Р. Л. Стратонович

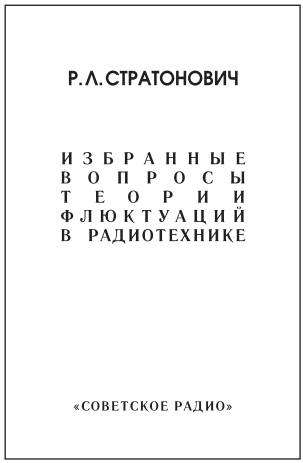
# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Под редакцией
Ю. Л. Климонтовича, Ю. М. Романовского

Москва ♦ Ижевск

2009

УДК 530.1
ББК 22.31
С 833




**Стратонович Р. Л.**
Случайные процессы в динамических системах / Под ред. Ю. Л. Климонтовича, Ю. М. Романовского. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 592 с.

Монография посвящена теории флюктуационных процессов в динамических системах. В начале излагается необходимый математический аппарат. Применительно к динамическим системам используется специально разработанный автором аппарат процессов Маркова. Обсуждается условие его применимости и эффективности. В книге рассмотрена теория нелинейных преобразований флюктуационных и регулярных сигналов, воздействие шума на электронные реле и теория работы автоколебательных систем при наличии случайных воздействий.

Книга предназначена для научных работников, инженеров и аспирантов, работающих в областях электроники, кибернетики и связи. Она может быть полезной для физиков и математиков, интересующихся теорией случайных процессов.

Репринтное издание (ориг. издание: М.: Сов. Радио, 1961).

**ISBN 978-5-93972-699-3**

© Институт компьютерных исследований, 2009
© Ю. М. Романовский, ред.-сост., 2009

**http://shop.rcd.ru**
**http://ics.org.ru**

## ПРЕДИСЛОВИЕ К НОВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая вниманию читателя книга бывшего профессора физического факультета Московского государственного университета Руслана Леонтьевича Стратоновича (1930–1997 гг.) имеет интересную историю. Первоначальный вариант этой книги под названием «Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике» был опубликован в Москве издательством «Советское радио» очень давно — в 1961 году. Книга сразу вызвала интерес у широкого круга специалистов (не только в радиотехнике, но и в других областях знания) в СССР и за рубежом. Британское издательство Gordon and Breach сразу приступило к переводу этой книги на английский язык. В процессе перевода в книгу вносились некоторые изменения и дополнения, которые были выполнены автором по просьбе издателей и переводчиков. Подготовка английского издания сопровождалась постепенным осознанием того факта, что материал книги выходит далеко за рамки радиотехнических приложений и содержит методы анализа произвольных динамических систем при случайных возмущениях. Поэтому название книги было изменено (по сравнению с первоначальным вариантом 1961 г.) и приведено в соответствие с новым пониманием содержания книги. Результатом этой деятельности стало появление нового расширенного английского варианта этой книги, который был опубликован в виде двух томов под названием Topics in the Theory of Random Noise, Vol. I, Gordon and Breach, N.Y. — London, 1963, 293 p.; Vol. II, Gordon and Breach, N.Y. — London, 1967, 329 p.

Однако «англоязычный период» истории книги на этом не закончился. Успех двухтомного английского издания 1963–1967 гг. был настолько велик (здесь уместно отметить высокое качество перевода, выполненного Ричардом Сильверманом, работавшим в тесном контакте с Р. Л. Стратоновичем), что очень скоро книга стала библиографической редкостью, и в 1981 году издательство

Gordon and Breach осуществило второе издание книги (сразу двух томов).

Все изменения и дополнения, подготовленные автором для английского издания, включены в эту книгу[1]. А поскольку после 1961 года на русском языке книга ни разу не переиздавалась, то можно утверждать, что монография, которую Вы держите в своих руках, публикуется в России впервые. Уже одно это обстоятельство делает издание данной книги весьма актуальным.

Однако справедливости ради следует сказать, что на начальном этапе подготовки книги к печати наряду с аргументами в пользу публикации неоднократно высказывались и серьёзные контраргументы, порождавшие сомнения в успешности данного проекта. Суть этих контраргументов сводилась к тому, что книга написана очень давно, материал книги устарел и не может представлять большого интереса для современного читателя. Для исправления ситуации некоторые специалисты предлагали «оживить» книгу, включив в неё некоторые новые результаты, полученные бывшими коллегами и учениками Р. Л. Стратоновича и тематически связанные с материалом основной части книги. Однако эта разумная идея была отвергнута большинством специалистов, вовлечённых в данный проект. Отвергнута по двум основным соображениям: во-первых, включение в книгу нового материала привело бы к непозволительно большому объёму книги, и во-вторых (и это главное), появление нового материала наверняка нарушило бы тот лёгкий и изящный авторский стиль изложения, который был характерен для первоначального варианта и который в своё время так восхищал большинство рецензентов книги (особенно английского её варианта).

Что же касается содержания, то за исключением нескольких иллюстрирующих примеров основной материал книги составляют фундаментальные базовые вопросы анализа стохастических динамических систем, основанные на широком использовании теории случайных процессов. Большое внимание уделяется различным моделям марковских процессов. В книге рассмотрены гауссовы и негауссовы случайные процессы, марковские процессы диффузионного типа, а также разрывные процессы, исследуемые на базе разработанной автором теории коррелированных случайных точек. Тщательно изучаются чрезвычайно важные для практики вопросы аппроксимации реальных сглаженных процес-

[1] Работа по переводу и редактированию этих дополнений была выполнена В. В. Стратонович — супругой Р. Л. Стратоновича.

сов процессами Маркова, подробно исследуется связь между стохастическими уравнениями и уравнениями Фоккера–Планка и Колмогорова для вероятностей перехода. В книге детально описаны методы анализа случайных процессов на выходе пассивных безынерционных и инерционных нелинейных преобразователей, включая проблемы выбросов случайных функций (пороговых сигналов). Очень подробно в книге изучаются автоколебательные процессы в нелинейных системах при случайных возмущениях.

Таким образом, материал книги охватывает если не все, то подавляющее большинство вопросов, возникающих при анализе стохастических систем, а уже отмечавшаяся лёгкая и свободная авторская манера делает изложение этих вопросов свежим и оригинальным, несмотря на прошедшие 50 лет, отделяющие нас от времени написания этой книги. Можно не сомневаться, что почти любой специалист по стохастическому анализу динамических систем, не читавший книгу Р. Л. Стратоновича ранее, наверняка обнаружит в ней какие-то оригинальные и новые идеи. Это особенно относится к молодым специалистам, а также к студентам, которые (кстати!) могут использовать первую часть книги в качестве прекрасного учебника по основам теории вероятностей и теории случайных процессов.

Если попытаться оценить книгу в целом и определить её роль в исторической ретроспективе, то безусловно её можно назвать одной из вершин творческого наследия автора. Таких вершин на творческом пути Р. Л. Стратоновича было несколько, и каждая из них, как правило, имела своё воплощение в виде соответствующей монографии. Ниже приводится полный список монографий Р. Л. Стратоновича, опубликованных как в нашей стране, так и за рубежом:

1) П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович. Распространение электромагнитных волн в многопроводных системах. Сб. трудов 1947–1955 гг. — М.: ВЦ АН СССР, 1958. — 84 с.

2) Р. Л. Стратонович. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. Радио, 1961. — 558 с.

3) Р. Л. Стратонович. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: Изд-во МГУ, 1966. — 319 с.

4) И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович. Математические основы современной радиоэлектроники. — М.: Сов. Радио, 1968. — 204 с.

5) Р. Л. Стратонович. Принципы адаптивного приема. — М.: Сов. Радио, 1973. — 140 с.

6) Р. Л. Стратонович. Теория информации. — М.: Сов. Радио, 1975. — 424 с.

7) Р. Л. Стратонович. Нелинейная неравновесная термодинамика. — М.: Наука, 1985. — 478 с.

8) Р. Л. Стратонович, М. С. Полякова. Элементы молекуулярной физики, термодинамики и статистической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — 176 с.

9) P. I. Kuznetsov, R. L. Stratonovich. The Propagation of Electromagnetic Waves in Multiconductor Transmission Lines, Pergamon Press, 1964, 190 p. (Перевод сборника статей П. И. Кузнецова и Р. Л. Стратоновича [1] с предисловием Луи де Бройля).

10) Nonlinear Transformation of Stochastic Processes. Pergamon Press, 1965, 500 pp. (Сб. переводов статей П. И. Кузнецова, Р. Л. Стратоновича, В. И. Тихонова.)

11) R. L. Stratonovich. Topics in the Theory of Random Noise, Vol. I, Gordon and Breach, N. Y. — London, 1963, 292 p.; Vol. II, Gordon and Breach, N. Y. — London, 1967, 329 p. Второе издание 1981 г. (Переработанное и дополненное английское издание монографии [2].)

12) R. L. Stratonovich. Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control. Elsevier, N. Y., 1968, 350 pp. (Расширенное и переработанное английское Издание.)

13) R. L. Stratonovich. Nonlinear Nonequilibrium Thermodynamics I. Linear and Nonlinear Fluctuation–Dissipation Theorems. In Springer Series in Synergetics, Vol. 57, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1992, 361 pp.

14) R. L. Stratonovich. Nonlinear Nonequilibrium Thermodynamics II. Advanced Theory. In Springer Series in Synergetics, Vol. 59, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., 1994, 223 pp.

Даже без подробного анализа содержания этих работ (недавно вышла книга «Профессор Р. Л. Стратонович (1930–1997).

Воспоминания родных, коллег и друзей» под ред. Ю. М. Романовского. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007, 174 с. (ISBN 978-5-93972-606-1), содержащая достаточно подробный анализ творческого наследия Р. Л. Стратоновича) очевидно, что перечисленные монографии принадлежат к таким областям знания, как физика, математика, кибернетика, некоторые технические науки, что свидетельствует о чрезвычайной широте научных интересов их автора.

Не меньшее впечатление производит «эффект влияния» Р. Л. Стратоновича на развитие отечественной и мировой науки. Для иллюстрации этого утверждения ниже приводится перечень монографий (разумеется, далеко не полный), авторы которых признают влияние идей Р. Л. Стратоновича на их работы:

1) В. И. Тихонов. Статистическая радиотехника. — М.: Радио и Связь, 1982. — 624 с.

2) В. И. Тихонов, Н. К. Кульман. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. Радио, 1975. — 704 с.

3) В. И. Тихонов, М. А. Миронов. Марковские процессы. — М.: Сов. Радио. — 1977.

4) Ю. Г. Сосулин. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. Радио, 1978. — 317 с.

5) Г. Е. Колосов. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1984. — 256 с.

6) С. А. Ахманов, А. С. Чиркин. Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 128 с.

7) С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.

8) В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 544 с.

9) М. Ю. Романовский, Ю. М. Романовский. Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.

10) Д. С. Чернавский. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. — М: УРСС, 2004. — 288 с.

11) А. Н. Малахов. Флюктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.

12) А. Н. Малахов. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.

13) Ю. Л. Климонтович. Введение в физику открытых систем. — М.: Янус-К, 2002.

14) Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.

15) А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.

16) В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. Автоволновые процессы. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

17) Молекулярная динамика ферментов. Ред. Ю. М. Романовский, В. Эбелинг. — М.: Московский университет, 2000.

18) Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. Математическое моделирование в биофизике. Введение в теоретическую биофизику. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 464 с.

19) Л. С. Полак, А. С. Михайлов. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1983.

20) С. М. Рытов. Ведение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, Часть I. Случайные процессы, 1976. — 496 с.

21) В. Эбелинг, Р. Файстель. Хаос и космос. Синергетика эволюции. — М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 334 с. (Пер. с англ. W. Ebeling, R. Feistel. Chaos und Kosmos. Prinzipien der Evolution. Spektrum Akademischer Verlag CmbH: Heidelberg, 2002.)

22) V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. — Springer, Berlin, 2007. — 450 p.

23) W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, Y. M. Romanovskii. Stochastic Dynamics of Reacting Biomolecules. — World Scientific, Singapore, 2002.

24) W. Ebeling, I. M. Sokolov. Statistical Thermodynamics and Statistic Theory of Nonequilibrium Systems. — World Scientific Publishing, Singapore, 2005.

25) C. W. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods. Springer Series in Synergetics, Vol. 13, Springer, Berlin, Heidelberg, 1982. (Пер. с англ.: К. В. Гардинер. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986, 528 с.)

26) G. E. Kolosov. Optimal Design of Control Systems. New York-Basel, Marcel Dekker, Inc., 1999, 403 p.

27) F. Moss, P. V. E. McClintock (eds.). Noise in Nonlinear Dynamical Systems, Vol. 1–3, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

28) V. A. Vasiliev, Y. M. Romanovsky, D. S. Chernavsky, V. G. Yakhno. Autowave Processes in Kinetic Systems. Spatial and Temporal Self-Organization in Physics, Chemistry, Biology and Medicine. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, 1987, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1987.

29) N. Van Kampen. Stochastic Processes in Physics and Chemistry, 2nd ed. North Holland, Amsterdam, 1992.

Об актуальности творческого наследия Р. Л. Стратоновича для современной науки свидетельствуют также многочисленные ссылки в Интернете на его работы, где широко используются такие устоявшиеся именные научные и технические термины, как «Интеграл Стратоновича», «Уравнение Стратоновича», «Ценность информации по Стратоновичу», «Фильтрация по Стратоновичу» и т. д.

Нет сомнения, что издание книги «Теория случайных процессов в динамических системах» принесёт большую пользу всем, интересующимся теорией случайных процессов, а также приложениями этой теории к решению конкретных задач, возникающих в физике, радиотехнике, биологии, экономике и других областях науки и техники.

В заключение сделаем один важный комментарий, относящийся к используемому в книге способу решения стохастических дифференциальных уравнений, которые широко используются для моделирования случайных процессов. Известно, например, что любой диффузионный марковский процесс можно рассматривать как результат воздействия достаточно сингулярных случайных функций типа броуновского движения (винеровского процесса) или белого шума на некоторую динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественно, что решения этих уравнений (являющиеся реализациями моделируемого диффузионного процесса) содержат выражения, зависящие от указанных сингулярных процессов, т. е. от винеровского процесса или белого шума. Эти реализации в свою очередь могут подвергаться различным в общем случае нелинейным инерционным преобразованиям при воздействии марковского процесса на тот или иной динамический объект.

В данной книге все вычисления, связанные с интегрированием, дифференцированием, заменами переменных и нелинейными преобразованиями реализаций марковских процессов, осуществляются по правилам классического математического анализа, разработанным для достаточно гладких или аналитических функций. Такой способ обращения с реализациями марковских процессов в 1961 году противоречил работам математического характера, где решения стохастических дифференциальных уравнений строились с использованием стохастических интегралов Ито, а для таких решений многие формулы классического анализа оказывались несправедливыми. Таким образом, оказалось, что решения стохастических дифференциальных уравнений по Стратоновичу отличались от решения тех же стохастических уравнений в смысле Ито. А поскольку решения Ито были известны гораздо раньше решений Стратоновича (стохастический интеграл, который используется для построения решения Ито, был предложен в 1944 году), то многими специалистами высказывались сомнения в справедливости вычислений Р. Л. Стратоновича в книге 1961 г.

Возникшая противоречивая ситуация требовала немедленного разъяснения. Поэтому сразу после публикации книги в 1961 г. Р. Л. Стратоновичем и другими специалистами был проведён ряд дополнительных исследований, касающихся связи между решениями стохастических уравнений в смысле Ито и Стратоновича.

Прежде всего Р. Л. Стратоновичем было проведено детальное исследование свойств стохастических интегралов. Оказалось, что при интегрировании выражений, содержащих винеровский

процесс или белый шум, величина стохастического интеграла существенно зависит от способа построения интегральной суммы, пределом которой данный интеграл является. А именно, для одного и того же стохастического интеграла можно предложить бесконечно много способов построения интегральных сумм (множество этих интегральных сумм имеет мощность континуума), имеющих различные пределы при неограниченном сближении точек — разбиения отрезка интегрирования. При этом интеграл Ито является одним из этого бесконечного множества возможных значений стохастических интегралов. Далее, используя тот или иной интеграл из указанного континуума, можно построить бесконечное множество различных решений одного и того же стохастического уравнения, отвечающих различным способам определения стохастического интеграла. И наконец, среди всевозможных способов определения стохастических интегралов существует один, обладающий свойствами симметрии относительно направления отсчёта времени, который Р. Л. Стратонович назвал «симметризованным» и используя который можно построить решение стохастического уравнения (которое он также назвал «симметризованным»), для которого уже оказываются справедливыми все правила исчисления классического математического анализа.

Таким образом, Р. Л. Стратонович показал, что оба решения: и в смысле Ито и в «симметризованном» смысле имеют одинаковое право на существование и отличаются лишь способом определения стохастического интеграла. Все эти результаты впервые были опубликованы Р. Л. Стратоновичем в его статье «Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений», Вестник МГУ, сер. «Матем. и мех.», 1964, №1, а затем изложены в его монографии по условным марковским процессам 1966 г. После этих публикаций в мировой научной литературе «симметризованный интеграл» стали называть интегралом Стратоновича, а решения стохастических уравнений, построенные с помощью этого интеграла, соответственно, решениями Стратоновича.

И, наконец, самое последнее замечание. Если сравнить решение Стратоновича с решением Ито или со всеми другими возможными решениями стохастического уравнения, то решение Стратоновича имеет, если можно так выразиться, наибольший «физический» смысл. А именно, моделирование стохастических дифференциальных уравнений с помощью элементов аналоговой техники со случайными возмущениями в виде «реального» белого шума приводит к реализациям, совпадающим с решением

Стратоновича. Результаты экспериментов, подтверждающие этот факт, приведены в статье Дашевского М. Л. и Липцера Р. Ш. «Моделирование стохастических дифференциальных уравнений, связанных с задачей о «разладке» на аналоговой машине», Автоматика и телемеханика, 1966, т. 27, № 4.

Проф. Г. Е. Колосов,
Проф. Ю. М. Романовский

# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Флюктуационные процессы вызывают большой и все возрастающий интерес со стороны научных работников и инженеров, работающих в различных областях радиотехники. Это вполне понятно, поскольку флюктуационные помехи на современном уровне развития радиотехники являются существенным препятствием на пути дальнейшего усовершенствования радиотехнических устройств. Проблема исследования и создания помехоустойчивой аппаратуры является актуальной во многих областях радиофизики.

Значительное количество вышедших в свет книг как отечественных, так и зарубежных авторов, посвященных указанной проблеме, является убедительным доказательством ее важности и актуальности. В настоящей монографии рассматривается ряд вопросов, остававшихся до сих пор в стороне, но имеющих большое практическое значение, например вопросы, связанные с воздействием флюктуаций на ламповые генераторы и электронные реле. Интерес к работе автоколебательных систем и триггерных устройств в последнее время особенно возрос в связи с развитием методов когерентной радиолокации, а также в связи с задачей повышения точности измерения времени и с задачами, которые выдвигаются перед конструкторами ускорителей заряженных частиц и математических вычислительных машин. Журнальная литература по указанным выше новым областям статистической радиофизики трудно обозрима.

В настоящей монографии указанные вопросы рассматриваются систематически с более или менее общей точки зрения. При этом систематизируется имеющийся в литературе материал, а также приводятся результаты оригинальных исследований автора. Некоторым может показаться недостаточной физическая трактовка получаемых результатов. Однако краткость в сочетании с полнотой

результатов автору представляется оправданной; более того, по мнению автора, сейчас назрела потребность в сводной литературе полусправочного характера вследствие роста общего числа работ.

В математическом отношении рассматриваемый круг вопросов связан с проблемой нелинейных, главным образом инерционных, преобразований случайных функций. В книге систематически используются математические методы, разработанные применительно к радиотехническим задачам. Как видно из содержания книги, эффективными оказываются следующие методы:

1) сведение реального флюктуационного процесса к процессу без последействия и применение аппарата процессов Маркова, в частности уравнения Фоккера — Планка;

2) линеаризация исходных уравнений, позволяющая применить в линейном приближении корреляционную теорию, и, наконец;

3) квазистатическое рассмотрение, позволяющее свести инерционное нелинейное преобразование к безынерционному.

В имеющейся литературе обычно излагается или только корреляционная теория, или только теория процессов Маркова. Между тем, для решения конкретных задач нужно уметь переходить от одних методов к другим, выбирая наиболее удобные методы решения данной задачи. Поэтому в книге уделяется особое внимание тому, когда и в каком смысле можно применять теорию процессов Маркова к реальным флюктуациям, описываемым сначала в терминах корреляционной теории.

Первая глава книги посвящена обзору математических сведений, которые в значительной своей части используются в дальнейшем. В ряде мест автор счел возможным для краткости отступить от обычного способа изложения основных понятий и положений теории вероятностей. Для первоначального ознакомления с ними читатель может обратиться к другим имеющимся руководствам по теории вероятностей. Подготовленный читатель в первой главе найдет новую трактовку ряда вопросов и новые результаты. Поэтому, по мнению автора, эта глава будет не лишена интереса и для математиков, конечно, если сделать скидку на строгость изложения.

В последующих главах указанные выше методы систематически применяются для решения конкретных за-

дач статистической радиофизики. При этом автор старался подробнее осветить условия применимости различных методов анализа флюктуационных явлений. Некоторые методы изложены, может быть, с большей обстоятельностью, чем это потребовалось бы для непосредственных инженерных приложений. Это является оправданным с точки зрения дальнейшего развития и совершенствования инженерных методов расчета. Дело в том, что постоянно возникающие на практике все более сложные задачи требуют привлечения все более и более тонких методов анализа. Автор будет считать свою задачу выполненной, если настоящая книга в какой-то степени послужит дальнейшему расширению теоретического кругозора радиоспециалистов и поможет им освоить ряд новых для них теоретических методов. Лица, интересующиеся непосредственными приложениями и результатами, могут опустить материал, набранный петитом.

Хотя книга предназначена в основном для специалистов в области статистической радиотехники, можно полагать, что она представит интерес и для лиц, работающих в других областях физики, где могут быть применены аналогичные статистические методы.

В тексте книги, как правило, не приводятся ссылки на работы, в которых впервые получены те или иные результаты, потому что при систематических ссылках были бы вероятны ошибки, если не проводить специального изучения этого вопроса. Литература в конце книги также ни в коей мере не претендует на полноту.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность д-ру техн. наук В. И. Тихонову, который явился инициатором создания этой книги и оказал автору существенную помощь, а также проф. С. П. Стрелкову, проф. С. Д. Гвоздоверу, Б. Р. Левину, С. А. Ахманову и особенно научному редактору доц. Ю. Л. Климонтовичу за ряд ценных замечаний при подготовке рукописи к печати. Автор также благодарен И. Г. Акопяну, который разрешил использовать в § 18 построенные им графики, Ю. М. Романовскому, П. С. Ланде и другим за помощь в оформлении рукописи.

ГЛАВА 1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФЛЮКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

## § 1. СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 1. Способы описания случайной величины

Случайная величина $\xi$ характеризуется тем, что известно не точное ее значение, а лишь способы ее получения при физически определенных, фиксированных и устойчивых условиях опыта. В зависимости от неизвестных причин в конкретном опыте она приобретает некоторое частное значение $\xi_1$, которое назовем «реализацией» случайной величины $\xi$. В качестве примера можно указать конкретное число, выпавшее при бросании игральной кости, или показание стрелки прибора в выбранный момент времени.

Повторяя опыт (а возможность его повторения входит в определение случайной величины), мы всегда можем получить большое число реализаций. Поэтому случайную величину можно охарактеризовать также принадлежностью к некоторому «статистическому ансамблю» реализаций. Полученные реализации всегда можно подвергнуть статистической обработке и найти статистические характеристики случайной величины. Поэтому под словами «задана случайная величина» мы будем понимать, что известны статистические данные, полностью ее характеризующие.

Простейшей статистической характеристикой случайной величины является ее среднее значение. Если $\xi_1$, $\xi_2, \ldots$ — реализации случайной величины $\xi$, то среднее значение можно определить как предел среднего арифметического

$$\langle \xi \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \qquad (1.1)$$

при беспредельном увеличении числа реализаций, по которым производится усреднение.

С помощью теории вероятностей могут быть рассмотрены только такие опытные данные, для которых подобные пределы существуют и не зависят от способа выбора реализаций $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из полного статистического ансамбля. (Подразумевается, что при этом выборе не используется информация о конкретных значениях реализаций.) *

Другие статистические характеристики случайной величины могут быть определены путем предварительного перехода к новой случайной величине $\eta = f(\xi)$ и применения формулы (1) для $\eta$. При этом берется конкретный вид функции $f(\xi)$. Так, полагая $f(\xi) = (\xi)^2$, определяем средний квадрат формулой

$$\langle \xi^2 \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}. \qquad (1.2)$$

В качестве другого примера возьмем вероятность $P\{\xi < x\}$ выполнения неравенства $\xi < x$ ($x$ — фиксированная величина). Для этого введем случайную величину

$$\varepsilon = \vartheta(x - \xi) \left( \vartheta(z) = \begin{cases} 1 \text{ при } z > 0 \\ 0 \text{ при } z \leqslant 0 \end{cases} \right) \qquad (1.3)$$

и определим указанную вероятность как среднее от нее

$$P\{\xi < x\} = \langle \vartheta(x - \xi) \rangle, \qquad (1.4)$$

т. е.

$$P\{\xi < x\} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}{n}.$$

В самом деле, учитывая определение функции $\vartheta(z)$, мы видим, что среднее арифметическое значение ($\varepsilon_1 +$

---

* Для читателя, знакомого с предметом, сделаем следующее замечание. Концепция, основанная на понятии предела, проста, наглядна и достаточна для приложений. Ее формально-математические недочеты не являются существенными, когда речь идет о применении теории вероятностей. Дело в том, что для приложений можно поставить знак равенства между утверждением: событие имеет вероятность, равную единице (или сколь угодно близкую к единице), и утверждением, что событие осуществляется. Поэтому вместо известного положения, что сходимость (1) имеет место с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, мы формулируем равенство (1) как осуществляющееся фактически и берем его в качестве основного. С другими способами изложения читатель может познакомиться в других руководствах.

$+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)/n$ равно отношению числа $m$ тех случаев из $n$, когда выполняется неравенство $\xi_i<x$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ к полному числу взятых случаев. Поэтому выражение (4) можно записать в виде

$$P\{\xi<x\}=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}. \tag{1.5}$$

Среднее значение $\langle\vartheta(x-\xi)\rangle$, рассматриваемое как функция от $x$

$$\langle\vartheta(x-\xi)\rangle=F_\xi(x), \tag{1.6}$$

носит название функции распределения. Ее производную

$$w_\xi(x)=\frac{d}{dx}F_\xi(x),\ \left(F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}w_\xi(x')\,dx'\right) \tag{1.7}$$

будем называть плотностью распределения вероятностей, или, короче, распределением случайной величины $\xi$. Подставляя выражение (6) в (7) и производя дифференцирование под знаком усреднения, получаем формально

$$w_\xi(x)=\langle\delta(\xi-x)\rangle, \tag{1.8}$$

где

$$\delta(z)=\frac{d}{dz}\vartheta(z)$$

— дельта-функция Дирака, обладающая свойством

$\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,\delta(z-z_0)\,dz=f(z_0)$ при любой функции $f(z)$.

С плотностью распределения мы будем часто встречаться в дальнейшем. Для краткости иногда целесообразно значение $x$ обозначать той же буквой, что и саму случайную величину $(x=\xi)$, а в записи $w_\xi(\xi)$ опускать индекс. При этом распределение случайной величины $\xi$ будет обозначаться как $w(\xi)$.

Распределение вероятности удовлетворяет условию нормировки

$$\int w(\xi)\,d\xi=1, \tag{1.9}$$

которое в силу (8) эквивалентно тривиальному равенству

$$\langle 1 \rangle = 1.$$

Плотность распределения полностью характеризует случайную величину. Зная ее, можно вычислить среднее значение $\langle f(\xi) \rangle$ при любой функции $f(\xi)$. Пользуясь свойством дельта-функции, запишем $f(\xi)$ в виде

$$f(\xi) = \int f(x)\,\delta(\xi - x)\,dx.$$

Усредняя и внося знак усреднения под знак интеграла, получаем

$$\langle f(\xi) \rangle = \int f(x) \langle \delta(\xi - x) \rangle\,dx$$

или, если учесть (8),

$$\langle f(\xi) \rangle = \int f(x)\,w_\xi(x)\,dx. \qquad (1.10)$$

Рассмотрим, как преобразуется плотность распределения при преобразовании случайной величины. Пусть новая случайная величина определяется равенством

$$\eta = g(\xi), \qquad (1.11)$$

где $g(x)$ — известная функция.

Применяя формулу (8), запишем искомую плотность распределения новой величины в виде

$$w_\eta(y) = \langle \delta(\eta - y) \rangle = \langle \delta(g(\xi) - y) \rangle.$$

Используя выражение (10), находим

$$w_\eta(y) = \int \delta(g(x) - y)\,w_\xi(x)\,dx,$$

или, короче,

$$w(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(\xi) - \eta)\,w(\xi)\,d\xi. \qquad (1.12)$$

Последний интеграл будем вычислять, пользуясь известными свойствами дельта-функции. Если функция

$$\eta = g(\xi) \qquad (1.13)$$

монотонна, то она имеет единственную обратную функцию

$$\xi = h(\eta), \quad (h = g^{-1}). \qquad (1.14)$$

В этом случае из выражения (12) получаем

$$w(\eta) = \frac{w(\xi)}{\left|\frac{dg(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=h(\eta)}} = w(h(\eta))\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|_{\xi=h(\eta)}. \quad (1.15)$$

В общем случае, когда функция $g(\xi)$ немонотонна и имеет несколько обратных функций

$$\xi = h_l(\eta), \quad (l = 1, \ldots, r), \quad (1.16)$$

формула (12) дает

$$w(\eta) = \sum_{l=1}^{r} w(h_l(\eta_l))\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|_{\xi=h_l(\eta)}. \quad (1.17)$$

Наряду с плотностью распределения вероятностей полной характеристикой случайной величины является характеристическая функция

$$\Theta_\xi(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle = \int e^{iu\xi} w(\xi)\, d\xi. \quad (1.18)$$

Плотность распределения выражается через нее обратным преобразованием Фурье

$$w(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-iu\xi}\Theta_\xi(u)\, du. \quad (1.19)$$

Моменты

$$m_n = \langle \xi^n \rangle, \ (n = 1, 2, \ldots) \quad (1.20)$$

случайной величины $\xi$ можно получить из характеристической функции путем дифференцирования:

$$m_n = \frac{1}{i^n}\left.\frac{d^n\Theta_\xi(u)}{du^n}\right|_{u=0}. \quad (1.21)$$

Зная моменты $m_r$, т. е. зная значение производных характеристической функции в нуле, можно записать характеристическую функцию в форме разложения Маклорена

$$\Theta_\xi(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iu)^n}{n!}m_n. \quad (1.22)$$

Разумеется, такая запись возможна не всегда, а лишь когда моменты $m_n$ конечны и не слишком быстро возрастают с увеличением порядка $n$.

Моменты $m_1$, $m_2$, ... в своей совокупности дают полное описание случайной величины. При этом больше всего физической информации несут в себе первые моменты. Моменты высоких порядков характеризуют лишь малосущественные детали в поведении плотности распределения главным образом при больших значениях. По ряду причин случайную величину удобнее характеризовать не последовательностью моментов, а последовательностью кумулянтов (или семиинвариантов) $k_1$, $k_2$, ..., определяемых равенством

$$\Theta_\xi(u) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!}\, k_n\right\}. \qquad (1.23)$$

Сравнивая (23) с (22), можно получить формулы, связывающие моменты и кумулянты,

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1; \\ k_2 &= m_2 - m_1^2; \\ k_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3; \qquad (1.24) \\ k_4 &= m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4; \end{aligned}$$

Из структуры этих формул видно, что, зная первые $n$ моментов, можно вычислить $n$ первых кумулянтов и наоборот. Следовательно, выбранное число первых кумулянтов несет в себе столько же информации, сколько и первые моменты, взятые в таком же числе. Ограничившись определенным числом первых кумулянтов, высшие кумулянты удобно положить равными нулю. Поступать аналогичным образом с моментами (приравнивать их нулю, начиная с некоторого порядка) нежелательно ввиду того, что при этом характеристическая функция приобретает такое поведение на бесконечности, которое затрудняет вычисление интеграла обращения (19) ($w(\xi)$ при этом выражается не наглядной суммой производных от дельта-функции).

Первый кумулянт совпадает с первым моментом $m_1 = k_1 = \langle \xi \rangle$ и представляет собой среднее значение — важнейшую характеристику случайной величины. Следующие два кумулянта совпадают с центральными моментами второго и третьего порядков

$$k_2 = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle, \quad k_3 = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^3 \rangle. \qquad (1.25)$$

Величина $k_2 = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$ носит название дисперсии и обозначается следующим образом:

$$D\xi \equiv \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2. \tag{1.26}$$

Дисперсия тоже очень важная характеристика случайной величины. Чем она меньше, тем точнее мы знаем случайную величину. Вероятность отклонений величины $\xi$ от среднего значения $<\xi>$, которые по модулю превышают любое фиксированное значение $\varepsilon>0$, стремится к нулю, если стремится к нулю $D\xi$. Поэтому при достаточно малой дисперсии можно быть уверенным, что $\xi$ мало отличается от $<\xi>$.

Часто вместо дисперсии оперируют со среднеквадратичным отклонением, которое мы будем обозначать $\sigma(\xi)$. Оно представляет собой корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(\xi) \equiv [\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.27}$$

Не теряя показательных свойств дисперсии, среднеквадратичное отклонение обладает тем преимуществом, что имеет ту же размерность, что и сама случайная величина. Оно показывает порядок величины случайных отклонений от среднего значения

$$\xi - \langle \xi \rangle \sim \sigma(\xi). \tag{1.28}$$

Не останавливаясь пока на значении более высоких кумулянтов, отметим, что отношения

$$\gamma_a = \frac{k_3}{k_2^{\frac{3}{2}}}, \quad \gamma_э = \frac{k_4}{k_2^2} \tag{1.29}$$

называются соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса. По мере увеличения порядка $n$ уменьшается физическая значимость кумулянта $k_n$

## 2. Корреляции между случайными величинами

Пусть имеется несколько ($r$) случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Это значит, что в результате каждого опыта мы получаем одновременно $r$ конкретных случайных значений $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Указанные случайные величины полно-

стью характеризуются $r$-мерной плотностью распределения

$$w_{\xi_1 \ldots \xi_r}(x_1, \ldots, x_r) = \langle \delta(\xi_1 - x_1) \ldots \delta(\xi_r - x_r) \rangle \quad (1.30)$$

(или, короче, $w(\xi_1, \ldots, \xi_r)$), являющейся функцией $r$ переменных. Из такого определения вытекает, что среднее от любой функции $f(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ может быть вычислено путем интегрирования с весом $w(\xi_1, \ldots, \xi_r)$

$$\langle f(\xi_1, \ldots, \xi_r) \rangle = \int f(\xi_1, \ldots, \xi_r) \times \\ \times w(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r. \quad (1.31)$$

Полагая $f = 1$, получаем условие нормировки

$$\int \ldots \int w(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r = 1. \quad (1.32)$$

Разобьем случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_r$ на две группы: $\xi_1, \ldots, \xi_k$ и $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_r$ — и рассмотрим, дает ли нам какую-либо информацию о $\xi_1, \ldots, \xi_k$ знание конкретных реализаций случайных величин $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_r$.

Пусть, например, имеются две случайные величины $\xi_1$, $\xi_2$, описываемые плотностью распределения $w(\xi_1, \xi_2)$. Если мы не знаем конкретной реализации величины $\xi_2$ то случайная величина $\xi_1$ описывается плотностью распределения

$$w(\xi_1) = \int w(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2. \quad (1.33)$$

Узнав реализацию случайной величины $\xi_2$, т. е. получив о ней полную информацию, мы можем получить также некоторую информацию о другой случайной величине $\xi_1$. Конечно, знание $\xi_1$ после этого в общем случае не будет полным, поэтому $\xi_1$ будет не детерминированной, а по-прежнему случайной величиной. Однако теперь $\xi_1$ будет описываться уже другой плотностью распределения

$$w(\xi_1 | \xi_2) = \frac{w(\xi_1 \xi_2)}{\int w(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1}, \quad \left( \int w(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 = w(\xi_2) \right), \quad (1.34)$$

которая содержит больше (по крайней мере, не меньше) информации о $\xi_1$, чем распределение (33).

Выражение (34) называется условной плотностью распределения для $\xi_1$ при заданной величине $\xi_2$. Интег-

рал в знаменателе правой части (34) поставлен для того, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\int w(\xi_1 \mid \xi_2)\, d\xi_1 = 1. \tag{1.35}$$

На сколько именно увеличилась информация о $\xi_1$ в результате того, что мы узнали реализацию $\xi_2$, зависит от выбранного конкретного примера. В некоторых случаях информация о $\xi_1$ вообще не прибавляется, какой бы ни оказалась $\xi_2$. Это значит, что

$$w(\xi_1 \mid \xi_2) = w(\xi_1). \tag{1.36}$$

Учитывая (33), (34), получаем, что в этом случае $w(\xi_1, \xi_2)$ распадается на произведение одномерных распределений $w(\xi_1)$ и $w(\xi_2)$:

$$w(\xi_1, \xi_2) = w(\xi_1)\, w(\xi_2). \tag{1.37}$$

Такие случайные величины называются независимыми. В противоположном крайнем случае знание величины $\xi_2$ полностью определяет другую случайную величину $\xi_1$, являющуюся известной функцией от $\xi_2$ ($\xi_1 = f(\xi_2)$). Подобные величины можно назвать тождественно связанными. Их плотность распределения содержит дельта-функцию

$$w(\xi_1, \xi_2) = \delta(\xi_1 - f(\xi_2))\, w(\xi_2). \tag{1.38}$$

Между описанными крайними случаями, разумеется, имеется большое число промежуточных случаев.

Сказанное выше относительно двух случайных величин непосредственно обобщается на случай многих случайных величин. Знание реализации некоторых случайных величин (например, $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_r$) из $\xi_1, \ldots, \xi_r$ увеличивает (по крайней мере не уменьшает) информацию об остальных случайных величинах $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Через исходную плотность распределения $w(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ может быть выражена условная плотность распределения

$$w(\xi_1, \ldots, \xi_k \mid \xi_{k+1}, \ldots, \xi_r) = \frac{w(\xi_1, \ldots, \xi_r)}{w(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_r)}. \tag{1.39}$$

Если увеличение информации не происходит, то случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_k$ статистически не связаны с $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_r$ (независимы от них). Если же условное

распределение (39) не совпадает с безусловным распределением, которое равно

$$w(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \int \ldots \int w(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_{k+1} \ldots d\xi_r, \quad (1.40)$$

то между указанными группами случайных величин имеется статистическая связь.

Удобно ввести в рассмотрение числовые характеристики, описывающие степень статистической связанности и обращающиеся в нуль при ее отсутствии. В качестве таких характеристик рассмотрим корреляции различных порядков.

Парную корреляцию случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$ обозначим $K[\xi_1, \xi_2]$ и определим равенством

$$K[\xi_1, \xi_2] = \langle \xi_1 \xi_2 \rangle - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle. \quad (1.41)$$

Для независимых случайных величин вследствие (37) имеем

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle$$

и, следовательно, парная корреляция обращается в нуль. В других случаях она отлична от нуля.

Согласно определению, парная корреляция случайной величины с нею самой есть не что иное, как дисперсия

$$K[\xi, \xi] = D\xi. \quad (1.42)$$

Иногда вместо $K[\xi_1, \xi_2]$, целесообразно рассматривать пропорциональную ей безразмерную величину

$$R_2 \equiv R = \frac{K[\xi_1 \xi_2]}{\sigma(\xi_1)\,\sigma(\xi_2)}. \quad (1.43)$$

которая удобна тем, что при совпадении случайных величин обращается в единицу. Эту величину будем, в отличие от (41), называть коэффициентом корреляции.

Наряду с парной корреляцией, существуют корреляции высших порядков. Рассмотрим три случайные величины $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ и введем тройную корреляцию, которая должна описывать тройную статистическую связь указанных величин и исчезать, если хотя бы одна из них независима от остальных.

Вычитая произведение средних значений, образуем величину

$$\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \rangle - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle \langle \xi_3 \rangle, \quad (1.44)$$

которая обладает тем свойством, что обращается в нуль, когда все три случайные величины независимы друг от друга.

Эта величина, однако, может быть отлична от нуля не только в силу тройных связей, но и вследствие двойных корреляций. Предположим, что одна из величин, например $\xi_3$, не зависит от остальных. В этом случае тройная связь отсутствует, но величина (44) может оказаться отличной от нуля вследствие наличия парной корреляции между $\xi_1$ и $\xi_2$. В самом деле, при этом $\langle \xi_1\xi_2\xi_3 \rangle = \langle \xi_1\xi_2 \rangle \langle \xi_3 \rangle$ и величина (44) равна

$$\langle \xi_3 \rangle K[\xi_1, \xi_2]. \tag{1.45}$$

Совершенно ясно, что для получения коэффициента тройной корреляции следует вычесть из (44) члены вида (45), существующие благодаря парным корреляциям. Из $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ можно составить пары тремя способами: $\xi_1$, $\xi_2$, или $\xi_2$, $\xi_3$, или $\xi_1$, $\xi_3$. Вычитая парные корреляции всех типов, определяем тройную корреляцию формулой

$$\begin{aligned} K[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \langle \xi_1\xi_2\xi_3 \rangle - \langle \xi_1 \rangle K[\xi_2, \xi_3] - \\ - \langle \xi_2 \rangle K[\xi_1, \xi_3] - \langle \xi_3 \rangle K[\xi_1, \xi_2] - \\ - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle \langle \xi_3 \rangle . \end{aligned} \tag{1.46}$$

Пользуясь равенством (41), это выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned} K[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \langle \xi_1\xi_2\xi_3 \rangle - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2\xi_3 \rangle - \langle \xi_2 \rangle \langle \xi_1\xi_3 \rangle - \\ - \langle \xi_3 \rangle \langle \xi_1\xi_2 \rangle + 2\langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle \langle \xi_3 \rangle . \end{aligned} \tag{1.47}$$

В случае совпадения всех трех случайных величин корреляция третьего порядка совпадает с третьим кумулянтом

$$K[\xi, \xi, \xi] = k_3. \tag{1.48}$$

По аналогии с (43) можно ввести коэффициент тройной корреляции:

$$\begin{aligned} R_3 = K[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \times \\ \times \{K[\xi_1, \xi_1, \xi_1] K[\xi_2, \xi_2, \xi_2] K[\xi_3, \xi_3, \xi_3]\}^{-\frac{1}{3}} . \end{aligned} \tag{1.49}$$

Чтобы определить корреляцию четвертого порядка для четырех случайных величин, следует из разности

$$\langle \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 \rangle - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle \langle \xi_3 \rangle \langle \xi_4 \rangle \tag{1.50}$$

вычесть всевозможные парные и тройные корреляции. Число вычитаемых членов определяется числом возможных сочетаний элементов $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ по группам, состоящим из одного, двух или трех элементов. С увеличением порядка формулы для корреляций становятся все более сложными.

Наиболее кратко выражения для средних значений произведения нескольких случайных величин могут быть записаны при помощи характеристической функции

$$\Theta(u_1, \ldots, u_r) = \langle \exp i(u_1\xi_1 + \ldots + u_r\xi_r) \rangle . \quad (1.51)$$

Средние значения $\langle \xi_1 \ldots \xi_r \rangle$ определяются по формулам

$$\langle \xi_1 \ldots \xi_r \rangle = \frac{1}{i^r} \frac{d^r\Theta(u_1, \ldots, u_r)}{du_1 \ldots du_r}\Big|_{u_1 = \ldots = u_r = 0} . \quad (1.52)$$

Соответствующая формула для коэффициента корреляции $r$-го порядка отличается от (52) лишь заменой характеристической функции на ее логарифм:

$$K[\xi_1, \ldots, \xi_r] = \frac{1}{i^r} \frac{d^r \ln \Theta(u_1, \ldots, u_r)}{du_1 \ldots du_r}\Big|_{u_1 = \ldots = u_r = 0} . \quad (1.53)$$

### 3. Случайная функция и способы ее описания

Перейдем к рассмотрению случайной функции $\xi(t)$ от одного действительного аргумента $t$ (времени), изменяющегося, например, на интервале $0 < t < T$. Если случайная функция является заданной, то это значит, что известны устойчивые условия опыта, позволяющие получить конкретную реализацию функции $\xi(t)$ на указанном интервале. Такую реализацию можно представить себе как некоторую единичную фотографию (или осциллограмму) случайного процесса, вид которой зависит от случая.

Если зафиксировать произвольное число $r$ каких-либо моментов времени $t_1$, ..., $t_r$ из интервала определения случайной функции, то ее значения $\xi_1(t_1)$, ..., $\xi(t_r)$ будут образовывать совокупность случайных величин. Когда случайная функция является полностью определенной, указанные случайные величины также оказываются совершенно определенными, каковы бы ни были $r$, $t_1$, ..., $t_r$. Следовательно, можно считать известной описывающую их плотность распределения $w(\xi(t_1), \ldots,$

$\xi(t_r)$), которая является функцией от $r$, $t_1, \ldots, t_r$ и обозначается

$$\langle \delta(x_1 - \xi(t_1)) \ldots \delta(x_r - \xi(t_r)) \rangle = \\ = w_r(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots t_r). \quad (1.54)$$

Каждая плотность распределения (54), рассматриваемая как функция от $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к плотности распределения вероятности (условие нормировки, положительности). В то же время, как функция от $t_1, \ldots, t_r$, плотность вероятности (54) удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из способа ее определения. Сюда относится условие симметрии:

$$w_r(\ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots; \ldots t_k, \ldots, t_l, \ldots) = \\ = w_r(\ldots, x_l, \ldots, x_k, \ldots, \ldots, t_l, \ldots, t_k, \ldots) \quad (1.55)$$

и условие согласованности:

$$w_r(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_r) = \\ = \int w_{r+k}(x_1, \ldots, x_{r+k}; t_1, \ldots, t_{r+k})\, dx_{r+1} \ldots dx_{r+k}. \quad (1.56)$$

Случайную функцию $\xi(t)$ можно считать определенной, если заданы плотности распределения (54) при любых сколь угодно больших $r$. Выбрав точки разбиения $t_1, t_2, \ldots, t_r$ достаточно близко друг к другу при большом $r$, мы с точностью, достаточной для любых практических задач, можем заменить случайную функцию $\xi(t)$ последовательностью значений $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_r)$.

Таким образом, случайную функцию $\xi(t)$ можно характеризовать неограниченной последовательностью плотностей вероятности

$$w_1(x_1, t); \quad w_2(x_1, x_2; t_1, t_2); \ldots, \quad (1.57)$$

удовлетворяющей всем необходимым требованиям.

Зная $r$ первых плотностей распределения, мы можем отбросить плотности распределения $w_1, \ldots, w_{r-1}$ как не несущие никакой дополнительной информации по сравнению с той информацией, которая содержится в плотности распределения $w_r(x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_r)$. В этой связи следует отметить, что идеальным было бы описывать случайный процесс одной плотностью распределения максимально большого порядка, если бы последняя существовала. Вследствие непрерывности аргумента $t$

конечного максимального порядка не существует. Однако иногда оказывается возможным рассматривать функционал вероятности $W[\xi(t)]$, который определяет «континуальную плотность распределения» (т. е. распределение в функциональном пространстве).

Вместо плотностей распределения (57) можно задавать последовательность характеристических функций

$$\begin{aligned}\Theta_1(u_1,\ t_1) &= \langle\, e^{iu_1\xi(t_1)}\,\rangle\,;\\ \Theta_2(u_1,\ u_2;\ t_1,\ t_2) &= \langle\, e^{iu_1\xi(t_1)+iu_2\xi(t_2)}\,\rangle\,;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned} \tag{1.58}$$

задание которых эквивалентно последовательности функций распределения.

При этом по-прежнему можно оставлять лишь самую высшую из всех известных характеристических функций, имея в виду, что низшие функции могут быть получены из нее приравниванием нулю некоторых аргументов

$$\begin{aligned}&\Theta_r(u_1,\ldots,\ u_r,\ t_1,\ldots,\ t_r) =\\ &= \Theta_{r+k}(u_1,\ldots,\ u_r,\ 0,\ldots,\ 0;\ \ t_1,\ldots,\ t_{r+k}).\end{aligned} \tag{1.59}$$

Увеличивая порядок $r$ и стремясь приблизиться к самой полной характеристической функции, дающей исчерпывающую информацию, мы в пределе будем иметь характеристический функционал

$$\Theta[u(t)] = \langle \exp\left[i\int u(t)\,\xi(t)\,dt\right]\rangle, \tag{1.60}$$

который полностью описывает случайный процесс. Интегрирование в экспоненте последнего выражения производится по всей области определения случайной функции. Характеристические функции (58) можно получить из (60), взяв аргументную функцию в виде

$$u(t) = \sum u_a \delta(t - t_a). \tag{1.61}$$

Случайный процесс в общем виде не может быть описан конечным числом функций от конечного числа переменных, поэтому он и характеризуется или бесконечной последовательностью функций или функционалом. Вместо последовательности функций (57) или (58) удобнее было бы, однако, рассматривать такую последовательность функций, в которой функции более высокого порядка не повторяли бы информации, содержащейся в предыдущих функциях, а вносили бы только новые све-

дения. Поэтому перейдем к другому способу описания случайных процессов, который обладает этим, а также некоторыми другими преимуществами.

Средние значения

$$\langle \xi(t_1), \ldots, \xi(t_r) \rangle \equiv m_r(t_1, \ldots, t_r), \qquad (1.62)$$

рассматриваемые как функция от $t_1, \ldots, t_r$, называются моментными функциями. Неограниченная последовательность моментных функций

$$m_1(t_1);\ m_2(t_1, t_2);\ m_3(t_1, t_2, t_3); \ldots \qquad (1.63)$$

дает исчерпывающее описание случайного процесса.

Еще лучше характеризовать случайный процесс последовательностью корреляционных функций

$$k_1(t_1);\ k_2(t_1, t_2);\ k_3(t_1, \ldots, t_3); \ldots, \qquad (1.64)$$

которые по определению суть корреляции

$$k_r(t_1, \ldots, t_r) = \mathrm{K}[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_r)], \qquad (1.65)$$

рассматриваемые как функция от моментов времени $t_1, \ldots, t_r$. Корреляционные функции так же, как и моментные, являются симметричными функциями своих аргументов.

С повышением порядка физическая значимость многократных корреляций уменьшается. На первых местах в последовательности (64) стоят наиболее существенные функции, и это составляет преимущество описания случайного процесса корреляционными функциями.

Подавляющее большинство случайных процессов, встречающихся в радиофизике, обладает тем свойством, что при раздвижении моментов времени $t_1, \ldots, t_r$ пропадают корреляции между соответствующими значениями случайной функции. При этом корреляционные функции (65) (если $r > 1$) обращаются в нуль, что является весьма удобным.

Зная корреляционные или моментные функции, можно найти другие характеристики случайного процесса, в частности, характеристические функции или плотности распределения.

Пользуясь формулой (52), запишем характеристическую функцию в форме многомерного разложения Тейлора:

$$\Theta_r(u_1, \ldots, u_r; t_1, \ldots, t_r) = \\ = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega = 1}^{r} m_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) u_\alpha \ldots u_\omega. \quad (1.66)$$

Совершенно аналогично, учитывая (53), можно найти, как выражается характеристическая функция через корреляционные функции:

$$\Theta_r(u_1, \ldots, u_r; t_1, \ldots, t_r) = \\ = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega = 1}^{r} k_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) u_\alpha \ldots u_\omega\right\}. \quad (1.67)$$

Существенным является то обстоятельство, что вид этого выражения не меняется при изменении выбранных моментов времени $t_1, \ldots, t_r$, а также их числа $r$. Пользуясь этим, можно записать континуальный характеристический функционал (60) по формуле

$$\Theta[u(t)] = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int \ldots \int k_s(t_1, \ldots, t_s) \times \right. \\ \left. \times u(t_1) \ldots u(t_s)\, dt_1 \ldots dt_s\right\}. \quad (1.68)$$

От характеристических функций можно перейти к плотностям распределения, это будет рассмотрено в § 3.

Ввиду особой роли, которую играют моментные и корреляционные функции, приведем формулы, связывающие их между собой:

$$m_1(t_1) = k_1(t_1),$$

$$m_2(t_1, t_2) = k_2(t_1, t_2) + k_1(t_1) k_1(t_2),$$

$$m_3(t_1, t_2, t_3) = k_3(t_1, t_2, t_3) + \\ + 3\{k_1(t_1) k_2(t_2, t_3)\}_s + k_1(t_1) k_1(t_2) k_1(t_3),$$

$$m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = k_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + \\ + 3\{k_2(t_1, t_2) k_2(t_3, t_4)\}_s + 4\{k_1(t_1) k_3(t_2, t_3, t_4)\}_s +$$

$$+6\{k_1(t_1)k_1(t_2)k_2(t_3,\ t_4)\}_s+$$
$$+k_1(t_1)k_1(t_2)k_1(t_3)k_1(t_4), \qquad (1.69)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здесь символ $\{\ldots\}_s$ обозначает операцию симметризации стоящей в скобках функции относительно всех ее аргументов. Если симметризуемая функция, зависящая от $n$ аргументов, не имеет никакой симметрии, то, естественно, следует совершить $n!$ всевозможных перестановок аргументов и взять среднеарифметическое от $n!$ членов. При наличии же в функции симметрии относительно некоторых аргументов среди $n!$ указанных членов будут тождественно равные члены. Поэтому можно совершить усреднение не по всем перестановкам, а лишь по тем, которые дают несовпадающие результаты. Интересно отметить, что коэффициенты в формулах (69) перед каждым симметризованным членом равны именно полному числу таких различных несовпадающих тождественно членов. Усредняя по несовпадающим членам, мы должны разделить сумму на число членов, которое сократится с коэффициентом, стоящим впереди. После этого в (69) остаются только суммы, распространенные на те перестановки аргументов, которые дают несовпадающие результаты.

Последовательно разрешая систему (69) относительно корреляционных функций, нетрудно получить обратные формулы. Следует заметить, что корреляционные функции не совпадают с центральными моментами. Расхождение между ними появляется, начиная с $k_4$. Так, положив в (69) $k_1=0$, получим, что центральный момент четвертого порядка $m_4$ отличается от $k_4$ членами

$$m_4(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)-k_4(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)=$$
$$=k_2(t_1,\ t_2)k_2(t_3,\ t_4)+k_2(t_1,\ t_3)k_2(t_2,\ t_4)+$$
$$+k_2(t_1,\ t_4)k_2(t_2,\ t_3). \qquad (1.70)$$

## § 2. СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС И СПЕКТРАЛЬНАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ

### 1. Основные понятия

Стационарным называется такой случайный процесс, статистические характеристики которого не меняются при сдвиге времени, т. е. при замене $t$ на $t+a$, где $a$ — произвольная величина.

Плотности вероятности $w_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$, а также моментные и корреляционные функции $m_n(t_1, \ldots, t_n)$, $k_n(t_1, \ldots, t_n)$ зависят не от абсолютного положения значений $t_1, \ldots, t_n$ на оси времени, а лишь от их относительного расположения, иначе говоря, зависят лишь от разностей $t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1$. Возьмем для примера корреляционную функцию $k_n(t_1, \ldots, t_n)$.

По определению стационарности имеем

$$k_n(t_1, \ldots, t_n) = k_n(t_1 + a, \ldots, t_n + a). \qquad (2.1)$$

Выбирая $a = -t_1$ и обозначая

$$k_n(0, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1) = k_n'(t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1),$$

находим

$$k_n(t_1, \ldots, t_n) = k_n'(t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1). \qquad (2.2)$$

Итак, корреляционные функции стационарного процесса, действительно, зависят лишь от разности времен.

Отсюда следует, в частности, что среднее значение $k_1(t_1)$ стационарного процесса (которое равно $k_1(0)$) может быть только постоянной величиной. Обозначим его через $m$:

$$k_1(t) = m_1(t) = m. \qquad (2.3)$$

Вторая корреляционная функция $k_2(t_1, t_2)$ является функцией от $t_2 - t_1$. Введем для нее особое обозначение:

$$k_2(t_1, t_2) = k(t_2 - t_1), \qquad (2.4)$$

$$(k(\tau) = k(-\tau)).$$

Будем записывать ее также в виде

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau), \qquad (2.5)$$

где $\sigma = \sigma(\xi(t)) = \sqrt{k(0)}$ — среднеквадратичное значение, а

$R(\tau) = \frac{k(\tau)}{\sigma^2}$ — безразмерный нормированный коэффициент корреляции (1.43), обладающий свойством $R(0) = 1$.

Для более высоких корреляционных функций мы не будем вводить особых обозначений в виду того, что они не так важны. Отметим, что при совпадении аргументов третьей и четвертой корреляционной функций получаются

кумулянты $k_3$, $k_4$, входящие в определение коэффициентов асимметрии и эксцесса (1.29):

$$\gamma_a = \sigma^{-3} k_3'(0, 0), \quad \gamma_э = \sigma^{-4} k_4'(0, 0, 0). \qquad (2.6)$$

В дальнейшем часто будем использовать понятие «время корреляции», определяемое соотношением

$$\tau_{кор} = \int_0^\infty |R(\tau)| d\tau = \sigma^{-2} \int_0^\infty |k(\tau)| d\tau. \qquad (2.7)$$

Время корреляции $\tau_{кор}$ дает ориентировочное представление о том, на каких интервалах времени имеет место коррелированность между значениями случайного процесса. При значительно больших интервалах парные корреляции уже можно не принимать во внимание. Величину

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) d\tau \qquad (2.8)$$

назовем коэффициентом интенсивности случайной функции. Этот коэффициент играет большую роль в теории процессов Маркова.

Введем важное понятие спектральной интенсивности или спектральной плотности случайного процесса:

$$S[\xi, \omega] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle \xi\xi_\tau \rangle d\tau = 4 \int_0^\infty \cos\omega\tau \langle \xi\xi_\tau \rangle d\tau. \qquad (2.9)$$

Здесь, как и в дальнейшем, индекс $\tau$ у функции $\xi_\tau$ в присутствии аналогичной функции без индекса обозначает сдвиг аргумента: $\xi_\tau = \xi(t + \tau)$, в то время как $\xi = \xi(t)$.

Для процесса с нулевым средним значением $S[\xi, \omega]$ есть преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S[\xi, \omega] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} k(\tau) d\tau. \qquad (2.10)$$

В общем случае, когда среднее значение $\langle \xi \rangle = m$ не равно нулю, аналогичная формула имеет место после вычитания из $\xi$ его среднего значения:

$$S[\xi - m, \omega] = 2\varkappa(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} k(\tau) d\tau. \qquad (2.11)$$

Полная спектральная плотность $S[\xi, \omega]$ содержит еще дельта-образный выброс при нулевой частоте. Подставляя $\langle \xi\xi_\tau \rangle = k(\tau) + m^2$ в (9), получаем

$$S[\xi, \omega] = S[\xi - m, \omega] + 4\pi m^2 \delta(\omega). \qquad (2.12)$$

Как следует из (8), (11), коэффициент интенсивности связан со спектральной плотностью соотношением

$$K = \frac{1}{2} S[\xi - m, 0]. \qquad (2.13)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, из (11) имеем

$$k(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} S[\xi - m, \omega]\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \cos\omega\tau \cdot S[\xi - m, \omega]\, d\omega. \qquad (2.14)$$

Отсюда, в частности, находим дисперсию

$$\sigma^2(\xi) = k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} S[\xi - m, \omega]\, d\omega. \qquad (2.15)$$

Можно доказать, что при всех частотах спектральная интенсивность неотрицательна. Поэтому ее можно физически интерпретировать как распределение мощности флюктуаций по спектру.

Формуле (9) соответствует обратное соотношение

$$\langle \xi\xi_\tau \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega\tau \cdot S[\xi, \omega]\, d\omega. \qquad (2.16)$$

Иногда для вычисления спектральной плотности удобно использовать равенство, вытекающее из (9):

$$S[\xi, \omega] = 4 \operatorname{Re} L[\langle \xi\xi_\tau \rangle, i\omega] \qquad (2.17)$$

(где $L[f, p]$ обозначает преобразование Лапласа: $L[f, p] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$) и формул операционного исчисления.

Примеры. Пусть $\xi(t)$ — экспоненциально-коррелированный случайный процесс, имеющий корреляционную функцию

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}. \tag{2.18}$$

В соответствии с формулами (11), (7) он имеет спектральную плотность

$$S[\xi - \langle \xi \rangle, \omega] = \frac{4\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2} \tag{2.19}$$

и время корреляции

$$\tau_{кор} = \frac{1}{\beta}. \tag{2.20}$$

Если корреляционная функция имеет вид

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \tag{2.21}$$

то спектральная интенсивность равна

$$S[\xi - \langle \xi \rangle, \omega] = 4\beta\sigma^2 \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \tag{2.22}$$

При выполнении неравенства

$$\beta \ll \omega_0 \tag{2.23}$$

спектральная плотность сосредоточена в относительно узкой полосе частот $\omega - \omega_0 \sim \beta$ и справедливы приближенные соотношения

$$S[\xi - \langle \xi \rangle, \omega] \approx 4\beta\sigma^2 \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{2\beta\sigma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}, \quad \tau_{кор} \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta}. \tag{2.24}$$

Некоторые другие часто встречающиеся виды корреляционных функций и соответствующие им спектральные интенсивности указаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

| № пп. | $k(\tau)$ | $S[\xi - m, \omega] = 2\varkappa(\omega)$ |
|---|---|---|
| 1 | $K\delta(\tau)$ | $2K$ |
| 2 | $\sigma^2 e^{-\beta\|\tau\|}$ | $\frac{4\beta\sigma^2}{\omega^2 + \beta^2}$ |

Продолжение табл. 2.1

| № пп. | $k(\tau)$ | $S[\xi - m, \omega] = 2\pi(\omega)$ |
|---|---|---|
| 3 | $\sigma^2 e^{-\frac{1}{4}\beta^2\tau^2}$ | $\sqrt{\pi}\,\frac{4\sigma^2}{\beta}\,e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}}$ |
| 4 | $\sigma^2 e^{-\beta\lvert\tau\rvert}\cos\omega_0\tau$ | $4\beta\sigma^2\,\frac{\omega^2+\omega_0^2+\beta^2}{(\omega^2-\omega_0^2-\beta^2)^2+4\beta^2\omega^2}$ |
| 5 | $e^{-\beta\lvert\tau\rvert}\left(\cos\omega_0\tau+\frac{\beta}{\omega_0}\sin\lvert\omega_0\tau\rvert\right)$ | $4\beta\,\frac{\omega_0^2+\beta^2}{(\omega^2-\omega_0^2-\beta^2)^2+4\beta^2\omega^2}$ |
| 6 | $e^{-\beta\lvert\tau\rvert}\left(\cos\omega_0\tau-\frac{\beta}{\omega_0}\sin\lvert\omega_0\tau\rvert\right)$ | $4\beta\,\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2-\beta^2)^2+4\beta^2\omega^2}$ |
| 7 | $\sigma^2\,\frac{\beta e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}-\alpha e^{-\beta\lvert\tau\rvert}}{\beta-\alpha}$ | $\frac{4\pi\beta(\alpha+\beta)\sigma^2}{(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+\beta^2)}$ |
| 8 | $\sigma^2\,\frac{\sin\beta\tau}{\beta\tau}$ | $\frac{2\pi\sigma^2}{\beta}\begin{cases}1 \text{ при } \omega<\beta\\ 0 \text{ при } \omega>\beta\end{cases}$ |

## 2. Вычисление спектральной плотности при помощи преобразования Лапласа

Рассмотрим преобразование Лапласа стационарной случайной функции

$$L[\xi, p] = \int_0^\infty e^{-pt}\xi(t)\,dt. \tag{2.25}$$

Умножая последнее выражение на комплексно-сопряженную величину и усредняя, получаем

$$\langle |L[\xi, p]|^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt}e^{-p^*t'} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle\, dtdt'.$$

После замены переменных

$$t = s + \frac{\tau}{2}; \quad t' = s - \frac{\tau}{2},$$

отсюда имеем

$$\langle |L[\xi, p]|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\frac{|\tau|}{2}}^{\infty} e^{-(p+p^*)s-\frac{p-p^*}{2}\tau} \langle \xi_\tau \xi \rangle\, ds.$$

Интегрируя по $s$, получаем

$$\langle |L[\xi, p]|^2 \rangle = \frac{1}{p+p^*} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p+p^*)\frac{|\tau|}{2}-\frac{p-p^*}{2}\tau} \langle \xi\xi_\tau \rangle\, d\tau.$$

Умножая на $p + p^*$ и сравнивая полученное равенство с выражением (9), находим формулу

$$S[\xi, \omega] = 2 \lim_{p \to -i\omega} (p + p^*) \langle |L[\xi, p]|^2 \rangle, \qquad (2.26)$$

которой иногда удобно пользоваться для вычисления спектральной интенсивности. Поскольку стационарный процесс $\xi(t)$ не возрастает на бесконечности, преобразование Лапласа (25), а следовательно, и $\langle |L|^2 \rangle$ определены при Re $p > 0$. Полагая

$$p = \frac{\varepsilon}{2} - i\omega \quad (\varepsilon > 0),$$

будем иметь предельный переход $p \to -i\omega$ при стремлении $\varepsilon$ к 0. Поэтому вместо (26) можно записать

$$S[\xi, \omega] = 2 \lim_{\xi \to 0} \varepsilon \left\langle \left| L\left[\xi, \frac{\varepsilon}{2} - i\omega\right] \right|^2 \right\rangle. \qquad (2.27)$$

## 3. Случайный спектр и его связь со спектральной интенсивностью

Спектр $y(\omega)$ процесса $\xi(t)$ определяется равенством

$$y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \xi(t)\, dt. \qquad (2.28)$$

Он представляет собой случайную функцию частоты. Для стационарного случайного процесса последний интеграл, строго говоря, расходится, поэтому равенство (28) носит несколько формальный характер. Его нужно понимать в том смысле, что мы будем иметь самое обычное равенство, если применим к (28) некоторое линейное интегральное преобразование $L_\omega$ и переменим в правой части порядок интегрирования:

$$L_\omega y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (L_\omega e^{-i\omega t}) \xi(t)\, dt. \qquad (2.29)$$

В таком же смысле понимается известное формальное соотношение

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\tau} d\nu. \qquad (2.30)$$

Выражения (28), (30) являются обобщенными функциями. Напомним, что обобщенная функция является определенной, если определены интегралы от этой функции, умноженной на любые непрерывные функции. Требование же, чтобы для каждого значения аргумента было определено значение функции, является необязательным. Как известно, с обобщенными функциями типа (28), (30) можно обращаться в основном так же, как с обычными функциями.

Умножая выражение (28) на аналогичное, но комплексно-сопряженное выражение, получаем после усреднения

$$\langle y(\omega)\, y^*(\omega')\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{-i\omega t+i\omega' t'} \times$$

$$\times \langle \xi(t)\,\xi(t')\rangle\, dt dt'. \qquad (2.31)$$

Сделав замену переменных

$$\tau = t' - t; \quad t_0 = (t+t')/2$$
$$(t = t_0 - \tau/2; \quad t' = t_0 + \tau/2),$$

можно интегрировать по $t_0$, что в силу (30) даст дельта-функцию:

$$\langle y(\omega)\, y^*(\omega')\rangle = \delta(\omega' - \omega)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega'+\omega}{2}\tau}\langle \xi\xi_\tau\rangle\, d\tau.$$

Остающийся интеграл есть спектральная плотность (9), поэтому

$$\langle y(\omega)\, y^*(\omega')\rangle = \frac{1}{2}\delta(\omega' - \omega)\, S[\xi, \omega]. \qquad (2.32)$$

Преобразованию (28) соответствует обратное преобразование

$$\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} y(\omega)\, d\omega. \qquad (2.33)$$

Вследствие действительности процесса $\xi(t)$, взяв комплексно-сопряженную величину от выражения (28), легко получить

$$y^*(\omega) = y(-\omega). \qquad (2.34)$$

Это соотношение позволяет преобразовать выражение (33) к виду

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} y(\omega)\, d\omega. \qquad (2.35)$$

Флюктуационный процесс при этом представляется как суперпозиция гармонических колебаний, имеющих амплитуду, пропорциональную модулю $|y(\omega)|$, и началь-

ную фазу, равную аргументу $\arg y(\omega)$ комплексного спектра $y(\omega)$ при данной частоте. Запись колебаний в комплексной форме (35) обычна в радиофизике (метод комплексных амплитуд).

Случайный спектр $y(\omega)$ входит в формулу (35) лишь под знаком интеграла Чтобы пользоваться ею, достаточно соотношения типа (29), формальное же равенство (28) не является необходимым.

Аналогично этому, стремясь к большей строгости изложения, мы должны потребовать выполнения не самих равенств (31), (32), (34), а выполнения соотношений, полученных из них применением интегральной операции $L_\omega$. Такая интегральная операция оправдывается также физически благодаря тому, что экспериментально мы не можем получить точной гармоники, а можем выделить лишь сумму гармонических составляющих, лежащих в конечной, хотя и малой, полосе частот $\Delta\omega$.

Взяв в качестве $L_\omega$ интегрирование по интервалу частот от $\omega_0$ до $\omega_0 + \Delta\omega$ с весом $\frac{e^{i\omega t_0}}{\Delta\omega}$ и обозначив

$$Y(\omega_0, t_0) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_0}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i\omega t} y(\omega)\, d\omega,$$

будем иметь согласно (29)

$$Y(\omega_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\Delta\omega(t-t_0)}}{i\Delta\omega(t-t_0)} e^{i\omega(t-t_0)} \xi_\omega(t)\, dt. \qquad (2.36)$$

Произведя аналогичное интегрирование обеих частей равенства (32) по $\omega$ и $\omega'$, получим

$$\langle |Y(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2\Delta\omega^2} \int_{\omega_0}^{\omega_0+\Delta\omega} S[\xi, \omega]\, d\omega.$$

При достаточно малом $\Delta\omega$, когда спектральная интенсивность почти не меняется на интервале от $\omega_0$ до $\omega_0 + \Delta\omega$ это равенство дает

$$\langle |Y(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2\Delta\omega} S[\xi, \omega]. \qquad (2.37)$$

Выведенная формула показывает связь между спектральной плотностью и функцией $Y(\omega_0, t_0)$, которая с некоторым приближением заменяет истинный спектр $y(\omega_0)e^{-i\omega_0 t_0}$ флюктуаций. При малой ширине полосы $\Delta\omega$ множитель $[1 - e^{-i\omega(t-t_0)}]/i\Delta\omega(t-t_0)$ в (36) изменяется медленно. Он осуществляет как бы ограничение области интегрирования в расходящемся интеграле (28). Влияние тех промежутков времени, для которых $|t - t_0| \gg 1/\Delta\omega$, становится пренебрежимо малым. Конечно, ограничение области интегрирования в (28) можно производить также многими другими способами. В соответствии с этим интегральная операция $L_\omega$ в (29) будет иметь другой вид.

Поскольку в реальных условиях с точным спектром $y(\omega)$ не приходится иметь дело, рассмотрим функцию

$$Y(\omega_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t_0 - t)\xi(t)\,dt, \qquad (2.38)$$

которая является при узкополосной функции $G(t_0-t)$ приближением к спектру $y(\omega)$. Пусть функция $G(t_0-t)$ действительно является узкополосной, т. е. в спектральном разложении

$$G(t_0 - t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega(t_0-t)} g(\omega)\,d\omega,$$

$$\left(\int g(\omega)\,d\omega = 1\right) \qquad (2.39)$$

функция веса $g(\omega)$ существенно отлична от нуля лишь в узкой области

$$|\omega - \omega_0| \sim \Delta\omega \quad (\Delta\omega \ll \omega_0), \qquad (2.40)$$

примыкающей к $\omega_0$. Это значит, что $G(t_0 - t)$ представляет собой гармонику $e^{i\omega_0(t_0-t)}$, умноженную на некоторую медленно меняющуюся функцию (время изменения которой $1/\Delta\omega$).

Подставляя (39) в (38), меняя порядок интегрирования и учитывая (28), имеем

$$Y(\omega_0, t_0) = \int e^{i\omega t_0} g(\omega)\, y(\omega)\,d\omega.$$

Умножая равенство (32) на $g(\omega)g^*(\omega')e^{i(\omega-\omega')t}$ и интегрируя, получаем

$$\langle |Y(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2}\int S[\xi, \omega]\,|g(\omega)|^2\,d\omega.$$

Когда функция $g(\omega)$ существенно отлична от нуля лишь в области (40), такой узкой, что в ней $S[\xi, \omega]$ практически не меняется, то функцию $S[\xi, \omega]$ можно вынести за знак интеграла и найти

$$\langle |Y(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2} S[\xi, \omega] \int |g(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (2.41)$$

В соответствии с этой формулой для получения спектральной плотности нужно, если выражаться радиотех-

ническим языком, пропустить случайную функцию через узкополосное линейное звено, выходной сигнал подвергнуть квадратичному детектированию и затем усреднить.

В этой связи следует, однако, отметить следующее. Реальные радиотехнические системы имеют действительную переходную функцию $G(t-t_0)$. Это значит, что $g(\omega)$ обладает свойством

$$g(-\omega) = g^*(\omega),$$

согласно которому функция $g(\omega)$ должна быть отлична от нуля не только в области (40), но и в симметричной области $|\omega + \omega_0| \sim \Delta\omega$. В последней области спектральная плотность $S[\xi, \omega]$ вследствие четности принимает те же самые значения, что и в первой. Поэтому ее по-прежнему можно вынести за знак интеграла. Таким образом, в случае действительного узкополосного сигнала $Y(\omega_0, t_0)$ формула (41) не изменяется.

## 4. Усреднение стационарных случайных процессов по времени

Среди стационарных случайных процессов важное место занимают эргодические процессы. Если известна одна-единственная реализация эргодического случайного процесса на всей бесконечной прямой $-\infty < t < \infty$, то путем сдвигов по времени может быть получен бесконечный статистический ансамбль реализаций. Следовательно, по одной реализации эргодического процесса можно узнать всевозможные его статистические характеристики.

Возьмем для примера среднее значение. Его можно вычислять по формуле

$$m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\, dt. \qquad (2.42)$$

Разумеется, пригодны также и другие формулы, и в частности формула, где интеграл заменен суммой

$$m = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi(t + k\Delta). \qquad (2.43)$$

Здесь $\Delta$ — любая положительная величина.

Чтобы доказать формулу (42), рассмотрим случайную величину

$$m_T = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt, \tag{2.44}$$

которая имеет среднее значение $\langle m_T \rangle = m$. Покажем, что дисперсия $\mathrm{D}\, m_T$ стремится к нулю с ростом $T$.

Возводя (44) в квадрат, усредняя и вычитая $m^2$, получаем

$$\mathrm{D}m_T = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T k(t-t')\,dtdt'.$$

Совершив замену переменных

$$\tau = t - t'; \quad t_0 = (t + t')/2,$$

можно видеть, что при фиксированном значении $\tau$ пределы интегрирования по $t_0$ равны $|\tau|/2$ и $T - |\tau|/2$. Интегрируя сначала по $t_0$, а потом уже по $\tau$, имеем

$$\mathrm{D}m_T = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}(T - |\tau|)\,k(\tau)\,d\tau \tag{2.45}$$

или, если учесть (5),

$$\mathrm{D}m_T = \frac{2\sigma^2}{T}\int_0^T\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)R(\tau)\,d\tau.$$

Переходя от модуля суммы к сумме модулей, имеем следующие очевидные неравенства:

$$\mathrm{D}m_T \leqslant \frac{2\sigma^2}{T}\int_0^T\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)|R(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sigma^2}{T}\int_0^T |R(\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{2\sigma^2}{T}\int_0^\infty |R(\tau)|\,d\tau.$$

Последний интеграл есть время корреляции (7), поэтому

$$\mathrm{D}m_T \leqslant 2\sigma^2\frac{\tau_{\text{кор}}}{T}. \tag{2.46}$$

Отсюда видно: если стационарный процесс $\xi(t)$ имеет конечное время корреляции $\tau_{кор}$ и конечную дисперсию $\sigma$, то

$$Dm_T \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Это означает, что величина $m_T$ с ростом $T$ стремится к неслучайной величине, равной среднему значению $m$. Равенство (46) дает также оценку быстроты сходимости:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt - m \lesssim \sigma\left(2\frac{\tau_{кор}}{T}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.47)$$

Интеграл усреднения по времени (44) имеет такую же быстроту сходимости, как среднее арифметическое одинаковых независимых случайных величин $\xi(t_i)$, число которых равно $N = T/2\tau_{кор}$. Желая облегчить фактическое вычисление среднего значения, целесообразно перейти от интеграла (42) к сумме (43), выбирая $\Delta \approx 2\tau_{кор}$.

Аналогично среднему значению, путем временного усреднения можно вычислить другие статистические характеристики эргодических случайных процессов. Так, образуя из $\xi(t)$ случайную функцию

$$\eta(t) = \xi(t)\,\xi(t+\tau) \qquad (2.48)$$

($\tau$ фиксировано), которая, в свою очередь, является стационарной, мы можем применить к ней формулу (42). Это даст формулу

$$\langle \xi\xi_\tau \rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,\xi(t+\tau)\,dt, \qquad (2.49)$$

пригодную в том случае, когда функция $\eta(t)$ имеет конечное время корреляции.

Желая получить спектральную интенсивность, мы должны согласно (41) произвести усреднение квадрата функции $Y(\omega_0, t_0)$. Как функция времени $t_0$ процесс $Y(\omega_0, t_0)$ и его квадрат являются стационарными. Ввиду того, что он более узкополосный, чем исходный процесс, он имеет большое время корреляции, которое по порядку величины обратно ширине полосы $\Delta\omega$. Естественно предположить, что его квадрат $|Y(\omega_0, t_0)|^2$ имеет приблизительно такое же время корреляции:

$$(\tau_{кор})_{Y^2} \sim 1/\Delta\omega.$$

Применяя формулу (47), для процесса $|Y(\omega_0, t_0)|^2$ будем иметь

$$\langle |Y(\omega_0, t_0)|^2 \rangle - \frac{1}{T}\int_0^T |Y(\omega_0, t_0)|^2 dt_0 \lesssim$$

$$\lesssim (2D|Y|^2/\Delta\omega T)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.50)$$

или, если учесть (41),

$$S[\xi,\omega] - \frac{2}{\int |g|^2 d\omega}\frac{1}{T}\int_0^T Y(\omega_0, t_0)\,dt_0 \sim \frac{\sigma(|Y|^2)}{\int |g|^2 d\omega}\frac{1}{\sqrt{\Delta\omega T}}.$$

Как показывает исследование, справедлива следующая оценка

$$\frac{\sigma(|Y|^2)}{\int |g|^2 d\omega} \sim S[\xi, \omega_0].$$

Отсюда следует, что с относительной погрешностью порядка $(\Delta\omega T)^{-\frac{1}{2}}$ выполняется равенство

$$S[\xi, \omega] = \frac{2}{\int |g|^2 d\omega}\frac{1}{T}\int_0^T |Y(\omega_0, t)|^2 dt. \qquad (2.51)$$

Мы получим точное значение спектральной интенсивности, если в (51) совершим предельные переходы $\Delta\omega T \to \infty$ и $\Delta\omega \to 0$.

При экспериментальном измерении спектральной плотности делать полосу частот $\Delta\omega$ очень малой не желательно, ибо для получения удовлетворительной точности требуется, чтобы время усреднения $T$ значительно превосходило постоянную времени изменения узкополосного процесса $1/\Delta\omega$. Интегрирование по времени, конечно, не обязательно производить в форме $\frac{1}{T}\int_0^T \ldots dt$. Практическая интегрирующая система, производящая усреднение, как правило, будет иметь другую весовую функцию. Важно только, чтобы постоянная времени интегрирования $T$ была достаточно велика, т. е. удовлетворяла неравенствам:

$$T \gg \tau_{кор}, \quad T \gg 1/\Delta\omega.$$

## 5. Парные корреляции нескольких случайных процессов

Предположим, что заданы несколько случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$, ..., которые для общности будем предполагать комплексными. Если они стационарны, то их корреляционные функции

$$K[\xi(t_1),\ \xi^*(t_2)],\quad K[\eta(t_1),\ \eta^*(t_2)] \tag{2.52}$$

зависят от разности времен $t_2 - t_1$. Вместе с тем представляют интерес парные корреляции различных случайных функций, например $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Стационарные процессы называются стационарно связанными, если парные корреляции типа

$$K[\xi(t_1),\ \eta^*(t_2)] = k_{\xi\eta}(t_2 - t_1) \tag{2.53}$$

также зависят лишь от разности времен $t_2 - t_1$.

Функция (53) носит название взаимной корреляционной функции в отличие от функций (52), которые можно называть автокорреляционными. Взаимная корреляционная функция отличается от автокорреляционных функций тем, что не обязательно является четной функцией своего аргумента $t_2 - t_1$.

Если средние значения $<\xi>$, $<\eta>$ равны нулю, то преобразование Фурье от (53) дает взаимную спектральную плотность

$$S[\xi, \eta; \omega] = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} < \xi\eta_\tau^* > d\tau, \tag{2.54}$$

которая не обязательно действительна, но обладает свойством

$$S[\xi,\ \eta;\ \omega]^* = S[\eta,\ \xi;\ \omega]. \tag{2.55}$$

Для действительных процессов, кроме того, справедливо равенство

$$S[\xi,\ \eta;\ \omega] = S[\xi,\ \eta;\ -\omega]. \tag{2.56}$$

Если в (56) положить $\eta \equiv \xi$, получим спектральную плотность одной случайной функции. Рассмотренную ранее спектральную плотность $S[\xi; \omega]$ (9) действительного случайного процесса в обозначении (54) можно записать как $S[\xi, \xi; \omega]$.

Обратное преобразование имеет вид:

$$\langle \xi \eta_\tau^* \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S[\xi, \eta; \omega] e^{-i\omega\tau} d\omega. \qquad (2.57)$$

Перейдем к рассмотрению случайных спектров

$$y_\xi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \xi(t)\, dt, \qquad (2.58)$$

$$y_\eta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \eta(t)\, dt,$$

которые позволяют записать процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний. Соответствующие выражения аналогичны интегралу (33), а для действительных процессов — интегралу (35).

Тем же способом, каким было найдено равенство (32) в данном случае, используя (58), (57), легко получить

$$\langle y_\xi(\omega)\, y_\eta^*(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega') S[\xi, \eta; \omega]. \qquad (2.59)$$

Введем узкополосные случайные процессы

$$Y_\xi(\omega_0, t_0) = \int e^{i\omega t_0} g_\xi(\omega)\, y_\xi(\omega)\, d\omega = \int G_\xi(t_0 - t)\, \xi(t)\, dt,$$

$$Y_\eta(\omega_0, t_0) = \int e^{i\omega t_0} g_\eta(\omega)\, y_\eta(\omega)\, d\omega =$$

$$= \int G_\eta(t_0 - t)\, \eta(t)\, dt, \qquad (2.60)$$

которые подобно функции (38) заменяют точный случайный спектр. Здесь функции $g_\xi$, $G_\xi$, $g_\eta$, $G_\eta$ имеют тот же смысл, что и ранее. В общем случае для процессов $\xi$ и $\eta$ они могут быть неодинаковы.

Путем интегрирования равенства (59) находим

$$\langle Y_\xi(\omega_0, t_0)\, Y_\eta^*(\omega_0, t_0) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \int S[\xi, \eta, \omega]\, g_\xi(\omega)\, g_\eta^*(\omega)\, d\omega. \qquad (2.61)$$

Возьмем сначала функции $g_\xi$, $g_\eta$, осуществляющие выделение узкополосных сигналов $Y_\xi$, $Y_\eta$, в форме

$$g_\xi(\omega) = g_\eta(\omega) = g(\omega), \tag{2.62}$$

где $g(\omega)$ — действительная функция, заметно отличная от нуля лишь в узкой полосе частот $\omega - \omega_0 \sim \Delta\omega$. Тогда

$$\langle Y_\xi(\omega_0, t_0)\, Y_\eta^*(\omega_0, t_0)\rangle = \\ = \frac{1}{2} S[\xi, \eta; \omega_0] \cdot \int g^2(\omega)\, d\omega. \tag{2.63}$$

Следовательно, для получения комплексного значения спектральной плотности $S[\xi, \eta; \omega_0]$ требуется найти среднее от комплексного произведения

$$Y_\xi Y_\eta = |Y_\xi|\,|Y_\eta|\, e^{i\Delta\varphi}. \tag{2.64}$$

При этом нужно учитывать не только произведение амплитуд $|Y_\xi|\,|Y_\eta|$ узкополосных сигналов, но и разность их фаз $\Delta\varphi$, которая определяет аргумент комплексного числа (64).

