок канала (к стенке канала была прикреплена липкая бумага, захватывающая каждую частицу пыли, отброшенную к стенке).

Как уже указывалось, наблюдения за движением газа в циклоне показали, что поток движется по спирали, направленной к отверстию конуса циклона, и, попадая в бункер, создает там вращательное движение, затем направляется обратно через отверстие конуса к выхлопной трубе. Именно в бункере при резком уменьшении скорости потока и оседают частицы пыли. На основании этих наблюдений были сделаны попытки описания процесса работы циклона. Отделение твердых частиц малых размеров от газового потока происходит не из-за действия центробежных сил, а из-за изменения направления скорости течения газа в месте соединения нисходящего и восходящего жгута твердых частиц. Под жгутом твердых частиц подразумевается вихревой поток, внутрь которого засасываются частицы пыли. Такая теоретическая схема процесса циклонирования более правильно описывает основной характер газового течения и движения твердых частиц в циклоне по сравнению со схемой, учитывающей только центробежные силы. Но и эта схема оказывается достаточно грубой для того, чтобы служить основой для расчета работы циклонов.

Отсутствие надежной теоретической базы расчета циклонов привело к тому, что, как правило, реальные аппараты рассчитывают с привлечением эмпирических методов, в основе которых лежат способы гидродинамического моделирования и теория размерности. В работе [58] принято, что коэффициент очистки газа в циклоне зависит от двух критериев, связанных с постоянными Фруда и Стокса. Критерий Фруда определяется как

$$Fr = u^2 / (gL),$$

где u — скорость потока газа при входе в циклон; L — линейный масштаб циклона; g — ускорение силы тяжести.

Критерий Стокса

$$St = d_T^2 \rho_T u / (\mu L),$$

где d_T — диаметр частиц пыли; ρ_T — плотность пылевых частиц; μ — вязкость газа.

Для циклонов определенной конструкции коэффициент очистки должен зависеть от объемного расхода газа Q , гидравлического сопротивления циклона ΔP , гидравлической крупности частиц пыли w и вязкости газа. Объемный расход газа определяется следующим образом:

$$Q \sim L^2 u,$$

а гидравлическое сопротивление циклона пропорционально $u^2 \rho_0$. Гидравлическая крупность частиц пыли пропорциональна их плотности и квадрату их диаметра. При моделировании процесса работы циклона добиваются постоянства критериев Фруда и Стокса с учетом зависимостей описанных выше параметров от характеристик циклона. Так,

критерий, выражающий отношение относительной скорости частицы v_T к скорости газового потока u , выглядит следующим образом [58]:

$$\frac{v_T}{u} \sqrt{\frac{4(\rho_T - \rho_0)d}{3 \cdot 0,45\rho_0 L}},$$

где ρ_0 , ρ_T — соответственно плотности газового потока и частицы пыли. При использовании формул моделирования предполагается, что турбулентный поток газа в циклоне имеет автомодельный характер в широком интервале значений постоянной Рейнольдса. Следует отметить, что все расчеты, выполненные на основе теории моделирования исходя из существования вращательного движения, могут быть выполнены и без учета вращения газового потока. Критерии Фруда и Стокса характерны для любого движения частиц под действием внешних сил и вовсе не характеризуют циклонный процесс как центробежный.

Весь опытный материал резко противоречит этому представлению. Достаточно указать на многочисленные попытки улучшить работу циклонов, исходящие из представлений о центробежном характере воздействия потока на частицы, например, путем устройства винтообразных газоходов, увеличения числа оборотов газа в циклонах и т. д. Все эти попытки усиления действия центробежных сил не привели к существенному улучшению работы циклонов, а в некоторых случаях осаждение частиц пыли уменьшалось. Единственный факт улучшения работы циклона с уменьшением его диаметра, который обычно приводится как доказательство действия центробежных сил в циклоне, усиливающихся с уменьшением радиуса кривизны, может найти и иное объяснение, на чем мы остановимся ниже.

Оценивая состояние теоретических исследований процесса осаждения частиц пыли в циклонах, некоторые авторы отмечали, что предложенные до настоящего времени теоретические расчеты циклонных аппаратов не подтверждаются практической работой их на промышленных установках, по отдельным же узлам циклона расчетов вообще нет. Поэтому основным методом изучения и отработки циклонов в настоящее время являются экспериментальные испытания моделей в стандартных условиях, сравнение результатов этих испытаний с различными характеристиками и выбор наилучших из них. По этому пути проводились все исследования и был накоплен большой экспериментальный материал, в значительной мере пока не нашедший достаточного теоретического объяснения и количественного описания.

Электрофилтры. В отличие от инерционных пылеуловителей осаждение частиц в электрофилтрах происходит путем воздействия электрического поля непосредственно на частицы аэрозоля, а не на поток газа с частицами подобно воздействию на частицы поля тяжести. Однако осаждение частиц под воздействием электрического поля значительно эффективнее, чем под воздействием гравитационного поля. В электро-

фильтрах эффективность улавливания частиц аэрозоля даже субмикронных размеров достигает 99% и более. В этих аппаратах улавливание частиц происходит при условии сильной зарядки частиц в коронном высоковольтном разряде и последующем осаждении на осадительном обычно заземленном электроде.

Процесс очистки газов в электрофильтрах может быть разделен на стадии:

образование коронного разряда;

зарядка взвешенных в газовом потоке частиц пыли электронами и ионами в поле коронного разряда;

движение заряженных частиц в потоке газа под действием гидродинамических и внешних электрических сил;

осаждение заряженных частиц на осадительном электроде;

удаление осажденных частиц с осадительного электрода.

Важнейшим фактором, влияющим на процесс улавливания, является время, необходимое частице пыли для достижения электрода. Это время определяется составляющей скорости движения частицы, направленной перпендикулярно осадительному электроду. Для ламинарного течения и молекулярной вязкости расчет осаждения частиц достаточно прост. Для турбулентного потока газа, несущего частицы пыли, эффективность осаждения рассчитывается по формуле, основанной на вероятности захвата частицы, движущейся в электрическом поле:

$$\eta = 1 - \exp(-Sw/u),$$

где η – эффективность осаждения частицы; S – осадительная поверхность; u – скорость течения газа в электрофильтре; w – скорость движения частицы к осадительному электроду. Скорость миграции частиц к осадительному электроду существенно зависит от степени турбулизации газового потока и равномерности распределения его скорости по всему сечению электрофильтра.

Обычно расстояние от коронирующего до осадительного электрода принимается близким к 10–50 см, скорость газового потока внутри электрофильтра обычно близка к $1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Следовательно, наименьшее значение Re равно 6000, т. е. поток является турбулентным, а основной задачей при конструировании электрофильтров, так же как и других аппаратов для улавливания аэрозольных частиц, является уменьшение турбулентности газового потока.

Удаление частиц пыли с осадительного электрода является одним из важнейших процессов в электрофильтрах. Это удаление осуществляется либо стряхиванием сухих частиц с электродов, либо смытием их водой. Сброшенные или смытые частицы пыли поступают в бункер электрофильтра, откуда удаляются через затворы, препятствующие поступлению воздуха в бункер, так как при таком поступлении резко снижается эффективность улавливания частиц в электрофильтрах.

Таким образом, рассмотрение основных положений и подходов к расчету механических и других пылеуловителей показало, что эти методы расчета опираются на допущении о ламинарности потока, несущего частицы пыли. Это допущение неправильно описывает процесс очистки в пылеуловителях, правильное же описание может быть получено только при рассмотрении взаимодействия частиц пыли с несущим их газовым потоком с учетом турбулентности последнего.

3.2. Транспортирующая способность газового потока

Для того чтобы подойти к рассмотрению вопроса об очистке газов от взвешенных в них частиц пыли, необходимо знать закономерности процесса переноса частиц пыли потоком, т. е. необходимо знать зависимость транспортирующей способности потока от свойств самого потока и взвешенных в нем частиц пыли. Под транспортирующей способностью потока понимается максимальная концентрация частиц пыли, имеющих определенную гидравлическую крупность, при которой возможен перенос пыли потоком во взвешенном состоянии.

Для анализа транспортирующей способности газового потока воспользуемся гравитационной теорией М. А. Великанова, основные положения которой описаны в гл. 1. Уравнение распределения концентрации пыли в турбулентном потоке газа можно вывести следующим образом. Масса элементарного объема газовой фазы потока равна $(1 - S)\rho_0 g \times \times dx dy dz$. Масса элементарного объема твердой фазы потока $S\rho_0 g dx dy dz$.

Работа в направлении силы тяжести в единицу времени в потоке со свободной поверхностью получается умножением на высоту падения, равную для любой газовой частицы,двигающейся вдоль оси ox , произведению из уклона на скорость. Следовательно, работа газовой фазы равна $(1 - S)\rho_0 g u I dx dy dz$, где I — уклон потока; u — линейная скорость потока. Для твердой фазы, помимо падения, общего для обеих фаз и равного uI , каждая твердая частица перемещается вниз относительно окружающей ее газовой среды на расстояние $w(1 - S)$, совершая при этом положительную работу, обусловленную превышением ее плотности над плотностью газовой среды и равную для элементарного объема $S(\rho_T - \rho_0) gw(1 - S)dV$. Общая суммарная положительная работа для твердой фазы равна $[S\rho_T guI + S(1 - S)(\rho_T - \rho_0) gw]dV$. Работа сопротивления потока, вычисляемая, как обычно, на основании отождествления турбулентного трения с переносом количества движения, рассчитывается отдельно для газовой и твердой фаз потока. При этом весь поток как бы расчленяется на два — один с плотностью $\rho_0(1 - S)$, другой $-\rho_T S$. Для первого потока перенос количества движения через площадку $dx dy$, осредненный по времени, равен $\rho_0(1 - S)uv dx dy$; для второго потока $\rho_T Suv dx dy$. Выполняя опера-

цию осреднения и вводя величину $v_T = v - w$, а также считая равным нулю третьи гидродинамические моменты типа $\langle u'v'S' \rangle$, для газовой фазы получаем $\rho_0[(1 - \bar{S})\overline{u'v'} - w\bar{S}\overline{u'S'}]dx dy$.

Для распределения продольной скорости потока по его высоте принимается формула Ясмунда—Никурадзе

$$\bar{u} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{gHI} \ln \left(1 + \frac{\eta}{\alpha} \right),$$

где H — высота потока; α — относительная шероховатость; $\eta = z/H$; z — расстояние до дна потока; κ — постоянная Кармана. Исключая из полученных уравнений корреляцию вида $\langle u'v' \rangle$, получаем уравнение для мутности потока в виде

$$\frac{d}{d\eta} \int_{\eta}^1 (1 + a\bar{S}) d\eta \frac{B}{\bar{S}(1 - \bar{S})(1 + a\bar{S})^2} = - \frac{B}{\ln \left(1 + \frac{\eta}{\alpha} \right)},$$

где

$$a = \frac{\rho_T - \rho_0}{\rho_0}; \quad B = \frac{\kappa a w}{(1 + a) I \sqrt{gHI}}.$$

Выражение для B является безразмерной комбинацией характеристик потока (u , H , I) и взвешенных наносов (a , w). Таким образом, этот параметр можно рассматривать как критерий транспортирующей способности турбулентного потока газа. Так как плотность частиц пыли значительно больше плотности газовой среды, т. е. $\rho_T \gg \rho_0$, то параметр a много больше единицы. Следовательно, параметр B можно представить в следующем виде:

$$B = \frac{\kappa w}{I \sqrt{gHI}}.$$

Принимая для газового потока, что его высота равна гидравлическому радиусу трубы, получаем $h = 0,5D$, где D — диаметр трубы. Уклон потока можно выразить через перепад давления на единицу длины горизонтально расположенной трубы следующим образом:

$$I = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{1}{g\rho_0} = \frac{\lambda}{D} \frac{u^2}{2g},$$

где $P_1 - P_2$ — разность давлений на участке трубы длиной L ; λ — коэффициент сопротивления трубы; ρ_0 — плотность газа. Коэффициент сопротивления можно определить по формуле Блазиуса для гладких

труб:

$$\lambda = 0,32 \operatorname{Re}^{-1/4},$$

где $\operatorname{Re} = uD/\nu$ – постоянная Рейнольдса; ν – коэффициент кинематической вязкости. Теперь с учетом полученной зависимости для уклона потока параметр B можно представить в виде

$$B = 2,15 \frac{wgD}{\lambda^{3/2} u^3}.$$

Кубическая зависимость от скорости потока следует из того, что была учтена работа, затрачиваемая потоком на взвешивание переносимых им твердых частиц пыли.

Для распределения мутности потока по его высоте М. А. Великановым была получена следующая зависимость:

$$S = S_0 (1 - \eta)^{mB}, \quad (3.1)$$

где m – параметр, который зависит только от относительной шероховатости дна потока и меняется в пределах от 0,15 до 0,25. Такая зависимость характерна и для распределения концентрации частиц пыли по высоте несущего их турбулентного потока газа.

При $w \rightarrow 0$ или при $u \rightarrow \infty$, т. е. в случае очень мелких частиц пыли или очень больших скоростей несущего их газового потока, твердые частицы распределены по высоте трубы равномерно. Если же частицы достаточно крупные или скорость несущего их газового потока мала, то максимум концентрации наблюдается у самого дна потока.

Из анализа формул распределения мутности потока по его высоте, полученных в рамках гравитационной теории М. А. Великанова, следует, что с ростом диаметра трубы концентрация частиц пыли или мутность потока должны быстро убывать в точках, характеризующихся одинаковым значением параметра z/D , а это физически неверно. В действительности с ростом диаметра трубы при одинаковой скорости потока растет постоянная Рейнольдса, т. е. увеличивается степень турбулизации газового течения. С точки зрения теории турбулентности интенсивность турбулентных пульсаций потока меняется одинаковым образом как при изменении скорости течения, так и при изменении его масштаба или диаметра трубы. Следовательно, из закона подобия Рейнольдса вытекает, что зависимость распределения концентрации частиц пыли по высоте потока должна быть одинаковой как для скорости течения, так и для диаметра трубы. Другими словами, распределение частиц должно зависеть от параметра, представляющего собой произведение скорости на диаметр трубы: $B \sim (uD)^{-3}$, или $B \sim \operatorname{Re}^{-3}$.

Такая зависимость имеет достаточно ясный физический смысл. Действительно, в турбулентном потоке существуют вихри различного

масштаба, в том числе и самые крупные, размер которых совпадает с масштабом самого потока. Диффузия частиц пыли под действием молекулярных движений, имеющих постоянную интенсивность во всех точках течения, характеризуется постоянным коэффициентом диффузии, который зависит от энергии молекулярного движения и подвижности частиц пыли. Подвижность частиц, в свою очередь, зависит как от вязкости газовой среды, так и от размера самих частиц. Таким образом, в случае молекулярной диффузии среднее квадратичное смещение частицы пропорционально пройденному ею пути или времени диффузии t , т. е. $\bar{x}^2 \sim t$. При турбулентной диффузии интенсивность рассеяния частиц зависит от расстояния между ними. Если это расстояние мало, то частицы будут разделяться относительно друг друга под влиянием малых вихрей, масштаб которых соизмерим с расстоянием между частицами. Крупные же вихри будут переносить частицы, не разделяя их. В такой ситуации зависимость среднего квадратичного смещения частицы становится нелинейной. А. М. Обуховым было показано, что для турбулентной диффузии выполняется зависимость $\bar{x}^2 \sim t^3$.

Коэффициент диффузии частиц в малых масштабах l равен кубу коэффициента диффузии в масштабе всего потока L [60]:

$$K_l = (l/L)^4 \frac{K_L^3}{v^2} . \quad (3.2)$$

Коэффициент диффузии в масштабе всего потока $K_L = \bar{u}l$, где \bar{u} — осредненная скорость потока; l — масштаб энергонесущих вихрей. Между этими двумя законами изменения коэффициента диффузии частиц находится промежуточная область.

Среднее квадратичное смещение частицы в турбулентном потоке пропорционально кубу времени диффузии до тех пор, пока расстояние между частицами не станет равным масштабу самых крупных вихрей, т. е. масштабу самого потока. С этого момента времени рост коэффициента диффузии прекращается, и среднее квадратичное смещение частиц пропорционально времени их движения. Для частиц, имеющих собственную скорость падения v_g , коэффициент диффузии существенно зависит от этой скорости, или, что то же самое, от времени падения частицы.

Рассмотрим теперь вопрос о движении падающих частиц, взвешенных в турбулентном потоке, учитывая приведенные здесь соображения. Частицы поднимаются вследствие вертикальных турбулентных перемещений газовой среды. В этом процессе основную роль играют вихри определенной интенсивности, вертикальная составляющая которых соизмерима со скоростью падения частиц. Вихри же меньших размеров не в состоянии поднимать данные падающие частицы. Таким образом, для частиц, обладающих заданной скоростью падения, существует определенная область спектра турбулентных пульсаций, обеспечивающая

подъем этих частиц. Частоту появления пульсаций, имеющих скорость v_λ , можно оценить, воспользовавшись теорией локальной изотропной турбулентности. Согласно этой теории частота $\omega_\lambda = \bar{u}/\lambda$, где \bar{u} — осредненная скорость потока; λ — линейный масштаб, например высота, на которую должна быть поднята частица ($\lambda \ll L$; L — масштаб потока).

Как известно [59], отношение изменения скорости в масштабе λ к ее изменению Δu в масштабе L по порядку величины

$$v_\lambda/\Delta u = (\mathcal{N}/L)^{1/3},$$

откуда

$$\lambda = L (v_\lambda/\Delta u). \quad (3.3)$$

Подставляя это значение λ в выражение для частоты ω_λ , получаем, что

$$\omega_\lambda = \frac{\bar{u}}{L} \frac{\Delta u^3}{v_\lambda^3} \quad \text{или} \quad \omega_\lambda = \omega_L \frac{\Delta u^3}{v_\lambda^3},$$

где ω_L — частота наибольших пульсаций в масштабе всего потока.