В радиотехнике мы имеем дело с действительными процессами $\xi(t)$, $\eta(t)$, а также с действительными преобразованиями, дающими действительные ускополосные процессы $Y_\xi$, $Y_\eta$. Это накладывает на $g_\xi(\omega)$, $g_\eta(\omega)$ ограничения:

$$g_\xi(-\omega) = g_\xi^*(\omega), \quad g_\eta(-\omega) = g_\eta^*(\omega). \tag{2.65}$$

Если теперь положить

$$g_\xi(\omega) = g_\eta(\omega) = g(|\omega|),$$

то формула (61) дает

$$\langle Y_\xi(\omega_0, t_0)\, Y_\eta(\omega_0, t_0)\rangle = \mathrm{Re}\, S[\xi, \eta; \omega_0] \int_0^\infty g^2 d\omega. \tag{2.66}$$

Мы видим, что перемножение действительных узкополосных процессов не в состоянии дать полных сведений о спектральной плотности как комплексной функции. Чтобы доопределить интенсивность $S[\xi, \eta; \omega_0]$, требуется вторая пара узкополосных процессов. При этом достаточно изменить лишь один из них. Полагая

$$g_\xi(\omega) = g(|\omega|); \quad \tilde{g}_\eta(\omega) = -i\,\mathrm{sgn}\,\omega\, g(|\omega|),$$

теперь из (61) будем иметь

$$\langle Y_\xi(\omega_0,\ t_0)\,\tilde{Y}_\eta(\omega_0,\ t_0)\rangle = \operatorname{Im} S\,[\xi,\ \eta;\ \omega_0]\int_0^\infty g^2 d\omega. \qquad (2.67)$$

Таким образом, чтобы экспериментально определить взаимную спектральную интенсивность, недостаточно только однократного перемножения узкополосных случайных процессов. Требуется второе перемножение, и перед тем, как его сделать, нужно внести фазоинвертером дополнительный сдвиг фаз между узкополосными процессами (желательно на 90°).

## § 3. ГАУССОВЫ И НЕГАУССОВЫ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. КВАЗИМОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

### 1. Нормальная случайная функция и ее плотности распределения

Если все корреляционные функции $k_2(t_1,\ t_2)$, $k_3(t_1,\ t_2,\ t_3)$, ..., кроме первой $k_1(t_1)$, какого-либо случайного процесса $\xi(t)$, равны нулю, то такой процесс является не случайным, т. е. детерминированным. Это значит, что все его реализации совпадают друг с другом.

Предположим теперь, что, помимо $k_1(t_1)$, отлична от нуля вторая корреляционная функция $k_2(t_1,\ t_2)$, в то время как функции более высокого порядка равны нулю. Тогда будем иметь нормальный или, иначе, гауссов случайный процесс.

Согласно формуле (1.67) в этом случае получаем следующее выражение для характеристической функции $n$-мерного распределения случайных значений $\xi(t_1)$, ..., $\xi(t_n)$:

$$\Theta_n(u_1, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = \exp\left\{ i\sum_{\alpha=1}^{n} k_1(t_\alpha)\,u_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_2(t_\alpha,\ t_\beta)\,u_\alpha u_\beta \right\}. \qquad (3.1)$$

Плотность вероятности $w_n\big(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)\big)$ отсюда можно найти, вычисляя интеграл обращения

$$w_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \ldots \int e^{-i\sum\limits_{\alpha=1}^{n} u_\alpha \xi_\alpha} \times \\ \times\, \Theta_n(u_1, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_n)\,du_1 \ldots du_n, \qquad (3.2) \\ \xi_\alpha = \xi(t_\alpha)$$

который является многомерным обобщением интеграла (1.19). Выражение $\sum_{\alpha,\beta} k_2(t_\alpha, t_\beta)\, u_\alpha u_\beta$, которое можно представить в форме $\left\langle \left\{ \sum_\alpha [\xi(t_\alpha) - k_1(t_\alpha)]\, u_\alpha \right\}^2 \right\rangle$, является положительно определенной квадратичной формой. Поэтому модуль характеристической функции, стоящей в (2), по крайней мере, не возрастает при увеличении $u_1, \ldots, u_n$.

Отсюда можно сделать вывод, что интеграл (2), несмотря на наличие бесконечных пределов интегрирования, существует по крайней мере в том смысле, как интеграл (2.30).

Интегрирование в выражении (2) удается провести в общем виде. При этом получаем следующий результат:

$$w_n(\xi_1 \ldots, \xi_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \operatorname{Det}^{-\frac{1}{2}} \| k_2(t_\alpha, t_\beta) \| \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} [\xi_\alpha - k_1(t_\alpha)] [\xi_\beta - k_1(t_\beta)] \right\}, \quad (3.3)$$

где $\operatorname{Det} \| k_2(t_\alpha, t_\beta) \|$ — определитель корреляционной матрицы

$$\begin{pmatrix} k_2(t_1, t_1)\, k_2(t_1, t_2) \ldots k_2(t_1, t_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_2(t_n, t_1)\, k_2(t_n, t_2) \ldots k_2(t_n, t_n) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

а $\| a_{\alpha\beta} \|$ есть матрица, обратная корреляционной матрице (4):

$$\| a_{\alpha\beta} \| = \| k_2(t_\alpha, t_\beta) \|^{-1}, \quad \sum_\beta a_{\alpha\beta} k_2(t_\beta, t_\gamma) = \delta_{\alpha\gamma} \quad (3.5)$$

($\delta_{\alpha\gamma} = 1$ при $\alpha = \gamma$ и $\delta_{\alpha\gamma} = 0$ при $\alpha \neq \gamma$). Плотность вероятности вида (3) носит название гауссова закона распределения.

Если взять стационарный случайный процесс и положить $n = 1$, то матрица (4) будет иметь один элемент, так же как и обратная матрица, причем $a_{11} = 1/k_2(t_1, t_1) = \sigma^{-2}$ (см. 2.5). Поэтому одномерная плотность распределения будет

$$w\left(\xi(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\xi(t) - m)^2 \right\}. \quad (3.6)$$

Положив $n=2$ и найдя матрицу, обратную корреляционной:

$$\begin{pmatrix} k(0) & k(\tau) \\ k(\tau) & k(0) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k(0)}{k^2(0)-k^2(\tau)} & \frac{-k(\tau)}{k^2(0)-k^2(\tau)} \\ \frac{-k(\tau)}{k^2(0)-k^2(\tau)} & \frac{k(0)}{k^2(0)-k^2(\tau)} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

будем иметь двумерную плотность распределения

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\,\frac{\xi_1^2 - 2R(\tau)\,\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{1-R^2(\tau)}\right\}. \quad (3.8)$$

В некоторых задачах, где затруднительно вычислять интеграл усреднения с плотностью распределения (8), целесообразно пользоваться разложением плотности распределения в ряд по степеням коэффициента корреляции. Чтобы найти такое разложение, конкретизируем формулы (2) и (1) для случая $n=2$, $k_1 = m = 0$,

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \exp\left\{-iu_1\xi_1 - iu_2\xi_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma^2}{2}\,(u_1^2 + 2R(\tau)\,u_1u_2 + u_2^2)\,du_1du_2\right\} \quad (3.9)$$

и используем разложение

$$e^{-\sigma^2 R u_1 u_2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\,(\sigma^2 R u_1 u_2)^p. \quad (3.10)$$

При этом будем иметь

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1^p \exp\left\{-iu_1\xi_1 - \frac{\sigma^2 u_1^2}{2}\right\} du_1\right] \times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_2^p \exp\left\{-iu_2\xi_2 - \frac{\sigma^2 u_2^2}{2}\right\} du_2\right]\frac{\sigma^{2p}R^p}{p!}. \quad (3.11)$$

Сделав замену переменных

$$\lambda = \sigma u_1, \quad \lambda = \sigma u_2$$

и воспользовавшись интегральным представлением

$$F^{(p+1)}(z) = \frac{(-i)^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p \exp\left\{i\lambda z - \frac{\lambda^2}{2}\right\} d\lambda \qquad (3.12)$$

производных

$$F^{(p+1)}(z) = \frac{d^{p+1}F(z)}{dz^{p+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^p}{dz^p} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (3.13)$$

от интеграла вероятности

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

получим разложение Крамера

$$w(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{p=0}^{\infty} F^{(p+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) F^{(p+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \frac{R^p}{p!}. \qquad (3.14)$$

Последнее выражение можно также записать через полиномы Эрмита.

Аналогичные разложения справедливы также для более высоких распределений, то есть для трехмерного, четырехмерного и т. д. Так, используя разложение экспонент

$$\exp\{-\sigma^2 R(t_1 - t_2) u_1 u_2\}, \quad \exp\{-\sigma^2 R(t_2 - t_3) u_2 u_3\},$$
$$\exp\{-\sigma^2 R(t_3 - t_1) u_3 u_1\}$$

в ряд (10), запишем трехмерную характеристическую функцию в виде

$$\Theta_3(u_1, u_2, u_3) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\right\} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\sigma^{2p}}{p!} (R_{12} u_1 u_2)^p \cdot \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\sigma^{2q}}{q!} (R_{23} u_2 u_3)^q \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\sigma^{2r}}{r!} (R_{13} u_1 u_3)^r, \quad [R_{12} = R(t_1 - t_2), \qquad (3.15)$$

$$R_{23} = R(t_2 - t_3), \; R_{13} = R(t_1 - t_3)].$$

При вычислении интеграла обращения каждый член с фиксированными значениями $p$, $q$, $r$ распадается на произведение трех интегралов типа (12). Поэтому будем иметь

$$w(\xi_1\xi_2\xi_3) = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{p,q,r=0}^{\infty} F^{(p+r+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) F^{(p+q+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \times$$

$$\times F^{(q+r+1)}\left(\frac{\xi_3}{\sigma}\right) \frac{R_{12}^p R_{23}^q R_{13}^r}{p!\, q!\, r!}. \qquad (3.16)$$

Согласно вышеизложенному, наиболее существенным и трудоемким шагом на пути получения многомерной плотности вероятности для нормального процесса является отыскание матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$, которая обратна корреляционной матрице $\|k_2(t_\alpha, t_\beta)\|$. Задача вычисления обратной матрицы эквивалентна задаче решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} k_2(t_1, t_1)\, y_1 + k_2(t_1, t_2)\, y_2 + \ldots + k_2(t_1, t_n)\, y_n &= x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_2(t_n, t_1)\, y_1 + k_2(t_n, t_2)\, y_2 + \ldots + k_2(t_n, t_n)\, y_n &= x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

Разрешив последнюю систему относительно $y_1, \ldots, y_n$, т. е. получив

$$y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\beta \quad (\alpha = 1, \ldots, n), \qquad (3.18)$$

мы легко могли бы найти квадратичную форму $\sum a_{\alpha\beta} [\xi_\alpha - k_1(t_\alpha)] \times$ $\times [\xi_\beta - k_1(t_\beta)]$, стоящую в экспоненте выражения (3). Для этого было бы достаточно образовать сумму

$$2\varphi(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (3.19)$$

и положить $x_\alpha = \xi_\alpha - k_1(t_\alpha)$.

Описанный прием пригоден независимо от числа выбранных моментов времени и сохраняет свой смысл при их безграничном уплотнении. При этом конечная плотность распределения $w_n[\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)]$ переходит в функционал вероятности.

## 2. Условные корреляционные функции нормального процесса

Пусть известен ряд значений $\xi(T_1), \xi(T_2), \ldots, \xi(T_r)$ случайного процесса $\xi(t)$ в некоторые моменты времени $T_1, T_2, \ldots, T_r$. Эти сведения изменяют первоначальные данные о случайном процессе, в частности его корреляционные функции или законы распределения. Новые, из-

менившиеся корреляционные функции и плотности вероятности будем называть условными (или апостериорными) в отличие от первоначальных безусловных (или априорных). Можно сказать, что в результате задания точных значений случайного процесса мы имеем другой апостериорный случайный процесс, описывающийся другими статистическими характеристиками. Следует отметить, что апостериорный случайный процесс всегда является нормальным, если априорный процесс нормальный.

Согласно формуле (1.39) условная плотность распределения случайных величин $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k)$ при заданных значениях $\xi(T_1),\ldots,\xi(T_r)$ определяется равенством

$$w(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k),\ \xi(T_1),\ldots,\xi(T_r)) =$$
$$= \frac{1}{N} w_{k+r}(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k),\ \xi(T_1),\ldots,\xi(T_r)), \quad (3.20)$$

где $\frac{1}{N}$ — нормировочный множитель, не зависящий от $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k)$. Преобразование Фурье по переменным $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k)$ дает условную характеристическую функцию

$$\Theta_{\text{усл}}(u_1\ldots,u_k) = \frac{1}{N}\int\int \exp\left\{i\sum_{\alpha=1}^{k} u_\alpha \xi(t_\alpha)\right\} \times$$

$$\times w_{k+r}\left(\xi(t_1),\ \ldots,\xi(t_k),\ \xi(T_1),\ldots,\xi(T_r)\right)\left[d\xi(t_1)\ldots d\xi(t_k).\right.$$

Последний интеграл можно преобразовать и выразить через априорную характеристическую функцию совместного распределения значений

$$\xi(t_1),\ldots,\xi(t_k),\ \xi(T_1),\ldots,\xi(T_r):$$

$$\Theta_{\text{усл}}(u_1,\ldots,u_k) = \frac{1}{N(2\pi)^r}\int\ldots\int \exp\left\{-i\sum_{\alpha=1}^{r} v_\alpha \xi(T_\alpha)\right\} \times$$

$$\times \Theta_{k+r}(u_1,\ldots,u_k,\ v_1,\ldots,v_r)\,dv_1\ldots dv_r, \quad (3.21)$$

ибо она связана с $w_{k+r}((\xi(t_1),\ldots,\xi(T_r))$ $(k+r)$-кратным преобразованием Фурье. В последней формуле множитель $\frac{1}{N}$ определяется из условия $\Theta_{\text{усл}}(0,\ldots,0)=1$.

Вычисление интеграла (21) совершенно аналогично вычислению интеграла (2). Разница лишь в том, что те-

перь имеется дополнительная зависимость от $u_1, \ldots, u_k$ как от параметров. Характеристическую функцию, входящую в (21), согласно (1) можно записать в виде

$$\Theta_{k+r}(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r) = \exp\left\{ i \sum_{\alpha=1}^{k} k_1(t_\alpha) u_\alpha + \right.$$

$$+ i \sum_{\beta=1}^{r} k_1(T_\beta) v_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{k} k_2(t_\alpha, t_\beta) u_\alpha u_\beta +$$

$$\left. + i^2 \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{\beta=1}^{r} k_2(t_\alpha, T_\beta) u_\alpha v_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} k_2(T_\alpha, T_\beta) v_\alpha v_\beta \right\}. \quad (3.22)$$

Обозначив через $\|a_{\alpha\beta}\|$ матрицу, обратную корреляционной матрице $\|k_2(T_\alpha, T_\beta)\|$, из (21) по аналогии с (3) будем иметь

$$\Theta_{\text{усл}}(u_1, \ldots, u_k) = \frac{1}{N'} \exp\left\{ i \sum_{\alpha=1}^{k} k_1(t_\alpha) u_\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{k} k_2(t_\alpha, t_\beta) u_\alpha u_\beta \right\} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{r'} a_{\alpha\beta} \left[ \xi(T_\alpha) - k_1(T_\alpha) - \right.$$

$$\left. - i \sum_{\gamma=1}^{k} k_2(T_\alpha t_\gamma) u_\gamma \right] \cdot \left[ \xi(T_\beta) - k_1(T_\beta) - \right.$$

$$\left. - i \sum_{\delta=1}^{k} k_2(T_\beta, t_\delta) u_\delta \right]. \quad (3.23)$$

Множитель $(2\pi)^{-\frac{r}{2}} \operatorname{Det}^{-\frac{1}{2}} \| k_2(T_\alpha, T_\beta) \|$ отнесен к множителю $\frac{1}{N'}$, не зависящему от $u_1, \ldots, u_k$.

В то же время, если ввести условные корреляционные функции $\tilde{k}_1(t)$, $\tilde{k}_2(t, t')$, условную характеристическую функцию (23) можно записать в форме (1)

$$\Theta_{\text{усл}}(u_1, \ldots, u_k) = \exp\left\{ i \sum_{\alpha=1}^{k} \tilde{k}_1(t_\alpha) u_\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{k} \tilde{k}_2(t_\alpha, t_\beta) u_\alpha u_\beta \right\}. \quad (3.24)$$

Приравнивая порознь линейные и квадратичные формы от переменных $u_1, \ldots, u_k$ в экспонентах выражений (23) и (24), находим условные корреляционные функции

$$\tilde{k}_1(t) = k_1(t) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} k_2(t, T_\alpha) a_{\alpha\beta} [\xi(T_\beta) - k_1(T_\beta)], \quad (3.25)$$

$$\tilde{k}_2(t, t') = k_2(t, t') - \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} k_2(t, T_\alpha) a_{\alpha\beta} k_2(T_\beta, t').$$

Последние полностью определяют апостериорный случайный процесс, как всякий гауссов процесс.

Рассмотрим для примера стационарную случайную функцию $k_1(t) = m$, $k_2(t, t') = \sigma^2 R(t - t')$ и зададим ее значение в некоторый момент $t_0$. Тогда в соответствии с формулой (25) будем иметь следующее условное среднее значение и корреляционную функцию

$$\tilde{k}_1(t) = m + R(t - t_0)[\xi(t_0) - m], \quad (3.26)$$

$$\tilde{k}_2(t, t') = \sigma^2 \{R(t - t') - R(t - t_0) R(t_0 - t')\}.$$

Приравнивая времена в последнем равенстве, получим условную дисперсию

$$[D\xi(t)]_{усл} = \sigma^2 [1 - R^2(t - t_0)]. \quad (3.27)$$

Апостериорный случайный процесс является существенно нестационарным. С приближением к точке $t_0$ статистический разброс значений $\xi(t)$ постепенно уменьшается до нуля вследствие того, что $R(t - t_0) \to 1$ при $t - t_0 \to 0$. При бесконечном удалении от точки $t_0$ с фиксированным значением случайной функции коэффициент корреляции $R(t - t_0)$ исчезает и вместе с тем пропадает различие между априорным и апостериорным процессами.

Формулу (25) можно применять также в том случае, когда задается непрерывная реализация случайного процесса на целом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

### 3. Негауссов случайный процесс и квазимоментные функции

Когда отличны от нуля корреляционные функции более высокого порядка $k_3(t_1, t_2, t_3)$, $k_4(t_1, \ldots, t_4)$, ..., мы имеем ненормальный или негауссов случайный процесс. В этом случае выражение (1) становится недостаточным; в формуле (1.67) нужно учитывать также члены, для

которых $s > 2$. Хотя характеристическую функцию для негауссового процесса можно сразу записать в виде разложения (1.67), вычисление соответствующих плотностей распределения затруднительно, ибо интеграл обращения в общем случае не поддается непосредственному вычислению.

Чтобы облегчить задачу отыскания плотностей многомерных распределений для негауссова процесса, введем систему квазимоментных функций

$$b_3(t_1, t_2, t_3), \quad b_4(t_1, \ldots, t_4) \ldots \tag{3.28}$$

Последние занимают некоторое промежуточное положение между корреляционными и моментными функциями и, в свою очередь, вместе с $k_1(t)$, $k_2(t_1, t_2)$ полностью характеризуют случайный процесс. По определению, квазимоментные функции связаны с корреляционными следующим равенством:

$$\exp\left\{\sum_{s=3}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha,\ldots,\omega=1}^{n} k_s(t_\alpha,\ldots,t_\omega)\,z_\alpha\ldots z_\omega\right\} =$$

$$= 1 + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha,\ldots,\omega=1}^{n} b_s(t_\alpha,\ldots,t_\omega)\,z_\alpha\ldots z_\omega, \tag{3.29}$$

которое справедливо при любых значениях $n$, $t_1, \ldots, t_n$, $z, \ldots, z_n$. Принимая во внимание это равенство, а также формулу (1.67), характеристическую функцию можно выразить через квазимоментные функции:

$$\Theta_n(u_1, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{i\sum_{\alpha=1}^{n} k_1(t_\alpha)\,u_\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{i^2}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_2(t_\alpha, t_\beta)\,u_\alpha u_\beta\right\} \times$$

$$\times\left\{1 + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha,\ldots,\omega=1}^{n} b_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega)\,u_\alpha \ldots u_\omega\right\}. \tag{3.30}$$

Равенство (29) позволяет найти явную связь между корреляционными и квазимоментными функциями. Соответствующие формулы совпадают с формулами (1.69), если в последних положить $k_1(t) \equiv 0$; $k_2(t_1, t_2) \equiv 0$. Низшие квазимоментные функции $b_4$, $b_5$ просто совпадают

с корреляционными. Отличие от корреляционных функций сказывается, начиная с $b_6$:

$$\left.\begin{aligned} &b_3 = k_3; \quad b_4 = k_4; \quad b_5 = k_5, \\ &b_6 = k_6 + 10\{k_3 k_3\}_s, \\ &b_7 = k_7 + 35\{k_3 k_4\}_s, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

Символ $\{\ldots\}_s$ здесь обозначает операцию симметризации, также как в (1.69).

Переходя к вычислению $n$-мерной плотности распределения, следует рассмотреть интеграл обращения от характеристической функции (30):

$$w_n(\xi_1, \ldots, \xi_n;\ t_1, \ldots, t_n) = (2\pi)^{-n} \int \ldots \int \exp\left\{-i \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha u_\alpha\right\} \times$$

$$\times \left\{1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega = 1} b_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega)\, u_\alpha, \ldots, u_\omega\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{i \sum_{\alpha=1}^{n} k_1(t_\alpha)\, u_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} k_2(t_\alpha, t_\beta)\, u_\alpha u_\beta\right\} \times$$

$$\times\, du_1 \ldots du_n. \tag{3.32}$$

Меняя порядок суммирования по $s$ и интегрирования, последний интеграл можно записать в виде

$$w_n(\xi_1, \ldots, \xi_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \left\{1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega = 1}^{n} b_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) \times \right.$$

$$\left. \times \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right) \ldots \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_\omega}\right)\right\} w_n^\circ(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{3.33}$$

где $w_n^\circ$ — плотность распределения гауссова процесса, имеющего такие же функции $k_1(t)$, $k_2(t, t')$, что и исходный негауссов процесс. Согласно вышеизложенному она определяется формулой (3):

$$w_n^\circ(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}} k_2(t_\alpha, t_\beta) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta\right\} \tag{3.34}$$

$$(x_\alpha = \xi_\alpha - k_1(t_\alpha)).$$

Искомую плотность распределения можно записать также при помощи обобщенных полиномов Эрмита, которые определяются следующим образом. Пусть задана квадратичная форма

$$\varphi[x] = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \tag{3.35}$$

от некоторых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждой матрице $\|a_{\alpha\beta}\|$ можно сопоставить обобщенные полиномы Эрмита:

$$H_\alpha[x],\quad H_{\alpha\beta}[x],\ldots, H_{\alpha,\ldots,\omega}[x], \tag{3.36}$$

определяемые равенствами

$$H_{\alpha\ldots\omega}[x] = e^{\varphi[x]}\left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\ldots\left(-\frac{\partial}{\partial x_\omega}\right)e^{-\varphi[x]}. \tag{3.37}$$

Если обозначить

$$y_\alpha = y_\alpha[x] = \frac{\partial\varphi[x]}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta}x_\beta, \tag{3.38}$$

то в соответствии с (37) имеем

$$\begin{gathered}
H_\alpha[x] = y_\alpha,\\
H_{\alpha\beta}[x] = y_\alpha y_\beta - a_{\alpha\beta},\\
H_{\alpha\beta\gamma}[x] = y_\alpha y_\beta y_\gamma - a_{\alpha\beta}y_\gamma - a_{\alpha\gamma}y_\beta - a_{\beta\gamma}y_\alpha,\\
H_{\alpha\beta\gamma\delta}[x] = y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta - a_{\alpha\beta}y_\gamma y_\delta - a_{\alpha\gamma}y_\beta y_\delta - a_{\alpha\delta}y_\beta y_\gamma -\\
- a_{\beta\gamma}y_\alpha y_\delta - a_{\beta\delta}y_\alpha y_\gamma - a_{\gamma\delta}y_\alpha y_\beta - a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta} - a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{3.39}$$

Обобщенные полиномы Эрмита позволяют записать плотность распределения (33) в форме

$$w_n(\xi_1,\ldots,\xi_n; t_1,\ldots,t_n) = \left\{1 + \sum_{s=3}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha,\ldots,\omega=1}^{n} b_s(t_\alpha,\ldots,t_\omega)\times\right.$$

$$\left.\times H_{\alpha\ldots\omega}[\xi(t) - k_1(t)]\right\} w_n^\circ(\xi_1,\ldots,\xi_n). \tag{3.40}$$

Здесь берутся полиномы, построенные на основе квадратичной формы, стоящей в экспоненте (34).

Мы видим, что, зная квазимоментные функции, можно непосредственно записать плотность распределения произвольной кратности в форме разложения по обобщен-

ным полиномам Эрмита. Наибольшая трудность, которая здесь встречается, — это отыскание матрицы $\|a_{\alpha\beta}\|$, обратной корреляционной матрице $\|k_2(t_\alpha, t_\beta)\|$. Главную роль играют лишь первые члены разложения. Ограничиваясь некоторым числом низших членов, более высокие члены можно не принимать во внимание.

В том частном случае, когда $n = 1$, мы будем иметь одномерную плотность распределения вероятности. При совпадающих индексах полиномы (39) выражаются через обычные полиномы Эрмита

$$H_{1\ldots1}[x] = a_{11}^{\frac{n}{2}} H_n\left(a_{11}^{-\frac{1}{2}} y_1\right) = a_{11}^{\frac{n}{2}} H_n\left(a_{11}^{\frac{1}{2}} x_1\right) \quad (n=1)$$

вообще

$$\underbrace{H_{\alpha\ldots\alpha}}_{n\text{раз}}[x] = a_{\alpha\alpha}^{\frac{n}{2}} H_n\left(a_{\alpha\alpha}^{-\frac{1}{2}} y_\alpha\right), \tag{3.41}$$

где

$$H_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}}\left(-\frac{d}{dz}\right)^n e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$n$, $a_{\alpha\beta}$ — любые; $\alpha = 1, \ldots, n$.

Принимая во внимание, что в одномерном случае

$$a_{11} = \frac{1}{k_2(t, t)} = \frac{1}{\sigma^2},$$

получаем согласно (40), (41) плотность распределения в виде ряда

$$w_1(\xi(t)) = \left\{1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{b_s}{\sigma^s} H_s\left(\frac{\xi(t) - k_1(t)}{\sigma}\right)\right\} w^\circ(\xi(t)) \tag{3.42}$$

$$(b_s = b_s(t, \ldots, t); \quad w^\circ(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\xi - k_1(t)\right)^2\right\}),$$

который носит название ряда Эджворта.

Перейдем к двумерному случаю $n = 2$. Для стационарного процесса матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ при этом определяется формулой (7), а плотность распределения $w_2^0$ имеет вид (8). Переменные $y_1$, $y_2$, входящие в (39), в данном случае будут

$$y_1 = \frac{1}{\sigma^2} \frac{x_1 - Rx_2}{1 - R^2}, \quad y_2 = \frac{1}{\sigma^2} \frac{-Rx_1 + x_2}{1 - R^2}. \tag{3.43}$$

Индексы $\alpha, \ldots, \omega$ в формулах (39) теперь могут принимать лишь значения 1 или 2. Если отмечать индексом в скобках число повторений указанных значений

$$\underbrace{H_{1\ldots1}}_{l\text{ раз}},\ \underbrace{{}_{2\ldots2}}_{m\text{ раз}} = H_{(l,m)}, \tag{3.44}$$

то из (39) будем иметь:

$$H_{11} = H_{(20)} = y_1^2 - a_{11}, \quad H_{12} = H_{(11)} = y_1 y_2 - a_{12},$$
$$H_{22} = H_{(02)} = y_2^2 - a_{22}, \quad H_{111} = H_{(30)} = y_1^3 - 3a_{11}y_1,$$
$$H_{112} = H_{(21)} = y_1^2 y_2 - 2a_{12}y_1 - a_{11}y_2,$$
$$H_{122} = H_{(12)} = y_1 y_2^2 - 2a_{12}y_2 - a_{22}y_1, \quad H_{222} = H_{(03)} = y_2^3 - 3a_{22}y_2 \tag{3.45}$$

или

$$H_{(20)} = \frac{1}{\sigma^2\mu^2}(z_1^2 - 1); \quad H_{(11)} = \frac{1}{\sigma^2\mu^2}(z_1 z_2 + R);$$

$$H_{(02)} = \frac{1}{\sigma^2\mu^2}(z_2^2 - 1), \tag{3.46}$$

$$H_{(30)} = \frac{1}{\sigma^3\mu^3}(z_1^3 - z_1); \quad H_{(21)} = \frac{1}{\sigma^3\mu^3}(z_1^2 z_2 + 2Rz_1 - z_2),$$

$$H_{(12)} = \frac{1}{\sigma^3\mu^3}(z_1 z_2^2 + 2Rz_2 - z_1), \quad H_{(03)} = \frac{1}{\sigma^3\mu^3}(z_2^3 - z_2)$$

при обозначениях

$$1 - R^2 = \mu^2, \quad z_1 = \sigma\mu y_1 = \frac{x_1 - Rx_2}{\sigma\mu},$$

$$z_2 = \sigma\mu y_2 = \frac{-Rx_1 + x_2}{\sigma\mu}. \tag{3.47}$$

При объединении в разложении (40) тех членов, которые отличаются лишь перестановкой индексов 1 и 2, двумерную плотность распределения можно записать

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \left\{1 + \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{1}{l!m!} b_{(lm)}[\xi(t) - k_1(t)]\right\} \times$$
$$\times w_2^{\circ}(\xi_1 \xi_2) \tag{3.48}$$

$$b_{(lm)} = b_{l+m}(\overbrace{t_1, \ldots, t_1}^{l\text{ раз}}, \overbrace{t_2, \ldots, t_2}^{m\text{ раз}}).$$

Разложение подобного типа есть в сущности разложение по ортогональным полиномам.

Квазимоментные функции выступают как коэффициенты разложения плотности вероятности в ряд по обобщенным полиномам Эрмита при любом количестве выбранных случайных значений $\xi(t_1)$, ..., $\xi(t_n)$ исходного процесса. Если точки $t_1$, ..., $t_n$ выбирать все ближе и ближе друг к другу, мы будем иметь соответствующее разложение для функционала вероятности.

## § 4. ПРОЦЕССЫ МАРКОВА И РОДСТВЕННЫЕ ИМ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 1. Определение процесса Маркова и стохастическое уравнение

Процессы Маркова, или процессы без последействия, являются удобной абстракцией. Хотя реальные процессы, встречающиеся в радиофизике, не являются в точности марковскими, иногда целесообразно рассматривать их приближенно как процессы Маркова. Подобная замена позволяет получать ряд конкретных результатов путем применения эффективных математических методов теории процессов Маркова.

Мы начнем с рассмотрения идеальных точных процессов без последействия, а затем остановимся на том, когда и в каком смысле реальный радиофизический процесс можно представлять себе как процесс Маркова.

Пусть имеется случайная функция $x(t)$. Возьмем ряд ее значений $x(t_1)$, $x(t_2)$,..., $x(t_n)$ в последовательные моменты времени $t_1 > t_2 >, \ldots, > t_n$ и рассмотрим условную вероятность значения в самый последний момент

$$w(x(t_1) \mid x(t_2), \ldots, x(t_n)) = \frac{w_n(x(t_1), \ldots, x(t_n))}{w_{n-1}(x(t_2), \ldots, x(t_n))}. \quad (4.1)$$

Процесс $x(t)$ является процессом Маркова, если указанная условная вероятность зависит лишь от последнего условного значения $x(t_2)$ и не зависит от предыдущих $x(t_3), \ldots, x(t_n)$, $(t_2 > t_3, \ldots, t_2 > t_n)$. Конечно, может иметь место зависимость от $x(t_1)$, $t_1$, $t_2$, поэтому для марковского процесса можно записать

$$w(x_1 \mid x_2, \ldots, x_n) = p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) \quad (n > 2) \quad (4.2)$$
$$(x_1 = x(t_1), \ldots, x_n = x(t_n)).$$

Если учесть, что условные вероятности (1), соответствующие различным значениям $n$, согласно определе-

нию, всегда связаны между собой соотношениями согласования

$$\int w(x_1 | x_2, \ldots, x_n)\, w(x_2, \ldots, x_n)\, dx_n = \\ = w(x_1 | x_2, \ldots, x_{n-1})\, w(x_2, \ldots, x_{n-1}), \qquad (4.3)$$

то можно видеть, подставляя (2), что для всех $n$ в формуле (2) фигурирует одна и та же функция $p_{t_1 t_2}(x_1, x_2)$, которая к тому же равна условной вероятности:

$$p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) = w(x_1 | x_2), \quad (t_1 > t_2). \qquad (4.4)$$

Функцию $p_{t_1 t_2}(x_1, x_2)$ называют вероятностью перехода.

Из определения условных вероятностей вытекает формула

$$w(x_1, \ldots, x_n) = w(x_1 | x_2, \ldots, x_n)\, w(x_2 | x_3, \ldots, x_n) \ldots \\ \ldots, w(x_{n-1} | x_n) w(x_n). \qquad (4.5)$$

Учитывая (2), (4), из последнего равенства легко получить, что многомерная плотность распределения в случае процессов Маркова распадается на произведение вероятностей перехода

$$w(x_1, \ldots, x_n) = p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) p_{t_2 t_3}(x_2, x_3) \ldots \\ \ldots p_{t_{n-1} t_n}(x_{n-1}, x_n) w(x_n). \qquad (4.6)$$

Таким образом, зная начальное одномерное распределение и вероятность перехода, мы можем записать любую плотность распределения. Следовательно, функции $p_{tt'}(x, x')$, $w(x(t))$ полностью характеризуют случайный процесс без последействия.

Вероятность перехода удовлетворяет нескольким условиям. Сюда относится условие нормировки

$$\int p_{tt'}(x, x')\, dx = 1, \qquad (4.7)$$

вытекающее, например, из (4). Далее, интегрируя распределение (6) по некоторому промежуточному значению

$x(t_k)$, $1 < k < n$, мы получим плотность распределения меньшей кратности $w_{n-1}$, для которой, в свою очередь, справедлива аналогичная же формула. Сопоставление результатов дает следующее интегральное уравнение Смолуховского:

$$\int p_{t_1 t_2}(x_1, x_2)\, p_{t_2 t_3}(x_2, x_3)\, dx_2 = p_{t_1 t_3}(x_1, x_3) \qquad (4.8)$$
$$(t_1 < t_2 < t_3).$$

В самом деле, взяв хотя бы равенство

$$\int w_3\left(x(t_1), x(t_2), x(t_3)\right) dx(t_2) = w_2\left(x(t_1), x(t_3)\right)$$

и записав в нем $w_2$, $w_3$ в форме (6), мы получим (8).

Рассмотрим как изменяется во времени одномерный закон распределения. Полагая в (6) $n = 2$ и интегрируя по $x(t_1)$, находим уравнение

$$w(x_1, t_1) = \int p_{t_1 t_2}(x_1, x_2)\, w(x_2, t_2)\, dx_2$$
$$\left[t_1 > t_2; \quad w(x_1, t_1) = w\ \left(x(t_1)\right)\right]. \qquad (4.9)$$

Перейдем от него к дифференциальному уравнению, для этого рассмотрим момент $t_1$, близкий к $t_2$. Если положить

$$t_2 = t, \quad t_1 = t + \tau, \quad x_2 = x, \quad x_1 = x_\tau,$$

то (9) можно записать в виде

$$w_\tau(x_\tau) = \int p_{t+\tau, t}(x_\tau, x)\, w(x)\, dx. \qquad (4.10)$$

Введем в рассмотрение характеристическую функцию

$$\Theta(u, x) = \langle\, e^{iu(x_\tau - x)}\, \rangle = \int e^{iu(x_\tau - x)} p_{t+\tau, t}(x_\tau, x)\, dx_\tau \qquad (4.11)$$

случайного приращения $x_\tau - x$, имеющего место за время от $t$ до $t+\tau$ при условии, что $x(t) = x$.

Подставляя в (10) обратное преобразование

$$p_{t+\tau, t}(x_\tau, x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x_\tau - x)} \Theta(u, x)\, du, \qquad (4.12)$$

получаем

$$w_\tau(x_\tau) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-iu(x_\tau - x)} \Theta(u, x)\, du\, w(x)\, dx. \qquad (4.13)$$

Характеристическую функцию (11) по обычной формуле (1.22)

$$\Theta(u, x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} m_s(x) \tag{4.14}$$

можно выразить через момент

$$m_s(x) = \langle (x_\tau - x)^s \rangle \tag{4.15}$$

указанного приращения. После этого будем иметь

$$w_\tau(x_\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{1}{2\pi} \iint e^{-iu(x_\tau - x)} \times \\ \times (iu)^s du m_s(x) w(x) dx. \tag{4.16}$$

Но поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x_\tau - x)} (iu)^s du = \\ = \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^s \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x_\tau - x)} du = \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^s \delta(x_\tau - x), \tag{4.17}$$

то отсюда находим

$$w_\tau(x_\tau) = w(x_\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\right)^s [m_s(x_\tau) w(x_\tau)]. \tag{4.18}$$

Разделив на $\tau$ и перейдя к пределу $\tau \to 0$, получим

$$\dot{w}(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s [K_s(x) w(x)], \tag{4.19}$$

где

$$K_s(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{m_s(x)}{\tau}, \tag{4.20}$$

когда последний предел существует.

Отметим, что равенства (18), (19) имеют простой операторный смысл. Так, первое из них можно записать

$$w_\tau = \Theta\left(i \frac{\partial}{\partial x}, x\right) w, \tag{4.21}$$

если условиться, что действие второго оператора $x$ в функции $\Theta$ от операторов $i\frac{\partial}{\partial x}$ и $x$ всегда предшествует действию первого оператора $i \frac{\partial}{\partial x}$.

Уравнение (19) мы будем называть стохастическим или кинетическим уравнением. В том случае, когда сумма производных в правой части имеет бесконечное число членов, она эквивалентна интегральной операции. В противном случае уравнение (19) есть дифференциальное уравнение в частных производных.

Согласно (20) моменты $m_s(x) = \langle (x_\tau - x)^s \rangle$ имеют следующую зависимость от $\tau$:

$$\left.\begin{aligned} m_1(x) &= K_1(x)\tau + \tau^2 \ldots, \\ m_2(x) &= K_2(x)\tau + \tau^2 \ldots, \\ m_3(x) &= K_3(x)\tau + \tau^2 \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

Пользуясь формулами (1.24), отсюда легко получить совершенно аналогичные соотношения для кумулянтов $k_s(x)$ случайного приращения $x_\tau - x$:

$$k_s(x) = K_s(x)\tau + \tau^2 \ldots \qquad (4.23)$$

$$(s = 1, 2, \ldots).$$

Если определить $\xi(t', x)$, как производную

$$\xi(t', x) = \xi(t') = \frac{dx(t')}{dt'}, \quad (t' > t) \qquad (4.24)$$

от условного случайного процесса $x(t')$, имеющего значение $x(t) = x$, то

$$x_\tau - x = \int_t^{t+\tau} \xi(t')\, dt' \qquad (4.25)$$

и кумулянты $k_s(x)$ будут выражаться через корреляционные функции $k_s(t_1, \ldots, t_s)$ процесса $\xi(t)$:

$$k_s(x) = \int_t^{t+\tau} \ldots \int_t^{t+\tau} k_s(t_1, \ldots, t_s)_\xi dt_1, \ldots, dt_s \qquad (4.26)$$

$$(s = 1, 2, \ldots).$$

Сопоставляя последнее равенство с (23), можно получить, что корреляционные функции $k_s(t_1, \ldots, t_r)_\xi$ содержат дельта-образную особенность

$$k_s(t_1, \ldots, t_s)_\xi = K_s(x)\,\delta(t_1 - t_2), \ldots, \delta(t_1 - t_s) + A_s \qquad (4.27)$$

$$(s = ?, 3, \ldots).$$

Здесь $A_s$ обозначает возможные другие функции, менее сингулярные, чем первый член (имеющие спектр, быстрее убывающий с увеличением частот). При подстановке в (26) они дают после интегрирования слагаемые порядка $\tau^2, \tau^3, \ldots$; $K_s(x)$ — есть коэффициент интенсивности производной (24), соответствующий данному значению $x(t) = x$ и данному моменту времени $t$. Эти коэффициенты интенсивности входят в стохастическое уравнение (19); в нетривиальном случае хотя бы один из них отличен от нуля.

Как показывает приведенное рассмотрение, случайные функции Маркова тесно связаны со специфическими случайными процессами, имеющими дельта-образные корреляционные функции. Подобные случайные процессы мы называем дельта-коррелированными.

## 2. Дельта-коррелированные случайные функции

Пусть имеется дельта-коррелированный случайный процесс $\xi(t)$, который описывается корреляционными функциями

$$k_s(t_1, \ldots, t_s) = K_s(t_1)\,\delta(t_1 - t_2)\ldots\delta(t_1 - t_s) \quad (4.28)$$
$$(s = 2, 3, \ldots),$$

где $K_s(t)$ — коэффициенты интенсивности, зависящие в общем случае от времени. В частном случае, когда процесс $\xi(t)$ стационарный, коэффициенты $K_s$ суть постоянные.

Полагая в (28) $t_1 = t_2 = \ldots = t_s$, легко получить, что дельта-коррелированный случайный процесс имеет бесконечные кумулянты. Отсюда видно, что практически дельта-коррелированные процессы в радиофизике не встречаются. Однако ими подчас удобно пользоваться как приближенными или вспомогательными рабочими понятиями.

Особую роль играет нормальный стационарный дельта-коррелированный процесс. Если его среднее значение равно нулю, то среди функций (28) отлична от нуля лишь вторая корреляционная функция

$$k_2(t_1 - t_2) = K_2\delta(t_1 - t_2)$$
$$(k_1 = K_3 = K_4 = \ldots = 0). \quad (4.29)$$

Такой случайный процесс согласно формулам (29), (2.13) имеет равномерную спектральную плотность

$$\varkappa(\omega) = K_2 = K, \quad S[\xi, \omega] = 2K. \tag{4.30}$$

Поэтому его мы будем называть иногда нормальным «белым шумом», или, короче, просто «белым шумом», по аналогии с белым светом, имеющим равномерный спектр.

Спектральная плотность практически встречающихся процессов является равномерной лишь в определенных пределах. Всегда имеется некоторая частота $\omega_в$, ограничивающая сверху диапазон возможных частот в спектре реального процесса. Если это учесть, то формула (2.15)

$$D\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varkappa(\omega)\, d\omega \tag{4.31}$$

даст уже не бесконечное, а некоторое конечное значение, которое по порядку величины равно $K\omega_в \pi \sim K\tau_{кор}$. Замена реального процесса на дельта-коррелированный означает, что граничная частота не вводится явно в рассмотрение. Это допустимо, когда она значительно превосходит все другие частоты, существенные для данной системы или задачи.

Время корреляции $\tau_{кор} = \frac{1}{\omega_в}$ при этом, напротив, мало, меньше всех других существенных постоянных времени системы. При этих условиях можно сделать замену:

$$k_2(t_2 - t_1) \to \delta(t_2 - t_1) \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau)\, d\tau. \tag{4.32}$$

Здесь коэффициент при дельта-функции подобран таким образом, чтобы обе функции давали одинаковый результат интегрирования по $t_2 - t_1$.

### 3. Уравнение Фоккера—Планка и уравнение Колмогорова

Процесс Маркова называется непрерывным, если высшие коэффициенты интенсивности $K_3, K_4, \ldots$ равны нулю. В этом случае уравнение (19) принимает вид

$$\dot{w}(x) = -\frac{\partial}{\partial x}[K_1(x)\, w(x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2(x)\, w(x)] \tag{4.33}$$

и носит название уравнения Фоккера — Планка, или диффузионного уравнения.

Вводя поток вероятности

$$G(x) = K_1(x)\,w(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[K_2(x)\,w(x)], \qquad (4.34)$$

уравнение Фоккера — Планка можно записать в форме

$$\dot{w} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad (4.35)$$

и интерпретировать как уравнение сохранения вероятности. Поток (34) описывает количество вероятности, проходящей в положительном направлении через сечение $x$ в единицу времени. Рассмотрим отрезок $x_1 < x < x_2$ между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$. Тогда $G(x_1)\tau$ есть количество вероятности, пришедшей на указанный отрезок за время $\tau$ через сечение $x = x_1$, а $G(x_2)\tau$ есть вероятность, ушедшая через второе сечение. Если на отрезке $x_1 < x < x_2$ вероятность никуда не исчезнет и если не существует ее источников, то разность указанных количеств составит приращение суммарной вероятности $\int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$, сконцентрированной на этом отрезке:

$$\int_{x_1}^{x_2} w_\tau(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} w(x)\,dx = G_1(x_1)\,\tau - G_2(x_2)\,\tau.$$

Поделив на $\tau$ и $x_2 - x_1$ и перейдя к пределу $\tau \to 0$, $x_2 - x_1 \to 0$, мы получим уравнение сохранения (35).

Перемещение вероятности, о котором шла речь, аналогично диффузии или теплопроводности, с той разницей, что в последних рассматривается перемещение не вероятности, а количества вещества или теплоты. Математически указанные явления описываются тем же самым уравнением (33).

В каждой отдельной реализации марковского процесса траектория $x(t)$ имеет весьма запутанный вид. Изображающая точка движется на оси координат так же, как броуновская частица или частица, участвующая в диффузионном процессе. Взяв большое число реализаций случайного процесса, мы будем иметь большое число изображающих точек, совершающих случайные блуждания. Эти точки образуют как бы «газ», находящийся в процессе диффузии, плотность которого в какой-либо

точке пропорциональна плотности вероятности. Каждая отдельная изображающая точка образует «молекулу» этого «газа». Она перемещается, но не может уничтожаться или возникать. В приведенном выше рассуждении можно говорить не о «количестве вероятности», а о числе изображающих точек и трактовать $\int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$ как число точек на отрезке $x_1<x<x_2$, т. е. как число случаев, когда изображающая точка попадает на этот отрезок. Конечно, при такой терминологии речь идет не о полном, а относительном числе изображающих точек, которое совпадает с вероятностью.

Чтобы получить решение уравнения Фоккера — Планка (33), его следует дополнить начальными и граничными условиями.

Задав в некоторый начальный момент произвольное начальное распределение

$$w(x,t_0)=w_0(x),$$

путем решения уравнения (33) мы найдем дальнейшую эволюцию этого распределения, т. е. найдем $w(x, t)$ при $t > t_0$.

Если начальное распределение взять дельта-образным ($w_0(x) = \delta(x-x_0)$), то получаемая плотность распределения будет ни чем иным, как вероятностью перехода $p_{tt_0}(x, x_0)$. Поэтому последнюю можно найти как решение уравнения

$$\frac{\partial p_{tt_0}(x, x_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[K_1(x,t)p_{tt_0}(x, x_0)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2(x, t)p_{tt_0}(x, x_0)] \qquad (4.36)$$

с начальным условием

$$p_{t_0t_0}(x, x_0)=\delta(x-x_0). \qquad (4.37)$$

Вероятность перехода $p_{tt_0}(x, x_0)$, как функция от $x_0$ и $t_0$, удовлетворяет другому дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial p_{tt_0}(x, x_0)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_{tt_0}(x, x_0)}{\partial x_0}K_1(x_0) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_{tt_0}(x, x_0)}{\partial x_0^2}K_2(x_0). \qquad (4.38)$$

Это уравнение, которое является сопряженным уравнению (36), называется уравнением Колмогорова.

Для стационарного случайного процесса, когда $K_1(x)$, $K_2(x)$ не зависят от $t$, вероятность перехода $p_{t+\tau, t} = p_\tau$ зависит лишь от $\tau$, а не от $t$. При этом $\frac{\partial p_{tt_0}}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_{tt_0}}{\partial t} = -\frac{\partial p_\tau}{\partial \tau}$ и уравнение Колмогорова (38) даст в дополнение к (36) второе выражение для производной $\frac{\partial p_\tau}{\partial \tau}$:

$$\frac{\partial p_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial p_\tau(x, x_0)}{\partial x_0} K_1(x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_\tau(x, x_0)}{\partial x_0^2} K_2(x_0). \quad (4.39)$$

Перейдем к граничным условиям, которые должны приниматься во внимание при решении уравнения Фоккера — Планка (33) или (36). Когда функция $x(t)$ может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $\infty$, уравнение Фоккера — Планка справедливо на всей бесконечной прямой $x$. В качестве граничных условий при этом следует брать условия на $\pm\infty$.

Интегрируя (35) по $x$ от $-\infty$ до $\infty$ и учитывая, что условие нормировки $\int w(\dot{x})dx = 1$ выполняется тождественно при всех $t$, нетрудно получить обязательное условие

$$G(-\infty, t) = G(\infty, t). \quad (4.40)$$

Однако, помимо этого, обычно выполняются более сильные условия

$$G(-\infty, t) = G(\infty, t) = 0, \quad (4.41)$$

а также

$$w(-\infty, t) = w(\infty, t) = 0. \quad (4.42)$$

Равенства (41) говорят о том, что изображающие точки не могут появляться из бесконечности или уходить в бесконечность.

В тех случаях, когда функция $x(t)$ может принимать лишь ограниченные значения из некоторой области

$$x_1 < x < x_2, \quad (4.43)$$

уравнение Фоккера — Планка рассматривается лишь в этой области, а граничные условия имеют вид

$$G(x_1, t) = 0; \quad G(x_2, t) = 0. \quad (4.44)$$

Последние означают, что отсутствует поток изображающих точек через границу, т. е. каждая случайная траектория не может войти в рассматриваемую область через границу, а также закончиться при достижении границы.

Разумеется, в зависимости от конкретной задачи могут иметь место и другие граничные условия. Так, в § 18 будет рассмотрен случай, когда в качестве граничного условия выступает условие периодичности $w(x + 2\pi, t) = w(x, t)$. Иначе ставится вопрос о граничных условиях в задачах, связанных с достижением границ, о которых будет речь ниже.

### 4. Решение уравнения Фоккера—Планка

Выбранные начальные и граничные условия однозначно определяют плотность распределения $w(x, t)$ как решение уравнения Фоккера — Планка. В том случае, когда коэффициенты $K_1(x)$, $K_2(x)$ не зависят от времени, распределение $w(x, t)$ с течением времени обычно стремится к стационарному распределению $w_{ст}(x)$, которое не зависит от начального распределения $w(x, t_0)$. Стационарное распределение уже не меняется со временем:

$$\dot{w}_{ст}(x) = 0. \tag{4.45}$$

Учитывая исчезновение временной производной $w_{ст}$ в (35), получаем, что поток вероятности

$$G_{ст}(x) = G_{ст} = \text{const} \tag{4.46}$$

является постоянным как по сечению, так и по времени. При фиксированном значении $G_{ст}$ равенство (46) согласно (34) есть линейное дифференциальное уравнение относительно $w_{ст}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}[K_2(x)\, w_{ст}(x)] - 2K_1(x)\, w_{ст}(x) = -2G_{ст}. \tag{4.47}$$

Общее решение этого уравнения может быть получено обычными методами. Если обозначить $K_2(x) w_{ст}(x) = v$, то указанное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{K_1}{K_2} v = -2G_{ст}.$$

Умножая его на $\exp\left[-2\int\limits_{x_1}^{x}\frac{K_1}{K_2}\,dy\right]$ и интегрируя по $x$, находим его решение

$$v(x)=-2G_{\text{ст}}\int\limits_{x_1}^{x}\exp\left[2\int\limits_{x'}^{x}\frac{K_1(y)}{K_2(y)}\,dy\right]dx'+$$

$$+C\exp\left[2\int\limits_{x_1}^{x}\frac{K_1}{K_2}\,dy\right],$$

следовательно,

$$w_{\text{ст}}(x)=\frac{C}{K_2(x)}\exp\left[2\int\limits_{x_1}^{x}\frac{K_1}{K_2}\,dy\right]-$$

$$-\frac{2G_{\text{ст}}}{K_2(x)}\int\limits_{x_1}^{x}\exp\left\{2\int\limits_{x'}^{x}\frac{K_1}{K_2}\,dy\right\}dx'. \qquad (4.48)$$

Здесь $C$ — произвольная постоянная интегрирования. Предел интегрирования $x_1$ также произволен. Однако в решении (48) в сущности имеется лишь одна произвольная постоянная (не считая $G_{\text{ст}}$), поскольку изменение $x_1$ эквивалентно изменению $C$. Выбор постоянной $C$ (или, что то же самое, $x_1$) определяется из условия нормировки. Величину же потока $G_{\text{ст}}$ следует находить из граничных условий. Если в качестве таковых берутся условия (41) или (44), то выражение (48) упрощается

$$w_{\text{ст}}(x)=\frac{C}{K_2(x)}\exp\left[2\int\limits_{x_1}^{x}\frac{K_1(y)}{K_2(y)}\,dy\right]. \qquad (4.49)$$

Итак, зная функции $K_1(x)$, $K_2(x)$, можно непосредственно написать квадратуру стационарного распределения. Это показывает эффективность стохастических методов, основанных на использовании уравнения Фоккера — Планка. К сожалению, исследование переходных процессов, связанное с вычислением вероятности перехода путем решения нестационарного уравнения, является значительно более трудной задачей. В некоторых частных

случаях, однако, задача упрощается, например, когда $K_2(x)$ является постоянной, а $K_1(x) = a + bx$ — линейной функцией от $x$. В этом случае процесс является гауссовым и может быть исследован, кроме того, на основе теории гауссовых процессов.

В некоторых случаях может оказаться полезным следующий метод решения нестационарного уравнения Фоккера—Планка. Будем искать решение $w(x, t)$ в форме $X(x)T(t)$ (метод разделения переменных). Поделив обе части уравнения (33) на $w = X(x)T(t)$, будем иметь

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x}[K_1(x)X(x)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2(x)X(x)] \right\} X^{-1}(x) = -\lambda, \qquad (4.50)$$

где $\lambda$ — постоянная. Полученное уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2(x)X(x)] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}[K_1(x)X(x)] + \lambda X(x) = 0 \qquad (4.51)$$

при определенных граничных условиях (обычно нулевых), соответствующих данной задаче, имеет своим решением последовательность собственных функций $X_0(x)$, $X_1(x)$, $X_2(x)$, ... Они соответствуют собственным значениям $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, .... Проинтегрировав (51) по $x$, нетрудно получить

$$\lambda_m \int X_m(x)\,dx = 0, \qquad (4.52)$$

если разность потоков $G[X_m] = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[K_2X_m] + K_1X_m$ через границы исчезает. Отсюда видно, что или $\lambda_m = 0$ или $\int X_m(x)\,dx = 0$. Нулевое значение $\lambda = 0$, действительно, является собственным значением. При этом уравнение (51) совпадает со стационарным уравнением, так что собственная функция $X_0$, соответствующая $\lambda_0 = 0$, есть не что иное, как найденное раньше стационарное распределение (48) или (49):

$$X_0(x) = w_{ст}(x). \qquad (4.53)$$

Другие собственные функции $X_m$ удовлетворяют условию

$$\int X_m(x)\,dx = 0. \tag{4.54}$$

При помощи собственных функций решение уравнения (33) записывается в виде

$$w(x, t) = T_0 X_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{-\lambda_m (t-t_0)} X_m(x), \tag{4.55}$$

где коэффициенты $T_m$ выбираются в соответствии с начальными условиями. Для их вычисления удобно использовать соотношения ортогональности собственных функций:

$$\int X_m(x)\, X_n(x)\, \frac{dx}{w_{ст}(x)} = \delta_{mn}, \tag{4.56}$$

соответствующих несовпадающим собственным значениям $\lambda_m \neq \lambda_n$ при $m \neq n$.

Для доказательства соотношений ортогональности выпишем уравнение (51) для различных собственных функций

$$\frac{\partial}{\partial x} G[X_m] = \lambda_m X_m; \quad \frac{\partial}{\partial x} G[X_n] = \lambda_n X_n,$$

$$\left(G[X] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}[K_2 \lambda] + K_1 X\right).$$

Умножим первое уравнение на $\frac{X_n}{w_{ст}}$, второе на $\frac{X_m}{w_{ст}}$ и проинтегрируем по $x$. При этом будем иметь

$$\int X_n \frac{\partial}{\partial x} G[X_m] \frac{dx}{w_{ст}} = \lambda_m \int X_n X_m \frac{dx}{w_{ст}}, \tag{4.57}$$

$$\int X_m \frac{\partial}{\partial x} G[X_n] \frac{dx}{w_{ст}} = \lambda_n \int X_m X_n \frac{dx}{w_{ст}}. \tag{4.58}$$

Докажем, что левые части равенств (57) и (58) равны между собой. Рассмотрим интеграл

$$I = \int g \frac{\partial}{\partial x} G[w_{ст} f]\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int g \frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2 w_{ст} f]\,dx + \int g \frac{\partial}{\partial x}[K_1 w_{ст} f].$$

Его можно записать в виде

$$I = -\frac{1}{2}\int gK_2 w_{ст}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx - \int g\frac{\partial}{\partial x}[K_2 w_{ст}]\frac{\partial f}{\partial x}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int gf\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2 w_{ст}]\,dx + \int gK_1 w_{ст}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx +$$

$$+\int gf\frac{\partial}{\partial x}[K_1 w_{ст}]\,dx.$$

Третий и пятый члены выпадают вследствие того, что стационарное распределение $w_{ст}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial G[w_{ст}]}{\partial x} = 0$. Из (47) видно, что при условии

$$G[w_{ст}] = 0 \tag{4.59}$$

второй член равен $-2\int gK_1 w_{ст}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx$ и его можно объединить с четвертым членом. Поэтому

$$I = -\frac{1}{2}\int gK_2 w_{ст}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx - \int gK_1 w_{ст}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получаем

$$I = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2 w_{ст} g]\,f\,dx + \int\frac{\partial}{\partial x}[K_1 w_{ст} g]\,f\,dx =$$

$$= \int\frac{\partial}{\partial x}G[w_{ст} g]\,f\,dx$$

при условии, что

$$g\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}f = 0$$

или

$$gG[w_{ст} f] - G[w_{ст} g]\,f = 0. \tag{4.60}$$

на границе рассматриваемой области.

Таким образом, положив $g = \frac{X_n}{w_{ст}}$, $f = \frac{X_m}{w_{ст}}$, мы убеждаемся в справедливости равенства

$$\int X_n\frac{\partial}{\partial x}G[X_m]\frac{dx}{w_{ст}} = \int X_m\frac{\partial}{\partial x}G[X_n]\frac{dx}{w_{ст}}. \tag{4.61}$$

Для этого достаточно условия (59) и хотя бы одного из граничных условий:

$$G[X] = 0 \quad \text{или} \quad \frac{X}{w_{ст}} = 0 \text{ на границе.}$$

Учитывая (57), (58) из (61), имеем

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int X_m X_n \frac{dx}{w_{ст}} = 0,$$

откуда следует ортогональность (с весом $1/w_{ст}$) собственных функций, соответствующих различным собственным значениям. Каждая из собственных функций нормируется так, чтобы интеграл $\int X_m^2 \frac{dx}{w_{ст}}$ равнялся единице. Приведенное рассмотрение доказывает соотношение (56) в случае, когда существует стационарное распределение, удовлетворяющее равенству (59), и собственные функции имеют не совпадающие собственные значения. В большинстве практических случаев система функций $X_m(x)$ является полной.

Пользуясь соотношениями (56), выразим $T_m$ через начальное распределение $w(x, t_0)$. Полагая $t = t_0$ в (55), умножая обе части равенства на $\frac{X_m}{w_{ст}}$, интегрируя по $x$ и учитывая (56), получаем

$$T_m = \int w(x, t_0) X_m(x) \frac{dx}{w_{ст}(x)}. \qquad (4.62)$$

Если начальное распределение дельта-образно:

$$w(x, t_0) = \delta(x - x_0),$$

то распределение $w(x, t)$ совпадает с вероятностью перехода $p_{tt_0}(x, x_0)$. Согласно (55), (62) в этом случае

$$p_{tt_0}(x, x_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X_m(x) X_m(x_0)}{w_{ст}(x_0)} e^{-\lambda_m (t - t_0)}. \qquad (4.63)$$

При помощи вероятности перехода (63) и начального распределения можно записать плотности распределения различной кратности. Особенно короткое выражение получается для двумерной плотности распределения $w_\tau(x, x_0) = p_{t, t-\tau}(x, x_0) w_{ст}(x_0)$ при стационарном начальном распределении

$$w_\tau(x, x_0) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(x) X_m(x_0) e^{-\lambda_m |\tau|}. \qquad (4.64)$$

Отсюда, в частности, можно получить выражение для корреляционной функции и спектральной плотности случайного процесса $y(t) = F(x(t))$:

$$k_y(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 e^{-\lambda_m |\tau|}, \tag{4.65}$$

$$S[y, \omega] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\lambda_m h_m^2}{\omega^2 + \lambda_m^2}, \tag{4.66}$$

где

$$h_m = \int F(x) X_m(x)\, dx. \tag{4.67}$$

Примеры.

1) Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\dot{w} = \frac{\partial}{\partial x}(\beta x w) + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Уравнение (51) при этом принимает вид

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(xX) + \frac{\lambda}{\beta} X = 0, \quad \left(\sigma^2 = \frac{K}{2\beta}\right). \tag{4.68}$$

Решение должно обращаться в нуль при $x \to \pm\infty$. Пользуясь формулами 7.355.3 и 7.351 из справочника [11], получаем, что указанному уравнению соответствуют собственные значения $\frac{\lambda_n}{\beta} = n$, $(n = 0, 1, \ldots)$, и собственные функции, пропорциональные

$$F^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

где

$$F^{(n+1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Подбирая соответствующим образом нормировочные постоянные, имеем

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sigma} F^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right); \quad \lambda_n = n\beta. \tag{4.69}$$

Разложение (64) при этом совпадает с разложением (3.14), где $R = e^{-\beta|\tau|}$.

Если рассматривать уравнение (68) не при всех значениях $x$, а лишь при $x > 0$, присоединяя граничное усло-

вие $G[w]_{x=0}=0$, то из указанных выше собственных функций надо будет удержать лишь функции с четными номерами. В этом случае

$$X_m(x)=\frac{2}{\sqrt{(2m)!}}\frac{1}{\sigma}F^{(2m+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right);\quad \lambda_m=2m\beta \qquad (4.70)$$

и разложение (64) имеет вид

$$w(x,\ x_0)=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}F^{(2m+1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\times$$

$$\times F^{(2m+1)}\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)e^{-2m\beta|\tau|}. \qquad (4.71)$$

2) Рассмотрим уравнение

$$\dot{w}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\beta x-\frac{K}{2x}\right)w\right]+\frac{K}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad (4.72)$$

описывающее релеевский флюктуационный процесс.

Уравнение для собственных функций

$$\sigma^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}(xX)-\sigma^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{x}\right)+\frac{\lambda}{\beta}X=0,\quad\left(\sigma^2=\frac{K}{2\beta}\right)$$

после замены переменной $z=\frac{x^2}{2\sigma^2}$ переходит в уравнение

$$\frac{d^2X}{dz^2}+\frac{dX}{dz}+\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\beta}}{z}+\frac{1}{4z^2}\right)X=0.$$

В качестве граничных условий нужно брать нулевые условия при $x=0$ и $x=\infty$.

Согласно формулам 7.302 и 7.142.1 собственные функции указанного уравнения, соответствующие собственным значениям $\lambda_n=2n\beta$, пропорциональны

$$z^{\frac{1}{2}}e^{-z}L_n(z),$$

где

$$L_n(z)=e^z\frac{d^n}{dz^n}(z^ne^{-z})$$

— полиномы Лагерра. Следовательно,

$$X_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}L_n\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (4.73)$$

и разложение (67) имеет вид

$$w_\tau(x,\ x_0) = \frac{xx_0}{\sigma^4}\, e^{-\frac{x^2+x_0^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} L_n\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \times$$

$$\times L_n\left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right) e^{-2n\beta|\tau|}. \qquad (4.74)$$

3) Возьмем уравнение несколько более общего вида

$$\dot{w} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\beta x - \frac{\gamma}{x}\right) w\right] + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (4.75)$$

с нулевыми граничными условиями при $x = 0$ и $x = \infty$. Соответствующее ему уравнение для $X$

$$\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{\partial}{\partial x}(xX) - \sigma^2 \frac{2\gamma}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}X\right) + \frac{\lambda}{\beta}X = 0$$

заменой переменных $z = \frac{x^2}{2\sigma^2}$, $u = z^{-\mu}X$ преобразуется к виду

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left(\frac{\frac{1}{2} + \mu + \frac{\lambda}{2\beta}}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right) u = 0,$$

$$\left(4\mu = \frac{2\gamma}{K} - 1\right).$$

Используя формулы (7.302), (7.142.1) указанного справочника, находим собственные значения $\lambda_n = 2n\beta$ и собственные функции $u_n(z)$, пропорциональные

$$z^{2\mu+\frac{1}{2}} e^{-z} L_n^{(2\mu)}(z).$$

Переходя к старым переменным и нормируя собственные функции, получаем

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\,\Gamma(n+2\mu+1)\,\Gamma(2\mu+1)}} \times$$

$$\times \frac{x^{4\mu+1}}{2^{2\mu}\sigma^{4\mu+2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} L_n^{(2\mu)}\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (4.76)$$

Согласно (67) имеем разложение

$$w(x, x_0) = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{x\,x_0}{2\sigma^2}\right)^{4\mu+1} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{x^2+x_0^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2n\beta|\tau|}}{n!\,\Gamma(n+2\mu+1)\,\Gamma(2\mu+1)} \times$$

$$\times\, L_n^{(2\mu)}\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) L_n^{(2\mu)}\left(\frac{x_0^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (4.77)$$

которое является обобщением разложений (71) и (74).

### 5. Многомерное уравнение Фоккера—Планка

Содержание первого раздела настоящего параграфа непосредственно обобщается на многомерный процесс Маркова, составленный из нескольких случайных функций $x_1(t), \ldots, x_m(t)$. Такой процесс описывается вероятностью перехода $p_{tt'}(x_1(t), \ldots, x_m(t); x_1(t'), \ldots, x_m(t'))$, через которую могут быть записаны многомерные распределения.

Вероятность перехода есть условное распределение

$$p_{tt'}(x_1, \ldots, x_m; x_1', \ldots, x_m') =$$

$$= \frac{w(x_1, \ldots, x_m; x_1', \ldots, x_m')}{w(x_1', \ldots, x_m')} \qquad (4.78)$$

случайных значений $x_1(t) = x_1, \ldots, x_m(t) = x_m$ в общий момент времени $t$ при фиксированных значениях $x_1(t') = x_1', \ldots, x_m(t') = x_m'$ в предыдущий момент времени $t' < t$. Одновременная плотность распределения $w(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ в случае непрерывного марковского процесса удовлетворяет многомерному уравнению Фоккера—Планка

$$\dot{w}(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[K_\alpha(x_1, \ldots, x_m)\, w(x_1, \ldots, x_m)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left[K_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_m)\, w(x_1, \ldots, x_m)\right], \qquad (4.79)$$

где коэффициенты интенсивности $K_\alpha$, $K_{\alpha\beta}$ определяются формулами

$$K_\alpha = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle x_{\alpha\tau} - x_\alpha \rangle;$$

$$K_{\alpha\beta} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle (x_{\alpha\tau} - x_\alpha)(x_{\beta\tau} - x_\beta) \rangle \qquad (4.80)$$

по аналогии с (20).

В частном случае, который может быть назван случаем флюктуационной изотропности, матрица $\| K_{\alpha\beta} \|$ имеет вид

$$K_{\alpha\beta} = K\delta_{\alpha\beta}. \qquad (4.81)$$

При этом уравнение Фоккера–Планка (79) можно записать в виде

$$\dot{w} = -\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\alpha}. \qquad (4.82)$$

Здесь

$$G_\alpha = K_\alpha(x)\, w(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [K(x)\, w(x)] \qquad (4.83)$$

($x$ означает совокупность координат $x_1, \ldots, x_m$) суть составляющие вектора потока в $m$-мерном пространстве. Как можно видеть из (82), стационарное распределение вероятности $w_{ст}$ удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (4.84)$$

Теперь при $m > 1$ поток вероятности $G$ не обязательно обращается в нуль внутри области рассмотрения $R$, даже если на границе ее заданы нулевые значения потока:

$$G_\alpha(x) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m), \qquad (4.85)$$

так как могут иметь место вихревые перемещения вероятности. Нулевой поток внутри всей области

$$K_\alpha(x)\, w_{ст}(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [K(x)\, w_{ст}(x)] = 0 \qquad (4.86)$$

будет иметь место лишь в частном случае, который мы будем называть потенциальным случаем. Положив в (86)

$$K(x)\, w_{ст}(x) = e^{-U(x)}, \qquad (4.87)$$

получим

$$\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = -2\frac{K_\alpha}{K}, \qquad (4.88)$$

Отсюда видно, что в потенциальном случае составляющие $\frac{K_\alpha(x)}{K(x)}$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ образуют компоненты градиента некоторой функции и, следовательно, удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{K_\beta}{K}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{K_\alpha}{K}\right). \qquad (4.89)$$

При выполнении последних функцию $U$ с точностью до аддитивной произвольной постоянной можно определить контурным интегралом

$$U(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= -\int_{a_1, \ldots, a_m}^{x_1, \ldots, x_m} \frac{2}{K}(K_1 dx_1 + \ldots + K_m dx_m) + C, \qquad (4.90)$$

где $C$, $a_1, \ldots, a_m$ произвольны. После этого искомая стационарная плотность распределения выражается формулой

$$w_{\text{ст}}(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{K(x_1, \ldots, x_m)} e^{-U(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad (4.91)$$

причем аддитивная постоянная в (90) определяется из условия нормировки

$$\int \ldots \int w_{\text{ст}} dx, \ldots, dx_m = 1.$$

Полученное решение (90), (91) является очевидным многомерным обобщением формулы (49). Если выполняются условия потенциальности (89), то всегда можно написать стационарное распределение (91), которое удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка и нулевым граничным условиям для потока (85). При других граничных условиях или при нарушении условий потенциальности (89) задача нахождения стационарного распределения сильно усложняется.

При коэффициенте $K$, не зависящем от $x_1, \ldots, x_m$, условия (89) сводятся к условиям потенциальности регу-

лярного смещения, или, по другой терминологии, регулярной силы:

$$\frac{\partial K_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial K_\beta}{\partial x_\alpha}. \qquad (4.92)$$

Сказанное выше обобщается также на тот случай, когда матрица $\|K_{\alpha\beta}\|$ не кратна единичной (81), а произвольна.

Отсутствие потока вероятности теперь выражается равенствами

$$G_\alpha = K_\alpha w_{\text{ст}} - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\beta}[K_{\alpha\beta} w_{\text{ст}}] = 0. \qquad (4.93)$$

Полагая $w_{\text{ст}} = e^{-U}$, отсюда находим

$$\sum_{\beta=1}^{m} K_{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x_\beta} = \sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - 2K_\alpha. \qquad (4.94)$$

Разрешая эти уравнения относительно производных $\frac{\partial U}{\partial x_\beta}$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_\gamma} = \sum_\alpha\sum_\beta A_{\gamma\alpha}\frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - 2\sum_\alpha A_{\gamma\alpha}K_\alpha, \qquad (4.95)$$

где $A_{\gamma\alpha}$ — матрица, обратная $K_{\alpha\beta}$ |

$$\sum_\alpha A_{\gamma\alpha}K_{\alpha\beta} = \delta_{\gamma\beta}.$$

Из (95) следует, что условие потенциальности теперь имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\delta}\sum_\alpha A_{\gamma\alpha}\left(\sum_\beta \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - 2K_\alpha\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\sum_\alpha A_{\delta\alpha}\left(\sum \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - 2K_\alpha\right) \qquad (4.96)$$

$$(\gamma, \delta = 1, \ldots, m).$$

При выполнении этого условия и при нулевом потоке через границу оправдывается предположение о полном отсутствии по-

тока вероятности, и можно находить плотность распределения путем вычисления потенциальной функции $U$ по ее градиенту (95). При этом нужно, чтобы матрица $\|K_{\alpha\beta}\|$ была невырожденной и имела обратную матрицу

Независимо от условий потенциальности, решение уравнения Фоккера Планка упрощается также в том случае, когда $K_1, \ldots, K_m$ суть линейные функции от аргументов $x_1, \ldots, x_m$, а функции $K_{\alpha\beta}$ не зависят от них.

### 6. Задачи, связанные с достижением границ

Аппарат процессов Маркова позволяет получить решение ряда задач, касающихся переходных процессов. К таким задачам относятся задачи, связанные с достижением границ. Остановимся на одномерном случае. Пусть областью рассмотрения будет отрезок $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Предположим, что задано начальное распределение

$$w(x, t_0) = w_0(x); \quad \left(\int_{x_1}^{x_2} w_0(x)\, dx = 1\right) \tag{4.97}$$

для значений $x(t_0)$ марковского процесса $x(t)$. Будем интересоваться временем $t_{зос}$, когда функция $x(t)$ в первый раз достигает граничного значения $x = x_1$ или $x = x_2$. Для каждой реализации первое достижение происходит в разное время, поэтому время «жизни»

$$t_{зос} - t_0 = \tau_{зос} \tag{4.98}$$

является случайной величиной. Поставим своей целью вычислить хотя бы среднее «время жизни» $\langle \tau_{зос} \rangle$. При этом мы ограничимся случаем, когда коэффициенты $K_1$, $K_2$ в уравнении Фоккера—Планка (33) не зависят от времени.

Условимся исключать из рассмотрения реализации случайного процесса $x(t)$, как только они в первый раз достигнут границы $x_1$ или $x_2$. Остающиеся реализации мы будем описывать плотностью распределения $w(x, t)$, задающей вероятность

$$\Delta P = w(x, t)\, \Delta x + \Delta x^2 \ldots \tag{4.99}$$

того, что в момент $t$ на отрезок от $x$ до $x + \Delta x$ попадает значение $x(t)$ кривой, ни разу не достигнувшей границы в течение всего времени от $t_0$ до $t$.

Суммирование таких вероятностей даст вероятность

$$W(t) = \int_{x_1}^{x_2} w(x,\ t)\, dx \qquad (4.100)$$

того, что функция ни разу не достигнет границы за время от $t_0$ до $t$.

В первое время, пока еще ни одна реализация не успела коснуться границы, плотность вероятности $w(x, t)$ в (99) совпадает с начальной плотностью (97), так что

$$W(t_0) = 1. \qquad (4.101)$$

В последующие моменты времени условие нормировки нарушается, так как все больше и больше реализаций выпадает из рассмотрения вследствие прикосновения к границе. Рано или поздно все траектории коснутся границы и мы будем иметь

$$W(\infty) = 0. \qquad (4.102)$$

Внутри области рассмотрения плотность вероятности $w(x, t)$ изменяется в соответствии с тем же самым уравнением Фоккера—Планка (33) или уравнением сохранения (35), ибо изображающие точки не могут выпасть из рассмотрения, находясь внутри области. Они выпадают лишь при достижении границы и на границе имеется отличный от нуля поток вероятности — поток точек, «прилипающих» к границе. Граничные условия, следовательно, должны быть подвергнуты кардинальному изменению.

Как отмечалось выше, производная $dx(t)/dt$ марковского случайного процесса имеет бесконечную дисперсию. Это означает, что мгновенная скорость перемещения изображающей точки бесконечна. Конечность смещения за конечное время объясняется тем, что скорость беспрестанно с неограниченной частотой меняет знак и движение происходит вперед и назад. Если случайная функция имеет значение $x$ в момент $t$, то в самом ближайшем прошлом она заведомо имела значения как больше $x$, так и меньше $x$. Поэтому вблизи границы в момент $t > t_0$ практически отсутствуют траектории, еще ни разу не коснувшиеся границы. Но плотность вероятности $w(x, t)$

описывает именно такие траектории, следовательно, она обращается в нуль на границе

$$w(x_1, t) = w(x_2, t) = 0 \quad (t > t_0). \tag{4.103}$$

Подобные нулевые граничные условия типичны для задач, связанных с первым достижением границы.

Начальное и граничное условия (97), (103) однозначно определяют $w(x, t)$ как решение уравнения Фоккера—Планка (33). После вычисления $w(x, t)$ можно найти вероятность

$$W(t_0) - W(t) = 1 - W(t) \tag{4.104}$$

того, что первое достижение границы произойдет в течение времени от $t_0$ до $t$. Дифференцируя это выражение, находим плотность вероятности

$$w(\tau_{\text{дос}}) = -\frac{dW}{dt}(t_0 + \tau_{\text{дос}}) \tag{4.105}$$

для времени (98). Последняя позволяет найти среднее время «жизни»

$$\langle \tau_{\text{дос}} \rangle = -\int_{\tau_{\text{дос}}=0}^{\infty} \tau_{\text{дос}} dW(t_0 + \tau_{\text{дос}}) = \int_{t_0}^{\infty} W(t)\, dt. \tag{4.106}$$

Здесь произведено интегрирование по частям и учтено (102).

Если в качестве начального условия выбрать фиксированное значение координаты

$$w_0(x) = \delta(x - x_0),$$

то $w(x, t)$ будет совпадать с вероятностью перехода $p_{tt_0}(x, x_0)$, которая удовлетворяет уравнению (36) с граничным условием

$$p_{tt_0}(x, x_0) = 0 \quad \text{при } x = x_1, x_2. \tag{4.107}$$

Кроме того, это равенство выполняется при $x_0 = x_1, x_2$, так как в этом случае достижение границы произойдет в первый же момент и все реализации выпадут. Вероятность перехода также удовлетворяет уравнению (39).

Рассмотрим среднее время достижения

$$M(x_0) = \langle \tau_{\text{дос}} \rangle = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x_0)\, dt, \qquad (4.108)$$

где

$$W(t, x_0) = \int_{x_1}^{x_2} p_{tt_0}(x, x_0)\, dx, \qquad (4.109)$$

как функцию от начального значения $x_0$.

Чтобы найти уравнение, которому удовлетворяет $M(x_0)$, проинтегрируем уравнение (39) по $x$ от $x_1$ до $x_2$. Вследствие (109) это даст

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K_1(x_0)\frac{\partial W}{\partial x_0} + \frac{1}{2}K_2(x_0)\frac{\partial^2 W}{\partial x_0^2}. \qquad (4.110)$$

Проинтегрируем теперь последнее уравнение по $t$ от $t_0$ до $\infty$ и, учитывая (108), (101), (102), будем иметь

$$-1 = K_1(x_0)\frac{dM}{dx_0} + \frac{1}{2}K_2(x_0)\frac{d^2M}{dx_0^2}. \qquad (4.111)$$

Если исходная точка $x_0$ находится вблизи границы, то первое достижение границы произойдет немедленно и среднее время достижения будет равно нулю. Это дает следующие граничные условия для уравнения (111):

$$M(x_1) = M(x_2) = 0. \qquad (4.112)$$

Решение уравнения (111) уже может быть записано в общем виде. Это позволяет находить среднее время достижения (106) при произвольном начальном распределении (97), минуя решение нестационарного уравнения Фоккера—Планка (33). В самом деле, подставляя выражение

$$w(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} p_{tt_0}(x, x_0)\, w_0(x_0)\, dx_0$$

в (100) и (106), мы получим после использования (108), (109),

$$\langle \tau_{\text{дос}} \rangle = \int_{x_1}^{x_2} M(x_0)\, w_0(x_0)\, dx_0. \qquad (4.113)$$

Если для примера взять $K_1 = 0$, $K_2 = \text{const}$, то решение уравнения (111) будет

$$M(x_0) = -\frac{2}{K_2} x_0^2 + C_1 x_0 + C_2$$

или, после использования граничных условий (112),

$$M(x_0) = \frac{2}{K_2}(x_0 - x_1)(x_2 - x_0). \qquad (4.114)$$

В более общем случае, конечно, результат более сложен, но всегда может быть выражен через несколько интегралов. Другой подход к задачам, связанным с достижением границ, излагается в § 10 (разд 3) и § 11

## 7. Замена реального случайного процесса процессом Маркова. Частный случай

Всякая реальная случайная функция, встречающаяся в радиофизике, в отличие от точного марковского случайного процесса удовлетворяет определенным условиям плавности изменения, дифференцируемости и т. п. Тем не менее, в некоторых случаях ее можно трактовать как процесс без последействия. Рассмотрим, при каких условиях и на каком основании это можно делать.

Пусть случайный процесс $x(t)$ возникает в результате воздействия случайной функции $\xi(t)$ на систему, поведение которой можно описать уравнением первого порядка

$$\dot{x} = \varepsilon F(x, \xi(t)), \qquad (4.115)$$

где $F(x, \xi)$ — известная функция аргументов $x$, $\xi$, а также времени; $\varepsilon$ — малый параметр. Функцию $\xi(t)$, описывающую внешние флюктуационные воздействия, мы будем предполагать стационарной и имеющей конечное время корреляции $\tau_{кор}$.

Уравнение (115) будем называть флюктуационным уравнением.

Начнем с того частного случая, когда функция $F(x, \xi)$ явно не зависит от времени и от $x$. Поскольку $F(\xi, (t))$ можно взять за новую случайную функцию, то без дальнейшего ограничения общности можно полагать

$$\dot{x} = \varepsilon \xi(t). \qquad (4.116)$$

Взяв в качестве начального момента времени $t=0$, запишем решение последнего уравнения так

$$x(t) = x(0) + \varepsilon \int_0^t \xi(t')\, dt'. \qquad (4.117)$$

Если начальное значение $x(0) = x_0$ не случайно, то кумулянты $k_s$ последнего выражения получаются интегрированием корреляционных функций $k_s(t_1, \ldots, t_s)_\xi$ процесса $\xi(t)$ по формуле

$$k_s = \varepsilon^s \int_0^t \ldots \int_0^t k_s(t_1, \ldots, t_s)_\xi dt_1 \ldots dt_s, \quad (s > 1). \qquad (4.118)$$

Это позволяет найти характеристическую функцию

$$\dot{\Theta}(u, t) = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} k_s\right\}$$

случайного приращения $x(t) - x_0$. Дифференцируя ее по времени, получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{\Theta} = \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\dot{k}_s}{s!} (iu)^s\right] \Theta. \qquad (4.119)$$

Найдем соответствующее ему дифференциальное уравнение для плотности распределения

$$w(x - x_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x_0)} \Theta(u, t)\, du. \qquad (4.120)$$

Взяв производную по времени от обеих частей последнего равенства и подставив под знак интеграла в правую часть выражение (119), будем иметь

$$\dot{w} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\dot{k}_s}{s!} \frac{1}{2\pi} \int (iu)^s e^{-iu(x-x_0)} \Theta(u, t)\, du. \qquad (4.121)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int (iu)^s e^{-iu(x-x_0)} \Theta du =$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x_0)} \Theta du = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s w,$$

находим

$$\dot{w} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \dot{k}_s \frac{\partial^s w}{\partial x^s}. \qquad (4.122)$$

Мы получили для немарковского процесса стохастическое уравнение типа (19). Даже для стационарного флюктуационного процесса коэффициенты $\dot{k}$ зависят от времени. Однако эта зависимость существенно проявляется лишь для временных интервалов порядка времени корреляции $t \sim \tau_{кор}$; при временах $t \gg \tau_{кор}$ коэффициенты практически не отличаются от постоянных. В самом деле, из (118) и (2.2) имеем

$$\dot{k}_s = \varepsilon^s s \int_0^t \dots \int_0^t k_s(t, t_1, \dots, t_{s-1})\, dt_1, \dots, dt_{s-1} =$$

$$= \varepsilon^s s \int_{-t}^{0} \dots \int_{-t}^{0} k_s'(\tau_1, \dots, \tau_{s-1})\, d\tau_1, \dots, d\tau_{s-1}. \qquad (4.123)$$

Если предположить, что интегралы

$$\int_{-\infty}^{0} \dots \int_{-\infty}^{0} k_s'(\tau_1, \dots, \tau_{s-1})\, d\tau_1 \dots d\tau_{s-1} \quad (s > 1) \qquad (4.124)$$

являются абсолютно сходящимися, то отсюда вытекает

$$\dot{k}_s \to \varepsilon^s K_s \quad \text{при} \quad t \to \infty, \qquad (4.125)$$

где

$$K_s = s \int_{-\infty}^{0} \dots \int_{-\infty}^{0} k_s'(\tau_1, \dots, \tau_{s-1})\, d\tau_1, \dots, d\tau_{s-1}, \ (s>1) \qquad (4.126)$$

— коэффициенты интенсивности процесса $\xi(t)$. Можно доказать, что для них справедливы также выражения

$$K_s = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_s'(\tau_1, \dots, \tau_{s-1})\, d\tau_1 \dots d\tau_{s-1} =$$

$$= s! \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{s-2}} k_s'(\tau_1, \dots, \tau_{s-1})\, d\tau_{s-1}. \qquad (4.127)$$

Коэффициент $K_2$ при этом совпадает с (2.8):

$$K_2 = K = 2\int_0^\infty k(\tau)\, d\tau.$$

Итак, для достаточно больших временных интервалов уравнение (122) имеет вид

$$\dot{w} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!}\, \varepsilon^s K_s \frac{\partial^s w}{\partial x^s}. \qquad (4.128)$$

При наличии малого параметра $\varepsilon$ роль высших производных мала, основную роль играют лишь низшие производные. Если отбросить член с $s > 2$, то уравнение (128) перейдет в уравнение Фоккера—Планка.