Как уже указывалось, коэффициент турбулентного перемешивания частиц в потоке в масштабе l прямо пропорционален третьей степени коэффициента перемешивания в масштабе L . Поэтому коэффициент перемешивания падающих частиц, взвешенных в турбулентном потоке газа, можно определить по формуле

$$K_l = \alpha(\bar{u}l)^3. \quad (3.4)$$

Согласно теории диффузии распределение концентрации взвешенных частиц по вертикали в горизонтальном потоке описывается следующим соотношением:

$$c = c_0 \exp \left\{ -w \int_0^z \frac{dz}{K_z} \right\}, \quad (3.5)$$

где c — концентрация частиц на высоте z ; c_0 — соответственно концентрация частиц на высоте $z = 0$; K_z — коэффициент турбулентной диффузии в вертикальном направлении. Если рассмотреть, например, поток в горизонтальной трубе и принять для трубы среднее значение масштаба энергонесущих вихрей l и среднюю скорость течения \bar{u} , то распределение концентрации взвешенных частиц со скоростью падения w по высоте горизонтальной трубы имеет вид

$$\frac{c}{c_0} = \exp \left\{ - \frac{wz}{a \bar{u}^3 l^3} \right\}. \quad (3.6)$$

Напомним, что гравитационная теория М. А. Великанова приводит к

зависимости

$$c/c_0 = (1 - z/D)^{mB}. \quad (3.7)$$

Если принять, что в среднем для потока в трубе диаметром D $l = 0,1D$ [62], то можно записать (см., например, [60]) для трубы

$$K = 10^{-3} a\bar{u}^3 D^3.$$

Следовательно, в данном случае зависимость (3.6) примет вид

$$\frac{c}{c_0} = \exp \left\{ - \frac{10^3 wz}{a\bar{u}^3 D^3} \right\}. \quad (3.8)$$

Из сравнения соотношений (3.8) и (3.7), полученных в рамках гравитационной теории М. А. Великанова, видно, что в первом случае с ростом диаметра трубы перемешивание усиливается и концентрация частиц по высоте трубы выравнивается, а во втором случае, наоборот, чем больше диаметр трубы, тем ниже слой взвешенных частиц в трубе при одной и той же скорости потока. Достаточных данных для проверки зависимости распределения концентрации от диаметра трубы пока не имеется, хотя согласно, например, опыту отбора проб запыленного воздуха известно, что с уменьшением диаметра газозаборной трубки в ней должна обеспечиваться скорость, значительно превышающая скорость основного потока во избежание выпадения частиц (за исключением самого заборного отверстия, где относительная скорость должна быть равна нулю).

Параметр

$$A = \frac{8gwD}{\pi D^3 \bar{u}^3} \quad (3.9)$$

характеризует транспортирующую способность газового потока и описывает распределение концентрации частиц по высоте потока согласно гравитационной теории М. А. Великанова. Аналогичный параметр A_1 , полученный в рамках теории турбулентной диффузии падающих частиц, имеет вид

$$A_1 = \frac{wv^2 D}{\bar{u}^3 D^3} \cdot 10^{11}; \quad (3.10)$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\pi v^2}{8g} \cdot 10^{11}.$$

Если принять кинематическую вязкость воздуха равной $0,15 \text{ см}^2/\text{с}$, то отношение $A_1/A \approx 1$, т. е. критерии транспортирующей способно-

сти турбулентного потока газа, полученные в рамках гравитационной теории М. А. Великанова и в рамках теории турбулентной диффузии падающих частиц, практически равны. Однако A_1 более правильно отражает физическую природу явления, так как он связывает транспортирующую способность газового потока не только с кинематической вязкостью, но и с масштабом энергонесущих вихрей. Масштаб энергонесущих вихрей, в свою очередь, зависит от шероховатости ограничивающих поток поверхностей и характеризует степень турбулизации газового течения. Таким образом, критерий A_1 охватывает все свойства потока и ограничивающих его поверхностей.

Допустимая концентрация частиц пыли может быть выражена через параметр A_1 , если принять, что она обратно пропорциональна транспортирующей способности потока, т. е.

$$c = \frac{c_{max}}{A_1} = c_{max} \frac{\nu Re^3}{wD} \cdot 10^{-11}.$$

В гл. 1 было показано, что максимальная концентрация частиц пыли в воздухе равна $0,5 \text{ кг/м}^3$. Воспользовавшись этим результатом, получим, что максимальная концентрация частиц пыли гидравлической крупности w в трубе диаметром D , переносимая потоком во взвешенном состоянии, составляет

$$c = 500 \frac{\nu Re^3}{wD} \cdot 10^{-11}.$$

Если перейти от исследований транспортирующей способности потока газа к вопросу об очистке газов от взвешенных в потоке частиц пыли, то очевидно, что эти процессы прямо противоположны. Если концентрация пыли, которая может быть перенесена потоком, растет прямо пропорционально Re^3 , то должно быть наоборот:

$$c_{пад} \sim Re^{-1/3}.$$

Следует иметь в виду, что если переносимая потоком концентрация пыли обратно пропорциональна гидравлической крупности частиц, то концентрация выпадающей пыли прямо пропорциональна гидравлической крупности: $c_{пад} \sim w$.

Если поток, характеризующийся постоянной Рейнольдса Re_1 , с частицами со средним размером r переходит в зону, в которой число Рейнольдса уменьшается до значения Re_2 , то коэффициент очистки определяется следующей зависимостью:

$$\eta = \frac{c_{пад}}{c_{нач}} \sim \frac{Re_1^{1/3}}{Re_2^{1/3}} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right),$$

где α — постоянная.

3.3. Расчет эффективности пылеулавливающих аппаратов

Основной величиной, характеризующей работу пылеулавливающих аппаратов, является коэффициент очистки газов от пылевых частиц. Этот коэффициент определяется так:

$$\eta = \frac{M_{ул}}{M_{вх}} \cdot 100\% = \frac{M_{вх} - M_{вых}}{M_{вх}} \cdot 100\%,$$

где $M_{вх}$, $M_{вых}$, $M_{ул}$ — масса частиц, содержащихся в газе соответственно до их поступления в аппарат, на выходе из аппарата и задержанных в аппарате. Коэффициент очистки η можно выразить через средние концентрации пыли в газе следующим образом:

$$\eta = \frac{\bar{c}_{вх}Q_{вх} - \bar{c}_{вых}Q_{вых}}{\bar{c}_{вх}Q_{вх}} \cdot 100\%,$$

где $\bar{c}_{вх}$ и $\bar{c}_{вых}$ — соответственно средние концентрации пыли в газе на входе в аппарат и на выходе из него; $Q_{вх}$ и $Q_{вых}$ — количество газов, поступающих в аппарат и выходящих из него. Если $Q_{вх} = Q_{вых}$, т. е. при отсутствии подсосов воздуха или утечке газов из аппарата, а также при отсутствии сильного увлажнения газов, то для коэффициента очистки справедливо соотношение

$$\eta = \left(1 - \frac{\bar{c}_{вых}}{\bar{c}_{вх}} \right) \cdot 100\%.$$

Коэффициенты очистки зависят не только от технических характеристик пылеулавливающих аппаратов и установок, но и от дисперсного состава улавливаемых частиц. Качество работы того или иного аппарата можно охарактеризовать фракционным коэффициентом очистки, который показывает отношение количества пыли данной фракции, уловленной в аппарате, к количеству входящей пыли той же фракции. Фракционный коэффициент очистки газов относится к частицам определенных размеров.

Пылеосадительные камеры. Пылеосадительные камеры являются одним из простейших пылеулавливающих аппаратов, основанных на использовании осаждения крупных частиц диаметром 100 мкм и более под действием силы тяжести при снижении транспортирующей способности турбулентного потока газа, несущего частицы пыли (рис. 3.3).

Коэффициент очистки газов от частиц пыли, определяемый как отношение массы частиц, осажденных в камере, к массе частиц, поступающих в камеру в единицу времени, может быть рассчитан с учетом распределения частиц по фракциям следующим образом:

$$\eta = \sum \eta_i f_i \frac{n_i w_{осч}}{w_{оск}},$$

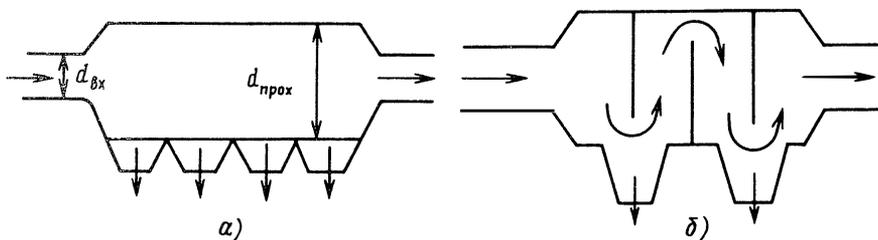


Рис. 3.3. Пылеосадительные камеры:
 а – без перегородок; б – с перегородками

где η_i – фракционный коэффициент улавливания частиц пыли диаметром d_i ; f_i – массовая доля частиц в потоке, имеющих размер меньше d_i ; n_i – для частиц i -й фракции в потоке газа; $w_{осi}$ и $w_{осk}$ – скорости осаждения соответственно i -й и наиболее крупной фракции частиц.