Справедливость стохастического уравнения для плотности распределения, конечно, еще не означает, что процесс является марковским. Для этого нужно, чтобы многомерное распределение выражалось произведением вероятностей перехода. Вероятность перехода в этом случае записывалась бы через плотность распределения (120):

$$p_\tau(x,\ x_0) = w(x - x_0,\ \tau).$$

Если многомерное распределение распадается на произведение таких функций, то это значит, что случайные приращения за последовательные интервалы времени

$$X_1 = x(t_1) - x(0), \quad X_2 = x(t_2) - x(t_1), \ldots \qquad (4.129)$$
$$(0 < t_1 < t_2 < \ldots)$$

независимы друг от друга. Условие Маркова, следовательно, эквивалентно условию независимости указанных приращений. В реальном же случае, когда время корреляции конечно, между случайными приращениями (129) имеются корреляции. Рассмотрим для примера парные корреляции между приращениями

$$X_1 = x(\tau_1) - x(0) = \varepsilon\int_0^{\tau_1} \xi(t)\, dt,$$

$$X_2 = x(\tau_1 + \tau_2) - x(\tau_1) = \varepsilon\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \xi(t)\, dt, \ldots \qquad (4.130)$$

на соседних интервалах.

Парная корреляция для них определяется формулой

$$K[X_1,\ X_2] = \varepsilon^2 \int_0^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} k(t_2 - t_1)_\xi \, dt_1 dt_2 =$$

$$= \varepsilon^2 \int_{-\tau_1}^{0} \int_0^{\tau_2} k(t_2 - t_1)_\xi \, dt_1 dt_2. \qquad (4.131)$$

При абсолютной сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{0} \int_0^{\infty} k(t_2 - t_1)\, dt_1 dt_2 = \int_0^{\infty} \tau k(\tau)\, d\tau, \qquad (4.132)$$

из (131) имеем

$$K[X_1,\ X_2] = \varepsilon^2 \int_0^{\infty} \tau k(\tau)\, d\tau + D, \qquad (4.133)$$

$$(D \to 0 \text{ при } \tau_1,\ \tau_2 \to \infty).$$

Удобно определить время корреляции формулой

$$\tau_{кор} = \frac{\int_0^{\infty} \tau k(\tau)\, d\tau}{\int_0^{\infty} (\tau)\, d\tau} = \frac{2}{K} \int_0^{\infty} \tau k(\tau)\, d\tau, \qquad (4.134)$$

несколько отличающейся от (2.7), но дающей величину того же порядка. Тогда при достаточно больших $\tau_1$ и $\tau_2$ парная корреляция приближается к постоянной величине

$$K[X_1,\ X_2] = \frac{\varepsilon^2}{2} K\tau_{кор}. \qquad (4.135)$$

Дисперсия случайных приращений при этом будет значительно больше ее:

$$DX_1 = \varepsilon^2 \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} k(t_1 - t_2)\, dt_1 dt_2 =$$

$$= 2\varepsilon^2 \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \tau)\, k(\tau)\, d\tau = \varepsilon^2 K(\tau_1 - \tau_{кор}) + D_1, \qquad (4.136)$$

$$DX_2 = 2\varepsilon^2 \int_0^{\tau_2} (\tau_2 - \tau)\, k(\tau)\, d\tau = \varepsilon^2 K(\tau_2 - \tau_{кор}) + D_2;$$

$$(D_1 \to 0 \text{ при } \tau_1 \to \infty;\ D_2 \to 0 \text{ при } \tau_2 \to \infty).$$

Отсюда следует, что коэффициент корреляции

$$R = \frac{K[X_1, X_2]}{\sigma(X_1)\,\sigma(X_2)} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{кор}}{\sqrt{(\tau_1 - \tau_{кор})(\tau_2 - \tau_{кор})}} \quad (4.137)$$

будет малой величиной при

$$\tau_1 \gg \tau_{кор}, \quad \tau_2 \gg \tau_{кор}. \quad (4.138)$$

Поэтому если рассматривать лишь интервалы, которые по длительности значительно превосходят время корреляции, то парными корреляциями можно пренебречь. То же самое относится и к корреляции высших порядков с той лишь разницей, то в качестве времени корреляции теперь следует брать время

$$\tau_{кор} = \frac{s!}{K_s} \int_0^{\infty} \tau_1 d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{s-2}} k_s'(\tau_1, \ldots, \tau_{s-1})\, d\tau_{s-1}, \quad (4.139)$$

$$(s > 2)$$

которое характеризует быстроту убывания корреляций высших порядков.

Для интервалов времени, сильно превосходящих времена корреляции, приращения (129) можно считать полностью независимыми, а процесс $x(t)$ — процессом Маркова. Это значит, что функцию $\xi(t)$ с корреляционными функциями $k_s(t_1, \ldots, t_s)_\xi$ можно заменить на дельта-коррелированный процесс, который имеет корреляционные функции

$$K_s \delta(t_2 - t_1) \ldots \delta(t_s - t_1) \quad (4.140)$$

с теми же самыми коэффициентами интенсивности

$$K_s = \int \ldots \int k_s(t_1, t_2, \ldots, t_s)_\xi dt_2 \ldots dt_s, \quad (4.141)$$

что и реальный процесс $\xi(t)$.

## 8. Замена реального случайного процесса процессом Маркова. Общий случай

Перейдем к рассмотрению более общего случая, когда на функцию, стоящую в правой части уравнения (115)

$$\dot{x} = \varepsilon F(x, \xi(t), t) \equiv \varepsilon F(x, t) \tag{4.142}$$

не накладывается каких-либо особых ограничений. При этом вывод стохастического дифференциального уравнения для одномерной плотности распределения более сложен. Зафиксируем значение

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.143}$$

в начальный момент времени $t_0$ и рассмотрим приращение

$$x(t) - x_0 = H(x_0) \equiv H(x_0, t, t_0), \tag{4.144}$$

которое теперь существенно зависит от начального значения $x_0$. Функция $H(x_0)$ вычисляется путем решения уравнения (142) с начальным условием (143). Будем ее искать в форме разложения

$$H(x_0) = \varepsilon H_1(x_0) + \varepsilon^2 H_2(x_0) + \ldots \tag{4.145}$$

Подставляя в (142), получаем

$$\varepsilon \dot{H}_1 + \varepsilon^2 \dot{H}_2 + \ldots = \varepsilon F(x_0) + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)[\varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 +$$

$$+ \ldots] + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[\varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots]^2 + \ldots$$

Приравнивая члены одинакового порядка по $\varepsilon$, находим

$$\dot{H}_1(x_0) = F(x_0); \quad \dot{H}_2(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) H_1(x_0),$$

$$\dot{H}_3(x_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) H_2(x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0) H_1^2(x_0), \tag{4.146}$$

. . . . . .

Следовательно,

$$H_1(x_0) = \int_{t_0}^{t} F(x_0,\ t')\,dt';$$

$$H_2(x_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,\ t') \int_{t_0}^{t'} F(x_0,\ t'')\,dt'';\ldots \quad (4.147)$$

После того, как приращение $H(x_0)$ с той или иной точностью выражено через $F$, рассмотрим его статистические характеристики. Характеристическая функция его может быть записана в виде

$$\langle e^{iu(x-x_0)}\rangle = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} \langle H^s(x_0)\rangle. \quad (4.148)$$

Вычислив интеграл обращения, найдем одномерную плотность распределения

$$w(x \mid x_0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x_0)} \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} \langle H^s(x_{,,})\rangle\right] du. \quad (4.149)$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, будем иметь

$$w(x\ \ x_0) = \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \langle H^s(x_0)\rangle\right] \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x_0)} du =$$

$$= \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \langle H^s(x_0)\rangle\right] \delta(x - x_0). \quad (4.150)$$

Последнее разложение, в отличие от (148), носит несколько формальный характер, ввиду того, что сумма производных от дельта-функций не сходится в обычном смысле. Сходимость в обычном смысле достигается при

интегрировании разложения (150) с функциями $f(x_0)$ более или менее широкого класса, при этом имеем

$$\int w(x, x_0) f(x_0)\, dx_0 = f(x) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s [\langle H^s(x)\rangle f(x)].$$

Мы видим, что функция $f(x)$ здесь сначала умножается на $\langle H^s(x)\rangle$, а затем все произведение подвергается дифференцированию. Удобно ввести оператор

$$L = \sum \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \langle H^s(x)\rangle, \qquad (4.151)$$

в котором операции умножения и дифференцирования производятся именно в таком порядке. При помощи его равенство (150) можно записать

$$w = (1 + L)\, \delta(x - x_0). \qquad (4.152)$$

После дифференцирования по времени получаем

$$\dot{w} = \dot{L}\delta(x - x_0). \qquad (4.153)$$

Используя формулу (152), последнее равенство записываем в виде

$$\dot{w} = \dot{L}(1 + L)^{-1} w, \qquad (4.154)$$

где

$$(1 + L)^{-1} = 1 - L + L^2 - L^3 + \ldots \qquad (4.155)$$

— оператор, обратный оператору $1 + L$.

Уравнение (154) есть искомое стохастическое уравнение. Оператор $\dot{L}(1 + L)^{-1}$ в нем задается разложениями (155), (151) и (145). Поскольку $H$ и $L$ имеют порядок $\varepsilon$, все три указанных ряда сходятся как ряды по степеням малого параметра. Подставляя указанные разложения и объединяя члены с одной и той же фиксированной степенью параметра $\varepsilon$, получаем результирующее разложение для $\dot{L}(1 + L)^{-1}$, первые члены которого будут нами

конкретно вычислены. При увеличении временного интервала $t-t_0$ сходимость рядов (145), (151), (155) ухудшается, между тем как сходимость результирующего ряда не ухудшается, и он стремится к некоторому предельному ряду, не зависящему от начального момента $t_0$. Задавшись целью найти те члены результирующего ряда, которые имеют порядок $\varepsilon$ и $\varepsilon^2$, мы будем в промежуточных выкладках удерживать лишь нужные для этого члены. Согласно (155), (151), (145) имеем

$$\dot{L} = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle \dot{H}\rangle + \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \langle \dot{H}H\rangle + \varepsilon^3 \ldots =$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle \varepsilon \dot{H}_1 + \varepsilon^2 \dot{H}_2\rangle + \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \langle \varepsilon^2 \dot{H}_1 H_1\rangle + \varepsilon^3 \ldots$$

и

$$(1+L)^{-1} = 1 - L + \varepsilon^2 \ldots = 1 - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle H\rangle + \varepsilon^2 \ldots =$$

$$= 1 - \varepsilon\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle H_1\rangle + \varepsilon^2 \ldots$$

После перемножения находим

$$\dot{L}(1+L)^{-1} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1 + \varepsilon \dot{H}_2\rangle + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle \dot{H}_1 H_1\rangle -$$

$$- \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1\rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1\rangle + \varepsilon^3 \ldots \qquad (4.156)$$

В последнем члене переставим порядок действия операторов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\langle \dot{H}_1(x)\rangle$. Из тождества

$$\langle \dot{H}_1(x)\rangle \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\langle \dot{H}_1(x)\rangle f(x)\right] - \frac{\partial \langle \dot{H}_1(x)\rangle}{\partial x} f(x)$$

легко видеть, что

$$\dot{H}_1(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1(x)\rangle - \frac{\partial \langle \dot{H}_1(x)\rangle}{\partial x} \qquad (4.157)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1\rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle \dot{H}_1\rangle \langle H_1\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle \langle H_1\rangle.$$

Если, кроме того, учесть формулы (146), то оператор (156) можно записать

$$\dot{L}(1+L)^{-1} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\langle F\rangle - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x}, H_1\right] + \\ + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{K}[F, H_1] + \varepsilon^3 \ldots \qquad (4.158)$$

Пренебрежение членами порядка $\varepsilon^3$ и выше в этом выражении приводит к тому, что уравнение (154) совпадает с уравнением Фоккера—Планка (33), причем

$$K_1(x) = \varepsilon\langle F(x)\rangle + \varepsilon^2 \mathrm{K}\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x}, H_1(x)\right], \qquad (4.159)$$

$$K_2(x) = 2\varepsilon^2 \mathrm{K}[F(x), H_1(x)]$$

или вследствие (147)

$$K_1(x) = \varepsilon\langle F(x)\rangle + \varepsilon^2 \int_{t_0-t}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x}, F_\tau(x)\right] d\tau;$$

$$K_2(x) = 2\varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{K}[F(x, t), F(x, t')]\, dt' = \\ = 2\varepsilon^2 \int_{t_0-t}^{0} \mathrm{K}[F(x), F_\tau(x)]\, d\tau.$$

По мере удаления от начального момента $t_0$ эти коэффициенты стремятся к предельным значениям

$$K_2(x) \to K(x); \quad K_1(x) \to M(x) + \frac{1}{4}K'(x), \qquad (4.160)$$

где обозначено

$$M(x) = \varepsilon\langle F(x)\rangle,$$

$$K(x) = 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}[F(x), F_\tau(x)]\, d\tau,$$

$$K'(x) = 4\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x}, F_\tau(x)\right] d\tau. \qquad (4.161)$$

Для интервалов времени $t-t_0$, значительно превышающих время корреляции $\tau_{кор}$ функции $F(x,\xi(t))$ (или функции $\xi(t)$), уравнение (154) практически не отличается от уравнения Фоккера—Планка

$$\dot{w} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[M(x)+\frac{1}{4}K'(x)\right]w\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[K(x)w(x)]. \qquad (4.162)$$

Время корреляции по аналогии с (134) целесообразно определять соотношением

$$\tau_{кор}=\frac{2}{K}\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}|\tau|K[F,\ F_\tau]\,d\tau. \qquad (4.163)$$

При временных интервалах $t_1-t_0$, $t_2-t_1$, . . . , значительно превосходящих время корреляции (163), многомерная плотность распределения распадается на произведение вероятностей перехода (149), удовлетворяющих уравнению (162). Причина этого обстоятельства в конечном счете та же, что и в предыдущем разделе, хотя доказательство сложнее. Случайная функция $x(t)$ при этом будет приближенно представлять собой процесс Маркова, и к ней будет относиться все сказанное ранее о таких процессах.

Коэффициент

$$K_1(x)=M(x)+\frac{1}{4}K'(x) \qquad (4.164)$$

описывает согласно (20), (15) среднюю производную

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\langle x_\tau - x\rangle}{\tau}=\langle\dot{x}\rangle=\langle\varepsilon F(x,\ \xi(t))\rangle=K_1(x).$$

Отсюда видно, что, желая вычислить среднее значение $\langle\varepsilon F(x(t),\ \xi(t))\rangle$, мы должны принимать во внимание корреляции, существующие между $x(t)$ и $\xi(t)$. Эти корреляции приводят к тому, что указанное среднее согласно (161) отличается от среднего

$$M(x)=\langle F(x,\ \xi(t))\rangle, \qquad (4.165)$$

вычисленного без их учета, на величину

$$\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x},\ F_\tau\right] d\tau + \varepsilon^3 \ldots \qquad (4.166)$$

В выражениях (165), (166) аргумент $x$ при усреднении рассматривается не как функция от времени, а как фиксированная величина.

Аналогично при усреднении какой-либо другой функции $G(x(t), \xi(t))$ от случайного процесса $x(t)$, удовлетворяющего уравнению (115) при условии $x(t_1)=x_1$, следует учитывать корреляции между $x(t)$ и $\xi(t)$ и пользоваться формулой

$$\langle G(x(t_1),\ \xi(t_1))\rangle = \langle G(x_1,\ \xi(t_1))\rangle +$$

$$+ \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial G(x_1)}{\partial x},\ F_\tau(x_1)\right] d\tau + \varepsilon^3 \ldots \qquad (4.167)$$

В правой части этой формулы усреднение производится без учета указанных корреляций.

Среди всевозможных функций $F(x, \xi)$ особое место занимают те, которые удовлетворяют соотношению

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x},\ F_\tau\right] d\tau = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[F,\ \frac{\partial F_\tau}{\partial x}\right] d\tau \qquad (4.168)$$

(это равенство является в некотором роде условием временной симметрии — симметрии относительно отражения времени $t \to -t$). При его выполнении коэффициент $K'(x)$ может быть получен из $K(x)$ дифференцированием

$$K'(x) = \frac{\partial K(x)}{\partial x}, \qquad (4.169)$$

и уравнение (162) записывается в виде

$$\dot{w} = -\frac{\partial}{\partial x}[Mw] + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(Kw)\right]. \qquad (4.170)$$

Если $M$, $K$ не зависят от времени, последнее уравнение дает стационарное распределение

$$w_{\text{ст}}(x)=\frac{C}{\sqrt{K(x)}}\exp\left[2\int_{x_1}^{x}\frac{M(y)}{K(y)}\,dy\right], \qquad (4.171)$$

которое эквивалентно (49) в силу (160), (169) и справедливо при тех же предположениях.

Соотношения (168) ,(169) выполняются, в частности, в том конкретном случае, когда

$$\dot{x}=\varepsilon F(x,\ \xi(t))=f(x)+g(x)\xi(t), \qquad (4.172)$$

где $f(x)$, $g(x)$ — известные функции, а $\xi(t)$ — случайное воздействие с нулевым средним значением и коэффициентом интенсивности $\varkappa$:

$$\langle\xi(t)\rangle=0,\quad 2\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\,d\tau=\varkappa. \qquad (4.173)$$

В этом случае согласно (161)

$$M(x)=f(x);\quad K(x)=g^2(x)\varkappa. \qquad (4.174)$$

Стационарное распределение (171) принимает вид

$$w_{\text{ст}}(x)=\frac{C}{g(x)}\exp\left[\frac{2}{\varkappa}\int_{x_1}^{x}\frac{f(y)}{g^2(y)}\,dy\right]. \qquad (4.175)$$

Можно решать обратную задачу: по заданному уравнению Фоккера—Планка (33) находить флюктуационное уравнение (115) для этого случайного процесса. Эта задача, конечно, имеет не единственное решение. Однако, если ограничиться уравнениями типа (172) и дельта-коррелированной случайной функцией $\xi_0(t)$ с нулевым средним значением и единичной интенсивностью

$$\langle\xi_0(t)\rangle=0;\quad\langle\xi_0\xi_{0\tau}\rangle=\delta(\tau),\quad(\varkappa=1), \qquad (4.176)$$

то решение будет однозначным. Разрешая соотношения (174) и используя (164), (169), находим

$$g(x)=\sqrt{K_2(x)};\quad f(x)=K_1(x)-\frac{1}{4}\frac{\partial K_2(x)}{\partial x}. \qquad (4.177)$$

Произвольное уравнение Фоккера—Планка (33), следовательно, эквивалентно флюктуационному уравнению

$$\dot{x} = K_1(x) - \frac{1}{4}\frac{\partial K_2(x)}{\partial x} + \sqrt{K_2(x)}\,\xi_0(t). \quad (4.178)$$

Уравнению (115) какого-то более сложного вида может быть поставлено в соответствие уравнение (178), имеющее то же самое уравнение Фоккера—Планка. Такие уравнения можно назвать стохастически эквивалентными. Описанное упрощение уравнения случайного процесса путем замены его на эквивалентное может оказаться полезным при решении конкретных задач, и мы этим приемом в дальнейшем будем пользоваться.

Рассмотрим вкратце, какую ошибку мы допускаем, отбрасывая в (154), (158) малые члены порядка $\varepsilon^3$ и выше. Полный учет всех членов привел бы нас к стохастическому уравнению (19), причем коэффициенты $K_s(x)$ выражались через $F$ рядом по степеням параметра $\varepsilon$, начиная с члена, имеющего порядок $\varepsilon^s$. Члены этого ряда можно находить, применяя использованный выше метод. Наибольший интерес представляют те предельные значения коэффициентов $K_s(x)$, которые устанавливаются по мере того, как исчезает влияние начального момента времени $t_0$ (при $t - t_0 \gg \tau_{\text{кор}}$).

Сделаем еще один последовательный шаг в направлении уточнения формул (159), учитывая при вычислениях члены, имеющие порядок $\varepsilon^3$, и пренебрегая более высокими порядками. В результате получим.

$$K_1 = M + \frac{1}{4}K' + \frac{\varepsilon^3}{2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, F_\tau, F_\sigma\right] d\tau d\sigma +$$

$$+ \varepsilon^3 \int_{-\infty}^{0} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \left\{ \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F_\tau}{\partial x}, F_\sigma\right] + \right.$$

$$\left. + \left\langle \frac{\partial F_\tau}{\partial x} \right\rangle \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x}, F_\sigma\right] - \langle F_\tau \rangle\, \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F_\sigma}{\partial x}\right] \right\} d\sigma;$$

$$K_2 = K + 2\varepsilon^3 \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x},\ F_\tau,\ F_\sigma\right] d\tau d\sigma +$$

$$+ 2\varepsilon^3 \int_{-\infty}^{0} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \left\{ \mathrm{K}\left[F,\ \frac{\partial F_\tau}{\partial x},\ F_\sigma\right] + \right.$$

$$\left. + \left\langle \frac{\partial F_\tau}{\partial x} \right\rangle \mathrm{K}\,[F,\ F_\sigma] - \langle F_\tau \rangle \mathrm{K}\left[F,\ \frac{\partial F_\sigma}{\partial x}\right] \right\} d\sigma; \qquad (4.179)$$

$$K_3 = 3\varepsilon^3 \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\,[F,\ F_\tau,\ F_\sigma]\, d\tau d\sigma;$$

$$K_4 = \ldots = 0.$$

Здесь $M$, $K'$, $K$ обозначают найденные ранее выражения (161), имеющие порядок $\varepsilon$ и $\varepsilon^2$.

В том частном случае, когда уравнение имеет форму (172), приведенные формулы сильно упрощаются, принимая вид

$$K_1 = f + \frac{\varkappa_2}{2} g \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\varkappa_3}{6} g \frac{\partial}{\partial x}\left[g \frac{\partial g}{\partial x}\right];$$

$$K_2 = \varkappa_2 g^2 + \frac{\varkappa_3}{2} g^2 \frac{\partial g}{\partial x}; \qquad (4.180)$$

$$K_3 = \varkappa_3 g^3.$$

$$\left( \varkappa_2 = 2 \int_{-\infty}^{0} \langle \xi \xi_\tau \rangle\, d\tau; \quad \varkappa_3 = 3 \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{K}\,[\xi,\ \xi_\tau,\ \xi_\sigma]\, d\tau d\sigma \right).$$

Рассмотрим относительную величину членов, входящих в (179). Учитывая также (161), можно произвести следующую оценку по порядку величины:

$$\frac{1}{4} K' \sim \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial x} F_{\tau_{\text{кор}}};$$

$$K_1 - M - \frac{1}{4} K' \sim \varepsilon^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} F^2 \tau^2_{\text{кор}} + \varepsilon^3 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 F \tau^2_{\text{кор}}. \qquad (4.181)$$

Поскольку $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) F \lesssim \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$, из (181) можно сделать вывод, что члены с $\varepsilon^3$ в разложении коэффициента $K_1$

меньше, чем член с $\varepsilon^2$ в $\varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\tau_{\text{кор}}$ раз. Аналогично можно убедиться, что относительная величина поправки $K_2 - K$ по сравнению с $K_2$ равна тому же выражению. Вообще поправки высших приближений для коэффициентов $K_s$, соответствующие различным степеням параметра $\varepsilon^s$, сходятся в действительности, как прогрессирующие степени отношения

$$\frac{\tau_{\text{кор}}}{\tau_0} \sim \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x} \tau_{\text{кор}}. \tag{4.182}$$

Здесь

$$\tau_0 \sim \left[\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x}\right]^{-1} \tag{4.183}$$

— постоянная времени, которую можно назвать временем релаксации.

Малый параметр $\varepsilon$ был нами введен для того, чтобы сделать более наглядным способ построения последовательных приближений при определении коэффициентов стохастического уравнения. Фактически во все формулы он входит в сочетании с функцией $F$. При решении практических задач известной является вся правая часть $\varepsilon F = \Phi$ уравнения (115) и вводить $\varepsilon$ нет необходимости. Фактическим параметром сходимости приближений будет величина $\tau_{\text{кор}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Необходимым условием эффективности методов, развитых в настоящем разделе, является соотношение

$$\varepsilon \frac{\partial F}{\partial x} \tau_{\text{кор}} \ll 1. \tag{4.184}$$

## 9. Система уравнений для нескольких случайных процессов

Все изложенное в предыдущем разделе непосредственно обобщается на случай системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon F_1(x_1, \ldots, x_p, t) = \varepsilon F_1(x, t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_p &= \varepsilon F_p(x_1, \ldots, x_p, t) = \varepsilon F_p(x, t), \end{aligned} \tag{4.185}$$

определяющей случайные процессы $x_1(t), \ldots, x_p(t)$. Выражения в правой части, обозначенные через

$F_1(x, t), \ldots, F_p(x, t)$, при фиксированных значениях $x_1, \ldots, x_p$ — известные случайные функции времени.

Выбрав начальные значения

$$x_l(t_0) = x_{l0}, \tag{4.186}$$

запишем решение уравнений (185) в виде разложения

$$x_l(t) - x_{l0} = H_l(x_0) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} F_l(x_0, t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{p} \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \frac{\partial F_l}{\partial x_m}(x_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} F_m(x_0, t_2)\, dt_2 + \ldots, \tag{4.187}$$

Приращения $x_1 - x_{10}, \ldots, x_p - x_{p0}$ имеют совместную характеристическую функцию

$$\left\langle \exp\left[ i \sum_l u_l (x_l - x_{l0}) \right] \right\rangle = 1 + \sum_l i u_l \langle H_l(x_0) \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l, m} i u_l i u_m \langle H_l(x_0) H_m(x_0) \rangle + \ldots \tag{4.188}$$

По аналогии с (150) многомерную плотность распределения, получаемую из (188) обратным Фурье-преобразованием, можно записать

$$w(x_1 - x_{10}, \ldots, x_p - x_{p0}) =$$

$$= (1 + L)\, \delta(x_1 - x_{10}) \ldots \delta(x_p - x_{p0}), \tag{4.189}$$

где

$$L = \sum_l \left( -\frac{\partial}{\partial x_l} \right) \langle H_l(x) \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{l, m} \left( -\frac{\partial}{\partial x_l} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial x_m} \right) \langle H_l(x) H_m(x) \rangle + \ldots \tag{4.190}$$

Из (189) непосредственно следует, что плотность распределения $w(x_1 - x_{10}, \ldots)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = \dot{L} (1 + L)^{-1} w. \tag{4.191}$$

Остается вычислить оператор $\dot{L}(1+L)^{-1}$. Подставляя (187) в (190), получаем

$$L = -\varepsilon \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \int_{t_0}^{t} \langle F_l(x, t_1) \rangle dt_1 + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \sum_m \left\langle \frac{\partial F_l(x, t_1)}{\partial x_m} F_m(x, t_2) \right\rangle dt_2 \right\} + \quad (4.192)$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{l, m} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \langle F_l(x, t_1) F_m(x, t_2) \rangle dt_1 dt_2 + \varepsilon^3 \ldots$$

и, следовательно,

$$\dot{L} = -\varepsilon \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \langle F_l(x, t) \rangle + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \sum_m \left\langle \frac{\partial F_l}{\partial x_m}(x, t) F_m(x, t') \right\rangle dt' + \right.$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{l, m} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} \int_{t_0}^{t} \langle F_l(x, t) F_m(x, t') \rangle dt' + \varepsilon^3 \ldots \quad (4.193)$$

Как и раньше, оператор $\dot{L}(1+L)^{-1}$ отличается от (193) лишь тем, что для него средние $\left\langle \frac{\partial F_l}{\partial x_m} F_m \right\rangle$, $\langle F_l F_m \rangle$ заменяются на корреляционные функции $\mathrm{K}\left[\frac{\partial F_l}{\partial x_m}, F_m\right]$, $\mathrm{K}[F_l, F_m]$. В итоге уравнение (191) с точностью до членов порядка $\varepsilon^3$ будет иметь вид

$$\dot{w} = -\varepsilon \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \left( \langle F \rangle + \varepsilon \int_{t_0 - t}^{0} \mathrm{K}\left[\frac{\partial F_l}{\partial x_m}, F_{m\tau}\right] d\tau \right) w \right\} +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{l, m} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} \left\{ \int_{t_0 - t}^{0} \mathrm{K}[F_l, F_{m\tau}] \, d\tau \, w \right\}. \quad (4.194)$$

Здесь при вычислении среднего $\langle F_l \rangle$ и подынтегральных корреляционных функций аргументы $x_1, \ldots, x_p$ следует считать фиксированными. При $t - t_0 \gg \tau_{\text{кор}}$ нижний предел $t_0 - t$ можно заменить на $-\infty$.

Мы видим, что при выбранной точности рассмотрения уравнения (185) эквивалентны многомерному уравнению Фоккера—Планка (79). Покажем, что, наоборот, всякое уравнение Фоккера—Планка может быть заменено на систему флюктуационных уравнений

$$\dot{x}_l = f_l(x) + \sum_{m=1}^{p} g_{lm}(x)\,\xi_m(t) \quad (l = 1, \ldots, p) \qquad (4.195)$$

при соответствующем подборе функций $f_l(x)$, $g_{lm}(x)$. Здесь $\xi_1(t), \ldots, \xi_p(t)$ — независимые дельта-коррелированные случайные функции с нулевым средним значением и единичной интенсивностью

$$\langle \xi_l \rangle = 0; \quad \langle \xi_l \xi_{m\tau} \rangle = \delta_{lm}\delta(\tau). \qquad (4.196)$$

Применяя формулу (194) к уравнениям (195) и сравнивая с (79), получаем при использовании (196)

$$K_l(x) = f_l(x) + \frac{1}{2}\sum_{m,j} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_m} g_{mj};$$

$$K_{lm}(x) = \sum_j g_{lj}(x) g_{mj}(x). \qquad (4.197)$$

Мы всегда можем перейти от уравнения Фоккера—Планка к (195), если только соотношения (197) всегда могут быть разрешены относительно функций $g_{lm}(x)$, $f_l(x)$.

Матрица $K = \|K_{lm}\|$ является симметричной и положительно (неотрицательно) определенной. Отсюда вытекает согласно теоремам линейной алгебры, что существует действительная, симметричная неотрицательно определенная матрица $G = \|g_{lm}\|$, являющаяся матричным квадратным корнем из первой

$$G = K^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.198)$$

т. е.

$$G^2 = K; \quad \sum_j g_{lj} g_{jm} = K_{lm}.$$

Вследствие симметрии $g_{jm} = g_{mj}$, последнее равенство совпадает со вторым равенством (197). Тем самым функции $g_{lm}$, а следовательно, и

$$f_l(x) = K_l(x) - \frac{1}{2} \sum_{m,\, j} \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_m} g_{jm} \qquad (4.199)$$

всегда могут быть определены.

Для вычисления $\| g_{lm} \|$ можно воспользоваться ортогональным оператором $U = \| u_{ij} \|$, приводящим $K$ к диагональному виду

$$UKU^{-1} = \| K_i^\circ \delta_{ij} \|, \quad (K_i^\circ \geqslant 0). \qquad (4.200)$$

Тогда

$$G = U^{-1} \| \sqrt{K_i^\circ} \delta_{ij} \| U. \qquad (4.201)$$

При помощи $u_{ij}$ уравнения (195) можно записать в форме, разрешенной относительно флюктуаций. Учитывая (201) и применяя к (195) преобразование $U$, будем иметь

$$\sum_l u_{il} \dot{x}_l = \sum_l u_{il} f_l + \sqrt{K_i^\circ} \eta_i(t). \qquad (4.202)$$

Здесь $\eta_i = \sum_j u_{ij} \xi_j$ $(i = 1, \ldots, p)$ — система случайных функций, совершенно такая же, как $\xi_j$. Она удовлетворяет тем же самым условиям (196).

Любая система уравнений (185) в диффузионном приближении (соответствующем пренебрежению членами порядков $\varepsilon^3$, $\varepsilon^4$, ..., в стохастическом уравнении) может быть заменена на эквивалентную, более простую систему (195) или (202). Такую замену мы называем «упрощением».

## 10. Нормальные процессы Маркова

Среди марковских процессов наиболее простыми являются те, которые описываются уравнением Фоккера—Планка (79) с линейными функциями

$$K_l(x) = -\beta_{lm} x_m + b_l \quad (l = 1, \ldots, p) \qquad (4.203)$$

и постоянными коэффициентами $K_{lm}$.

В соответствии с формулами (195) и (197) указанное уравнение Фоккера — Планка эквивалентно флюктуационным уравнениям

$$\dot{x}_l + \sum_m \beta_{lm} x_m = \eta_l(t), \tag{4.204}$$

где

$$\eta_l(t) = b_l + \sum_m g_{lm} \xi_m(t) \tag{4.205}$$

гауссовы случайные функции, обладающие свойствами

$$\langle \eta_l \rangle = b_l; \tag{4.206}$$

$$\mathrm{K}[\eta_l,\ \eta_{m\tau}] = K_{lm}\delta(\tau).$$

Система линейных уравнений (204) всегда может быть решена, в результате чего $x_1(t), \ldots, x_p(t)$ линейным образом выражаются через известные случайные функции $\eta_1(t), \ldots, \eta_p(t)$. Процессы $x_1(t), \ldots, x_p(t)$, следовательно, будут нормальными, и их статистические характеристики определяются без труда.

Задаваясь целью вычислить спектральную плотность процессов $x_1, \ldots, x_p$, заменим в (204) оператор дифференцирования на $i\omega$ и найдем матрицу, обратную матрице

$$\| \beta_{lm} + i\omega\delta_{lm} \|^{-1} = \left\| \frac{\Delta_{lm}(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \right\|. \tag{4.207}$$

Здесь $\Delta(i\omega)$ — детерминант, а $\Delta_{lm}(i\omega)$ — алгебраические дополнения указанной матрицы. При этом имеем

$$x_j = \sum_l \frac{\Delta_{jl}(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \eta_l. \tag{4.208}$$

Последнее выражение позволяет найти спектральную плотность

$$\mathrm{S}[x_j,\ x_k;\ \omega] = \sum_{l,\ m} \frac{\Delta_{jl}(i\omega)}{\Delta(i\omega)} \frac{\Delta^*_{kl}(i\omega)}{\Delta^*(i\omega)} \mathrm{S}[\eta_l,\ \eta_m,\ \omega]. \tag{4.209}$$

Но вследствие (206), а также (2.54), (2.12), имеем

$$\mathrm{S}[\eta_l,\ \eta_m] = 2K_{lm} + 4\pi b_l b_m \delta(\omega).$$

Если, в частности, положить $j=k$, то для спектральной плотности процесса $x_j(t)$ (не содержащей среднего значения) получим выражение

$$S[x_j - \langle x_j\rangle, \omega] = \\ = 2|\Delta(i\omega)|^{-2}\sum_{l,m}\Delta_{jl}(i\omega)\Delta^*_{jm}(i\omega)K_{lm}. \qquad (4.210)$$

В числителе и знаменателе здесь стоят полиномы от $\omega^2$. Подобные процессы носят название процессов с рациональной спектральной плотностью. Мы показали, что нормальные процессы Маркова имеют рациональную спектральную плотность. Справедливо и обратное: всякий нормальный процесс с рациональной спектральной плотностью может быть представлен как компонента многомерного процесса Маркова. Это обстоятельство существенно с принципиальной точки зрения по той причине, что спектральная плотность всякого реального процесса всегда может быть аппроксимирована с той или иной точностью рациональной функцией. Следовательно, реальный немарковский гауссов процесс приближенно можно представлять как компоненту многомерного процесса Маркова. Увеличение числа составляющих последнего позволяет добиться большей точности аппроксимации. Указанный вопрос затрагивается также в разделе 12.

Рассмотрим подробнее простейший процесс с рациональной спектральной плотностью. Этот процесс, который одновременно является стационарным, нормальным и марковским, играет большую роль в теории флюктуаций, и мы будем его называть экспоненциально-коррелированным. Такое название станет понятным, если принять во внимание выводимую ниже формулу для его функции корреляции.

Для одномерного процесса согласно (204) имеем

$$\dot{x} + \beta x = \eta, \qquad (4.211)$$

причем

$$\langle\eta\rangle = b, \quad K[\eta, \eta_\tau] = K\delta(\tau).$$

Формулы (208), (210) в этом случае имеют вид

$$x = \frac{\eta}{\beta + i\omega}; \qquad (4.212)$$

$$S[x - \langle x\rangle, \omega] = \frac{2K}{|\beta + i\omega|^2} = \frac{2K}{\beta^2 + \omega^2}.$$

Рассматривая процесс установления, выберем начальное условие

$$x(t_0) = x_0, \tag{4.213}$$

при котором уравнение (211) имеет решение

$$x(t) = x_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} \eta(s)\, ds. \tag{4.214}$$

Отсюда получаем среднее значение и корреляционную функцию

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{-\beta(t-t_0)} +$$

$$+ \int_{t}^{t} e^{-\beta(t-s)} b ds = \frac{b}{\beta} + \left(x_0 - \frac{b}{\beta}\right) e^{-\beta(t-t_0)}, \tag{4.215}$$

$$K[x(t_1), x(t_2)] = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} e^{-\beta(t_1+t_2-s_1-s_2)} K\delta(s_1 - s_2)\, ds_1 ds_2.$$

Если для определенности положить $t_2 - t_1 \geqslant 0$, то

$$K[x(t_1),\ x(t_2)] =$$

$$= K\int_{t_0}^{t_1} e^{-\beta(t_1+t_2-2s)}\, ds = \frac{K}{2\beta}\left[e^{-\beta(t_2-t_1)} - e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)}\right].$$

Вообще

$$K[x(t_1),\ x(t_2)] = \frac{K}{2\beta}\left[e^{-\beta|t_2-t_1|} - e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)}\right]. \tag{4.216}$$

По мере удаления от начального момента времени $t_0$, устанавливается, как мы видим, стационарная корреляционная функция

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau);\ \sigma^2 = \frac{K}{2\beta},\ R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}, \tag{4.217}$$

соответствующая спектральной плотности (212).

В процессе установления согласно (216) дисперсия меняется по закону

$$Dx(t) = \sigma^2[1 - R^2(t-t_0)]. \tag{4.218}$$

Поскольку процесс $x(t)$, как и $\eta(t)$, является гауссовым, среднее значение (215) и дисперсия (218) полностью определяют одномерный закон распределения

$$w(x) = p_{t-t_0}(x,\ x_0) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \exp\left\{-\frac{[x-m-(x_0-m)R]^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\} \qquad (4.219)$$

$$\left(R = R(t-t_0);\ m = \frac{b}{\beta}\right).$$

Последний соответствует условию (213) и, следовательно, есть не что иное, как марковская вероятность перехода (4), через которую может быть записано произвольное многомерное распределение (6), если выбрано начальное распределение.

Формулы (215), (216) являются частными случаями общих формул (3.26). Поэтому распределение (219) определяет условное распределение $w(x(t)|x_0)$ при любом гауссовом стационарном процессе. Но строить из него многомерные распределения можно лишь в случае экспоненциально-коррелированного процесса, когда $R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}$.

## 11. Флюктуационное уравнение второго порядка и решение двумерного уравнения Фоккера—Планка в частных случаях

Во многих задачах исследуемый флюктуационный процесс $x(t)$ удовлетворяет уравнению второго порядка:

$$\ddot{x} = F(x,\ \dot{x},\ \xi(t)), \qquad (4.220)$$

где $\xi(t)$ — случайная функция с достаточно малым временем корреляции $\tau_{кор}$. Введя время $\tilde{t} = \frac{t}{\tau_{кор}}$, это уравнение можно записать

$$\frac{d^2x}{d\tilde{t}^2} = \tau_{кор}^2 F\left(x,\ \frac{1}{\tau_{кор}}\frac{dx}{d\tilde{t}},\ \xi\right)$$

или

$$\frac{dx}{d\tilde{t}} = \tau_{кор} y,$$

$$\frac{dy}{d\tilde{t}} = \tau_{\text{кор}} F(x,\ y,\ \xi), \tag{4.221}$$

если обозначить $\dot{x} = \dfrac{dx}{\tau_{\text{кор}} d\tilde{t}} = y$.

Малое время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ в правой части (221) играет роль малого параметра $\varepsilon$, присутствующего в правой части (185) и позволяющего перейти от флюктуационных уравнений к уравнению Фоккера — Планка (194). Перейдя к первоначальным обозначениям $\dot{x}$, $t = \tilde{t}\tau_{\text{кор}}$, это уравнение можно записать

$$\dot{w}(x,\ \dot{x}) = -\dot{x}\frac{\partial}{\partial x} w - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{\langle F\rangle + \int_{-\infty}^{0} K\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}},\ F_\tau\right] d\tau\right\} w + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}\left\{\int_{-\infty}^{0} K[F,\ F_\tau]\, d\tau w\right\}. \tag{4.222}$$

Разберем несколько частных случаев.

А. Пусть флюктуационное уравнение имеет вид

$$\mu^2 \ddot{x} + \dot{x} - f(x) = \xi(t), \tag{4.223}$$

где $\xi(t)$ можно считать дельта-коррелированным ($\overline{\xi\xi}_\tau = \varkappa\delta(\tau)$) случайным процессом с нулевым средним значением. К такому виду, очевидно, можно свести несколько более общее уравнение

$$a\ddot{x} + b\dot{x} = f(x) + g(\xi). \tag{4.224}$$

Если (223) записать в форме

$$\mu\dot{x} = y,$$

$$\mu\dot{y} = -\frac{y}{\mu} + f(x) + \xi(t),$$

то соответствующее уравнение Фоккера—Планка будет

$$\dot{w}(x,\ y) = -\frac{1}{\mu}\left[y\frac{\partial w}{\partial x} + f(x)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \\ + \frac{1}{\mu^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(yw) + \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \tag{4.225}$$

Оно позволяет получить следующие результаты.

1. Легко проверить, что указанному уравнению соответствует стационарное распределение

$$w_{\text{ст}}(x,\ y) = \text{const}\exp\left\{-\frac{y^2}{\varkappa} + \frac{2}{\varkappa}\int_{x_1}^{x} f(z)\,dz\right\}, \quad (4.226)$$

обращающее в нуль каждую из квадратных скобок в (225). Вытекающее отсюда распределение по $x$

$$w_{\text{ст}}(x) = C\exp\left\{\frac{2}{\varkappa}\int_{x_1}^{x} f(z)\,dz\right\} \quad (4.227)$$

не зависит от $\mu$ и совпадает с распределением одномерного процесса Маркова, описываемого уравнением $\dot{x} = f(x) + \xi(t)$. В самом деле, уравнение $\dot{x} = f(x) + \xi(t)$ соответствует частному значению $\mu = 0$ в (223), оно совпадает с (172), если положить $g \equiv 1$. Поэтому, естественно, стационарное распределение (227) совпадает с (175) при $g \equiv 1$. Стационарные распределения (226), (227) существуют при тех же ограничениях на функцию $f(x)$, что и в случае одномерного процесса Маркова. Для уравнения в форме (224) стационарное решение (226) имеет вид

$$w_{\text{ст}}(x,\ \dot{x}) =$$

$$= \text{const}\exp\left\{-\frac{ab}{\varkappa}\dot{x}^2 + \frac{2b}{\varkappa}\left[\int_{x_1}^{x} f(z)\,dz + \langle g\rangle x\right]\right\}, \quad (4.228)$$

где

$$\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} K\left[g(\xi),\ g(\xi_\tau)\right]d\tau.$$

2. Для отыскания нестационарного решения уравнения (225) представим $w(x, y)$ в форме разложения

$$w(x,\ y) = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} T_{mn}(t)\,X_m(x)\,Y_n(y) \quad (4.229)$$

по собственным функциям $x_m(x)$, $y_n(y)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\,X_m(x)\right] + \lambda_m X_m(x) = 0, \quad (4.230)$$

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 Y_n(y)}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}[yY_n(y)]+\lambda_n' Y_n(y)=0 \qquad (4.231)$$

и условиям ортонормированности (56)

$$\int X_m(x)\,X_k(x)\frac{dx}{X_0(x)}=\delta_{mk},\quad \int Y_n(y)\,Y_k(y)\frac{dy}{Y_0(y)}=\delta_{nk}.$$

Подставляя (229) в (225), находим

$$\sum_{m,\,n}\mu^2\dot{T}_{mn}X_mY_n=-\mu\sum_{m,\,n}T_{mn}[X_m'yY_n+$$

$$+f(x)\,X_mY_n']-\sum_{m,\,n}\lambda_n'T_{mn}X_mY_n.$$

Пользуясь равенством

$$X_m'yY_n+f(x)\,X_mY_n'=$$

$$=\lambda_m\int X_m dx Y_n'-\lambda_n'X_m'\int Y_n dy,$$

вытекающим из (230), (231), преобразуем основное уравнение к виду

$$\sum_{m,\,n}(\mu^2\dot{T}_{mn}+\lambda_n'T_{mn})\,X_mY_n=$$

$$=\mu\sum_{k,\,n}T_{kn}[\lambda_n'X_k'\int Y_n dy-\lambda_k\int X_k dx Y_n']. \qquad (4.232)$$

Для функций $X_m(x)$ равенствами

$$X_k'(x)=\sum_m X_m(x)\,a_{mk},$$

$$\int X_k(x)\,dx=\sum_m X_m(x)\,b_{mk} \qquad (4.233)$$

введем коэффициенты разложения

$$a_{mk}=\int X_m X_k'\frac{dx}{X_0},$$

$$b_{mk}=\int X_m\left(\int X_k dx\right)\frac{dx}{X_0}, \qquad (4.234)$$

которые, очевидно, обратны друг другу: $\sum_{\kappa}a_{mk}b_{kl}=\delta_{ml}$. Подобные коэффициенты можно ввести и для функций $Y_n(y)$.

Уравнение (231) совпадает с уравнением (68). Поэтому оно имеет собственные функции (69)

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\,\frac{1}{\sqrt{n!}}\,F^{(n+1)}\left(\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\,y\right) \qquad (4.235)$$

и собственные значения $\lambda_n' = n$. Следовательно,

$$Y_n'(y) = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\,\sqrt{n+1}\,Y_{n+1}(y),$$
$$\int Y_n(y)\,dy = \sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,Y_{n-1}(y). \qquad (4.236)$$

Подставляя (233), (236) в (232), заменяя $\lambda_n'$ на $n$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $X_m Y_n$, получаем систему уравнений

$$\mu^2 \dot{T}_{mn} + nT_{mn} = \mu \sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\,\sqrt{n+1}\sum_k a_{mk} T_{k,\,n+1} -$$
$$- \mu \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\,\sqrt{n}\sum_k b_{mk}\lambda_k T_{k,\,n-1} \qquad (4.237)$$
$$(m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

которая эквивалентна двумерному уравнению Фоккера — Планка. Когда параметр $\mu$ достаточно мал, уравнения (237) удобно решать методом возмущений.

Полагая $n = 0$ в (237), получаем

$$\mu^2 p T_{m0} = \mu \sqrt{\frac{\varkappa}{2}} \sum a_{mk} T_{k1}.$$

(Здесь и в дальнейшем через $p$ обозначен оператор дифференцирования $p = \frac{\partial}{\partial t}$.) Но $T_{k1}$ можно найти, полагая в (237) $n = 1$, что дает

$$T_{k1} = \frac{\sqrt{2}\mu}{1+\mu^2 p} \sqrt{\frac{\varkappa}{2}} \sum_l a_{kl} T_{l2} -$$
$$- \frac{\mu}{1+\mu^2 p} \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \sum_l b_{kl}\lambda_l T_{l0}.$$

Для отыскания $T_{l2}$ в (237) следует положить $n=2$:

$$T_{l2}=\frac{\sqrt{3}\mu}{2+\mu^2 p}\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\sum_j a_{lj}T_{j3}-$$

$$-\frac{\mu\sqrt{2}}{2+\mu^2 p}\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\sum_j b_{lj}\lambda_j T_{j1}$$

и подставить во второй член предыдущее равенство. В результате такой процедуры получим разложение по четным степеням малого параметра $\mu$

$$\mu^2 p T_{m0}=-\frac{\mu^2\lambda_m}{1+\mu^2 p}T_{m0}+$$

$$+\frac{2\mu^4}{(1+\mu^2 p)^2(2+\mu^2 p)}\sum_{kl}a_{mk}\lambda_k b_{kl}\lambda_l T_{l0}+\mu^6\ldots \qquad (4.238)$$

Задавшись определенной точностью, можно отбросить члены более высокого порядка и несколько упростить остающиеся члены. Так, во втором приближении будем иметь

$$\left[p+\frac{\lambda_m}{1+\mu^2 p}\right]T_{m0}=\mu^2\sum_{al}a_{mk}\lambda_k b_{kl}\lambda_l T_{l0}+\mu^4\ldots \qquad (4.239)$$

Преобразуя выражение в квадратной скобке, получаем

$$p+\lambda_m(1+\mu^2 p)^{-1}=p+\lambda_m-\mu^2\lambda_m p+\mu^4\ldots=$$
$$=(1-\mu^2\lambda_m)\left[p+\lambda_m(1-\mu^2\lambda_m)^{-1}\right]+\mu^4\ldots=$$
$$=(1-\mu^2\lambda_m)\left[p+\lambda_m+\mu^2\lambda_m^2\right]+\mu^4\ldots$$

Следовательно, с той же степенью точности, что и (238), можно написать

$$\dot{T}_{m0}=-(\lambda_m+\mu^2\lambda^2_m)T_{m0}+\mu^2\sum_{kl}a_{mk}\lambda_k b_{kl}\lambda_l T_{l0}+\mu^4\ldots \qquad (4.240)$$

Найденное уравнение определяет изменение во времени коэффициентов $T_{m0}$. Если $\mu=0$, то каждый коэффициент $T_{m0}$ уменьшается во времени по экспоненте с постоянной времени $\lambda_m$ (как это было получено для одномерного процесса Маркова); возмущение, имеющее форму собственной функции $X_m(x)$, при этом уменьшается без

изменения формы. Когда $\mu \neq 0$, возмущение, которое уменьшается экспоненциально, имеет уже несколько другую форму. Рассмотрим форму того возмущения, которое уменьшается медленнее всего (с временным множителем $e^{p_1 t}$) и которое при $\mu = 0$ совпадает с первой собственной функцией $X_1(x)$. Полагая в (240) $\frac{\partial}{\partial t} = p_1$, находим при $m \neq 1$

$$T_{m0} = \frac{\mu^2}{p_1 + \lambda_m + \mu^2 \lambda_m^2} \sum a_{mk} \lambda_k b_{k1} \lambda_1 T_{10} + \mu^4 \ldots \quad (4.241)$$

Полагая же $m = 1$, получаем постоянную затухания

$$p_1 = -\lambda_1 - \mu^2 \lambda_1^2 + \mu^2 \lambda_1 \sum a_{mk} \lambda_k b_{k1} + \mu^4 \ldots \quad (4.242)$$

Одномерная плотность распределения $w(x)$ выражается формулой

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} T_{m0} X_m(x), \quad (4.243)$$

которую можно получить путем интегрирования по $y$ разложения (229). Подставляя (241) в (243) и удерживая лишь члены порядка $\mu^2$, находим форму нестационарного возмущения

$$w(x) = T_{10} \left[ X_1(x) + \mu^2 \lambda_1 \sum_{m \neq 1} \frac{a_{mk} \lambda_k b_{k1}}{\lambda_m - \lambda_1} X_m(x) \right], \quad (4.244)$$

которое медленнее всего исчезает по мере установления стационарного распределения и которое пропорционально изменившейся собственной функции $X_1(x)$. Таким же способом могут быть найдены форма и постоянные затухания других изменившихся собственных функций.

Отметим, что уравнение (240) эквивалентно некоторому дифференциальному уравнению для одномерной плотности $w(x)$. Чтобы его вывести, следует в соответствии с (243) умножить (240) на $X_m(x)$ и просуммировать по $m$. При этом следует учесть, что согласно (233), (230)

$$\sum_{mk} X_m(x) a_{mk} C_k = \frac{\partial^2}{\partial x} \sum_k X_k(x) C_k,$$

$$\sum_m X_m(x) \lambda_m C_m = \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \sum_m X_m(x) C_m.$$

Таким образом, $a_{mk}$ соответствует оператору дифференцирования, $b_{kl}$ — оператору интегрирования, а $\lambda_m$ соответствует оператору

$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)-\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right]$. Несложные вычисления приводят к следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{w}(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{[1-\mu^2 f'(x)]\left[-f(x)\,w(x)+\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right]\right\}, \quad (4.245)$$

$$(f'(x)=\partial f(x)/\partial x).$$

Если его рассматривать как обычное одномерное уравнение Фоккера -Планка, то ему будут соответствовать функции

$$K_1(x)=f(x)-\mu^2 f(x)f'(x)-\mu^2\frac{\varkappa}{2}f''(x),\ K_2(x)=\varkappa[1-\mu^2 f'(x)].$$

Разумеется, при учете более высоких порядков по $\mu$ соответствующее уравнение будет более сложным.

3. Когда параметр $\mu$ не является малым, решение уравнения (223) целесообразно проводить другим способом. Рассмотрим противоположный крайний случай больших значений $\mu$. При этом, обозначая $\frac{1}{\mu}=\varepsilon$ и заменяя время $t$ на $t/\varepsilon$, уравнение (223) можно преобразовать в уравнение

$$\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}-f(x)=\sqrt{\varepsilon}\,\xi(t). \quad (4.246)$$

Когда $\varepsilon$ мало, это уравнение описывает поведение системы, совершающей нелинейные колебания в условиях малого трения и под действием слабых флюктуационных сил. Удобно ввести в рассмотрение «энергию»

$$E=\frac{\dot{x}^2}{2}+u(x), \quad (4.247)$$

где

$$u(x)=-\int_{x_1}^{x} f(z)\,dz$$

— «потенциальная функция». Умножая (246) на $\dot{x}$, получаем

$$\dot{E}=-\varepsilon\dot{x}^2+\sqrt{\varepsilon}\,\dot{x}\xi(t). \quad (4.248)$$

Таким образом, вследствие (247), (248) мы имеем два флюктуационных уравнения

$$\dot{x}=\sqrt{2}\,[E-u(x)],$$

$$\dot{E}=-2\varepsilon[E-u(x)]+\sqrt{2\varepsilon}\,[E-u(x)]\,\xi(t). \quad (4.249)$$

Обычным способом им можно поставить в соответствие уравнение Фоккера—Планка для плотности распределения $w(E, x)$

$$\dot{w}(x, E) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{2(E-u)}\,w\right] + \\ + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}\left[\left(E-u-\frac{\varkappa}{4}\right)w\right] + \varepsilon\varkappa\frac{\partial^2}{\partial E^2}\left[(E-u)\,w\right] \quad (4.250)$$

$$\left(\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} \xi'\xi_\tau d\tau\right).$$

Если $\varepsilon$ мало, энергия $E$ сохраняется в течение значительного числа периодов колебаний. При этом время пребывания координаты $x(t)$ в точке $x$ обратно пропорционально скорости $\dot{x} = \sqrt{2(E-u)}$. Поэтому при фиксированной энергии имеет место условное распределение

$$w(x\,|\,E) = \text{const}\begin{cases}[E-u(x)]^{-\frac{1}{2}}, & \text{где } u(x) < E,\\ 0, & \text{где } u(x) > E.\end{cases} \quad (4.251)$$

Нормируя это распределение, записываем двумерную плотность распределения в виде

$$w(x, E) = w(E)\,w(x\,|\,E) = \frac{w(E)}{2\varphi'(E)\sqrt{E-u(x)}}. \quad (4.252)$$

Здесь введено обозначение

$$\varphi'(E) = \frac{1}{2}\int_{R(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-u(x)}}, \quad (4.253)$$

причем интегрирование проводится по области $R(E)$, где $u(x) < E$. Распределение (252) можно обосновать также непосредственно при помощи уравнения (250). После установления квазиравновесного распределения, которое характеризуется тем, что $\dot{w}$ имеет порядок $\varepsilon$, из (250) мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{E-u(x)}\,w\right] = \varepsilon\ldots;$$

и после интегрирования

$$w = \frac{c(E)}{\sqrt{E-u(x)}} + \varepsilon\ldots$$

Таким образом, отклонение $w(E, x)$ от (252) составляет величину высшего порядка малости $\varepsilon$.

Подставим (252) в (250) и, проинтегрировав по $x$, получим одномерное уравнение Фоккера—Планка для энергии

$$\dot{w}(E) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial E}\left[\left(\frac{\varphi(E)}{\varphi'(E)} - \frac{\varkappa}{2}\right) w\right] + \frac{\varepsilon\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2}\left[\frac{\varphi(E)}{\varphi'(E)} w\right], \quad (4.254)$$

где

$$\varphi(E) = \int_{R(E)} \sqrt{E - u(x)}\, dx.$$

Сведение двумерного уравнения Фоккера—Планка к одномерному существенно облегчает задачу исследования нестационарных флюктуационных процессов. Стационарное же решение уравнения (254) при учете (252), (247), естественно, совпадает с полученным ранее решением (228).

Б. Рассмотрим несколько другое уравнение

$$\ddot{x} + \varepsilon h(x, \dot{x}) - f(x) = \sqrt{\varepsilon}\xi(t). \quad (4.255)$$

Для соответствующего ему уравнения Фоккера — Планка уже нельзя так просто, как для (224), написать квадратуру стационарного распределения. Однако при малых значениях параметра $\varepsilon$ можно применить изложенный выше метод, позволяющий, в частности, получить стационарное распределение.

Умножая (255) на $\dot{x}$ и рассматривая вместо $\dot{x}$ энергию (247), получаем уравнения

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - u)}, \quad (4.256)$$

$$\dot{E} = -\varepsilon\sqrt{2(E-u)}\, h\left[x, \sqrt{2(E-u)}\right] + \sqrt{2\varepsilon(E-u)}\,\xi(t).$$

Соответствующее ему уравнение Фоккера—Планка будет отличаться от (250) лишь видом второго члена в правой части, где вместо $2(E-u)$ теперь будет стоять $\sqrt{2(E-u)}\, h\left[x, \sqrt{2(E-u)}\right]$. Подставляя (252) в это уравнение и интегрируя по $x$, получаем одномерное уравнение

$$\dot{w}(E) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial E}\left[\left(\frac{\psi(E)}{\varphi'(E)} - \frac{\varkappa}{2}\right) w\right] + \\ + \varepsilon \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2}\left[\frac{\varphi(E)}{\varphi'(E)} w\right]. \quad (4.257)$$

Здесь

$$\psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{R(E)} h[x, \sqrt{2(E-u)}]\, dx. \qquad (4.258)$$

Выведенное уравнение позволяет обычным способом найти стационарное распределение

$$w_{ст}(E) = \text{const}\, \varphi'(E) \exp\left\{-\frac{2}{\varkappa} \int_{E_1}^{E} \frac{\psi(E')}{\varphi(E')}\, dE'\right\}. \qquad (4.259)$$

Если равенством

$$\frac{dF(E)}{dE} = \frac{\psi(E)}{\varphi(E)} \qquad (4.260)$$

ввести функцию $F(E)$, то двумерное распределение (252) запишется в виде

$$w_{ст}(x, E) = \frac{\text{const}}{2\sqrt{E-u(x)}}\, e^{-\frac{2}{\varkappa}F(E)}. \qquad (4.261)$$

Переходя к $\dot{x}$ и учитывая, что $dxdE = \dot{x}d\dot{x}dx$, будем иметь

$$w_{ст}(x, \dot{x}) = \frac{1}{N} \exp\left\{-\frac{2}{\varkappa} F\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + u(x)\right)\right\}, \qquad (4.262)$$

где

$$N = \int \exp\left\{-\frac{2}{\varkappa} F\left(\frac{y^2}{2} + u(x)\right)\right\} dxdy.$$

Интегрирование по $\dot{x}$ дает плотность распределения по $x$

$$w_{ст}(x) = \frac{1}{N} \int \exp\left[-\frac{2}{\varkappa} F\left(\frac{y^2}{2},\ u(x)\right)\right] dy. \qquad (4.263)$$

Когда $h(x, \dot{x}) = \beta\dot{x}$, функции $\varphi(E)$, $\psi(E)$ пропорциональны друг другу и распределение (262) совпадает с (226).

В. В заключение рассмотрим уравнение

$$\mu^2\ddot{x} + [1 + \mu^2 h(x)]\,\dot{x} - f(x) = \xi(t) \qquad (4.264)$$

более общее, чем (223). Ему соответствует уравнение Фоккера—Планка

$$\mu^2 \dot{w}(x, y) = -\mu\left[y\frac{\partial w}{\partial x} + f(x)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \\ + \mu^2 h(x)\frac{\partial}{\partial y}(yw) + \frac{\partial}{\partial y}(yw) + \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (4.265)$$

$$(y = \mu\dot{x}).$$

Параметр $\mu$ будем полагать малым и использовать его при решении последнего уравнения методом, который является развитием метода, примененного на стр. 106—110.

Запишем плотность распределения $w(x, y)$ в форме

$$w(x, y) = \sum w_n(x)\, Y_n(y), \qquad (4.266)$$

где $Y_n(y)$ — собственные функции (235) уравнения (231). При подстановке последнего разложения в (265) следует учесть первое равенство (236), а также равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}(yY_n) = -\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\, Y_{n+2} - nY_n, \\ yY_n = -\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\left[\sqrt{n+1}\, Y_{n+1} + \sqrt{n}\, Y_{n-1}\right], \qquad (4.267)$$

которые вытекают из (231) и (236). Группируя в (265) коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получаем систему уравнений

$$(n + \mu^2 p + \mu^2 nh)\, w_n = \mu\sqrt{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{n+1}\frac{\partial w_{n+1}}{\partial x} + \\ + \mu\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\sqrt{n}\left(-fw_{n-1} + \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}\right) - \\ - \mu^2\sqrt{n-1}\sqrt{n}\, hw_{n-2} \qquad (4.268)$$

$$\left(p = \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Ее будем решать методом последовательных приближений. Задаваясь той же степенью точности, что и на

стр. 109—110, достаточно учесть лишь три первых уравнения, которые соответствуют $n=0$, 1, 2 и имеют вид

$$\mu^2 p w_0 = \mu \sqrt{\frac{\varkappa}{2}} \frac{\partial}{\partial x} w_1,$$

$$w_1 = \mu \sqrt{\frac{\varkappa}{2}} \frac{\sqrt{2}}{1+\mu^2 p+\mu^2 h} \frac{\partial}{\partial x} w_2 +$$

$$+ \mu \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \frac{1}{1+\mu^2 p+\mu^2 h} D w_0, \qquad (4.269)$$

$$w_2 = \mu \sqrt{\frac{\varkappa}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2+\mu^2 p+2\mu^2 h} \frac{\partial}{\partial x} w_3 +$$

$$+ \mu \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \frac{\sqrt{2}}{2+\mu^2 p+2\mu^2 h} D w_1 - \frac{\mu^2 \sqrt{2h}}{2+\mu^2 p+2\mu^2 h} w_0,$$

где обозначено $D = -f + \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial}{\partial x}$.

Подставляя второе равенство в первое и третье, а также используя третье равенство, получаем уравнение, которое с требуемой степенью точности можно записать

$$p w_0 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1+\mu^2 p+\mu^2 h} D w_0 +$$

$$+ \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^2 w_0 - \mu^2 \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h w_0 + \mu^4 \ldots$$

Преобразуя $(1+\mu^2 p+\mu^2 h)^{-1}$ к $1-\mu^2 p-\mu^2 h$, перенося член $-\mu^2 p \frac{\partial}{\partial x} D w_0$ в левую часть и поделив обе части равенства на $1+\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} D$, будем иметь

$$p w_0 = \frac{\partial}{\partial x} D w_0 - \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} D\right)^2 w_0 + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^2 w_0 -$$

$$- \mu^2 \frac{\partial}{\partial x} h D w_0 - \mu^2 \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} h w_0. \qquad (4.270)$$

Учитывая вид оператора $D$, объединяем второй и третий члены в правой части

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} D\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x} D - D \frac{\partial}{\partial x}\right] D =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x} f - f \frac{\partial}{\partial x}\right] D = -\frac{\partial}{\partial x} f' D.$$

Таким образом, полученное уравнение (270) можно записать

$$\dot{w}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1 - \mu^2 f' - \mu^2 h\right]\left[-fw + \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right]\right\} -$$

$$- \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu^2 h w). \qquad (4.271)$$

Здесь $w_0(x)$ заменено на $w(x)$, поскольку $w_0(x)$ есть не что иное, как одномерная плотность распределения по $x$. В этом можно убедиться, интегрируя по $y$ разложение (266). Таким образом, мы получили одномерное уравнение Фоккера—Планка, которое с выбранной степенью точности эквивалентно двумерному уравнению Указанное уравнение позволяет найти, в частности, стационарное распределение

$$w_{\text{ст}}(x) = \text{const} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{2}{\varkappa}\int_{x_1}^{x} f(z)\,[1 + \mu^2 h(z)]\,dz + \mu^2 h(x)\right\}. \qquad (4.272)$$

Последнее выражение является обобщением формулы (227). Для флюктуационного уравнения, взятого в форме

$$a\ddot{x} + b(x)\dot{x} = f(x) + \xi(x), \qquad (4.273)$$

полученная формула записывается

$$w_{\text{ст}}(x) = \text{const} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{2}{\varkappa}\int_{x_1}^{x} f(z)\,b(z)\,dz + b(x)\right\}. \qquad (4.274)$$

## 12. Переход от процесса Маркова к сглаженному процессу

Процессы Маркова удобно рассматривать потому, что для их исследования можно применять эффективные математические методы. Вместе с тем, замену реального процесса на процесс Маркова нужно проводить с известной осторожностью ввиду того, что процессы Маркова обладают рядом специфических черт. Они отличаются от процессов, встречающихся в радиофизике, тем, что им не свойственна гладкость.

Пусть, например, процесс $y(t)$ описывается уравнением

$$\dot{y} - f(y) = \xi(t). \tag{4.275}$$

Если случайная функция в правой части имеет малое время корреляции $\tau_{кор} \ll \tau_0$, где в соответствии с (183) $\tau_0 \sim \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}$, то согласно изложенному в п. 8 можно пользоваться уравнением Фоккера—Планка (162) для $w(y)$. Тем самым реальный процесс $y(t)$ будет заменен на процесс Маркова $x(t)$, удовлетворяющий уравнению

$$\dot{x} - f(x) = \zeta(t), \tag{4.276}$$

где $\zeta(t)$ — дельта-коррелированный случайный процесс, имеющий ту же интенсивность $K$, что и $\xi(t)$. Поскольку $\zeta(t)$ имеет бесконечную дисперсию, из (276) следует бесконечная дисперсия производной: $D\dot{x} = \infty$, которая говорит об отсутствии гладкости функции $x(t)$, об изрезанности ее графика. В радиофизике емкости и индуктивности, всегда имеющиеся в схеме, сглаживают процесс. Чтобы получить подобие того, что имеется в действительности, процесс $x(t)$ или $\zeta(t)$, нужно подвергнуть сглаживанию с постоянной времени $\tau_{гл} \ll \tau_0$ [в случае (275) $\tau_{гл}$ порядка времени корреляции процесса $\xi(t)$]. Процесс сглаживания существенно меняет поведение процесса $x(t)$ в масштабах времени $\Delta t \sim \tau_{гл}$, «крупномасштабные» же флюктуации ($\Delta t \sim \tau_0 \gg \tau_{гл}$) остаются почти без изменения. Результаты, полученные путем применения аппарата процессов Маркова, ценны только в той части, в какой они характеризуют именно эти «крупномасштабные» флюктуации.

Чтобы представить себе, как влияет операция сглаживания на процесс Маркова, рассмотрим конкретный пример сглаживания, а именно положим

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau_{гл}} e^{-\frac{t-t'}{\tau_{гл}}} \zeta(t')\, dt'. \qquad (4.277)$$

Это соответствует тому, что $\xi(t)$ в (275) предполагается экспоненциально-коррелированной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\tau_{гл}\dot{\xi} + \xi = \zeta. \qquad (4.278)$$

Согласно (275), (278) для сглаженного процесса $y(t)$ будем иметь уравнение второго порядка

$$\tau_{гл}\ddot{y} + [1 - \tau_{гл} f'(y)]\dot{y} - f(y) = \zeta(t). \qquad (4.279)$$

Приблизительно к тому же уравнению мы придем, если в (276) подвергнем усреднению не $\zeta(t)$, а $x(t)$, положив

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau_{гл}} e^{-\frac{t-t'}{\tau_{гл}}} x(t')\, dt', \qquad (4.280)$$

т. е.

$$\tau_{гл}\dot{y} + y = x. \qquad (4.281)$$

Вытекающее из (276), (280) уравнение

$$\tau_{гл}\ddot{y} + \dot{y} - f(\tau_{гл}\dot{y} + y) = \zeta$$

совпадает с (279), если разложить $f(y + \tau_{гл}\dot{y})$ в ряд по $\tau_{гл}$ и пренебречь членами высшего порядка малости.

Уравнение (279) соответствует двумерному процессу Маркова. Оно является частным случаем уравнения (264), решение которого было рассмотрено в разд. 11. Применяя формулу (272), его стационарное решение можно записать

$$w_{ст}(y) = \text{const} \exp\left\{\frac{2}{K}\int_{y_1}^{y} f(z)\, dz - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau_{гл}}{K} f^2(y) - \tau_{гл} f'(y)\right\}. \qquad (4.282)$$

Отсюда видно, насколько сглаживание искажает стационарную плотность распределения.

Если $f$ линейная функция: $f(x) = -\beta x$, то $x(t)$ будет экспоненциально-коррелированным процессом, причем

$$S[x, \omega] = \frac{S[\zeta, \omega]}{\omega^2 + \beta^2} = \frac{2K}{\omega^2 + \beta^2}; \quad k_x(\tau) = \frac{K}{2\beta} e^{-\beta|\tau|}.$$

Сглаженный процесс $y(t)$ будет иметь спектральную плотность

$$S[y, \omega] = \frac{S[x, \omega]}{\omega^2\tau_{гл}^2 + 1} = \frac{2K}{(\omega^2\tau_{гл}^2 + 1)(\omega^2 + \beta^2)}. \quad (4.283)$$

В соответствии с формулой 7 табл. 2.1 его корреляционная функция имеет вид

$$k_y(\tau) = \frac{K}{2\beta}(1 - \beta^2\tau_{гл}^2)^{-1}\left[e^{-\beta|\tau|} - \beta\tau_{гл}e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{гл}}}\right]. \quad (4.284)$$

$$\left(Dy = \frac{K}{2\beta}(1 + \beta\tau_{гл})^{-1}\right).$$

Условие $\beta\tau_{гл} \ll 1$ позволяет несколько упростить это выражение

$$k_y(\tau) = \frac{K}{2\beta}\left[e^{-\beta|\tau|} - \beta\tau_{гл}e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{гл}}}\right].$$

Описанная операция сглаживания является неполной. Из (279) видно, что дисперсия второй производной остается бесконечной. Чтобы устранить эту бесконечность, оставаясь в пределах теории процессов Маркова, потребовалось бы рассматривать уравнение как минимум третьего порядка. Реальный радиотехнический случайный процесс является аналитическим, все его производные с вероятностью единица конечны, поэтому точно описать его в рамках теории процессов Маркова нельзя. Чем точнее мы хотим аппроксимировать его марковским процессом, тем больше компонент последний должен содержать, тем больший порядок уравнения нужно брать.

Рассмотрим для примера аналитический случайный процесс, имеющий корреляционную функцию $R(\tau) = e^{-\frac{\beta^2\tau^2}{4}}$, и спектральную интенсивность

$$S[\xi, \omega] = \frac{4\sigma^2}{\beta}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}}. \quad (4.285)$$

Разлагая экспоненту $e^{\frac{\omega^2}{\beta^2}}$ в ряд Тейлора и оставляя лишь $n$ членов, заменим ее в выражении (285) на сумму

$$1 + \frac{\omega^2}{\beta^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\omega^{2n}}{\beta^{2n}}.$$

При этом процесс $\xi(t)$ заменится на процесс Маркова $\xi_n(t)$, и формула (285) примет вид

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{\beta^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\omega^{2n}}{\beta^{2n}}\right) S[\xi_n, \omega] = \frac{4\sigma^2}{\beta}\sqrt{\pi}. \quad (4.286)$$

Подобрав соответствующий полином $P_n(p)$, представим $1 + \frac{\omega^2}{\beta^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\omega^{2n}}{\beta^{2n}}$ в виде $P_n(i\omega)P_n(-i\omega)$, а правую часть равенства (286) представим как спектральную интенсивность дельта-коррелированного процесса

$$S[\zeta, \omega] = \frac{4\sigma^2}{\beta}\sqrt{\pi},$$

Тогда (286) примет вид

$$|P_n(i\omega)|^2 S[\xi_n, \omega] = S[\zeta, \omega]$$

и будет эквивалентно дифференциальному уравнению $n$-го порядка

$$P_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\xi_n = \zeta(t). \quad (4.287)$$

Из последнего следует, что $\xi_n(t)$ вместе с производными $\frac{d\xi_n(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\xi_n}{dt^{n-1}}$ образует в совокупности $n$-мерный процесс Маркова. Чем больше $n$, тем меньше $\xi_n(t)$ отличается от $\xi(t)$.

Процесс $\xi_1(t)$ $(n=1)$ есть экспоненциально-коррелированный марковский процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{\beta}\dot{\xi}_1 + \xi_1 = \zeta.$$

При этом

$$\langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = \sigma^2 \sqrt{\pi} e^{-\beta|\tau|}. \quad (4.288)$$

Более близкий к $\xi(t)$ процесс $\xi_2(t)$ имеет корреляционную функцию

$$\langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = \sigma^2 \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2}+1}} e^{-a|\tau|} \left[ \cos b\tau + \frac{a}{b} \sin b|\tau| \right] \quad (4.289)$$

$$\left( a = \beta \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \; b = \beta \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \; \frac{a}{b} = \sqrt{2}+1 \right)$$

и соответствует уравнению

$$\frac{1}{\beta^2 \sqrt{2}} \ddot{\xi} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\beta} \dot{\xi} + \xi = \zeta.$$

## § 5. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайные процессы, встречающиеся в радиотехнике, не исчерпываются стационарными процессами, рассмотренными в § 2. В связи с развитием статистической радиотехники как экспериментальной, так и теоретической, все чаще приходится иметь дело с нестационарными процессами. Из обширного класса нестационарных случайных процессов нами будут рассмотрены лишь некоторые важнейшие типы.

### 1. Процессы с медленными нестационарными изменениями

Этот тип нестационарных процессов характеризуется тем, что случайная функция ведет себя почти как стационарная на больших интервалах времени, не слишком сильно превосходящих время корреляции. Среднее значение $m_1(t)$ и корреляционные функции $k_2(t, t+\tau)$, $k_3(t, t+\tau_1, t+\tau_2)$; ..., хотя и зависят от абсолютного времени $t$ (а не только от разности времен), но мало изменяются в течение времен порядка времени корреляции $\tau_{\text{кор}}$. Применительно к $m_1$ и корреляционной функции $k_2$ это условие аналитически записывается следующим образом:

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} \tau_{\text{кор}} \ll m_1, \quad \frac{\partial k_2}{\partial t} \tau_{\text{кор}} \ll k_2. \quad (5.1)$$

Для такого процесса можно определить спектральную плотность

$$S[\xi, \omega, t] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} m_2(t, t+\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (5.2)$$

медленно меняющуюся со временем $t$. Под знаком интеграла в (2) вместо $m_2(t, t+\tau)$ можно взять $m_2(t-\tau, t)$ или симметричное выражение $m_2\left(t-\frac{\tau}{2}, t+\frac{\tau}{2}\right)$. Спектральная плотность (2) для процесса с медленными нестационарными изменениями играет ту же роль, что и обычная спектральная плотность для стационарного процесса.

Реальные процессы, встречающиеся в радиотехнике, всегда имеют медленные нестационарные изменения вследствие нестабильности параметров приборов. Эти изменения несущественны, если время нестационарности $k_n / \frac{\partial k_n}{\partial t}$ значительно превосходит постоянные времени, существенные для данной задачи. В противном случае необходим учет нестационарности.

## 2. Процессы установления

В радиотехнических устройствах флюктуационные процессы устанавливаются не сразу, первое время после начала работы этих устройств сказываются начальные условия С течением времени влияние начальных условий ослабевает и флюктуационный процесс асимптотически приближается к стационарному.

Возьмем для примера нормальный стационарный случайный процесс $\xi(t)$, имеющий среднее значение $m$ и корреляционную функцию $\sigma^2 R(\tau)$. Если в начальный момент времени $t = 0$ функция $\xi(t)$ имела известное детерминированное значение $\xi(0) = a$, то согласно формуле (3.26) в дальнейшем флюктуационный процесс описывается условным средним значением

$$m_1(t) = m + R(t)[a - m]$$

и корреляционной функцией

$$k_2(t_1 t + \tau) = \sigma^2 [R(\tau) - R(t) R(t + \tau)].$$

Последние зависят от $t$ и поэтому флюктуационный процесс $\xi(t)$ является нестационарным. Однако спустя время, значительно превосходящее время корреляции ($t \gg \tau_{кор}$, $t + \tau \gg \tau_{кор}$) функции $R(t)$, $R(t+\tau)$ обратятся в нуль и приведенные выражения перейдут в вы-

ражения $m$, $\sigma^2 R(\tau)$, которые соответствуют стационарному процессу. Время установления в данном случае совпадает с временем корреляции исходного процесса.

Во многих случаях флюктуационный процесс в радиотехническом устройстве описывается дифференциальным уравнением, например первого порядка

$$\dot{\xi} = f(\xi) + \zeta(t), \tag{5.3}$$

в которое входит стационарное внешнее случайное воздействие $\zeta(t)$. Функция $f$ обычно такова, что в системе с течением времени устанавливается стационарный флюктуационный процесс. Первое же время в системе протекает нестационарный процесс установления, который можно исследовать при помощи методов, изложенных в разд. 4 § 4.

### 3. Процессы со стационарными приращениями

При некоторых видах функции $f(\xi)$ в уравнении (3) флюктуационный процесс $\xi(t)$ не переходит в стационарный процесс при сколь угодно большом времени $t$, прошедшем с начального момента. Так обстоит дело, в частности, в случае уравнения

$$\dot{\xi} = \zeta(t), \tag{5.4}$$

которое описывает процесс $\xi(t)$ со стационарными приращениями.

Вследствие стационарности функции $\zeta(\xi)$ приращение

$$\xi(t_0 + T) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} \zeta(t)\, dt$$

за интервал времени длительностью $T$ имеет одинаковые статистические свойства независимо от выбранного момента $t_0$. В дальнейшем ради сокращения записи будем полагать $t_0 = 0$, $\xi(t_0) = 0$.

Вычитая из интеграла

$$\xi(t) = \int_0^t \zeta(t')\, dt' \tag{5.5}$$

его среднее значение, возводя в квадрат и усредняя, получаем

$$\mathrm{D}\xi(t) = \int_0^t \int_0^t k_\zeta(t_1 - t_2)\, dt_1 dt_2 = 2\int_0^t (t-\tau)\, k_\zeta(\tau)\, d\tau. \quad (5.6)$$

Если продифференцировать (6) по $t$, то будем иметь

$$\frac{d}{dt}\mathrm{D}\xi(t) = 2\int_0^t k_\zeta(\tau)\, d\tau. \quad (5.7)$$

Иногда последним равенством удобно пользоваться, придав ему вид

$$\frac{d}{dt}\mathrm{D}\xi(t) = 2\int_0^\infty k_\zeta(\tau)\, d\tau - 2\int_t^\infty k_\zeta(\tau)\, d\tau$$

или

$$\frac{d}{dt}\mathrm{D}\xi(t) = \frac{1}{2}\mathrm{S}[\zeta - \bar{\zeta},\ 0] - 2\int_t^\infty k_\zeta(\tau)\, d\tau. \quad (5.8)$$

Для определения дисперсии $\mathrm{D}\xi(t)$ при помощи равенства (7) или (8) следует проинтегрировать обе части равенства по $t$ с учетом начального условия

$$\mathrm{D}\xi(0) = 0. \quad (5.9)$$

Отыскав дисперсию $\mathrm{D}\xi(t)$ как функцию времени, мы можем вычислить корреляционную функцию $k_\xi(t_1, t_2)$.

Если в тождество

$$ab = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a-b)^2]$$

подставить $a = \xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}$, $b = \xi(t_2) - \overline{\xi(t_2)}$ и усреднить, то легко получить

$$k_\xi(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\{\mathrm{D}\xi(t_1) + \mathrm{D}\xi(t_2) - \mathrm{D}[\xi(t_1) - \xi(t_2)]\}.$$

Однако вследствие стационарности приращений имеем

$$\mathrm{D}[\xi(t_1) - \xi(t_2)] = \mathrm{D}\xi(|t_1 - t_2|).$$

Поэтому

$$k_\xi(t_1,\ t_2)=\frac{1}{2}\{\mathrm{D}^\xi(t_1)+\mathrm{D}^\xi(t_2)\ -\mathrm{D}^\xi(|\,t_1-t_2\,|)\}. \quad (5.10)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть $\zeta(t)$ нормальный дельта-коррелированный процесс с нулевым средним значением. Подставляя в (6) корреляционную функцию $k_\zeta(\tau)=K\delta(\tau)$, находим

$$\mathrm{D}^\xi(t)=Kt. \quad (5.11)$$

Следовательно, приращение за время $t$ описывается распределением

$$w(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi Kt}}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{2Kt}\right\}.$$

Вследствие дельтаобразного вида корреляционной функции $k_\zeta(\tau)$ приращения процесса $\xi(t)$ на неперекрывающихся интервалах времени являются независимыми. Поэтому $\xi(t)$ есть процесс Маркова с вероятностью перехода

$$p(\xi_\tau,\ \xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi K\tau}}\exp\left\{-\frac{(\xi_\tau-\xi)^2}{2K\tau}\right\}. \quad (5.12)$$

Описанный нормальный процесс с независимыми приращениями иногда называют процессом Винера.