Скорость газа в пылеосадительных камерах обычно выбирается равной 0,2 – 0,8 м/с, а высота и ширина камеры достигают 3 м. Принимая среднюю скорость потока газа в пылеосадительной камере равной 0,5 м/с, получаем, что для такой камеры $Re = 10^5$. Заметим, что даже в пылеосадительных камерах типа Говарда с горизонтальными полками, между которыми расстояние равно 10 – 20 см, $Re = 3 \div 6 \cdot 10^3$. Обычно скорость потока на входе в камеру равна 10 м/с при диаметре подводящего патрубка 1 м. Если принять согласно [63], что коэффициент очистки газа для пылеосадительных камер не превышает 40 – 50%, то в таких камерах его можно принять равным

$$\eta = A \left(\frac{Re_{вх}}{Re_{потока}} \right)^{1/3},$$

где $A = 12,5 \div 15,5$. Таким образом, очистка газов в пылеосадительных камерах может быть улучшена только снижением транспортирующей способности потока газа, несущего частицы пыли, т.е. снижением турбулентности газового потока.

Рассмотрим более подробно пылеотделяющие решетки жалюзийного типа (рис. 3.4). В таких камерах при размещении горизонтальных перегородок в газоходе уменьшается масштаб потока в 10 раз, т.е. в 10 раз уменьшается Re . При этом транспортирующая способность потока уменьшается в 1000 раз и, следовательно, в такое же число раз уменьшается количество переносимой примеси, состоящей из частиц пыли. Основной поток разделяется на отдельные потоки на расстоянии 5–10 диаметров просветов, т.е. на расстоянии 0,5–1D начального диаметра потока D . В этом месте частицы пыли не могут поддерживаться потоком несущего их газа и опускаются к его дну, а затем, захватываясь турбулентными пульсациями, вновь взвешиваются, образуя облако пыли на рас-

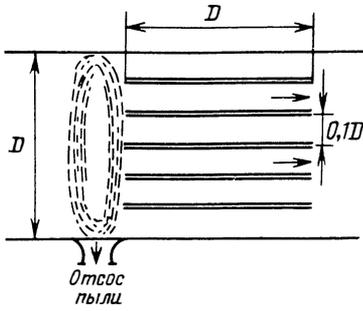


Рис. 3.4. Пылеотделяющая решетка

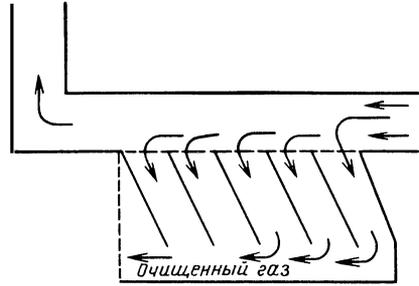


Рис. 3.5. Схема действия жалюзийного пылеуловителя

стоянии $0,5-1D$ от решетки. Часть пылевых частиц все же будет пронестись через эту решетку. Так как перед решеткой концентрация частиц пыли будет непрерывно возрастать, то возрастать будет и проскок частиц через решетку до тех пор, пока не установится равновесное состояние, при котором концентрация частиц пыли в газоходе перед решеткой на значительном от нее расстоянии и концентрация частиц пыли за решеткой выравниваются.

Можно поступить и иначе, установив в газоходе на расстоянии $0,5-1D$ от решетки перед входом в нее запыленного потока газа специальную щель, через которую отсасывать со скоростью, превышающей скорость в газоходе, пыль, накапливающуюся перед решеткой. Затем эту пыль осаждают в отдельном пылеуловителе. Такая элементарная решетка будет действовать как пылеотделяющая система, выделяя частицы пыли из несущего их газового потока. Если же уменьшить не только масштаб потока газа, но и скорость его течения в просветах решетки, то можно добиться сравнительно высокого коэффициента очистки газа от частиц пыли. Именно на таком принципе построены современные пылеотделяющие решетки. На рис. 3.5 показана схема действия жалюзийного пылеуловителя.

Во всех решетках (жалюзийная решетка ВТИ, решетка КТИС и др.) поток газа подводится с большой скоростью через все сечение газо-

Таблица 3.2. Коэффициент A для жалюзийных решеток разных типов

Тип решетки	ξ	$\xi^{1/3}$	η	$A = \eta \xi^{1/3}$
Криволинейная "S"	259	6,4	87	13,3
Империл "К"	150	5,3	76	14,4
КТИС "Ф"	162	5,4	76	14,0
Улитка с решеткой	55	3,8	55	14,5
ВТИ	30	3,1	55	17,8

хода, а затем проходит через узкие проходы решетки с малой скоростью.

Ранее было показано, что коэффициент очистки газа от частиц пыли для решетки зависит от отношения Re на входе в решетку и на выходе из нее и пропорционален корню кубическому из этого отношения. В табл. 3.2 приведены значения отношения

$$\xi = \frac{Re_{вх}}{Re_{прохода}}.$$

Из данных табл. 3.2 следует, что для пылевых частиц, по улавливанию которых испытывались решетки жалюзийного типа,

$$\eta = 14,8 \left(\frac{Re_{вх}}{Re_{прохода}} \right)^{1/3},$$

что полностью подтверждает сделанный ранее вывод, что осаждающая способность осадительных камер и жалюзийных решеток определяется уменьшением турбулентности и снижением транспортирующей способности газового потока, несущего частицы.

Циклоны. Эффективность циклонов, использующих центробежные силы для осаждения частиц пыли, существенно выше эффективности пылеосадительных камер и жалюзийных решеток. Запыленный поток подвергается в циклонах вращательному движению при тангенциальном подводе потока газа или пропускании этого потока через закручивающие лопасти.

В циклоне частица пыли массой m , движущаяся по круговой траектории с тангенциальной скоростью u , при радиусе траектории R испытывает действие центробежной силы mu^2/R . При скорости $u = 15$ м/с и радиусе траектории $R = 0,6$ м эта сила примерно в 40 раз превосходит силу тяжести, вызывающую оседание частиц в пылеосадительных камерах. Однако циклонный процесс заключается не в том, что центробежные силы осаждают частицы, а в образовании под их действием жгутов частиц пыли, движущихся у стенок циклона и выносимых в бункер, где они оседают под действием силы тяжести [63]. Для наиболее распространенных у нас циклонов НИИОГАЗ (ЦН-11, ЦН-15, ЦН-24) внутренний диаметр выхлопной трубы $d = 0,59D$ (D – внутренний диаметр циклона), а внутренний диаметр пылевыпускного отверстия $d_1 = (0,3 \div 0,4)D$. Диаметр бункера $D_{бункер} = 1,5D$, высота его цилиндрической части принимается не менее $0,8D$. Следовательно, если принять для расчета эффективности очистки газов в циклоне полученное нами соотношение

$$\eta \approx 15 \left(\frac{Re_{вх}}{Re_{прохода}} \right)^{1/3} = 15 \left(\frac{v_{ц} D_{ц}}{v_{нв} d_{нв}} \right)^{1/3},$$

то можно оценить соотношение скоростей потока газа в циклоне и в его пылевыпускном отверстии $v_{нв}$ следующим образом:

$$v_{ц}/v_{нв} = \eta^3 / (2 \cdot 15^3).$$

При этом принималось, что $d_{нв} = 0,5D_{ц}$. С учетом того что для циклонов НИИОГАЗ эффективность очистки газов от частиц пыли диаметром 10–15 мкм достигает 90%, получим

$$v_{ц}/v_{нв} = 90^3 / 6750 \approx 100,$$

т.е. скорость потока газа в пылевыводящем отверстии циклона близка к 1/100 скорости потока газа в самом циклоне. Скорость потока газа в циклоне $u = 3,5 \div 4$ м/с. Следовательно, скорость потока в пылевыводящем отверстии не превышает 3,5 – 4 см/с, а это соответствует скорости падения частиц диаметром 10–15 мкм. В случае подсоса воздуха в бункер коэффициент очистки газа в циклоне должен резко уменьшиться, что и наблюдается на практике.

Как следует из изложенного, для всех видов пылеуловителей необходимо уменьшать транспортирующую способность турбулентного потока. Для всех типов сухих механических пылеуловителей коэффициент A близок к 15.

3.4. Определение размера частиц пыли

Анализ размеров частиц пыли обычно сопровождается отбором пробы пыли из потока газа и последующим анализом отобранной пробы. Размер частиц в пробе определяется либо просеиванием через сито, либо измерением скоростей осаждения частиц в жидкости. Иногда размер частиц определяют по скорости их витания в газовом потоке.

Все эти методы определения размера частиц пыли в потоке газа нельзя считать достаточно надежными, и связано это прежде всего с первым этапом анализа – пробоотбором пыли из газового потока. Частицы пыли, отобранные из потока, соединяются в агрегаты и при определении размеров частиц разделение этих агрегатов на первоначальные частицы затруднено. В процессе такого разделения агрегатированные частицы будут либо недостаточно диспергированы, так что анализироваться будут более крупные частицы, чем в потоке, либо, наоборот, агрегатированные частицы будут раздроблены слишком мелко (агрегаты частиц могут быть и в потоке газа).