Согласно формуле (10) приращение (5) имеет корреляционную функцию

$$k_\xi(t_1,\ t_2)=\frac{K}{2}\,[t_1+t_2-|\,t_1-t_2|]. \quad (5.13)$$

2) Предположим теперь, что стационарный процесс $\zeta(t)$ имеет спектральную интенсивность

$$\mathrm{S}[\zeta,\ \omega]=a\omega^{1-\alpha}, \quad (5.14)$$

где

$$0\leqslant\alpha<1.$$

Применяя формулу

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-i\tau\omega}\omega^{p-1}d\omega=(i\tau)^{-p}\Gamma(p),$$

для данного случая получаем

$$k_\zeta(\tau) = \frac{a}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\tau\omega} \omega^{1-\alpha} d\omega =$$

$$= \frac{a}{2\pi} \cos\left[(2-\alpha)\frac{\pi}{2}\right] \Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha-2} \qquad (5.15)$$

$$(\tau > 0)$$

или, пользуясь формулами преобразования гамма-функции,

$$k_\zeta(\tau) = \frac{a}{4} \frac{\tau^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}. \qquad (5.16)$$

При нулевых значениях $\tau$ найденное выражение несправедливо, однако из него видно, что вблизи нуля функция $k_\zeta(\tau)$ принимает неограниченные значения. Включая в рассмотрение нулевую точку $\tau = 0$ к выражению (16), следовало бы добавить дельтаобразный выброс типа $c\delta(\tau)$ (с бесконечным коэффициентом $c$). Бесконечная дисперсия $D\zeta = k_\zeta(0)$ в данном случае имеет ту же природу, что и бесконечная дисперсия дельта-коррелированного шума. Она обязана наличию в $S[\zeta, \omega]$ спектральных составляющих высоких частот. Поскольку в реальных процессах практически отсутствуют спектральные компоненты с частотой, превышающей некоторую верхнюю предельную частоту $\omega_в$, то их дисперсия конечна и по порядку величины равна

$$k_\zeta(0) \sim \frac{a}{4} \frac{\omega_в^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}. \qquad (5.17)$$

При $\alpha \to 1$ процесс $\zeta(t)$ переходит в дельта коррелированный шум, а в том случае, когда $\alpha = 0$, формула (15) дает

$$k_\zeta(\tau) = -\frac{a}{2\pi}\frac{1}{\tau^2}, \quad (\tau > 0). \qquad (5.18)$$

Переходя к вычислению дисперсии интегрального процесса $\xi(t)$, воспользуемся формулой (8). Учитывая (14), (16), при этом получаем

$$\frac{d}{dt} D\xi(t) = \frac{a}{2} \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}. \qquad (5.19)$$

Интегрирование при условии (9) дает

$$D\xi(t) = \frac{a}{2} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} \quad (0<\alpha<1). \qquad (5.20)$$

Случай $\alpha = 0$ нуждается в особом рассмотрении. Согласно (8), (18) имеем

$$\frac{d}{dt} D\xi(t) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{t}. \qquad (5.21)$$

Повторный интеграл расходится, причем формально результат интегрирования можно записать

$$D\xi(t) = \frac{a}{\pi}(\ln t - \ln 0). \qquad (5.22)$$

Бесконечные значения $\ln 0$ обусловлены высокими частотами. Если ввести в рассмотрение верхнюю предельную частоту $\omega_в$, то интегрирование выражения (21) следует производить не от нуля, а от $\frac{1}{\omega_в}$ до $t$. Поэтому формула (22) заменится на равенство

$$D\xi(t) = \frac{a}{\pi} \ln \omega_в t \quad (\alpha = 0). \qquad (5.23)$$

Зная дисперсию, можно найти корреляционную функцию приращения $\xi(t)$ за время $t$. Согласно формуле (10) получаем

$$k_\xi(t_1, t_2) = \frac{a}{4} \frac{t_1^{\alpha} + t_2^{\alpha} - |t_1 - t_2|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} \quad (0<\alpha<1). \qquad (5.24)$$

$$k_\xi(t_1, t_2) = \frac{a}{2\pi} \ln \frac{\omega_в t_1}{|t_1 - t_2|} \quad (\alpha = 0). \qquad (5.25)$$

Если теперь зафиксировать разность $t_2 - t_1 = \tau$ и устремить к бесконечности время $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, то, как видно из полученных выражений, корреляционная функция не будет стремиться к конечному пределу, так что процесс $\xi(t)$ не является процессом установления. Однако при условии $\tau \ll t$ выражения (24), (25) можно несколько упростить. Производя разложение в ряд Тейлора по $\tau$, убеждаемся, что

$$\left(t+\frac{\tau}{2}\right)^{\alpha}+\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^{\alpha}=2t^{\alpha}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}t^{\alpha}\frac{\tau^2}{t^2}+\ldots$$

$$(0<\alpha<1),$$

$$\ln\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\ln\left(t-\frac{\tau}{2}\right)=2\ln t-\frac{\tau^2}{2t^2}+\ldots\ (\alpha=0).$$

Следовательно, с погрешностью порядка $\tau^{\alpha}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{2-\alpha}$ имеем

$$k_{\xi}\left(t-\frac{\tau}{2},\ t+\frac{\tau}{2}\right)=\frac{a}{4}\frac{2t^{\alpha}-\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}},\qquad(5.26)$$

$$(0<\alpha<1),$$

$$k_{\xi}\left(t-\frac{\tau}{2},\ t+\frac{\tau}{2}\right)=\frac{a}{2\pi}\ln\frac{\omega_{\text{в}}t^2}{\tau}\quad(\alpha=0).\qquad(5.27)$$

Если бы интегральный процесс $\xi(t)$ был стационарным, то он имел бы спектральную плотность

$$S[\xi,\ \omega]=\frac{1}{\omega^2}S[\zeta,\ \omega]=\frac{a}{\omega^{1+\alpha}}.\qquad(5.28)$$

Отметим, что корреляционным функциям

$$k_{\xi}(\tau)=C-\frac{a}{4}\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}},$$

$$k_{\xi}(\tau)=C-\frac{a}{2\pi}\ln\tau\qquad(5.29)$$

соответствует именно такая спектральная интенсивность при любых постоянных $C$. Правда, для идеального процесса, для которого зависимость (28) справедлива во всем диапазоне частот вплоть до нулевых постоянная $C$ должна быть бесконечна, чтобы удовлетворить требова-

нию положительной определенности корреляционной функции $k_\xi(\tau)$. Для реальных же стационарных процессов, для которых зависимость (28) имеет место лишь для не слишком малых частот $\omega > \omega_н$, а при меньших частотах $\omega < \omega_н$ стремится к конечному значению порядка $\frac{a}{\omega_н^{1+}}$, постоянные $C$ в (29) конечны и зависят от $\omega_н$. Указанные формулы при этом записываются в виде

$$k_\xi(\tau) = \frac{d}{4} \frac{\omega_н^{-\alpha} - \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}},$$

$$k_\xi(\tau) = \frac{a}{2\pi} \ln \frac{\omega_в}{\omega_н 2\tau} \quad (\alpha = 0). \tag{5.30}$$

Вследствие сказанного процесс со спектральной интенсивностью (28) при времени наблюдения $t < \frac{1}{\omega_н}$ можно интерпретировать как нестационарный процесс с корреляционной функцией (26), (27), а при времени наблюдения $t > \frac{1}{\omega_н}$ этот процесс следует представлять как стационарный процесс с корреляционной функцией (30). Различие между этими случаями сводится к различной интерпретации постоянных $C$ в формулах (29).

## 4. Периодически нестационарные случайные процессы

В то время как статистические характеристики стационарного процесса согласно (2.1) не меняются при произвольном сдвиге времени (замене $t$ на $t+a$), характеристики периодически нестационарного процесса не изменяются лишь при сдвиге на величину $a$, кратную периоду $T_0$, т. е. при $a = nT_0$ ($n$ — целое число). Вследствие этого плотности распределения, моментные и корреляционные функции периодически нестационарного процесса зависят не только от разности времен, но и от абсолютного времени, однако последняя зависимость является периодической. Представляя ее тригонометрическим рядом, среднее значение и корреляционную функцию можно записать

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n e^{2\pi i n \frac{t}{T_0}} = m_0 + 2\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{2\pi i n \frac{t}{T_0}}, \tag{5.31}$$

$$k\left(t-\frac{\tau}{2},\quad t+\frac{\tau}{2}\right)=k_0(\tau)+2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}k_n(\tau)\,e^{2\pi i n\frac{t}{T_0}}. \quad (5.32)$$

Здесь $m_n$ и $k_n(\tau)$ в общем случае комплексны ($m_{-n}=m_n^*$).

Если произвести сдвиг времени на величину $0<a<T_0$, то случайная функция $\xi_a(t)=\xi(t+a)$ по своим статистическим свойствам будет отличаться от исходного процесса $\xi(t)$. В общем случае

$$\langle\xi_a(t)\rangle=m(t+a)\neq m(t);\ \langle\xi_a(t_1)\xi_a(t_2)\rangle=$$
$$=m_2(t_1+a,\ t_2+a)\neq m_2(t_1,\ t_2);\ \ldots$$

Пользуясь радиотехническим языком, можно сказать, что процессы $\xi(t)$ и $\xi_a(t)$ имеют различную «фазу». Для некоторых радиотехнических устройств фаза периодического процесса является весьма существенной, такие устройства можно назвать когерентными. Для других — некогерентных — устройств фаза процесса несущественна, так как они не реагируют на нее, производя усреднение по времени. В последнем случае периодически нестационарный процесс можно заменить на стационарный, соответствующий случайному разбросу фазы.

Чтобы показать, как это делается, рассмотрим случайную функцию $\xi(t)=\xi_a(t)$, где фаза $a$ полагается случайной величиной, статистически независимой от $\xi(t)$ и имеющей равномерное распределение

$$w(a)=\frac{1}{T_0}\ \text{при}\ 0<a<T_0.$$

Найдем среднее значение $m$ и корреляционную функцию $\tilde{k}$ указанного процесса. Производя сначала усреднение по $\xi(t)$, а затем по $a$, имеем

$$\tilde{m}=\langle m(t+a)\rangle=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}m(t+a)\,da;$$

$$\tilde{m}_2(t_1,\ t_2)=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}m_2(t_1+a,\ t_2+a)\,da.$$

Записывая здесь $m_2(t, t')$ в форме $m_1(t)m_1(t') + k(t, t')$ и подставляя (31), (32), получаем после интегрирования

$$\tilde{m} = m_0,$$

$$\tilde{m}_2(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n m_{-n} e^{2\pi i n \frac{t_1 - t_2}{T_0}} + k_0(t_1 - t_2). \qquad (5.33)$$

Вычитая $\tilde{m}^2$, находим корреляционную функцию

$$\tilde{k}(\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} |m_n|^2 \cos\frac{2\pi n\tau}{T_0} + k_0(\tau). \qquad (5.34)$$

Аналогичным образом усреднение по фазе можно провести для моментных функций более высоких порядков и для плотностей распределения. Для двумерной плотности распределения, в частности, имеем

$$\tilde{w}(\xi_1, \xi_2, t_2 - t_1) = \frac{1}{T_0}\int w_\xi(\xi_1, \xi_2, t_1 + a, t_2 + a)\, da. \qquad (5.35)$$

В результате подобного усреднения остается зависимость лишь от разности времен, так что процесс $\tilde{\xi}(t)$, действительно, является стационарным.

Найденные формулы можно применять и в том случае, когда исходный процесс $\xi(t)$ является периодическим, но не случайным. Взяв в качестве примера

$$\xi(t) = A\sin\omega_0 t = \frac{A}{2i}(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}), \qquad (5.36)$$

имеем

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad m_1 = \frac{A}{2i}, \quad m_0 = m_2 = \ldots = 0, \quad k_2 = 0.$$

Формула (34) при этом дает

$$\tilde{k}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau.$$

Функции (36) соответствует двумерный закон распределения

$$w_\xi(\xi, \xi', t, t') = \delta(\xi - A\sin\omega_0 t)\,\delta(\xi' - A\sin\omega_0 t').$$

Подставляя его в (35), находим двумерное распределение стационарного процесса $\tilde{\xi}(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ ($\varphi = \omega_0 a$) со случайно распределенной фазой

$$\tilde{w}(\xi_1, \xi_2, \tau) = [2\pi\sqrt{A^2 - \xi_1^2}]^{-1}\,[\delta(\xi_2 - \xi_1\cos\omega_0\tau - \\ - \sqrt{A^2 - \xi_1^2}\sin\omega_0\tau) + \delta(\xi_2 - \xi_1\cos\omega_0\tau + \\ + \sqrt{A^2 - \xi_1^2}\sin\omega_0\tau)] = \frac{1}{\pi}\,|\sin\omega_0\tau|\,\delta(\xi_1^2 + \\ + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2\cos\omega_0\tau - A^2\sin^2\omega_0\tau). \tag{5.37}$$

## § 6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕК И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

В связи с развитием радиосвязи, автоматики и телемеханики, а также других областей радиотехники широкое применение получили импульсные сигналы, причем положение импульсов, их длительность или другие параметры часто являются случайными. Между различными импульсами могут существовать корреляции разного рода. Для рационального конструирования радиоаппаратуры нужно знать результирующие статистические характеристики случайных процессов, получаемых при наложении подобных импульсов. В настоящем параграфе мы уделим основное внимание задаче вычисления спектральной плотности последовательности импульсов. Излагаемая здесь теория случайных точек может быть применена не только к импульсным сигналам, но и в других случаях, когда случайный процесс распадается на дискретные элементы или события, например в статистической теории взаимодействия многих частиц.

### 1. Способы описания системы случайных точек

Во многих случаях приходится иметь дело с совокупностью точек, положение которых в определенном пространстве, и в частности на оси времени, является случайным. Подобные точки мы будем называть случайными точками. В качестве таковых могут выступать моменты совершения каких-либо случайных событий, точки пересечения случайной функции с некоторой кривой, центры тяжести частиц в статистической физике и т. п.

Задавая координаты случайных точек, конечно, можно перейти к рассмотрению совокупности случайных величин. Однако такая форма рассмотрения неудобна тем, что само число случайных точек часто, в свою очередь, является случайным, а также тем, что при этом теряют наглядность представления, связанные с пространственными или временными соотношениями (например, понятие стационарности и т. п.).

В частном случае, когда отсутствуют всякие корреляции между выпадением случайных точек в различных местах, точки распределены по закону Пуассона. Излагаемая ниже теория охватывает всевозможные виды корреляций между случайными точками и поэтому выводимые формулы справедливы в общем случае.

В дальнейшем будем рассматривать одинаковые случайные точки в одномерном пространстве, которое можно интерпретировать как ось времени. Все приводимые ниже понятия и соотношения допускают обобщение на системы точек в многомерном пространстве и на точки нескольких видов.

Статистические свойства системы случайных точек исчерпывающим образом описываются последовательностью функций распределения: $f_1(t_1)$, $f_2(t_1, t_2)$, $f_3(t_1, t_2, t_3), \ldots$

Здесь значения $t_1, t_2, \ldots$ берутся из области определения системы случайных точек. Указанные функции распределения характеризуют вероятность

$$dP = [f_s(t_1, \ldots, t_s) + O(\Delta)]\,\Delta_1 \ldots \Delta_s \qquad (6.1)$$

одновременного выпадения хотя бы по одной случайной точки на каждом из интервалов

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta_1, \ldots, t_s \leqslant t \leqslant t_s + \Delta_s \qquad (6.2)$$

$$(\Delta_1, \ldots, \Delta_s \leqslant \Delta).$$

Значения $t_1, \ldots, t_s$ предполагаются несовпадающими ($t_i \neq t_j$ ни при каких $i \neq j$), а $\Delta$ достаточно малым, чтобы интервалы (2) не перекрывались.

Для случайных точек, характеризующихся непрерывными статистическими свойствами, функции распределения являются непрерывными и их значения при совпадающих аргументах, например при $t_i = t_j$, целесообразно определять как предел, соответствующий $t_i \to t_j$.

Описанные функции распределения удобны тем, что они характеризуют локальные статистические свойства в местах, соответствующих значениям аргументов, безотносительно к статистическим свойствам в других частях пространства.

Выберем интервал $0 \leqslant t \leqslant T$ из области определения системы случайных точек и рассмотрим производящий функционал

$$L_T[v(t)] = \left\langle \prod_{j=1}^{n} [1 + v(t_j)] \right\rangle. \qquad (6.3)$$

Здесь $n$ — число случайных точек, выпавших в указанном интервале; $t_1, \ldots, t_n$ — координаты места их выпадения. Класс функций $v(t)$ ограничен определенными требованиями, которые зависят от рода случайных точек, их мы не будем касаться.

Различные системы точек описываются различными производящими функционалами. Рассмотрим для примера несколько простых систем.

Пример 1. Пусть известно, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T_1$, $(T_1 > T)$ выпадает фиксированное число $N$ случайных точек. Места их выпадения равновероятны и статистически независимы между собой. Тогда положение каждой точки описывается плотностью вероятности

$$w(t_j) = \frac{1}{T_1} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_1$$

и поэтому

$$\langle 1 + v(t_j) \rangle = 1 + \frac{1}{T_1} \int_0^T v(t)\, dt.$$

Учитывая, кроме того, что среднее от произведения $\prod [1 + v(t_j)]$ вследствие независимости распадается на произведение средних $\langle 1 + v(t_j) \rangle$, будем иметь

$$L_T[v(t)] = \left[ 1 + \frac{1}{T_1} \int_0^T v(t)\, dt \right]^N.$$

Пример 2. Если производить пропорциональное увеличение длины отрезка $T_1$ и числа точек $N$, так чтобы

их отношение $N/T_1=\beta$, равное средней плотности точек, оставалось постоянным, то в пределе будем иметь

$$L_T[v(t)]=\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{\beta}{N}\int_0^T v(t)\,dt\right]^N=\exp\left\{\beta\int_0^T v(t)\,dt\right\}.$$

Такой производящий функционал соответствует пуассоновской системе точек, которая будет рассмотрена в дальнейшем (разд. 3). Более сложные виды производящих функционалов будут приведены в разд. 4.

Для системы случайных точек с непрерывными свойствами производящий функционал выражается через функции распределения по формуле

$$L_T[v(t)]=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\int_0^T\dots\int_0^T f_s(t_1,\dots,t_s)\times$$
$$\times v(t_1)\dots v(t_s)\,dt_1\dots dt_s. \qquad (6.4)$$

Для других систем точек, когда функции распределения могут иметь дельтаобразные выбросы в местах совпадения аргументов, равенство (4) может служить для полного определения функций распределения при помощи производящего функционала (3).

Производящий функционал полностью характеризует систему случайных точек. В этом отношении его роль аналогична роли, которую играет характеристический функционал в теории случайных функций. Производящий функционал $L_{t',t''}[v]$ для меньшего интервала $[t', t'']$, являющегося частью интервала $[0, T]$, может быть получен из $L_T[v]$ приравниванием нулю функции $v(t)$ вне интервала $[t', t'']$ (как и в случае характеристического функционала).

Наряду с функциями $f_s$ удобно ввести функции корреляции распределения

$$g_1(t),\ g_2(t_1,\ t_2),\ g_3(t_1,\ t_2,\ t_3),\dots \qquad (6.5)$$

при помощи равенства

$$1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha,\dots,\omega} f_s(t_\alpha,\dots,t_\omega)z_\alpha\dots z_\omega=$$
$$=\exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha,\dots,\omega} g_s(t_\alpha,\dots,t_\omega)z_\alpha\dots z_\omega\right\}, \qquad (6.6)$$

справедливого при произвольных $z_1, z_2, \ldots$, а также любых значениях $t_1, t_2, \ldots$ из области определения системы случайных точек.

Функции корреляции (5) находятся в таких же соотношениях с функциями распределения как корреляционные функции (1.64) с моментными функциями (1.63). Так, записывая применительно к $f_s$ и $g_s$ формулы (1.69), имеем

$$f_1(t_1) = g_1(t_1),$$

$$f_2(t_1, t_2) = g_2(t_1, t_2) + g_1(t_1)\, g_1(t_2),$$

$$f_3(t_1, t_2, t_3) = g_3(t_1, t_2, t_3) + 3\,\{g_1(t_1)\, g_2(t_2, t_3)\}_s + \\ + g_1(t_1)\, g_1(t_2)\, g_1(t_3); \qquad (6.7)$$

. . . . . .

Здесь $\{\ldots\}_s$ имеет тот же смысл, который объяснен на стр. 23.

Система случайных точек называется стационарной, если описывающие ее функции распределения зависят лишь от разности времен

$$f_s(t_1, t_2, \ldots, t_s) = f_1'(t_2 - t_1, \ldots, t_s - t_1).$$

Чаще всего встречаются эргодические системы случайных точек, характеризующиеся тем, что корреляции между выпадением точек в различные моменты времени исчезают при раздвижении последних. Это значит, что функции корреляции распределения обращаются в нуль

$$g_s(t_1, \ldots, t_s) \to 0, \qquad (6.8)$$

если хотя бы одна разность аргументов $t_i - t_j$ неограниченно возрастает ($|t_i - t_j| \to \infty$). Сказанное не относится к функциям распределения: они обращаются при этом в произведение функций распределений низшего порядка (как и моментные функции при исчезновении статистической зависимости).

Выбирая точки $t_1, t_2, \ldots$ в равенстве (6) все ближе и ближе друг к другу и распоряжаясь соответствующим

образом величинами $z_1, z_2, \ldots$, преобразуем выражение (4) к виду

$$L_T[v(t)] = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\int_0^T\ldots\int_0^T g_s(t_1,\ldots,t_s)\,v(t_1)\ldots v(t_s)\,dt_1\ldots dt_s\right\}. \tag{6.9}$$

Отсюда видно, что функции корреляции распределения могут быть определены как функциональные производные от логарифма производящего функционала

$$g_s(t_1,\ldots,t_s) = \frac{\delta^s \ln L_T[v(t)]}{\delta v(t_1)\ldots\delta v(t_s)}\Big|_{v(t)\equiv 0}, \tag{6.10}$$

в то время как

$$f_s(t_1,\ldots,t_s) = \frac{\delta^s L_T[v(t)]}{\delta v(t_1)\ldots\delta v(t_s)}\Big|_{v(t)\equiv 0}. \tag{6.11}$$

Через производящий функционал просто выражаются некоторые величины и функции, характеризующие систему случайных точек. Так, для характеристической функции случайного числа $n$ точек, выпавших на рассматриваемом интервале, имеем

$$\langle e^{iun}\rangle = L_T[e^{iu}-1]. \tag{6.12}$$

Вероятность того, что в нем не выпадает ни одной точки, дается формулой

$$P\{n=0\} = L_T[-1]. \tag{6.13}$$

Приведем также без вывода несколько формул, связанных с условными функциями распределения $p_1(t_1, T)$, $p_2(t_1, t_2, T), \ldots$ Последние определяют вероятность

$$dP = p_s(t_1,\ldots,t_s,T)\cdot\Delta_1\ldots\Delta_s + \Delta^{s+1}\ldots \tag{6.14}$$

того, что в каждый из интервалов $[t_1, t_1+\Delta], \ldots, [t_s, t_s+\Delta]$ попадет по одной точке и при этом всего в интервал $[0, T]$ попадает именно $s$ точек $(n=s)$. Условные функции распределения, в отличие от $f_s$, уже не являются локальными статистическими характеристиками, так как их значения в моменты $t_1,\ldots t_s$ зависят от выбранного интер-

вала $[0, T]$. Условные функции выражаются через безусловные по формуле

$$p_s(t_1, \ldots, t_s, T) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \int_0^T \ldots \int_0^T f_{s+r}(t_1, \ldots, t_{s+r}) \times$$
$$\times dt_{s+1} \ldots dt_{s+r}. \qquad (6.15)$$

Поделив на число перестановок $s!$ выпадающих точек (которые могут по-разному распределяться между элементарными интервалами $[t_1, t_1 + \Delta_1], \ldots, [t_s, t_s + \Delta_s]$) и проинтегрировав по переменным $t_1, \ldots, t_s$, получим вероятность выпадения фиксированного числа точек

$$\mathrm{P}\{n = s\} \equiv P_s = \frac{1}{s!} \int_0^T \ldots \int_0^T p_s(t_1, \ldots, t_s, T) \times$$
$$\times dt_1 \ldots dt_s. \qquad (6.16)$$

Нормированные условные функции распределения

$$w_s(t_1, \ldots, t_s) = \frac{p_s(t_1, \ldots, t_s, T)}{s!\, P_s} \qquad (6.17)$$

по своему смыслу близки к обычным плотностям распределения вероятностей.

Решая обратную задачу, можно найти функции распределения $f_1, f_2, \ldots$, зная плотности распределения (17) и вероятности выпадения различного числа точек: $P_1$, $P_2$, ... Соответствующие формулы

$$f_s(t_1, \ldots, t_s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(s+r)!}{r!} P_{s+r} \times$$
$$\times \int_0^T \ldots \int_0^T w_{s+r}(t_1, \ldots, t_{s+r})\, dt_{s+1} \ldots dt_{s+r} \qquad (6.18)$$

обратны формулам (15). Если число точек $n$ не случайно, то (18) переходит в выражение

$$f_s(t_1, \ldots, t_s) =$$
$$= \frac{n!}{(n-s)!} \int_0^T \ldots \int_0^T w_n(t_1, \ldots, t_n)\, dt_{s+1} \ldots dt_n \quad (s \leqslant n), \qquad (6.19)$$
$$(f_s(t_1, \ldots, t_s) = 0 \text{ при } s > n).$$

## 2. Случайные функции, построенные на основе системы случайных точек

На основе заданной системы случайных точек можно различными способами построить случайную функцию. В ряде случаев приходится иметь дело со случайной функцией, определенной как сумма

$$\eta(z) = \sum_j Q(z,\ t_j), \tag{6.20}$$

где $t_j$ — случайные точки; $Q(z,\ t')$ — некоторая известная функция; $z$ обозначает совокупность каких-то аргументов и, в частности, может быть временем $t$.

Среди всех функций вида (20) особую роль играет случайная функция

$$\xi(t) = \sum_j \delta(t - t_j), \tag{6.21}$$

которую мы будем называть «случайной функцией плотности». С помощью последней может быть записана любая другая функция. Так, более общая случайная функция (20) может быть выражена через нее линейным преобразованием

$$\eta(z) = \int Q(z,\ t')\,\xi(t')\,dt'. \tag{6.22}$$

Следовательно, для определения статистических характеристик функции (20) достаточно сначала найти соответствующие характеристики случайной функции плотности.

Как и всякая случайная функция, функция (21) полностью описывается характеристическим функционалом 1.60). Если принять во внимание свойства дельта-функции, последний можно записать

$$\Theta_T[u(t)] = \left\langle \exp\left\{ i \int_0^T u(t)\,\xi(t)\,dt \right\} \right\rangle = \left\langle \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} u(t_j) \right\} \right\rangle$$

или

$$\Theta_T[u(t)] = \left\langle \prod_{j=1}^{n} e^{iu(t_j)} \right\rangle. \tag{6.23}$$

Здесь, как и в (3), $n$ — число случайных точек, выпавших в рассматриваемом интервале, $t_1, \ldots, t_n$ — их координаты.

Сравнение с равенством (3), определяющим производящий функционал, дает формулу связи этих двух функционалов

$$\Theta_T[u(t)] = L_T[e^{iu(t)} - 1]. \tag{6.24}$$

Итак, зная производящий функционал, можно определить характеристический функционал, а следовательно, и другие характеристики, в частности корреляционные функции. Последние выражаются через функции корреляции распределения. Найти соответствующие формулы можно функциональным дифференцированием по $u(t)$ с последующим приравниванием $u(t)$ нулю, а также путем использования разложений (1.68), (6.9). Так, подставляя последние разложения в (24), логарифмируя и выписывая лишь линейные и билинейные по $u(t)$ члены, имеем

$$i\int_0^T k_1(t_1)\,u(t_1)\,dt_1 + \frac{i^2}{2}\int_0^T\int_0^T k_2(t_1, t_2)\,u(t_1)\,u(t_2)\,dt_1 dt_2 +$$

$$+ \ldots = \int_0^T g_1(t_1)\,[e^{iu(t_1)} - 1]\,dt_1 + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T g_2(t_1, t_2)\times$$

$$\times [e^{iu(t_1)} - 1]\,[e^{iu(t_2)} - 1]\,dt_1 dt_2 + \ldots = i\int_0^T g_1(t_1)\times$$

$$\times u(t_1)\,dt_1 + \frac{i^2}{2}\int_0^T g_1(t_1)\,u^2(t_1)\,dt + \frac{i^2}{2}\int_0^T\int_0^T g_2(t_1, t_2)\,u(t_1)\times$$

$$\times u(t_2)\,dt_1 dt_2 + \ldots \tag{6.25}$$

Отсюда, приравнивая порознь линейные и билинейные члены, находим

$$k_1(t_1) = g_1(t_1),$$

$$k_2(t_1, t_2) = g_1(t_1)\,\delta(t_1 - t_2) + g_2(t_1, t_2). \tag{6.26}$$

Совершенно аналогично, выписывая в (25) большее количество членов, можно получить формулы для корреляционных функций более высоких порядков

$$k_3(t_1, t_2, t_3) = \delta(t_1 - t_2)\,\delta(t_1 - t_3)\,g_1(t_1) +$$
$$+ 3\,\{\delta(t_1 - t_2)\,g_2(t_1, t_3)\}_s + g_3(t_1, t_2, t_3),$$

$$k_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3)\delta(t_1 - t_4)g_1(t_1) +$$
$$+ 4\{\delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3)g_2(t_1, t_4)\}_s + 3\{\delta(t_1 - t_2) \times$$
$$\times \delta(t_3 - t_4)g_1(t_1, t_3)\}_s + 6\{\delta(t_1 - t_2)g_3(t_1, t_3, t_4)\}_s +$$
$$+ g_4(t_1, t_2, t_3, t_4), \qquad (6.27)$$

. . . . . .

Здесь $\{\ldots\}_s$, как и на стр. 23, обозначает операцию симметризации.

Нетрудно понять, что подстановка разложений (1.66), (4) в (24) даст такие же формулы связи моментных функций с функциями распределения

$$m_1(t_1) = f_1(t_1),$$
$$m_2(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2)f(t_1) + f_2(t_1, t_2),$$
$$m_3(t_1, t_2, t_3) = \delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3)f_1(t_1) +$$
$$+ 3\{\delta(t_1 - t_2)f_2(t_1, t_3)\}_s + f_3(t_1, t_2, t_3), \qquad (6.28)$$

. . . . . .

Таким образом, мы наблюдаем полную симметрию: если $g_s$ относятся к $f_s$ так же, как $k_s$ к $m_s$, то и $g_s$ относятся к $k_s$, как $f_s$ к $m_s$. В то же время в объединенной теории случайных функций — случайных точек — имеет место глубокая однородность математического аппарата, проявляющаяся, в частности, в наличии одинаковых симметрирующих сумм.

Зная корреляционные (или моментные) функции случайной функции плотности, можно найти корреляционные (моментные) функции любого другого процесса (20) путем многократного применения линейного преобразования (22).

Выше уже отмечалось, что приводимые результаты допускают обобщение на тот случай, когда рассматривается система случайных точек в многомерном пространстве. Если $z_1, \ldots, z_p$ - координаты этого пространства, то их следует брать вместо $t$. Ограничимся тем, что приведем многомерное обобщение формул (26)

$$k_1(z_1, \ldots, z_p) = g_1(z_1, \ldots, z_p),$$
$$k_2(z_1, \ldots, z_p;\ z_1', \ldots, z_p') = g_1(z_1, \ldots, z_p)\delta(z_1 - z_1')\ldots$$
$$\ldots\delta(z_p - z_p') + g_2(z_1, \ldots, z_p;\ z_1', \ldots, z_p'). \qquad (6.29)$$

### 3. Точки, распределенные по закону Пуассона. Дробовой шум

Случайные точки распределены по закону Пуассона, если отсутствуют всякие корреляции между ними, т. е. если факт выпадения одной или нескольких точек не изменяет вероятности выпадения других точек. Для таких точек все функции корреляции распределения, кроме первой $g_1(t_1)$, обращаются в нуль

$$g_2(t_1, t_2) = 0; \quad g_3(t_1, t_2, t_3) = 0; \quad \ldots \tag{6.30}$$

Согласно (9) производящий функционал в данном случае имеет вид

$$L_T[v(t)] = \exp\left\{\int_0^T g_1(t)\, v(t)\, dt\right\}. \tag{6.31}$$

Разлагая экспоненту в ряд и сравнивая с выражением (4), нетрудно убедиться, что функции распределения распадаются на произведение одномерных функций

$$f_s(t_1, \ldots, t_s) = g_1(t_1) \ldots g_1(t_s). \tag{6.32}$$

Используя формулы (15), (16), (32), получаем

$$P_s = \frac{1}{s!}\left\{\int_0^T g_1(t)\, dt\right\}^s \exp\left\{-\int_0^T g_1(t)\, dt\right\} \tag{6.33}$$

$$(s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Последнее выражение представляет собой распределение Пуассона и им часто пользуются для определения пуассоновской системы точек. В стационарном случае средняя плотность точек есть постоянная и формулы (33) принимают вид

$$P_s = \frac{(g_1 T)^s}{s!} e^{-g_1 T}. \tag{6.34}$$

Если имеется большое число взаимно независимых событий, происходящих во времени с конечной средней плотностью, то моменты наступления этих событий распределены по закону Пуассона. Рассмотрим для примера электрический ток, протекающий через диод в статическом режиме. Единичный электрон, вылетевший с катода

и достигший анода, создает импульс анодного тока стандартной формы, причем

$$\int i(t - t_j)\, dt = e \tag{6.35}$$

($e$ — заряд электрона).

Положение этого импульса на оси времени определяется моментом $t_j$ вылета электрона. Этот момент случаен. Переходя к рассмотрению других электронов, мы будем иметь совокупность случайных моментов вылета $\ldots, t_j, t_{j+1}, \ldots$, которым на оси времени соответствует система случайных точек. Будем предполагать, что различные электроны вылетают с катода независимо один от другого и, следовательно, моменты вылета распределены по закону Пуассона. Зависимость могла бы иметь место лишь для электронов, вылетающих почти в одно и то же время из близких мест катода. Этим, однако, можно пренебрегать, полагая, что размеры катода значительно превосходят возможное расстояние корреляции.

Зная средний анодный ток $\langle I_a \rangle$, находим среднее число электронов $g_1$, вылетающих в единицу времени:

$$g_1 = \frac{\langle I_a \rangle}{e}. \tag{6.36}$$

Тем самым рассматриваемая система точек является полностью определенной.

Анодный ток образуется из единичных импульсов

$$I_a(t) = \sum_j i(t - t_j) \tag{6.37}$$

и, следовательно, представляет собой случайную функцию типа (20), построенную на основе системы точек. Для определения его статистических характеристик можно использовать формулы предыдущего раздела.

Предположим сначала, что конечностью времени пролета от катода до анода можно пренебречь, считая его бесконечно малым. При этом каждый единичный импульс тока можно полагать дельтаобразным $i(t-t_j) = e\delta(t-t_j)$, и ток (37) будет иметь вид

$$I_a(t) = e \sum_j \delta(t - t_j) = e\xi(t). \tag{6.38}$$

Чтобы найти корреляционную функцию тока, воспользуемся формулой (26), полагая в ней $g_2=0$. Получим

$$k_\xi(\tau) = k_2(t,\ t+\tau) = g_1\delta(\tau) \tag{6.39}$$

или, если учесть (38) и (36),

$$\mathrm{K}\{I_a,\ I_{a\tau}\} = e\langle I_a\rangle\delta(\tau). \tag{6.40}$$

Преобразование Фурье этого выражения дает спектральную интенсивность флюктуационной составляющей $I_a - \langle I_a\rangle$ анодного тока

$$\mathrm{S}[I_a - \langle I_a\rangle,\ \omega] = e^2\mathrm{S}[\xi - \langle\xi\rangle,\ \omega] = 2e\langle I_a\rangle. \tag{6.41}$$

Согласно этой формуле, которая носит название формулы Шоттки, интенсивность флюктуаций пропорциональна заряду электрона. Это естественно, поскольку рассмотренные флюктуации, которые наглядно называют дробовыми, обусловлены дискретностью электрического заряда.

Принимая во внимание (27), нетрудно видеть, что другие корреляционные функции вследствие условия отсутствия корреляций (30), также имеют дельтаобразный вид

$$\begin{aligned}\mathrm{K}[I_a(t_1),\ \ldots,\ I_a(t_s)] &= e^s g_1\delta(t_1-t_2)\ldots\delta(t_1-t_s) = \\ &= e^{s-1}\langle I_a\rangle\delta(t_1-t_2)\ldots\delta(t_1-t_s).\end{aligned} \tag{6.42}$$

При высоких частотах, которым соответствует период колебаний, сравнимый с временем пролета, следует принимать во внимание длительность и форму каждого единичного импульса, заменяя дельта-функцию на некоторую другую функцию $G(t-t_j)$, определяемую условиями движения электрона.

Суммируя отдельные импульсы

$$i(t-t_j) = eG(t-t_j), \tag{6.43}$$

будем иметь

$$I_a(t) = e\int G(t-t')\xi(t')\,dt'. \tag{6.44}$$

Если принять во внимание формулу (39) для корреляционной функции, то

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\{I_a,\ I_{a\tau}\} &= e^2\int G(t-s)\,G(t+\tau-s)\,g_1 ds = \\ &= e\langle I_a\rangle\int G(\tau+\sigma)\,G(\sigma)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{6.45}$$

Вследствие (44) легко найти связь между спектральной интенсивностью флюктуаций тока и спектральной интенсивностью случайной функции плотности. Формула связи имеет вид

$$S[I_a - \langle I_a\rangle, \omega] = e^2 |F(i\omega)|^2 S[\xi - \langle\xi\rangle, \omega], \quad (6.46)$$

где

$$F(i\omega) = \int e^{-i\omega\tau} G(\tau)\, d\tau. \quad (6.47)$$

В то же время в силу (39)

$$S[\xi - \langle\xi\rangle, \omega] = 2g_1. \quad (6.48)$$

Поэтому

$$S[I_a - \langle I_a\rangle, \omega] = 2e\langle I_a\rangle |F(i\omega)|^2. \quad (6.49)$$

Эта формула отличается от (41) тем, что в ней имеется дополнительный множитель $|F(i\omega)|^2$, который носит название коэффициента частотной депрессии. Принимая во внимание (35), (43), легко видеть, что

$$\int G(\tau)\, d\tau = 1, \text{ т. е. } F(0) = 1. \quad (6.50)$$

Следовательно, при нулевой частоте обе формулы совпадают. При других частотах $|F(i\omega)| < 1$, и формула (49) дает уменьшенное значение интенсивности дробовых флюктуаций. Если движение электрона в пространстве катод—анод считать равноускоренным с нулевой начальной скоростью, что возможно при плоских электродах и малых плотностях пространственного заряда, то, как показывает несложный расчет, будем иметь

$$F(i\omega) = \frac{2}{(i\omega T)^2}[1 - (1 + i\omega T) e^{-i\omega T}],$$

$$|F(i\omega)|^2 = \frac{8}{(\omega T)^4}\left[1 + \frac{1}{2}(\omega T)^2 - \cos\omega T - \omega T \sin\omega T\right] \quad (6.51)$$

($T$ — время пролета).

До сих пор мы предполагали, что все электроны дают импульсы одинаковой формы Производя учет влияния продольной компоненты $v = v_j$ начальной скорости электрона, следует принимать во внимание зависимость единичного импульса

$$i(t - t_j) = eG(t - t_j, v_j) \quad (6.52)$$

от $v_j$. Суммируя подобные импульсы и вводя двумерную случайную функцию плотности

$$\xi(t, v) = \sum_j \delta(t - t_j)\,\delta(v - v_j), \tag{6.53}$$

будем иметь

$$I_a(t) = e \int\int G(t - t', v)\,\xi(t', v)\,dt'dv. \tag{6.54}$$

Здесь $G(\tau, v)$ — полностью известная функция двух переменных, определяемая условиями движения электрона. Теперь мы имеем случайную систему точек на плоскости $t$, $v$. Предполагая, как и раньше, начальные данные различных электронов независимыми, можем по-прежнему рассматривать указанные точки как пуассоновские. В силу (29) вместо формулы (39) в этом двумерном случае будем иметь

$$K[\xi(t, v),\ \xi(t + \tau, v')] = g_1(t, v)\,\delta(\tau)\,\delta(v - v'), \tag{6.55}$$

при этом

$$\langle I_a \rangle = e \int\int G(t - t', v)\,g_1(t', v)\,dt'dv = e \int g_1(v)\,dv, \tag{6.56}$$

поскольку плотность $g_1(t, v) = g_1(v)$ постоянна во времени и $\int G(\tau, v)\,d\tau = 1$ при любом $v$. Вводя нормированную плотность распределения $w(v)$ по начальным скоростям, запишем $g_1(v)$ в виде

$$g_1(v) = \frac{\langle I_a \rangle}{e}\,w(v). \tag{6.57}$$

Учитывая (54), (55) и (57), приходим к результату

$$K[I_a,\ I_{a\tau}] = e^2 \int\int G(t - t', v)\,G(t + \tau - t', v)\,g_1(v)\,dt'dv =$$

$$= e\,\langle I_a \rangle \int\int G(\sigma, v)\,G(\tau + \sigma, v)\,w(v)\,d\sigma dv. \tag{6.58}$$

## 4. Системы случайных точек, полностью определяемые первыми двумя моментами

В теории случайных функций иногда ограничиваются рассмотрением корреляций второго порядка, т. е. рассматривают лишь первые два момента случайной функции. Между тем первые два момента импульсной случайной функции типа (21) или (22) однозначно связаны с первыми двумя функциями распределения. Разрешая равенства (26), имеем

$$g_1(t) = \langle \xi \rangle,$$

$$g_2(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1)\,\xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle -$$

$$- \langle \xi(t_1) \rangle \delta(t_1 - t_2). \tag{6.59}$$

Поэтому в теории первых двух моментов функции $g_1$, $g_2$ или $f_1$, $f_2$ можно считать известными. Однако первые две функции распределения в общем случае не характеризуют полностью системы случайных точек. Поэтому для более полного описания случайных точек может возникнуть потребность рассмотрения более высоких моментов импульсного процесса. В некоторых же частных случаях такой потребности не возникает и система случайных точек, а также построенный на ней импульсный процесс полностью определяются первыми двумя функциями распределения, первыми двумя моментами. Рассмотрим два таких случая.

1. Система парнокоррелированных точек.

Случайные точки мы называем парнокоррелированными, когда все функции корреляции распределения, кроме $g_1$, $g_2$, равны нулю:

$$g_3 = g_4 = \ldots = 0. \tag{6.60}$$

Производящий функционал (9) для таких точек имеет вид

$$L_T[v(t)] = \exp\left\{\int_0^T g_1(t)\, v(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T g_2(t,\ t')\, v(t)\, v(t')\, dtdt'\right\}. \tag{6.61}$$

2. Система несближающихся точек.

Пусть все функции корреляции распределения выражаются через две функции $f_1(t)$, $R(t,\ t')$ по формулам

$$g_s(t_1, \ldots, t_s) = (-1)^{s-1}(s-1)!\, f_1(t_1)\ldots f_1(t_s) \times$$
$$\times \{R(t_2,\ t_1)\ldots R(t_s,\ t_1)\}_s, \tag{6.62}$$

где $\{\ldots\}_s$, как и раньше, обозначает операцию симметризации. Указанным функциям корреляции согласно (9) соответствует производящий функционал

$$L_T[v(t)] =$$

$$= \exp\left\{\int_0^T \ln\left[1 + \int_0^T R(t, t')\, f_1(t')\, v(t')\, dt'\right] - \frac{}{\int_0^T R(t,\ t')\, f_1(t')\, v(t')\, dt'} f_1(t) v(t)\, dt\right\}. \tag{6.63}$$

Здесь произведено суммирование ряда при помощи формулы:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}(-1)^{s-1}I^{s-1}=I^{-1}\ln(1+I).$$

Смысл функции $R(t, t')$ раскроем, положив $s=2$ в (62). Это дает

$$g_2(t_1, t_2)=-f_1(t_1)f_1(t_2)R(t_1, t_2)$$

или

$$f_2(t_1, t_2)=f_1(t_1)f_1(t_2)[1-R(t_1, t_2)]. \qquad (6.64)$$

Функцию $R(t, t')$ удобно назвать коэффициентом корреляции. Когда он равен единице, функция распределения $f_2$ вследствие (64) обращается в нуль. Мало того, при $R\approx 1$ формула (63) переходит в равенство

$$L_T[v(t)]\approx 1+\int_0^T f_1(t)\,v(t)\,dt,$$

которое согласно (4) говорит о том, что обращаются в нуль все функции распределения, кроме первой. Если $\tau_{кор}$ определяет быстроту исчезновения корреляций и $R(t, t')\approx 1$ при малых расстояниях $t-t'\ll\tau_{кор}$, то описанные случайные точки не могут, следовательно, выпадать близко друг к другу (с интервалами, много меньшими, чем $\tau_{кор}$). Поэтому мы назвали такие точки несближающимися.

При помощи выражения (63) можно найти, в частности, вероятность того события, что на интервале $0<t<T$ не выпадет ни одной точки. Используя формулу (13), имеем

$$P\{n=0\}=$$

$$=\exp\left\{\int_0^T\frac{\ln\left[1-\int_0^T R(t, t')f_1\,dt'\right]}{\int_0^T R(t, t')f_1 dt'}f_1(t)\,dt\right\}. \qquad (6.65)$$

Чтобы получать конкретные результаты, при решении ряда задач целесообразно реальные более сложные си-

стемы случайных точек заменять на системы описанного вида. Так, формулы теории несближающихся точек применяются в разд. 2 § 12 для вычисления распределения выбросов по длительности.

### 5. Спектральная плотность последовательности импульсов

Рассмотрим сначала последовательность импульсов, имеющих стандартную форму, описываемую функцией $G(t)$. Положение различных таких импульсов на оси времени является, вообще говоря, случайным, и последовательность импульсов записывается в виде суммы

$$\eta(t) = \sum_j G(t - t_j),$$

где $t_j$ — случайные точки.

Последнее преобразование можно трактовать как линейное преобразование случайной функции плотности (21)

$$\eta(t) = \int G(t - t')\,\xi(t')\,dt' \tag{6.66}$$

или в спектральной форме

$$\eta_\omega = F(i\omega)\,\xi_\omega, \tag{6.67}$$

где

$$F(i\omega) = \int e^{-i\omega\tau} G(\tau)\,d\tau,$$

$$\eta_{i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \eta(t)\,dt,$$

$$\xi_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \xi(t)\,dt.$$

Рассматриваемую последовательность импульсов мы предполагаем стационарным случайным процессом, это означает, что система случайных точек — положений импульсов — также является стационарной. В этом случае из (66) или (67) вытекает

$$\begin{gathered} \langle \eta \rangle = F(0)\langle \xi \rangle, \\ S[\eta,\ \omega] = |F(i\omega)|^2 S[\xi,\ \omega]. \end{gathered} \tag{6.68}$$

Но спектральная интенсивность $S[\xi, \omega]$ в соответствии с (2.9), (2.12), а также вторым равенством (26) или (28) легко выражается через функции $g_1$, $g_2$

$$S[\xi, \omega] = 2g_1 + 2\gamma(\omega) + 4\pi g_1^2 \delta(\omega), \tag{6.69}$$

$$S[\xi - \langle\xi\rangle, \omega] = 2[\gamma(\omega) + g_1],$$

где

$$\gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} g_2(\tau)\, d\tau. \tag{6.70}$$

После подстановки этого выражения в (68) будем иметь

$$S[\eta, \omega] = 4\pi F^2(0)\, g_1^2 \delta(\omega) + 2|F(i\omega)|^2 [\gamma(\omega) + g_1],$$

$$S[\eta - \langle\eta\rangle, \omega] = 2|F(i\omega)|^2 [\gamma(\omega) + g_1]. \tag{6.71}$$

В том частном случае, когда функция $G(\tau)$ представляет собой прямоугольный импульс фиксированной высоты $G_0$ и длительности $\tau_и$ (рис. 6.1), т. е.

$$G(\tau) = \begin{cases} G_0 \text{ при } 0 < \tau < \tau_и, \\ 0 \text{ при } \tau < 0, \quad \tau > \tau_и, \end{cases} \tag{6.72}$$

имеем

$$F(i\omega) = \frac{G_0}{i\omega}[1 - e^{-i\omega\tau_и}] \tag{6.73}$$

и формулы (68), (71) принимают вид

$$\langle\eta\rangle = G_0 \tau_и g_1, \tag{6.74}$$

$$S[\eta - \langle\eta\rangle, \omega] = \frac{8G_0^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega\tau_и}{2} [\gamma(\omega) + g_1].$$

Мы видим, что спектральная интенсивность последовательности импульсов без особого труда может быть найдена, когда известны первые две функции $g_1$ и $g_2$. В противном случае их вычисление следует проводить независимым образом на другой основе и использовать формулы (69), (71), напротив, для определения функций $g_1$, $\gamma$, $g_2$.

Рассмотрим пример именно такого типа. Пусть случайные точки $t_j$ (рис. 6.1) определяются тем, что расстояния между соседними точками — одинаковые неза-

висимые случайные величины, имеющие известный закон распределения $w(\zeta)$. Выбрав начало отсчета времени $t=0$, перенумеруем случайные точки с положительными значениями координаты $t_j>0$. Пусть $t_0$ — наименьшее из этих значений. Нумеруя остальные значения в порядке возрастания, имеем

$$t_1 - t_0 = \zeta_1, \quad t_2 - t_1 = \zeta_2, \quad \ldots$$

или

$$t_1 = t_0 + \zeta_1, \quad t_2 = t_0 + \zeta_1 + \zeta_2, \quad \ldots,$$
$$t_j = t_0 + \zeta_1 + \ldots + \zeta_j. \tag{6.75}$$

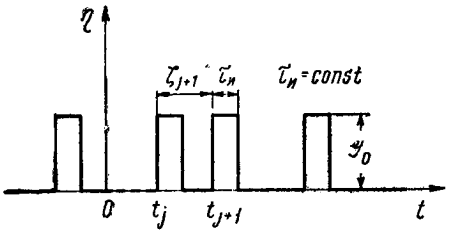



Рис. 6.1. Последовательность импульсов одинаковой высоты и длительности.

Для вычисления спектральной интенсивности случайной функции $\xi(t)=\sum_j \delta(t-t_j)$ воспользуемся формулой (2.27), которая требует совершения предельного перехода $\varepsilon \to 0$ в выражении $\varepsilon\left\langle \left| L\left[\xi, \frac{\varepsilon}{2} - i\omega\right]\right|^2\right\rangle$. Здесь $L[\xi, p]$ — преобразование Лапласа случайной функции $\xi(t)$, которое равно

$$L[\xi, p] = \int_0^\infty e^{-pt}\xi(t)\,dt =$$
$$= e^{-pt_0}[1 + e^{-p\zeta_1} + e^{-p\zeta_1 - p\zeta_2} + \ldots]. \tag{6.76}$$

Отсюда имеем

$$|L[\xi, p]|^2 = e^{-(p+p^*)t_0} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-p(\zeta_1+\ldots+\zeta_j) - p^*(\zeta_1+\ldots+\zeta_k)} \tag{6.77}$$

(значок * обозначает комплексное сопряжение).

Разобьем слагаемые последней суммы на две группы, к первой отнесем члены, для которых $j \geqslant k$, обозначив

$j-k=l$, а ко второй — остальные члены, для которых $j<k$, и обозначим $k-j=l$. Тогда (77) запишется в виде

$$|\mathrm{L}[\xi,\ p]|^2=$$

$$=\mathrm{e}^{-(p+p^*)t_0}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+p^*)(\zeta_1+\ldots+\zeta_k)-p(\zeta_{k+1}+\ldots+\zeta_{k+l})}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+p^*)(\zeta_1+\ldots+\zeta_j)-p^*(\zeta_{j+1}+\ldots+j+l}\right\}. \qquad (6.78)$$

При вычислении среднего значения от последнего выражения воспользуемся независимостью различных случайных величин $\zeta_j$. Вследствие этого каждый член указанной суммы можно будет записать в виде произведения характеристических функций, соответствующих распределению $w(\zeta)$ и взятых от различных аргументов. Так, обозначая

$$\Theta(u)=\int \mathrm{e}^{iu\zeta}w(\zeta)\,d\zeta=\langle \mathrm{e}^{iu\zeta}\rangle, \qquad (6.79)$$

имеем

$$\langle \mathrm{e}^{-p\zeta}\rangle=\Theta(ip);$$

$$\langle \mathrm{e}^{-p^*\zeta}\rangle=\Theta(ip^*)=\Theta^*(ip). \qquad (6.80)$$

Вследствие сказанного среднее от (78) примет форму

$$\langle|\mathrm{L}[\xi,\ p]|^2\rangle=\langle \mathrm{e}^{-(p+p^*)t_0}\rangle\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Theta^k(ip+ip^*)\,\Theta^l(ip)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Theta^j(ip+ip^*)\,\Theta^{*l}(ip)\right\}. \qquad (6.81)$$

Здесь ряды представляют собой геометрическую прогрессию и их можно легко просуммировать, после чего получим, полагая $p=\frac{\varepsilon}{2}-i\omega$,

$$\left\langle\left|\mathrm{L}\left[\xi,\ \frac{\varepsilon}{2}-i\omega\right]\right|^2\right\rangle=\frac{\langle \mathrm{e}^{-\varepsilon t_0}\rangle}{1-\Theta(i\varepsilon)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{1-\Theta\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2}\right)}+\frac{\Theta^*\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2}\right)}{1-\Theta^*\left(\omega+\frac{i\varepsilon}{2}\right)}\right\}. \qquad (6.82)$$

Чтобы определить спектральную интенсивность согласно (2.27), остается лишь совершить предельный переход $\varepsilon \to 0$. Если $\omega \neq 0$, $\Theta(\omega) \neq 1$, то непосредственно получаем

$$S[\xi,\omega] = \frac{2}{\langle\zeta\rangle}\left[\frac{1}{1-\Theta(\omega)} + \frac{\Theta^*(\omega)}{1-\Theta^*(\omega)}\right] = \\ = \frac{2}{\langle\zeta\rangle}\frac{1-|\Theta(\omega)|^2}{|1-\Theta(\omega)|^2}, \qquad (6.83)$$

так как $\frac{1-\Theta(i\varepsilon)}{\varepsilon} \to \langle\zeta\rangle$ согласно (1.22).

Сложнее обстоит дело с областью частот $\omega$, примыкающей к началу координат $\omega = 0$ и нуждающейся в особом рассмотрении. Для нее можно воспользоваться первыми членами разложения

$$\Theta\left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right) = 1 + i\left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)\langle\zeta\rangle + \left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)^2 \ldots, \qquad (6.84)$$

что дает

$$\frac{1}{1-\Theta\left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)} + \frac{\Theta^*\left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)}{1-\Theta^*\left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)} = \\ = \frac{1}{\langle\zeta\rangle}\left[\frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} - i\omega} + \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} + i\omega}\right]\left[1 + \left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)\ldots\right] = \\ = \frac{1}{\langle\zeta\rangle}\frac{\varepsilon}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \omega^2}\left[1 + \left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\right)\ldots\right]. \qquad (6.85)$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{\varepsilon}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \omega^2} \to 2\pi\delta(\omega) \text{ при } \varepsilon \to 0, \qquad (6.86)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственным интегрированием обеих частей. Учитывая (82), (85), (86), можно видеть, что спектральная плотность $S[\xi, \omega]$ имеет в начале координат дельтаобразную осо-

бенность. Дополняя ею формулу (83), справедливую в остальных местах, получаем

$$S[\xi, \omega] = \frac{2}{\langle\zeta\rangle} \frac{1 - |\theta(\omega)|^2}{|1 - \theta(\omega)|^2} + \frac{4\pi\delta(\omega)}{\langle\zeta\rangle^2}. \qquad (6.87)$$

Наличие дельтаобразной особенности $4\pi\delta(\omega)/\langle\zeta\rangle^2$ вызвано отличным от нуля средним значением $\langle\xi\rangle$, которое, естественно, обратно среднему расстоянию между точками $\langle\zeta\rangle$

$$\langle\xi\rangle = \langle\zeta\rangle^{-1}. \qquad (6.88)$$

Учитывая (2.12), получаем из (87) спектральную плотность для случайной функции с вычтенным средним значением

$$S[\xi - \langle\xi\rangle, \omega] = \frac{2}{\langle\zeta\rangle} \frac{1 - |\theta(\omega)|^2}{|1 - \theta(\omega)|^2}. \qquad (6.89)$$

Легко проверить, что последнее равенство можно также записать

$$S[\xi - \langle\xi\rangle, \omega] = \frac{2}{\langle\zeta\rangle} \operatorname{Re} \frac{1 + \theta(\omega)}{1 - \theta(\omega)}. \qquad (6.90)$$

Зная спектральную плотность функции $\xi(t)$, можно непосредственно записать спектральную плотность последовательности импульсов (66). Так, применяя вторую формулу (68), из (90) получаем

$$S[\eta - \langle\eta\rangle, \omega] = 2 \frac{|F(i\omega)|^2}{\langle\zeta\rangle} \operatorname{Re} \frac{1 + \theta(\omega)}{1 - \theta(\omega)}. \qquad (6.91)$$

В частном случае импульсов строго прямоугольной формы спектр каждого импульса имеет форму (73) и

$$S[\eta - \langle\eta\rangle, \omega] = \frac{8G_0^2}{\langle\zeta\rangle\omega^2} \sin^2 \frac{\omega\tau_н}{2} \frac{1 - |\theta(\omega)|^2}{|1 - \theta(\omega)|^2}. \qquad (6.92)$$

Полученные формулы позволяют определить спектр функции корреляции $g_2(\tau)$ для рассмотренной системы случайных точек. Сопоставляя (69) и (90) и учитывая (88), находим

$$\gamma(\omega) = \frac{2}{\langle\zeta\rangle} \operatorname{Re} \frac{\theta(\omega)}{1 - \theta(\omega)}. \qquad (6.93)$$

Совершая преобразование Фурье, обратное преобразованию (70), получаем функцию корреляции распределения

$$g_2(\tau) = \frac{1}{\pi \langle \zeta \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \mathrm{Re}\, \frac{\Theta(\omega)}{1-\Theta(\omega)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi \langle \zeta \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(\omega)}{1-\Theta(\omega)} \cos \omega\tau d\omega. \qquad (6.94)$$

Выведенные формулы позволяют найти связь между характеристической функцией $\Theta(\omega)$ и преобразованием Лапласа корреляционной функции $k_\xi(\tau) \equiv k(\tau)$.

Продифференцировав по $\tau$ обе части равенства (2.14), имеем

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} i\omega S[\xi - \langle \xi \rangle, \omega]\, d\omega. \qquad (6.95)$$

Подставим сюда выражение (90)

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi \langle \zeta \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} i\omega \frac{1+\Theta(\omega)}{1-\Theta(\omega)} d\omega -$$

$$- \frac{1}{4\pi \langle \zeta \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} i\omega \frac{1+\Theta(-\omega)}{1-\Theta(-\omega)} d\omega. \qquad (6.96)$$

Второй член можно также записать в форме

$$\frac{1}{4\pi \langle \zeta \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'\tau} i\omega' \frac{1+\Theta(\omega')}{1-\Theta(\omega')} d\omega' \quad (\omega' = -\omega),$$

откуда видно, что он отличается от первого заменой $\tau$ на $-\tau$.

Поскольку $\zeta$ может принимать лишь положительные значения, из (79) имеем

$$\Theta(ip) = \int_0^{\infty} e^{-p\zeta} w(\zeta)\, d\zeta,$$

т. е. $\Theta(ip)$ совпадает с изображением Лапласа функции $w(\zeta)$. Она аналитична при $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$ и интеграл

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\zeta} \Theta(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p\zeta} \Theta(ip)\, dp$$

$$(p = -i\omega)$$

есть не что иное, как обратное преобразование Лапласа.

Функция $p \dfrac{1+\Theta(ip)}{1-\Theta(ip)}$, в свою очередь, является изображением Лапласа некоторой функции. Она также аналитична при $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$ (если $\zeta$ не детерминированная величина), и интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} (-i\omega) \frac{1+\Theta(\omega)}{1-\Theta(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p\tau} p \frac{1+\Theta(ip)}{1-\Theta(ip)} dp$$

есть обратное преобразование Лапласа. Оно дает, следовательно, функцию, равную нулю при $\tau < 0$. Таким образом, в (96) при $\tau > 0$ отличен от нуля лишь первый член, а при $\tau < 0$ — второй. Оригинал Лапласа указанного выше изображения пропорционален производной от корреляционной функции

$$L\left[\frac{dk(\tau)}{d\tau}, p\right] = \frac{p}{2\langle\zeta\rangle} \frac{1+\Theta(ip)}{1-\Theta(ip)}. \qquad (6.97)$$

Учитывая, что

$$k(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} \frac{dk}{d\tau} d\tau = \int_{0}^{\tau} \frac{dk}{d\tau} d\tau - \int_{0}^{\infty} \frac{dk}{d\tau} d\tau$$

и, следовательно,

$$L[k(\tau), p] = \frac{1}{p}\left\{L\left[\frac{dk}{d\tau}, p\right] - L\left[\frac{dk}{d\tau}, 0\right]\right\}, \qquad (6.98)$$

получаем в силу (97)

$$L[k(\tau), p] = \frac{1}{2\langle\zeta\rangle} \frac{1+\Theta(ip)}{1-\Theta(ip)} - \frac{1}{p\langle\zeta\rangle^2}. \qquad (6.99)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для функции (94)

$$L[g_2(\tau), p] = \frac{1}{\langle\zeta\rangle} \frac{\Theta(ip)}{1-\Theta(ip)} - \frac{1}{p\langle\zeta\rangle^2}. \qquad (6.100)$$

Перейдем к рассмотрению последовательности неодинаковых импульсов, а именно импульсов, имеющих

строго прямоугольную форму, одинаковую высоту, но неодинаковую длительность (рис 6.2). При этом случайными точками являются не только моменты, соответствующие началу импульсов, но и моменты их конца. Следовательно, случайные точки на оси времени теперь являются неодинаковыми. Задачу можно свести, правда, к рассмотрению системы одинаковых точек, но не на прямой, а на плоскости. Тем не менее мы не будем излагать общую теорию, а ограничимся рассмотрением частной задачи.

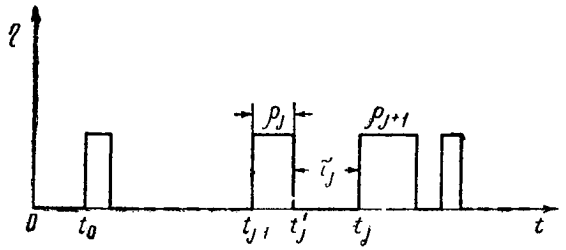



Рис. 6.2. Импульсы и интервалы, имеющие случайную длину.

Пусть точки начала $t_j$ и конца $t_j'$ импульсов пронумерованы в порядке возрастания времени

$$\ldots t_0 < t_1' < t_1 < t_2' < \ldots \qquad (6.101)$$

Тогда последовательность импульсов можно записать

$$\eta(t) = \sum_j \vartheta_{t_{j+1}-t_j}(t - t_j), \qquad (6.102)$$

где

$$\vartheta_\tau(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < t < \tau, \\ 0 \text{ при } t < 0 \text{ и } t > 0. \end{cases}$$

Высота импульсов принята единичной.

Вместо функции (102) удобнее рассматривать ее производную

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t) = \sum_j [\delta(t - t_j) - \delta(t - t_j')], \qquad (6.103)$$

которая является обобщением случайной функции плотности (21) на случай неодинаковых точек. Желая определить спектральную плотность стационарной последовательности импульсов (102), нужно принять во внима-

ние, что спектральные плотности указанных функций связаны очевидной формулой

$$S[\eta, \omega] = \frac{1}{\omega^2} S[\xi, \omega] \tag{6.104}$$

или

$$S[\eta - \langle\eta\rangle, \omega] = \frac{1}{\omega^2} S[\xi - \langle\xi\rangle, \omega]. \tag{6.105}$$

Ограничимся рассмотрением того случая, когда длительности импульсов

$$t_j' - t_{j-1} = \rho_j \tag{6.106}$$

и интервалы между импульсами

$$t_j - t_j' = \sigma_j \tag{6.107}$$

представляют собой независимые случайные величины. Первые имеют одинаковый закон распределения, соответствующий характеристической функции

$$\Theta_1(u) = \langle e^{iu\rho_j} \rangle, \quad (j - \text{любое}). \tag{6.108}$$

Интервалы также имеют одинаковое распределение и характеристическую функцию

$$\Theta_2(u) = \langle e^{iu\sigma_j} \rangle, \quad (j - \text{любое}). \tag{6.109}$$

Как и раньше, для вычисления спектральной плотности $S[\xi, \omega]$ используем формулу (2.27).

Если $t_0$ есть наименьшее положительное значение из всех значений $t_j$ начальных моментов, то преобразование Лапласа от функции (103) записывается в форме

$$L[\xi, p] = e^{-pt_0} - e^{-pt_1'} + e^{-pt_1} - e^{-pt_2''} + \ldots \tag{6.110}$$

Последнее равенство относится к тому случаю, когда начало координат $t = 0$ попадает в интервал между импульсами. В противоположном случае, когда выпадающий импульс покрывает начало координат, следует взять равенство

$$L[\xi, p] = -e^{-pt_0'} + e^{-pt_0} - e^{-pt_1'} + e^{-pt_1} - \ldots \tag{6.111}$$

Существуют определенные вероятности $P_1$ и $P_2$ выполнения одного из двух указанных равенств. Останавливаясь на первом из

них и учитывая (106), (107), преобразуем его к виду

$$L[\xi, p] = e^{-pt_0}[1 - e^{-p\rho_1} + e^{-p\rho_1 - p\sigma_1} - e^{-p\rho_1 - p\sigma_1 - p\rho_2} + \ldots] =$$

$$= e^{-pt_0} \sum_{j=0}^{\infty} \{\exp[-p(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \rho_j + \sigma_j)] -$$

$$- \exp[-p(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_j + \rho_{j+1})]\}. \qquad (6.112)$$

Чтобы вычислить $\langle |L[\xi, p]|^2 \rangle$, умножим (110) или (112) на комплексно сопряженное выражение. При этом войдет двойная сумма $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_j A_k^*$, $(A_j = e^{-pt_j} - e^{-pt_{j+1}})$. Разделим ее на три суммы ($j = k$, $j > k$ и $j < k$).

$$|L[\xi, p]|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_j A_k^* = \sum_0 + \sum_+ + \sum_-, \qquad (6.113)$$

где

$$\sum_0 = \sum_j A_j A_j^*, \quad \sum_+ = \sum_{j>k} A_j A_k^* = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{k+l} A_k^*, \quad \sum_- = \sum_+^*.$$

Если записать подробнее, то будем иметь

$$\sum_0 = e^{-(p+p^*)t_0} \sum_{j=0}^{\infty} \{\exp[-p(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \rho_j + \sigma_j)] -$$

$$- \exp[-p(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_j + \rho_{j+1})]\} \times$$

$$\times \{\exp[-p^*(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \rho_j + \sigma_j)] -$$

$$- \exp[-p^*(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_j + \rho_{j+1})]\}, \qquad (6.114)$$

а также

$$\sum_+ = e^{-(p+p^*)t_0} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \{\exp[-p(\rho_1 + \sigma_1 + \ldots + \rho_{k+l} + \sigma_{k+l}) -$$

$$- p^*(\rho_1 + \ldots + \sigma_k)] - \exp[-p(\rho_1 + \ldots + \sigma_{k+l}) -$$

$$- p^*(\rho_1 + \ldots + \sigma_k + \rho_{k+1})] - \exp[-p(\rho_1 + \ldots + \sigma_{k+l} + \rho_{k+l+1}) -$$

$$- p^*(\rho_1 + \ldots + \sigma_k)] + \exp[-p(\rho_1 + \ldots + \sigma_{k+l} + \rho_{k+l+1}) -$$

$$- p^*(\rho_1 + \ldots + \sigma_k + \rho_{k+1})]\}. \qquad (6.115)$$

При усреднении последних выражений мы получаем произведения характеристических функций (108), (109) вследствие независимости случайных величин $\rho_j$, $\sigma_j$. Так, из (114) имеем

$$\langle \sum_0 \rangle = \langle e^{-(p+p^*)t_0} \rangle \sum_{j=0}^{\infty} \Theta_1^j(ip + ip^*)\, \Theta_2^j(ip + ip^*) \times$$

$$\times \{1 - \Theta_1(ip) - \Theta_1(ip^*) + \Theta_1(ip + ip^*)\}.$$

Суммируя этот ряд как геометрическую прогрессию и полагая $p + p^* = \varepsilon$, получаем

$$\left\langle \sum_0 \right\rangle = \frac{\langle e^{-\varepsilon t_0} \rangle}{1 - \theta_1(i\varepsilon)\,\theta_2(i\varepsilon)} \{1 + \theta_1(i\varepsilon) - \theta_1(ip) - \theta_1^*(ip)\}. \quad (6.116)$$

Аналогично, усреднение ряда (115) дает

$$\left\langle \sum_+ \right\rangle = \langle e^{-\varepsilon t_0} \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \{\theta_1^k(i\varepsilon)\,\theta_2^k(i\varepsilon)\,\theta_1^l(ip)\,\theta_2^l(ip) -$$

$$- \theta_1^{k+1}(i\varepsilon)\,\theta_2^k(i\varepsilon)\,\theta_1^{l-1}(ip)\,\theta_2^l(ip) - \theta_1^k(i\varepsilon)\,\theta_2^k(i\varepsilon)\,\theta_1^{l+1}(ip)\,\theta_2^l(ip) +$$

$$+ \theta_1^{k+1}(i\varepsilon)\,\theta_2^k(i\varepsilon)\,\theta_1^l(ip)\,\theta_2^l(ip)\}.$$

Вынося за скобки $\theta_1^k(i\varepsilon)\,\theta_2^k(i\varepsilon)\,\theta_1^l(ip)\,\theta_2^l(ip)$, легко видеть, что последнее выражение представляет собой геометрическую прогрессию как по $k$, так и по $l$. Суммирование обеих прогрессий приводит к результату

$$\left\langle \sum_+ \right\rangle = \frac{\langle e^{-\varepsilon t_0} \rangle}{1 - \theta_1(i\varepsilon)\,\theta_2(i\varepsilon)} \frac{\theta_1(ip)\,\theta_2(ip)}{1 - \theta_1(ip)\,\theta_2(ip)} \times -$$

$$\times \left\{1 - \frac{\theta_1(i\varepsilon)}{\theta_1(ip)} - \theta_1(ip) + \theta_1(i\varepsilon)\right\}. \quad (6.117)$$

Согласно (2.27), (113) искомая спектральная интенсивность определяется по формуле

$$\frac{1}{2} S[\xi, \omega] = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left\langle \sum_0 \right\rangle + \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left\langle \sum_+ \right\rangle + \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left\langle \sum_- \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left\langle \sum_0 \right\rangle + 2 \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \left\langle \sum_+ \right\rangle, \quad (6.118)$$

где положено

$$p = \frac{\varepsilon}{2} - i\omega.$$

Если $\omega \neq 0$, $\theta_1(\omega)\theta_2(\omega) \neq 1$, то предельный переход совершенно тривиален. Поскольку

$$\theta_1(i\varepsilon) = 1 - \varepsilon \langle \rho \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \langle \rho^2 \rangle + \ldots,$$

$$\theta_2(i\varepsilon) = 1 - \varepsilon \langle \sigma \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \langle \sigma^2 \rangle + \ldots,$$

то

$$\frac{\varepsilon}{1 - \theta_1(i\varepsilon)\,\theta_2(i\varepsilon)} \to \frac{1}{\langle \rho \rangle + \langle \sigma \rangle} \text{ при } \varepsilon \to 0. \quad (6.119)$$

Поэтому равенства (116), (117) дают

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left\langle \sum\nolimits_0 \right\rangle = \frac{1}{\langle\rho\rangle + \langle\sigma\rangle}[2 - \Theta_1(\omega) - \Theta_1^*(\omega)] =$$

$$= \frac{2}{\langle\rho\rangle + \langle\sigma\rangle}\operatorname{Re}[1 - \Theta_1(\omega)],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left\langle \sum\nolimits_+ \right\rangle = \frac{1}{\langle\rho\rangle + \langle\sigma\rangle}\frac{\Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)}{1 - \Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)} \times$$

$$\times\left[2 - \frac{1}{\Theta_1(\omega)} - \Theta_1(\omega)\right]. \qquad (6.120)$$

Как показывает особое рассмотрение, область значений $\omega \approx 0$, $\Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega) \approx 1$ не вносит изменений в последние выражения. Подставляя (120) в (118), получаем формулу

$$\frac{1}{2}S[\xi, \omega] = \frac{2}{\langle\rho\rangle + \langle\sigma\rangle}\operatorname{Re}\frac{[1 - \Theta_1(\omega)][1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)}. \qquad (6.121)$$

При ее выводе мы пользовались выражениями, справедливыми в том случае, когда начало координат $t=0$ оказывается в промежутке между двумя импульсами. Допуская противоположную возможность — выпадение импульса, перекрывающего начало координат, мы должны были бы заменить выражение (110) на (111) со всеми последующими изменениями. Для получения окончательного результата следовало бы усреднить два различных выражения (118) по указанным двум возможностям с соответствующими вероятностями $P_1$ и $P_2$. Однако замена (110) на (111) не изменяет выражений (120), получаемых предельным переходом $\varepsilon \to 0$. Поэтому надобность в указанном дополнительном усреднении отпадает, и формула (121) является окончательным результатом.

Чтобы найти спектральную плотность последовательности импульсов (102), остается воспользоваться формулой (104)

$$\frac{1}{2}S[\eta, \omega] = \frac{1}{\omega^2}\frac{2}{\langle\rho\rangle + \langle\sigma\rangle}\operatorname{Re}\frac{[1 - \Theta_1(\omega)][1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)}. \qquad (6.122)$$

Здесь имеется произвол в определении значения $S[\eta, \omega]$ при $\omega \approx 0$. Анализ выражения (121) показывает следующее поведение при малых частотах:

$$\operatorname{Re}\frac{[1 - \Theta_1(\omega)][1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)} = \frac{\omega^2}{2}\frac{\langle\rho\rangle D\sigma + \langle\sigma\rangle D\rho}{[\langle\rho\rangle + \langle\sigma\rangle]^2}. \qquad (6.123)$$

Поэтому предел выражения (122) при $\omega \to 0$ конечен. Взяв этот предел за определение функции $\omega^{-2}S[\xi, \omega]$

в нуле $\omega=0$, получаем спектральную плотность процесса $\eta(t)-\langle\eta\rangle$

$$S[\eta-\langle\eta\rangle,\ \omega]=4\omega^{-2}[\langle\rho\rangle+\langle\sigma\rangle]^{-1}\times$$

$$\times\operatorname{Re}\frac{[1-\Theta_1(\omega)][1-\Theta_2(\omega)]}{1-\Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)},\qquad(6.124)$$

$$S[\eta-\langle\eta\rangle,0]=2\frac{\langle\rho\rangle D\sigma+\langle\sigma\rangle D\rho}{[\langle\rho\rangle+\langle\sigma\rangle]^3}.$$

Из последней формулы можно получить ряд частных результатов. Так, полагая длительность импульсов фиксированной

$$\Theta_2(\omega)=e^{i\omega\tau_и},\ \text{а также}\ \Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)=\Theta(\omega)\quad(6.125)$$

$$(\rho+\sigma=\zeta),$$

получаем из (124)

$$S[\eta-\langle\eta\rangle,(\omega)]=\frac{4}{\omega^2\langle\zeta\rangle}\operatorname{Re}[(1-\Theta)^{-1}(1-e^{-i\omega\tau_и}\Theta)\times$$

$$\times(-2i)e^{\frac{1}{2}i\omega\tau_и}\sin\frac{\omega\tau_и}{2}]=\frac{8\sin^2\frac{\omega\tau_и}{2}}{\omega^2\langle\zeta\rangle}\frac{1-|\Theta|^2}{|1-\Theta|^2},\quad(6.126)$$

что совпадает с (92) при $G_0=0$.

Далее, когда длительности импульсов и интервалы между ними имеют одинаковый закон распределения, т. е.

$$\Theta_1(\omega)=\Theta_2(\omega)=\Theta(\omega),\qquad(6.127)$$

формула (124) дает

$$S[\eta-\langle\eta\rangle,\omega]=\frac{2}{\omega^2\langle\rho\rangle}\operatorname{Re}\frac{1-\Theta(\omega)}{1+\Theta(\omega)}=\frac{2}{\omega^2\langle\rho\rangle}\frac{1-|\Theta(\omega)|^2}{|1+\Theta(\omega)|^2}.\quad(6.128)$$

Иногда основной формулой (124) удобно пользоваться, придав ей вид

$$S[\eta-\langle\eta\rangle,\ \omega]=\frac{4}{\omega^2}\frac{1}{\langle\rho\rangle+\langle\sigma\rangle}\times$$

$$\times\operatorname{Re}\left[\frac{1}{1-\Theta_1(\omega)}+\frac{1}{1-\Theta_2(\omega)}-1\right]^{-1}.\qquad(6.129)$$

Тем же самым способом, каким была выведена формула (99), можно, пользуясь соотношением (124), найти изображение Лапласа корреляционной функции $k_\eta(\tau)$. Записывая (124) в виде суммы двух комплексно сопряженных выражений, подставляя в (95) и учитывая, что один из интегралов исчезает, получаем при $\tau>0$

$$\frac{dk_\eta(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2\pi\langle\rho+\sigma\rangle}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\frac{1}{i\omega}\frac{[1-\Theta_1(\omega)]\overline{[1-\Theta_2(\omega)]}}{1-\Theta_1(\omega)\,\overline{\Theta_2(\omega)}}\,d\omega,$$

следовательно,

$$L\left[\frac{dk_\eta}{d\tau},\ p\right] = -\frac{1}{\langle\rho\rangle+\langle\sigma\rangle}\frac{1}{p}\frac{[1-\Theta_1(ip)]\,\overline{[1-\Theta_2(ip)]}}{1-\Theta_1(ip)\,\overline{\Theta_2(ip)}}. \quad (6.130)$$

Пользуясь формулой (98), находим

$$L[k_\eta(\tau),\ p] = -\frac{1}{\langle\rho+\sigma\rangle}\frac{1}{p^2}\frac{[1-\Theta_1(ip)]\,\overline{[1-\Theta_2(ip)]}}{1-\Theta_1(ip)\,\overline{\Theta_2(ip)}} + \\ + \frac{\langle\rho\rangle\langle\sigma\rangle}{\langle\rho+\sigma\rangle^2}\frac{1}{p}. \quad (6.131)$$

## § 7. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 1. Эквивалентность узкополосной случайной функции двум медленно меняющимся процессам

Под узкополосным процессом мы понимаем стационарную случайную функцию, которая имеет реализации, напоминающие синусоиду фиксированной частоты $\omega_0$. Близость к синусоиде должна иметь место на протяжении довольно большого числа периодов $2\pi/\omega_0$. Такой процесс имеет нулевое среднее значение.

На рис. 7.1 представлена фотография примерного узкополосного процесса.

Узкополосный процесс на спектральном языке можно определить следующим образом. Его спектральная плотность имеет пренебрежимо малые значения всюду, за исключением узкой полосы частот

$$\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$(\Delta\omega \ll \omega_0).$$

Если $\Delta\omega$ — минимальная такая ширина полосы, то постоянная времени $T_1 = \frac{1}{\Delta\omega}$ (значительно превосходящая период колебаний $\frac{2\pi}{\omega_0}$) характеризует быстроту изменений амплитуды и фазы. В течение этого времени накапливаются отклонения узкополосного процесса от идеальной синусоиды.

Пусть заданы стационарные случайные функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ с нулевым средним значением, быстрота из-

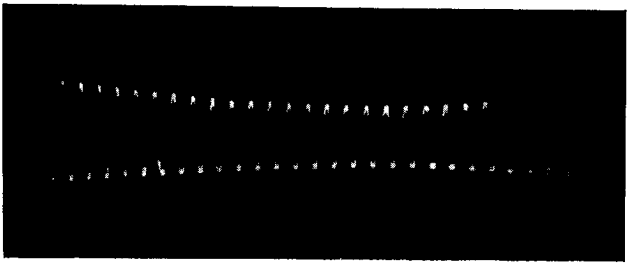


Рис. 7.1. Узкополосный процесс

менения которых характеризуется постоянной времени $T_1$. Образуем из них процесс

$$x(t) = y_1(t)\cos\omega_0 t - y_2(t)\sin\omega_0 t. \qquad (7.1)$$

Если частота $\omega_0$ достаточно велика: $\omega_0 \gg \frac{1}{T_1}$, так что за время периода $\frac{2\pi}{\omega_0}$ функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ не успевают существенно изменяться, то процесс (1) будет узкополосным.

Умножением (1) на аналогичное же выражение и усреднением получаем корреляционную функцию введенного процесса.

$$\langle xx_\tau\rangle = \langle y_1 y_{1\tau}\rangle\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) - \langle y_1 y_{2\tau}\rangle\cos\omega_0 t \times$$
$$\times\sin\omega_0(t+\tau) - \langle y_2 y_{1\tau}\rangle\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) +$$
$$+ \langle y_2 y_{2\tau}\rangle\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau),$$

или

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle y_1y_{1\tau}\rangle\cos\omega_0\tau - \langle y_1y_{2\tau}\rangle\sin\omega_0\tau + \right.$$

$$+ \langle y_2y_{1\tau}\rangle\sin\omega_0\tau + \left.\langle y_2y_{2\tau}\rangle\cos\omega_0\tau\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\langle y_1y_{1\tau}\rangle\cos\omega_0(2t+\tau) - \langle y_1y_{2\tau}\rangle\sin\omega_0(2t+\tau) - \right.$$

$$\left. - \langle y_2y_{1\tau}\rangle\sin\omega_0(2t+\tau) - \langle y_2y_{2\tau}\rangle\cos\omega_0(2t+\tau)\right]. \quad (7.2)$$

Отсюда видим, что случайный процесс (1) в общем случае является нестационарным, так как $\langle xx_\tau\rangle$ зависит не только от $\tau$, но и от $t$. Стационарность имеет место лишь при условиях

$$\langle y_1y_{1\tau}\rangle = \langle y_2y_{2\tau}\rangle,$$

$$\langle y_1y_{2\tau}\rangle = -\langle y_2y_{1\tau}\rangle.$$

Предполагая, что последние выполняются, введем обозначения

$$\langle y_1y_{1\tau}\rangle = \langle y_2y_{2\tau}\rangle = r(\tau), \quad \langle y_1y_{2\tau}\rangle = s(\tau)$$

$$\left(s(-\tau) = -s(\tau)\right). \quad (7.3)$$

Тогда вместо выражения (2) получим

$$\langle xx_\tau\rangle = r(\tau)\cos\omega_0\tau - s(\tau)\sin\omega_0\tau. \quad (7.4)$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}(r + is)\,e^{i\omega_0\tau} + \frac{1}{2}(r - is)\,e^{-i\omega_0\tau}$$

и совершая Фурье-преобразование, согласно (2.9) будем иметь

$$S[x, \omega] = \rho(\omega+\omega_0) - \sigma(\omega+\omega_0) + \rho(\omega-\omega_0) + \sigma(\omega-\omega_0) \quad (7.5)$$

где

$$\rho(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega\tau} r(\tau)\,d\tau = 2\int_0^{\infty}\cos\Omega\tau\, r(\tau)\,d\tau,$$

$$\sigma(\Omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega\tau} s(\tau)\,d\tau = 2\int_0^{\infty}\sin\Omega\tau\, s(\tau)\,d\tau. \quad (7.6)$$

Легко видеть, что первая функция является четной, а вторая — нечетной:

$$\rho(-\Omega)=\rho(\Omega), \quad \sigma(-\Omega)=-\sigma(\Omega). \tag{7.7}$$

Ввиду того, что спектры $\rho(\Omega)$, $\sigma(\Omega)$ существенно отличны от нуля лишь в области $\Omega \sim \Delta\omega \equiv \frac{1}{T_1}$, функции $\rho(\omega+\omega_0)$, $\sigma(\omega+\omega_0)$ вследствие неравенства $\omega_0 \gg \Delta\omega$ малы в области положительных частот $\omega > 0$. Пренебрегая ими, получаем из выражения (5).

$$S[x, \omega] \approx \rho(\omega-\omega_0)+\sigma(\omega-\omega_0), \quad (\omega>0). \tag{7.8}$$

Соотношения (7) позволяют разрешить полученное равенство относительно $\rho$ и $\sigma$

$$\rho(\Omega) \approx \frac{1}{2} S[x, \omega_0+\Omega]+\frac{1}{2} S[x, \omega_0-\Omega];$$

$$\sigma(\Omega) \approx \frac{1}{2} S[x, \omega_0+\Omega]-\frac{1}{2} S[x, \omega_0-\Omega]. \tag{7.9}$$

Тем самым функции $\rho(\Omega)$, $\sigma(\Omega)$, с одной стороны, и спектральная плотность $S[x, \omega]$, с другой, связаны между собой вполне однозначным образом. То же самое можно сказать о функциях корреляции $r(\tau)$, $s(\tau)$, $\langle x x_\tau \rangle$.

Вместо двух случайных процессов $y_1$, $y_2$ можно рассматривать один медленно меняющийся комплексный процесс

$$z(t)=y_1(t)+iy_2(t). \tag{7.10}$$

Последний имеет корреляционную функцию

$$\langle z z_\tau^* \rangle = \langle y_1 y_{1\tau} \rangle + \langle y_2 y_{2\tau} \rangle - i\langle y_1 y_{2\tau} \rangle + \\ + i\langle y_2 y_{1\tau} \rangle = 2[r(\tau)-is(\tau)] \tag{7.11}$$

и спектральную плотность

$$S[z, \Omega]=4[\rho(\Omega)+\sigma(\Omega)]. \tag{7.12}$$

Сравнивая это равенство с (8), видим, что спектральные интенсивности процессов $x(t)$ и $z(t)$ взаимно определяют друг друга:

$$S[x,\omega] \approx \frac{1}{4} S[z, \omega-\omega_0]. \tag{7.13}$$

Умножением процесса $z(t)$ на гармонический множитель $e^{i\omega_0 t}$ получаем быстро меняющийся комплексный процесс

$$\tilde{z}(t) = z(t)\, e^{i\omega_0 t}. \tag{7.14}$$

Случайная функция $x(t)$ является его действительной частью

$$x(t) = \operatorname{Re} \tilde{z}(t). \tag{7.15}$$

Сравнивая (4) и (11), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\langle z z_\tau^* \rangle e^{-i\omega_0 \tau}], \tag{7.16}$$

которое эквивалентно следующей формуле связи корреляционных функций действительного и комплексного узкополосных процессов:

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \langle z \tilde{z}_\tau^* \rangle.$$

Наряду с этим, может быть рассмотрена его мнимая часть

$$\bar{x}(t) = \operatorname{Im} \tilde{z}(t) = y_1(t) \sin \omega_0 t + y_2(t) \cos \omega_0 t, \tag{7.17}$$

которую называют функцией, сопряженной с $x(t)$.

Легко найти корреляционные функции

$$\langle \bar{x} \bar{x}_\tau \rangle = r(\tau) \cos \omega_0 \tau - s(\tau) \sin \omega_0 \tau,$$

$$\langle x \bar{x}_\tau \rangle = r(\tau) \sin \omega_0 \tau + s(\tau) \cos \omega_0 \tau \tag{7.18}$$

и спектральную интенсивность сопряженного процесса

$$S[\bar{x}, \omega] = S[x, \omega];$$

$$S[x, \bar{x}, \omega] = -i\rho(\omega + \omega_0) + i\sigma(\omega + \varphi_0) +$$

$$+ i\rho(\omega - \omega_0) + i\sigma(\omega - \omega_0). \tag{7.19}$$

Вследствие условия узкополосности ($\omega_0 \gg \Delta\omega$) из последнего равенства получаем

$$S[x, \bar{x}; \omega] \approx \begin{cases} i\rho(\omega - \omega_0) + i\sigma(\omega - \omega_0) \approx iS[x, \omega] \\ \text{при } \omega > 0, \\ -i\rho(-\omega - \omega_0) - i\sigma(-\omega - \omega_0) \approx \\ \approx -iS[x, -\omega] \quad \text{при } \omega < 0. \end{cases} \tag{7.20}$$

Два быстро меняющиеся процесса $x(t)$, $\bar{x}(t)$ связаны с медленно меняющимися процессами $y_1(t)$, $y_2(t)$ совершенно однозначно формулами (1), (17). Разрешая последние, имеем

$$y_1(t) = x(t)\cos\omega_0 t + \bar{x}(t)\sin\omega_0 t,$$

$$y_2(t) = -x(t)\sin\omega_0 t + \bar{x}(t)\cos\omega_0 t. \tag{7.21}$$

Как видно из (3), (18), процессы $x(t)$, $\bar{x}(t)$ удовлетворяют тем же самым соотношениям, что и $y_1$, $y_2$,

$$\langle x x_\tau \rangle = \langle \bar{x}\bar{x}_\tau \rangle,$$

$$\langle x\bar{x}_\tau \rangle = -\langle x\bar{x}_{-\tau} \rangle = -\langle x_\tau \bar{x} \rangle. \tag{7.22}$$

Можно показать также, что равенства (22) являются необходимыми условиями того, чтобы медленно меняющиеся процессы (21) были стационарными (при стационарных $x(t)$, $\bar{x}(t)$).

Выше мы исследовали узкополосный процесс (1), построенный на основе двух заданных медленно меняющихся функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Рассмотрим противоположную задачу отыскания медленных случайных функций $y_1$, $y_2$, соответствующих заданному узкополосному процессу. Определение функций $y_1$, $y_2$ вследствие (21) эквивалентно определению сопряженного процесса $\bar{x}(t)$. Пусть последний определяется стационарным линейным преобразованием

$$\bar{x}(t) = \int G(t - t')\, x(t')\, dt' \tag{7.23}$$

от исходной узкополосной функции $x(t)$. В спектральной форме это равенство можно записать

$$\bar{x}_\omega = F(i\omega)\, x_\omega,$$

$$\left(F(i\omega) = \int e^{-i\omega\tau} G(\tau)\, dt\right). \tag{7.24}$$

Тогда, очевидно,

$$S[\bar{x}, \omega] = |F(i\omega)|^2 S[x, \omega],$$

$$S[x, \bar{x}, \omega] = F^*(i\omega) S[x, \omega]. \qquad (7.25)$$

Сопоставляя последние формулы с равенствами (19), (20), видим, что спектр преобразования $F(i\omega)$ должен удовлетворять соотношениям

$$F(i\bar{\omega}) = \begin{cases} -i \text{ при } \omega - \omega_0 \sim \Delta\omega, \\ i \text{ при } \omega + \omega_0 \sim \Delta\omega. \end{cases} \qquad (7.26)$$

Это соотношение обеспечивает выполнение равенств (20), (22), которые при использовании (21) позволяют доқазать формулы (4), (18) и другие приведенные выше результаты.

Выражение (26) описывает поведение функции $F(i\omega)$ лишь в тех узких областях $|\bar{\omega} \pm \omega_0| \sim \Delta\omega$, где имеется заметно отличная от нуля спектральная интенсивность $S[x, \omega]$. В остальном выбор $F(i\omega)$ произволен. Обязательным, в сущности, является то, чтобы преобразование (23) превращало $\sin \omega_0 t$ в $-\cos \omega_0 t$, а $\cos \omega_0 t$ в $\sin \omega_0 t$.

Мы укажем здесь два возможных конкретных вида преобразования (23) и функции $F(i\omega)$, имеющих особые преимущества.

Если выбрать

$$F(i\omega) = -i \operatorname{sgn} \omega \quad \left(\operatorname{sgn} \omega = \frac{\omega}{|\omega|}\right), \qquad (7.27)$$

то (23) будет преобразованием Гильберта

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t - t'} dt' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau. \qquad (7.28)$$

Учитывая формулы (2.28), (24), комплексный процесс (14) при этом можно записать

$$\tilde{z}(t) = x + i\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} x_\omega d\omega \qquad (7.29)$$

$$\left(x_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t)\, dt\right).$$

Такой способ определения имеет то преимущество, что может быть непосредственно обобщен на случай не узкополосных процессов.

Интегральная операция (28), однако, неудобна, когда переходят не к спектральной форме. Поэтому укажем другой способ определения сопряженного процесса, заменив интегральную операцию на дифференцирование

$$\bar{x}(t) = -\frac{1}{\omega_0}\dot{x}(t), \quad \mathrm{F}(i\omega) = -\frac{i\omega}{\omega_0}. \tag{7.30}$$

Последний способ определения удобен при обобщении на случай нестационарных процессов и при выходе за рамки корреляционной теории, основанной на рассмотрении первых двух моментов, т. е. при использовании аппарата марковских процессов или теории высших моментов. Его преимущество состоит в том, что он позволяет пользоваться дифференциальными уравнениями для $x(t)$.

Вследствие (30) комплексные процессы (10) и (14) можно записать

$$\tilde{z}(t) = x + i\bar{x} = x + \frac{\dot{x}}{i\omega_0}; \quad z(t) = \left(x + \frac{\dot{x}}{i\omega_0}\right)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}. \tag{7.31}$$

Дифференцируя последнее выражение по времени, получаем

$$\dot{z} = \frac{1}{i\omega_0}\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}(\ddot{x} + \omega_0^2 x). \tag{7.32}$$

Этой формулой удобно пользоваться, когда процесс $x(t)$ описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f(x, \dot{x}, t).$$

Тогда (32) дает

$$\dot{z} = -i\omega_0 \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} f(x, \dot{x}, t), \tag{7.33}$$

где

$$x = \frac{1}{2}(z\mathrm{e}^{i\omega_0 t} + z^*\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}),$$

$$\dot{x} = \frac{i\omega_0}{2}(z\mathrm{e}^{i\omega_0 t} - z^*\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}). \tag{7.34}$$

Согласно вышеизложенному, один узкополосный сигнал эквивалентен двум медленно меняющимся сигна-

лам. Их можно заменить на узкополосный и, обратно, выделять из него, причем это может быть достигнуто линейными операциями.

## 2. Узкополосные случайные процессы, определяемые дифференциальными уравнениями

В радиофизике узкополосные случайные процессы образуются в частотно-селективных элементах, содержащих емкости, индуктивности и сопротивления. Такие элементы описываются дифференциальными уравнениями. Выходной сигнал будет узкополосным даже в том случае, когда на указанные элементы действуют внешние или внутренние широкополосные флюктуации. Поэтому мы будем рассматривать дифференциальные уравнения, содержащие быстро меняющийся случайный процесс. Начнем с линейного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = \varepsilon\xi(t), \tag{7.35}$$

описывающего поведение колебательного контура под воздействием флюктуаций. Здесь $\varepsilon$ — малый параметр, который обеспечивает выполнение условия узкополосности $\Delta\omega \ll 1$ ($\omega_0 = 1$), эквивалентного неравенству $\varepsilon \ll 1$.

Медленно меняющиеся случайные функции вследствие (21), (30) будут

$$\begin{aligned} y_1 &= x\cos t - \dot{x}\sin t, \\ y_2 &= -x\sin t - \dot{x}\cos t. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Дифференцируя их по времени, имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -(\ddot{x} + x)\sin t, \\ \dot{y}_2 &= -(\ddot{x} + x)\cos t \end{aligned}$$

или, если подставить (35),

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \varepsilon(\dot{x} - \xi)\sin t, \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon(\dot{x} - \xi)\cos t. \end{aligned}$$

Здесь $\dot{x}$ следует выразить через $y_1$, $y_2$, применяя формулы

$$\begin{aligned} x &= y_1\cos t - y_2\sin t, \\ -\dot{x} &= y_1\sin t + y_2\cos t, \end{aligned}$$

обратные к (36). В результате, вместо одного уравнения (35), получаем

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} y_1 - \varepsilon\xi \sin t + \frac{\varepsilon}{2} y_1 \cos 2t - \frac{\varepsilon}{2} y_2 \sin 2t,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} y_2 - \varepsilon\xi \cos t - \frac{\varepsilon}{2} y_1 \sin 2t - \frac{\varepsilon}{2} y_2 \cos 2t. \quad (7.37)$$

Наличие малого параметра в правых частях подтверждает, что процессы $y_1$, $y_2$ имеют малую быстроту изменения. Уравнения (37) могут быть названы уравнениями в стандартной форме. Члены двойной частоты $\frac{\varepsilon}{2} y_1 \cos 2t$, $\frac{\varepsilon}{2} \dot{y}_2 \sin 2t$, $\frac{\varepsilon}{2} y_1 \sin 2t$, $\frac{\varepsilon}{2} y_2 \cos 2t$ в (37) носят название вибрационных членов. Их результирующее действие за период мало и в первом приближении может не учитываться. Тогда из (37) будем иметь уравнения первого приближения

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} y_1 - \varepsilon\xi \sin t, \quad (7.38)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} y_2 - \varepsilon\xi \cos t.$$

При достаточно малом $\varepsilon$ последние уравнения могут рассматриваться при помощи методов, изложенных в § 4, разд. 7—9, которые соответствуют замене реальных процессов $y_1(t)$, $y_2(t)$ на процессы Маркова. Согласно указанным методам уравнения (38) могут быть заменены на эквивалентные «упрощенные» уравнения

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} y_1 - \varepsilon\xi_1, \quad (7.39)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} y_2 - \varepsilon\xi_2,$$

где $\xi_1$, $\xi_2$ — дельта-коррелированные случайные функции с нулевым средним значением и корреляционными функциями

$$\langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = \delta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \xi_\tau \rangle \sin t \sin (t + \tau)\, d\tau,$$

$$\langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = \delta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \xi_\tau \rangle \cos t \cos (t + \tau)\, dt,$$

$$\langle \xi_1 \xi_{2\tau} \rangle = \delta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \xi_\tau \rangle \sin t \cos(t+\tau)\, d\tau. \qquad (7.40)$$

Входящие сюда интегралы можно записать в виде суммы интегралов, например,

$$\int \langle \xi \xi_\tau \rangle \sin t \sin(t+\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int \langle \xi \xi_\tau \rangle \cos \tau d\tau -$$

$$- \frac{1}{2} \int \langle \xi \xi_\tau \rangle \cos(2t+\tau)\, d\tau.$$

Второй интеграл здесь представляет собой нестационарную вибрационную добавку, которая в среднем за период мало сказывается в уравнении Фоккера—Планка. В первом приближении ее можно опустить. То же самое относится к двум другим интегралам в (40), из которых должна быть выделена невибрационная часть. В результате, вместо (40), будем иметь

$$\langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = K_0 \delta(\tau), \qquad (7.41)$$

$$\langle \xi_1 \xi_{2\tau} \rangle = 0,$$

где

$$K_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \xi_\tau \rangle \cos \tau d\tau = \frac{1}{4} S\,[\xi,\ 1]. \qquad (7.42)$$

Вследствие (39), (41) процессы $y_1(t)$, $y_2(t)$ — одинаковые независимые экспоненциально-коррелированные случайные функции. Такие функции были рассмотрены в разд. 10 (§ 4), где были вычислены их корреляционная функция (4.217) и спектральная интенсивность (4.212). Применяя указанные формулы к уравнениям (39) ($\beta = \frac{\varepsilon}{2}$; $K = \varepsilon^2 K_0$), получаем

$$\langle y_1 y_{1\tau} \rangle = \langle y_2 y_{2\tau} \rangle = r(\tau) = \varepsilon K_0 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\tau|},$$

$$\langle y_1 y_{2\tau} \rangle = s(\tau) = 0, \qquad (7.43)$$

$$\rho(\Omega) = \frac{\varepsilon^2 K_0}{\Omega^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad \sigma(\Omega) = 0,$$

а также вследствие (4) и (8)

$$\langle x x_\tau \rangle = \varepsilon K_0 e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

$$S[x, \omega] = \frac{\varepsilon^2 K_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad (\omega > 0). \tag{7.44}$$

Разумеется, последние соотношения можно было бы получить непосредственно из уравнения (35). Приведенный способ рассмотрения удобен тем, что допускает обобщение на случай нелинейного исходного уравнения. Такие нелинейные уравнения будут рассмотрены нами в гл. 4, посвященной статистической теории нелинейных колебаний. Там же будут указаны способы построения более высоких приближений по $\varepsilon$. При обобщении на нелинейный случай медленно меняющиеся процессы $y_1(t)$, $y_2(t)$ остаются процессами Маркова, и это обстоятельство весьма существенно, так как обеспечивает применимость эффективных методов их анализа.

Все сказанное допускает также обобщение на случай дифференциальных уравнений высших порядков как линейных, так и нелинейных. Чтобы проиллюстрировать методику обобщения, остановимся на линейном дифференциальном уравнении четвертого порядка

$$(p^2 + \varepsilon p + 1 + \varepsilon\Delta)(p^2 + \varepsilon p + 1 - \varepsilon\Delta) x = \varepsilon^2 \xi(t), \quad \left(p = \frac{d}{dt}\right), \tag{7.45}$$

т. е.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right)(\ddot{x} + x) + 2\varepsilon(\dddot{x} + \dot{x}) + \varepsilon^2(\ddot{x} - \Delta^2 x) = \varepsilon^2 \xi(t),$$

описывающего поведение двух слабо расстроенных колебательных контуров. Обобщая (36), введем четыре медленно меняющихся процесса:

$$y_1 = x \cos t - \dot{x} \sin t,$$

$$y_2 = -x \sin t - \dot{x} \cos t,$$

$$y_3 = \frac{\ddot{x} + x}{\varepsilon} \cos t - \frac{\dddot{x} + \dot{x}}{\varepsilon} \sin t, \tag{7.46}$$

$$y_4 = -\frac{\ddot{x} + x}{\varepsilon} \sin t - \frac{\dddot{x} + \dot{x}}{\varepsilon} \cos t.$$

Соотношения

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y_1 \cos t - y_2 \sin t, \\ -\ddot{x} &= y_1 \sin t + y_2 \cos t, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\ddot{x} + x}{\varepsilon} &= y_3 \cos t - y_4 \sin t, \\ -\frac{\dddot{x} + \dot{x}}{\varepsilon} &= y_3 \sin t + y_4 \cos t \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

являются обратными соотношениями. Дифференцируя (46), получаем равенства

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -(\ddot{x} + x) \sin t, \\ \dot{y}_2 &= -(\ddot{x} + x) \cos t; \\ \dot{y}_3 &= -\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right) \frac{\ddot{x} + x}{\varepsilon}\right] \sin t; \\ \dot{y}_4 &= -\left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + 1\right) \frac{\ddot{x} + x}{\varepsilon}\right] \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{7.48}$$

Из последнего равенства, используя (45), имеем

$$\dot{y}_3 = -\varepsilon\left[-2\frac{\dddot{x} + \dot{x}}{\varepsilon} + (1 + \Delta^2) x - \ddot{x} - x + \xi\right] \sin t; \tag{7.49}$$

$$\dot{y}_4 = -\varepsilon\left[-2\frac{\dddot{x} + \dot{x}}{\varepsilon} + (1 + \Delta^2) x - \ddot{x} - x + \xi\right] \cos t.$$

Выражения в правых частях (48), (49) следует, конечно, выразить через $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, подставляя (47). В результате получим следующие точные уравнения в «стандартной форме»:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\varepsilon (y_3 \cos t - y_4 \sin t) \sin t, \\ \dot{y}_2 &= -\varepsilon (y_3 \cos t - y_4 \sin t) \cos t, \\ \dot{y}_3 &= -\varepsilon [2 (y_3 \sin t + y_4 \cos t) + (1 + \Delta^2) (y_1 \cos t - y_2 \sin t) - \\ &\quad - \varepsilon (y_3 \cos t - y_4 \sin t) + \xi] \sin t, \\ \dot{y}_4 &= -\varepsilon [2 (y_3 \sin t + y_4 \cos t) + (1 + \Delta^2) (y_1 \cos t - y_2 \sin t) - \\ &\quad - \varepsilon (y_3 \cos t - y_4 \sin t) + \xi] \cos t. \end{aligned} \tag{7.50}$$

В правой части от произведения тригонометрических функций следует перейти к сумме синусов и косинусов от нулевой и двойной частот. В первом приближении по $\varepsilon$ «вибрационными членами» двойной частоты можно пренебречь так же, как и не вибрационными членами высшего порядка, пропорциональными $\varepsilon^2$. После этого из (50) будем иметь уравнения первого приближения:

$$\dot{y}_1 = \frac{\varepsilon}{2} y_4,$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} y_3,$$

$$\dot{y}_3 = -\varepsilon y_3 + \frac{\varepsilon}{2}(1+\Delta^2) y_2 + \varepsilon\xi \sin t,$$

$$\dot{y}_4 = -\varepsilon y_4 - \frac{\varepsilon}{2}(1+\Delta^2) y_1 + \varepsilon\xi \cos t. \qquad (7.51)$$

Последние уравнения имеют форму (4.185) и при малом $\varepsilon$ процессы $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ можно считать марковскими. Это эквивалентно замене флюктуационных членов $\xi \sin t$, $\xi \cos t$, входящих в (51) на дельта-коррелированные функции $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, которые обладают свойствами (40), переходящими после нового отбрасывания колебательных членов в соотношения (41). Получаемая в результате этого система уравнений распадается на две совершенно не связанные системы. Если к тому же обозначить $y_5 = -y_3$, то эти системы будут совершенно одинаковыми

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{y}_1}{\varepsilon} &= \frac{y_4}{2}, \\ \frac{\dot{y}_4}{\varepsilon} &= -y_4 - \frac{1+\Delta^2}{2} y_1 + \xi_2, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{y}_2}{\varepsilon} &= \frac{y_5}{2}, \\ \frac{\dot{y}_5}{\varepsilon} &= -y_5 - \frac{1+\Delta^2}{2} y_2 + \xi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (7.52)$$

Отсюда нетрудно получить, что процессы $y_1(t)$, $y_2(t)$ имеют спектральную плотность

$$p(\omega) = \frac{K_0}{\left(2\frac{\omega^2}{\varepsilon^2} - \frac{1+\Delta^2}{2}\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}}, \quad \sigma(\omega) = 0 \qquad (7.53)$$

и согласно формуле (5) табл. 2.1

$$r(\tau) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{K_0}{1+\Delta^2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\tau|}\left(\cos\frac{\varepsilon}{2}\Delta\tau + \frac{1}{\Delta}\sin\frac{\varepsilon\Delta}{2}|\tau|\right). \qquad (7.54)$$

В случае нелинейного уравнения (45) мы будем иметь нелинейные уравнения для медленно меняющихся процессов $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, но к ним по-прежнему может быть применен аппарат процессов Маркова.

## 3. Амплитуда и фаза узкополосного процесса. Релеевские флюктуации

Рассмотренные ранее медленно меняющиеся функции удобны тем, что они связаны с исходным узкополосным

процессом $x(t)$ линейным образом. Иногда вместо них целесообразно рассматривать медленно меняющуюся амплитуду и фазу, которые имеют вполне наглядный смысл и определяются равенствами

$$A(t)=\sqrt{y_1+y_2^2},\quad \varphi(t)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y_2}{y_1}. \tag{7.55}$$

Обратные соотношения имеют вид

$$y_1=A\cos\varphi,\quad y_2=A\sin\varphi. \tag{7.56}$$

Рассмотренные ранее процессы (1), (17), (10), (14) записываются через амплитуду и фазу следующим образом:

$$\begin{gathered} x=A\cos(\omega_0 t+\varphi),\quad \bar{x}=A\sin(\omega_0 t+\varphi),\\ z(t)=Ae^{i\varphi},\quad \tilde{z}=Ae^{i\omega_0 t+i\varphi}. \end{gathered} \tag{7.57}$$

Поскольку амплитуда и фаза связаны с $x(t)$ нелинейным образом, то для вычисления их статистических характеристик требуется знание законов распределения процесса $x(t)$.

Ограничимся предположением, что $x(t)$ есть гауссов процесс. Тогда знания его корреляционной функции (4) достаточно для того, чтобы определить всевозможные законы распределения не только его самого, но и медленно меняющихся процессов $y_1(t)$, $y_2(t)$. В самом деле, последние также будут гауссовы с нулевым средним значением, ибо линейно выражаются через $x(t)$. Зная же их корреляционные функции $\langle y_1 y_{1\tau}\rangle=\langle y_2 y_{2\tau}\rangle=r(\tau)$ и взаимную корреляционную функцию $\langle y_1 y_{2\tau}\rangle=s(\tau)$, мы можем найти для них различные законы распределения.

Если взять значения $y_1(t)$, $y_2(t)$, относящиеся к одному и тому же моменту времени, то взаимная корреляция между ними равна нулю вследствие нечетности функции $s(\tau)$, и поэтому

$$w(y_1, y_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma^2=r(0)). \tag{7.58}$$

Совершая замену переменных (56) и интегрируя по всем возможным значениям фазы от 0 до $2\pi$, получаем для амплитуды закон распределения Релея

$$w(A)=\frac{A}{\sigma^2}e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}. \tag{7.59}$$

Случайная функция $A(t)$, являющаяся амплитудой узкополосного гауссового процесса, носит название релеевского процесса.

Чтобы найти двумерную плотность распределения амплитуды $w(A, A_\tau)$, нужно взять распределение случайных величин $y_1$, $y_2$, $y_{1\tau}$, $y_{2\tau}$, которые можно определить, зная их корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix} r(0) & 0 & r(\tau) & s(\tau) \\ 0 & r(0) & -s(\tau) & r(\tau) \\ r(\tau) & -s(\tau) & r(0) & 0 \\ s(\tau) & r(\tau) & 0 & r(0) \end{pmatrix}.$$

Затем нужно перейти от $y_1$, $y_2$, $y_{1\tau}$, $y_{2\tau}$ к $A$, $A_\tau$, $\varphi$, $\varphi_\tau$ и проинтегрировать по всем значениям $\varphi$, $\varphi_\tau$. Результат, как известно, имеет вид

$$w(A, A_\tau) = \frac{AA_\tau}{\sigma^4(1-Q^2)} I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2}\frac{AA_\tau}{\sigma^2}\right) \times \times \exp\left\{-\frac{A^2+A_\tau^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\}, \tag{7.60}$$

где $Q = \frac{\sqrt{r^2(\tau)+s^2(\tau)}}{r(0)}$, $\sigma^2 = r(0)$, $I_0(z) = J_0(iz)$ — модифицированная функция Бесселя.

В случае узкополосного флюктуационного процесса, задаваемого дифференциальным уравнением, поведение амплитуды и фазы так же, как и функций $y_1$, $y_2$, определяется дифференциальными уравнениями. Остановимся на примере уравнения (35). Дифференцирование выражений (55) дает

$$\dot{A} = \frac{y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2}{A}, \quad \dot{\varphi} = \frac{y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1}{A^2}. \tag{7.61}$$

Подставляя сюда (39) и учитывая (56), получаем следующие уравнения первого приближения:

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2}A - \varepsilon\xi_1\cos\varphi - \varepsilon\xi_2\sin\varphi \equiv \varepsilon F_1,$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{A}[\xi_1\sin\varphi - \xi_2\cos\varphi] \equiv \varepsilon F_2, \tag{7.62}$$

где $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — гауссовы случайные процессы со свойствами (41). Чтобы записать уравнение Фоккера—Планка для амплитуды и фазы, изменяющихся в соответствии с (62), применим формулу (4.194). Вычислим сначала входящие в нее коэффициенты. Как легко видеть,

$$\int_{-\infty}^{0} K\,[F_1, F_{1\tau}]\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} \langle(\xi_1\cos\varphi + \xi_2\sin\varphi)\times$$

$$\times(\xi_{1\tau}\cos\varphi + \xi_{2\tau}\sin\varphi)\rangle\,d\tau = \cos^2\varphi\int_{-\infty}^{0}\langle\xi_1\xi_{1\tau}\rangle\,d\tau +$$

$$+\sin^2\varphi\int_{-\infty}^{0}\langle\xi_2\xi_{2\tau}\rangle\,d\tau = \frac{1}{2}K_0. \qquad (7.63)$$

Аналогично получаем

$$\int_{-\infty}^{0} K\,[F_2, F_{2\tau}]\,d\tau = \frac{1}{2A^2}K_0, \quad \int_{-\infty}^{0} K\,[F_1, F_{2\tau}]\,d\tau = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{0} K\left[\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}, F_{2\tau}\right]d\tau = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{0}\langle(\xi_1\sin\varphi - \xi_2\cos\varphi)\times$$

$$\times(\xi_{1\tau}\sin\varphi - \xi_{2\tau}\cos\varphi)\rangle\,d\tau = \frac{K_0}{2A}. \qquad (7.64)$$

Таким образом, в соответствии с (4.194) искомое уравнение Фоккера—Планка имеет вид

$$\dot{w}(A,\ \varphi) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(-\frac{A}{2} + \frac{\varepsilon K_0}{2A}\right)w\right] +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}K_0\left[\frac{\partial^2 w}{\partial A^2} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right]. \qquad (7.65)$$

Ему соответствует следующие уравнения для амплитуды и фазы:

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2}A + \frac{\varepsilon^2 K_0}{2A} + \varepsilon\xi_1,$$

$$\dot{\varphi} = \varepsilon\frac{\xi_2}{A}. \qquad (7.66)$$

Здесь $\xi_1$, $\xi_2$ — такие же самые независимые случайные функции, что и в уравнениях (39) или (62), обладающие теми же самыми свойствами (41).

Член $\frac{\varepsilon^2 K_0}{2A}$, хотя он и выступает как член порядка $\varepsilon^2$, мы удержали в уравнениях (66) по той причине, что интенсивность флюктуационных воздействий $K_0$ может быть довольно большой. Удобнее всего полагать $K_0$ порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, обозначая $K_0 = \frac{\varkappa}{\varepsilon}$. Тогда все члены уравнения (65) будут первого порядка по $\varepsilon$. Флюктуационные члены в (66) при этом целесообразно записывать $\sqrt{\varepsilon}\eta_1$, $\sqrt{\varepsilon}\eta_2$. Так, первое уравнение для амплитуды будет иметь вид

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2}\left(A - \frac{\varkappa}{A}\right) + \sqrt{\varepsilon}\eta_1,$$

$$(\langle\eta_1\rangle = 0,\ \langle\eta_1\eta_{1\tau}\rangle = \varkappa\delta(\tau)). \qquad (7.67)$$

Ему соответствует следующее одномерное уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{2}{\varepsilon}\dot{w}(A) = -\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(A - \frac{\varkappa}{A}\right)w\right] + \varkappa\frac{\partial^2 w}{\partial A^2}. \qquad (7.68)$$

Мы знаем вид стационарного решения (4.49) произвольного одномерного уравнения Фоккера—Планка (4.33). Применяя указанную формулу (4.49) к уравнению (68), находим стационарное распределение амплитуды

$$w(A) = Ce^{-\frac{A^2}{2\varkappa} + \ln A} = \frac{A}{\varkappa}e^{-\frac{A^2}{2\varkappa}}. \qquad (7.69)$$

Оно, естественно, совпадает с (59), причем $\varkappa = \sigma^2$.

Поскольку изменение амплитуды представляет собой процесс Маркова, большой интерес представляет выражение для вероятности перехода $p(A_\tau, A)$, через которую могут быть записаны всевозможные законы распределения и в частности, двумерный закон $w(A, A_\tau) = p(A_\tau, A)w(A)$. Принимая во внимание (60), (59), для вероятности перехода, получаем следующее выражение:

$$p(A_\tau, A) = \frac{w(A, A_\tau)}{w(A)} = \frac{A_\tau}{\sigma^2(1-Q^2)} \times$$

$$\times I_0\left(\frac{Q}{1-Q^2}\frac{AA_\tau}{\sigma^2}\right)\exp\left\{-\frac{A_\tau^2 + Q^2A^2}{2\sigma^2(1-Q^2)}\right\}. \qquad (7.70)$$

Вследствие найденных ранее соотношений (43), относящихся к случаю уравнения (35), коэффициент $Q(\tau)$ здесь имеет вид

$$Q(\tau) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\tau|}. \tag{7.71}$$

При другом виде этого коэффициента процесс $A(t)$ не является марковским и условная вероятность (70) не играет такой особой роли, как в случае процесса Маркова. Подставляя (71) в (70) и заменяя $\sigma^2$ на $\varkappa$, мы получаем нестационарное распределение для амплитуды

$$w(A) = \frac{A}{\varkappa(1-e^{-\varepsilon\tau})} I_0\left(\frac{AA_0}{2\varkappa \operatorname{sh}\frac{\varepsilon\tau}{2}}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{A^2}{2\varkappa(1-e^{-\varepsilon\tau})} - \frac{A_0^2}{2\varkappa(e^{\varepsilon\tau}-1)}\right\}, \tag{7.72}$$

которое изменяется в соответствии с уравнением (68) при дельтаобразном начальном условии $w(A) = \delta(A - A_0)$, когда $\tau = 0$. Это один из немногих примеров, когда уравнение Фоккера—Планка с нелинейной средней скоростью $K_1$ имеет точное нестационарное решение в виде конечного аналитического выражения через простые функции.

Иногда требуется определить статистические характеристики узкополосной случайной функции $x(t)$ или других функций (57), (56), зная характеристики процесса изменения амплитуды и фазы. В общем виде эта задача сложна, поскольку преобразование к указанным функциям от $A$, $\varphi$ нелинейно, однако она значительно упрощается в том случае, когда флюктуации амплитуды и фазы статистически независимы друг от друга.

Остановимся на вычислении корреляционной функции процессов $z(t) = Ae^{i\varphi}$ и $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ в этом случае. Пользуясь независимостью между амплитудой и фазой, корреляционную функцию

$$\langle zz_\tau^* \rangle = \langle AA_\tau e^{i(\varphi - \varphi_\tau)} \rangle \tag{7.73}$$

можно записать

$$\langle zz_\tau^* \rangle = \langle AA_\tau \rangle \langle e^{i(\varphi - \varphi_\tau)} \rangle.$$

Среднее $\langle e^{i(\varphi-\varphi_\tau)} \rangle$ есть частное значение характеристической функции

$$\Theta_\tau(u) = \langle e^{iu(\varphi_\tau - \varphi)} \rangle \tag{7.74}$$

фазового приращения $\varphi_\tau - \varphi$ при $u = -1$. Поэтому

$$\langle zz_\tau^* \rangle = \langle AA_\tau \rangle \Theta_\tau(-1). \qquad (7.75)$$

Пользуясь далее формулой (16), получаем корреляционную функцию действительного узкополосного процесса

$$\langle xx_\tau \rangle = \frac{1}{2} \langle AA_\tau \rangle \operatorname{Re} [\Theta_\tau(-1) e^{-i\omega_0 \tau}]. \qquad (7.76)$$

Когда фазовое приращение имеет симметричное распределение относительно нуля, характеристическая функция $\Theta(u)$ действительна и (76) принимает вид

$$\langle xx_\tau \rangle = \frac{1}{2} \langle AA_\tau \rangle \Theta_\tau(-1) \cos \omega_0 \tau. \qquad (7.77)$$

Это означает согласно (4), что

$$r(\tau) = \frac{1}{2} \langle AA_\tau \rangle \Theta_\tau(-1), \quad s(\tau) = 0. \qquad (7.78)$$

Рассмотрим для примера чисто диффузионный набег фазы. При этом $\varphi_\tau - \varphi$ есть нормально распределенная случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией, линейно нарастающей со временем,

$$D(\varphi_\tau - \varphi) = K_\varphi |\tau|.$$

В этом случае

$$\Theta_\tau(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2} K_\varphi |\tau| u^2\right\}$$

и формула (77) дает

$$\langle xx_\tau \rangle = \frac{1}{2} \langle AA_\tau \rangle e^{-\frac{1}{2} K_\varphi |\tau|} \cos \omega_0 \tau. \qquad (7.79)$$

### 4. Квазирелеевский флюктуационный процесс

Если к нормальному узкополосному процессу $\xi(t)$ с корреляционной функцией $\sigma^2 R(\tau)$ прибавить гармонический сигнал $E \cos(\omega_0 t + \vartheta_0)$ с фиксированной амплитудой $E$ и случайной начальной фазой $\vartheta_0$, статистически не зависящей от $\xi(t)$, то суммарный процесс

$$x(t) = \xi(t) + E \cos(\omega_0 t + \vartheta_0) \qquad (7.80)$$

уже не будет гауссовым. Для того чтобы процесс (80) был стационарным, требуется, чтобы начальная фаза $\vartheta_0$ была совершенно случайной, т. е. имела равномерный закон распределения

$$w(\vartheta_0) = \frac{1}{2\pi}. \tag{7.81}$$

Тогда, используя статистическую независимость между $\xi(t)$ и $E\cos(\omega_0 t + \vartheta_0)$, легко получить корреляционную и характеристическую функции указанного процесса:

$$\langle x x_\tau \rangle = \sigma^2 R(\tau) + \frac{E^2}{2}\cos\omega_0\tau,$$

$$\langle e^{iux} \rangle = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} J_0(uE), \tag{7.82}$$

$$\langle e^{iux + iu_\tau x_\tau} \rangle = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(u^2 + 2uu_\tau R(\tau) + u_\tau^2)\right\} \times$$

$$\times J_0(E\sqrt{u^2 + u_\tau^2 - 2uu_\tau\cos\omega_0\tau}).$$

Узкополосный процесс (80) можно записать в виде колебания

$$x(t) = B(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t)) \tag{7.83}$$

с медленно меняющимися амплитудой $B$ и фазой $\psi$. Для последних мы ввели новые обозначения, чтобы отличить от амплитуды $A$ и фазы $\varphi$ гауссового процесса.

Найдем плотность вероятности $w(B)$. Процесс $\xi(t)$ можно записать

$$\xi = y_1\cos\omega_0 t - y_2\sin\omega_0 t, \tag{7.84}$$

где $y_1$, $y_2$ — случайные величины, имеющие нормальный закон распределения (58). Подставив (84) в (80) и сравнивая с (83), имеем

$$y_1 + E\cos\vartheta_0 = B\cos\psi, \quad y_2 + E\sin\vartheta_0 = B\sin\psi, \tag{7.85}$$

так что

$$y_1^2 + y_2^2 = B^2 + E^2 - 2BE\cos(\psi - \vartheta_0). \tag{7.86}$$

Путем замены переменных (85) перейдем от распределения

$$w(y_1,\ y_2,\ \vartheta_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^2}\, e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.87)$$

к $w(B,\ \psi,\ \vartheta_0)$. Учитывая, что $dy_1 dy_2 d\vartheta_0 = BdBd\psi d\vartheta_0$, и подставляя (86) в (87), находим

$$w(B,\ \psi,\ \vartheta_0) = \frac{B}{(2\pi\sigma)^2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[B^2 + E^2 - 2BE\cos(\psi - \vartheta_0)\right]\right\}.$$

Отсюда, интегрируя по $\psi$ и $\vartheta_0$, получаем закон распределения амплитуды

$$w(B) = \frac{B}{\sigma^2}\, e^{-\frac{B^2+E^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{EB}{\sigma^2}\right), \qquad (7.88)$$

являющейся обобщением распределения (59). Вычисление среднего значения $\langle B\rangle = \int w(B)\, BdB$ приводит к следующему выражению:

$$\langle B\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma e^{-\frac{E^2}{4\sigma^2}}\left[\left(1+\frac{E^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{E^2}{4\sigma^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{E^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{E^2}{4\sigma^2}\right)\right]. \qquad (7.89)$$

Флюктуационный процесс $B(t)$ будем называть квазирелеевским процессом. Его роль в радиофизике обусловлена тем обстоятельством, что часто, помимо флюктуаций, в принимаемом радиосигнале присутствует полезный гармонический сигнал, амплитуду которого для простоты считают постоянной.

К квазирелеевскому процессу можно подойти и с другой стороны. Предположим, что в формуле (1) функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ стационарные гауссовы процессы с ненулевым средним значением. Тогда процесс $x(t)$ будет нестационарным. Стационарность может быть достигнута путем введения неопределенности момента отсчета времени (достаточно физически неощутимой погрешности в моменте отсчета, имеющей порядок высокочастотного

периода $2\pi/\omega_0$). Тогда амплитуда процесса (1) будет квазирелеевским процессом с $E = \sqrt{\langle y_1\rangle^2 + \langle y_2\rangle^2}$.

Квазирелеевский процесс (80) не является процессом Маркова, даже когда $y_1(t)$, $y_2(t)$ — экспоненциально коррелированные случайные функции. При этом он является лишь компонентой двумерного процесса Маркова $B(t)$, $\psi(t)$, описываемого уравнениями

$$\frac{\dot{B}}{\varepsilon} = -\frac{B}{2} + \frac{\sigma^2}{2B} + \frac{E}{2}\cos\chi + \xi_1, \qquad (7.90)$$

$$\frac{\dot{\chi}}{\varepsilon} = -\frac{E}{2B}\sin\chi + \frac{\xi_2}{B}, \quad (\chi = \psi - \vartheta_0),$$

которые обобщают (66) Здесь $\xi_1$, $\xi_2$ — нормальные независимые дельта-коррелированные процессы:

$$\langle\xi_1\rangle = \langle\xi_2\rangle = 0; \quad \langle\xi_1\xi_{1\tau}\rangle = \langle\xi_2\xi_{2\tau}\rangle = \frac{\sigma^2}{\varepsilon}\delta(\tau).$$

Для простоты, однако, при решении некоторых задач может оказаться целесообразным заменять квазирелеевские флюктуации амплитуды на одномерный марковский процесс, соответствующий уравнению

$$\frac{\dot{B}}{\varepsilon} = -\frac{B}{2} + \frac{\sigma^2}{2B} + \frac{E}{2}\frac{I_1\left(\frac{EB}{\sigma^2}\right)}{I_0\left(\frac{EB}{\sigma^2}\right)} + \xi_1 \qquad (7.91)$$

и имеющий тот же самый стационарный закон распределения (88). Такая замена удовлетворительна как при больших, так и при малых отношениях $E/\sigma$.

ГЛАВА 2

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ И ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА НЕЛИНЕЙНЫМИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

## § 8. МЕТОДЫ АНАЛИЗА БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При рассмотрении нелинейных преобразований случайных сигналов, как и в теории нелинейных колебаний вообще, трудно разработать какой-либо универсальный и практически удобный метод решения, а для разных конкретных задач приходится применять различные способы, имеющие физическое оправдание. Целесообразно различать два основных случая, в зависимости от характера нелинейной системы.

1. Среди нелинейных преобразований простейшим является такое преобразование, при котором значение выходной функции $\eta(t)$ в любой момент времени определяется только значением входной функции $\xi(t)$ в тот же момент времени:

$$\eta(t) = g(\xi(t)), \tag{8.1}$$

где $g(\xi)$ — некоторая нелинейная функция. Такое нелинейное преобразование называется безынерционным. К нему примыкают преобразования, когда входная функция $\xi(t)$ подвергается дополнительному преобразованию линейной системой *I*, а выходная функция — линейной системой *II* (рис. 8.1, *б*), причем эти системы не оказывают реакции на нелинейный элемент. Такое преобразование можно записать

$$\eta(t) = L_2\{g(L_1\xi(t))\}, \tag{8.2}$$

где $L_1$ и $L_2$ — линейные операторы, описывающие поведение систем *I* и *II*.

Поскольку правило преобразования корреляционных, моментных и квазимоментных функций при линейных преобразованиях случайных сигналов известно, то для изучения всех указанных преобразований достаточно рассмотреть преобразование вида (1).

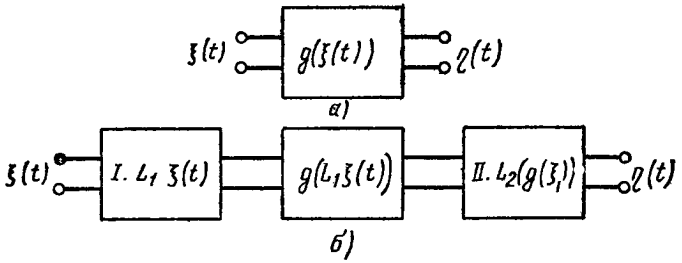



Рис. 8.1. Примеры нелинейных безынерционных преобразований ($\xi = L_1\xi$).

2. Более общими и сложными являются нелинейные инерционные преобразования, описываемые, в частности, нелинейными дифференциальными уравнениями. Один из простых примеров такой системы, поведение которой определяется нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, приведен на рис. 8.2.

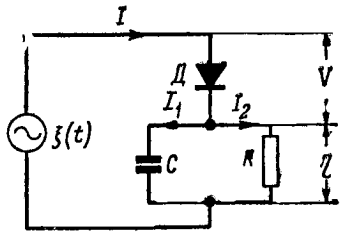



Рис. 8.2 Пример инерционного нелинейного преобразования.

Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — напряжения входного и выходного случайных сигналов, Д — нелинейный элемент, имеющий вольтамперную характеристику

$$I = F(V), \quad V = \xi - \eta.$$

Считая равным нулю внутреннее сопротивление генератора входного сигнала, из очевидных соотношений

$$I_1 + I_2 = I, \quad \eta = \frac{1}{C}\int I_1 dt = I_2 R$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt} + \frac{1}{RC}\eta = \frac{1}{C}F(\xi - \eta). \qquad (8.3)$$

Решение этого нелинейного уравнения в общем случае при произвольной функции $g$ затруднительно даже

для детерминированных функций, так как оно не выражается в виде конечного числа интегралов. Естественно поэтому, что решение его для случайных функций сопряжено с большими трудностями.

Относительно вида функции $g(\xi)$ можно сказать следующее. Обычно ее получают экспериментально как характеристику нелинейного элемента (лампы и пр.). Чтобы провести аналитическое рассмотрение, эту характеристику следует аппроксимировать тем или иным способом. Для теории удобны следующие три вида аппроксимации: полиномом, ломаной линией (кусочно-разрывная аппроксимация) и экспонентой. Каждый из этих видов имеет свои преимущества и недостатки. При этом нужно иметь в виду, что требование точности аппроксимации и требование простоты аналитического выражения в известном смысле противоположны и, как правило, плохо согласуются между собой.

При анализе преобразования случайных сигналов нелинейной системой задача ставится так: предполагая известными параметры системы и характеристики входного случайного сигнала $\xi(t)$, требуется найти статистические характеристики сигнала $\eta(t)$, получающегося на выходе.

### 1. Преобразование плотностей вероятности

Принципиальное решение указанной выше задачи для нелинейных безынерционных преобразований вида (1) вытекает из следующего известного положения. Пусть известна $n$-мерная плотность вероятности $w_\xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ случайных величин $\xi_1 = \xi(t_1)$, $\xi_2 = \xi(t_2), \ldots, \xi_n = \xi(t_n)$ и нужно найти плотность вероятности $w_\eta(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ для случайных величин

$$\begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ \eta_2 &= g_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_n &= g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \end{aligned} \tag{8.4}$$

где функции $g_i$ — кусочно-непрерывные.

Если существуют однозначные обратные функции

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\ \xi_2 &= h_2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n &= h_n(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \end{aligned} \tag{8.5}$$

то интересующая нас плотность вероятности дается формулой

$$w_\eta(\eta_1, \ldots, \eta_n) = w_\xi(h_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, h_n(\eta_1, \ldots, \eta_n))\,|D_n|, \tag{8.6}$$

где $D_n$ — якобиан преобразования от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ к случайным величинам $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial \eta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}. \tag{8.7}$$

В тех случаях, когда обратные функции $h_i$ неоднозначны, следует в правой части формулы (6) взять сумму по каждой из подобластей. Для одномерного случая описанное правило преобразования обосновано на стр. 10-11.

Применительно к преобразованию вида (1) в двумерном случае из формулы (6) получим

$$w_\eta(\eta_1, \eta_2) = w_\xi(h(\eta_1), h(\eta_2))\,|h'(\eta_1)\,h'(\eta_2)|, \tag{8.8}$$

где $\xi = h(\eta)$ — функция, обратная $g(\xi)$.

При применении формул (6) и (8) к практически интересным нелинейным безынерционным преобразованиям могут возникнуть затруднения. Так, например, если функция $g(\xi)$ в соотношении (1) является полиномом выше третьей степени, то в общем виде трудно найти функцию $h(\eta)$, т. е. аналитически разрешить уравнение (1) относительно $\xi$. Поэтому здесь целесообразно аппроксимировать функцию $g(\xi)$. При кусочно-линейной аппроксимации функция $h(\eta)$ может оказаться разрывной и производная $h'(\eta)$ во многих случаях равна бесконечности в некоторых точках. В этих точках плотность вероятности для $\eta(t)$ имеет дельтаобразные выбросы.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев.

Пусть

$$\eta_1 = g_1(\xi_1) = \xi_1, \quad \eta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2), \tag{8.9}$$

причем обратные функции

$$\xi_1 = h_1(\eta_1) = \eta_1, \quad \xi_2 = h_2(\eta_1, \eta_2) \tag{8.10}$$

однозначны.

Якобиан этого преобразования равен

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2}.$$

Поэтому

$$w_\eta(\eta_1, \eta_2) = w_\xi(\eta_1, h_2(\eta_1, \eta_2)) \left| \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} \right|. \tag{8.11}$$

Из этой формулы получаем одномерную плотность вероятности для одной случайной величины $\eta_2$:

$$w(\eta_2) = \int w_\xi(\eta_1, h_2(\eta_1, \eta_2)) \left| \frac{\partial h_2}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1. \tag{8.12}$$

Используя формулу (12), найти плотность вероятности суммы, разности, произведения и частного двух случайных величин:

$$w(\xi_1 + \xi_2) = w(\eta) = \int w_\xi(\xi_1, \eta - \xi_1)\, d\xi_1, \tag{8.13}$$

$$w(\xi_1 - \xi_2) = w(\eta) = \int w_\xi(\xi_1, \xi_1 - \eta)\, d\xi_1, \tag{8.14}$$

$$w(\xi_1 \xi_2) = w(\eta) = \int w_\xi\left(\xi_1, \frac{\eta}{\xi_1}\right) \frac{d\xi_1}{|\xi_1|}, \tag{8.15}$$

$$w\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = w(\eta) = \int w_\xi(\xi_1, \eta\xi_1) |\xi_1|\, d\xi_1. \tag{8.16}$$

Для независимых случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$ с плотностями вероятности $p(\xi_1)$ и $q(\xi_2)$ в предыдущих формулах нужно положить

$$w_\xi(\xi_1, \xi_2) = p(\xi_1)\, q(\xi_2). \tag{8.17}$$

Рассмотрим два примера на применение полученных формул.

1. Пусть требуется найти плотность вероятности произведения двух коррелированных случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$, совместная плотность вероятности которых является нормальной:

$$w_\xi(\xi, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - R^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - R^2)}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2R\xi_1\xi_2}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\}.$$

Воспользовавшись формулой (15), при $\eta = \xi_1\xi_2$ получим

$$w(\eta) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp\left[\frac{R\eta}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)}\right] \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-R^2)}\left(\xi_1^2 + \frac{\sigma_1^2\eta^2}{\sigma_2^2\xi_1^2}\right)\right\}\frac{d\xi_1}{\xi_1} =$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp\left[\frac{R\eta}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)}\right] K_0\left(\frac{\eta}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)}\right), \quad (8.18)$$

где $K_0(z)$ — функция Ганкеля нулевого порядка от мнимого аргумента.

2. Вычислим плотность вероятности частного $\eta = \xi_2/\xi_1$ двух коррелированных и нормально распределенных величин $\xi_1$ и $\xi_2$.

В данном случае согласно (16)

$$w(\eta) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\xi_1^2}{2(1-R^2)}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_2^2} - \frac{2R\eta}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\}\xi_1 d\xi_1 =$$

$$= \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}}{\pi(\sigma_2^2 - 2R\sigma_1\sigma_2\eta + \sigma_1^2\eta^2)}. \quad (8.19)$$

## 2. Моментные функции при полиномиальном преобразовании

Пусть характеристика нелинейного элемента $\eta = g(\xi)$ является аналитической функцией в определенной области. Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора

$$g(\xi) = a_0 + a_1(\xi - c) + a_2(\xi - c)^2 + \ldots \quad (8.20)$$

$$\left(a_k = \frac{1}{k!}g^{(k)}(c)\right).$$

Оставляя достаточно большое число первых членов, в зависимости от требуемой точности аппроксимации, можно положить

$$g(\xi) = a_0 + a_1(\xi - c) + \ldots + a_n(\xi - c)^n \quad (8.21)$$

Если этого сделать нельзя, то всегда можно найти степенной многочлен, аппроксимирующий функцию $g(\xi)$

с нужной точностью для данной входной случайной функции. При подборе такой аппроксимации важно, чтобы полином хорошо аппроксимировал характеристику $g(\xi)$ на том участке оси $\xi$, где имеет место достаточно большая вероятность выпадения случайной величины $\xi(t)$. На тех участках характеристики, на которые случайная величина попадает относительно редко, может иметь место большая погрешность аппроксимации.

Можно указать следующий способ нахождения наилучшего приближения по методу наименьшего квадрата погрешности. Задавшись числом членов $n+1$ аппроксимирующего полинома, составим разность

$$g(\xi) - \sum_{k=0}^{n} a_k (\xi - c)^k.$$

Неизвестные коэффициенты $a_k$ находятся из условия минимума интеграла от квадрата погрешности

$$I = \int_a^b \left\{ g(c+x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}^2 dx. \qquad (8.22)$$

Пределы интегрирования $a$ и $b$ подбираются так, чтобы на отрезке $a+c<\xi<b+c$ была сосредоточена основная масса вероятности выпадения случайной величины $\xi$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\int_{a+c}^{b+c} w(\xi)\, d\xi \approx 1.$$

Если входной процесс $\xi(t)$ задан моментами, то, не восстанавливая по ним плотность вероятности $w(\xi)$, удобно положить

$$c = m_1, \quad b = -a = \lambda \sqrt{m_2 - m_1^2}. \qquad (8.23)$$

При этом для плотностей вероятностей $w(\xi)$, не очень сильно отличающихся от нормальной, можно, например, принять $\lambda = 2 \div 3$.

Необходимые условия минимума выражения (22) для I

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0$$

дают систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1} b^{i+j+1} a_i = \int_a^b x^j g(x+c)\,dx, \quad (8.24)$$

из которых определяются коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Итак, предположим, что вместо общего преобразования (1) имеется равенство

$$y(t) = a_1 x(t) + \ldots + a_n x^n(t), \quad (8.25)$$

где $y(t) = \eta(t) - a_0$; $x(t) = \xi(t) - c = \xi(t) - \langle \xi \rangle$.

Для нахождения моментных функций для $y(t)$, которые мы обозначим $\tilde{m}_n$, перемножим правые и левые части этого равенства, относящиеся к различным моментам времени, и выполним статистическое усреднение. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1(t) &= a_2 \mu_2(t, t) + a_3 \mu_3(t, t, t) + \\ &\quad + \ldots + a_n \mu_n(t, \ldots, t), \quad (8.26) \\ \tilde{m}_2(t_1, t_2) &= a_1^2 \mu_2(t_1, t_2) + a_1 a_2 [\mu_3(t_1, t_2, t_2) + \\ &\quad + \mu_3(t_1, t_1, t_2)] + a_1 a_3 [\mu_4(t_1, t_2, t_2, t_2) + \\ &\quad + \mu_4(t_1, t_1, t_1, t_2)] + a_2^2 \mu_4(t_1, t_1, t_2, t_2) + \ldots \\ &\quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Здесь

$$\mu_n(t_1, \ldots, t_n) = \langle x(t_1) \ldots x(t_n) \rangle$$

— моментные функции процесса $x(t)$, совпадающие при $c = \langle \xi \rangle$ с центральными моментами функции $\xi(t)$.

Из формул (26) видно, что моментные функции случайного процесса $\eta(t)$ выражаются через моментные функции входного процесса $\xi(t)$ линейно, но формулы для моментных функций на выходе включают более высокие моментные функции на входе. В последнем состоит одна из характерных особенностей нелинейного преобразования по сравнению с линейным.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть на нелинейный элемент с характеристикой

$$y(t) = g(\xi) = a_2 \xi^2(t) - a_4 \xi^4(t) \quad (8.27)$$

воздействует стационарный нормальный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением $\langle\xi\rangle = 0$ и функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Вычислим среднее значение и дисперсию величины $y(t)$.

Для одномерного и двумерного моментов в данном случае имеем

$$\langle y(t)\rangle = a_2\langle\xi^2(t)\rangle - a_4\langle\xi^4(t)\rangle,$$

$$\langle y(t_1)\,y(t_2)\rangle = a_2^2\langle\xi^2(t_1)\,\xi^2(t_2)\rangle + a_4^2\langle\xi^4(t_1)\,\xi^4(t_2)\rangle - \quad (8.28)$$

$$- a_2a_4\left[\langle\xi^2(t_1)\,\xi^4(t_2)\rangle + \langle\xi^4(t_1)\,\xi^2(t_2)\rangle\right].$$

Известно, что одномерные моменты нормального распределения определяются формулой

$$\langle\xi^\mu\rangle = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (\mu-1)\,\sigma^\mu & \text{при } \mu \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } \mu \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (8.29)$$

Разложение (3.14) дает простой способ вычисления двумерных моментов нормального процесса. Для двумерных моментов имеем

$$\langle\xi_t^\mu\xi_\tau^\nu\rangle = \sigma^{\mu+\nu}\sum_{k=0}^{\infty} N_{\mu k}N_{\nu k}\frac{R^k(\tau)}{k!}, \quad (8.30)$$

где

$$N_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} x^i F^{(k+1)}(x)\,dx.$$

Совокупность коэффициентов $N_{ik}$ образует матрицу, приведенную в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Значения коэффициентов

| $i$ | $k$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 2·1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | −3·1 | 0 | −3·2·1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 3·1 | 0 | 4·3·1 | 0 | 4·3·2·1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | −5·3·1 | 0 | −5·4·3·1 | 0 | −5·4·3·2·1 | 0 |
| 6 | 5·3·1 | 0 | 6·5·3·1 | 0 | 6·5·4·3·1 | 0 | 6·5·4·3·2·1 |

Можно указать следующее правило заполнения матрицы $\|N_{ik}\|$:

а. Элементы выше главной диагонали ($i < k$) равны нулю.

б. Ниже главной диагонали и на самой диагонали ($i = k$) отличны от нуля только элементы с индексами $i$ и $k$ одинаковой четности.

в. Элемент $N_{ik}$ строится так. К заданному числу $i$ добавляем в качестве сомножителей числа $i-1$, $i-2$, $i-3$ и т. д. так, чтобы всего было $k$ сомножителей. Затем добавляем в качестве сомножителей все нечетные числа от $i-k-1$ до 1. Например,

$$N_{62} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

г. Знак элемента $N_{ik}$ зависит от четности $k$: для нечетных $k$ это минус, для четных плюс.

Применяя это правило, нетрудно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \langle \xi^2 \xi_\tau^2 \rangle &= \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)], \\ \langle \xi^2 \xi_\tau^4 \rangle &= \sigma^6 [3 + 12R^2(\tau)], \\ \langle \xi^4 \xi_\tau^4 \rangle &= \sigma^8 [9 + 72R^2(\tau) + 24R^4(\tau)]. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Воспользовавшись формулами (29) и (31), согласно (28) находим

$$\begin{aligned} \langle y \rangle &= a_2\sigma^2 - 3a_4\sigma^4, \\ \langle y y_\tau \rangle &= a_2^2\sigma^4 [1 + 2R^2] - 6a_2a_4\sigma^6 [1 + 4R^2] + \\ &\quad + a_4^2\sigma^8 [9 + 72R^2 + 24R^4]. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Отсюда для дисперсии получим формулу

$$Dy = 2a_2^2\sigma^4 - 24a_2a_4\sigma^6 + 96a_4^2\sigma^8. \tag{8.33}$$

Пример 2. Рассмотрим нелинейное преобразование с параболической характеристикой

$$y(t) = a_1x(t) + a_2x^2(t), \tag{8.34}$$

причем в качестве входного сигнала возьмем сумму

$$x(t) = s(t) + \xi(t) \tag{8.35}$$

флюктуаций $\xi(t)$ и гармонического полезного сигнала

$$s(t) = E\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{8.36}$$

с фиксированной амплитудой и равномерно распределенной начальной фазой. Флюктуационный процесс $\xi(t)$ предполагаем таким же, как и в предыдущем примере, т. е. стационарным гауссовым с нулевым средним значением.

Подставляя (35) в (34), перемножая полученные выражения, относящиеся к моментам времени $t$ и $t+\tau$, и усредняя, будем иметь

$$\langle y\rangle = a_2\langle s^2\rangle + a_2\langle\xi^2\rangle,$$
$$\langle yy_\tau\rangle = a_1^2\langle ss_\tau\rangle + a_1^2\langle\xi\xi_\tau\rangle + a_2^2\langle s^2 s_\tau^2\rangle +$$
$$+ 4a_2^2\langle ss_\tau\rangle\langle\xi\xi_\tau\rangle + 2a_2^2\langle s^2\rangle\langle\xi^2\rangle + a_2^2\langle\xi^2\xi_\tau^2\rangle. \quad (8.37)$$

При выводе последних равенств было учтено, что

$$\langle s\xi_\tau\rangle = \langle s\rangle\langle\xi_\tau\rangle; \quad \langle s^2\xi_\tau^2\rangle = \langle s^2\rangle\langle\xi_\tau^2\rangle,$$
$$\langle ss_\tau\xi\xi_\tau\rangle = \langle ss_\tau\rangle\langle\xi\xi_\tau\rangle; \quad \langle s\xi_\tau^2\rangle = \langle s\rangle\langle\xi_\tau^2\rangle$$

и т. д., вследствие статистической независимости между функциями $s(t)$ и $\xi(t)$. При этом

$$\langle s\xi_\tau\rangle = 0, \quad \langle s\xi_\tau^2\rangle = 0, \quad \langle s^2 s_\tau\xi_\tau\rangle = 0, \ldots,$$

так как

$$\langle s\rangle = \langle s_\tau\rangle = 0, \quad \langle\xi\rangle = \langle\xi_\tau\rangle = 0.$$

Кроме того, здесь использованы соотношения $\langle s^2 s_\tau\rangle = 0$; $\langle\xi^2\xi_\tau\rangle = 0$, вследствие которых $\langle xx_\tau^2\rangle = \langle x_\tau x^2\rangle = 0$.

Поскольку средние значения $\langle\xi\xi_\tau\rangle = \sigma^2 R$, $\langle\xi^2\xi_\tau^2\rangle = \sigma^4(1+2R^2)$ уже известны [см. первую формулу (31)], в соотношении (37) остается подсчитать моменты полезного сигнала (36). Преобразуя выражение

$$\langle ss_\tau\rangle = E^2\langle\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi_0)\rangle$$

к виду

$$\langle ss_\tau\rangle = \frac{1}{2}E^2\langle\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\varphi_0)+\cos\omega_0\tau\rangle,$$

замечаем, что первый член в правой части выпадает после усреднения по начальной фазе $\varphi_0$, второй член не случаен и остается без изменения. Поэтому

$$\langle ss_\tau\rangle = \frac{1}{2}E^2\cos\omega_0\tau. \quad (8.38)$$

Аналогично имеем

$$\langle s^2 s_\tau^2\rangle = \frac{1}{4}E^4\langle[1+\cos 2(\omega_0 t+\varphi_0)]\times$$
$$\times[1+\cos 2(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi_0)]\rangle =$$
$$= \frac{1}{4}E^4\left[1+\frac{1}{2}\cos 2\omega_0\tau\right]. \quad (8.39)$$

Подстановка полученных выражений в (37) приводит к результату

$$\langle y\rangle = \frac{1}{2}a_2E^2 + a_2\sigma^2,$$

$$\langle yy_\tau\rangle = \frac{1}{2}a_1^2E^2\cos\omega_0\tau + a_1^2\sigma^2R(\tau) + \\ + \frac{1}{4}a_2^2E^4\left[1 + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0\tau\right] + 2a_2^2\sigma^2E^2R(\tau)\cos\omega_0\tau + \\ + a_2^2\sigma^2E^2 + a_2^2\sigma^4[1 + 2R^2(\tau)]. \qquad (8.40)$$

Отсюда легко найти корреляционную функцию выходного сигнала

$$k_y(\tau) = \frac{1}{2}a_1^2E^2\cos\omega_0\tau + a_1^2\sigma^2R(\tau) + \frac{1}{8}a_2^2E^4\cos 2\omega_0\tau + \\ + 2a_2^2\sigma^2E^2R(\tau)\cos\omega_0\tau + 2a_2^2\sigma^4R^2(\tau). \qquad (8.41)$$

Пример 3. Предположим, что характеристика нелинейного элемента имеет вид

$$y = a_1(A \quad c) + a_2(A \; - c)^2 \qquad (8.42)$$

или

$$y - a_0' = a_1'A + a_2A^2 \quad (a_0' = a_2c^2 - a_1c; \\ a_1' = a_1 - 2a_2c). \qquad (8.43)$$

Пусть на него действует релеевский флюктуационный процесс $A(t)$, который представляет собой огибающую некоторого гауссового узкополосного процесса (разд. 3, § 7). Формулы (7.59), (7.60) определяют законы распределения релеевского процесса $A(t)$.

Из (43) обычным способом получаем

$$\langle y\rangle = a_0' + a_1'\langle A\rangle + a_2\langle A^2\rangle,$$

$$\langle(y - a_0')(y_\tau - a_0')\rangle = a_1'^2\langle AA_\tau\rangle + \\ + a_1'a_2[\langle AA_\tau^2\rangle + \langle A^2A_\tau\rangle] + a_2^2\langle A^2A_\tau^2\rangle. \qquad (8.44)$$

Вычислим входящие сюда моменты функции $A(t)$ при помощи распределений (7.59), (7.60). Введем новые переменные

$$z = \frac{A^2}{2\sigma^2}, \quad z_\tau = \frac{A_\tau^2}{2\sigma^2}, \qquad (8.45)$$

через которые легко выражаются амплитуды

$$A = 2^{\frac{1}{2}}\sigma z^{\frac{1}{2}},\quad A_\tau = 2^{\frac{1}{2}}\sigma z_\tau^{\frac{1}{2}}. \tag{8.46}$$

Переменные $z$, $z_\tau$, в свою очередь, являются случайными величинами. Закон их распределения находим при помощи указанных формул из § 7

$$w(z) = e^{-z};$$

$$w(z, z_\tau) = \frac{1}{1-Q^2} I_0\left(\frac{2Q}{1-Q^2}\sqrt{zz_\tau}\right)\exp\left(-\frac{z+z_\tau}{1-Q^2}\right). \tag{8.47}$$

Можно показать, что эта двумерная плотность распределения может быть представлена в виде ряда по ортогональным полиномам Лагерра (ср. 4.74):

$$w(z, z_\tau) = e^{-z-z_\tau}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(z)\, L_n(z_\tau)\,\frac{Q^{2n}}{(n!)^2}. \tag{8.48}$$

Последние определяются соотношениями

$$L_n(z) = e^z\frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z}). \tag{8.49}$$

Формула (47) для одномерной плотности распределения позволяет получить, учитывая (46) и используя обычное интегральное представление гамма-функции (факториала), выражения для одномерных моментов

$$\langle A^r\rangle = 2^{\frac{r}{2}}\sigma^r\langle z^{\frac{r}{2}}\rangle = 2^{\frac{r}{2}}\sigma^r\int_0^\infty e^{-z}z^{\frac{r}{2}}\,dz = 2^{\frac{r}{2}}\sigma^r\left(\frac{r}{2}\right)! \tag{8.50}$$

Вычисление двумерных моментов произведем, применяя разложение (48),

$$\langle A^r A^s\rangle = 2^{\frac{r+s}{2}}\sigma^{r+s}\left(z^{\frac{r}{2}}z_\tau^{\frac{s}{2}}\right) = 2^{\frac{r+s}{2}}\sigma^{r+s}\sum_{n=0}^{\infty} h_{rn}h_{sn}\frac{Q^{2n}}{(n!)^2}, \tag{8.51}$$

где обозначено

$$h_{rn} = \int_0^\infty z^{\frac{r}{2}} e^{-z}L_n(z)\,dz. \tag{8.52}$$

Подставим сюда (49) и после $n$-кратного интегрирования по частям будем иметь

$$h_{rn} = (-1)^n \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{r}{2}-n+1\right)\int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{r}{2}} dz =$$

$$= (-1)^n \frac{\left(\frac{r}{2}!\right)^2}{\left(\frac{r}{2}-n\right)!}. \qquad (8.53)$$

Когда $r$ — четное число, то при $n > \frac{r}{2}$ величины $h_{rn}$ обращаются в нуль. Поэтому разложение (51) содержит конечное число членов, если хотя бы одно из чисел $r$, $s$ четно. Для $r = 2$ согласно (53) имеем

$$h_{20} = 1; \quad h_{21} = -1; \quad h_{22} = h_{23} = \ldots = 0. \qquad (8.54)$$

Для $r = 1$ все коэффициенты (53) отличны от нуля.

$$h_{10} = \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad h_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad h_{12} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$h_{13} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \ldots, \quad |h_{1n}| = (2n-3)!!\,\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}. \qquad (8.55)$$

Подставляя значения (54), (55) в (51), получаем

$$\langle A^2 A_\tau^2\rangle = 4\sigma^2(1+Q^2),$$

$$\langle AA_\tau^2\rangle = \langle A^2 A_\tau\rangle = \sigma^3\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}Q^2\right), \qquad (8.56)$$

$$\langle AA_\tau\rangle = \frac{\pi}{2}\sigma^2\left(1+\frac{1}{4}Q^2+\frac{1}{64}Q^4+\frac{1}{256}Q^6+\ldots\right).$$

Пользуясь формулами (44), приходим к результату

$$\langle y\rangle = a_0' + a_1'\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2a_2\sigma^2,$$

$$\langle (y-a_0')(y_\tau - a_0')\rangle = \frac{\pi}{2}a_1'^2\sigma^2\left(1+\frac{1}{4}Q^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{64}Q^4+\ldots\right)+2a_1'a_2\sigma^3\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}Q^2\right)+4a_2^2(1+Q^2),$$

$$k_y(\tau) = \frac{\pi}{8}a_1'^2\sigma^2\left(Q^2+\frac{1}{16}Q^4+\frac{1}{64}Q^6+\ldots\right)+$$

$$+\sqrt{2\pi}\,a_1'a_2\sigma^3Q^2+4a_2^2Q^2. \qquad (8.57)$$

### 3. Моментные функции при кусочно-разрывных преобразованиях. Прямой метод

Вычисление моментных функций случайных сигналов, подвергшихся кусочно-разрывным преобразованиям, можно выполнить двумя тесно связанными методами: при помощи разложения двумерной плотности вероятности в ряд (прямой метод) и методом интегрирования с характеристической функцией (метод Райса). Преследуя цель получить практически интересные количественные результаты сущность обоих методов выясним на типовых примерах.

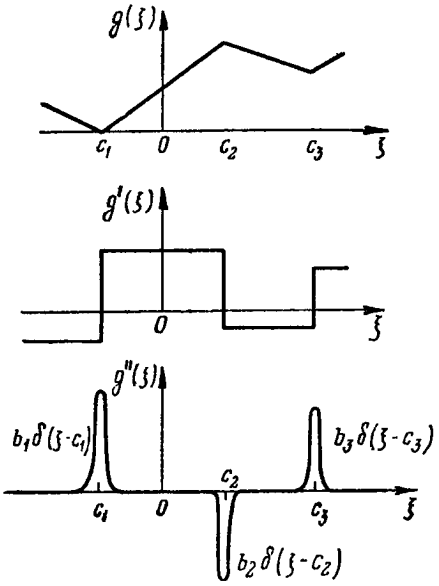



Рис. 8.3. Кусочно-линейная характеристика и ее производные.

а) **Преобразование нормальных флюктуаций.** Вычислим среднее значение $\langle \eta \rangle$ и функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ для флюктуаций $\eta(t)$, получающихся на выходе элементов с кусочно-линейными характеристиками $g(\xi)$ (рис. 8.3), когда на вход их воздействуют нормальные стационарные флюктуации $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau).$$

Тогда одномерная плотность распределения будет

$$w(\xi) = \frac{1}{\sigma} F'\left(\frac{\xi}{\sigma}\right), \quad \left(F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right), \qquad (8.58)$$

а двумерную плотность $w(\xi, \xi_\tau)$ целесообразно взять в форме разложения (3.14).

Функцию $g(\xi)$ мы предполагаем непрерывной и кусочно-линейной, имеющей разрывы производной в точках $c_1, c_2, \ldots, c_r$ (рис. 8.3). Это означает, что

$$g''(\xi) = \sum_{l=1}^{r} b_l \delta(\xi - c_l). \tag{8.59}$$

Среднее значение

$$\langle \eta \rangle := \int g(\xi)\, w(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sigma} \int g(\xi)\, F'\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi \tag{8.60}$$

можно записать в форме

$$\langle \eta \rangle = \lim_{\xi_1 \to \infty} \int_{-\infty}^{\xi_1} g(\xi)\, dF\left(\frac{\xi}{\sigma}\right). \tag{8.61}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{-\infty}^{\xi_1} g(\xi)\, dF\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) = g(\xi_1)\, F\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) - \int_{-\infty}^{\xi_1} g'(\xi)\, F\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi. \tag{8.62}$$

Введем функцию

$$F^{(-1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F(x)\, dx = xF(x) + F'(x), \tag{8.63}$$

которая обладает свойствами

$$\frac{d}{dx} F^{(-1)}(x) = F(x); \quad F^{(-1)}(-\infty) = 0.$$

Используя эти свойства, из (62) после вторичного интегрирования по частям получаем

$$\int_{-\infty}^{\xi_1} g(\xi)\, dF\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) = g(\xi_1)\, F'\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) - \sigma \int_{-\infty}^{\xi_1} g'(\xi)\, dF^{(-1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) =$$

$$= g(\xi_1)\, F\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) - \sigma g'(\xi_1)\, F^{(-1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) + \sigma \int_{-\infty}^{\xi_1} g''(\xi)\, F^{(-1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi.$$

Согласно (61), при переходе в последнем выражении к пределу $\xi_1 \to \infty$ нужно учесть, что $F\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right)$ быстро стремится к единице и функция (63) приближается к $x = \frac{\xi_1}{\sigma}$. Поэтому

$$\langle \eta \rangle = \lim_{\xi_1 \to \infty} [g(\xi_1) - \xi_1 g'(\xi_1)] + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} g''(\xi) F^{(-1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi, \quad (8.64)$$

или, если использовать выражение (59),

$$\langle \eta \rangle = \lim_{\xi \to \infty} [g(\xi) - \xi g'(\xi)] + \sigma \sum_{l=1}^{r} b_l F^{(-1)}\left(\frac{c_l}{\sigma}\right). \quad (8.65)$$

Используя формулу (3.14), получаем второй момент в виде ряда

$$\langle \eta \eta_\tau \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sigma} \int g(\xi) F^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi\right]^2 \frac{R^n}{n!},$$

первый член которого есть квадрат среднего значения (60). Вычитая его, находим корреляционную функцию

$$k_\eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int g(\xi) F^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \frac{d\xi}{\sigma}\right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (8.66)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) F''\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \frac{d\xi}{\sigma} = -\int_{-\infty}^{\infty} g'(\xi) F'\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi.$$

Проводя вторичное интегрирование по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) F''\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \frac{d\xi}{\sigma} = -\sigma g'(\infty) F(\infty) + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} g''(\xi) F\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi.$$

Другие интегралы в (66) вычисляются путем двукратного интегрирования по частям еще более просто, так как соответствующие выражения на $\pm \infty$ обращаются в нуль.

Подставляя в последнее выражение также (59), находим

$$\int g(\xi) F''\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)\frac{d\xi}{\sigma} = -\sigma g'(\infty) + \sigma \sum_{l=1}^{r} b_l F\left(\frac{c_l}{\sigma}\right), \qquad (8.67)$$

$$\int g(\xi) F^{(k+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right)\frac{d\xi}{\sigma} = \sigma \sum_{l=1}^{r} b_l F^{(k)}\left(\frac{c_l}{\sigma}\right), \quad (k>0).$$

Полученные выражения остается подставить в формулу (66). Перейдем к рассмотрению различных частных

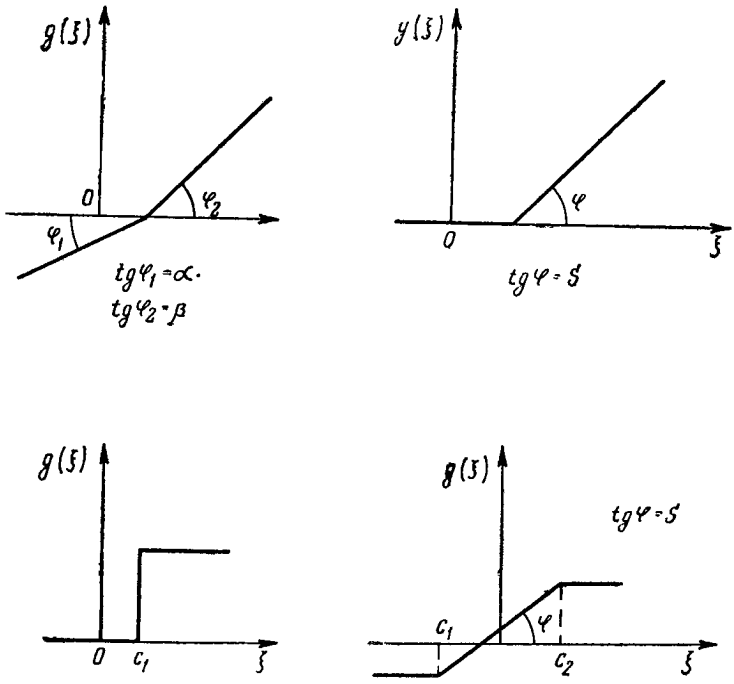



Рис. 8.4. Типовые кусочно-линейные преобразования.

случаев (рис. 8.4). Когда нет ни одной точки излома ($r=0$, $b_l=0$), в выражении (66) остается лишь один первый член. Этот случай соответствует увеличению сигнала в $g'$ раз (и, возможно, изменению постоянной составляющей).

Пусть имеется одна точка излома $\xi = c_1$, по левую сторону от нее наклон $g' = \alpha$, а по правую $g' = \beta$. Тогда

$$g'(\infty) = \beta, \quad b_1 = \beta - \alpha$$

и мы имеем

$$k_\eta(\tau) = \sigma^2 \left\{ \left[ \beta + (\alpha - \beta) F\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) \right]^2 R + \right.$$

$$\left. + (\beta - \alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[ F^{(n-1)}\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{R^n}{n!} \right\}. \qquad (8.68)$$

В частности, при центральном положении точки излома ($c_1 = 0$):

$$k_\eta(\tau) = \frac{\sigma^2}{4}(\alpha + \beta)^2 R +$$

$$+ \sigma^2 (\beta - \alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} [F^{(n-1)}(0)]^2 \frac{R^n}{n!} = \frac{\sigma^2}{4}(\alpha + \beta)^2 R +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2\pi}(\beta - \alpha)^2 (R \arcsin R + \sqrt{1 - R^2} - 1). \qquad (8.69)$$

Случай

$$g(\xi) = \begin{cases} S(\xi - c_1) & \text{при } \xi > c_1, \\ 0 & \text{при } \xi < c_1, \end{cases} \qquad (8.70)$$

т. е.

$$\alpha = 0, \quad \beta = S,$$

позволяет рассмотреть выбросы случайной функции $\xi(t)$ и оценить степень их коррелированности. В этом случае имеем

$$k_\eta(\tau) = S^2 \sigma^2 \left\{ F^2\left(-\frac{c_1}{\sigma}\right) R(\tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ F^{(n-1)}\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) \right]^2 R^n(\tau) \right\}. \qquad (8.71)$$

Результаты вычислений коэффициента корреляции $R_\eta(\tau) = \frac{k_\eta(\tau)}{k_\eta(0)}$ по этой формуле с учетом членов ряда

вплоть до $n=7$ при пяти значениях уровня $\gamma=\frac{c_1}{\sigma}$ представлены на рис. 8. 5 вместе с функцией $R(\tau)=e^{-\alpha\tau^2}$, изображенной пунктиром.

В качестве примера характеристики, имеющей две точки излома, рассмотрим несимметричный ограничитель

$$\eta=g(\xi)=\begin{cases} Sc_2 & \text{при } \xi > c_2, \\ S\xi & \text{при } c_1 < \xi < c_2, \\ Sc_1 & \text{при } \xi < c_1 \end{cases} \qquad (8.72)$$

$$(g'(\infty)=0;$$

$$b_1=S;\quad b_2=-S),$$

которому соответствует корреляционная функция

$$k_\eta(\tau)=S^2\sigma^2\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left[F^{(n-1)}\left(\frac{c_2}{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-F^{(n-1)}\left(\frac{c_1}{\sigma}\right)\right]^2\times$$

$$\times\frac{R^n(\tau)}{n!}, \qquad (8.73)$$

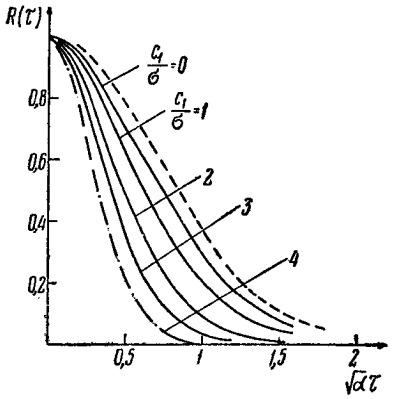


Рис. 8 5 График коэффициента корреляции $R_\eta(\tau)$.

и по (65) среднее значение

$$\langle\eta\rangle=Sc_2+S\left[c_1F\left(\frac{c_1}{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-c_2F\left(\frac{c_2}{\sigma}\right)+\sigma F'\left(\frac{c_1}{\sigma}\right)-\sigma F'\left(\frac{c_2}{\sigma}\right)\right]. \qquad (8.74)$$

Чтобы получить дисперсию выходного сигнала, в формулах (68), (69), (71), (73) можно положить $\tau=0$; $R=1$. При этом дисперсия получается в форме ряда. Отметим, однако, что удобнее ее находить обычным способом как разность $\langle\eta_i^2\rangle-\langle\eta_i\rangle^2$, пользуясь одномерным законом распределения $w(\xi)$. Тогда результат будет иметь вид конечного выражения.

Эффективность использованного метода, основывающегося на интегрировании по частям, проявляется также при вычислении высших моментов. Этот метод может

быть обобщен на случай кусочно-разрывных характеристик более общего вида, например имеющих разрывы первого рода, или составленных из кусков парабол.

Так, в случае характеристики

$$\eta = \begin{cases} q & \text{при } \xi > c_1, \\ 0 & \text{при } \xi < c_1 \end{cases} \tag{8.75а}$$

достаточно однократного интегрирования по частям, а при

$$\eta = \begin{cases} \beta(\xi - c_1)^2 & \text{при } \xi > c_1, \\ 0 & \text{при } \xi < c_1 \end{cases} \tag{8.75б}$$

интегрирование по частям следует производить три раза. Результирующие выражения соответственно имеют вид

$$k_\eta(\tau) = q^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ F^{(n)}\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) \right]^2 R^n(\tau), \tag{8.76а}$$

$$k_\eta(\tau) = 4\beta^2\sigma^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ F^{(n-2)}\left(-\frac{c_1}{\sigma}\right) \right]^2 R^n(\tau). \tag{8.76б}$$

б) **Преобразование релеевских флюктуаций.** Рассмотрим два частных кусочно-линейных преобразования. 1. Пусть огибающая $A(t)$, имеющая закон распределения Релея $\left(\frac{A}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$, подвергается преобразованию

$$\eta(t) = \begin{cases} q & \text{при } A > A_0, \\ 0 & \text{при } A < A_0. \end{cases} \tag{8.77}$$

Если, как и ранее, перейти к процессу $z(t) = \frac{A^2(t)}{2\sigma^2}$, то будем иметь

$$\eta = \begin{cases} q & \text{при } z > z_0, \\ 0 & \text{при } z < z_0, \end{cases} \tag{8.78}$$

$$z_0 = \frac{A_0^2}{2\sigma^2}.$$

Используя законы распределения (47), (48) процесса $z(t)$, находим

$$\langle \eta \rangle = q \int_{z_0}^{\infty} e^{-z} dz = q e^{-z_0}, \tag{8.79}$$

$$\langle \eta \eta_\tau \rangle = q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^{2n}}{(n!)^2} \left[ \int_{z_0}^{\infty} L_n(z) e^{-z} dz \right]^2. \tag{8.80}$$

При вычислении последних интегралов воспользуемся определением (49) полиномов Лагерра и получим

$$\int_{z_0}^{\infty} L_n(z) e^{-z} dz = - \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^n e^{-z}) \Big|_{z=z_0}.$$

Это выражение при помощи полиномов

$$L_n^{(1)}(z) = z^{-1} e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^{n+1} e^{-z}) \tag{8.81}$$

можно записать так:

$$\int_{z_0}^{\infty} L_n(z) e^{-z} dz = - z_0 L_{n-1}^{(1)}(z_0) e^{-z_0}. \tag{8.82}$$

Поэтому корреляционная функция выходного процесса $\eta(t)$, представляющего собой последовательность импульсов, согласно (79), (80) определяется выражением

$$k_\eta(\tau) = q^2 e^{-2z_0} z_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{2n}(\tau)}{(n!)^2} [L_{n-1}^{(1)}(z_0)]^2. \tag{8.83}$$

Выпишем для справок несколько первых полиномов (81):

$$L_0^{(1)}(z) = 1, \quad L_1^{(1)}(z) = 2 - z, \quad L_2^{(1)}(z) = 6 - 6z + z^2,$$

$$L_3^{(1)}(z) = 24 - 36z + 12z^2 - z^3, \ldots \tag{8.84}$$

Пользуясь ими и полагая в (83) $z_0 = \frac{A_0^2}{2\sigma^2}$, находим

$$k_\eta(\tau) = q^2 \frac{A^4}{4\sigma^4} e^{-\frac{A_0^2}{\sigma^2}} \left[ Q^2 + \left(1 - \frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right)^2 Q^4 + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{A_0^2}{2\sigma^2} + \frac{A_0^4}{24\sigma^4}\right)^2 Q^6 + \ldots \right]. \tag{8.85}$$

Для вычисления дисперсии можно положить здесь $\tau=0$, $Q=1$. Однако проще для этого воспользоваться одномерным законом распределения и получить

$$\langle\eta^2\rangle = q^2 e^{-z_0},$$

$$D\eta = k_\eta(0) = q^2 e^{-2z_0}(e^{z_0}-1). \qquad (8.86)$$

Поделив (83) или (85) на дисперсию $D\eta$, будем иметь следующее выражение для коэффициента корреляции:

$$R_\eta(\tau) = B_0[Q^2(\tau) + B_2 Q^4(\tau) + B_3 Q^6(\tau) + \ldots], \qquad (8.87)$$

где

$$B_0 = \frac{A_0^4}{4\sigma^2}\left[e^{\frac{A_0^4}{2\sigma^2}} - 1\right]^{-1},$$

$$B_2 = \left(1 - \frac{A_1^2}{4\sigma^2}\right)^2,$$

$$B_3 = \left(1 - \frac{A_0^2}{2\sigma^2} + \frac{A_0^4}{24\sigma^4}\right)^2.$$

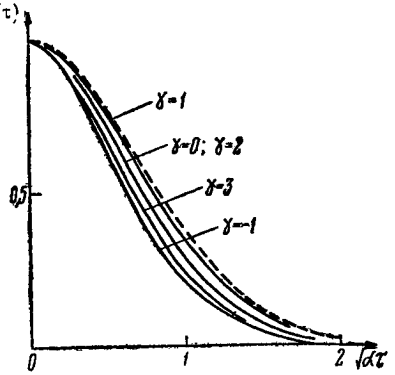



Рис. 8.6. График коэффициента корреляции $R_\eta(\tau)$.

Результаты вычислений по формуле (87) с учетом лишь выписанных членов приведены на рис. 8.6. Эти данные соответствуют коэффициенту корреляции $Q(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$, представленному на графике пунктиром, и относятся к различным уровням ограничения

$$\gamma = \frac{A_0}{\sigma} - \frac{\langle A\rangle}{\sigma} = -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$$

$\left(\text{для релеевских флюктуаций } \frac{\langle A\rangle}{\sigma} = 1{,}25\right)$.

2. Предположим теперь, что производится преобразование

$$\eta = \begin{cases} S(A - A_0) & \text{при } A > A_0, \\ 0 & \text{при } A < A_0, \end{cases} \qquad (8.88)$$

которое выделяет выбросы огибающей над уровнем $A = A_0$.