В последние годы для определения размеров частиц в потоке газа стали применяться неконтактные методы, основанные на использовании оптических свойств частиц аэрозоля. С появлением лазеров возможности таких методов существенно расширились [66], однако и эти методы имеют ограниченные возможности и не всегда могут быть использованы в промышленных условиях.

Влияние частиц, в том числе и их гидравлической крупности, на характеристики несущего их потока газа позволяет измерить размеры

частиц пыли без их отбора из газового потока лишь с помощью измерений гидродинамических параметров взвесенесущего потока. Такой метод определения размеров частиц основан на измерении сопротивления испытываемого аппарата или присоединенного к нему параллельно какому-либо гидравлического сопротивления в виде, например, колена для пропуска чистого и запыленного газовых потоков. Используя полученные значения гидравлического сопротивления, рассчитывают гидравлический размер или скорость падения частиц пыли, содержащихся в запыленном газе. Теперь, зная гидравлический размер и плотность пыли, определяют уже и средний размер частиц, который будет характеризовать свойства переносимой потоком пыли.

Формула для расчета гидравлической крупности или скорости падения частиц получена на основе выражения (1.74):

$$w = \frac{q \Delta P_0}{\varphi_0 c} \left[\frac{\Delta P_0}{\Delta P_n} - \left(1 + \frac{c}{\rho_0} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Сюда входят все величины, которые можно непосредственно измерить: ΔP_0 , ΔP_n — перепад статического давления газа в двух сечениях трубы соответственно для чистого и запыленного газа; q — объемная скорость потока; c — концентрация частиц пыли; ρ_0 — плотность газа.

Эксперименты и расчеты показали, что значения гидравлической крупности частиц, вычисленные из кривой фракционных остатков и рассчитанные по формуле (3.11), получаются близкими друг другу. Предложенный метод является достаточно точным и отличается простотой и надежностью.

3.5. Осаждение частиц аэрозоля при обтекании препятствий

Расчет фильтрации частиц аэрозоля путем их захвата волокнами фильтров, кусочками дробленого материала, каплями жидкости основан на анализе движения отдельных частиц вблизи препятствий и осаждения на них. При установлении эмпирических зависимостей для расчета такого осаждения обычно учитывают отклонения траекторий движения отдельных частиц от линий тока газового течения вследствие действия сил инерции и диффузионных процессов.

Принимая во внимание потенциальный характер движения газового потока вокруг препятствия, траекторию движения частиц можно записать следующим образом:

$$x = \frac{m u}{K} \cos \alpha \left\{ \frac{K t}{m} - \left[1 - \exp \left(- \frac{K t}{m} \right) \right] \right\} + \frac{m v_0}{K} \cos \beta \left[1 - \exp \left(- \frac{K t}{m} \right) \right];$$

$$y = \frac{mu}{K} \sin \alpha \left\{ \frac{Kt}{m} - \left[1 - \exp \left(- \frac{Kt}{m} \right) \right] \right\} + \frac{mv_0}{K} \sin \beta \left[1 - \exp \left(- \frac{Kt}{m} \right) \right].$$

С помощью этих соотношений можно рассчитать путь, проходимый частицей, если известны направления и скорости линий тока. При расчете линии тока разбиваются на участки, в каждом из которых скорость и направление принимаются неизменными. На рис. 3.6 показаны результаты расчета эффективности очистки газа от взвешенных в нем частиц при обтекании потоком различных препятствий в зависимости от величины mu/KD . Эффективность очистки газа, связанная с эффективностью динамического удара (импакта), оценивается по отношению площади сечения, на которой удаляются по инерции все частицы, к лобовой поверхности препятствия. Для цилиндра эффективность очистки газа вследствие динамического удара пропорциональна отношению b/D , где b — ширина зоны, из которой захватываются все частицы. Для шара эта эффективность пропорциональна $(b/D)^2$. Величину mu/KD обычно называют ударной способностью частиц аэрозоля. Для частиц, движение которых определяется законом Стокса, ударная способность частиц аэрозоля вычисляется по формуле

$$\frac{mu}{KD} = \frac{1}{18} \frac{dup}{\mu D}.$$

В приведенных расчетах осаждения частиц аэрозоля на поверхность препятствия не учитывается наличие пограничного слоя вокруг обтекаемого тела, который может существенно изменить полученные оценки. Так, при ударной способности частиц аэрозоля, меньшей или равной 0,09, осаждение частиц на препятствие не происходит. Таким образом, вследствие существования пограничного слоя в случаях частиц малого размера или большого размера обтекаемого тела осаждение частиц по инерции не происходит. Этот же вывод справедлив также и при малой скорости потока газа. Следовательно, чтобы частицы выходили из потока газа по инерции, следует брать малый диаметр тела, на котором проис-

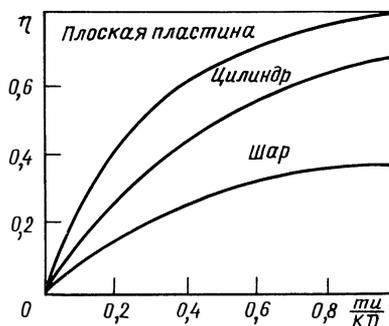


Рис. 3.6. Зависимость эффективности осаждения на поверхности различной формы частиц аэрозоля от их ударной способности

ходит осаждение частиц, и большую скорость газового потока. Частицы, диаметр которых близок к 1 мкм, практически не осаждаются по инерции. Однако такие частицы и частицы меньшего диаметра могут осаждаться на препятствии вследствие молекулярной диффузии. Скорость осаждения мелких частиц в этом случае рассчитывают по скорости диффузии через пограничный слой. Эффективная толщина пограничного слоя зависит от скорости, плотности и вязкости газа, формы обтекаемого тела и скорости диффузии частиц. За пределами пограничного слоя концентрация частиц аэрозоля принимается постоянной, а на поверхности тела равной нулю, т. е. принимается, что каждая частица, достигшая поверхности тела, прилипает к ней. На основании этого скорость диффузионного осаждения частиц аэрозоля на поверхность шара диаметром D пропорциональна градиенту концентрации в пограничном слое и определяется по уравнению абсорбции

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\pi D^2 D_m c_0}{x},$$

где n – число осаждающихся частиц; x – толщина пограничного слоя обтекаемого тела; c_0 – концентрация частиц аэрозоля; D_m – коэффициент диффузии частиц.

Число частиц, уловленных телом вследствие диффузии за промежутки времени, необходимый для прохождения газом единичного расстояния, составляет $\pi D^2 D_m c_0 / (ux)$. В трубке единичной длины диаметром b число частиц в ее начале равно $\pi b^2 c_0 / 4$.

С учетом того что эффективность осаждения частиц на поверхность пропорциональна $(b/D)^2$, получаем выражение для расчета осаждения частиц вследствие диффузии:

$$\eta = \left(\frac{b}{D}\right)^2 = 4 \frac{D_m}{ux}.$$

Толщина пограничного слоя может быть определена следующим образом:

$$\frac{D}{x} = 2 + 0,56 \text{Re}^{0,5} \text{Pr}^{0,375} = 2 + 0,56 \left(\frac{Du\rho}{\mu}\right)^{0,5} \left(\frac{\mu}{\rho D_m}\right)^{0,375} + \dots$$

Коэффициент молекулярной диффузии частиц равен

$$D_m = \frac{RT}{N_A} \frac{1 + 2 \frac{Al}{d}}{3\pi\mu d},$$

где R – газовая постоянная; N_A – число Авогадро; T – температура; i – длина свободного пробега молекул; $Al = 9 \cdot 10^{-6}$ см.

С помощью приведенных формул можно рассчитать число частиц заданного размера, осаждающихся из потока газа на поверхность шара вследствие диффузии. Такие расчеты были проведены, в частности, для шарообразных капель воды, образующихся из водяных струй в потоке газа. Для осаждения частиц необходимо, чтобы капли имели наименьший диаметр и соответственно наибольшую поверхность. Чем меньше диаметр капли, тем эффективнее улавливание ими крупных частиц, выходящих из потока по инерции. Чем больше суммарная поверхность капель, тем эффективнее они улавливают частицы, совершающие броуновское движение. Вместе с тем весьма существенную роль играет скорость движения капель относительно потока газа.

Если для получения капель и внесения их в газовый поток используются форсунки, впрыскивающие воду, высокая эффективность улавливания частиц пыли не может быть достигнута, так как при этом образуются достаточно крупные капли, а образующиеся мелкие капли имеют слишком малую скорость относительного движения. Кроме того, мелкие капли, обладая небольшой кинетической энергией, не проникают в толщу газового потока.

Эффективность очистки газа может быть повышена путем придания потоку газа с каплями воды вращательного движения в скрубберах с пульверизаторами типа скруббера Пиз – Антони. Однако более эффективным является дробление струй воды на капли газовым потоком большой скорости, осуществляемое в скруббере Вентури.