Пользуясь одномерным законом распределения Релея (7.59), находим средние

$$\langle \eta \rangle = S\sigma \sqrt{2\pi}\, F(-\alpha),$$

$$\langle \eta^2 \rangle = 2S^2\sigma^2 \left[ e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - \sqrt{2\pi}\alpha F(-\alpha) \right], \quad \left(\alpha = \frac{A_0}{\sigma}\right) \tag{8.89}$$

и дисперсию

$$\frac{D\eta}{S^2\sigma^2} = 2e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - 2\sqrt{2\pi}\alpha F(-\alpha) - 2\pi F^2(-\alpha). \tag{8.90}$$

Для отыскания корреляционной функции $k_\eta(\tau)$ воспользуемся разложением двумерного закона (48). При этом замечаем, что преобразование (88) эквивалентно преобразованию

$$\eta = \sqrt{2}S\sigma \begin{cases} z^{\frac{1}{2}} - z_0^{\frac{1}{2}} & \text{при } z > z_0, \\ 0 & \text{при } z < z_0. \end{cases} \tag{8.91}$$

После вычитания квадрата среднего $<\eta>$ согласно (48) будем иметь

$$k_\eta(\tau) = 2S^2\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{(n!)^2} Q^{2n}(\tau), \tag{8.92}$$

где

$$h_n = \int_{z_0}^{\infty} \left( z^{\frac{1}{2}} - z_0^{\frac{1}{2}} \right) L_n(z)\, e^{-z} dz.$$

В последнем выражении произведем интегрирование по частям, воспользовавшись соотношением

$$L_n(z)\, e^{-z} dz = d\left[ z L_{n-1}^{(1)}(z)\, e^{-z} \right],$$

которое эквивалентно равенству (82). После этого получим

$$h_n = -\int_{z_0}^{\infty} z L_{n-1}^{1)}(z)\, e^{-z} dz^{\frac{1}{2}}. \tag{8.93}$$

Вводя параметр $\mu$ и производя по нему дифференцирование, запишем этот интеграл в форме

$$h_n = \frac{\partial}{\partial \mu} L_{n-1}^{(1)}\left( -\frac{\partial}{\partial \mu} \right) \int_{z_0}^{\infty} e^{-\mu z} dz^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{\mu=1}. \tag{8.94}$$

Подставим $z=\frac{a^2}{2}$, $\left(a=\frac{\lambda}{\sigma}\right)$ и выразим его через интеграл вероятности

$$\int_{z_0}^{\infty} e^{-\mu z} dz^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\mu a^2}{2}} da = \sqrt{\pi}\mu^{-\frac{1}{2}} F(-\alpha\sqrt{\mu}),$$

так что

$$h_n = \sqrt{\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} L_{n-1}^{(1)}\left(-\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} F(-\alpha\sqrt{\mu})\right]\Big|_{\mu=1}. \quad (8.95)$$

Для непосредственных вычислений удобнее пользоваться несколько другой формулой:

$$h_n = \sqrt{\pi} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n}\left[\mu^{n-\frac{3}{2}} F\left(-\alpha\mu^{\frac{1}{2}}\right)\right]\Big|_{\mu=1}, \quad (8.96)$$

в справедливости которой можно убедиться, воспользовавшись равенствами

$$-zL_{n-1}^{(1)}(z) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (n-1)(n-2)\ldots l(-z)^l,$$

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (n-1)(n-2)\ldots l\mu^{l-1} \frac{\partial^l F_1}{\partial \mu^l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{\partial^{n-l}\mu^{n-1}}{\partial \mu^{n-l}} \frac{\partial^l F_1}{\partial \mu^l} = \frac{\partial^n}{\partial \mu^n}\left[\mu^{n-1} F_1\right],$$

$$\left(F_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} F(-\alpha\sqrt{\mu})\right).$$

Приведем выражения для нескольких коэффициентов

$$h_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[F(-\alpha) + \alpha F'(\alpha)\right],$$

$$h_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left[F(-\alpha) + \alpha F'(\alpha) + \alpha^2 F''(\alpha)\right]; \quad (8.97)$$

$$h_3 = -\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left[F(-\alpha) + \alpha F'(\alpha) + 2\alpha^2 F''(\alpha) + \frac{\alpha^3}{3} F'''(\alpha)\right].$$

Если при подсчетах ограничиться этими коэффициентами, положив все остальные равными нулю, то коэффициент корреляции флюктуаций $\eta(t)$, т. е. последовательности выбросов огибающей $A(t)$ выше уровня $A_0$, будет равен

$$R_\eta(\tau) = B^{-1}\left(h_1^2 Q^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} h_2^2 Q^4 + \frac{1}{36} h_3^2 Q^6\right), \quad (8.98)$$

где

$$B = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times$$

$$\times \alpha F(-\alpha) - \pi F^2(-\alpha).$$

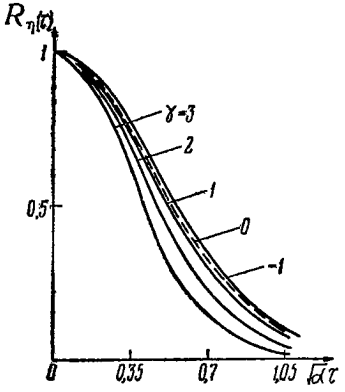


Рис. 8.7

Зависимость $R_\eta(\tau)$ для коэффициента корреляции огибающей $Q(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ при значениях уровня ограничения $\gamma = \frac{A_0}{\sigma} - 1{,}25 = -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$ приведена на рис. 8.7.

Из рисунка видно, что коэффициент корреляции выбросов может значительно отличаться от коэффициента корреляции самой огибающей (пунктирная кривая). При малых уровнях он несколько расширяется, а затем, начиная с некоторого $\gamma$ (приближенно $\gamma \approx 0$), сжимается.

### 4. Вычисление моментных функций при экспоненциальном преобразовании. Метод Райса

Моментные функции сигнала на выходе нелинейного элемента, имеющего экспоненциальную характеристику

$$\eta(t) = h e^{a\xi(t)}, \quad (8.99)$$

выражаются через характеристические функции входного сигнала $\xi(t)$. Это можно использовать в тех случаях, когда указанные характеристические функции являются известными [например, в случае гауссова сигнала $\xi(t)$].

Путем усреднения из (99) получаем

$$\langle\eta\rangle = h\Theta_1(-ia),$$

$$\langle\eta\eta_\tau\rangle = h^2\Theta_2(-ia, -ia), \qquad (8.100)$$

где

$$\Theta_1(u) = \langle e^{iu\xi}\rangle,$$

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \langle e^{iu_1\xi + iu_2\xi_\tau}\rangle \qquad (8.101)$$

— одномерная и двумерная характеристические функции.

Если $\xi(t)$ — стационарный гауссов процесс, имеющий нулевое среднее значение, то, как известно,

$$\Theta_1(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2u^2\right),$$

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(u_1^2 + 2R(\tau)\,u_1u_2 + u_2^2)\right]. \qquad (8.102)$$

Отсюда согласно (100) получаем искомые выражения для $\langle\eta\rangle$, $\langle\eta\eta_\tau\rangle$, а также для выходной корреляционной функции

$$k_\eta(\tau) = e^{a^2\sigma^2}[e^{a^2\sigma^2R(\tau)} - 1]. \qquad (8.103)$$

Когда характеристика нелинейного элемента не является экспонентой, для вычисления моментов выходного сигнала при помощи характеристических функций можно применять метод Райса.

Сущность этого метода состоит в том, что характеристика нелинейного преобразования представляется контурным интегралом

$$\eta = g(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_L F(i\Omega)\,e^{i\Omega\xi}d\Omega, \qquad (8.104)$$

где соответствующим образом выбранный контур интегрирования $L$ проходит в комплексной плоскости $\Omega$. Когда функция $g(\xi)$ обращается в нуль на бесконечности ($\xi = \pm\infty$), в качестве преобразования (104) может быть выбрано преобразование Фурье, причем

$$F(i\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,e^{-i\Omega\xi}d\xi, \qquad (8.105)$$

и можно ограничиться лишь действительными значениями $\Omega$. Когда $g(\xi)$ обращается в нуль при $\xi<0$ (или хотя бы при $\xi$ меньше некоторого фиксированного числа), можно применять теорию преобразований Лапласа, а (104) рассматривать как интеграл обращения:

$$g(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\xi}F(p)\,dp$$

$$\left(F(p)=\int_0^\infty e^{-p\xi}g(\xi)\,d\xi,\quad p=i\Omega\right). \qquad (8.106)$$

Если при этом нарастание функции $g(\xi)$ при $\xi\to\infty$ происходит не быстрее некоторой степени аргумента $\xi$, то в качестве контура интегрирования в (104) может быть взята действительная ось ($c=0$) с обходом начала координат снизу (в плоскости $p=i\Omega$ обход начала координат справа).

Когда функция $g(\xi)$ возрастает в обе стороны (как при $\xi\to\infty$, так и при $\xi\to-\infty$), целесообразно пользоваться теорией двустороннего преобразования Лапласа.

Перемножая выражения (104), относящиеся к различным моментам времени и усреднения, мы выразим моментные функции через характеристические функции входного процесса

$$\langle\eta\eta_\tau\rangle=\frac{1}{4\pi^2}\int_L\int_L F(i\Omega)\,F(i\Omega_\tau)\langle\exp i\,[\Omega\xi+\Omega_\tau\xi_\tau]\rangle\,d\Omega d\Omega_\tau,$$

$$\langle\eta\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_L F(i\Omega)\langle\exp(i\Omega\xi)\rangle\,d\Omega, \qquad (8.107)$$

которые должны быть известны.

Если, например, процесс $\xi(t)$ нормальный и стационарный, то согласно (102) имеем

$$\langle\eta\eta_\tau\rangle=\frac{1}{4\pi^2}\int_L\int_L F(i\Omega)\,F(i\Omega_\tau)\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\Omega^2+2R\Omega\Omega_\tau+\Omega_\tau^2\right]\right\}d\Omega d\Omega_\tau.$$

Когда последний интеграл вычислить не удается, целесообразно воспользоваться разложением

$$e^{-\sigma^2 R\Omega\Omega_\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sigma^{2n} R^n \Omega^n \Omega_\tau^n. \qquad (8.108)$$

После этого (103) примет вид

$$\langle \eta\eta_\tau \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^2}{n!} \sigma^{2n} R^n(\tau), \qquad (8.109)$$

где коэффициенты

$$h_n = \frac{i^n}{2\pi} \int_L \Omega^n F(i\Omega) e^{-\frac{\sigma^2}{2}\Omega^2} d\Omega \qquad (8.110)$$

вычисляются уже значительно легче.

Вычитая квадрат среднего значения $<\eta>$, определяемый вторым равенством (107), получаем корреляционную функцию

$$k_\eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n!} \sigma^{2n} R^n(\tau). \qquad (8.111)$$

Пример 1. Найдем в качестве примера корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$ при нелинейном преобразовании

$$\eta(t) = \begin{cases} A\sqrt{1-\xi^2(t)} & \text{при } |\xi| < 1, \\ 0 & \text{при } |\xi| > 1. \end{cases} \qquad (8.112)$$

В данном случае достаточно применить преобразование Фурье. Согласно (105) получаем

$$F(i\Omega) = A \int_{-1}^{1} e^{i\Omega\xi} \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi.$$

Этот интеграл нетрудно выразить через функцию Бесселя $J_1(\Omega)$:

$$F(i\Omega) = \pi A \frac{J_1(\Omega)}{\Omega}. \qquad (8.113)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\eta = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(\Omega)}{\Omega} e^{i\Omega\xi} d\Omega. \qquad (8.114)$$

Для гауссовых флюктуаций, имеющих характеристическую функцию (102), искомая корреляционная функция определяется формулой (111), в которой теперь коэффициенты (110) будут

$$h_n = \frac{1}{2} A i^n \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^{n-1} J_1(\Omega) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\Omega^2} d\Omega. \qquad (8.115)$$

Вследствие нечетности функции $J_1(\Omega)$ последние интегралы отличны от нуля лишь при четных $n=2m$. Вводя обозначения

$$g_{pq}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \sigma^q \int_0^{\infty} J_p(\Omega) e^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}} \Omega^{q-1} d\Omega =$$

$$= \int_0^{\infty} J_p\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} x^{q-1} dx, \qquad (8.116)$$

будем иметь

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } n, \\ -\frac{A}{2\sigma^n} g_{1n}\left(\frac{1}{\sigma}\right) & \text{при } n = 2m. \end{cases} \qquad (8.117)$$

Пользуясь формулой (4.434.2) справочника [II], можно вычислить коэффициенты (116), выразив их через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$g_{pq}(\alpha) = \int_0^{\infty} J_p(\alpha x) e^{-\frac{x^2}{2}} x^{q-1} dx =$$

$$= 2^{-\frac{p-q}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \alpha^p e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \times$$

$$\times {}_1F_1\left(\frac{p+q}{2}+1;\ p+1;\ \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad (p+q>0). \qquad (8.118)$$

После подстановки (117) в (111) получим

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{4} A^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} g_{1,2m}^2\left(\frac{1}{\sigma}\right) R^{2m}(\tau). \qquad (8.119)$$

Пример 2. Пусть теперь, помимо гауссовых флюктуаций с характеристическими функциями (102) присутствует гармонический сигнал

$$s(t) = E\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = E\cos\Phi,$$

имеющий фиксированную амплитуду $E$ и совершенно случайную начальную фазу $\varphi_0$, не зависящую от $\xi(t)$. Характеристическая функция суммарного сигнала $x(t) = \xi(t) + s(t)$ при этом равна произведению характеристических функций процессов $\xi(t)$ и $s(t)$

$$\langle e^{i\Omega x}\rangle = \langle e^{i\Omega\xi}\rangle \langle e^{i\Omega E\cos\Phi}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\Omega^2} J_0(E\Omega). \quad (8.120)$$

При вычислении $<e^{i\Omega s}>$ здесь произведено усреднение по случайной начальной фазе $\varphi_0$ и использовано интегральное представление функции Бесселя $J_0(z)$. Аналогично для двумерной характеристической функции имеем

$$\langle e^{i\Omega x + i\Omega_\tau x_\tau}\rangle = \langle \exp(i\Omega\xi + i\Omega_\tau \xi_\tau)\rangle \langle \exp iE(\Omega\cos\Phi +$$

$$+ \Omega_\tau \cos\Phi_\tau)\rangle = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(\Omega^2 + 2R\Omega\Omega_\tau + \Omega_\tau^2)\right\} \times$$

$$\times J_0(E\sqrt{\Omega^2 + 2\cos\omega_0\tau\Omega\Omega_\tau + \Omega_\tau^2}). \quad (8.121)$$

Средние значения $<\eta>$ и $<\eta\eta_\tau>$ определяются путем подстановки в (107) характеристических функций (120), (121) вместо функций (102).

В процессе вычисления $\langle\eta_t\eta_\tau\rangle$ удобно использовать известную теорему сложения бесселевых функций:

$$J_0(E\sqrt{\Omega^2 + \Omega_\tau^2 + 2\Omega\Omega_\tau\cos\omega_0\tau}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_k J_k(E\Omega) J_k(E\Omega_\tau)\cos k\omega_0\tau \quad (8.122)$$

$$(\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2).$$

Экспоненту $\exp(-\sigma^2 R\Omega\Omega_\tau)$ в (121) также разложим в ряд (108). Тогда после указанной подстановки полу-

чим выражение для выходной моментной функции в виде двойного ряда

$$\langle \eta\eta_\tau \rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma^n}{2\pi}\int_L \mathrm{F}(i\Omega)\,J_k(E\Omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}}\,\Omega^n d\Omega\right]^2 \times$$

$$\times \frac{(-1)^{n+k}}{n!}\,\varepsilon_k R^n \cos k\omega_0\tau. \qquad (8.123)$$

Чтобы получить корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$, следует вычесть член, который соответствует $n=0$, $k=0$ и который равен $<\eta>^2$.

Пусть для примера

$$\eta = g(x) = \begin{cases} x & \text{при } x>0, \\ 0 & \text{при } x<0. \end{cases} \qquad (8.124)$$

Тогда

$$\mathrm{F}(i\Omega) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-i\Omega x}\,x dx = -\frac{1}{\Omega^2}. \qquad (8.125)$$

Контур интегрирования $L$ совпадает с действительной осью $\mathrm{Im}\,\Omega=0$, причем особенность в начале координат $\Omega=0$, если она имеется в подынтегральном выражении, обходится снизу. Если подынтегральное выражение не имеет такой особенности, то интегрирование проводится по действительным значениям $\Omega$ от $-\infty$ до $+\infty$.

Согласно (123), (125) имеем

$$k_\eta(\tau) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2}\sum_{\substack{n,\ k=0\\ n+k>0}}^{\infty}\left[\sigma^{n-1}\int_L J_k(E\Omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}}\,\Omega^{n-2}d\Omega\right]^2 \times$$

$$\times \frac{(-1)^{n+k}}{n!}\,\varepsilon_k R^n(\tau)\cos k\omega_0\tau. \qquad (8.126)$$

Полюса в начале координат имеются лишь в двух членах этой суммы, один из которых соответствует $n=1$, $k=0$, а другой $n=0$, $k=1$. Вычисление этих членов облегчается тем, что подынтегральное выражение является нечетной функцией от $\Omega$; соответствующие интегралы равны:

$$\int_L J_0(E\Omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}}\frac{d\Omega}{\Omega} = i\pi,$$

$$\frac{1}{\sigma}\int_L J_1(E\Omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}}\frac{d\Omega}{\Omega^2} = \frac{E}{2\sigma}\,i\pi, \qquad (8.127)$$

Интегралы в остальных членах выражаются через функции (118). В результате выражение (126) приводится к виду

$$k_\eta(\tau) = \frac{\sigma^2}{4} R(\tau) + \frac{E^2}{8} \cos \omega_0 \tau +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{n,\ k=0 \\ n+k>1}}^{\infty} \frac{1}{n!} [1 + (-1)^{n+k}]^2 \times$$

$$\times \varepsilon_k g^2_{k,\ n-1}\left(\frac{E}{\sigma}\right) R^n(\tau) \cos k\omega_0 \tau. \qquad (8.128)$$

Полученное выражение справедливо, в частности, при узкополосной случайной функции

$$\xi(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

имеющей коэффициент корреляции

$$R(\tau) = r(\tau) \cos \omega_0 \tau, \qquad (8.129)$$

где $A(t)$, $\varphi(t)$, $r(t)$ — медленно меняющиеся функции

$$\left(\frac{\dot{r}}{r} \ll \omega_0\right).$$

В этом случае выходной сигнал

$$\eta(t) = g[A \cos(\omega_0 t + \varphi) + E \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] =$$

$$= g[B \cos(\omega_0 t + \psi)] \qquad (8.130)$$

имеет спектральные составляющие, лежащие в узких полосах вблизи частот $l\omega_0$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$).

Корреляционную функцию (128) при этом можно представить в виде разложения

$$k_\eta(\tau) = k_0(\tau) + k_1(\tau) \cos \omega_0 \tau + k_2(\tau) \cos 2\omega_0 \tau + \ldots \qquad (8.131)$$

с медленно меняющимися функциями $k_0(\tau)$, $k_1(\tau)$, $k_2(\tau), \ldots$

Особый интерес представляет первая функция $k_0(\tau)$, получаемая из $k_\eta(\tau)$ усреднением по $\tau$:

$$k_0(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau + \frac{2\pi}{\omega_0}} k_\eta(\tau')\, d\tau'. \qquad (8.132)$$

Покажем, что в случае узкополосных сигналов усредненная корреляционная функция (132) приближенно совпадает с корреляционной функцией

$$k_0(\tau) = \mathrm{K}[\bar{\eta},\ \bar{\eta}_\tau] \tag{8.133}$$

усредненного сигнала

$$\bar{\eta}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_0}} \eta(t')\,dt' = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \eta(t+x)\,dx, \tag{8.134}$$

$$\left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\right).$$

Из (134) имеем

$$\mathrm{K}[\bar{\eta},\ \bar{\eta}_\tau] = \frac{1}{T_0^2}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} k_\eta(\tau + x - y)\,dxdy.$$

Подставляя сюда (131), представим $k_1(\tau + x - y)$, $k_2(\tau + x - y)$, ... в форме разложений

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\, k_s^{(r)}(\tau)\,(x-y)^r.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} k_s(\tau)\cos k\omega_0(\tau + x - y)\,dxdy = 0 \quad (k > 0),$$

$$\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} (x-y)^r \cos k\omega_0(\tau + x - y)\,dxdy <$$

$$< \int_0^{T_0}\int_0^{T_0} |x-y|^r\,dxdy = \frac{2T_0^{r+2}}{(r+1)(r+2)},$$

находим

$$K[\bar{\eta},\ \bar{\eta}_\tau] = k_0(\tau) + O(k_0'T_0 + k_1'T_0 + \ldots).$$

Отсюда вытекает (133), поскольку $k_s'T_0 \ll k_s$ вследствие условия узкополосности.

Усреднение (132) выражения (123) удобнее производить до того, как в (121) произведено разложение (108) по степеням $R^n$. Разлагая в ряд (122) лишь второй множитель и учитывая (129), представим (121) в виде

$$\langle e^{i\Omega x + i\Omega_\tau x_\tau}\rangle = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\Omega^2+\Omega_\tau^2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_k J_k(E\Omega) J_k(E\Omega_\tau) \cos k\omega_0\tau e^{-\sigma^2\Omega\Omega_\tau r\cos k\omega_0\tau} \quad (8.135)$$

и произведем усреднение типа (132) по $\tau$. Если $r(\tau)$ при этом считать постоянным, то (135) после усреднения перейдет в

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\Omega^2+\Omega_\tau^2)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_k J_k(E\Omega) J_k(E\Omega_\tau) I_k(-\sigma^2 r\Omega\Omega_\tau). \quad (8.136)$$

Разложив функцию Бесселя в ряд

$$I_k(-\sigma^2 r\Omega\Omega_\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+k)!}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 r\Omega\Omega_\tau\right)^{2n+k},$$

по аналогии с (123), будем иметь

$$\langle \overline{\eta}\overline{\eta_\tau}\rangle = \sum_{n,\,k=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma^{2n+k}}{2\pi}\int_L F(i\Omega) J_k(E\Omega) e^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}} \Omega^{2n+k} d\Omega\right]^2 \times$$

$$\times \frac{\varepsilon_k}{n!\,(n+k)!}\left[\frac{1}{2} r(\tau)\right]^{2n+k}. \quad (8.137)$$

Первый член с $n=0$, $k=0$ равен квадрату среднего значения $<\eta>^2$. Вычтя его из (137), получим корреляционную функцию

$$k_{\overline{\eta}}(\tau) = k_0(\tau) =$$

$$= \sum_{n,\,k=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma^{2n+k}}{2\pi}\int_L F(i\Omega) J_k(E\Omega) e^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}} \Omega^{2n+k} d\Omega\right]^2 \times$$

$$\times \frac{\varepsilon_k}{n!\,(n+k)!}\left[\frac{1}{2} r(\tau)\right]^{2n+k}. \quad (8.138)$$

Когда нелинейная функция $g(x)$ имеет вид (124), постоянная составляющая (134) пропорциональна суммарной амплитуде

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\,[B\cos(\chi + \psi)]\,d\chi = \frac{B}{\pi} \qquad (8.139)$$

и поэтому формула (138) позволяет найти корреляционную функцию амплитуды $B(t)$. Подставив (125) в (138), имеем

$$k_{\eta}(\tau) = \pi^{-2} k_B(\tau) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \sum_{n,\,k=0}^{\infty} \left[\sigma^{2n+k-1} \int_{-\infty}^{\infty} J_k(E\Omega)\, e^{-\frac{\sigma^2\Omega^2}{2}}\, \Omega^{2n+k-2} d\Omega\right]^2 \times$$

$$\times \frac{\varepsilon_k}{n!\,(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+k}$$

и согласно (118)

$$k_B(\tau) = \sigma^2 \sum_{\substack{n,\,k=0 \\ n+k>0}}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{n!\,(n+k)!\,2^{2n+k}}\, g^2_{k,\,2n+k-1}\left(\frac{E}{\sigma}\right) r^{2n+k}(\tau). \qquad (8.140)$$

## § 9. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНЕРЦИОННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Сущность методов, применяемых при анализе нелинейных инерционных преобразований случайных сигналов, выясним на примере диодного детектора, процессы в котором описываются нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Диодный детектор представляет собой последовательное соединение нелинейного элемента, имеющего вольт-амперную характеристику $J = F(V)$, и параллельной цепочки $RC$ (рис. 8.2). (Анодный детектор является более простой системой, так как в нем можно не учитывать реакцию нагрузки; задача при этом сводится к исследованию безынерционного преобразования флюктуаций, рассмотренного в предыдущем параграфе).

Пусть требуется найти статистические характеристики напряжения $\eta(t)$ на цепочке $RC$, когда на вход

детектора воздействует случайный сигнал $\xi(t)$ с известными параметрами.

Дифференциальное уравнение для диодного детектора имеет вид

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC}\eta = \frac{1}{C}F(\xi - \eta). \qquad (9.1)$$

Строгое решение этого нелинейного дифференциального уравнения при типовых функциях $F$, аппроксимирующих вольтамперные характеристики, невозможно даже в том случае, когда в правую часть уравнения входит вместо случайной функции $\xi(t)$ какая-либо регулярная функция времени (не равная постоянной). Тем более это решение невозможно при наличии в правой части случайной функции. Ввиду этого приходится применять приближенные методы решения. Выбор того или иного метода зависит от вида функции $F(V)$ от параметров системы, а также соотношения между временем корреляции $\tau_{кор}$ входных флюктуаций и постоянной времени детектора $RC$.

Можно указать следующие частные случаи и соответствующие методы их рассмотрения.

1. Если выполняется неравенство

$$\tau_{кор} \gg RC, \qquad (9.2)$$

то можно проводить рассмотрение в квазистатическом приближении. В первом приближении в этом случае можно пренебречь временной производной $\eta$ в уравнении (1). После этого задача сводится к безынерционному нелинейному преобразованию $\eta = RF(\xi - \eta)$.

2. Пусть флюктуации $\xi(t)$ являются узкополосными, т. е. соответствуют колебаниям частоты $\omega_0$ с медленно меняющимися амплитудой и фазой, и имеют поэтому большое время корреляции $\tau_{кор}$. Если выполняются соотношения

$$\tau_{кор} \gg RC \gg \frac{2\pi}{\omega_0}, \qquad (9.3)$$

то применим метод огибающей, который является разновидностью квазистатического метода. Описанный случай охватывает детекторные каскады многих радиоприемных устройств.

3. В ряде случаев целесообразно применять метод малой нелинейности, при котором в первом приближе-

нии задача рассматривается как линейная и лишь в последующих приближениях учитываются нелинейные эффекты. Этот метод применим, когда в исходном уравнении нелинейный член (или члены) мал или когда допустима линеаризация уравнения относительно отклонений от подобранного соответствующим образом нулевого приближения. Применение указанного метода не ограничено каким-либо соотношением между постоянной времени системы и временем корреляции, он пригоден и при $\tau_{кор} \sim RC$.

4. Если время корреляции мало

$$\tau_{кор} \ll RC, \tag{9.4}$$

то флюктуационный процесс можно рассматривать как процесс Маркова и пользоваться уравнением Фоккера—Планка. Такой случай может встретиться, в частности, в измерительной технике, когда требуется знать среднее значение $<\eta>$ выходного сигнала, характеризующее показание прибора, и дисперсию $D\eta$, характеризующую погрешность измерения. Для этого достаточно знать одномерное стационарное распределение, являющееся решением уравнения Фоккера—Планка.

5. В случае промежуточных времен корреляции $\tau_{кор} \sim RC$ и больших сигналов решение задачи является наиболее трудным. Если входной сигнал $\xi(t)$ предполагать марковским процессом, то выходное напряжение будет компонентой многомерного процесса Маркова и некоторые результаты могут быть получены на основе многомерного уравнения Фоккера—Планка.

Рассмотрим указанные методы поочередно.

### 1. Воздействие узкополосного процесса на детектор. Метод огибающей

Если входной процесс $\xi(t)$ является медленно меняющимся ($\tau_{кор} \gg RC$), в уравнении (1) можно пренебречь производной $\dot{\eta}$ и получить

$$\eta = RF(\xi - \eta). \tag{9.5}$$

Решая это уравнение относительно $\eta$, например, графическим методом, получаем безынерционную зависимость

$$\eta(t) = g[\xi(t)]. \tag{9.6}$$

Методы анализа таких нелинейных преобразований были изложны в § 8. Иногда удобно представить зависимость (6) полиномом, например, вида

$$g(\xi) = a_1\xi + a_2\xi^2$$

или

$$g(\xi) = a_2\xi^2 - a_4\xi^4.$$

Коэффициенты $a_1$, $a_2$, $a_4$ подбираются численно из тех соображений, чтобы указанные полиномы давали удовлетворительную аппроксимацию на рабочем участке характеристики. Статистические характеристики выходного сигнала при указанных полиномиальных характеристи-

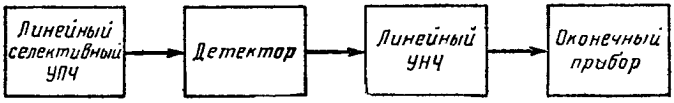



Рис 9 1 Упрощенная блок-схема типового радиоприемника.

ках вычислялись в примерах 1 и 2 предыдущего параграфа.

Остановимся подробнее на той разновидности квазистатического метода, которая применима в случае узкополосного входного сигнала.

Пусть имеется типовое радиоприемное устройство, состоящее из линейного селективного усилителя промежуточной частоты (УПЧ), детекторного каскада, линейного усилителя низкой частоты (УНЧ) и оконечного прибора (рис. 9.1).

Обычно УПЧ представляет собой частотно-селективный четырехполюсник, т. е. обычно выполняется неравенство $\Delta\omega < \omega_0$, где $\omega_0$ — центральная угловая частота, а $\Delta\omega$ — ширина полосы пропускания четырехполюсника.

При воздействии на такую систему стационарных флюктуаций с широким спектром флюктуации $\xi(t)$ на выходе УПЧ являются узкополосными и имеют обычно коэффициент корреляции вида

$$R(\tau) = r(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

где $r(\tau)$ — медленно меняющаяся функция по сравнению с $\cos\omega_0\tau$ (в формуле (7.4) $s(\tau) = 0$ вследствие симметрии частотной характеристики УПЧ относительно центральной частоты $\omega_0$).

Как всякий узкополосный случайный процесс флюктуации можно записать в виде колебаний

$$\xi(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \qquad (9.7)$$

с медленно меняющейся амплитудой и фазой (7.55).

Если, помимо флюктуации $\xi(t)$, на вход детекторного каскада поступает гармонический сигнал $E\cos\omega_0 t$, то суммарный сигнал $\xi(t) + E\cos\omega_0 t$ также можно записать в форме колебаний (7.83) с новой амплитудой $B(t)$ и фазой $\psi(t)$. Чтобы распространить последующие результаты на этот случай, в них нужно только заменить амплитуду $A(t)$ на $B(t)$.

Назначение каждого детектора состоит в возможно лучшем выделении низкочастотного модулирующего напряжения. Поэтому выходное напряжение на цепочке $RC$ должно успевать «следить» за медленными изменениями амплитуды Поскольку последняя меняется с постоянной времени $\tau_{кор}$, должно выполняться условие

$$\tau_{кор} \gg RC. \qquad (9.8)$$

С другой стороны, детекторный каскад должен сильно сглаживать радиочастотное колебание, что будет иметь место при

$$RC \gg \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (9.9)$$

Выполнение этих двух условий существенно упрощает задачу исследования процесса детектирования, ибо при этом выходное напряжение $\eta(t)$ безынерционно зависит от амплитуды колебаний на входе $A(t)$ или $B(t)$.

Подставив (7) в (1), получаем

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC}\eta = \frac{1}{C}F(A\cos(\omega_0 t + \varphi) - \eta). \qquad (9.10)$$

Интегрируя это уравнение за период от $t$ до $t + \frac{2\pi}{\omega_0}$, имеем

$$\eta\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \eta(t) = \frac{1}{RC}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_0}} [-\eta(t') +$$

$$+ RF(A(t')\cos(\omega_0 t' + \varphi) - \eta(t'))]\,dt'. \qquad (9.11)$$

Но вследствие условия (9) функция $\eta(t)$ мало успеет измениться в течение периода, поэтому разность $\eta(t+\frac{2\pi}{\omega_0})-\eta(t)$ почти не отличается от $\dot{\eta}\cdot 2\pi/\omega_0$, а $\eta(t')$ под знаком интеграла можно считать постоянной $\eta(t')\approx\eta(t)$. Амплитуду $A$ и фазу $\varphi$ также можно считать постоянными в течение периода, учитывая лишь изменение $\cos[\omega_0 t'+\varphi(t)]$. Поэтому из (11) будем иметь

$$\dot{\eta}+\frac{1}{RC}\eta=\frac{1}{C}\frac{\omega_0}{2\pi}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_0}} F(A\cos(\omega_0 t'+\varphi)-\eta)\,dt$$

или

$$\dot{\eta}+\frac{1}{RC}\eta=\frac{1}{C}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(A(t)\cos\chi-\eta)\,d\chi. \qquad (9.12)$$

В правой части стоит, в сущности, известная функция от $A$ и $\eta$, получаемая путем интегрирования характеристики лампы $F(V)$.

Уравнение (12) само по себе трудно поддается решению в общем виде. Однако условие (8), требующее медленных изменений амплитуды, существенно упрощает задачу, ибо при этом в (12) можно пренебречь производной.

В самом деле, в процессе $\eta(t)$, как и в $A(t)$, существенны лишь гармонические составляющие, которые лежат в полосе частот

$$|\omega|\sim\Delta\omega=\frac{1}{\tau_{кор}}.$$

Для этих частот производная $\dot{\eta}_\omega=i\omega\eta_\omega$ вследствие (8) значительно меньше, чем $\frac{\eta_\omega}{RC}$. Поэтому производная $\dot{\eta}$ в (12) значительно меньше второго члена $\frac{\eta}{RC}$. Пренебрегая ею, получаем уравнение

$$\eta=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(A\cos\chi-\eta)\,d\chi, \qquad (9.13)$$

дающее безынерционную зависимость выходного напряжения $\eta(t)$ от амплитуды $A(t)$.

Рассмотрим теперь при помощи этого уравнения три типовых случая диодного детектирования, а именно, когда нелинейная вольтамперная характеристика $F(V)$ является линейно-ломаной, квадратичной и экспоненциальной.

а) В первом случае, обычно называемом линейным детектором, нелинейная характеристика имеет вид

$$I = F(V) = \begin{cases} \frac{1}{R_i} V & \text{при } V > 0, \\ 0 & \text{при } V < 0, \end{cases} \tag{9.14}$$

где $R_i$ — внутреннее сопротивление диода в открытом состоянии.

Подставив выражение (14) в уравнение (13), имеем

$$\eta = \frac{AR}{\pi R_i} \int_0^{\gamma} \left(\cos\chi - \frac{\eta}{A}\right) d\chi, \quad \left(\gamma = \arccos\frac{\eta}{A}\right). \tag{9.15}$$

Введем безразмерную величину

$$k = \frac{\eta}{A}, \tag{9.16}$$

которую можно назвать коэффициентом воспроизведения огибающей. Тогда (15) принимает вид

$$k = \frac{R}{\pi R_i} \int_0^{\arccos k} (\cos\chi - k)\, d\chi.$$

Выполнив интегрирование, получим окончательную формулу

$$\frac{R}{R_i} = \frac{\pi k}{\sqrt{1 - k^2} - k \arccos k}. \tag{9.17}$$

При значениях $\frac{R}{R_i} \lesssim 1$ коэффициент воспроизведения огибающей $k < 0{,}3$ и из предыдущей формулы получим

$$k \approx \frac{1}{\pi} \frac{R}{R_i}.$$

Однако такие значения $R/R_i$ не являются характерными для типовых радиоприемников. В радиолокационных и телевизионных приемниках это отношение имеет порядок $3 \div 10$, а в связных приемниках оно достигает сотен. Для таких больших значений $R/R_i$ на рис. 9.2 приведен график коэффициента $k$. Из него видно, что коэффициент воспроизведения огибающей $k$ монотонно возрастает с увеличением $R/R_i$, асимптотически приближаясь к единице.

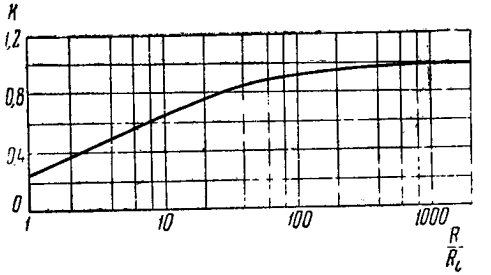



Рис. 9 2. Зависимость коэффициента воспроизведения огибающей от отношения сопротивлений $R/R_i$ при линейном детектировании

Характерным свойством линейного детектора в отличие от других типов является то, что выходное напряжение $\eta(t)$ линейно зависит от $A(t)$ и поэтому целесообразно ввести коэффициент воспроизведения (16), не зависящий от $A$. После его вычисления статистические характеристики выходного сигнала

$$\eta_1(t) = kA(t) \tag{9.18}$$

получаются из соответствующих характеристик для $A(t)$ весьма просто. В частности, имеем

$$\langle \eta \rangle = k\langle A \rangle; \ \langle \eta\eta_\tau \rangle = k^2 \langle AA_\tau \rangle.$$

В связи с последней формулой полезно напомнить, что корреляционная функция огибающей определяется выражением (8.56).

б) При квадратичном детектировании нелинейная характеристика дается выражением

$$F(V) = \begin{cases} \beta V^2 & \text{при } V > 0, \\ 0 & \text{при } V < 0, \end{cases} \tag{9.19}$$

где $\beta$ — некоторый постоянный размерный коэффициент.

На основании (13) получаем

$$\eta = \beta \frac{RA^2}{\pi} \int_0^{\gamma} \left(\cos\chi - \frac{\eta}{A}\right)^2 d\chi, \quad \left(\gamma = \arccos\frac{\eta}{A}\right)$$

или, если ввести $k = \frac{\eta}{A}$,

$$k = \beta \frac{RA}{\pi} \int_0^{\arccos k} (\cos\chi - k)^2 \, d\chi.$$

Выполнив интегрирование, после элементарных преобразований будем иметь следующее трансцендентное уравнение

$$\beta RA = \frac{2\pi k}{(1 + 2k^2)\arccos k - 3k\sqrt{1 - k^2}}. \qquad (9.20)$$

Теперь коэффициент воспроизведения огибающей не имеет прежнего прямого смысла, поскольку зависит от $A$.

При $\beta RA \lesssim 0{,}1$ выполняется неравенство $k \ll 1$. Полагая $\arccos k \approx \frac{\pi}{2}$, из (20) находим

$$k \approx \frac{1}{4}\beta RA, \quad \eta = \frac{1}{4}\beta RA^2. \qquad (9.21)$$

При больших значениях $\beta RA$ коэффициент $k$ может быть найден путем численного решения уравнения (20). На рис. 9.3 представлена зависимость

$$k = f(\beta RA), \qquad (9.22)$$

где $f(x)$ — функция, обратная функции

$$x = \frac{2\pi k}{|(1 + 2k^2)\arccos k - 3k\sqrt{1 - k^2}|}.$$

Как видно из графика, с увеличением $\beta RA$ коэффициент $k$ растет, асимптотически приближаясь к единице.

Вследствие (22) зависимость выходного напряжения от амплитуды имеет вид

$$\beta R\eta = \beta RAf(\beta RA). \qquad (9.23)$$

На том или ином участке, выбор которого зависит от диапазона часто встречающихся значений $\beta RA(t)$, функция (23) может быть аппроксимирована полиномом. Так, например, двучлен

$$\beta R\eta = 0{,}583(\beta RA) + 0{,}002(\beta RA)^2,$$

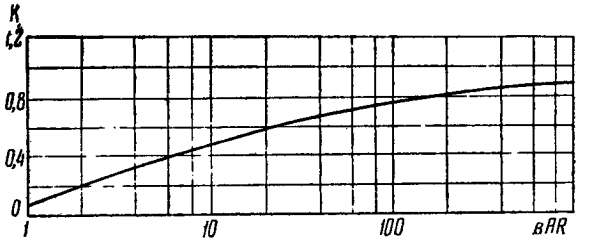



Рис. 93. Зависимость коэффициента $k$ от параметра $\beta AR$ при квадратичном детектировании

которому соответствует линия на рис. 9.4, дает в интервале $\beta RA = 0 \div 100$ удовлетворительную аппроксимацию зависимости (23).

Указанной аппроксимацией удобно пользоваться при $\beta R(A) \sim 50$. В этом случае $\beta RA$ редко попадает в область значений $\beta RA \ll 50$, где эта аппроксимация не вполне удовлетворительна. При другом диапазоне изменений амплитуды целесообразно пользоваться аппроксимацией с другими коэффициентами.

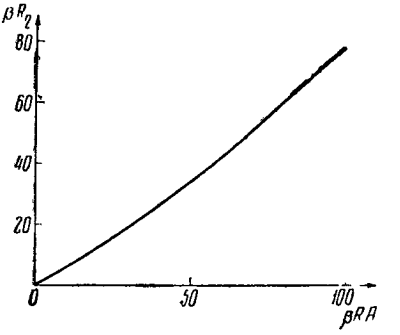



Рис 94 Зависимость выходного напряжения от амплитуды

После выбора полинома статистические характеристики выходного сигнала рассчитываются по методу, изложенному в предыдущем параграфе (раздел 2, пример 3).

в) Перейдем к рассмотрению экспоненциального детектора.

Пусть нелинейная характеристика имеет экспоненциальный вид

$$I = F(V) = i_0 e^{aV}, \qquad (9.24)$$

где $I$ — ток, протекающий через нелинейный элемент при напряжении на нем $V$; $i_0$ и $a$ — размерные постоянные.

Такой кривой можно аппроксимировать вольтамперные характеристики диодов, причем в случае оксидных катодов при нормальной рабочей температуре катода

$$i_0 = 50 \div 600 \text{ мка}; \quad a = 5 \div 10 \frac{1}{в}.$$

При воздействии на детектор флюктуаций (7) напряжение на цепочке $RC$ согласно формуле (13) определяется из уравнения

$$\eta = Ri_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[a(A\cos\chi - \eta)\right] d\chi = Ri_0 e^{-a\eta} I_0(aA)$$

или

$$a\eta e^{a\eta} = aRi_0 I_0(aA). \tag{9.25}$$

Здесь $I_0(z) = J_0(iz)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Решение уравнения (25) проводится по-разному в зависимости от того, велика или мала по сравнению с единицей величина $aRI_0(a\langle A\rangle)$ или величина $a\langle A\rangle$.

Если $a\langle A\rangle \ll 1$, то $\eta$ мало отличается от постоянного напряжения $\eta_0$, имеющего место при отсутствии входного напряжения. Полагая $A=0$ в (25), имеем

$$a\eta_0 e^{a\eta_0} = aRi_0. \tag{9.26}$$

Пользуясь разложениями

$$I_0(aA) = 1 + \frac{1}{4}(aA)^2 + \frac{1}{64}(aA)^4 + \ldots,$$

$$xe^x = x_0 e^{x_0} + (1 + x_0)\, e^{x_0}(x - x_0) + (x - x_0)^2 \ldots$$

и учитывая (26), из (25) получаем

$$\eta_1 - \eta_{10} = \frac{a\eta_0}{4(1 + a\eta_0)} aA^2. \tag{9.27}$$

Следовательно, при малых значениях $aA \lesssim 0{,}1$ напряжение на нагрузке детектора, обусловленное наличием входного сигнала, пропорционально квадрату огибающей. Вообще при малых амплитудах на входе имеет место квадратичное детектирование независимо от вида

характеристики $F(V)$. Это связано с тем, что выходной сигнал является четной функцией от $A$ (он не зависит от фазы входного сигнала и не меняется при сдвиге фазы на 180°, т. е. при замене $A$ на $-A$). В разложении по степеням $A$, которое содержит, следовательно, лишь четные степени, при малых $A$ существен лишь первый квадратичный член.

Больший практический интерес представляет случай больших значений $ARi_0$ и $aA$, когда

$$aRi_0 I_0(aA) \gg 1. \tag{9.28}$$

При этом коэффициент воспроизведения $\frac{\eta}{A}$ велик — порядка единицы.

Условие (28) позволяет решать уравнение (25) методом последовательных приближений. Записав его в виде

$$x + \ln x = z, \ (x = a\eta; \ z = \ln [aRi_0 I_0(aA)]),$$

определяем последовательные приближения

$$x_n = z - \ln x_{n-1}, \ (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$x_1 = z, \ x_2 = z - \ln z,$$

$$x_3 = z - \ln(z - \ln z) \approx z - \ln z + \frac{\ln z}{z}, \ \ldots$$

Ограничиваясь вторым приближением, имеем

$$\eta = \frac{1}{a} \ln \frac{aRi_0 I_0(aA)}{\ln [aRi_0 I_0(aA)]}. \tag{9.29}$$

Воспользуемся найденным выражением, чтобы определить коэффициенты $a_1$, $a_2$ разложения (8.42) относительно среднего значения амплитуды $c = \langle A \rangle$:

$$\eta = a_0 + a_1(A - \langle A \rangle) + a_2(A - \langle A \rangle)^2.$$

Отождествляя выписанные члены с первыми членами разложения функции (29) в ряд Тейлора, имеем

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{a}(z_1 - \ln z_1); \ \ a_1 = \left(1 - \frac{1}{z_1}\right)\vartheta, \\ a_2 = a\frac{\vartheta^2}{z_1^2} + a\left(1 - \frac{1}{z_1}\right)\left(1 - \frac{\vartheta}{a\langle A \rangle} - \vartheta^2\right) \\ \left(z_1 = \ln aRi_0 + \ln I_0(a\langle A \rangle); \ \ \vartheta = \frac{I_1(a\langle A \rangle)}{I_0(a\langle A \rangle)}\right). \end{gathered} \tag{9.30}$$

Если производить увеличение параметра $a\langle A\rangle$, то

$$z_1 \to \infty;\ \vartheta \to 1$$

и в соответствии с (30) коэффициент $a_1$ будет приближаться к единице, а $a_2$—уменьшаться до нуля. При этом преобразование сигнала детекторным каскадом будет приближаться к идеальному детектированию, т. е. точному воспроизведению огибающей:

$$\eta = a_0' + A,\ (a_0' = a_0 - \langle A\rangle). \tag{9.31}$$

При произвольной характеристике $F(v)$ детектирование тем ближе к идеальному, чем круче нарастает функция $F(V)$ по сравнению с $V/R$, т. е. чем увереннее выполняется неравенство

$$R_i \ll R,\ \left(R_i = \left[\frac{\partial F}{\partial V}\right]^{-1},\ V > 0\right). \tag{9.32}$$

## 2. Метод малой нелинейности

Другие методы анализа инерционных нелинейных преобразований изложим применительно к тому частному случаю, когда характеристика нелинейного элемента является экспоненциальной функцией:

$$F(V) = i_0 e^{aV}. \tag{9.33}$$

Здесь $i_0$, $a$ — постоянные, о которых шла речь выше (стр. 231). Для указанной характеристики уравнение (1) принимает вид

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC}\eta = \frac{i_0}{C} e^{a\xi - a\eta}. \tag{9.34}$$

Удобно ввести новую переменную

$$x = e^{a\eta}, \tag{9.35}$$

для которой получим уравнение

$$RC\dot{x} + x \ln x = a i_0 R e^{a\xi}. \tag{9.36}$$

Характер флюктуационного процесса, описываемого последним уравнением, определяется величиной пара-

метра $ai_0R$, а также отношением времени корреляции $\tau_{кор}$ функции $\xi(t)$ к постоянной времени $RC$. Большая или малая величина указанных параметров $ai_0R$, $\tau_{кор}/RC$ позволяет применять частные асимптотические методы анализа флюктуационного процесса. Так, условие $\tau_{кор} \gg RC$ обеспечивает применимость квазистатического метода. Напротив, малая величина отношения $\tau_{кор}/RC$ служит основанием для применения стохастических методов и использования уравнения Фоккера—Планка. Однако оба эти метода непригодны, когда $\tau_{кор} \sim RC$. Это заставляет обратиться к другому методу, основанием для которого служат условие, наложенное на другой параметр, а именно на $ai_0R$. Откладывая на время точную формулировку этого условия, перейдем к изложению самого метода, который назовем методом малой нелинейности. Он характеризуется тем, что отыскиваются последовательные приближения. Нулевое приближение $x_0(t)$ определяем как решение уравнения

$$RC\dot{x}_0 + x_0 \ln x_0 = ai_0R\langle e^{a\xi}\rangle, \tag{9.37}$$

получаемого путем усреднения уравнения (36).

Полагая $\xi(t)$ стационарной случайной функцией, мы интересуемся стационарным процессом, начавшимся в отдаленном прошлом. При этом установится стационарное значение $x_0$, для которого из (37) получаем уравнение

$$x_0 \ln x_0 = ai_0R\langle e^{a\xi}\rangle. \tag{9.38}$$

Среднее $\langle e^{a\xi}\rangle$ есть частное значение характеристической функции $\langle e^{iu\xi}\rangle$ при $u = -ia$. Когда $\xi(t)$ есть гауссов процесс с нулевым средним значением, имеем

$$\langle e^{iu\xi}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}, \quad \langle e^{a\xi}\rangle = e^{\frac{1}{2}a^2\sigma^2} \tag{9.39}$$

и уравнение (38) принимает вид

$$x_0 \ln x_0 = ai_0Re^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}. \tag{9.40}$$

Используя выражение (35), получаем для $\tau_{i0} = \frac{1}{a}\ln x_0$ следующее уравнение:

$$\tau_{i0}e^{a\tau_{i0}} = i_0Re^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}. \tag{9.41}$$

Рассмотрим отклонение

$$z = x - x_0, \tag{9.42}$$

для которого получим сначала дифференциальное уравнение. Вычитая (37) из (36), находим

$$RC\dot{z} + (x_0 + z)\ln(x_0 + z) - x_0 \ln x_0 = \\ = ai_0 R\,(e^{a\xi} - \langle e^{a\xi}\rangle). \tag{9.43}$$

Если функцию $x \ln x$ разложить в ряд Тейлора

$$x \ln x = x_0 \ln x_0 + (\ln x_0 + 1)\,z + \\ + \frac{1}{2x_0} z^2 - \frac{1}{6x_0^2} z^3 + \ldots, \tag{9.44}$$

то отсюда будем иметь

$$RC\dot{z} + (\ln x_0 + 1)\,z = ai_0 R\zeta - \frac{z^2}{2x_0} + \frac{z^3}{6x_0^2} \ldots, \tag{9.45}$$

где

$$\zeta = e^{a\xi} - \langle e^{a\xi}\rangle. \tag{9.46}$$

Выведенное уравнение содержит нелинейные члены

$$\frac{z^2}{2x_0} - \frac{z^3}{6x_0^2} + \ldots = f(x_0 + z) - f(x_0) - f'(x_0)\,z \\ (f(x) = x \ln x). \tag{9.47}$$

Излагаемый метод основан на предположении, что эти нелинейные члены оказывают сравнительно небольшое влияние, и в первом приближении ими можно пренебречь. Поэтому из (45) получаем уравнение первого приближения

$$RC\dot{z}_1 + (\ln x_0 + 1)\,z_1 = ai_0 R\zeta. \tag{9.48}$$

Чтобы пояснить, как строятся высшие приближения, введем вспомогательный малый параметр $\varepsilon$. Представим решение в форме разложения

$$z = z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \ldots \tag{9.49}$$

и снабдим малым параметром нелинейные члены. Записав (45) в виде

$$RC\dot{z} + (\ln x_0 + 1)\,z = ai_0 R\zeta - \frac{\varepsilon}{2x_0} z^2 + \frac{\varepsilon^2}{6x_0^2} z^3 \ldots,$$

подставляя (49) и приравнивая члены одинакового порядка по $\varepsilon$, находим уравнения для высших приближений

$$RC\dot{z}_2 + (\ln x_0 + 1)\, z_2 = -\frac{z_1^2}{2x_0} \tag{9.50}$$

. . . . . .

Когда разложение в ряд Тейлора (47) проводить нецелесообразно (или оно вообще не существует), всю линейную часть (47) в уравнении (45) можно умножить на малый параметр. В этой разновидности метода в уравнении для $z_2$ в правой части будет стоять вся нелинейная функция

$$f(x_0 + z_1) - f(x_0) - f'(x_0)\, z_1.$$

После выяснения схемы построения приближений малый параметр можно упразднить, положив его равным единице.

В правые части уравнений (48), (50) входят только известные функции или уже найденные ранее низшие приближения. Относительно неизвестных функций указанные уравнения линейны и без особого труда может быть получено их решение. Так, стационарное решение уравнения (48) имеет вид

$$z_1(t) = \frac{ai_0}{C} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{\ln x_0 + 1}{RC}(t - t')\right] \zeta(t')\, dt'. \tag{9.51}$$

По определению (46) функция $\zeta(t)$ имеет нулевое среднее значение, поэтому

$$\langle z_1 \rangle = 0. \tag{9.52}$$

Чтобы найти дисперсию или корреляционную функцию первого приближения $z_1(t)$, вычислим сначала корреляционную функцию процесса $\zeta(t)$ в предположении, что $\xi(t)$ есть стационарная гауссова функция с нулевым средним значением и корреляционной функцией $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$. Вследствие (46) имеем

$$\langle \zeta\zeta_\tau \rangle = \langle e^{a\xi + a\xi_\tau} \rangle - \langle e^{a\xi} \rangle^2. \tag{9.53}$$

Входящее сюда среднее значение $\langle e^{a\xi + a\xi_\tau} \rangle$ выражается через двумерную характеристическую функцию $\Theta_2(u_1, u_2)$. Воспользовавшись для нее известной формулой (8.102), а также учитывая (39), получаем

$$\langle \zeta\zeta_\tau \rangle = e^{a^2\sigma^2} \left[e^{a^2\sigma^2 R(\tau)} - 1\right]. \tag{9.54}$$

Теперь приступим к вычислению корреляционной функции $(z_1 z_{1\tau})$, которая согласно (51) равна

$$\langle z_1 z_{1\tau}\rangle = \left(\frac{ai_0}{c}\right)^2 \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-\beta(t-t_1)-\beta(t+\tau-t_2)}\langle\zeta(t_1)\zeta(t_2)\rangle\, dt_1 dt_2$$

$$\left(\beta = \frac{\ln x_0 + 1}{RC}\right).$$

Сделав замену переменных

$$\sigma = t_2 - t_1 - \tau; \quad s = \frac{t_1 + t_2}{2}, \tag{9.55}$$

последний интеграл можно записать

$$\langle z_1 z_{1\tau}\rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{t+\frac{\tau}{2}-\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\beta(2t-2s+\tau)}\langle\zeta\zeta_{\sigma-\tau}\rangle\, ds.$$

Отсюда после вычисления интеграла по $s$ будем иметь

$$\langle z_1 z_{1\tau}\rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|\sigma|}\langle\zeta\zeta_{\sigma-\tau}\rangle\, d\sigma. \tag{9.56}$$

Полагая, в частности, $\tau = 0$, находим дисперсию

$$\langle z_1^2\rangle = \left(\frac{ai_0}{C}\right)^2 \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} e^{-\beta\sigma}\langle\zeta\zeta_\sigma\rangle\, d\sigma. \tag{9.57}$$

Если использовать (54), то получим

$$\langle z_1^2\rangle = \frac{(ai_0R)^2}{\ln x_0 + 1} e^{a^2\sigma^2}\frac{1}{RC}\int_0^{\infty}(e^{a^2\sigma^2 R(\tau)} - 1)\, e^{-\beta\tau} d\tau. \tag{9.58}$$

Более точные результаты могут быть получены путем подстановки (51) в правую часть (50) и вычисления высших приближений.

Статистические характеристики выходного напряжения $\eta = \ln(x_0 + z)/a$ теперь могут быть получены при помощи разложения этого выражения в ряд Тейлора

$$\eta_1 = \eta_0 + \frac{z}{ax_0} - \frac{z^2}{2ax_0^2} + \ldots \tag{9.59}$$

и подстановки в него ряда (49). Если ограничиться результатами первого приближения (51), (56), (57), то будем иметь

$$\langle \eta \rangle = \eta_0 - \frac{1}{2ax_0^2} \langle z_1^2 \rangle, \tag{9.60}$$

$$\langle (\eta - \eta_0)(\eta_\tau - \eta_0) \rangle = \frac{1}{a^2 x_0^2} \langle z_1 z_{1\tau} \rangle.$$

В частности,

$$D\eta = \frac{\langle z_1^2 \rangle}{a^2 x_0^2}. \tag{9.61}$$

Здесь правые части определяются формулами (56)—(58).

Проанализируем условия применимости изложенного метода для того случая, представляющего наибольшие трудности, когда процесс $\xi(t)$ имеет время корреляции порядка постоянной времени фильтра ($\tau_{кор} \sim RC$).

Метод малой нелинейности пригоден, если нелинейные члены в уравнении (45) оказывают небольшое влияние по сравнению с линейным членом $(\ln x_0 + 1)z$ Выбрав первый из нелинейных членов, получаем условие

$$|(\ln x_0 + 1)z| \gg \left| \frac{z^2}{2x_0} \right|$$

или

$$|z| \ll 2x_0(\ln x_0 + 1), \tag{9.62}$$

где в качестве $z$ можно взять первое приближение (51). Согласно (38), (40) величина $x_0(\ln x_0 + 1)$ мало отличается от

$$x_0 \ln x_0 = ai_0 R e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}} \sim ai_0 R e^{-\frac{a^2\sigma^2}{2}} \sigma(\zeta) \tag{9.63}$$

[так как $\sigma(\zeta) \sim e^{a^2\sigma^2}$ в силу (54)].
С другой стороны, используя (51), можно получить оценку

$$z_1 \lesssim \frac{ai_0}{C} \frac{RC}{\ln x_0 + 1} \zeta, \tag{9.64}$$

где знак неравенства относится к тому случаю, когда функция $\zeta(t)$ быстро меняется, имея постоянную времени

$$\tau_{кор} \lesssim \frac{RC}{\ln x_0 + 1}.$$

В противном случае при $\tau_{кор} \sim RC$ величина $z_1$ определяется в основном множителем $e^{-\beta(t-t')}$, стоящим в (51) под знаком интеграла, и в соотношении (64) следует брать знак $\sim$.

Подставляя (64) в (62) и учитывая оценку (63), а также соотношение $\zeta \sim \sigma(\zeta)$, получаем неравенство

$$\ln x_0 \gg e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}.$$

Умножим обе части этого неравенства на $x_0$ и, используя (40), будем иметь

$$ai_0R \gg x_0 \tag{9.65}$$

или

$$ai_0R \ln (ai_0R) \gg x_0 \ln x_0.$$

Вторично используя (40) и сокращая на $ai_0R$, записываем условие малой нелинейности в виде

$$\ln ai_0R \gg e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}}. \tag{9.66}$$

Следовательно, метод малой нелинейности применим при больших значениях параметра $ai_0R$ и не слишком большом уровне шума. В случае малого времени корреляции $\tau_{кор}$, к которому относится знак $<$ в (64), условия (65), (66) нужно заменить на менее ограничивающие. Область применимости метода малой нелинейности, в основе которого лежит условие $\sigma(x) \ll x_0$, при этом несколько расширяется.

### 3. Метод уравнения Фоккера—Планка

При достаточно малом времени корреляции шума, когда оно меньше других постоянных времени системы, для анализа флюктуационного процесса можно применять стохастические методы и уравнение Фоккера—Планка. Проиллюстрируем их на примере уже рассмотренного ранее уравнения (36), относящегося к случаю экспоненциального детектора. В этом уравнении

$$RC\dot{x} + x \ln x = ai_0R\langle e^{a\xi}\rangle + ai_0R\zeta, \tag{9.67}$$

случайное воздействие

$$\zeta = e^{a\xi} - \langle e^{a\xi}\rangle \tag{9.68}$$

при малом времени корреляции $\tau_{кор}$ можно заменить на гауссов дельта-коррелированный процесс $\zeta'$, имеющий то же самое (нулевое) среднее значение, и корреляционную функцию

$$\langle \zeta'\zeta'_\tau\rangle = K\delta(\tau). \tag{9.69}$$

Здесь коэффициент интенсивности $K$ выбран равным коэффициенту интенсивности первоначального процесса (68):

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \xi_\tau \rangle \, d\tau. \tag{9.70}$$

После указанной замены $\xi$ на $\xi'$ уравнение (67) будет описывать процесс Маркова $x(t)$ и будет эквивалентно уравнению Фоккера—Планка

$$\dot{w} = \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial x} [(x \ln x - m) w] + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{ai_0}{C} \right)^2 K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{9.71}$$

где

$$m = ai_0 R \langle e^{a\xi} \rangle = ai_0 R e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}} \tag{9.72}$$

[см. (39)].

Отыскание нестационарного решения полученного уравнения (71) является сложной задачей, стационарный же одномерный закон распределения может быть найден без большого труда. Применяя формулу (4.49), имеем

$$w(x) = N^{-1} \exp \left\{ - \frac{RC}{(ai_0 R)^2 K} \left[ x^2 \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) - 2mx \right] \right\}, \tag{9.73}$$

где $N$ — нормировочная постоянная. Видно, что форма кривой распределения определяется лишь двумя параметрами

$$m = ai_0 R e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}} \quad \text{и} \quad q = \frac{(ai_0 R)^2}{2RC} K. \tag{9.74}$$

Первый из них определяет координату $x_0$, которой соответствует максимальная вероятность. Значение $x_0$ является корнем прежнего уравнения (40) ($x_0 \ln x_0 = m$). Второй параметр $q$ определяет величину флюктуационного разброса. Так значения координат $x_1$, $x_2$, при которых плотность вероятности убывает в $\sqrt{e} = 1{,}65$ раз по сравнению с максимальной, могут быть найдены как корни уравнения

$$f(x_{1,2}) - f(x_0) = q. \tag{9.75}$$

Здесь

$$f(x) = x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - 2mx. \qquad (9.76)$$

От распределения (73) нетрудно перейти к плотности распределения для выходного напряжения $\eta$, которое связано с $x$ безынерционным нелинейным преобразованием $\eta = (\ln x)/a$. Используя формулу (1.15), из (73) получаем

$$w(\tau_i) = \frac{a}{N}\exp\left\{-\frac{1}{2q}\times\right.$$

$$\left.\times\left[e^{2a\tau_i}\left(a\tau_i - \frac{1}{2}\right) - 2me^{a\tau_i}\right] + a\eta\right\}. \qquad (9.77)$$

Вследствие наличия члена $a\tau_i$ в экспоненте, появление которого обусловлено производной $\frac{dx}{d\eta}$, значение $\tau_{im}$, соответствующее максимальной вероятности (77), не равно $\tau_{i0} = \frac{\ln x_0}{a}$. Оно теперь является корнем уравнения

$$a\tau_{im}e^{2a\tau_{im}} - me^{a\tau_{im}} - q = 0. \qquad (9.78)$$

Разложим функцию, стоящую в экспоненте выражения (77) и принимающую в точке $\tau_i = \tau_{im}$ экстремальное значение, в ряд Тейлора

$$\frac{1}{2q}\left[e^{2a\tau_i}\left(a\tau_i - \frac{1}{2}\right) - 2me^{a\tau_i}\right] + a\eta =$$

$$= \frac{1}{2q}\left[e^{2a\tau_{im}}\left(a\tau_{im} - \frac{1}{2}\right) - 2me^{a\tau_{im}}\right] + a\tau_{im} +$$

$$+ \frac{1}{2q}\left[e^{2a\tau_{im}}(2a\tau_{im} + 1) - me^{a\tau_{im}}\right]a^2(\tau_i - \tau_{im})^2 + \ldots \qquad (9.79)$$

Ограничиваясь первыми членами, имеем в области максимальной вероятности

$$w(\tau_i) \approx w(\tau_{im})\,e^{-\frac{(\tau_i - \tau_{im})^2}{2\sigma^2_{эк}}}. \qquad (9.80)$$

Здесь

$$\sigma^2_{эк} = \frac{q}{a^2}\left[e^{2a\tau_{im}}(2a\tau_{im} + 1) - me^{a\tau_{im}}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{q}{a^2}\left[q\left(2 + \frac{1}{a\tau_{im}}\right) + me^{a\tau_{im}}\left(1 + \frac{1}{a\tau_{im}}\right)\right]^{-1} \qquad (9.81)$$

есть дисперсия некоторого эквивалентного гауссового распределения, которое близко к $w(\eta)$ в области максимальной вероятности.

Когда распределение $w(\eta)$ мало отличается от нормального, величина $\eta_m$ приближенно совпадает с $\langle\eta\rangle$, а эквивалентная дисперсия $\sigma^2_{эк}$ — с дисперсией $D\eta$.

Для распределений, не похожих на нормальные, указанное совпадение не имеет места, однако величины $\eta_m$, $\sigma_{эк}$ остаются довольно показательными для распределения $w_{(\eta)}$. Эквивалентная дисперсия $\sigma^2_{эк}$ характеризует величину флюктуационного разброса ($\Delta\eta = 2\sigma_{эк}$). Желая определить фактическое среднее значение и дисперсию, в этом случае можно вычислять интегралы усреднения с весом (77), прибегая, если требуется, к численному интегрированию.

Для гауссового шума $\xi(t)$, имеющего $\langle\xi\rangle = 0$, $\langle\xi\xi_\tau\rangle = \sigma^2 R(\tau)$, согласно (54), (70) получаем

$$K = 2e^{a^2\sigma^2}\int_0^\infty [e^{a^2\sigma^2 R(\tau)} - 1]\, d\tau. \qquad (9.82)$$

Для некоторых конкретных видов коэффициента корреляции $R(\tau)$ последний интеграл поддается непосредственному вычислению. Так, при

$$R(\tau) = e^{-\gamma|\tau|},\ \gamma = \frac{1}{\tau_{кор}} \qquad (9.83)$$

после замены переменной

$$z = a^2\sigma^2 e^{-\gamma\tau}$$

находим

$$K = \frac{2}{\gamma}\, e^{a^2\sigma^2}\int_0^{a^2\sigma^2} \frac{e^z - 1}{z}\, dz =$$

$$= \frac{2}{\gamma}\, e^{a^2\sigma^2}[\overline{Ei}(a^2\sigma^2) - 2\ln a\sigma - C]. \qquad (9.84)$$

Здесь $\overline{Ei}$ — интегральная показательная функция, а $C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Когда интеграл (82) непосредственно не вычисляется, может оказаться полезным разложение

$$K = 2e^{a^2\sigma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\sigma)^{2n}}{n!} \int_0^{\infty} R^n(\tau)\, d\tau. \qquad (9.85)$$

Возьмем, для примера, следующие численные значения:

$$a\sigma = 3, \quad ai_0R = 10, \quad \gamma RC = \frac{RC}{\tau_{кор}} = 100.$$

В этом случае $m = 898$; $q = 8{,}25 \cdot 10^6$. Используя формулы (41), (78), (81), находим

$$a\tau_{i0} = 5{,}16; \quad a\tau_{im} = 7{,}05; \quad a\sigma_{эк} = 0{,}665.$$

Предположим теперь, что $a\sigma$ и $ai_0R$ остаются прежними, а емкость увеличивается в 10 раз, так что $\gamma RC = 1000$. Тогда будем иметь

$$q = 8{,}25 \cdot 10^5; \quad a\tau_{im} = 6{,}1; \quad a\sigma_{эк} = 0{,}543.$$

Из сопоставления этих результатов видно, что с увеличением емкости $C$ среднее значение напряжения на нагрузке и его флюктуационный разброс уменьшаются.

Приведенные количественные оценки, относящиеся к нормальным флюктуациям с конкретной корреляционной функцией, позволяют также заключить, что при различных значениях $\tau_{кор}/RC$ показания вольтметра, мерящего среднее выходное напряжение, будут разными, даже если дисперсия $\sigma$ входных флюктуаций будет одна и та же. Поэтому следует признать ошибочными встречающиеся в инженерной практике попытки использовать ламповые вольтметры для измерения флюктуационного разброса. Ламповые вольтметры можно использовать лишь для сравнительной оценки интенсивности флюктуаций только неизменного спектрального состава, а для измерения фактической величины среднеквадратичного разброса следует применять термоэлектрические приборы.

### 4. Детектирование гармонического сигнала и шума с малым временем корреляции

Метод вычисления одномерного закона распределения на выходе инерционного нелинейного элемента, изло-

женный в предыдущих разделах, применим также при наличии на входе гармонического сигнала $E\cos\omega_0 t$ наряду с флюктуационными помехами $\xi(t)$. Для детектора с экспоненциальной характеристикой (33) соответствующее уравнение (36) при этом принимает вид

$$RC\dot{x} + x\ln x = ai_0 R\exp\{aE\cos\omega t + a\xi\}. \quad (9.86)$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть флюктуационный процесс на входе $\xi(t)$ является медленно меняющимся по сравнению с сигналом $E\cos\omega_0 t$, совершающим быстрые колебания. Период этих колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$ считаем много меньше как времени корреляции $\tau_{кор}$ шума, так и постоянной времени $RC$ фильтра. Тогда уравнение (86) можно усреднить за период, после чего будем иметь

$$RC\dot{x} + x\ln x = ai_0 RI_0(aE)\,e^{a\xi}. \quad (9.87)$$

Это уравнение отличается от (36) лишь тем, что параметр $ai_0R$ оказался замененным на $ai_0RI_0(aE)$. Поэтому к данному случаю применимо с соответствующей поправкой все, сказанное в предыдущих разделах 2 и 3.

2. Несколько более своеобразным является случай, когда флюктуации $\xi(t)$ узкополосные. Будем предполагать, что их полоса частот лежит вблизи частоты гармонического сигнала $\omega_0$. Тогда суммарный входной сигнал можно представить как колебание с некоторой результирующей амплитудой и фазой:

$$E\cos\omega_0 t + \xi(t) = B(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t)). \quad (9.88)$$

Такой сигнал был рассмотрен ранее (7.80). Если $\xi(t)$ представляет собой гауссов процесс, то закон распределения для амплитуды $B$ имеет вид (7.88).

Поставив (88) в (86), можно использовать медленность изменений функций $B(t)$, $\psi(t)$ по сравнению с колебаниями $\cos\omega_0 t$, $\sin\omega_0 t$. Это дает возможность усреднить правую часть уравнения (86) за период, полагая при этом $B$ и $\psi$ постоянными. Такое усреднение дает

$$RC\dot{x} + x\ln x = ai_0 RI_0(aB(t)). \quad (9.89)$$

Когда постоянная времени $RC$ превосходит время изменения амплитуды $B$, т. е. когда

$$\tau_{\text{кор}} \ll RC$$

($\tau_{\text{кор}}$ — время корреляции шума), применимо стохастическое рассмотрение и уравнение Фоккера—Планка. При этом в (89) флюктуационную составляющую

$$\zeta(t) = I_0(aB) - \langle I_0(aB)\rangle \tag{9.90}$$

можно считать дельта-коррелированной

$$\langle \zeta\zeta_\tau\rangle \to K\delta(\tau), \tag{9.91}$$

где

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \zeta\zeta_\tau\rangle\, d\tau \tag{9.92}$$

— коэффициент интенсивности процесса (90).

Целесообразно обозначить

$$m = ai_0R\langle I_0(aB)\rangle, \tag{9.93}$$

тогда уравнение (89) будет иметь точно такой же вид

$$RC\dot{x} + x\ln x = m + ai_0R\zeta, \tag{9.94}$$

что и в предыдущем разделе, и формулы (73), (77)—(81) будут применимы к данному случаю без всяких изменений.

Для вычисления средних $\langle I_0(aB)\rangle$, $\langle I_0(aB)\, I_0(aB_\tau)\rangle$, через которые выражаются параметры флюктуационного процесса (92), (93), удобно производить статистическое усреднение случайной функции

$$e^{ax(t)} = e^{aE\cos\omega_0 t + a\xi(t)}$$

до того, как произведено усреднение по $t$ за период. Так для гауссовых флюктуаций $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\sigma^2R(\tau) = \sigma^2r(\tau)\cos\omega_0\tau$ имеем

$$\langle e^{ax}\rangle = e^{aE\cos\omega_0 t + \frac{a^2\sigma^2}{2}},$$

$$\langle e^{ax+ax_\tau}\rangle = \exp\{aE\cos\omega_0 t + aE\cos\omega_0(t+\tau) + \\ + a^2\sigma^2[1+r(\tau)\cos\omega_0\tau]\}. \quad (9.95)$$

Усредняя по $t$ первое равенство, имеем

$$\langle I_0(aB)\rangle = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_t^{t+\frac{\omega_0}{2\pi}}\langle e^{ax(t')}\rangle dt' = e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}} I_0(aE). \quad (9.96)$$

Усреднение второго равенства (95) по $t$ за период эквивалентно усреднению выражения (8.121) по случайной начальной фазе. Полагая в (8.121), (8.135) $i\Omega = i\Omega_\tau = a$, имеем

$$\langle e^{ax+ax_\tau}\rangle = e^{a^2\sigma^2}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k I_k^2(aE)\cos k\omega_0\tau e^{a^2\sigma^2 r\cos\omega_0\tau}.$$

Остается произвести усреднение этого выражения по $\tau$. Согласно (8.136) это дает

$$e^{a^2\sigma^2}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k I_k^2(aE) I_k(a^2\sigma^2 r).$$

Следовательно,

$$\langle I_0(aB) I_0(aB_\tau)\rangle = e^{a^2\sigma^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k I_k^2(aE) I_k(a^2\sigma^2 r(\tau)) \quad (9.97)$$

и

$$\langle\zeta\zeta_\tau\rangle = e^{a^2\sigma^2} I_0^2(aE)[I_0(a^2\sigma^2 r(\tau)) - 1] +$$

$$+ 2e^{a^2\sigma^2}\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2(aE) I_k(a^2\sigma^2 r(\tau)). \quad (9.98)$$

Для вычисления $K$ остается подставить найденное выражение в (92). Чтобы взять интеграл по $\tau$, может оказаться целесообразным воспользоваться разложением функции Бесселя. Пусть коэффициент корреляции имеет вид

$$r(\tau) = e^{-\gamma|\tau|},$$

тогда полезна замена переменной интегрирования $z = a^2\sigma^2 e^{-\gamma\tau}$. В частном случае $E=0$ согласно (98), (92) имеем

$$K = \frac{2}{\gamma} e^{a^2\sigma^2} \int_0^{a^2\sigma^2} \frac{I_0(z) - 1}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{\gamma} e^{a^2\sigma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\,(m!)^2} \left(\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)^{2m}. \qquad (9.99)$$

При больших значениях $a^2\sigma^2 \gg 1$ удобно пользоваться асимптотическим представлением

$$\int \frac{I_0(z)}{z} dz = \frac{I_1(z)}{z} + 2\frac{I_2(z)}{z^2} +$$

$$+ \ldots + n!2^n \frac{I_{n+1}(z)}{z^{n+1}} + \ldots \qquad (9.100)$$

Полезно сравнить выражение (99) с формулой (84), относящейся к случаю медленно меняющихся входных флюктуаций. Для значений $a\sigma=2$ коэффициент интенсивности (84) равен $K=2070/\gamma$, в то время как для квазигармонических входных флюктуаций выражение (99) дает

$$K = \frac{1}{\gamma} e^4 (4 + 2 + 0{,}59 + 0{,}11 + 0{,}03 + \ldots) = \frac{366}{\gamma}.$$

### 5. Случай промежуточных времен корреляции

Наибольшие трудности представляет тот случай, когда время корреляции входного шума $\xi(t)$ в уравнении

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC}\eta = \frac{1}{C} F(\xi \quad \eta) \qquad (9.101)$$

сравнимо с постоянной времени $RC$ фильтра. При этом не применимо ни квазистатическое рассмотрение, ни метод уравнения Фоккера—Планка в том виде, как он был изложен выше. Однако стохастические методы и уравнение Фоккера—Планка могут быть использованы и в этом случае, если рассматривать двумерный процесс Маркова.

Пусть $\xi(t)$ — нормальный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle \xi\xi_\tau \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|}. \qquad (9.102)$$

Как известно, такой процесс является марковским и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\xi} + \gamma\xi = \zeta(t), \tag{9.103}$$

где $\zeta(t)$ — нормальная дельта-коррелированная функция:

$$\langle\zeta\rangle = 0; \quad \langle\zeta\zeta_\tau\rangle = 2\gamma\sigma^2\delta(\tau) = K_0\delta(\tau).$$

Уравнения (101), (103) в совокупности определяют двумерный процесс Маркова. Обозначив $v = \xi - \eta$, вместо них можно рассматривать систему уравнений

$$\dot{v} = -\frac{v}{RC} - \frac{1}{C}F(v) - \left(\gamma - \frac{1}{RC}\right)\xi + \zeta, \tag{9.104}$$

$$\dot{\xi} = -\gamma\xi + \zeta$$

и эквивалентное ей уравнение Фоккера—Планка

$$\dot{w}(v, \xi) = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left[\frac{v}{RC} + \frac{1}{C}F(v)\right]w\right\} +$$

$$+ \left(\gamma - \frac{1}{RC}\right)\xi\frac{\partial w}{\partial v} + \gamma\frac{\partial}{\partial\xi}[\xi w] +$$

$$+ \gamma\sigma^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial\xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right]. \tag{9.105}$$

Отыскав при его помощи плотность распределения $w(v, \xi)$ или $w(v, \xi, v_\tau, \xi_\tau)$, мы могли бы, интегрируя по $\xi$, $\xi_\tau$, найти

$$w(\eta) = \int w(\xi - \eta, \xi)\, d\xi;$$

$$w(\eta, \eta_\tau) = \int w(\xi - \eta, \xi; \xi_\tau - \eta_\tau, \xi_\tau)\, d\xi d\xi_\tau.$$

К сожалению, полное решение указанного уравнения относится к числу трудных задач; поэтому мы ограничимся частными результатами.

а) Рассмотрим тот случай, когда время корреляции в точности равно постоянной времени фильтра:

$$\gamma = \frac{1}{RC}. \tag{9.106}$$

При этом для напряжения на диоде $v$ будем иметь уравнение

$$\dot{v} = -\frac{v}{RC} - \frac{1}{C} F(v) + \zeta(t). \qquad (9.107)$$

Оно не содержит $\xi$, и поэтому его можно решать самостоятельно.

Исследовав процесс $v(t)$, можно перейти к рассмотрению выходного напряжения, которое в силу (101) выражается через первый по формуле

$$\eta(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{RC}} F(v(t'))\, dt', \qquad (9.108)$$

так как

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC}\eta = \frac{1}{C} F.$$

Его среднее стационарное значение равно

$$\langle \eta \rangle = R \langle F(v) \rangle, \qquad (9.109)$$

а для определения выходной корреляционной функции достаточно знать $\langle F(v) F(v_\tau) \rangle$.

Уравнению (107) соответствует уравнение Фоккера—Планка

$$\dot{w}(v) = \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial v} \{[v + RF(v)]\, w\} + \gamma\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \qquad (9.110)$$

которое имеет стационарное решение

$$w(v) = \frac{1}{N} \exp\left\{ -\frac{v^2}{2\sigma^2} - \frac{R}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{v} F(z)\, dz \right\}. \qquad (9.111)$$

Для отыскания $\langle F(v) \rangle$ в (109) остается вычислить интегралы

$$\langle F(v) \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{v^2}{2\sigma^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{R}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{v} F(z)\, dz \right\} F(v)\, dv, \qquad (9.112)$$

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2} - \frac{R}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{v} F(z)\,dz\right\} dv.$$

Для линейно-ломанной характеристики диода

$$F(v) = \begin{cases} Sv \text{ при } v > 0, \\ 0 \text{ при } v < 0 \end{cases} \qquad (9.113)$$

указанные формулы приводят к результатам

$$\langle F\rangle = \frac{S}{N}\frac{\sigma^2}{1+RS},$$

$$N = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma\left[1+(1+RS)^{-\frac{1}{2}}\right] \qquad (9.114)$$

и, следовательно, в силу (109)

$$\langle\eta\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{RS\sigma}{1+RS+\sqrt{1+RS}}. \qquad (9.115)$$

При другом виде характеристики $F(v)$ соответствующие выражения будут другими. В дальнейшем мы не будем точно конкретизировать функцию $F(v)$, но будем предполагать, что она удовлетворяет следующим условиям: во-первых, обращается в нуль при $v<0$ и, во-вторых, быстро возрастает при $v>0$, а именно, гораздо быстрее, чем $v/R$. Последнее условие выполняется в большинстве практических случаев, когда диод в открытом состоянии имеет малое внутреннее сопротивление $R_i \ll R$ и дает большие токи, в результате чего коэффициенты передачи близки к единице

При указанном условии вероятность того, что диод находится в запертом состоянии

$$w_{\text{зап}} = \int_{-\infty}^{0} w(v)\,dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sigma}{N}, \qquad (9.116)$$

значительно превосходит вероятность открытого состояния

$$w_{\text{отк}} = \int_{0}^{\infty} w(v)\,dv \approx$$

$$\approx \frac{1}{N}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{R}{\sigma^2}\int_{0}^{v} F(z)\,dz\right\} dv. \qquad (9.117)$$

Неравенство же

$$w_{\text{отк}} \ll w_{\text{зак}} \tag{9.118}$$

означает, что детектор бо́льшую часть времени находится в закрытом, запертом состоянии. Из последних соотношений видно, что $w_{\text{зап}} \approx 1$ и

$$N \approx \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{9.119}$$

При вычислении интеграла усреднения (112) можно пренебречь в экспоненте членом $\frac{v^2}{2}$ по сравнению с $R \int_0^v F(z)\,dz$ и получить

$$\langle F(v)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{R}{\sigma^2}\int_0^v F dz\right\} \times$$

$$\times F(v)\,dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{R}, \tag{9.120}$$

$$\langle \eta \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

Переходя к вычислению корреляционной функции, зафиксируем начальное положение $v(0) = v_0$ изображающей точки.

Пусть $v_0 < 0$; из (107) имеем

$$\dot{v} + \gamma v = \zeta(t), \tag{9.121}$$

поскольку в области отрицательных значений $v$ функция $F(v)$ не сказывается. На основе последнего уравнения находим закон смещения изображающей точки и флюктуационный разброс:

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\gamma t},$$

$$Dv = \sigma^2 (1 - e^{-2\gamma t}). \tag{9.122}$$

Поэтому $v(t)$ будет описываться плотностью вероятности

$$w(v, t \mid v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\gamma t}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(v - v_0 e^{-\gamma t})^2}{1 - e^{-2\gamma t}}\right\}, \tag{9.123}$$

которая является решением уравнения Фоккера—Планка

$$\dot{w} = \gamma \frac{\partial (vw)}{\partial v} + \gamma\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \qquad (9.124)$$

Когда изображающая точка будет достигать положительных значений $v>0$, в игру вступит функция $F(v)$, которая будет отражать ее снова в область отрицательных значений. В области $v>0$ останется лишь небольшое количество вероятности $w_{\text{отк}} \ll 1$. Поэтому можно считать поток вероятности через границу отсутствующим:

$$-\gamma v w - \gamma\sigma^2 \frac{\partial w}{\partial v} = 0 \quad \text{при } v = 0,$$

что дает граничное условие

$$\frac{\partial w}{\partial v}(0) = 0. \qquad (9.125)$$

Функция (123) этому условию не удовлетворяет. Решение уравнения (124), удовлетворяющее ему, имеет вид

$$w(v,\ t \mid v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma t}}} \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(v - v_0 e^{-\gamma t})^2}{1-e^{-2\gamma t}} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(v + v_0 e^{-\gamma t})^2}{1-e^{-2\gamma t}} \right] \right\}, \quad (v<0,\ v_0<0). \qquad (9.126)$$

При этом в начале координат имеем

$$w(0,\ t \mid v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{2}{\sqrt{1-e^{-2\gamma t}}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{v_0^2 e^{-2\gamma t}}{1-e^{-2\gamma t}} \right\}. \qquad (9.127)$$

В область $v>0$ функция продолжается непрерывным образом. В этой области распределение практически не будет отличаться от стационарного

$$w(v,\ t \mid v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{2}{\sqrt{1-e^{-2\gamma t}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{v_0^2 e^{-2\gamma t}}{1-e^{-2\gamma t}}\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}-\frac{R}{\sigma^2}\int_0^v F(z)\,dz\right\}, \quad (v>0,\ v_0<0), \quad (9.128)$$

которое имеет то же самое значение в начале координат, что и (126).

Если начальную точку приближать к границе $v_0 \to 0$, то функция (126), (128) перейдет в

$$w(v,\ t\,|\,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma t}}}\times$$

$$\times\begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\dfrac{v^2}{1-e^{-2\gamma t}}\right\} & \text{при } v<0, \\ \exp\left\{-\dfrac{v^2}{2\sigma^2}-\dfrac{R}{\sigma^2}\displaystyle\int_0^v F(z)\,dz\right\} & \text{при } v>0. \end{cases} \quad (9.129)$$

Когда начальное значение $v_0$ лежит в области положительных значений $v$ ($v_0>0$), в результате влияния функции $F(v)$ изображающая точка быстро выталкивается в область $v<0$. После этого распределение $w(v|v_0)$ приближается к найденному распределению (129). Существенное различие между ними имеется лишь в течение времени $t \sim [\gamma RF']^{-1} = R_t C$, которое вследствие принятого ранее предположения пренебрежимо мало по сравнению с $1/\gamma = RC$.

Зная одномерное распределение (111) и вероятность перехода $w(v,\ t\,|\,v_0)$, можно записать двумерную плотность вероятности $w(v,\ v_\tau) = w(v)\,w(v_\tau,\ \tau\,|\,v)$ и второй момент

$$\langle F(v)\,F(v_\tau)\rangle =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty F(v)\,F(v_\tau)\,w(v)\,w(v_\tau,\ \tau\,|\,v)\,dv\,dv_\tau. \quad (9.130)$$

Подставляя сюда (129) в качестве $w(v_\tau, \tau|v,)$ приходим к результату

$$\langle F(v)F(v_\tau)\rangle = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma\sqrt{1-e^{-2\gamma\tau}}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty F(v)\exp\left\{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}-\frac{R}{\sigma^2}\int_0^v F dz\right\}dv\right\}^2 =$$

$$= N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\langle F(v)\rangle^2}{\sigma\sqrt{1-e^{-2\gamma\tau}}}, \quad (\tau>0). \qquad (9.131)$$

Вследствие (119), (120) это дает

$$k_F(\tau) = \langle F(v)F(v_\tau)\rangle - \langle F(v)\rangle^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\sigma^2}{R^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma|\tau|}}}-1\right]. \qquad (9.132)$$

При малых $\tau < R_tC$ последнее выражение несправедливо. Для $\tau=0$ может быть использован одномерный закон распределения (111), который позволяет получить

$$k_F(0) = DF(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\times$$

$$\times\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{R}{\sigma^2}\int_0^v F dz\right\}F^2(v)\,dv. \qquad (9.133)$$

Для определения спектральной плотности $S[F(v) - \langle F\rangle, \omega]$ на частотах $\omega \sim \gamma$ и меньше можно вычислять Фурье-преобразование от выражения (132). Область малых значений $\tau$, где последнее несправедливо, существенно будет сказываться лишь при высоких частотах $\omega \sim 1/R_tC$. Преобразование Фурье от (131) найдем при помощи очевидного соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma|\tau|}}}-1\right]d\tau =$$

$$= 2\mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-p\tau}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma\tau}}}-1\right]d\tau, \quad (p=i\omega)$$

и формулы (6.9) справочника [III], которая дает

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1-e^{-2\gamma\tau}}} =$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty e^{-\frac{pt}{2\gamma}} \frac{dt}{\sqrt{1-e^{-t}}} = \frac{1}{2\gamma} B\left(\frac{p}{2\gamma}, \frac{1}{2}\right). \quad (9.134)$$

Сопоставляя последние равенства, имеем

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega\tau} \left[\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma|\tau|}}} - 1\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \operatorname{Re}\left[B\left(\frac{i\omega}{2\gamma}, \frac{1}{2}\right) - \frac{2\gamma}{i\omega}\right]$$

и, следовательно, согласно (132)

$$S[F(v) - \langle F\rangle, \omega] = \frac{4}{\pi}\sigma^2 \frac{C}{R} \operatorname{Re} B\left(\frac{1}{2} i\omega RC, \frac{1}{2}\right). \quad (9.135)$$

При численном определении спектральной плотности можно пользоваться таблицами для гамма-функции, учитывая, что

$$B\left(iz, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(iz)}{\Gamma\left(iz + \frac{1}{2}\right)},$$

или использовать разложение

$$B\left(iz, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{1}{iz+k}.$$

Для улучшения сходимости последнее целесообразно преобразовать к виду

$$B\left(iz, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{iz} + 2\ln 2 -$$

$$- iz \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{1}{k(iz+k)}; \quad (9.136)$$

$$\operatorname{Re} B\left(iz,\ \frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 - z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{1}{k(k^2+z^2)}. \quad (9.136)$$

Подставляя (136) в (135), будем иметь

$$S[F(v) - \langle F\rangle,\ \omega] = \frac{4}{\pi} \frac{\sigma^2 C}{R} \left\{2\ln 2 - \right.$$
$$- z^2\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+z^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{2(4+z^2)} + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{3(9+z^2)} + \ldots\right]\right\} \quad (9.137)$$
$$(z = \omega\, 2\gamma).$$

Приведенная спектральная плотность флюктуаций тока $I = F(v)$ изображена графически на рис. 9.5.

Согласно (101) выходное напряжение $\eta$ получается из $F(v)$ линейным преобразованием. По обычным правилам, используя (135), получаем спектральную интенсивность флюктуаций на выходе

$$S[\eta - \langle\eta\rangle,\ \omega] = \left| i\omega C + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{R}\right|^{-2} S[F(v) - \langle F\rangle,\ \omega] =$$
$$= \frac{4}{\pi}\sigma^2 \frac{RC}{\omega^2 R^2 C^2 + 1} \times$$
$$\times \operatorname{Re} B\left(\frac{1}{2} i\omega RC, \frac{1}{2}\right). \quad (9.138)$$

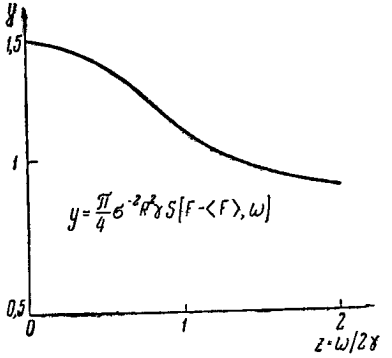



Рис 9 5 Спектральная плотность флюктуаций тока $I = F(v)$.

Чтобы найти дисперсию $D\eta$, нужно согласно (2.15) проинтегрировать последнее выражение по частоте

$$D\eta = \frac{2}{\pi^2}\sigma^2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re} B\left(\frac{ix}{2},\ \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2 \approx 0{,}363\sigma^2.$$

б) Когда время корреляции $1/\gamma$ шума отличается от $RC$, приходится решать двумерное уравнение Фоккера—

Планка (105). Для этого можно применять методы, аналогичные изложенным в п. 11, § 4. Будем искать стационарное распределение, удовлетворяющее уравнению

$$\gamma\sigma^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left[\frac{v}{RC}+\frac{1}{C}F(v)\right]w\right\}+\gamma\sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+$$

$$+\gamma\frac{\partial}{\partial\xi}[\xi w]+\varepsilon\xi\frac{\partial w}{\partial v}+2\gamma\sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial\xi}=0, \qquad (9.139)$$

где

$$\varepsilon=\gamma-\frac{1}{RC}.$$

Решение ищем в форме

$$w(v,\ \xi)=\sum_{m,\,n=1}^{\infty}T_{m,\,n}V_m(v)X_n(\xi). \qquad (9.140)$$

Здесь

$$X_n(\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n!}}F^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) \qquad (9.141)$$

— собственные функции уравнения (4.68), для которых справедливы соотношения

$$X_n'=\frac{\sqrt{n+1}}{\sigma}X_{n+1};$$

$$\xi X_n=-\sigma[\sqrt{n}X_{n-1}+\sqrt{n+1}X_{n+1}]. \qquad (9.142)$$

Собственные функции $V_m(v)$ удовлетворяют уравнению

$$\gamma\sigma^2\frac{\partial^2 V_m}{\partial v^2}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left[\frac{v}{RC}+\frac{1}{C}F(v)\right]V_m\right\}+\lambda_m V_m=0. \qquad (9.143)$$

Подставляя (140) в (139) и учитывая (142), (143), имеем

$$-\sum_{m,\,n}\lambda_m T_{m,\,n}V_m X_n-\gamma\sum_{m,\,n}nT_{m,\,n}V_m X_n-$$

$$-\varepsilon\sigma\sum_{m,\,n}T_{m,\,n}V_m'[\sqrt{n}X_{n-1}+\sqrt{n+1}X_{n+1}]+$$

$$+2\gamma\sigma\sum_{m,\,n}T_{m,\,n}V_m'\sqrt{n+1}X_{n+1}. \qquad (9.144)$$

Производные $V_k'(v)$ разложим по собственным функциям

$$V_k' = \sum_m V_m a_{m,k},$$

где

$$a_{m,k} = \int V_m V_k' \frac{dv}{V_0}. \qquad (9.145)$$

После этого из (144) получим уравнения

$$(\lambda_m + \gamma n) T_{m,n} = (2\gamma - \varepsilon)\sigma\sqrt{n}\sum_k a_{m,k} T_{k,n-1} -$$

$$- \varepsilon\sigma\sqrt{n+1}\sum_k a_{m,k} T_{k,n+1}, \qquad (9.146)$$

которые можно решать различными методами. Задавшись определенной точностью, можно рассматривать лишь некоторое число низших коэффициентов разложения $T_{m,n}$, полагая высшие коэффициенты равными нулю. Тогда (146) даст конечную систему линейных уравнений, которые позволяют определить $T_{m,n}$. При другом способе решения можно применить метод последовательных приближений, рассматривая $\varepsilon$ как малый параметр, и получать решение в форме разложения по степеням этого параметра.

Комбинируя уравнения, полученные из (146) при $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$, находим

$$T_{m,0} = -\varepsilon(2\gamma - \varepsilon)\sigma^2 \sum_k b_{m,k} T_{k,0} +$$

$$+ \varepsilon^2(2\gamma - \varepsilon)\sigma^4 \sum_{k,l} b_{m,k} \frac{2\lambda_k}{\lambda_k + 2\gamma} b_{k,l} T_{l,0} + \varepsilon^3 \ldots, \qquad (9.147)$$

$$(m \neq 0),$$

где обозначено

$$b_{m,k} = \frac{1}{\lambda_m} \sum_j \frac{a_{m,j} \cdot a_{j,k}}{\lambda_j + \gamma}.$$

Использование равенства (147) путем многократной подстановки всего выражения в его правую часть позволяет выразить коэффициенты $T_{m0}$ через $T_{00}$:

$$T_{m,0} = -\varepsilon(2\gamma - \varepsilon)\sigma^2 b_{m,0} T_{00} +$$

$$+ \varepsilon^2(2\gamma - \varepsilon)^2\sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} b_{m,k} \frac{3\lambda_k + 2\gamma}{\lambda_k + 2\gamma} b_{k0} T_{00} + \varepsilon^3 \ldots \qquad (9.148)$$

$$(m \neq 0).$$

Чтобы определить другие коэффициенты $T_{m,k}$, следует обратиться к уравнениям (146) и использовать следующий метод последовательных приближений. Обозначая через $T^{(0)}_{m,k}$ нулевое приближение

$$T_{m,k} = T^{(0)}_{m,k} + \varepsilon \ldots,$$

из (146) имеем

$$T^{(0)}_{m1} = (2\gamma - \varepsilon)\sigma \frac{a_{m0}}{\lambda_m + \gamma} T_{00}, \tag{9.149}$$

$$T^{(0)}_{m2} = (2\gamma - \varepsilon)\sigma \frac{\sqrt{2}}{\lambda_m + 2\gamma} \sum_k a_{m,k} T^{(0)}_{k1} =$$

$$(2\gamma - \varepsilon)^2 \sigma^2 \frac{\sqrt{2}}{\lambda_m + 2\gamma} \sum_k \frac{a_{m,k} a_{k0}}{\lambda_k + \gamma} T_{00}.$$

. . . . . .

Нулевое приближение используется для отыскания первого приближения $T^{(1)}_{m,k}$, отличающегося от $T_{m,k}$ членами порядка $\varepsilon^2$:

$$T^{(1)}_{m1} = T^{(0)}_{m1} + \frac{(2\gamma - \varepsilon)\sigma}{\lambda_m + \gamma} \sum_{k \neq 0} a_{m,k} T_{k0} - \varepsilon\sigma \frac{\sqrt{2}}{\lambda_m + \gamma} \sum a_{m,k} T^{(0)}_{k2},$$

$$T^{(1)}_{m2} = (2\gamma - \varepsilon)\sigma \frac{\sqrt{2}}{\lambda_m + 2\gamma} \sum a_{m,k} T^{(1)}_{k1} - \varepsilon\sigma \frac{\sqrt{3}}{\lambda_m + 2\gamma} \times$$

$$\times \sum a_{m,k} T^{(0)}_{k3}, \tag{9.150}$$

. . . . . .

Описанным способом можно найти $T_{m,k}$ с любой степенью точности по $\varepsilon$. Разумеется, чем более высокий порядок по $\varepsilon$ принимается во внимание, тем более громоздкими становятся вычисления.

Все коэффициенты $T_{m,n}$ в разложении (140) оказываются пропорциональными первому коэффициенту $T_{00}$, который определяется из условия нормировки. При интегрировании (140) по $v$ и $\xi$ все члены выпадают в силу (4.54), кроме первого. Поэтому

$$\int w(v, \xi)\, dv d\xi = T_{00} = 1 \tag{9.151}$$

Для упрощения вычислений целесообразно использовать отмеченное на стр. 251—254 предположение, что функция $F(v)$, равная нулю при $v<0$, быстро возрастает при положительных значениях $v>0$. Точнее, пусть внут-

реннее сопротивление диода в открытом состоянии $R_i = [\partial F/\partial v]^{-1}$ удовлетворяет условиям

$$R_i \ll R; \quad R_i C \ll \frac{1}{\gamma}. \tag{9.152}$$

Тогда при рассмотрении области $v > 0$ в первом уравнении (104) можно пренебречь членами $\frac{v}{RC}$, $\left(\gamma - \frac{1}{RC}\right)\xi$ по сравнению с $\frac{1}{C}F(v)$ и пользоваться уравнением

$$v = -\frac{1}{C}F(v) + \zeta. \tag{9.153}$$

Соответствующее уравнение Фоккера—Планка имеет стационарное распределение

$$w(v) = \text{const} \exp\left\{-\frac{1}{\gamma\sigma^2 C}\int_0^v F(z)\,dz\right\}, \tag{9.154}$$

которое устанавливается через некоторое время, превосходящее малую постоянную времени $R_i C$.

Для области $v<0$ в уравнениях (104), (105) функцию $F(v)$ можно заменить на функцию

$$F_1(v) = \begin{cases} 0 \text{ при } v < 0; \\ \infty, \quad v > 0. \end{cases} \tag{9.155}$$

Бесконечное значение при $v>0$ говорит о том, что изображающая точка, подойдя к границе $v=0$, сразу же отражается обратно. Реально отражение происходит через время порядка $R_i C$, что значительно меньше постоянных времени $RC$, $1/\gamma$, характеризующих процесс при $v<0$.

После замены $F(v)$ на (155) уравнению (143) соответствуют собственные функции (4.70)

$$V_m(v) = \frac{2}{\sqrt{(2m)!}} \frac{1}{\sigma\sqrt{\gamma RC}} F^{(2m+1)}\left(\frac{v}{\sigma\sqrt{\gamma RC}}\right) \tag{9.156}$$
$$(v < 0)$$

и собственные значения $\lambda_m = \frac{2m}{RC}$. Согласно (145), используя формулу

$$\int_0^\infty H_{2m}(z) H_{2k+1}(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = (-1)^{m-k+1} \frac{(2m-1)!!\,(2k+1)!!}{2m-2k-1},$$

в данном случае имеем

$$a_{m,k}=\frac{(-1)^{m-k}}{\sigma\sqrt{2\pi\gamma RC}}\,\frac{2}{\sqrt{(2m)!\,(2k)!}}\,\frac{(2m-1)!!\,(2k+1)!!}{2m-2k-1}. \qquad (9.157)$$

Вычислив $T_{m,n}$ при помощи уравнения (146) с той или иной точностью, мы будем иметь в силу (140) совместную стационарную плотность распределения входного и выходного сигналов

$$w_{\text{ст}}(\eta,\ \xi)=[w(v,\ \xi)]_{v=\xi-\eta}=$$
$$=\sum_{m,\,n}T_{m,n}V_m(\xi-\eta)\,X_n(\xi), \qquad (9.158)$$

где функции $V_m$, $X_n$ определяются формулами (141), (156).

При помощи подобных разложений можно исследовать также переходные процессы и двумерные плотности распределения, соответствующие различным моментам времени.

ГЛАВА 3

# ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ И ВОЗДЕЙСТВИЕ ШУМА НА ЭЛЕКТРОННОЕ РЕЛЕ

Нелинейные преобразования случайной функции могут быть весьма различны. Входной сигнал, состоящий обычно из полезного сигнала и шума, подается на разнообразные радиотехнические устройства, осуществляющие нелинейные преобразования. Некоторые преобразования имеют малую нелинейность, другие, напротив, являются типично нелинейными. К последним относятся те системы, реакция которых меняется скачком в зависимости от величины входного сигнала. В качестве примера можно указать различные виды реле, которые имеют разрывную нелинейную характеристику.

Теоретический анализ подобных систем в общем виде затруднителен. Отдельные группы нелинейных систем могут быть исследованы частными методами, имеющими, однако, ограниченную область применения.

В настоящей главе будут изложены некоторые аналитические методы, которые пригодны для анализа нелинейных устройств релейного типа, реагирующих на достижение входным сигналом $x(t)$ определенного фиксированного уровня $b$.

Мы будем говорить, что в момент времени $t$ имеет место «выброс» функции $x(t)$, если переменная $x(t)$ в указанный момент достигла порогового уровня $b$ и превысила его.

Системы релейного типа осуществляют иногда подсчет выбросов. Это делается, когда требуется узнать число поступивших на вход импульсов, каждый из которых дает самостоятельный выброс. Наличие шумов во входном сигнале наряду с полезными импульсами может привести к появлению ложного выброса — чисто флюк-

туационного, не обусловленного полезным импульсом, но дающего срабатывание реле («ложное срабатывание»). И напротив, полезный импульс, вследствие наложения шумов, может оказаться пропущенным. Таким образом, наличие флюктуационных помех вносит ошибку в число подсчитанных импульсов. Практика ставит перед теорией задачу найти величину указанной ошибки.

Теоретическая задача часто осложняется тем, что реле обычно не может реагировать на каждый выброс и подсчитать точное число выбросов. Если выбросы следуют очень быстро один за другим, то некоторые из них окажутся пропущенными вследствие недостаточной разрешающей способности прибора. Даже одиночный выброс может быть пропущен, если он очень кратковременный или маломощный. Указанное обстоятельство требует теоретического подсчета не точного числа выбросов, а более детального выяснения их качеств, требует знания распределения выбросов по длительности или по мощности.

Из вышесказанного видно, что теория работы нелинейных систем релейного типа при наличии флюктуаций тесно соприкасается с задачей исследования выбросов случайной функции и их свойств. Результаты исследования выбросов случайной функции могут оказаться полезными также и для многих других случаев, например, для задач, связанных с прочностью или усталостью материалов, и т. д.

## § 10. СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

### 1. Число выбросов плавно меняющегося случайного процесса

Пусть задан случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий определенным условиям плавности, смысл которых будет ясен из дальнейшего. Вследствие этих условий на достаточно малом интервале времени $t<t'<t+\Delta t$ график такой функции будет близок к прямой $x(t') \approx x(t) + \dot{x}(t) \cdot (t'-t)$. Поэтому точки пересечения функцией $x(t)$ заданного уровня $x = b$ не могут лежать близко друг к другу. На указанном выше интервале возможно не более одного пересечения.

Подсчитаем среднее число выбросов, начало которых попадает на интервал от $t$ до $t+\Delta t$. Пусть $P_1$ — вероятность того, что будет один такой выброс, а $P_0$ — вероятность того, что не будет ни одного выброса. Других возможностей не имеется. Очевидно, что среднее число выбросов, начинающихся на выбранном интервале, совпадает с $P_1$.

Мы считаем известной двумерную плотность $w(x, \dot{x})$ совместного распределения координаты $x(t)$ и ее производной $\dot{x}(t)$.

Выражение

$$\left.\begin{aligned} dP = w(x(t), \\ \dot{x}(t))\,\Delta x \Delta \dot{x} \end{aligned}\right\} \quad (10.1)$$

определяет вероятность того, что кривая $x(t)$ (близкая к прямой) пересечет вертикальный отрезок $AB$, имеющий длину $\Delta x$ (рис. 10.1), и при этом производная будет лежать в диапазоне от $\dot{x}(t)$ до $\dot{x}(t) + \Delta \dot{x}$.

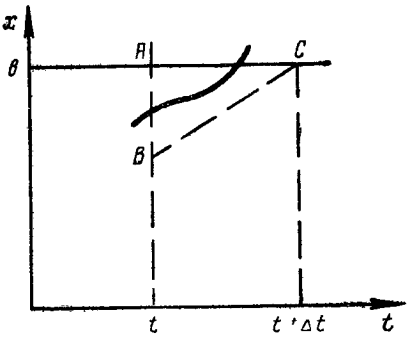



Рис. 10.1. Начало выброса в течение интервала $[t, t + \Delta t]$.

Рассмотрим теперь вероятность пересечения не вертикального отрезка $AB$, а горизонтального $AC$ длиной $\Delta t$. Если производная $\dot{x}(t)$ зафиксирована, то пересечение горизонтального отрезка длины $\Delta t$ эквивалентно пересечению вертикального отрезка длины $\Delta x = \dot{x}\Delta t$. Поэтому вероятность пересечений отрезка $AC(t<t'<t+\Delta t, x=b)$ с производной в пределах от $\dot{x}$ до $\dot{x}+\Delta \dot{x}$ равна

$$dP = w(x, \dot{x})\,\dot{x}\Delta t \Delta \dot{x}, \quad (x = b). \qquad (10.2)$$

Отсюда получаем, с одной стороны, полную вероятность пересечения указанного отрезка

$$P_1 = \Delta t \int_0^\infty w(b, \dot{x})\,\dot{x}\,d\dot{x} \qquad (10.3)$$

и, с другой стороны, плотность распределения для производной в момент начала выброса

$$w_{\text{н}}(\dot{x}) = \frac{w(b, \dot{x})\dot{x}}{\int\limits_0^\infty w(b, \dot{x})\dot{x}d\dot{x}} \text{ при } \dot{x} > 0, \qquad (10.4)$$

$$w_{\text{н}}(\dot{x}) = 0 \text{ при } \dot{x} < 0.$$

Вероятность (3), как указывалось, совпадает со средним числом начальных точек выбросов, попавших на интервал $[t, t+\Delta t]$, т. е. со средним числом выбросов, начавшихся в течение этого интервала. Поделив $P_1$ на $\Delta t$, мы получим среднюю плотность выбросов (плотность их начальных моментов)

$$n_0(t) = \int\limits_0^\infty w(b, \dot{x})\dot{x}d\dot{x}\,. \qquad (10.5)$$

Для стационарного случайного процесса $x(t)$ последняя плотность не зависит от времени и совпадает со средним числом выбросов, приходящихся на единицу времени. В случае нестационарного случайного процесса $x(t)$ для получения полного числа выбросов на отрезке от $t_0$ до $t_1$ следует взять интеграл $\int\limits_{t_0}^{t_1} n_0(t)dt$. В дальнейшем ограничимся случаем стационарных случайных функций.

Конкретизируем полученные формулы для случая нормального стационарного случайного процесса с нулевым средним значением и с корреляционной функцией $\langle xx_\tau\rangle = \sigma^2 R(\tau)$.

Вследствие четности корреляционной функции корреляция между координатой и ее производной в один и тот же момент времени отсутствует:

$$\langle x\dot{x}\rangle = \left[\frac{d}{d\tau}\langle xx_\tau\rangle\right]_{\tau=0} = 0. \qquad (10.6)$$

Для нормальных случайных процессов из условия некоррелированности $x$, $\dot{x}$ вытекает их статистическая независимость, поэтому $w(x, \dot{x})$ распадается на произведение одномерных функций распределения и формулы (4), (5) приобретают вид

$$w_{\text{н}}(\dot{x}) = \frac{w(\dot{x})\dot{x}}{\int\limits_0^\infty w(\dot{x})\dot{x}d\dot{x}} = \frac{2}{\langle|\dot{x}|\rangle} w(\dot{x})\dot{x}, \quad (\dot{x} > 0), \qquad (10.7)$$

$$n_0 = \frac{w(b)}{2} \langle |\dot{x}| \rangle .$$

Используя обычные выражения для гауссовой плотности вероятности (3.6) и учитывая, что $\langle \dot{x} \rangle = 0$, $\sigma(\dot{x}) = \sigma \sqrt{-R''(0)}$, получаем

$$w_{\text{н}}(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{\sigma^2 R_2} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2 R_2}} \quad (\dot{x} > 0), \tag{10.8}$$

$$n_0 = \frac{\sqrt{R_2}}{2\pi} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{где } R_2 = -\left[\frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}. \tag{10.9}$$

Мы видим, что распределение производных в момент начала выброса описывается законом Релея.

Указанное в начале условие плавности функции $x(t)$ было использовано, когда мы предполагали ее дифференцируемой и на малом интервале близкой к прямой. Это условие связано с дифференцируемостью корреляционной функции $\langle x x_\tau \rangle$ в нуле и с конечностью ее второй производной.

## 2. Среднее число серий выбросов для процессов Маркова

Во всех реальных случаях, имеющих место в радиофизике, процесс $x(t)$ заведомо удовлетворяет условиям плавности изменения, о которых шла речь выше. В самом деле, желательные или нежелательные емкости и индуктивности схемы осуществляют сглаживание электрического сигнала хотя бы с малой постоянной времени сглаживания $\tau_{\text{гл}}$. Спектр сигнала быстро спадает до нуля при частотах, превосходящих частоту $\omega_{\text{в}} \sim 1/\tau_{\text{гл}}$, которую можно назвать верхней частотой среза (см. разд. 2 и 12 § 4).

В тех случаях, когда постоянная времени сглаживания достаточно мала, а именно меньше других существенных постоянных времени, удобно не вводить явно в рассмотрение времени сглаживания, заменяя реальный процесс на близкий к нему несглаженный процесс. Примерами таких несглаженных процессов являются процессы без последействия, или процессы Маркова, которые, являясь удобными абстракциями, в некоторых отношениях проще сглаженных (аналитических) случайных

процессов. Однако, как отмечалось в § 4, процессы Маркова являются недифференцируемыми в каждой точке, поэтому рассмотрение, проведенное в предыдущем разделе, к ним неприменимо.

Кривая процесса Маркова имеет бесконечную производную, которая беспрестанно меняет знак; она хаотическим образом колеблется вверх и вниз с неограниченной частотой Если кривая в момент времени $t$ пересекает уровень $b$, то в очень близкие моменты имеется бесконечное число других пересечений. Среднее число выбросов поэтому бесконечно. Возьмем для примера экспоненциально коррелированный процесс $x(t)$, над которым произведена операция сглаживания (4.280) с постоянной времени $\tau_{гл}$. Согласно формуле (4.284) сглаженный процесс $y(t)$ имеет коэффициент корреляции

$$R_y(\tau) = \frac{e^{-\beta\tau} - \beta\tau_{гл} e^{-\frac{\tau}{\tau_{гл}}}}{1 - \beta\tau_{гл}} \quad (\tau > 0).$$

Применяя формулу (9), находим среднее число выбросов сглаженного процесса

$$n_0 = \frac{\sqrt{R_2}}{2\pi} e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2(y)}}.$$

Здесь

$$\sigma^2(y) = \frac{\sigma^2(x)}{1 + \beta\tau_{гл}}, \quad R_2 = -R_y''(0) = \frac{\beta}{\tau_{гл}}.$$

Отсюда видно, что при уменьшении времени сглаживания число выбросов неограниченно увеличивается.

Несмотря на неограниченно большое число точек пересечения для точного процесса Маркова, время от времени выпадают конечные не равные нулю интервалы между точками пересечения, т. е. имеют место выбросы конечной длительности. Это подтверждается сказанным в § 11. Отсюда следует, что точки пересечения располагаются сериями, каждая из которых содержит бесконечное число точек, но имеет конечную длительность. Траектория процесса Маркова вследствие своей изрезанности не может дать одиночного пересечения, а дает сразу целую серию бесконечного числа пересечений. При сглаживании процесса число пересечений в каждой серии становится конечным и уменьшается с ростом $\tau_{гл}$. Хотя

число пересечений в каждой серии очень сильно зависит от времени сглаживания, число серий и их расположение от него мало зависят. Серия сохранится после сглаживания, если хотя один выброс в ней по длительности превосходит $\tau_{гл}$. Подробнее связь выбросов процесса Маркова и сглаженного процесса рассматривается в разд. 5, § 11.

Поскольку выбросы каждой серии следуют быстро один за другим и могут быть не различены счетным устройством, в некоторых случаях представляет интерес подсчет не полного числа выбросов, а именно частоты следования их серий. Этим мы и займемся в настоящем разделе.

Разделение последовательности выбросов на серии приобретает определенный смысл лишь тогда, когда серии имеют большую скважность, т. е. когда средний интервал между сериями значительно превосходит среднюю длительность серии $T_c$:

$$T_и \gg T_c. \tag{10.10}$$

Это получается тогда, когда пороговый уровень $b$ лежит в той области, в которой координата $x(t)$ бывает редко, т. е. там, где вероятность $w_{ст}\ (b)$ относительно мала. Поскольку в той области, где вероятность $w_{ст}\ (x)$ велика, можно сделать оценку

$$w_{ст}(x) \sim \frac{1}{\sigma(x)}, \tag{10.11}$$

то указанное условие, которое в известном смысле эквивалентно неравенству (10), можно записать

$$w_{ст}(b) \ll \frac{1}{\sigma(x)}. \tag{10.12}$$

Более точное условие применимости всего сказанного будет указано в дальнейшем.

Пусть процесс Маркова, для которого будем вычислять среднее число серий выбросов, описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x) + \xi, \tag{10.13}$$

где $\xi(t)$ — дельта-коррелированная случайная функция,

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = K\delta(\tau). \tag{10.14}$$

Для реального, не вполне дельта-коррелированного случайного процесса $\xi(t)$, имеющего время корреляции порядка $\tau_{г.л}$, коэффициент интенсивности $K$ следует вычислять интегрированием

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \bar{\xi}_{\tau} \rangle d\tau.$$

В уравнении (13) $f(x)$ есть некоторая заданная функция, связанная с «потенциальной функцией» $U(x)$ соотношением

$$f(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \qquad (10.15)$$

«Потенциальная функция» должна неограниченно возрастать с увеличением $|x|$. Это условие означает, что имеется возвращающая сила, не позволяющая координате $x(t)$ удаляться в область бесконечных положительных или отрицательных значений.

Уравнение (13) не является самым общим уравнением, описывающим процесс без последействия в одномерном пространстве. Однако более общее уравнение

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)\xi$$

может быть преобразовано к виду (13) заменой переменной $x = \int \frac{dx_1}{g_1(x_1)}$. Достижение уровня $b_1$ координатой $x_1(t)$ совершенно эквивалентно достижению уровня $b$ функцией $x(t)$, если

$$b = \int \frac{dx_1}{g_1(x_1)}\Big|_{x_1 = b_1}.$$

Поэтому для вычисления числа выбросов можно перейти от указанного уравнения к более простому уравнению (13).

Уравнение (13) согласно сказанному в § 4 эквивалентно следующему уравнению Фоккера—Планка:

$$\dot{w} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial x} w\right] + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (10.16)$$

Последнее дает возможность непосредственно получить стационарное распределение $w_0(x)$, удовлетворяющее

равенству $\dot{w}_0 = 0$. Согласно (4.49) оно имеет вид

$$w_{\text{ст}}(x) = N^{-1} \exp\left\{-\frac{2}{K} U(x)\right\},$$

$$N = \int \exp\left\{-\frac{2}{K} U(x)\right\} dx. \qquad (10.17)$$

Задавшись целью определить среднюю частоту повторений для серий выбросов, попытаемся найти обратную величину, а именно средний интервал между первыми пересечениями соседних серий. Пусть в момент $t = t_1$ (или для краткости $t = 0$) наблюдается первое пересечение одной из серий выбросов. Условное распределение для $x(t)$ в последующее время $t > 0$ расплывается от дельта-функции

$$w(x(t) \mid x(0) = b) = \delta(x(t) - b) \text{ при } t = 0 \quad (10.18)$$

до стационарного распределения

$$w(x(t) \mid x(0) = b) = w_{\text{ст}}(x) \text{ при } t \gg T_{\text{уст}}. \quad (10.19)$$

Пусть постоянная времени $T_{\text{уст}}$ характеризует длительность переходного процесса, т. е. быстроту установления стационарного распределения. Пересечения порогового уровня $b$ в течение этого времени мы относим к числу пересечений одной серии. Таким образом, длительность каждой серии пересечений по порядку величины меньше или равна $T_{\text{уст}}$. После установления стационарного распределения координата $x(t)$ будет довольно долго пребывать в области $x - \langle x \rangle \sim \sigma(x)$, где сосредоточена основная доля вероятности (17). Лишь спустя большой средний промежуток времени $T_{\text{дос}}$, она вновь достигает уровня $b$ и дает новую серию пересечений. Указанное ранее условие (10) практически эквивалентно неравенству

$$T_{\text{дос}} \gg T_{\text{уст}}. \qquad (10.20)$$

Вследствие сказанного средний интервал между первыми пересечениями соседних серий приблизительно равен среднему времени, протекающему от стационарного распределения до первого достижения границы $x = b$. Как указывалось в § 4 (разд. 6), задачи на первое до-

стижение границы решаются путем рассмотрения уравнения Фоккера—Планка (16) при нулевом граничном условии

$$w(b,\ t)=0. \tag{10.21}$$

При таком рассмотрении условие нормировки

$$\int w(x,\ 0)\,dx=1$$

выполняется только в начальный момент $t=0$, когда $w(x,\ t)$ совпадает с начальным (в данном случае стационарным) распределением

$$w(x,\ 0)=w_{ст}(x). \tag{10.22}$$

В последующие моменты времени величина

$$W(t)=\int_{-\infty}^{b} w(x,\ t)\,dx \tag{10.23}$$

меньше единицы. Она совпадает с вероятностью того, что кривая $x(t)$ ни разу не коснется границы $x=b$ в течение интервала времени от 0 до $t$. Иначе говоря, $W(t)$ описывает ту долю случаев, в которых координата ни разу не достигает значения $b$. Указанная величина убывает вследствие того, что в некоторых случаях координата достигает границы и поэтому выбывает из рассмотрения. Вероятность того, что первое касание произойдет в течение интервала от $t$ до $t+dt$, равна

$$dP=-dW=-\dot{W}dt=-dt\int_{-\infty}^{b}\dot{w}(x,\ t)\,dx. \tag{10.24}$$

Пользуясь уравнением (16), нетрудно получить

$$dP=[G(b,\ t)-G(-\infty,\ t)]\,dt, \tag{10.25}$$

где

$$G(x,\ t)=-\frac{\partial U}{\partial x}w-\frac{K}{2}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{10.26}$$

— поток вероятности через сечение $x$.

Отбрасывая здесь поток $G(-\infty, t)$ из бесконечности, который равен нулю вследствие невозможности бесконечных значений координаты, нетрудно убедиться, что

быстрота убывания вероятности равна потоку вероятности $G(b, t)$, проходящей через границу

$$\dot{W}(t) = -G(b, t). \tag{10.27}$$

Вероятность (24) совпадает с вероятностью того, что интервал времени до первого пересечения будет находиться в пределах от $t$ до $t+dt$. Таким образом, величина $-\dot{W}$ является плотностью вероятности для величины указанного интервала. Средний интервал до первого пересечения получаем усреднением и интегрированием по частям

$$T_{\text{дос}} = -\int_0^\infty t\dot{W}dt = \int_0^\infty W(t)\,dt. \tag{10.28}$$

Среднее время (28), связанное с решением дифференциального уравнения (16) при условиях (21), (22), может быть получено точно в виде интегралов согласно (4.113). Однако нам нет надобности находить громоздкое точное выражение для $T_{\text{дос}}$, поскольку сама постановка задачи (16), (21), (22) уже была сопряжена с приближениями, основанными на условии (10) или (20). Поэтому мы найдем более простое приближенное выражение, справедливое при том же условии.

Применяя метод, изложенный в разд. 4, § 4, будем искать решение уравнения (16) при граничном (21) и начальном (22) условиях в форме разложения

$$w(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m e^{-\lambda_m t} X_m(x). \tag{10.29}$$

Здесь значения $T_m$ определяются из (22), а собственные функции $X_m(x)$ согласно (4.50) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{K}{2}\frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial x}X_m\right] + \lambda_m X_m = 0 \tag{10.30}$$

с граничными условиями

$$X_m(b) = 0, \quad G[X_m]_{x=-\infty} = 0. \tag{10.31}$$

Граничное условие (21) отличается от граничного условия $w_{\text{ст}}(\infty, t) = 0$ или $G[w_{\text{ст}}]_{x=\infty} = 0$, которому

удовлетворяет $w_{ст}$. Однако вследствие условия (12) указанное отличие невелико. Если $b$ стремится к бесконечности, где $w_{ст}=0$, то разница между указанными граничными условиями пропадает и функции, удовлетворяющие равенствам (30), (31), переходят в соответствующие функции $X_m$, определенные при всех значениях $x$, которые были рассмотрены в разд. 4, § 4. В частности, согласно (4.53) $X_0(x)$ переходит в $w_{ст}$, а $\lambda_0$ обращается в нуль. Отсюда следует, что при достаточно больших $b$, удовлетворяющих условию (12), $X_0(x)$ мало отличается от $w_{ст}$ в области большой вероятности, а $\lambda_0$ от 0 ($\lambda_0 \ll \lambda_1, \lambda_2, \ldots$). Спустя время $t$, значительно превышающее время установления $T_{уст}$ $\left(T_{уст}\right.$ — порядка $\left.\frac{1}{\lambda_1}\right)$, т. е. при $t \gg \frac{1}{\lambda_1}$, в разложении (29) существенным будет лишь один член

$$w(x,\ t)=T_0X_0(x)\,e^{-\lambda_0 t}. \tag{10.32}$$

Вследствие начального условия (22) и отмеченной ранее близости $X_0(x)$ к $w_{ст}(x)$ имеем $T_0 \approx 1$.

Таким образом, спустя время $t \gg T_{уст}$, устанавливается своеобразный «квазистатический» режим убывания вероятности. Он характеризуется тем, что форма плотности вероятности не меняется. Она описывается функцией $X_0(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{K}{2}\frac{\partial^2 X_0}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\,X_0\right]=-\lambda_0 X_0. \tag{10.33}$$

Суммарная же вероятность (23) равна

$$W(t)=e^{-\lambda_0 t}, \tag{10.34}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{b} X_0 dx \approx \int_{-\infty}^{b} w_{ст} dx \approx 1, \tag{10.35}$$

т. е. медленно убывает до нуля. Формула (28) при этом дает

$$T_{дос}=\frac{1}{\lambda_0}. \tag{10.36}$$

Интегрируя (33) от $-\infty$ до $b$, получаем

$$\frac{K}{2}\frac{\partial X_0}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}X_0=-\lambda_0\int_{-\infty}^{x}X_0(x')\,dx'. \qquad (10.37)$$

Вторичное интегрирование дает

$$X_0(x)=\frac{2\lambda_0}{K}\int_{x}^{b}\exp\left\{-\frac{2}{K}[U(x)-U(x')]\right\}g(x')\,dx', \qquad (10.38)$$

где

$$g(x)=\int_{-\infty}^{x}X_0(x')\,dx'\approx\int_{-\infty}^{x}w_{\text{ст}}(x')\,dx'. \qquad (10.39)$$

При помощи стационарного распределения (17) равенство (38) можно записать

$$X_0(x)=\frac{2\lambda_0}{K}w_{\text{ст}}(x)\int_{x}^{b}\frac{g(x')}{w_{\text{ст}}(x')}\,dx'. \qquad (10.40)$$

Как следует из неравенства (12), подынтегральное выражение $\frac{g}{w_{\text{ст}}}$ велико в области, примыкающей к $b$, и мало в области большой вероятности $X=x_1$, где $w_{\text{ст}}(x_1)\sim\frac{1}{\sigma(x)}$. Более того, мы будем предполагать, что

$$\int_{x_1}^{b}\frac{dx'}{w_{\text{ст}}}\gg\int_{x_1-\sigma(x)}^{x_1}\frac{dx'}{w_{\text{ст}}}\sim\sigma^2(x). \qquad (10.41)$$

Тогда интеграл $\int_{x_1}^{b}\frac{g}{w_{\text{ст}}}\,dx'$ слабо зависит от $x_1$, если только $x_1$ лежит в области большой вероятности. Далее, где выражение $\frac{g}{w_{\text{ст}}}$ велико, там оно близко к $\frac{1}{w_{\text{ст}}}$, поскольку там

$$g(x)\approx\int_{-\infty}^{b}w_{\text{ст}}dx'\approx 1, \qquad (10.42)$$

как это видно из (39).

Взяв $x = x_1$ из области большой вероятности и учитывая, что в ней $X_0 \approx w_{ст}$, получим из (40) после замены $g$ на 1

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{2}{K} \int_{x_1}^{b} \frac{dx'}{w_{ст}(x')} \tag{10.43}$$

или подробнее

$$\frac{1}{\lambda_0} = 2 \frac{N}{K} \int_{x_1}^{b} \exp\left[\frac{2}{K} U(x)\right] dx. \tag{10.44}$$

Найденное соотношение служит для определения $\lambda_0$. Вследствие (41) зависимость от $x_1$ практически отсутствует. Используя (43), основное условие применимости теории (41) можно записать в виде

$$\frac{1}{\lambda_0} \gg \frac{2\sigma^2(x)}{K}. \tag{10.45}$$

Учитывая (36), нетрудно видеть, что это неравенство эквивалентно условию (20), поскольку $T_{уст} \sim 2\sigma^2(x)/K$.

### 3. Примеры применения формулы, определяющей частоту повторения серий

Пример 1. Рассмотрим случай нелинейной возвращающей силы

$$f(x) = -f_0 \frac{x}{|x|}, \tag{10.46}$$

которой соответствует потенциальная функция

$$U(x) = f_0 |x|. \tag{10.47}$$

Согласно (17) в этом случае имеем

$$w_{ст}(x) = \frac{1}{N} e^{-\frac{2}{K} f_0 |x|}, \quad N = \frac{K}{f_0}, \quad \langle x \rangle = 0,$$

$$\sigma(x) = \frac{K}{2f_0}. \tag{10.48}$$

Применяя формулу (44), находим

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{N}{f_0}\left[e^{\frac{2f_0 b}{K}} - e^{\frac{2f_0 x_1}{K}}\right]. \tag{10.49}$$

Условие справедливости последнего результата, которое можно записать в любой из трех форм (10), (20) или (45), в данном случае имеет вид

$$K \ll 2f_0 b.$$

Оно действительно приводит к тому, что выражение (49) слабо зависит от $x_1$ при $b - x_1 \gg \sigma(x)$. Пренебрегая членом $e^{\frac{2f_0 x_1}{K}}$, получаем среднюю частоту повторения серий

$$\lambda_0 = \frac{f_0^2}{K} e^{-\frac{2}{K} f_0 b}. \qquad (10.50)$$

Пример 2. В качестве другого примера возьмем линейную силу

$$f(x) = -\beta x, \quad U(x) = \frac{\beta}{2} x^2. \qquad (10.51)$$

Этот случай соответствует нормальному стационарному распределению

$$w_{ст}(x) = \frac{1}{N} e^{-\frac{\beta x^2}{K}}, \quad N = \left(\frac{\pi K}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{K}{2\beta}}. \qquad (10.52)$$

Формула (44) теперь дает

$$\frac{1}{\lambda_0} = 2\left(\frac{\pi}{\beta K}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^b e^{\frac{\beta x^2}{K}} dx, \qquad (10.53)$$

где в качестве $x_1$ выбрано среднее значение $\langle x \rangle = 0$. Условием применимости изложенной теории в данном случае является неравенство $\frac{\beta b^2}{K} \gg 1$, которое позволяет воспользоваться асимптотическим рядом

$$\int_0^b e^{\frac{\beta x^2}{K}} dx = \frac{K}{2\beta b} e^{\frac{\beta b^2}{K}} \left[1 + \frac{K}{2\beta b^2} + \ldots\right]. \qquad (10.54)$$

Если удержать лишь первый член этого разложения, то искомая частота серий выбросов будет равна

$$\lambda_0 = \beta b \left(\frac{\beta}{\pi K}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\beta b^2}{K}}. \qquad (10.55)$$

Полученные выражения (50), (55) содержат в качестве основного сомножителя экспоненты $\exp\left(-\frac{2f_0 b}{K}\right)$, $\exp\left(-\frac{\beta b^2}{K}\right)$, которые являются ни чем иным, как $\exp\left[-\frac{2}{K}U(b)\right]$. Такой множитель всегда будет присутствовать в тех случаях, когда в (44) можно заменить $\exp\left[-\frac{2}{K}U(x)\right]$ на $\exp\left[-\frac{2}{K}U(b)+\frac{2}{K}f(b)(x-b)\right]$. После такой замены можно положить нижний предел интегрирования равным $-\infty$ и получить

$$\lambda_0 = \frac{f(b)}{N} e^{-\frac{2}{K}U(b)}. \qquad (10.56)$$

Выражения (50), (55) являются частными случаями последней формулы. Однако эта формула не охватывает многих случаев, когда производная $dU(b)dx=-f(b)$ недостаточно велика или, тем более, отрицательна. Тогда существенную роль играют нелинейные члены $(d^2U(b)/dx^2)(x-b)^2/2$. Один из таких случаев будет рассмотрен в § 18 (разд. 3). Возможны также случаи, когда разложение Тейлора функции $U(x)$ вообще неприменимо.

Пример 3. Пусть «сила» и «потенциал» имеют вид

$$f(x) = -\beta x + \frac{K}{2x}, \quad U(x) = \frac{\beta}{2}x^2 - \frac{K}{2}\ln x. \qquad (10.57)$$

При этом $x(t)$ является релеевским флюктуационным процессом (разд. 3, § 7), имеющим стационарное распределение

$$w_{ст}(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \left(\sigma^2 = \frac{K}{2\beta}\right). \qquad (10.58)$$

В отличие от предыдущих случаев теперь $x(t)$ может принимать лишь положительные значения. Малые значения $x \ll \sigma$ достигаются редко, так же как и большие значения $x \gg \sigma$. Если выбрать очень низкий уровень $b \ll \sigma$, то условия применимости изложенной теории будут выполнены и можно будет подсчитать число серий точек пересечения. Для этого можно воспользоваться выведенными формулами с некоторыми изменениями, соответствующими тому, что теперь область вероятных значений

координаты находится не снизу, а сверху порогового уровня ($x(t) > b$). Используя формулу (43) и выбирая $x_1 = \sigma$, получаем

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\beta} \int_b^\sigma e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x}. \tag{10.59}$$

Основной вклад в интеграл здесь дает область, примыкающая к $b$, где $e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \approx 1$. Заменяя экспоненту на единицу, находим

$$\lambda_0 = \frac{\beta}{\ln \frac{\sigma}{b}}. \tag{10.60}$$

Условие (45) применимости теории в данном случае имеет вид

$$\ln \frac{\sigma}{b} \gg 1. \tag{10.61}$$

В заключение настоящего параграфа скажем несколько слов о выполнимости условия (10), лежащего в основе приведенного рассмотрения. Оно выполняется при относительно высоком пороговом уровне или при относительно малом флюктуационном разбросе. Этот случай представляет большой практический интерес ввиду того, что в практических приборах, предназначенных для выполнения определенных операций, например для счета, флюктуационные помехи не должны быть настолько велики, чтобы сорвать основную работу прибора. Помехи должны быть относительно небольшими возмущениями, иначе будет происходить такое большое число ложных выбросов, что нормальная работа прибора будет нарушена, и он будет непригоден для употребления. Поэтому в большинстве приборов, пригодных для практики, условие малости флюктуационных воздействий можно считать выполняющимся.

## § 11. ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ВЫБРОСОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ МАРКОВА

Для многих задач знания среднего числа выбросов оказывается недостаточным ввиду того, что система, подлежащая исследованию, подчас может реагировать

лишь на некоторые выбросы, удовлетворяющие определенным требованиям. В первую очередь, здесь следует указать требование, предъявляемое к длительности выброса. Пусть имеется некоторая необходимая минимальная длительность выброса $\tau$, причем выбросы с меньшей длительностью оказываются пропущенными. Тогда, очевидно, представляет интерес не общее среднее число выбросов $n_0$ (рассчитанное на единицу времени), а среднее число $n(\tau)$ тех выбросов, длительность которых превосходит $\tau$.

Если полное число выбросов конечно и известно, то желательно знать плотность распределения выбросов по длительности $w(T)$. Число $n(\tau)$ тогда выразится простой формулой

$$n(\tau) = n_0 \int_{\tau}^{\infty} w(T)\, dT \quad (n_0 = n(0)). \tag{11.1}$$

Для процессов Маркова полное число выбросов бесконечно вследствие неограниченно большого числа бесконечно коротких выбросов. Нормированной плотности распределения $w(T)$ для них также не существует. Однако число выбросов $n(\tau)$ есть вполне определенная и конечная величина. Подсчетом этого числа мы займемся в настоящем параграфе.

Реальный гладкий случайный процесс, близкий к марковскому процессу, но отличающийся от него дополнительным сглаживанием с малой постоянной времени $\tau_{гл}$, имеет, как будет отмечено в разд. 5 этого параграфа, почти то же самое количество выбросов с длительностью $T \gg \tau_{гл}$, что и процесс Маркова. Поэтому результаты, излагаемые здесь, представляют интерес не только для самих процессов Маркова, но и для реальных гладких процессов, близких к ним.

## 1. Число выбросов марковского процесса с длительностью, превышающей фиксированную величину

Как отмечалось ранее, процесс Маркова с одной переменной может быть описан уравнением

$$\dot{x} = f(x) + \xi, \tag{11.2}$$

где $\xi(t)$ — дельта-коррелированная функция с нулевым средним значением

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = K\delta(\tau). \tag{11.3}$$

Путем замены переменной к указанному виду можно преобразовать более общее уравнение (4.172). Таким образом, рассматривая уравнение (2), мы тем самым не ограничиваем общности.

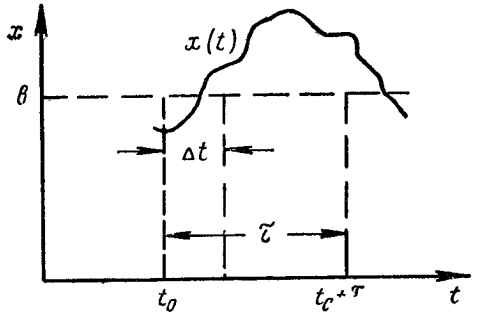



Рис. 11.1. Начало и конец выброса.

Флюктуационному уравнению (2) соответствует уравнение Фоккера—Планка

$$\dot{w} = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x)w] + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{11.4}$$

определяющее эволюцию плотности распределения $w(t)$ во времени.

Нашей задачей является вычисление средней плотности выбросов, длительность которых превышает фиксированную величину $\tau$. Задаваясь небольшим интервалом $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$ $(\Delta t < \tau)$, рассмотрим среднее число $\Delta n$ выбросов, начинающихся в течение этого интервала и кончающихся при $t > t_0 + \tau$ (рис. 11.1) В дальнейшем для простоты записи мы будем полагать $t_0 = 0$. Очевидно, что после вычисления $\Delta n$ искомую среднюю плотность выбросов можно получить предельным переходом

$$n(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t}. \tag{11.5}$$

Ввиду того, что в каждом конкретном случае (для каждой фотографии случайного процесса) может прои-

зойти не более одного описанного ранее выброса, среднее число $\Delta n$ совпадает с вероятностью его появления $\Delta P$.

Появление выброса, начинающегося на интервале $[0, \Delta t]$ и кончающегося при $t>\tau$, означает, что траектория в течение времени $0<t<\Delta t$ хотя бы один раз достигает заданного уровня $x=b$ (пересекает его), а на интервале $[\Delta t, \tau]$ лежит выше его:

$$x(t) > b \text{ при } \Delta t < t < \tau. \tag{11.6}$$

Разделим все траектории процесса $x(t)$ на два класса, к первому классу отнесем те траектории, которые на интервале $[0, \Delta t]$ ни разу не пересекают уровня $b$, располагаясь выше. К другому классу отнесем остальные траектории. Пусть все траектории в их совокупности описываются функцией распределения $w_0(x)=w(x,0)$, удовлетворяющей уравнению (4). В частности, для стационарного процесса $x(t)$ плотность $w_0(x)$ есть стационарное распределение (10.17). Плотность распределения $w_1(x, t)$, описывающая траектории первого класса, ни разу не коснувшиеся уровня $b$, должна удовлетворять тому же уравнению (4) с очевидным начальным и граничным условием

$$w_1(x, 0) = w_0(x) \text{ при } x > b, \quad w_1(b, t) = 0 \text{ при } 0 < t < \Delta t. \tag{11.7}$$

Траектории второго класса, остающиеся после удаления траекторий первого класса, описываются плотностью распределения

$$w_2(x, t) = w_0(x) - w_1(x, t), \tag{11.8}$$

для которой, в свою очередь, справедливо уравнение (4)

$$\dot{w}_2 = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x) w_2] + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}. \tag{11.9}$$

Пользуясь условиями (7), получаем для (8) нулевое начальное условие

$$w_2(x, 0) = 0 \quad (x > b), \tag{11.10}$$

а также граничное условие

$$w_2(b, t) = w_0(b) \text{ при } 0 < t < \Delta t. \tag{11.11}$$

Траектории второго класса, находящиеся при $t=\Delta t$ поверх уровня $b$, очевидно, пересекли этот уровень хотя бы один раз. Поэтому доля тех траекторий, для которых выброс начался на интервале $[0, \Delta t]$ и не кончился к моменту $t=\Delta t$, равна

$$\int_b^\infty w_2(x, \Delta t)\, dx. \tag{11.12}$$

Это есть также вероятность появления такого выброса. Чтобы найти вероятность того, что начавшийся выброс не кончится к моменту $t=\tau$, нужно учесть убыль траекторий, коснувшихся хотя бы один раз уровня $x=b$ при $\Delta t<t<\tau$. Для этого, как обычно, следует решить уравнение (4) с нулевым граничным условием

$$w_3(b, t)=0 \quad (t>\Delta t). \tag{11.13}$$

В качестве начального условия, конечно, нужно взять

$$w_3(b, \Delta t)=w_2(b, \Delta t). \tag{11.14}$$

Решив последнюю задачу, можно найти вероятность того, что выброс начнется на интервале $[0, \Delta t]$ и не кончится к моменту $t=\tau$:

$$\Delta P=\Delta n=\int_b^\infty w_3(x, \tau)\, dx. \tag{11.15}$$

Ввиду того, что плотность $w_2$, являющаяся решением задачи (9)—(11), непрерывно переходит в плотность $w_3$, изменяющуюся при $t>\Delta t$ в соответствии с (4), (13), (14), удобно их объединить, полагая

$$w_3(x, t)=w_2(x, t) \text{ при } t>\Delta t. \tag{11.16}$$

После такого объединения функция $w_2(x, t)$ будет определяться уравнением (4) с начальным и граничным условиями

$$w_2(x, 0)=0, \tag{11.17}$$

$$w_2(b, t)=\begin{cases} w_0(b) & \text{при } 0<t<\Delta t, \\ 0 & \text{при } t>\Delta t. \end{cases} \tag{11.18}$$

В дальнейшем в соответствии с (5), (15) нам надо взять отношение $w$ к $\Delta t$ и перейти к пределу $\Delta t \to 0$. По-

этому целесообразно ввести в рассмотрение функцию $v(x, t)$, определенную соотношением

$$w_0(b)\, v(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w_2(b, t)}{\Delta t}. \qquad (11.19)$$

Используя (4), (17), (18), получаем для $v(x, t)$ уравнение

$$\dot{v} = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x)\, v] + \frac{K}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (11.20)$$

с условиями

$$v(x, t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \qquad (11.21)$$

$$v(b, t) = \delta(t). \qquad (11.22)$$

После того, как уравнение (20) с условиями (21), (22) будет решено, искомое число выбросов $n(\tau)$ будет определяться формулой

$$n(\tau) = w_0(b) \int_b^\infty v(x, \tau)\, dx, \qquad (11.23)$$

вытекающей из (5), (15), (19).

Решение указанного уравнения удобно прозодить путем применения преобразования Карсона—Лапласа. Из (20) по обычным правилам находим

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial x}(f\bar{v}) - \frac{2p}{K}\bar{v} = 0, \qquad (11.24)$$

где чертой сверху обозначено изображение

$$\bar{v}(x, p) = p \int_{0-0}^\infty e^{-pt} v(x, t)\, dt. \qquad (11.25)$$

Граничное условие (22) теперь принимает вид

$$\bar{v}(b, p) = p. \qquad (11.26)$$

Решение уравнения (24) содержит две произвольные постоянные интегрирования. Одна из них определяется равенством (26), вторая может быть определена из условия исчезновения функции $\bar{v}(x, p)$ на бесконечности

$$\bar{v}(x, p) \to 0 \text{ при } x \to \infty, \ (\mathrm{Re}\, p > 0). \qquad (11.27)$$

Полностью определив $\bar{v}$ в результате решения уравнения (24), можно вычислить $n(\tau)$. Изображение этой функции

$$\bar{n}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} n(t)\, dt \qquad (11.28)$$

в силу (23) равно

$$\bar{n}(p) = w_0(b) \int_b^{\infty} \bar{v}(x, p)\, dx. \qquad (11.29)$$

Последнюю формулу можно преобразовать также к другому виду.

Интегрируя вытекающее из (24) выражение

$$\bar{v} = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{K}{2} \frac{\partial \bar{v}}{dx} - f\bar{v} \right]$$

и пользуясь исчезновением на бесконечности потока $f\bar{v} - \frac{K\partial v}{2\partial x}$, а также равенством (26), будем иметь

$$\bar{n}(p) = -\frac{K}{2p} w_0(b) \frac{\partial \bar{v}}{dx}(b, p) + f(b) w_0(b). \qquad (11.30)$$

Последний член не играет особой роли, поскольку при переходе от изображения к оригиналу ему соответствует постоянная $f(b)w_0(b)$. Отыскание оригинала, соответствующего изображению Карсона—Лапласа (30), целесообразно проводить, используя таблицы формул операционного исчисления, например [III].

Изложенный метод применим также для вычисления среднего числа интервалов между выбросами. Это число мы будем обозначать $n_2(\tau)$ в отличие от $n_1(\tau) = n(\tau)$. Разница между двумя указанными случаями лишь в том, что теперь нужно брать моменты времени, когда $x(t) < b$, вместо $x(t) > b$. Эти случаи переходят друг в друга при замене $x \to -x$.

## 2. Примеры

Пример 1. В изложенной теории процесс $x(t)$ не обязательно является стационарным. При нестационарном процессе функция $w_0(x)$ зависит от времени $t_0$, в остальном же все остается по-прежнему. Мы начнем рас-

сматривать именно нестационарный процесс, потому что простейший случай, соответствующий отсутствию регулярной силы

$$f(x) \equiv 0, \tag{11.31}$$

не имеет стационарного распределения.

Уравнение (24) при этом имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{2p}{K}\bar{v} = 0. \tag{11.32}$$

Его общее решение есть $C_1 \exp\left(x\sqrt{\frac{2p}{K}}\right) + C_2 \times$ $\times \exp\left(-x\sqrt{\frac{2p}{K}}\right)$. Подбирая произвольные постоянные так, чтобы удовлетворить условиям (26), (27), получаем

$$\bar{v}(b,\ p) = p \exp\left[(b-x)\sqrt{\frac{2p}{K}}\right].$$

Подставляя это выражение в (20) или (30), находим

$$\bar{n}(p) = \sqrt{\frac{pK}{2}}\, w_0(b). \tag{11.33}$$

Если воспользоваться теперь формулой 2.1 справочника [III], то будем иметь

$$n(\tau) = w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi\tau}}. \tag{11.34}$$

Таким образом, действительно, число выбросов с длительностью больше некоторой фиксированной величины $\tau$ вполне конечно, в то время как общее число выбросов, получаемое путем перехода $\tau \to 0$, бесконечно велико.

Пример 2. Пусть теперь абсолютная величина координаты $x$ ограничена значением $c > b$, причем в пределах отрезка $-c < x < c$ регулярная сила отсутствует. Это значит, что точка $x(t)$ как бы свободно движется по «дну потенциального ящика». Потенциальная функция

$$U(x) = -\int_0^x f(x')\, dx'$$

при этом имеет вид, изображенный на рис. 11.2. Аналитически ее можно записать

$$U(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } |x|<c, \\ \infty \text{ при } |x|>c. \end{cases}$$

В этом случае имеется стационарное распределение

$$w_0(x)=\begin{cases} \frac{1}{2c} \text{ при } |x|<c, \\ 0 \text{ при } |x|>c. \end{cases} \tag{11.35}$$

Внутри отрезка $-c<x<c$ вследствие отсутствия регулярной силы остается справедливым уравнение (32). Однако произвольные постоянные в его общем решении

$$C_1 \exp\left(x\sqrt{\frac{2p}{K}}\right) + C_2 \exp\left(-x\sqrt{\frac{2p}{K}}\right)$$

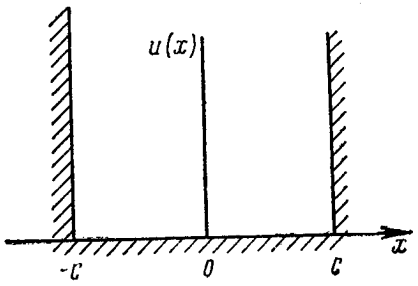


Рис 11 2 Потенциальная функция в примере 2.

теперь следует выбрать другими. Вблизи отражающей стенки $x=c$ поток вероятности равен нулю, т. е. обращается в нуль градиент

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(c,\ p)=0. \tag{11.36}$$

Используя, наряду с (26), это условие, получаем

$$\bar{v}(x,\ p)=p\,\frac{\operatorname{ch}\left[(c-x)\sqrt{\frac{2p}{K}}\right]}{\operatorname{ch}\left[(c-b)\sqrt{\frac{2p}{K}}\right]}.$$

Формула (29) теперь дает

$$\bar{n}(p)=w_0(b)\sqrt{\frac{pK}{2}}\operatorname{th}\left[(c-b)\sqrt{\frac{2p}{K}}\right]. \tag{11.37}$$

В соответствии с формулой 4.81 указанного выше справочника находим

$$n(\tau)=\frac{Kw_0(b)}{2(c-b)}\,\vartheta_2\left(0,\ \frac{K\tau}{2(c-b)^2}\right),$$

где

$$\vartheta_2(0, x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 x}. \qquad (11.38)$$

Пример 3. Рассмотрим случай постоянной возвращающей силы

$$f(x) = -f_0 \text{ при } x \geqslant b, \quad (f_0 > 0). \qquad (11.39)$$

Такая зависимость имеет место, например, когда функция $f(x)$ определяется равенством (10.46), а стационарное распределение равно (10.48).

В данном случае уравнение (24) записывается в форме

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{2f_0}{K}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{2p}{K}\bar{v} = 0. \qquad (11.40)$$

Из двух линейно независимых решений $\exp\left[-\frac{x}{K}\times\right.$ $\left.\times\left(f_0 + \sqrt{f_0^2 + 2pK}\right)\right]$, $\exp\left[-\frac{x}{K}\left(f_0 - \sqrt{f_0^2 + 2pK}\right)\right]$ этого уравнения условию (27) удовлетворяет первое. Используя к тому же (26), находим

$$\bar{v} = p\exp\left\{\frac{b-x}{K}\left(f_0 + \sqrt{f_0^2 + 2pK}\right)\right\}.$$

После подстановки в (29) будем иметь

$$\bar{n}(p) = w_0(b)\frac{pK}{f_0 + \sqrt{f_0^2 + 2pK}}. \qquad (11.41)$$

Пользуясь формулой 2.39 из [III], получаем искомое число выбросов

$$n(\tau) = \frac{1}{2}w_0(b)\left[\frac{e^{-\frac{f_0^2\tau}{2K}}}{\sqrt{\frac{\pi\tau}{2K}}} - f_0\operatorname{erfc}\left(f_0\sqrt{\frac{\tau}{2K}}\right)\right]. \qquad (11.42)$$

Этими результатами можно пользоваться также, когда $f_0 < 0$, т. е. когда сила удаляет траекторию от порогового уровня. В этом случае функция (42) не стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Это означает, что некоторые из выбросов, начавшихся на интервале от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$, вообще не закончатся, так как кривая $x(t)$, превысив поро-

говый уровень, уйдет в бесконечность. Согласно (42) среднее число таких выбросов равно

$$n(\tau)\Delta\tau = w_0(b)|f_0|\Delta\tau. \qquad (11.43)$$

Пример 4. Особо следует рассмотреть случай линейной возвращающей силы $f(x) = -\beta x = -\frac{x}{a}$, которая, как известно, приводит к нормальному процессу Маркова с корреляционной функцией

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{K}{2\beta} e^{-\beta|\tau|}$$

и со стационарным распределением (10.52).

Уравнение (24), приобретающее теперь вид

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{2x}{aK}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{2}{aK}(1 - ap)\bar{v} = 0 \qquad (11.44)$$

путем замены переменной $y = x\sqrt{\frac{2}{aK}}$, преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + y\frac{d\bar{v}}{dy} + (1 - ap)\bar{v} = 0. \qquad (11.45)$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением 7.355.3 справочника [II], приходим к заключению, что его линейно независимые решения суть $e^{-\frac{y^2}{4}} D_{-ap}(y)$ и $e^{-\frac{y^2}{4}} D_{-ap}(-y)$. Здесь $D_{-ap}(z)$ — функции параболического цилиндра. На бесконечности исчезает лишь первое из указанных решений. Поэтому искомое решение уравнения (45), удовлетворяющее условиям (26), (27), записывается в виде

$$\bar{v}(x, p) = p \exp\left[\frac{b^2 - x^2}{2aK}\right] \frac{D_{-ap}\left(x\sqrt{\frac{2}{aK}}\right)}{D_{-ap}\left(b\sqrt{\frac{2}{aK}}\right)}. \qquad (11.46)$$

Если подставить последнее выражение в (30) и воспользоваться формулой 7.347.2 из [II], то получим

$$\bar{n}(p) = p\sqrt{\frac{aK}{2}} \frac{D_{-ap-1}\left(b\sqrt{\frac{2}{aK}}\right)}{D_{-ap}\left(b\sqrt{\frac{2}{aK}}\right)} w_0(b). \qquad (11.47)$$

а) Рассмотрим частный случай нулевого уровня $b = 0$, когда $n(\tau)$ записывается точно в элементарных функциях.

При помощи формулы 7.341.2 из [II] легко получить

$$D_{-q}(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^{q-1} dx = 2^{\frac{q}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma(q)}$$

$$(\operatorname{Re} q > 0). \qquad (11.48)$$

Полагая здесь $q = ap$ и $q = ap + 1$ и подставляя в (47), будем иметь

$$\bar{n}(p) = p w_0(b) \sqrt{aK} \frac{\Gamma\left(\frac{ap}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma(ap)}{\Gamma(ap+1)\,\Gamma\left(\frac{ap}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} w_0(b) \sqrt{aK} p \frac{\Gamma\left(\frac{ap}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{ap}{2} + 1\right)} \qquad (11.49)$$

или, если перейти к бета-функции $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ и учесть, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то

$$\bar{n}(p) = \frac{1}{2} w_0(b) \sqrt{\frac{aK}{\pi}} p B\left(\frac{ap}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad (11.50)$$

$$(b = 0).$$

Используем формулы 6.9 и 0.4 [III], которые дают

$$pB\left(p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = p \int_0^\infty e^{-pt} (e^t - 1)^{-\frac{1}{2}} dt. \qquad (11.51)$$

Вследствие этого оригинал, соответствующий изображению (50), имеет вид

$$n(\tau) = w_0(0) \sqrt{\frac{K}{\pi a}} \left(e^{\frac{2\tau}{a}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (b = 0). \qquad (11.52)$$

В частности, если подставчть (10.52), то

$$n(\tau) = \frac{1}{\pi a} \left(e^{\frac{2\tau}{a}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (b = 0). \qquad (11.53)$$

б) Большой практический интерес представляет противоположный случай высокого порогового уровня, когда

$$\frac{b'}{aK} \gg 1, \text{ т. е. } \frac{b^2}{\sigma^2} \gg 1. \tag{11.54}$$

В этом случае на координату, превзошедшую указанный уровень, действует большая возвращающая сила

$$f(x) = -\frac{x}{a} \approx -\frac{b}{a},$$

приводящая к тому, что выбросы являются кратковременными, а степень превышения $x(t) - b$ невелика:

$$x(t) - b \sim \frac{aK}{b}.$$

При таких превышениях над пороговым уровнем возвращающая сила $-\frac{x}{a}$ мало отличается от $-\frac{b}{a}$ в силу указанного условия (54)

$$\left|\frac{f(x) - f(b)}{f(b)}\right| = \frac{x - b}{b} \sim \frac{aK}{b^2} \ll 1.$$

Поэтому возвращающую силу $f(x)$ можно считать практически постоянной, как это было в примере 3. При этом можно пользоваться выведенными там формулами, полагая

$$f_0 = \frac{b}{a}. \tag{11.55}$$

Так, для стационарного распределения (10.52) формула (42) дает среднюю плотность выбросов, длительность которых превышает $\tau$:

$$n(\tau) = \frac{b}{2a\sqrt{\pi aK}} e^{-\frac{b^2}{aK}} \left[\frac{e^{-T}}{\sqrt{\pi T}} - \operatorname{erfc}\sqrt{T}\right],$$

$$T = \frac{b^2\tau}{2a^2K} = \frac{1}{4}\frac{b^2}{\sigma^2}\frac{\tau}{a}. \tag{11.56}$$

Последний результат, конечно, можно вывести из формулы (47), однако этот путь более трудоемкий.

Аналогично можно вычислить среднее число $n_2(\tau)$ интервалов между выбросами, превышающих $\tau$. Силу

$f = -\beta x$ можно считать постоянной для временных интервалов $\tau$, в течение которых $x(t)$ мало успевает измениться по сравнению с $\sigma(x)$: $|f\tau| \ll \sigma$, т. е. для $\tau \ll \frac{a\sigma}{b}$. Пользуясь формулой (42), в которой $f_0$ принимает уже отрицательные значения $f_0 = -b/a$, получаем формулу

$$n_2(\tau) = \frac{1}{2} w_0(b) \frac{b}{a} \left[ \frac{e^{-T}}{\sqrt{\pi T}} + \operatorname{erfc}(-\sqrt{T}) \right], \quad (11.57)$$

$$\left( T = \frac{1}{4} \frac{b^2}{\sigma^2} \frac{\tau}{a} \right),$$

пригодную при $T \ll \frac{b}{\sigma}$, так как при этом $\tau \ll \frac{a\sigma}{b}$. Отсюда следует, что частота длинных интервалов $\frac{a\sigma}{b} \gg \tau \gg \frac{a\sigma^2}{b^2}$ $(T \gg 1)$ равна $w_0(b)\, b\, a$, что совпадает с частотой следования серий выбросов (10.56). Вследствие (10.34) длинные интервалы имеют экспоненциальный закон распределения и поэтому

$$n(\tau) = \frac{b}{a} w_0(b) e^{-\frac{b}{a} w_0(b) \tau}, \quad \left( \tau \gg \frac{\sigma^2 a}{b^2} \right). \quad (11.58)$$

Асимптотические формулы типа (56), (57), (58) могут быть выведены во всех случаях, когда применима теория серий выбросов, изложенная в разд. 2, § 10, т. е. при выполнении условия (10.45).

в) Если не использовать соотношения между $b$ и $\sigma$, то нужно непосредственно находить оригинал Карсона—Лапласа, соответствующий выражению (47). Используя то, что это выражение представляет собой мероморфную функцию и ее можно представить разложением

$$p \frac{D_{ap \cdot 1}}{D_{\cdot ap}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{ap_m - 1}}{\left| \frac{\partial}{\partial p} D_{\cdot ap} \right|_{p=p_m}} \frac{p}{p - p_m},$$

будем иметь

$$n(\tau) = w_0(b) \sqrt{\frac{aK}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{a\lambda_m - 1}}{-aD_{a\lambda_m}} e^{-\lambda_m}; \quad (11.59)$$

$$\left( D_q' = \frac{\partial D_q}{\partial q} \right).$$

Здесь $p_m = -\lambda_m$ — корни уравнения

$$D_{-ap} = D_{a\lambda} = 0. \tag{11.60}$$

В качестве аргумента функций параболического цилиндра в указанных равенствах берется $b\sqrt{2aK} = b\alpha$

Ряд (59) можно получить также, отыскивая решение $w_2(x, t)$ или $v(x, t)$ уравнения Фоккера—Планка (9) или (20) с нулевым граничным условием в форме разложения (10.29) при последующем интегрировании по $x$ от $b$ до $\infty$. Корни $\lambda_m$ есть собственные значения уравнения (10.30), а $D_{a\lambda_m}$ пропорциональны $X_m(x)$.

Такое решение с использованием собственных функций и собственных значений уравнения (10.30) может быть получено и при других видах функции $f(x)$ Так, при релеевских флюктуациях в качестве $X_m$ выступают вырожденные гипергеометрические функции.

## 3. Ненормированная плотность распределения выбросов по длительности

Анализируя полученные формулы, определяющие число выбросов с длительностью, большей фиксированной величины $\tau$, легко видеть, что полное число выбросов, получаемое путем приравнивания $\tau$ нулю, равно бесконечности Можно показать, что при достаточно малых $\tau$ независимо от конкретного вида процесса справедлива формула

$$n(\tau) = w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi\tau}}. \tag{11.61}$$

Это выражение является точным при $f(x) = 0$ В других случаях, когда оно справедливо приближенно, указанное выражение соответствует таким малым временным интервалам $\tau$, при которых регулярная скорость смещения еще мало сказывается

Бесконечное значение $n(0)$ не позволяет воспользоваться формулой (1), определяющей нормированную плотность распределения $w(x)$ Однако, хотя $n(0)$ и $w(x)$ нельзя брать в отдельности, их произведение имеет вполне определенный смысл Это произведение можно назвать ненормированной плотностью распределения Выражение для нее получаем путем дифференцирования равенства (1)

$$n(0)\,w(\tau) = -\frac{dn(\tau)}{d\tau}. \tag{11.62}$$

В различных частных случаях согласно (34), (42) и (53) мы имеем следующие выражения для ненормированной плотности распределения выбросов по длительности:

$$n(0)\,w(\tau) = \frac{1}{2}\,w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\tau^{-\frac{3}{2}} \tag{11.63}$$

при отсутствии регулярной скорости смещения $f(x) = 0$

$$n(0)\,w(\tau) = \frac{1}{2}\,w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\tau^{-\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{f_0^2\tau}{2K}} \tag{11.64}$$

при постоянной возвращающей силе и

$$n(0)\,w(\tau) = \frac{\xi^2}{\pi} e^{-\beta\tau} (1 - e^{-2\beta\tau})^{-\frac{3}{2}} \qquad (11.65)$$

при линейной силе $f(x) = -\beta x$ и нулевом уровне $b = 0$.

Ввиду отсутствия нормированной плотности распределения, распределение по длительности не имеет обычной характеристической функции

$$\Theta(u) = \langle e^{iu\tau} \rangle, \qquad (11.66)$$

удовлетворяющей условию $\Theta(0) = 1$. Вместо нее можно рассматривать комбинацию $n(0)[\Theta(u) - 1]$, сохраняющую и в данном случае полный смысл. В самом деле, умножая (62) на $e^{iu\tau} - 1$ и интегрируя от 0 до $\infty$ по частям, получаем

$$n(0)[\Theta(u) - 1] = iu \int_0^\infty e^{iu\tau} n(\tau)\, d\tau = -\bar{n}(-iu). \qquad (11.67)$$

В правой части здесь стоит изображение Карсона—Лапласа (28). Как видно из приведенного выше изложения, комбинацию $n(0)[\Theta - 1]$, которая служит обобщением характеристической функции, получить в некоторых случаях даже проще, чем выражение для плотности распределения. К таким случаям относится случай линейной возвращающей силы, когда справедливо равенство (47).

Вследствие бесконечного числа выбросов в данном случае нельзя говорить о средних величинах, например о средней длительности одного выброса $\langle\tau\rangle$. Однако можно подсчитать среднюю длительность выбросов, рассчитанную на единицу времени. Величины $n(0)$ и $\langle\tau\rangle$ порознь не имеют смысла, однако их произведение есть вполне определенная величина

$$n(0)\langle\tau\rangle = \int n(0)\, w(\tau)\, \tau d\tau = \frac{T_{\text{выб}}}{T_{\text{пол}}}. \qquad (11.68)$$

Она описывает ту долю времени, в течение которого имеется выброс (отношение суммарной длительности выбросов к полному времени). При помощи (62) и (28) выражение (68) можно записать

$$n(0)\langle\tau\rangle = \int_0^\infty n(\tau)\, d\tau = \left[\frac{\bar{n}(p)}{p}\right]_{p\,0}. \qquad (11.69)$$

Согласно (67) последнее соотношение есть не что иное, как равенство

$$n(0)\langle\tau\rangle = n(0)\left[\frac{\Theta(u) - 1}{iu}\right]_{u=0}, \qquad (11.70)$$

совершенно естественное для обычных нормированных плотностей распределения. При помощи (67) можно вычислять также более высокие моменты для длительности выбросов. При этом можно поль-

зоваться обычными формулами, выражающими моменты через характеристическую функцию, но следить за тем, чтобы моменты во всех формулах были в сочетании с сомножителем $n(0)$, а характеристическая функция выступала бы в комбинации $n(0)[\Theta(u) - 1]$. Так для $k$-го момента будем иметь формулу

$$n(0)\langle\tau^k\rangle = \frac{1}{i^k}\left\{\frac{d^k}{du^k} n(0)[\Theta(u) - 1]\right\}_{u=0}. \qquad (11.71)$$

Подсчитаем, наконец, долю времени, приходящегося на выбросы с длительностью меньше $\tau_1$. По определению она равна

$$\frac{T_{\text{выб}}(\tau < \tau_1)}{T_{\text{пол}}} = \int_0^{\tau_1} n(0)\, w(\tau)\, \tau d\tau.$$

Подставляя сюда (62) и интегрируя по частям, находим

$$\frac{T_{\text{выб}}(\tau < \tau_1)}{T_{\text{пол}}} = \int_0^{\tau_1} n(\tau)\, d\tau - \tau_1 n(\tau_1). \qquad (11.72)$$

В частности, когда $\tau_1$ значительно меньше прочих постоянных времени системы, согласно (61) имеем

$$\frac{T_{\text{выб}}(\tau < \tau_1)}{T_{\text{пол}}} = w_0(b)\sqrt{\frac{K\tau_1}{2\pi}}. \qquad (11.73)$$

Таким образом, доля времени, приходящегося на короткие выбросы, мала несмотря на бесконечное число таких выбросов Аналогичное соотношение справедливо и для интервалов между выбросами

## 4. Связь распределения выбросов по длительности с корреляционной функцией ограниченного процесса

Статистические свойства выбросов тесно связаны со свойствами случайного процесса $\eta(t)$, который равен 1, когда выброс есть $(x(t) > b)$, и нулю, когда его нет $(x(t) < b)$. Этот процесс, представляющий собой последовательность импульсов, длительность которых совпадает с длительностью выбросов, может быть получен в результате безынерционного нелинейного преобразования исходного процесса

$$\eta(t) = \vartheta(x(t) - b)$$

$$(\vartheta(z) = 1 \text{ при } z > 0,\ \vartheta(z) = 0 \text{ при } z < 0). \qquad (11.74)$$

Мы будем его называть ограниченным процессом.

Когда $x(t)$ есть процесс Маркова, то, как можно заключить из определения такого процесса, длительность выброса или интервала статистически не зависит от длительности соседних выбросов или интервалов. Поэтому длительности импульсов и интервалов в ограниченном процессе — независимые случайные величины. Такой импульсный процесс был рассмотрен в разд. 5, § 6, где была найдена его спектральная плотность. Применяя формулу (6.130) или (6.131), можно установить связь между корреляционной функцией $k_\eta(\tau)$ ограниченного процесса и распределением по длительности выбросов и интервалов, которое описывается функциями $\Theta_1$, $\Theta_2$ или $n_1$, $n_2$. Учитывая тождество

$$\frac{(1-\Theta_1)(1-\Theta_2)}{1-\Theta_1\Theta_2} = \left[\frac{1}{1-\Theta_1} + \frac{1}{1-\Theta_2} - 1\right]^{-1}$$

и принимая во внимание, что $\langle p+q\rangle^{-1}$ совпадает со средним полным числом выбросов (или интервалов)

$$n(0) = \frac{1}{\langle p+q\rangle}, \tag{11.75}$$

записываем (6.130) в форме

$$\mathrm{L}\left[-\frac{dk_\eta}{d\tau}, p\right] = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{n(0)[1-\Theta_1(ip)]} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n(0)[1-\Theta_2(ip)]} - \frac{1}{n(0)}\right]^{-1}. \tag{11.76}$$

Если использовать (67) и учесть, что для точного процесса Маркова $n(0)=\infty$, то из (76) будем иметь,

$$p\mathrm{L}\left[-\frac{dk_\eta}{d\tau}, p\right] = \left[\frac{1}{\bar{n}_1(p)} + \frac{1}{\bar{n}_2(p)}\right]^{-1}. \tag{11.77}$$

Вопрос о корректности использования формулы (6.130) для бесконечного значения $n(0)$ затрагивается в разд. 5.

Найденную связь между функциями $k_\eta$, $n_1$, $n_2$ можно использовать, чтобы определить одну из этих функций, если известны две другие.

В том частном случае, когда уровень $b$ располагается симметрично и $n_1(\tau)=n_2(\tau)=n(\tau)$, формула (77) дает

$$p\mathrm{L}\left[-\frac{dk_\eta}{d\tau}, p\right] = \frac{1}{2}\bar{n}(p),$$

откуда

$$-2\frac{dk\ (\tau)}{d\tau}=n(\tau). \tag{11 78}$$

Корреляционную функцию $k_\eta(\tau)$, входящую в полученные формулы, обычно можно считать известной. В самом деле, можно воспользоваться, в частности, формулой (4 65) и получить

$$k_\eta(\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}h_m{}^2e^{-\lambda_m|\tau|},\quad \left(h_m=\int_b^\infty X_m(x)\,dx\right),$$
$$L\left[-\frac{dk_\eta}{d\tau},\ p\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m h_m{}^2}{p+\lambda_m}. \tag{11.79}$$

В том случае, когда исходный процесс является гауссовым, целесообразно пользоваться другой формулой. Подставляя разложение (3.14) в очевидное равенство

$$k_\eta(\tau)=\int_b^\infty\int_b^\infty[w(x,\ x_\tau)-w(x)\,w(x_\tau)]\,dx\,dx_\tau$$

и производя интегрирование, имеем

$$k_\eta(\tau)=\sum_{v=1}^{\infty}\left[\Phi^{(p)}\left(\frac{b}{\sigma}\right)\right]^2\frac{R^p}{p!}. \tag{11.80}$$

Следовательно,

$$\frac{dk_\eta}{d\tau}=\dot R\sum_{p=1}^{\infty}\left[\Phi^{(p)}\left(\frac{b}{\sigma}\right)\right]^2\frac{R^{p-1}}{(p-1)!},\quad \left(\dot R=\frac{dR}{d\tau}\right).$$

Пользуясь вторично формулой (3.14), находим отсюда

$$\frac{dk_\eta}{d\tau}=\dot R\sigma^2w(b,\ b), \tag{11.81}$$

или

$$\frac{dk_\eta}{d\tau}=\frac{1}{2\pi}\frac{\dot R}{\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{b^2}{\sigma^2(1+R)}}. \tag{11.82}$$

(В случае процесса Маркова нужно полагать $R=e^{-\beta\tau}$, однако формула (82) справедлива не только для марковского процесса.)

Пример 1. При $b = 0$, используя (78), (82) и подставляя $R = e^{-\beta\tau}$, получаем

$$n(\tau) = -\frac{1}{\pi}\frac{\dot{R}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{\beta}{\pi}(e^{2\beta\tau}-1)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (11.83)$$

что совпадает с (53).

Пример 2. Пусть $b \gg \sigma$. В области малых значений $\tau$, где $1-R \sim \frac{\sigma^2}{b^2}$, выражения $1-R^2$ и $-\frac{1-R}{1+R}$ можно заменить на $2(1-R)$ и $-\frac{1-R}{2}$ — соответственно. При этом формула (82), которую можно записать в виде

$$\frac{dk_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma w_0(b)\frac{\dot{R}}{\sqrt{1-R^2}}e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\frac{1-R}{1+R}}, \qquad (11.84)$$

перейдет в равенство

$$\frac{dk_\tau}{d\tau} = \frac{\sigma w_0(b)}{2\sqrt{\pi}}\frac{\dot{R}}{\sqrt{1-R}}e^{-\frac{b^2}{4\sigma^2}(1-R)}. \qquad (11.85)$$

Последнему соответствует соотношение

$$k_\eta(\tau) = \frac{\sigma^2}{b}w_0(b)\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sigma}\sqrt{1-R}\right). \qquad (11.86)$$

В частности для процесса Маркова в указанной области можно полагать $1-R = 1-e^{-\beta\tau} = \beta\tau$, поэтому из (85) имеем

$$\frac{dk_\tau}{d\tau} = -\frac{1}{2}\sigma w_0(b)\sqrt{\frac{\beta}{\pi\tau}}e^{-\frac{b^2\beta\tau}{4\sigma^2}}. \qquad (11.87)$$

Применяя формулу (2.31) из [III], находим выражение

$$pL\left[-\frac{dk_\eta}{d\tau},\ p\right] = w_0(b)\frac{\sigma^2\beta p}{\sqrt{4\sigma^2\beta p + b^2\beta^2}} = \frac{1}{2}w_0(b)\frac{pK}{\sqrt{f_0^2+2pK}}, \qquad (11.88)$$

которое вместе с выражением (41), определяющим $\overline{n_1}(p)$ при $f_0 = \beta b$, и аналогичным выражением, определяющим $\overline{n_2}(p)$ при $f_0 = -\beta b$, действительно, удовлетворяет равенству (77).