3.6. Скруббер Вентури – турбулентный промыватель газа

В 1947 – 1950 гг. в печати появились сообщения о разработке и промышленном использовании нового типа пылеулавливающего аппарата, получившего название скруббера Вентури или турбулентного промывателя газа [66]. В этом аппарате в газовый поток, движущийся с большой скоростью (50 – 150 м/с), впрыскиваются струи воды, которые потоком газа дробятся на капли, при этом чем больше скорость потока газа, тем меньше размер капель. Эти капли сталкиваются с частицами пыли, содержащимися в потоке газа, и друг с другом из-за интенсивного перемешивания в скоростном потоке газа. Для придания потоку максимальной скорости при возможно меньшем расходе энергии используются конструкции типа трубы Вентури, имеющие плавный переход (угол раскрытия 25 – 28°) от сечения газохода к горловине, а затем еще более полное расширение с углом раскрытия 6–7°. При этом коэффициент местного сопротивления потоку газа равен 0,15, т.е. расход давления для преодоления сопротивления горловины трубы Вентури равен лишь 0,15 скоростного напора. При подаче в трубу 0,8 л воды на 1 м³ газа затрачивается один скоростной напор. При уменьшении скорости потока в расширяющейся части трубы Вентури происходит укрупнение капель с захваченными частицами пыли, и на выходе из

трубы Вентури их размер достигает 30–50 мкм. Капли такого размера легко отделяются от потока газа в каплеотстойниках, циклонных аппаратах или любых других пылеуловителях. Обычно используют скрубберы с тангенциальным подводом газа.

Степень очистки газа от пыли зависит от количества жидкости, подаваемой в трубу Вентури, скорости газа в горловине, концентрации пыли и размеров ее частиц, а также от свойств пыли. При очистке газов от частиц пыли в скрубберах Вентури достигается коэффициент очистки до 99% даже для частиц пыли размером в десятые доли микрона.

Расчеты процессов очистки газов в скрубберах Вентури, включающих в себя влияние турбулентности газового потока на дробление жидкости, а также турбулентную коагуляцию частиц пыли и их захват каплями воды, выполняют, как правило, на основе эмпирических закономерностей, которые во многих случаях значительно расходятся с экспериментальными данными.

При выводе эмпирических зависимостей в основном использовались представления о движении одиночных частиц. При движении отдельной частицы в потоке, обтекающем какое-либо препятствие (шар, цилиндр), учитывается отклонение частиц под действием сил инерции от линий тока газового потока.

Для расчета дробления жидкости на капли и оценки суммарной поверхности капель использовалась эмпирическая зависимость [67, 68]

$$D_0 = \frac{585}{v} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{0,5} + 585 \left[\frac{\mu}{(\sigma\rho)^{0,5}} \right]^{0,42} \left(\frac{1000Q_1}{Q_a} \right)^{1,5},$$

где D_0 – диаметр осредненной капли; v – относительная скорость потока газа и потока жидкости; Q_1/Q_a – отношение расхода жидкости к расходу газа; ρ – плотность жидкости; μ – вязкость жидкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Эта зависимость применима только для расчета размера капель при впрыскивании жидкости в газовый поток из форсунки. Кроме того, ограничения накладываются и на расход жидкости и газа, и на параметры жидкости. Однако, как правило, эти ограничения не принимаются во внимание, и расчеты по этой формуле ведут практически во всех случаях.

Если расход жидкости и ее вязкость невелики, то размер капель определяется первым членом эмпирического соотношения, т.е.

$$D_0 = 585v^{-1}(\sigma/\rho)^{0,5}.$$

Кроме осредненного диаметра капель при расчете эффективности улавливания частиц следует учитывать также и дисперсный состав капель или распределение их по размерам [68].

При дроблении жидкости в трубе Вентури эмпирическая формула для расчета осредненного диаметра капель имеет следующий вид:

$$D_0 = 4,8 \cdot 10^3 / u_T + 27,4L^{1,5},$$

где u_T — скорость газа в горловине трубы Вентури; L — отношение расхода жидкости к расходу газа.

Из этой зависимости следует, что суммарная поверхность капель растет с увеличением расхода воды до некоторого предела. Эффективность скруббера Вентури мало зависит от способа впрыскивания жидкости в поток газа, важно лишь обеспечить совершенно одинаковое покрытие жидкостью всего пространства горловины [67]. Основная часть энергии при работе скруббера Вентури затрачивается на придание жидкости скорости потока газа.

Анализ приведенных выше рассуждений и методов расчета дробления и улавливания пыли каплями жидкости показывает их недостаточную обоснованность. Использование эмпирической формулы, полученной для узкого диапазона условий, при других значениях параметров установки приводит к большим погрешностям. Действительно, сравнение результатов расчета осредненного размера капель, образующихся в процессе дробления жидкости в потоке газа, выполненного по эмпирической формуле, с данными эксперимента показывает расхождение в 2,5 раза и более [69]. Существенным недостатком является и то, что расчет движения частиц пыли и капель жидкости осуществляется с использованием предположения о потенциальном характере течения газа. Как уже указывалось, частицы в потоке газа подвергаются воздействию турбулентных пульсаций газовой среды, нарушающих их упорядоченное движение вдоль линий тока. Вследствие таких пульсаций частицы испытывают ускорения, значительно превышающие инерционные ускорения. Интенсивное турбулентное перемешивание частиц в газовом потоке ведет к турбулентной диффузии частиц, во много раз превышающей молекулярную диффузию. Таким образом, правильное решение задачи об очистке газа от взвешенных в нем частиц пыли каплями воды может быть получено только при учете воздействия потока на взвешенные в нем частицы пыли и жидкости.

Процесс очистки газа от взвешенных в нем частиц пыли с помощью введенных в газ капель жидкости является по существу коагуляционным процессом. Скорость уменьшения частиц в единичном объеме газа в этом случае определяется соотношением

$$dN/dt = KN^2,$$

где N — число частиц в единичном объеме газа; K — постоянная скорости коагуляции. Из этого соотношения видно, что скорость коагуляции можно повысить путем увеличения либо числа частиц в единице объема, либо постоянной скорости коагуляции. Число частиц можно увеличить введением в поток газа капель жидкости. При очистке газа от взвешенных в нем мелких частиц диаметром меньше 0,3–0,5 мкм число частиц в 1 см³ газа обычно составляет 10⁶ – 10⁸. Из этого следует, что для

существенного увеличения числа частиц в единичном объеме число вводимых в газ капель жидкости должно быть порядка числа частиц пыли, т.е. порядка $10^6 - 10^8$ част/см³. Этого можно добиться либо введением большого количества жидкости, либо дроблением введенной жидкости на наиболее мелкие капли. Последнее может быть осуществлено только скоростным потоком газа.

Постоянная скорости коагуляции зависит от интенсивности хаотического движения частиц. В движущемся с большой скоростью потоке газа происходит турбулентная коагуляция, обусловленная интенсивностью турбулентного перемешивания частиц газовой средой. Таким образом, чтобы увеличить эффективность очистки газа от частиц пыли с помощью капель жидкости, необходимо вести процесс коагуляции в потоке газа, имеющем большую скорость течения, при которой наблюдается сильная турбулизация течения.

Теория дробления жидкости в турбулентном потоке газа была разработана в работах [60, 61], где принималось, что если частица жидкости диаметром D_0 движется в турбулентном потоке газа с относительной скоростью v , то условием неразрывности этой частицы будет равенство ее кинетической энергии работе сил вязкости и поверхностного натяжения:

$$mv^2/2 \sim \rho D_0^3 v^2 \sim \mu v D_0^2 + \sigma D_0^2,$$

где m — масса капли жидкости; ρ — плотность жидкости; μ — вязкость жидкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе капли жидкости и окружающей ее газовой среды. Разделив правую часть этого соотношения на левую, получим

$$\frac{\mu}{\rho v D_0} + \frac{\sigma}{\rho v^2 D_0} \sim 1,$$

или

$$\text{Re}_{D_0}^{-1} + \text{We}_{D_0} \sim 1,$$

где Re_{D_0} — постоянная Рейнольдса в масштабе, равном диаметру капли; We_{D_0} — постоянная Вебера в том же масштабе, что и Re . Полученные соотношения определяют размеры капель, получающихся при разрыве струи жидкости, движущейся в потоке газа. Скорость турбулентного потока газа в масштабе l определяется соотношением

$$v_l \sim (\epsilon l / \rho)^{1/3},$$

где ϵ — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности. Воспользовавшись этим соотношением, найдем диаметр капель жидкости:

$$D_0 \sim \frac{\mu^{3/4}}{\epsilon^{1/4} \rho^{1/2}} + \frac{\sigma^{3/5}}{\epsilon^{2/5} \rho^{1/5}}.$$

Скорость диссипации кинетической энергии турбулентности можно оценить следующим образом:

$$\epsilon = \rho u^3 / D,$$

где u — средняя скорость потока; D — макромасштаб потока, например диаметр трубы. Используя эту оценку скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, получаем

$$D_0 \propto \frac{\mu^{3/4} D^{1/4}}{\rho^{3/4} u^{3/4}} + \frac{\sigma^{3/5} D^{2/5}}{\rho^{3/5} u^{6/5}},$$

где D — диаметр отверстия, через которое струя жидкости поступает в поток газа. Полученное соотношение позволяет определить средний размер капель, образующихся в потоке газа при введении в него через сопло диаметром D жидкости с известными параметрами (плотность ρ , вязкость μ , поверхностное натяжение σ). Однако это соотношение позволяет определить только порядок величины среднего размера капель жидкости, следовательно, точное соотношение должно иметь следующий вид:

$$D_0 = C \left[\frac{\mu^{3/4}}{\rho^{3/4}} \frac{D^{1/4}}{u^{3/4}} + \frac{\sigma^{3/5} D^{2/5}}{\rho^{3/5} u^{6/5}} \right],$$

где C — эмпирическая постоянная, приближенно равная 5. На рис. 3.7 показаны результаты расчета среднего размера капель жидкости в зависимости от скорости газового потока и экспериментальные данные. Видно, что результаты расчета с экспериментальными данными хорошо согласуются.

Скорость коагуляции взвешенных в газе частиц определяется эффективностью их соударений друг с другом, а также концентрацией частиц, интенсивностью подвода частиц друг к другу и временем коагуляции. Скорость коагуляции, как уже указывалось, пропорциональна квадрату концентрации частиц. Следовательно, чем больше частиц в потоке, тем быстрее идет процесс их укрупнения. Более сложным является вопрос об эффективности соударений частиц, т.е. вопрос о прилипании частиц друг к другу при столкновении. Экспериментально установлено, что частицы диаметром 1 мкм и меньше при соударении слипаются независимо от того, твердые они или жидкие [70]. Более крупные

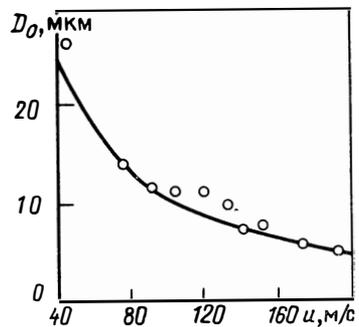


Рис. 3.7. Зависимость среднего диаметра капли от скорости потока

частицы размером свыше 10 мкм при столкновении обычно не слипаются. Капельки жидкости размером 50 мкм слипаются только при достаточно сильном соударении, когда имеется возможность преодолеть силы поверхностного натяжения. Однако соударение крупных частиц и капель жидкости почти всегда ведет к их слипанию. Твердая частица большого размера легко преодолевает пленку поверхностного натяжения капли. Таким образом, можно принять, что каждое соударение капель жидкости размером до 50 мкм как между собой, так и с твердыми частицами любого размера является эффективным и приводит к слипанию соударяющихся частиц.

Задача об интенсивности подвода частиц друг к другу наиболее полно решена для случая неподвижного газа. В этом случае частицы совершают броуновское движение, обусловленное молекулярным движением газовой среды. Интенсивность броуновского движения характеризуется коэффициентом молекулярной диффузии. В этом случае постоянная скорости коагуляции связана с коэффициентом молекулярной диффузии соотношением

$$K_m = 2\pi d D_m.$$

На основе представлений о локально-изотропной турбулентности рассчитана постоянная скорость коагуляции в турбулентном потоке газа [61]. Получена приближенная зависимость постоянной скорости коагуляции в турбулентном потоке:

$$K_T = 2\pi d \left(\frac{\lambda}{L} \right)^4 \frac{u^3 l^3}{\nu^2},$$

где λ – микромасштаб турбулентности, равный 10^{-3} м; L – масштаб потока, равный диаметру горловины; l – масштаб коагуляции, равный $0,4D$; u – скорость потока газа; ν – коэффициент кинематической вязкости.

Рассмотрим теперь расчет коагуляции частиц в трубе Вентури. В горловине трубы происходит дробление воды на капли, которые затем захватывают частицы пыли и после уменьшения скорости потока коагулируют, увеличиваясь в размере. Пусть поток запыленного газа проходит со скоростью u трубу длиной 5 и диаметром 25 см. Результаты расчета

Таблица 3.3. Захват частиц пыли каплями жидкости

Скорость потока, м/с	Диаметр капель после дробления, мкм	Диаметр частиц после коагуляции при различных концентрациях пыли, мкм		
		0,5 г/м ³	5 г/м ³	10 г/м ³
25	50	3	6	7
50	25	5	10	12
100	12	8	15	20
150	6	20	20	27

укрупнения капель в такой трубе приведены в табл. 3.3. В этой таблице размер частиц показан не для капель, а для частиц в случае, если число капель будет соответствовать их скорости, а размер капли будет равен размеру частицы. Это дает несколько заниженные данные коагуляции частиц.

Как видно, при концентрации пыли, большей или равной 1 г/см^3 , укрупнение частиц до размера капель, получающихся при дроблении жидкости, происходит при скорости потока газа, равной 100 м/с . С уменьшением концентрации пыли этот эффект наблюдается при больших скоростях газового потока 150 м/с .

При размерах частиц, меньших $0,1 - 0,5 \text{ мкм}$, помимо турбулентной коагуляции следует учитывать и молекулярную коагуляцию. Следует иметь в виду, что чем меньше частицы пыли, тем мельче должны быть улавливающие их частицы воды. Труднее всего улавливаются частицы размером $0,1 - 0,5 \text{ мкм}$. Более мелкие частицы подобно крупным молекулам газа, обладая интенсивным броуновским движением, быстро диффундируют к поверхности капель воды. Более крупные частицы, обладая значительной инерцией и под воздействием турбулентных пульсаций среды, выходят из потока и соединяются с каплями.

Таким образом, выполненные расчеты показывают возможность эффективной очистки газа от взвешенных в нем твердых частиц в скрубберах Вентури при условии создания больших скоростей потока в горловине трубы и использовании достаточно хорошего уловителя образующихся крупных частиц воды с захваченными ими частицами пыли.

Использование изложенных выше свойств турбулентных потоков для обеспечения переноса, осаждения, захвата и очистки потоков газов от аэрозольных частиц, а также для оценки дробления жидкости на капли и коагуляции частиц с этими каплями показывает большую значимость познания закономерностей турбулентности для решения многих практических задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, укажем, что фронт исследований поведения аэрозольных частиц в турбулентных газовых потоках и влияние самих частиц на динамику потока газа весьма широк и не исчерпывается тем кругом вопросов, которые рассмотрены в монографии. Так, следует отметить, что важную роль в решении многих технических вопросов в химической, металлургической и других отраслях промышленности играют исследования теплообмена газозвесей, самым тесным образом связанных с исследованиями их динамики. В монографии основное внимание было уделено рассмотрению вопросов, представляющих интерес для решения задач охраны атмосферного воздуха, а именно распространению аэрозольных облаков в нижних слоях атмосферы и очистки газов от взвешенных в них частиц. При решении такого рода практических задач перед инже-

нерами стоят вопросы: каким методом рассчитать характеристики распространяющегося в турбулентном газовом потоке аэрозольного облака, как определить те или иные характеристики газоочистной аппаратуры и т.д. К сожалению, в настоящее время дать однозначный ответ на все эти вопросы весьма сложно. В некоторых случаях вполне удовлетворительные результаты могут быть получены в рамках сравнительно простых теоретических моделей путем привлечения эмпирических данных. Однако большой круг задач требует для своего решения привлечения сложных моделей, практическая реализация которых невозможна без высокопроизводительных электронно-вычислительных машин и современных методов вычислительной математики. Приведенный в монографии анализ методов моделирования турбулентных потоков и движения в них аэрозольных частиц должен, по мнению авторов, помочь практическим работникам более четко ориентироваться в имеющихся в настоящее время расчетных моделях, оценивая их пригодность для решения возникающих перед ними практических задач.

Следует подчеркнуть еще раз важную роль, какую играет турбулентность в газоочистных аппаратах, уменьшая эффективность газоочистки. Образно проблему газоочистки можно сформулировать как проблему борьбы с турбулентностью проходящих через аппараты газовых потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбис З.Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970.
2. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР. 1955.
3. Великанов М.А. Динамика русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1946.
4. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
5. Медников Е.П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981.
6. Owen P.R. Pneumatic transport// J. Fluid Mech. 1969. Vol. 39. Pt. 2. P. 407.
7. Фукс Н.А. Влияние пыли на турбулентность газового потока// Журн. теор. физ. 1951. Т. 21. Вып. 6. С. 592.
8. Прандль Л. Гидроаэромеханика: Пер. с англ./ Под ред. А.М. Обухова. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
9. Katman Th. The analogy between fluid friction and heat transfer// Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 1939, N 61. P. 705.
10. Kaller A., Fridman A.A. Differentialgleichung fur die turbulente Bewegung einer Kompressiblen Flussigkeit// Proc. 1 st Intern. Congr. Appl. Mech. Delft.: 1924. P. 395.
11. Бетчелор Д. Теория однородной турбулентности: Пер. с англ./ Под ред. А.М. Обухова. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
12. Рюэль Д., Такенс Ф.О. О природе турбулентности: Странные аттракторы: Пер. с англ./ Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
13. Лоренц Э. Детерминированные неперiodические течения: Странные аттракторы: Пер. с англ./ Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
14. Мароден Д. Попытка установить соотношение между уравнениями Навье – Стокса и турбулентностью: Странные аттракторы: Пер. с англ./ Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.

15. Лаундер Б.Е., Морс А. Численный расчет осесимметричных свободных течений с использованием замыканий для напряжений: Турбулентные сдвиговые течения: Пер. с англ/ Под ред. А.С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982.
16. Давыдов В.И. О статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости// Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. С. 776.
17. Hanjalic K., Lander В.Е. A Reynolds stress model of turbulence and its application to their ahearflow// J. Fluid Mech., 1972, N 52. P. 609.
18. Daly В.Ј., Harlow F.H. Transport equations of turbulence// Phys. Fluid, 1970. N 13. P. 2634.
19. Launder В.Е., Reece G.Ј., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence dosure// J. Fluid Mech., 1975, N 68. P. 537.
20. Lungren T.S. Distribution Functions in Statistical Theory of Turbulence// Phys. Fluids, 1967. Vol. 10, N 5. P. 969.
21. Мони́н А.С. Уравнения для конечномерных распределений вероятностей поля турбулентности// Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. № 5. С. 1043.
22. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
23. Земан О., Ламли Д.Ј. Эффекты плавучести в турбулентном слое с эжекцией: исследование замыкания второго порядка: Турбулентные сдвиговые течения: Пер. с англ/ Под ред. А.С. Гиневского. М.: Машиностроение, 1982.
24. Онуфриев А.Т. О модельном уравнении для плотности вероятности в полуэмпирической теории турбулентного переноса: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977.
25. Струминский В.В. Кинетическая теория турбулентных течений// Сектор механики неоднородных сред. Препринт № 4. М., 1985.
26. Andre J.C., De Moor G. Turbulence approximation for inhomogeneous turbulent flows// J. Atmos. Sci. 1976, N 33. P. 476.
27. Струминский В.В. О возможности применения динамических методов для описания турбулентного течения: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974.
28. Мучник В.М., Фишман Б.Е. Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
29. Выховский А.В., Зараев О.М. Горячие аэрозольные частицы при техническом использовании атомной энергии. М.: Атомиздат, 1974.
30. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергоиздат, 1981.
31. Mehta N.C., Smith J.M., Comings E.W. Pressure drop in air–solid flow systems// Industrial and Eng. Chemistry. 1957. Vol. 49, N 6. P. 986.
32. Экспериментальное исследование движения и дробления капель жидкости в газовом потоке/ Е.В. Стекольников, М.П. Анисимова, И.Я. Ятчени, О.Л. Кондратьев// Инж-физ. журн. 1972. Т. XXIII № 2. С. 226.
33. Winikow S., Chao В.Т. Droplet motion in purified system// Phys. Fluids, 1966. Vol. 9, N 1. P. 12.
34. Jepson G., Poll A., Smith W. Heat transfer from gas to wall in gas–solids transport lines// Trans. Inst. Chem. Engrs. 1963. Vol. 41. P. 207.
35. Волянский М.С., Липатов А.С. Деформация и дробление капель в потоке газа// Инж-физ. журн. 1970. Т. 18. № 5. С. 838.
36. Jones J.H., Grann W.G., Daubert T.E. Slip velocity of tartalicate solids in vertical tubes// AIChEJ., 1966. Nov. P. 1070.
37. Derjagin В.В., Yalamov Yu. Theory of thermophoresis of large aerosol particles// J. Colloid. Sci., 1965. Vol. 20. P. 555.
38. Lumley J.L. Prediction Methods for Turbulent Flows. Lecture Series 76. Von Karman Institut, 1975.
39. Byers R.L., Calvert S. Particle deposition from turbulent streams by means of thermal force// Ind. Eng. Chem. Fundamentals, 1969. Vol. 8, N 4. P. 646.
40. Tchen C.M. Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid// Phys. Fluids, 1950. Vol. 2, N 6. P. 1021.

41. Zenz F.A. Fluid catalyst design data// Petr. Refiner., 1957. Vol. 36. P. 4.
42. Розенберг Г.В. Витают в воздухе// Природа. 1983. № 4. С. 68.
43. Грин Х., Лейн У. Аэрозоли: пыли, дымы, туманы: Пер. с англ/ Под ред. А.П. Сытина, М.: Химия, 1968.
44. Стыро Б.И., Буткус Д.В. Геофизические проблемы, связанные с криптоном-85 в атмосфере, и новые задачи исследования// Обеспечение радиационной безопасности при эксплуатации АЭС. Кн. 4. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 64–70.
45. Miles J.W. On the stability of heterogeneus shear flows// J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10, N 4. P. 496.
46. Priestley C.H. Turbulent transfer in the Lower Atmosphere Chicago: The University of Chicago Press, 1959.
47. Swinbank W.C. The measurement of vertical transfer of heat and water vapour and momentum in the lower atmosphere with some results// J. Meteor., 1951. Vol. 8, N 2. P. 240.
48. Taylor G.I. Scientific papers. Vol. 2. Cambridge: Univ. Press, 1960.
49. Ляпин Е.С. О гиперболическом уравнении вертикального турбулентного обмена в атмосфере// Труды Главн. геофиз. обсерв., 1950. № 19. С. 83.
50. Манин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Часть 1: Механика турбулентности. М.: Наука, 1965.
51. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
52. Owen P. R., Thomson W.R. Heat transfer—across rough surfaces// J. Fluid Mech., 1963. Vol. 15. P. 321.
53. Чемберлен А.С., Чедвиг Р.С. Перенос иода из атмосферы на землю// Исследования по ядерной метеорологии и химии атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1962.
54. Жигалкин А.М. О безразмерном коэффициенте обмена между растительностью и окружающей средой// Проблемы гидрометеорологической информации. М.: Гидрометеоиздат, 1979.
55. Tomar A. Transport of gases to and from grass and grasslike surfaces// Proc. Soc. Assoc. 1966, N 290. P. 16.
56. Справочник по пыле-золаулавлианию/ Под ред. А.А. Русанова. М.: Энергия, 1975.
57. Гордон Г.М., Пейсахов И.Л. Пылеулавливание и очистка газов в цветной металлургии. М.: Металлургия, 1977.
58. Зверев Н.И. Опыт работы жалюзийных пылеуловителей ВТИ// Изв. ВТИ. 1950, № 1. С. 26.
59. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1954.
60. Теверовский Е.Н. О диффузии и коагуляции частиц аэрозоля в турбулентном потоке в атмосфере// Новые идеи в области изучения аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1949.
61. Теверовский Е.Н. О переносе тяжелых частиц, взвешенных в турбулентном потоке// Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1952. № 11. С. 121.
62. Минский Е.М. Статистическое определение пути смешения в турбулентном потоке// Докл. АН СССР. 1940. Т. XXVIII. № 8. С. 441.
63. Ужов В.Н. Борьба с пылью в промышленности. М.: Госхимиздат, 1962.
64. Романков М.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. Л.: Химия, 1981.
65. Уорк Г., Уорнер С. Загрязнение воздуха: Пер. с англ./ Под ред. Е.Н. Теверовского. М.: Мир, 1980.
66. Johns R. Ventury's Scrubber// Ibid. 1949. Vol. 41, N 11. P. 61.
67. Johnston N., Robertee H. Precipitation of aerosole particles from moving gas flows// Ibid. 1949. Vol. 41, N 11. P. 13.
68. Luis A., Edevarads K. Injection of liquids in gas flows moving with high speed// Ibid. 1948. Vol. 40, N 1. P. 32.
69. Gengins G. Blast—furnace gas cleaning// Ibid. 1959. Vol. 40, N 1. P. 64.
70. Reynolds W.C. Calculation of Turbulent Plows in Turbulence. 2 nd// Ed. Springer. Berlin: Heidelberg, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Движение взвешенных частиц в турбулентных течениях	6
1.1. Общие соображения о поведении частиц в турбулентных потоках газов	6
1.2. Математические методы моделирования турбулентности газовых потоков	13
1.3. Перенос и рассеяние высокодисперсных аэрозольных частиц в турбулентных потоках газа	45
1.4. Движение отдельных грубодисперсных аэрозольных частиц в турбулентных потоках газа	50
1.5. Гравитационная теория движения и гидравлическое сопротивление потоков газозвеси	67
Глава 2. Перенос аэрозольных частиц атмосферными течениями	75
2.1. Аэрозольные частицы в атмосфере	75
2.2. Моделирование течения в атмосферном пограничном слое	80
2.3. Турбулентная диффузия высокодисперсных аэрозольных частиц в атмосферном пограничном слое	97
2.4. Турбулентная диффузия радиоактивных веществ в атмосферном пограничном слое	105
2.5. Турбулентная диффузия нагретой примеси в атмосферном пограничном слое	110
2.6. Осаждение аэрозольных частиц на подстилающую поверхность	123
Глава 3. Очистка газов от взвешенных частиц и транспортирующая способность газового потока	128
3.1. Влияние турбулентности газового потока в пылеочистных аппаратах на очистку газов	128
3.2. Транспортирующая способность газового потока	136
3.3. Расчет эффективности пылеулавливающих аппаратов	143
3.4. Определение размера частиц пыли	147
3.5. Осаждение частиц аэрозоля при обтекании препятствий	148
3.6. Скруббер Вентури – турбулентный промыватель газа	151
Заключение	157
Список литературы	158

2 р. 10 к.