## 5. Выбросы сглаженного процесса

Ввиду того, что точные процессы Маркова не реализуются на практике, представляет интерес, как полученные ранее результаты относятся к выбросам сглаженного процесса. Пусть сглаживание производится по формуле

$$y(t)=\int G(t-t')\,x(t')\,dt', \tag{11.89}$$

причем функция веса $G(\tau)$ удовлетворяет требованиям

$$\int G(\tau)\,d\tau=1, \tag{11.90}$$

$$G(\tau)\geqslant 0, \tag{11.91}$$

$$G(\tau)=0 \quad \text{при} \quad |\tau|>\tau_{гл}, \tag{11.92}$$

$$(\tau_{гл}\sim \int G(\tau)\,|\tau|\,d\tau).$$

Примером такой весовой функции может служить функция

$$G(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2\tau_{гл}} & \text{при } |\tau|\leqslant\tau_{гл},\\ 0 & \text{при } |\tau|>\tau_{гл}.\end{cases}$$

При экспоненциальной функции

$$G(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{\tau_{гл}}\,e^{-\frac{\tau}{\tau_{гл}}} & \text{при } \tau>0,\\ 0 & \text{при } \tau<0\end{cases}$$

условие (92) можно считать практически выполняющимся, начиная, скажем, с $3\tau'_{гл}$ ($G(\tau)\approx 0$ при $\tau>\tau_{гл}=3\tau'_{гл}$).

Нетрудно показать, что описанная операция сглаживания не может уничтожить выброс или интервал, если их длительность превышает $2\tau_{гл}$. Такие выбросы или интервалы мы будем называть «длинными». В самом деле, в силу (89), (90), (92) имеем

$$y(t)-b=\int G(t-t')\,[x(t')-b]\,dt'=$$

$$=\int_{t-\tau_{гл}}^{t+\tau_{гл}} G(t-t')\,[x(t')-b]\,dt'.$$

Но последний интеграл больше нуля вследствие (91), если $x(t')-b>0$ на отрезке $t-\tau_{гл}<t'<t+\tau_{гл}$. Поэтому сглаженный процесс $y(t)$ заведомо дает выброс в середине «длинного» выброса несглаженного процесса. То же самое относится и к интервалам.

Операция сглаживания может повлиять на «длинные» выбросы и интервалы ($\tau>2\tau_{гл}$) лишь следующим образом:

1) Она может изменить длительность выброса (или интервала) на величину, не превышающую $2\tau_{гл}$. Если длительность $\tau$ много больше $2\tau_{гл}$, то этот эффект несуществен.

2) Она может составить «длинный» выброс (интервал) из «коротких» выбросов и интервалов. Однако доля суммарного времени, приходящегося на «короткие» выбросы и интервалы, согласно (73) при малом $\tau_{гл}$ равна

$$\frac{1}{T_{пол}}\left[T_{выб}(\tau<2\tau_{гл})+T_{инт}(\tau<2\tau_{гл})\right]=$$

$$=2w_0(b)\sqrt{\frac{K}{\pi}}\tau_{гл}.$$

Когда $\tau_{гл}$ достаточно мало, эта доля мала и поэтому статистика длинных выбросов и интервалов мало изменится, даже если все время, приходящееся на короткие выбросы и интервалы, отойдет к длинным выбросам или интервалам.

3) Сглаживание может, наконец, объединить соседние «длинные» выбросы (интервалы), не разделенные «длинными» интервалами (выбросами), в один. Этот эффект можно исследовать, пренебрегая первыми двумя эффектами и исключая из рассмотрения «короткие» выбросы и интервалы. В результате получаем следующее выражение:

$$\tilde{n}_1(p)=\frac{n_1(2\tau_{гл})\,\bar{n}_1(p)}{n_1(2\tau_{гл})+\bar{n}_1(p)} \qquad (11.93)$$

для функции $\tilde{n}_1(\tau)$, характеризующей выбросы сглаженного процесса. Здесь $n_1(\tau)$ — соответствующая функция для несглаженного процесса. Аналогичное выражение имеет место и для интервалов. Из (93) следует, что для $\tau_{гл}\ll\tau$ отличием $\bar{n}_1(\tau)$ от $n_1(\tau)$ можно пренебречь.

Таким образом, сглаживание с постоянной времени $\tau_{гл}$ практически не влияет на распределение выбросов

с длительностью $\tau \gg \tau_{гл}$. Для таких выбросов (и интервалов) можно пользоваться полученными ранее результатами. Полное число выбросов сглаженного процесса является конечным и по порядку величины равным $n_1(2\tau_{гл})$.

Применив формулу (6.130) к импульсному процессу $\tilde{\eta}(t)$ с исключенными «короткими» импульсами и интервалами, мы будем иметь

$$pL\left[-\frac{dk_{\tilde{\eta}}}{d\tau},\ p\right]=\left[\frac{1}{\bar{n}_1(p)}+\frac{1}{\bar{n}_2(p)}-\frac{1}{n_1(2\tau_{гл})}\right]^{-1}. \quad (11.94)$$

Если теперь совершать предельный переход $\tau_{гл} \to 0$, то $\tilde{\eta}(t)$ перейдет в точный процесс $\eta(t)$, а (94) превратится в (77). Таким образом, формальное применение формулы (6.130) к процессу с бесконечным числом импульсов является оправданным.

Чтобы найти поведение функции $\tilde{n}_1(\tau)$ не только при $\tau \gg \tau_{гл}$, но и при $\tau \sim \tau_{гл}$, требуется учесть конкретный вид функции $G(\tau)$. Не рассматривая этой проблемы, ограничимся утверждением, что если $\tau_{гл}$ много меньше других постоянных времени системы, то асимптотическая формула (61) после сглаживания заменится на формулу

$$\tilde{n}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}w_0(b)\sqrt{\frac{K}{\pi\tau_{гл}}}f\left(\frac{\tau}{2\tau_{гл}}\right), \quad (11.95)$$

где $f(z)$ — монотонная функция, одна и та же для всех диффузионных марковских процессов, зависящая лишь от вида $G(\tau)$. Она обладает свойствами

$$f(0)\sim 1,\quad f(x)\approx\frac{1}{\sqrt{x}}\ \text{при}\ x\gg 1. \quad (11.96)$$

## § 12. ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЛАВНО МЕНЯЮЩИХСЯ ФЛЮКТУАЦИЙ НА РЕЛЕ С ВЫСОКИМ УРОВНЕМ СРАБАТЫВАНИЯ

Случай плавно меняющихся флюктуаций, который будет рассмотрен в настоящем параграфе, противоположен исследованному ранее случаю марковского про-

цесса. Всякий реальный случайный процесс можно характеризовать постоянной времени $\tau_{гл}$, указывающей длительность тех временных интервалов $\Delta t \leqslant \tau_{гл}$, на которых процесс плавно меняется. Как следует из вышеизложенного, реальный процесс можно заменить на процесс Маркова, когда время $\tau_{гл}$ значительно меньше других постоянных времени, например $\tau_{кор}$, характеризующих случайный процесс. В некоторых случаях, однако, время $\tau_{гл}$ имеет тот же порядок, что и $\tau_{кор}$. Это имеет место, когда спектральная плотность флюктуаций быстро исчезает с увеличением частоты, например при

$$S[x, \omega] = \frac{4\sigma^2}{\beta} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{\beta^2}},$$

или

$$S[x, \omega] = \frac{2\pi\sigma^2}{\beta} \begin{cases} 1 & \text{при } \omega < \beta, \\ 0 & \text{при } \omega > \beta. \end{cases}$$

Между тем такими функциями довольно часто аппроксимируют спектральную плотность в радиотехнике. Поэтому случай плавных флюктуаций представляет большой практический интерес.

Теоретическое исследование выбросов плавных флюктуаций связано со значительными трудностями ввиду того, что в этом случае имеют место корреляции всевозможных порядков. Для упрощения задачи здесь будет использовано предположение, что пороговый уровень является высоким. Как отмечалось на стр. 279, обычно счетные устройства работают в таком режиме, что уровень срабатывания значительно превосходит средний флюктуационный разброс $b - \langle x \rangle \gg \sigma(x)$, так что флюктуационные помехи не вносят чрезмерно больших искажений в работу прибора. Это оправдывает указанное предположение.

### 1. Распределение выбросов гладких флюктуаций по длительности

Общее среднее число выбросов гладкого флюктуационного процесса было найдено ранее в разд. 1, § 10. Поэтому для определения числа выбросов заданной длительности остается, в сущности, вычислить плотность распределения по длительности.

Для плавно меняющегося флюктуационного процесса можно записать разложение Тейлора

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \\ + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots \qquad (12.1)$$

Этот ряд очень быстро сходится при $t - t_0 \ll \tau_{гл}$ (приблизительно как ряд по степеням отношения $\frac{(t - t_0)}{\tau_{гл}}$). Здесь $\tau_{гл}$ — постоянная времени, характеризующая быстроту флюктуационных колебаний рассматриваемого процесса $x(t)$.

Выберем в качестве $t_0$ момент начала выброса

$$x(t_0) = b.$$

При достаточно малом времени, прошедшем с этого момента в разложении (1), можно ограничиться только тремя членами

$$x(t) = b + \dot{x} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x} \cdot (t - t_0)^2 \qquad (12.2)$$

$$(\dot{x} = \dot{x}(t_0),\ \ddot{x} = \ddot{x}(t_0)).$$

Кривая $x(t)$, которая для малых интервалов $t - t_0$ ведет себя как парабола (2), может пересечь уровень $x = b$ и тем самым закончить выброс прежде, чем накопится отклонение этой кривой от параболы. Конечно, при низких уровнях срабатывания такие параболические выбросы будут составлять лишь небольшую долю всех выбросов. Однако при повышении уровня срабатывания средняя длительность выбросов уменьшается. При достаточно высоком уровне длительность выбросов, как правило, станет меньше $\tau_{гл}$, и подавляющее число выбросов будет иметь параболическую форму, описываемую выражением (2).

Если через $\tau$ обозначить длительность выброса, то

$$x(t_0 + \tau) = b$$

или в силу (2)

$$\dot{x}\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}\tau^2 = 0. \qquad (12.3)$$

Отсюда получаем, что в рассматриваемом приближении длительность выброса $\tau$ очень просто связана с первыми двумя производными от флюктуационного процесса в момент начала выброса

$$\tau = -2\frac{\dot{x}}{\ddot{x}}. \qquad (12.4)$$

Поскольку начальная производная $\dot{x}$ положительна, последнее равенство применимо лишь при отрицательных значениях второй производной $\ddot{x}<0$. Только в этом случае можно не принимать во внимание членов более высокого порядка разложения (1), которые мы отбросили. Можно показать, что вторая производная $\ddot{x}$ с подавляющей вероятностью имеет отрицательные значения при выполнении условия $b-\langle x\rangle \gg \sigma(x)$.

Пусть $w_{\text{н}}(\dot{x}, \ddot{x})$ есть совместная плотность распределения для первой и второй производной в момент начала выброса на уровне $b$. Указанная плотность распределения легко выражается через трехмерную плотность распределения $w(x, \dot{x}, \ddot{x})$ для координаты и двух ее производных, взятых в один и тот же момент времени. Соответствующее равенство имеет вид

$$\frac{w_{\text{н}}(\dot{x}, \ddot{x}) = \dot{x}w(b, \dot{x}, \ddot{x})}{\int_0^\infty w(b, \dot{x}, \ddot{x})\dot{x}d\dot{x}} \quad \text{при} \quad \dot{x} > 0;$$

$$w_{\text{н}}(\dot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \dot{x}<0, \qquad (12.5)$$

что вполне аналогично соотношению (10.4). Чтобы убедиться в его справедливости нужно повторить почти без изменения те рассуждения § 10 (разд. 1), которые привели к формуле (10.4).

Зная совместный закон распределения (5) первых двух производных, нетрудно найти плотность распределения для $\tau$. Используя (4), перейдем от переменных $\dot{x}$, $\ddot{x}$ к переменным $x$, $\tau$:

$$w_{\text{н}}(\dot{x}, \ddot{x})\,d\dot{x}d\ddot{x} = w_{\text{н}}\left(\dot{x}, -2\frac{\dot{x}}{\tau}\right)2\frac{\dot{x}}{\tau^2}\,d\dot{x}d\tau.$$

После интегрирования по $\dot{x}$ отсюда будем иметь

$$w(\tau) = 2\int_0^\infty w_н\left(\dot{x},\ -2\frac{\dot{x}}{\tau}\right)\frac{\dot{x}}{\tau^2}\,d\dot{x} =$$

$$= 2\int_0^\infty w_н(\tau z,\ -2z)\,z\,dz \qquad (12.6)$$

$$(\tau > 0).$$

Согласно приведенному выводу последней формулы, она справедлива при малых положительных значениях τ, при которых отброшенные члены ряда (1) не играют существенной роли. Если уровень срабатывания достаточно высок, формула (6) справедлива для всех часто встречающихся длительностей выбросов. Исключение составляют такие большие длительности, появление которых маловероятно.

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (6), рассмотрим гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle x x_\tau \rangle = \sigma^2 R(\tau). \qquad (12.7)$$

Вследствие предположения о плавности изменения процесса $x(t)$ коэффициент корреляции разлагается в ряд

$$R(\tau) = 1 - \frac{1}{2}R_2\tau^2 + \frac{1}{4!}R_4\tau^4 - \ldots, \qquad (12.8)$$

$$R_{2k} = (-1)^k \frac{d^{2k}R}{d\tau^{2k}}(0), \qquad (12.9)$$

который быстро сходится при тех значениях τ, которые допускают обрывание ряда (1).

Найдем для него трехмерную плотность распределения $w(x, \dot{x}, \ddot{x})$, входящую в формулу (5). Средние значения типа $\langle \dot{x}\ddot{x} \rangle$, $\langle \ddot{x}\ddot{x} \rangle$, ... легко получить путем дифференцирования корреляционной функции (7) при после-

дующем приравнивании $\tau$ нулю. Таким образом получаем корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x\dot{x} \rangle & \langle x\ddot{x} \rangle \\ \langle \dot{x}x \rangle & \langle \dot{x}^2 \rangle & \langle \dot{x}\ddot{x} \rangle \\ \langle \ddot{x}x \rangle & \langle \ddot{x}\dot{x} \rangle & \langle \ddot{x}^2 \rangle \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_2 & 0 \\ -R_2 & 0 & R_4 \end{pmatrix}. \quad (12.10)$$

Мы видим, что первая производная $\dot{x}$ не коррелирована ни с $x$, ни с $\ddot{x}$ и, следовательно, она независима от них. Поэтому трехмерная плотность распределения распадается на произведение

$$w(x, \dot{x}, \ddot{x}) = w(\dot{x})\, w(x, \ddot{x}). \quad (12.11)$$

Входящие сюда одномерную и двумерную плотности распределения $w(\dot{x})$ и $w(x, \ddot{x})$ записываем по обычным правилам в соответствии с формулами типа (3.3), (3.5) § 3, поскольку корреляционная матрица (11) для рассматриваемых случайных величин известна:

$$w(\dot{x}) = (2\pi\sigma^2 R_2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2 R_2}\right], \quad (12.12)$$

$$w(x, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{R_4 - R_2^2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{R_4 x^2 + 2R_2 x\ddot{x} + \ddot{x}^2}{2\sigma^2 (R_4 - R_2^2)}\right]. \quad (12.13)$$

Плотность распределения (5) начальных производных $\dot{x}$ и $\ddot{x}$, в свою очередь, распадается на произведение

$$w_{\text{н}}(\dot{x}, \ddot{x}) = w_{\text{н}}(\dot{x})\, w(\ddot{x} \mid b), \quad (12.14)$$

где $w_{\text{н}}(\dot{x})$ — плотность распределения для первой производной в момент начала выброса, которая уже была определена ранее формулами (10.4), (10.8):

$$w_{\text{н}}(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{\sigma^2 R_2} e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2 R_2}}. \quad (12.15)$$

Вторая функция $w(\ddot{x}|b)$ есть условная плотность распределения для второй производной на данном уровне $b$. Применяя к рассматриваемому случаю формулы раздела 3, § 3 для условного распределения гауссовых случайных величин, имеем

$$w(\ddot{x}|b) = [2\pi\sigma^2(R_4 - R_2^2)]^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{(\ddot{x} + R_2 b)^2}{R_4 - R_2^2}\right]. \qquad (12.16)$$

Интегрируя формулу (6) по $\tau$ и используя (15), получим функцию распределения выбросов по длительности в форме

$$F(\tau) = \int_0^\tau w(\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\int_0^\infty \left[1 - e^{-\frac{\tau^2 z^2}{2\sigma^2 R_2}}\right] w(-2z|b)\, dz. \qquad (12.17)$$

Если подставить сюда (16) и воспользоваться формулой

$$\int_0^\infty e^{-p^2z^2 + 2qz}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{\frac{q^2}{p^2}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{q}{p}\right), \qquad (12.18)$$

положив в ней

$$q = \frac{R_2 b}{\sigma^2(R_4 - R_2^2)}, \qquad (12.19)$$

$$p^2 = \frac{2}{\sigma^2(R_4 - R_2^2)} \quad \text{и} \quad p^2 = \frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{4}{R_4 - R_2^2} + \frac{\tau^2}{R_2}\right], \qquad (12.20)$$

то будем иметь

$$2F(\tau) = \operatorname{erfc}\left(-\frac{b}{\sigma\sqrt{2\gamma}}\right) - \left(1 + \frac{\gamma}{4}R_2\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times \qquad (12.21)$$

$$\times \exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\frac{R_2\tau^2}{4 + \gamma R_2\tau^2}\right\} \operatorname{erfc}\left\{-\frac{b}{\sigma\sqrt{2\gamma}}\left(1 + \frac{\gamma}{4}R_2\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Здесь

$$\gamma = \frac{R_4 - R_2^2}{R_2^2}.$$

Полученная формула (21) справедлива при достаточно малых значениях $\tau$, при которых можно ограничиться членами (2) разложения (1). Быстрота сходимости ряда (1) связана с быстротой сходимости разложения (8). Поэтому условие применимости выбранной аппроксимации (2) можно записать в форме

$$R_2\tau^2 \ll 1; \quad \gamma R_2\tau^2 \ll 1. \tag{12.22}$$

Последние неравенства могут быть использованы для вывода из (21) упрощенных выражений, имеющих различную степень точности. Так, если ограничиться в выражении $(1 + \gamma R_2\tau^2/4)^{-1}$ лишь первым зависящим от $\tau$ членом, т. е. положить в (21)

$$4\,(4 + \gamma R_2\tau^2)^{-1} \approx 1 - \frac{1}{4}\,\gamma R_2\tau^2,$$

$$2\,(4 + \gamma R_2\tau^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{8}\,\gamma R_2\tau^2, \tag{12.23}$$

то будем иметь

$$2F(\tau) = \operatorname{erfc}\left(-\frac{b}{\sigma\sqrt{2\gamma}}\right) - \left(1 - \frac{1}{8}\,\gamma R_2\tau^2\right) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{l^2}{8\sigma^2}\,R_2\tau^2\right] \times$$

$$\times \operatorname{erfc}\left[-\frac{b}{\sigma\sqrt{2\gamma}}\left(1 - \frac{1}{8}\,\gamma R_2\tau^2\right)\right]. \tag{12.24}$$

При низких уровнях срабатывания ширина области применимости полученных результатов составляет лишь малую долю от средней длительности выброса $\langle\tau\rangle$. С их помощью можно подсчитать лишь число редко встречающихся кратковременных выбросов. С повышением же уровня длительность выбросов уменьшается и попадает в область действия указанных формул. Они теперь дают возможность вычислить частоту появления почти всех встречающихся выбросов, за исключением очень редких длинных выбросов. Другими словами, они теперь определяют форму почти всей плотности распределения $\omega(\tau)$, кроме несущественного «хвоста», где она принимает малые значения.

Предполагая, что выполняется условие высокого уровня срабатывания

$$b^2 \gg \sigma^2, \tag{12.25}$$

из формулы (24) получаем для длительности выбросов релеевский закон распределения

$$F(\tau) = 1 - \exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma^2} R_2 \tau^2\right],$$

$$w(\tau) = \frac{b^2 R_2}{2\sigma^2} \tau \exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma^2} R_2 \tau^2\right]. \tag{12.26}$$

Если принять во внимание найденную в § 10 общую среднюю частоту появления выбросов (10.9), то числе выбросов, имеющих длительность больше $\tau_m$, будет определяться выражением

$$n(\tau_m) = n_0 [1 - F(\tau_m)] =$$

$$= \frac{\sqrt{R_2}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\left(1 + \frac{R_2 \tau_m^2}{4}\right)\right\}. \tag{12.27}$$

Формулу (26) можно получить также более простым способом. Из выражения (16) можно видеть, что условное среднеквадратичное отклонение

$$\sigma(\ddot{x}) = \left[\int (\ddot{x} + R_2 b)^2 w(\ddot{x} \mid b)\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sigma \sqrt{R_4 - R_2^2}. \tag{12.28}$$

значительно меньше, чем условное среднее значение $-R_2 b$, вследствие условия (25). Поэтому можно считать производную в момент начала выброса неслучайной и равной $-R_2 b$. При этом длительность выброса (4) будет определяться исключительно величиной первой производной

$$\tau = \frac{2}{R_2 b} \dot{x}, \tag{12.29}$$

которая распределена по закону (15). Простая замена переменной (29) в формуле (15)

$$w(\tau)\, d\tau = w_н\left(\frac{b}{2} R_2 \tau\right) \frac{b}{2} R_2 d\tau \tag{12.30}$$

приводит к формуле (26).

Полученный релеевский закон распределения выбросов по длительности дает наиболее вероятное значение длительности, равное $2\sigma/b\sqrt{R_2}$, а также среднее значение

$$\langle\tau\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma_\sigma}{b\sqrt{R_2}}. \qquad (12.31)$$

Изложенный метод получения распределения выбросов по длительности применим не только в случае гауссовых флюктуаций, но также и в других случаях, когда может быть вычислена трехмерная плотность распределения для $x$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

## 2. Другие методы исследования выбросов плавных флюктуаций

а) Для расчета распределения выбросов по длительности, иногда вычисляют сначала корреляционную функцию ограниченного процесса (11.74), рассмотренного в разд. 4 § 11. В случае плавно меняющихся флюктуаций длительности выбросов и интервалов являются коррелированными случайными величинами; поэтому формула типа (6.130) при низких и средних уровнях срабатывания $b \sim \sigma(x)$ уже не является справедливой. Ее применение может дать лишь ориентировочные результаты. Однако при высоких уровнях $b \gg \sigma(x)$, когда средняя длительность интервалов между выбросами значительно превосходит $\tau_{гл}$ или $\tau_{к.р}$, указанные корреляции пропадают, и формулой (6.130) или (11.76) можно пользоваться.

В пренебрежении корреляциями при больших интервалах, в среднем значительно превосходящих $\tau_{кор}$, моменты начала выбросов распределены приблизительно по закону Пуассона. Поэтому интервалы имеют плотность распределения

$$w_2(\tau) = n_0 e^{-n_0\tau}. \qquad (12.32)$$

Следовательно,

$$\Theta_2(ip) = \frac{n_0}{p + n_0}.$$

Подставляя это равенство в формулу (11.76), получаем

$$pL\left[-\frac{dk_\tau}{d\tau}, p\right] = n_0\left[\frac{1}{1-\Theta(ip)} + \frac{n_0}{p}\right]^{-1}. \qquad (12.33)$$

Вследствие неравенства

$$\langle\tau\rangle \ll \frac{1}{\dot{n}_0}, \tag{12.34}$$

означающего, что средняя длительность выброса много меньше среднего интервала, член $\frac{n_0}{p}$ в (33) при $p \sim \frac{1}{\langle\tau\rangle}$ много меньше члена

$$\frac{1}{1-\Theta_1(ip)} = \frac{1}{\langle\tau\rangle p + \ldots}$$

и им можно пренебречь. После этого (33) примет вид

$$pL\left[-\frac{dk_\eta}{d\tau}, p\right] = n_0\left[1-\Theta_1(ip)\right] = \bar{n}(p)$$

или

$$-\frac{dk_\eta(\tau)}{d\tau} = n(\tau) = n_0\int_\tau^\infty w(\tau)\,d\tau. \tag{12.35}$$

Полученное соотношение отличается от формулы (11.78) лишь отсутствием коэффициента 2. Ему можно придать вид

$$w(\tau) = \frac{1}{n_0}\frac{d^2k_\eta(\tau)}{d\tau^2}. \tag{12.36}$$

Рассмотрим для примера гауссов случайный процесс. Согласно (35), (11.84), имеем

$$n(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma w_0(b)\frac{\dot{R}}{\sqrt{1-R^2}}\,e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\frac{1-R}{1+R}} \tag{12.37}$$

и, следовательно,

$$w(\tau) = \frac{1}{\sqrt{R_2}}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\dot{R}}{\sqrt{1-R^2}}\,e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\frac{1-R}{1+R}}\right]. \tag{12.38}$$

Когда $b \gg \sigma$, $1-R \ll 1$, коэффициент корреляции $R(\tau)$ можно заменить на $1-\frac{R_2\tau^2}{2}$. При этом формулы (37), (38) переходят в (26), (27).

б) Общее решение задачи вычисления распределения выбросов по длительности может быть получено при помощи теории коррелированных случайных точек, изложенной в разд. 1, 4, § 6. Однако поскольку результирующее выражение имеет форму ряда с бесконечным числом членов, фактически с его помощью могут быть получены лишь приближенные результаты. При этом с повышением точности объем необходимых расчетов быстро возрастает. В некоторых случаях, например при средних уровнях и плавных флюктуациях, указанный метод является единственно пригодным.

Пусть при $t = t_0 = 0$ начинается выброс случайной функции ($x(0) = b$, $\dot{x}(0) > 0$). В дальнейшем кривая $x(t)$ может неоднократно пересекать пороговый уровень. Точки $t_j$, в которых $x(t)$ пересекает уровень $x = b$ сверху вниз:

$$x(t_j) = b, \quad \dot{x}(t_j) < 0, \tag{12.39}$$

образуют систему одинаковых случайных точек. Она описывается функциями распределения $f_1(t)$, $f_2(t_1, t_2)$, ..., $f_s(t_1, \ldots, t_s), \ldots$. Пользуясь определением (6.1) этих функций, можно получить [см. вывод формулы (10.3)]:

$$f_s(t_1, \ldots, t_s) = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} w_{\text{усл}}(b, \dot{x}_1, \ldots, b, \dot{x}_s) \times$$

$$\times |\dot{x}_1| \ldots |\dot{x}_s| d\dot{x}_1 \ldots d\dot{x}_s, \tag{12.40}$$

где

$$w_{\text{усл}}(x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_s, \dot{x}_s) =$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} w_{s+1}(b, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_s, \dot{x}_s)\, \dot{x}_0 d\dot{x}_0}{\int_0^{\infty} w_1(b, \dot{x}_0)\, \dot{x}_0 d\dot{x}_0}; \tag{12.41}$$

$$w_{s+1}(x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_s, \dot{x}_s) \equiv$$

$$\equiv w(x(0), \dot{x}(0), \ldots, x(t_s), \dot{x}(t_s)).$$

Система точек (39), определенная при $t > 0$, является нестационарной даже при стационарной функции $x(t)$. В этом случае она относится к категории процессов установления и переходит в стационарную систему при $t \gg \tau_{\text{кор}}$. Для таких значений $t$ условная плотность распределения (41) совпадает с безусловной, и функции $f_s(t_1, \ldots, t_s)$ зависят лишь от разности времен. В частности, $f_1(t)$ переходит в постоянную

$$f_1 = n_0, \tag{12.42}$$

а $f_2(t_1, t_2)$ — в функцию

$$f_2(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} w_2(b, \dot{x}_1, b, \dot{x}_2) \times \\ \times |\dot{x}_1 - \dot{x}_2| \, d\dot{x}_1 d\dot{x}_2, \tag{12.43}$$

зависящую лишь от $t_1 - t_2$.

Длина выброса $\tau$ есть расстояние от начала координат до первой случайной точки $t_1$, ближайшей к началу координат. Если длительность выброса $\tau > \tau_m$, то это означает, что на отрезке $0 < t < \tau_m$ не выпадает ни одной случайной точки. Вероятность

$$P\{\tau > \tau_m\} = \int_{\tau_m}^{\infty} w(\tau) \, d\tau \tag{12.44}$$

этого события согласно формуле (6.13) выражается через производящий функционал:

$$P\{\tau > \tau_m\} = L_{\tau_m}[-1]. \tag{12.45}$$

Здесь, вследствие (6.4),

$$L_\tau[-1] = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \times \\ \times \int_0^\tau \ldots \int_0^\tau f_s(t_1, \ldots, t_s) \, dt_1, \ldots, dt_s. \tag{12.46}$$

Из (44) – (46), используя симметрию функции $f_s(t_1, \ldots, t_s)$, получаем

$$w(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \times \\ \times \int_0^\tau \ldots \int_0^\tau f_s(\tau, t_1, \ldots, t_{s-1}) \, dt_1, \ldots, dt_{s-1}. \tag{12.47}$$

Искомую плотность распределения $w(\tau)$ можно выразить также через функции корреляции $g_s(t_1, \ldots, t_s)$, которые связаны с функциями распределения соотношениями (6.7). В силу (6.9) из (45) имеем

$$\int_{\tau}^{\infty} w(\tau)\, d\tau = \exp\left\{ -\int_0^{\tau} f_1(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int_0^{\tau} \ldots \int_0^{\tau} g_s(t_1, \ldots, t_s)\, dt_1, \ldots, dt_s \right\}. \quad (12.48)$$

В случае плавных флюктуаций производная $\dot{x}(t)$ не может быстро изменить знак. Так как время изменения функции порядка $\tau_{кр}$ то вероятность двух близких пересечений на расстоянии $\tau \ll \tau_{кор}$ очень мала. Поэтому функции распределения $f_2(t_1, t_2)$, $f_3(t_1, t_2, t_3)$, ... принимают малые значения в близкие моменты времени:

$$f_s(t_1, \ldots, t_s) \ll f_1(t_1) \ldots f_s(t_s), \quad (12.49)$$

когда все $|t_i - t_j| \ll \tau_{кор}$, $(s = 2, 3, \ldots)$.
Отсюда следует, что в формуле (47) при $\tau \ll \tau_{кор}$ остается лишь один существенный член:

$$w(\tau) = f_1(\tau). \quad (12.50)$$

При высоком уровне $b$, когда средняя длительность выброса много меньше $\tau_{кор}$, формула (50) дает удовлетворительное решение задачи, так как при этом она правильно передает ход функции $w(\tau)$ для часто встречающихся выбросов. Область $\tau \sim \tau_{кор}$, где она неверна, соответствует редко выпадающим длинным выбросам. Согласно (40), (41) для получения распределения (50) следует вычислить интеграл

$$n_0 f_1(\tau) = \int_0^0 \int_{-\infty}^{0} w_2(b, \dot{x}_0, b, \dot{x}_\tau) \dot{x}_0 |\dot{x}_\tau|\, d\dot{x}_0 d\dot{x}_\tau \quad (12.51)$$

$$(x_0 = x(0), \quad \dot{x}_\tau = \dot{x}(\tau)).$$

В случае низкого или среднего порогового уровня существенно поведение плотности распределения $w(\tau)$ при длительностях $\tau \sim \tau_{кор}$. Для исследования этой области приходится вычислять более высо

кие члены в разложении (47) или (48), брать интегралы (40) большей кратности, что связано с техническими трудностями Эти трудности в какой-то мере могут быть обойдены специальным приемом, который заключается в том, что высшие функции корреляции $g_s(t_1, \ldots, t_s)$ выражаются через низшие При этом предполагается, что корреляции высших порядков характеризуются тем же временем корреляции, что и корреляции низших порядков Так, все функции корреляции можно выразить через $f_1(t)$, $g_2(t_1, t_2)$ При этом реальная система случайных точек будет заменена на систему того типа, который был рассмотрен в разделе 4 § 6 Чтобы проиллюстрировать указанный метод, приведем решение задачи в приближении, соответствующем несближающимся точкам (пункт 2, раздел 4, § 6).

Воспользуемся условием (49) малой вероятности выпадания точек в близкие моменты времени Полагая $t_1 = \ldots = t_s$, имеем

$$f_s(t_1, \ldots, t_1) = 0 \quad (s = 2, 3, \ldots). \tag{12.52}$$

Эти равенства позволяют определить $g_s(t_1, \ldots, t_1)$. Положим $t_1 = \ldots = t_s$; $z_1 = \ldots z_s$ в формуле (6,6) и, учитывая (52), получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} g_s(t_1, \ldots, t_1) z_1^s = \ln(1 + f_1(t_1) z_1). \tag{12.53}$$

Разлагая логарифм в ряд

$$\ln(1 + f_1 z_1) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} f_1^s z_1^s$$

и приравнивая в (53) члены одинакового порядка по $z_1$, находим

$$g_s(t_1, \ldots, t_1) = (-1)^{s-1}(s-1)! f_1^s(t_1). \tag{12.54}$$

Если в формуле (6.6) брать различные, но близкие моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ ($|t_i - t_j| \ll \tau_{кор}$) и различные $z_i$ и по-прежнему в силу (49) пренебрегать членами с $f_2, f_3, \ldots$, то аналогичным образом будем иметь

$$g_s(t_1, \ldots, t_s) = (-1)^{s-1}(s-1)! f_1(t_1) \ldots f_1(t_s),$$
$$(\text{все } |t_i - t_j| \ll \tau_{кор}) \quad (r = 2, 3, \ldots) \tag{12.55}$$

Эти равенства хорошо выполняются при жесткой корреляции Если величину корреляции описывать коэффициентом корреляции $R(t_1, t_2)$, то при совпадающих моментах времени $t_1 = \ldots = t_s$, когда корреляция полная и когда $R$ обращается в единицу, равенства (54) выполняются точно. При $|t_i - t_j| \ll \tau_{кор}$, когда $R(t_i, t_j)$ приближенно равняется единице, равенства (55) справедливы приближенно. При увеличении интервалов до порядка $\tau_{кор}$, корреляции, которые имеют место лишь на интервалах $t_i - t_j \sim \tau_{кор}$ начинают исчезать. Соответственно этому функции $g_s(t_1, \ldots, t_s)$, описывающие эти корреляции, как и функция $R(t_i, t_j)$, уменьшаются. Если хотя бы одна из разностей $t_i - t_j$ будет много больше $\tau_{кор}$, и для

нее функция $R(t_i, t_j)$ станет приближенно равна нулю, то и функция корреляции $g_s(t_1, \ldots, t_s)$ обратится в нуль. Отсюда ясно, что функции корреляции целесообразно аппроксимировать выражением, содержащим коэффициент корреляции $R$. Это может быть сделано, например, по формуле

$$g_s(t_1, \ldots, t_s) = (-1)^{s-1}(s-1)! f_1(t_1) \ldots f_1(t_s) \times \\ \times \{R(t_1, t_2) \ldots R(t_1, t_s)\}_s. \qquad (12.56)$$

Если коэффициент корреляции плавно меняется и удовлетворяет условиям

$$R(t_1, t_1) = 1, \qquad (12.57)$$

$$\int |R(t_1, t_2)| dt_2 \sim \tau_{\text{кор}}, \qquad (12.58)$$

то функции корреляции (56) удовлетворяют равенствам (54), (55) и исчезают, как это требуется, когда хотя бы одна разность $|t_i - t_j| \gg \tau_{\text{кор}}$. Символ $\{\ldots\}_s$, как и на стр. 23, обозначает операцию симметризации, введенную для того, чтобы $g_s(t_1, \ldots, t_s)$ удовлетворяла необходимому условию симметрии.

Положив $s = 2$ в (56), будем иметь

$$g_2(t_1, t_2) = -f_1(t_1) f_1(t_2) R(t_1, t_2). \qquad (12.59)$$

Это равенство примем за определения коэффициента корреляции $R(t_1, t_2)$. Тогда другие равенства (56) при $s>2$ уже будут приближенными. Используя (6.7), запишем (59) в форме

$$R(t_1, t_2) = 1 - \frac{f_2(t_1, t_2)}{f_1(t_1) f_1(t_2)}. \qquad (12.60)$$

Легко проверить, что условие (57) удовлетворяется в силу (52), условие (58) является определением времени корреляции, условие плавности обеспечивается плавностью флюктуаций $x(t)$. Для дальнейшего, вместо приближенного соотношения (58), удобно положить

$$\lim_{t_1 \to \infty} \int_0^\infty R(t_1, t_2) dt_2 = \tau_{\text{кор}}. \qquad (12.61)$$

Чтобы найти распределение $w(\tau)$, остается подставить (56) в (48) или воспользоваться формулой (6.65). Это дает

$$\int_\tau^\infty w(\tau) d\tau = e^{-S(\tau)}, \qquad (12.62)$$

где

$$S(\tau) = -\int_0^\tau \frac{\ln\left[1 - \int_0^\tau R(t, t') f_1(t') dt'\right]}{\int_0^\tau R(t, t') f_1(t') dt'} f_1(t) dt. \qquad (12.63)$$

Приведенным выражением можно пользоваться как при малых, так и при больших значениях $\tau$. Если $\tau \ll \tau_{кор}$, то в (63) можно полагать $R = 1$. Тогда выражение $\ln[1 - \int Rf_1 dt'] / \int Rf_1 dt'$ можно вынести из под знака интеграла и получить

$$\int_{\tau}^{\infty} w(\tau)\, d\tau = 1 - \int_{0}^{\tau} f_1(t)\, dt, \tag{12.64}$$

что эквивалентно равенству (50) В противоположном случае, когда $\tau \gg \tau_{кор}$, формула (63) также сильно упрощается Для значений $t$, далеких как от начала, так и от конца

$$t \gg \tau_{кор}; \quad \tau - t \gg \tau_{кор},$$

имеем в силу (42) и (61)

$$\int_{0}^{\tau} R(t, t') f_1(t')\, dt' = \int_{0}^{\infty} R(t, t')\, n_0 dt' = n_0 \tau_{кор}.$$

Поэтому формулы (62), (63) дают

$$\int_{\tau}^{\infty} w(\tau)\, d\tau = \text{const}\, e^{\ln(1-n_0\tau_{кор})\frac{\tau}{\tau_{кор}}} = \text{const}\,(1 - n_0\tau_{кор})^{\frac{\tau}{\tau_{кор}}}. \tag{12.65}$$

При промежуточных значениях $\tau \sim \tau_{кор}$ имеет место постепенный переход от зависимости (64) к (65).

Для практического вычисления коэффициента корреляции согласно (40), (60) требуется брать тройной интеграл от плотности распределения $w_3(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$. Ценой некоторого уменьшения точности этого можно избежать, заменив в (60) функцию $f_2(t_1, t_2)$ на предельную функцию (43). Тогда

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n_0^2} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} w_2(b, \dot{x}_1, b, \dot{x}_2)\, \dot{x}_1 \dot{x}_2 d\dot{x}_1 d\dot{x}_2,$$

и вычисление функций $f_1(\tau)$ и $R(\tau)$ будет задачей одинаковой степени трудности

в) Согласно вышеизложенному, хотя вычисление точной функции распределения выбросов по длительности сопряжено с большими трудностями, можно пользоваться приближенными формулами, справедливыми при высоких пороговых уровнях $b \gg \sigma$. Эти формулы имеют различную степень сложности и теряют свою значимость

при понижении уровня с различной быстротой. Чтобы проиллюстрировать, насколько правильны теоретические формулы при не слишком больших отношениях $b/\sigma$, проведем сравнение с экспериментальными данными для некоторых частных случаев.

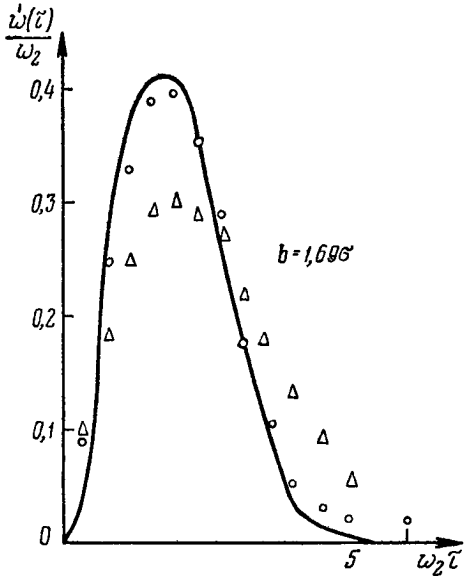



Рис 12 1 Теоретическое и экспериментальное распределение выбросов по длительности ($b = 1{,}69\sigma$)

На рис. 12.1 представлена плотность распределения выбросов по длительности для гауссового случайного процесса, имеющего спектральную интенсивность

$$S[x,\ \omega] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sigma^2}{\omega_2-\omega_1}\begin{cases} 1 \text{ при } \omega_1 < |\omega| < \omega_2; \\ 0 \text{ в др. местах,} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi} = f_1 = 440\ гц;\ \ \frac{\omega_2}{2\pi} = f_2 = 10\,250\ гц\right)$$

и для порогового уровня $b = 1{,}69\,\sigma$. Рис. 12.2 соответствует процессу с корреляционной функцией $\sigma^2 e^{-3^2\cdot\tau^2/4}$ и пороговому уровню $b = \sigma$. Экспериментальные данные изображены непрерывной кривой.

Самая простая теоретическая формула (26) дает релеевский закон распределения. Вычисленные по ней точки на рисунках изображены треугольниками. Как

видно по рисункам, эта формула имеет наименьшую точность. Более точной является формула (36) или (38), при выводе которой существенно используется то обстоятельство, что длительность выбросов и интервалов являются независимыми случайными величинами. Соответствую-

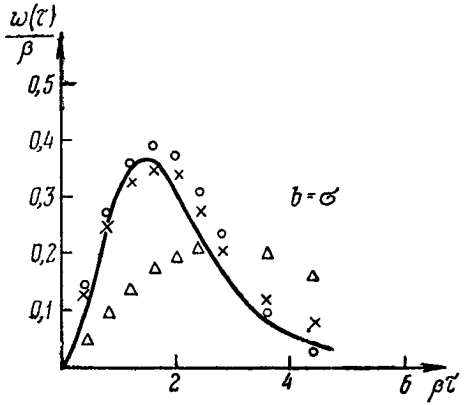



Рис 12 2 Плотность распределения выбросов по длительности ($b = \sigma$)

щие ей точки на рисунках изображены кружками. Удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных данных здесь имеет место даже при $b = \sigma$. Наконец, крестиками на рис. 12.2 изображены точки, вычисленные по формулам (50), (51). Вычисления при этом более трудоемки и дают неплохое совпадение с опытом.

### 3. Площадь выбросов над уровнем срабатывания

Уровень срабатывания мы определили как то минимальное значение входной координаты $x(t) = b$, которое необходимо для срабатывания реле. Если $x(t)$ меняется во времени достаточно медленно, то, действительно, срабатывание реле происходит каждый раз, как только $x(t)$ впервые достигнет уровня $b$. В практических схемах вследствие конечной, не слишком малой скорости изменения входного сигнала будут наблюдаться отклонения от этого правила, а именно, будут происходить пропуски отдельных выбросов. Ранее нами предполагалось, что для срабатывания реле необходимо и достаточно, чтобы дли-

тельность выброса превосходила некоторое фиксированное пороговое значение. Однако и это правило не всегда дает удовлетворительное приближение к действительности.

Специально проводимое исследование реакции электронного реле на импульсы различной формы, приводит к заключению, что наиболее устойчивой является следующая закономерность. Существует такой уровень $b$ и минимальная площадь $S_m$, мало зависящие от формы импульса, что срабатывание реле происходит всякий раз, как только площадь импульса (выброса) над пороговым

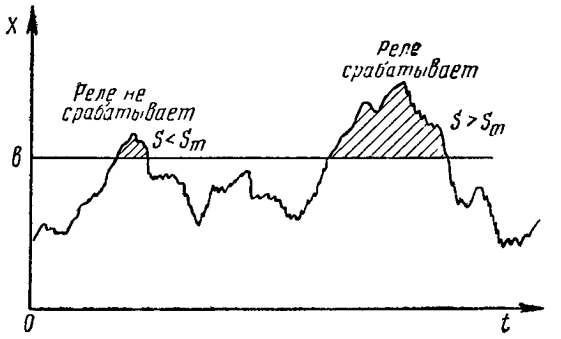



Рис 12 3 Площадь превышения выброса над порогозым уровнем

уровнем превысит $S_m$. Здесь речь идет о площади, ограниченной сверху кривой $x(t)$, а снизу прямой $x = b$, как это показано на рис. 12.3. Подсчет площади будем производить с момента последнего пересечения уровня $b$.

Сформулированное условие срабатывания реле, конечно, не является абсолютно точным. Однако оно хорошо передает особенности работы широкого класса реле, особенно когда входной сигнал имеет тенденцию давать одиночные пересечения порогового уровня.

Требование минимальной необходимой площади, в отличие от требования минимального времени, правильно передает тот факт, что даже кратковременный импульс может привести к срабатыванию реле, если он имеет большую мощность. Указанное требование, учитывающее помимо длительности степень превышения выброса над пороговым уровнем, можно считать как бы требованием, предъявленным к «энергии» выброса.

Если по-прежнему через $\tau$ обозначить длительность выброса, начавшегося в момент $t = t_0$, то введенное условие срабатывания реле будет иметь вид

$$S = \int_{t_0}^{t_0+\tau} [x(t) - b]\, dt > S_m. \qquad (12.66)$$

Стоящую здесь величину $S$ будем называть площадью превышения. Среднее число пропущенных выбросов просто выражается через функцию распределения выбросов по площади превышения:

$$n_{\text{пр}} = n_0 \int_0^{S_m} w(S)\, dS \equiv n_0 F(S_m). \qquad (12.67)$$

Поскольку полное число выбросов $n_0$ было найдено ранее (10.5), (10.9), то для вычисления числа пропущенных или непропущенных выбросов остается найти распределение выбросов по площади. К этой задаче мы и перейдем, ограничиваясь, как и ранее, случаем гладкого процесса $x(t)$ и достаточно высокого уровня срабатывания.

Как отмечалось в разделе 1, достаточно кратковременные выбросы имеют параболическую форму, описываемую первыми членами разложения Тейлора

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t - t_0)^2. \qquad (12.68)$$

При этом длительность выброса равна $\tau = -\dfrac{2\dot{x}}{\ddot{x}}$, а площадь превышения определяется интегрированием

$$S = \int_0^{\tau} \left(\dot{x}\sigma + \frac{1}{2}\ddot{x}\sigma^2\right) d\sigma = \dot{x}\frac{\tau^2}{2} +$$

$$+ \ddot{x}\frac{\tau^3}{6} = \frac{2}{3}\frac{\dot{x}^3}{\ddot{x}^2}. \qquad (12.69)$$

Используя ту же плотность распределения $w_{\text{н}}(\dot{x}, \ddot{x})$ (5) для значений первых двух производных в момент на-

чала выброса, что и ранее, можно получить закон распределения для площади превышения

$$w(S)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} S^{-\frac{2}{3}}\times$$

$$\times\int_0^\infty w_{\text{н}}\left(z^2\left(\frac{3}{2}S\right)^{\frac{1}{3}},\ z^3\right)z^4dz. \qquad (12.70)$$

Последняя формула дает возможность подсчитать число пропущенных выбросов (67) даже в случае низких уровней срабатывания, если минимальная площадь достаточно мала $S_m \ll \tau_{\text{гл}}^2\sigma(\dot{x})$. При высоких же уровнях срабатывания вычисление распределения (70) значительно упрощается. При гауссовом случайном процессе с нулевым средним значением и корреляционной функцией (7) вторая производная $\ddot{x}$ на высоком уровне $x=b$ равна

$$\ddot{x}=-R_2b$$

и почти не зависит от случая. Поэтому площадь превышения (69) определяется исключительно величиной первой производной

$$S=\frac{2}{3}\frac{\dot{x}^3}{R_2^2b^2}, \qquad (12.71)$$

которая описывается плотностью распределения (10.4), (15) и функцией распределения

$$F(\dot{x})=1-\exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma^2R_2}\right). \qquad (12.72)$$

Делая замену переменной (71), из (72) получаем функцию распределения для площади превышения

$$F(S)=1-\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{b^2}{\sigma^2}\left(\frac{S\sqrt{R_2}}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]. \qquad (12.73)$$

Последней функции соответствует плотность вероятности

$$w(S) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{b^2}{\sigma^3}\sqrt{R_2}\right)^{\frac{2}{3}} S^{-\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{b^2}{\sigma^3}\sqrt{R_2}\,S\right)^{\frac{2}{3}}\right]. \qquad (12.74)$$

Найденная зависимость представлена графически на рис. 12.4, где $\rho = \frac{3}{2}\frac{b^2}{\sigma^3}\sqrt{R_2}$.

Чтобы найти долю пропущенных выбросов, не давших срабатывания реле, остается положить в (73) площадь $S$ равной минимальной необходимой площади $S_m$. Вычтя из полного среднего числа выбросов число пропущенных вы-

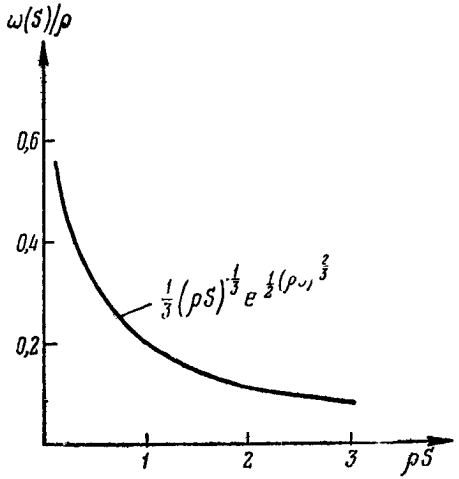



Рис. 12.4. Плотность распределения выбросов по площади превышения.

бросов (67), будем иметь число фактических срабатываний реле

$$n(S_m) = n_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{b^2}{\sigma^3}\sqrt{R_2}S_m\right)^{\frac{2}{3}}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{R_2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{b}{2\sigma^2}\left[1+\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{R_2}}{b}S_m\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}. \qquad (12.75)$$

Как видно из формул (75) и (27), нечувствительность реле к маломощным или кратковременным выбросам эквивалентна дополнительному повышению уровня срабатывания на величину, которая зависит от свойств шума, точнее от $R_2 = -d^2R(0)/d\tau^2$.

## 4. Воздействие импульсных сигналов и флюктуационных помех на электронное реле. Время нечувствительности

Электронные реле применяются для регистрации и подсчета определенных импульсных сигналов, имеющих известную форму. Наряду с такими сигналами — полезными импульсами $s(t)$ — обычно присутствуют флюктуации $\xi(t)$, которые являются помехами. Так обстоит дело при использовании электронных реле в счетнорешающих устройствах дискретного счета, в радиолокационных устройствах с инструментальной индикацией, в приборах для измерения интенсивности радиоактивных излучений, в устройствах для точного измерения малых интервалов времени, в различных системах кодирования, импульсной синхронизации и устройствах автоматики.

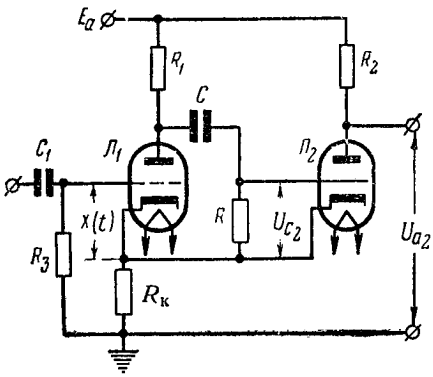


Рис. 12.5. Схема электронного реле

Рассмотрим для примера электронное реле с одним положением равновесия, схема которого приведена на рис. 12.5. Входной сигнал $x(t)$ мы будем предполагать пересчитанным к управляющей сетке первой лампы $Л_1$.

В отсутствие внешнего напряжения реле находится в устойчивом состоянии равновесия, при котором лампа $Л_1$ закрыта напряжением, получаемым в результате протекания анодного тока открытой лампы $Л_2$ через сопротивление $R_k$ (рис. 12.5). Как только внешнее напряжение, воздействующее на управляющую сетку лампы $Л_1$, достигает величины $b$, происходит срабатывание реле. При этом лампа $Л_1$ открывается, а лампа $Л_2$ закрывается.

Реле при каждом срабатывании вырабатывает импульс напряжения, в течение которого, благодаря разряду конденсатора $C$ через лампу $Л_1$ и сопротивление $R$, напряжение на последнем достигает значения отпирания $E_{02}$ лампы $Л_2$. После этого реле возвращается в исходное состояние равновесия. Описанный процесс работы реле иллюстрируется временными диаграммами, приведенными на рис. 12.6.

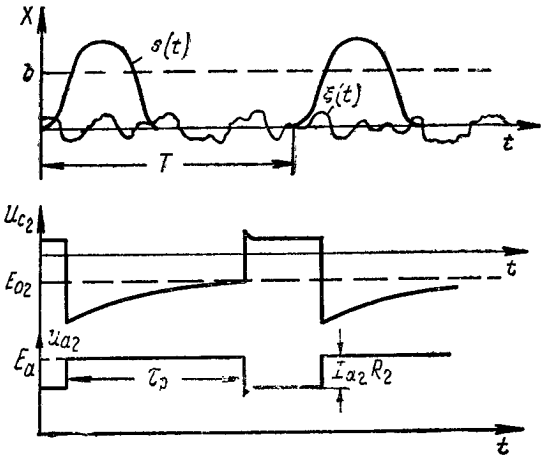



Рис. 12 6. Временные диаграммы, поясняющие работу электронного реле.

Параметры полезного импульса и, в частности, его высота подбираются таким образом, чтобы каждый такой импульс давал срабатывание реле. Поэтому при отсутствии флюктуационных помех число срабатываний будет в точности равно числу полезных импульсов на входе. Наличие флюктуаций дает двоякий эффект. Во-первых, происходят ложные срабатывания, не обусловленные полезными импульсами. Это значит, что выбросы флюктуаций засчитываются как полезные импульсы. Во-вторых, возможен пропуск полезного импульса ввиду того, что величина полезного импульса после сложения с флюктуациями может оказаться недостаточной для срабатывания реле.

Среднее число ложных срабатываний от флюктуаций при отсутствии полезных импульсов находилось нами ранее в § 10. Полное их число $n$ определяется формулой (10.5) или (10.9). Если реле реагирует не на все выбросы,

а лишь на те, которые обладают достаточно большой длительностью $\tau > \tau_m$ или достаточно большой площадью превышения $S > S_m$ (66), то при плавно меняющихся флюктуациях и достаточно высоком уровне можно пользоваться формулой (27) или формулой (75).

При выводе указанных формул, однако, не была учтена еще одна особенность работы реле, а именно существование «времени нечувствительности». Эта особенность заключается в том, что реле теряет чувствительность на то время, пока в нем длится переходный процесс, вызванный срабатыванием. Если один выброс привел уже к срабатыванию реле, то у него на время срабатывания пропадает способность реагировать на новый выброс. Поэтому он будет пропущен, если следует близко к первому выбросу.

Проще всего предполагать, что существует некоторая постоянная времени $\tau_1$, которая характеризует минимальный интервал между начальными точками выбросов, необходимый для того, чтобы второй выброс дал срабатывание. Срабатывания от выброса, удовлетворяющего всем другим требованиям, не происходит, если его начальная точка отстоит от начальной точки выброса, давшего срабатывание, меньше, чем на $\tau_1$. Конечно, возможна более сложная закономерность, согласно которой плавно меняются (в зависимости от предыдущего срабатывания) требования, необходимые для срабатывания, например минимальная площадь превышения.

Описанные эффекты заставляют принимать во внимание распределение интервалов между выбросами по длительности. Сложная задача вычисления такого распределения упрощается в случае высокого уровня срабатывания, когда слабо сказываются корреляции между появлением различных выбросов. При этом коррелированными являются лишь выбросы, разделенные малыми временны́ми интервалами $\Delta t < \tau_{к.в}$. Время корреляции выбросов $\tau_{к.в}$, описывает область увеличенной условной вероятности появления других выбросов (при условии, что один выброс появился) Это время корреляции уменьшается с увеличением $b$. При $b - \langle x \rangle \gg \sigma(x)$ время $\tau_{к.в}$ значительно меньше, чем время корреляции $\tau_{кор}$ исходного процесса $x(t)$.

Для больших интервалов времени $\Delta t \gg \tau_{к.в}$ указанные корреляции можно не принимать во внимание и появление различных выбросов считать независимыми собы-

тиями. Такое отсутствие корреляции соответствует закону Пуассона

$$w_{\infty}(T_{\text{ин}}) = n_0 e^{-n_0 T_{\text{ин}}} \qquad (12.76)$$

для интервалов $T_{\text{ин}} \gg \tau_{\text{к. в}}$ между соседними выбросами (в силу кратковременности выбросов, $T_{\text{ин}}$ приблизительно равен интервалу между начальными точками выбросов). При $T_{\text{ин}} \lesssim \tau_{\text{к. в}}$ плотность вероятности $w(T_{\text{ин}})$ имеет несколько большие значения, чем по формуле (76). При достаточно большом времени нечувствительности $\tau_1 \gg \tau_{\text{к. в}}$ это можно не принимать во внимание и различные выбросы считать некоррелированными.

В этом предположении вычислим число ложных срабатываний с учетом времени нечувствительности. Теперь среднее число $n_1$ срабатываний реле будет отличаться от числа $n$ срабатываний, которые имели бы место при постоянной чувствительности реле. Ввиду того, что в действительности в течение времени $T$ произошло $n_1 T$ срабатываний, каждое из которых внесло «мертвое» время $\tau_1$, полное суммарное время нечувствительности реле составляет $n_1 T \tau_1$. Время, в течение которого реле было чувствительным, равняется $T(1 - n_1\tau_1)$. Для вычисления числа срабатываний за это время «мертвое время» $\tau_1$ больше учитывать не надо. В течение указанного времени произошло $nT(1 - n_1\tau_1)$ выбросов, способных дать срабатывание, и они, действительно, привели к срабатываниям, число которых оказалось равным $n_1 T$. Тем самым мы имеем уравнение

$$n_1 T = nT(1 - n_1\tau_1),$$

из которого вытекает

$$n_1 = \frac{n}{1 + n\tau_1}. \qquad (12.77)$$

При условии $n\tau_1 \ll 1$ эффект мертвого времени мало сказывается и мы имеем

$$n_1 = n - n^2\tau_1, \qquad (12.78)$$

что близко к $n$. В противоположном случае, когда $n\tau_1 \gg 1$, формула (77) дает $n_1 \approx 1/\tau_1$. Это естественно, поскольку срабатывания не могут следовать с интервалами меньше $\tau_1$.

Присутствие полезных импульсов увеличивает суммарное время нечувствительности, что приводит к уменьшению числа ложных срабатываний по сравнению с (77). В самом деле, если $n_2$ — фактическое число ложных срабатываний при наличии полезных импульсов, среднее число которых в единицу времени равно $N_{им}$, то суммарное мертвое время теперь уже будет равно $n_2 T\tau_1 + N_{им} T\tau_1$. Вычитая его из полного времени и умножая на $n$, мы получаем опять-таки фактическое число ложных срабатываний

$$n_2 T = n(T - n_2 T\tau_1 - N_{им} T\tau_1). \qquad (12.79)$$

Следовательно, искомое число ложных срабатываний равно

$$n_2 = \frac{1 - N_{им}\tau_1}{1 + n\tau_1} n. \qquad (12.80)$$

Полученная формула справедлива при любых соотношениях между $N_{им}\tau_1$, $n\tau_1$ и единицей (обязательно лишь условие $(N_{им} + n)\,\tau_1 < 1$). В большинстве практических случаев выполняется условие сравнительно небольшого числа ложных срабатываний $n_2 \ll N_{им}$, которое позволяет видоизменить формулу (80). Так при $n\tau_1 \ll 1$ имеем приближенную формулу

$$n_2 = (1 - N_{им}\tau_1 - n\tau_1)\, n + \tau_1^2 \ldots. \qquad (12.81)$$

Величина $n$, входящая в (77)—(81), как отмечалось, определяется по формулам предыдущих разделов.

Мы рассмотрели первый эффект флюктуационных помех — ложные срабатывания. Перейдем к рассмотрению пропусков полезных импульсов за счет флюктуаций. Такие пропуски, как правило, происходят довольно редко; чтобы достичь уменьшения числа пропусков, высота и длительность регулярных импульсов выбираются достаточно большими. Мы приведем здесь лишь качественную формулу, при помощи которой можно оценить частоту пропусков полезных выбросов. Вряд ли имеется практическая потребность в более точной формуле.

Пусть импульс имеет прямоугольную форму, момент его начала примем за нуль:

$$s(t) = \begin{cases} B \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_{им}, \\ 0 \text{ в других местах}. \end{cases} \qquad (12.82)$$

Напряжение, поступающее на вход реле, есть сумма указанного импульса и флюктуационных помех $\xi(t)$ (рис. 12.7):

$$x(t) = s(t) + \xi(t). \tag{12.83}$$

Предположим, что реле имеет уровень срабатывания $b < B$. Тонкости, связанные с минимальной длительностью выброса или площадью превышения, мы не будем принимать во внимание.

Тогда для пропуска импульса необходимо и достаточно, чтобы в течение всего импульса кривая $x(t)$ лежала ниже уровня $b$:

$$\xi(t) < b - B \tag{12.84}$$

при

$$0 \leqslant t \leqslant T_{\text{им}}.$$

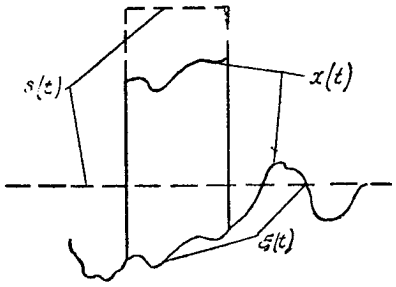



Рис. 12.7. Входной сигнал как сумма прямоугольного импульса и флюктуаций.

Если бы речь шла о выполнении последнего неравенства только в один момент времени, то вероятность его выполнения равнялась бы

$$P = \int_{-\infty}^{b-B} w(\xi)\, d\xi. \tag{12.85}$$

Однако требуется длительное выполнение такого неравенства в течение всего импульса, и это осложняет задачу. Произведя разбиение отрезка $[0, T]$, вероятность выполнения неравенства (84) формально можно записать в форме интеграла

$$P = \int_{-\infty}^{b-B} \cdots \int_{-\infty}^{b-B} w(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_N))\, d\xi(t_1) \ldots d\xi(t_N) \tag{12.86}$$

$$(0 \leqslant t_1 < \ldots < t_N < T),$$

фактическое вычисление которого затруднительно. Простая, но не очень точная формула, пригодная для технических оценок, может быть получена путем замены процесса $\xi(t)$ на ступенчатую функцию, скачкообразно меняющую свое значение через интервалы, равные времени

корреляции $\tau_{кор}$ (рис. 12.8). При этом значения функции $\xi(t)$ даже на соседних интервалах, разделенных только одним скачком, будем считать статистически независимыми. В указанных предположениях вероятность (84) будет равна определенной степени интеграла (85) Так, при нулевой длительности импульса (86) будет совпадать с (85), т. е. показатель степени будет равен единице. При длительности импульса $T_{им}$, в точности равной $\tau_{кор}$, показатель степени будет равен двум и так далее. При некоторых промежуточных значениях $T_{им}$ показатель степени будет претерпевать скачки. Освобождаясь теперь от прерывистости, целесообразно произвести интерполяцию на случай нецелых $T_{им}$ $\tau_{кор}$ непрерывным образом. В результате интеграл (86) запишется в виде

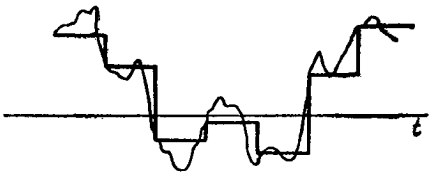



Рис 12 8 Замена непрерывных флюктуаций на скачкообразные.

$$P=\left\{\int_{-\infty}^{b-B} w(\xi)\,d\xi\right\}^{1+\frac{T_{им}}{\tau_{кор}}}=[F_{\xi}(b-B)]^{1+\frac{T_{им}}{\tau_{кор}}}. \quad (12.87)$$

Считая флюктуационные помехи, складывающиеся с одним импульсом, независимыми от флюктуаций, прибавляющихся к любому другому импульсу, приходим к заключению, что вероятность (86), (87) определяет долю пропущенных импульсов. Если среднее полное число полезных выбросов, рассчитанных на единицу времени, равно $N$, то число пропущенных импульсов, не давших срабатывания, будет

$$N_{пр}=N[F_{\xi}(b-B)]^{1+\frac{T_{им}}{\tau_{кор}}}. \quad (12.88)$$

Число срабатываний $N_{им}$, вызванных полезными импульсами, можно получить вычитанием числа пропусков $N_{пр}$:

$$N_{им}=N-N_{пр}. \quad (12.89)$$

В случае гауссовых флюктуаций с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2$ согласно (1.7), (3.6) имеем

$$F_\xi(b-B)=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{B-b}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

и, следовательно,

$$N_{\text{пр}}=N\left[\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{B-b}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]^{1+\frac{T_{\text{им}}}{\tau_{\text{кор}}}}. \qquad (12.90)$$

Для коэффициентов корреляции $R(\tau)=e^{-\gamma|\tau|}$ и $e^{-\alpha\tau^2}$ в качестве $\tau_{\text{кор}}$ можно брать $\frac{1}{\gamma}$ и $\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}}\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$ соответственно. Формула (90) показывает быстрое спадание числа пропусков с ростом превышения $B-b$ над уровнем срабатывания или длительности импульса по сравнению с временем корреляции.

При больших превышениях

$$B-b\gg\sigma$$

можно воспользоваться асимптотической формулой для функции erfc $(x)$ и приближенно получить

$$N_{\text{пр}}\approx N\left(\frac{\sigma^2}{2\pi(B-b)^2}\right)^{1+\frac{T_{\text{им}}}{\tau_{\text{кор}}}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(B-b)^2}{2\sigma^2}\,\frac{T_{\text{им}}+\tau_{\text{кор}}}{\tau_{\text{кор}}}\right]. \qquad (12.91)$$

### 5. Нестабильность момента срабатывания реле, вызванная прибавлением флюктуаций к полезному импульсу

Обычно назначение электронного реле состоит в том, чтобы производить срабатывание и давать соответствующий импульс на выходе при подаче на вход реле регулярного полезного импульса. Даже, если отвлечься от ложных срабатываний и обусловленных флюктуациями пропусков полезных импульсов, то влияние флюктуационных помех, прибавляющихся к импульсу, будет приводить еще к нестабильности момента срабатывания реле. Действительно, при отсутствии флюктуаций, искажающих

стандартную форму импульса, срабатывание реле начиналось бы всегда в одной и той же точке импульса и момент срабатывания в точности соответствовал бы положению входного импульса на оси времени. Наличие флюктуаций приводит к случайному сдвигу во времени ответного импульса по отношению к входному полезному импульсу. По моменту срабатывания теперь уже нельзя судить о точном времени прихода входного импульса. К такому же эффекту, конечно, приводят флюктуации, присущие самому реле (нестабильность питания и пр.), вызывающие непостоянство уровня срабатывания $b$. В какой-то мере эти флюктуации можно отнести к сигналу $x(t)$, считая, все-таки, уровень $b$ стабильным. Так или иначе, мы предполагаем, что на идеальное реле действует сигнал

$$x(t) = s_1(t) + \xi(t),$$

состоящий из случайного процесса $\xi(t)$ и суммы полезных импульсов стандартной формы. Если эта форма описывается функцией $s(t)$, то

$$s_1(t) = \sum_j s(t - t_j).$$

Рассматривая один импульс, для которого $t_i$ можно принять за нуль, то есть полагая $s_1(t) = s(t)$, исследуем нестабильность момента срабатывания. Пусть момент срабатывания $t_c$ задается точкой пересечения кривой $x(t)$ уровня $b$. Тогда он будет определяться уравнением

$$s(t_c) + \xi(t_c) = b. \qquad (12.92)$$

При отсутствии флюктуаций это уравнение имело бы вид

$$s(t_0) = b \qquad (12.93)$$

и определяло бы некоторый момент срабатывания $t_0$. Вычитая (93) из (92), получим

$$u(t_c) + \xi(t_c) = 0, \quad (u(t_c) = s(t_c) - s(t_0)). \qquad (12.94)$$

Ввиду того, что импульс и шум предварительно прошли через системы с ограниченной полосой частот, они представляют собой плавно меняющиеся функции, быстрота их изменения характеризуется определенной постоянной времени $\tau_{гл}$. Это значит, что члены разложения Тейлора

от этих функций будут убывать как степени отношения $\Delta t/\tau_{гл}$.

Найденное уравнение (94) относительно $t_c$, которое содержит случайную функцию $\xi(t)$, будем решать методом последовательных приближений, используя условие малости флюктуаций. Чтобы применяемый способ решения сделать более наглядным, снабдим случайную функцию малым параметром, записав (94) в виде

$$u(t_c) + \varepsilon\xi(t_c) = 0. \tag{12.95}$$

В результатах можно положить $\varepsilon = 1$, имея в виду, что основанием метода является условие малости самой функции $\xi(t)$, которое уточним несколько позже.

Решение последнего уравнения ищем в виде ряда по степеням $\varepsilon$:

$$t_c = t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \ldots. \tag{12.96}$$

После подстановки его в (95) имеем

$$u(t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \ldots) + \varepsilon\xi(t_0 + \varepsilon t_1 + \ldots) = 0.$$

Разлагая входящие сюда функции в ряд Тейлора, получим

$$u'(t_0)(\varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \ldots) + \frac{1}{2}u''(t_0)(\varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \ldots)^2 +$$

$$+ \ldots + \varepsilon\xi(t_0) + \varepsilon\xi'(t_0)(\varepsilon t_1 + \ldots) + \ldots = 0$$

$$(u(t_0) = 0).$$

Объединяя члены с одинаковыми степенями параметра $\varepsilon$ и составляя из них отдельные равенства, находим последовательные приближения

$$u't_1 + \xi = 0;$$

$$u't_2 + \frac{1}{2}u''t_1^2 + \xi't_1 = 0, \tag{12.97}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\xi = \xi(t_0);\ u' = u'(t_0) \text{ и т. д.}).$$

Отсюда получаем

$$t_1 = -\frac{\xi}{u'}; \tag{12.98}$$

$$t_2 = -\frac{\xi'}{u'}t_1 - \frac{1}{2}\frac{u''}{u'}t_1^2 = \frac{\xi\xi'}{u'^2} - \frac{1}{2}\frac{u''\xi^2}{u'^3}. \tag{12.99}$$

Учитывая (96), запишем искомое решение уравнения (95) с точностью до $\varepsilon^2$

$$t_c - t_0 = -\varepsilon \frac{\xi}{u'} + \varepsilon^2 \left( \frac{\xi\xi'}{u'^2} - \frac{u''\xi^2}{2u'^3} \right) + \varepsilon^3 \ldots$$

или в форме, не содержащей $\varepsilon$,

$$t_c - t_0 = -\frac{\xi}{s'} + \frac{\xi\xi'}{s'^2} - \frac{s''\xi^2}{2s'^3}. \qquad (12.100)$$

Мы видим, что время срабатывания сдвигается на величину, зависящую от производных, соответствующих процессам $s(t)$ и $\xi(t)$ в момент $t_0$. Первый член является результатом первого приближения, два других члена в правой части (100) дают поправку второго приближения.

Анализ выражения (100), а также более высоких приближений приводит к выводу, что последовательные приближения сходятся как степени отношения $\frac{\xi'}{s'}$, которое по порядку величины равно $\frac{\sigma(\xi)}{s'\tau_{гл}}$. При этом следует иметь в виду, что дифференцирование процессов $\xi'$, $s'$ по порядку величины эквивалентно делению на постоянную времени плавности $\tau_{гл}$. Метод последовательных приближений, примененный выше, очень эффективен при условии, если $\frac{\sigma(\xi)}{s'\tau_{гл}} \ll 1$.

Произведем вычисление статистических характеристик временного сдвига (100) для случая нормальных флюктуаций с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\langle \xi\xi_\tau \rangle = \sigma^2 R(\tau)$. Усредняя (100), получаем отличный от нуля средний сдвиг

$$\langle t_c - t_0 \rangle = -\frac{s''}{2s'^3} \sigma^2, \qquad (12.101)$$

пропорциональный второй производной кривой, задающей форму импульса. Поскольку уровень $b$ обычно располагается ближе к вершине, чем к основанию импульса, вторая производная на этом уровне отрицательна. Поэтому $\langle t_c - t_0 \rangle > 0$, то есть флюктуации приводят к некоторому малому запаздыванию момента срабатывания.

Возводя (100) в квадрат и усредняя, получаем

$$D(t_c - t_0) = \frac{\sigma^2}{s'^2} + \frac{\sigma^4 R_2}{s'^4} + \frac{3\sigma^4 s''^2}{4s'^6} \qquad (12.102)$$

$$\left(R_2 = -\frac{d^2R(0)}{d\tau^2}\right).$$

При выводе этого выражения использована независимость между $\xi$ и $\xi'$, а также первая формула (8.31). Основное влияние на величину флюктуационного разброса момента срабатывания оказывает величина флюктуаций $\sigma$ и крутизна фронта $s'$. Поправки второго приближения показывают также зависимость от $s''$ и от $R_2$, то есть от быстроты изменения флюктуационного процесса. Ненулевые производные $s''$, $R''$ приводят к дополнительному увеличению нестабильности момента срабатывания. Параметром сходимости является отношение $\sigma^2 R_2/s'^2$.

Использованный метод и выражение (100) позволяют, в частности, вычислить с той или иной точностью плотность распределения для сдвига $t_c - t_0$. Удобнее рассматривать вместо него безразмерную величину

$$\tau = s' \frac{t_c - t_0}{\sigma} = -\frac{\xi}{\sigma} + \frac{\xi\xi'}{\sigma s'} - \frac{s''\xi^2}{2\sigma s'^2}. \qquad (12.103)$$

В первом приближении, когда $\tau = -\frac{\xi}{\sigma}$, мы имеем нормальный закон распределения

$$w(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}}. \qquad (12.104)$$

Два других члена в выражении (103) искажают распределение (104). Наибольшая из таких поправок к (104) обусловлена членом $\frac{s''\xi^2}{2\sigma s'^2}$. В самом деле, подставляя (103) в характеристическую функцию $\langle e^{iv\tau}\rangle$ и разлагая в ряд по $\frac{\xi\xi'}{\sigma s'} - \frac{s''\xi^2}{2\sigma s'^2}$, получаем

$$\langle e^{iv\tau}\rangle = \left\langle e^{-\frac{iv\xi}{\sigma}} \left(1 + iv\frac{\xi\xi'}{\sigma s'} - iv\frac{\sigma s''}{2s'^2}\frac{\xi^2}{\sigma^2} + \ldots\right)\right\rangle. \qquad (12.105)$$

Член с $\xi\xi'$ при усреднении выпадает, ибо значение $\xi'$ независимо от $\xi$ и, кроме того, $\langle\xi'\rangle = 0$. Опуская его, а также высшие члены, обозначенные точками, преобразуем (105) к виду

$$\langle e^{iv\tau}\rangle = \left\langle e^{-\frac{iv\xi}{\sigma}}\right\rangle + iv\frac{\sigma s''}{2s'^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left\langle e^{-\frac{iv\xi}{\sigma}}\right\rangle = \\ = \left[1 + \frac{\sigma s''}{2s'^2} iv(v^2-1)\right] e^{-\frac{v^2}{2}}. \qquad (12.106)$$

Совершая обратное преобразование Фурье, находим отсюда плотность распределения

$$w(\tau) = \left[1 + \frac{\sigma s''}{2s'^2}\left(\frac{\partial^3}{\partial\tau^3} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} = \\ = \left[1 + \frac{\sigma s''}{2s'^2}(2\tau - \tau^3)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}}. \qquad (12.107)$$

В случае надобности таким же путем можно получить другие поправки к закону распределения. Уточненная плотность вероятности (107) уже является несимметричной.

ГЛАВА 4

# НЕЛИНЕЙНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФЛЮКТУАЦИЙ

## § 13. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАБОТУ ГЕНЕРАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ ФЛЮКТУАЦИЙ

### 1. Предварительные замечания

В настоящее время во многих радиотехнических устройствах применяются генераторы гармонических колебаний. Они служат для получения несущей частоты радиосигналов. При помощи гармонических колебаний, вырабатываемых гетеродином, производится изменение несущей частоты принимаемого сигнала. Генераторы используются также для получения стандартных сигналов, применяемых в радиоастрономии, радиолокации, навигации, и для других целей.

Применяемые в радиотехнике генераторы гармонических колебаний или, как их иногда называют, автогенераторы сильно отличаются друг от друга по генерируемой частоте, по мощности, а также по физическим процессам, приводящим к возникновению автоколебаний. Однако для всех типов генераторов является обязательным наличие положительной обратной связи, которая должна быть достаточно большой, чтобы первоначальные возмущения могли усиливаться. Другой чертой, характерной для большинства генераторов гармонических колебаний, является наличие частотно-селективного элемента, например колебательного контура или резонатора, имеющего собственную частоту, близкую к частоте генерации. Без такого селективного элемента автоколебания имели бы не синусоидальную, а более сложную форму, как например релаксационные колебания мультивибратора или блокинг-генератора.

Для получения автоколебаний используются различные физические явления. В соответствии с этим основные уравнения, описывающие процесс генерации, могут быть весьма различны. Мы ограничимся исключительно рассмотрением тех процессов генерации, которые описываются уравнением второго порядка. Такое уравнение всегда может быть приведено к виду

$$\ddot{x} = f_0(x, \dot{x}, t). \qquad (13.1)$$

Здесь $x(t)$ — какая-то координата, например напряжение или ток в определенном элементе схемы; $f_0(x, \dot{x}, t)$ — некоторая функция, вид которой определяется из рассмотрения конкретной схемы генератора. Примеры такой функции будут даны в дальнейшем. Точка обозначает производную по времени.

Отметим, однако, что не все генераторы могут быть описаны уравнением второго порядка. Основное уравнение может оказаться уравнением высшего порядка, если, например, использовать в качестве селективного элемента несколько колебательных контуров. В других случаях, например для генераторов, построенных на полупроводниковых приборах, может быть выведено интегро-дифференциальное уравнение. Наконец, генерирование сверхвысоких частот в системах с распределенными параметрами описывается уравнениями в частных производных, которые сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям лишь с известными приближениями. Однако мы не будем здесь касаться указанных более сложных случаев.

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением генераторов гармонических колебаний, то получаемый сигнал близок к синусоиде. Однако он не тождествен ей, и отличия от синусоиды бывают двоякого типа. Это, во-первых, высокочастотные отклонения. В этом случае в течение одного или нескольких периодов форма колебания сигнала близка к синусоиде определенной амплитуды и фазе, но имеются отклонения от нее в обе стороны, совершающиеся с частотой, превосходящей основную частоту генерации. Эти высокочастотные отклонения малы по своей абсолютной величине, или могут быть сделаны малыми после предварительного сглаживания. Второй тип отклонения сигнала от синусоиды — это медленно происходящие, но постоянно накапливающиеся отклоне-

ния амплитуды и фазы. В течение одного или нескольких периодов эти отклонения невелики, однако, спустя большое число периодов, может произойти полная смена амплитуды и фазы, в результате чего сигнал будет походить уже на новую синусоиду, отличную от первой. Этот второй тип негармоничности колебаний часто является более важным, чем первый, ибо высокочастотные компоненты в обычных радиотехнических схемах, как правило, быстро отфильтровываются. Поэтому высокочастотные отклонения обычно представляют интерес в той мере, в какой они влияют на медленные изменения фазы и амплитуды.

Пусть $\omega_0$ — некоторая приближенная угловая частота колебаний, определенная, например, по нескольким произвольно выбранным «периодам» колебаний. Если бы генерируемый сигнал был строго гармоническим, то он удовлетворял бы уравнению

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x. \tag{13.2}$$

Ясно, что если сигнал $x(t)$ не строго гармонический, но отклонения обоих типов являются малыми, то правые части уравнений (1) и (2) мало отличаются друг от друга.

Введем для наглядности малый параметр $\varepsilon$ и обозначим

$$f_0(x, \dot{x}, t) = -\omega_0^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}, t).$$

Тогда уравнение колебаний (1) примет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t). \tag{13.3}$$

Все сказанное выше справедливо также и в том случае, когда к элементам схемы генератора приложены какие-либо внешние или внутренние воздействия, зависящие от времени. Это учитывается тем, что $f$ явно зависит от $t$. Такие воздействия могут быть регулярными. Например, на анод иногда подается импульсное напряжение, в результате чего генерируется импульс высокочастотного сигнала. В других случаях применяется периодическое внешнее воздействие, которое стабилизирует частоту генерации (синхронизация). Однако воздействие может быть также нерегулярным и происходить от внутренних дробовых или тепловых шумов, от нестабильно-

сти параметров схемы и источника питания. Такое воздействие может быть, кроме того, внешней случайной помехой. В этих случаях зависящее от времени воздействие должно описываться статистически. Генерируемый сигнал также будет случайной функцией времени и его статистические характеристики подлежат определению.

С математической точки зрения уравнение (3) при наличии случайных воздействий представляет собой пример нелинейного уравнения, содержащего случайную функцию. Однако вследствие малости параметра $\varepsilon$ это есть уравнение с малой нелинейностью, что существенно используется при решении задачи. Благодаря малости $\varepsilon$ могут быть применены асимптотические методы, позволяющие получать результаты в виде разложения по $\varepsilon$ до любого порядка.

## 2. Пример автоколебательной системы. Ламповый генератор

Рассмотрим в качестве примера автоколебательной системы ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода, принципиальная схема которого изображена на рис. 13.1. Величины емкостей $C_1$ и $C_2$ подбираются таким

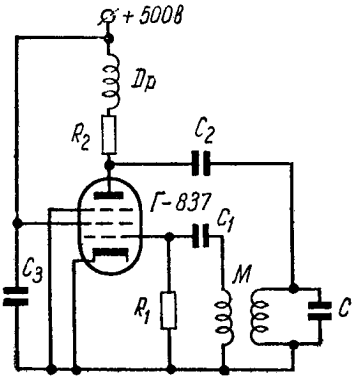



Рис. 13.1. Схема лампового генератора.

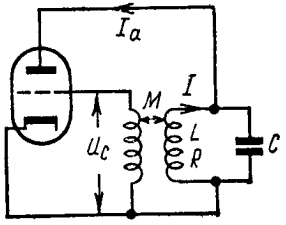



Рис. 13.2. Упрощенная схема автогенератора

образом, чтобы их сопротивление по переменному току было пренебрежимо мало, сопротивление же $R_1$, напротив, берется достаточно большим. Поэтому упрощенная эквивалентная схема генератора будет иметь вид, изображенный на рис. 13.2. На последней схеме не изображены, но подразумеваются постоянное сеточное смещение и анодное напряжение.

Обозначим через $I$ ток индуктивной ветви контура. Приравнивая напряжение на индуктивной и на емкостной ветвях колебательного контура, получаем уравнение

$$L\frac{dI}{dt}+RI=\frac{1}{C}\int(I_a-I)\,dt$$

или

$$\ddot{I}+\omega_0^2 I=-\omega_0^2 RC\dot{I}+\omega_0^2 I_a, \qquad (13.4)$$

где

$$\omega_0=(LC)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (13.5)$$

Чтобы получить исходное уравнение, остается только выразить величину анодного тока $I_a$ через $I$. При заданном сеточном смещении и анодном напряжении анодный ток является известной функцией от переменных составляющих сеточного и анодного напряжений:

$$I_a=F(U_c,\ U_a). \qquad (13.6)$$

Вводя коэффициент проницаемости $D$, эту зависимость часто представляют функцией от одной переменной

$$I_a=F(U);\ \ (U=U_c+DU_a). \qquad (13.7)$$

Если пренебречь сеточным током, то переменное напряжение на сетке будет определяться исключительно электродвижущей силой, наводимой контуром вследствие наличия индуктивной связи, т. е.

$$U_c=M\dot{I}.$$

Переменное же напряжение на аноде равно напряжению на контуре с обратным знаком. Учитывая это при подстановке (7) в уравнение (4), получаем

$$\ddot{I}+\omega_0^2 I=-\omega_0^2 RC\dot{I}+\omega_0^2 F(M\dot{I}-DL\dot{I}-DRI). \qquad (13.8)$$

Выведенное уравнение колебаний имеет вид (3), однако в нем отсутствует явная зависимость правой части от времени. Такая зависимость появляется, если учесть внутренние флюктуации или ввести внешние воздействия.

Вследствие дробовых флюктуаций мгновенное значение анодного тока $I_a$ отличается на случайную величину

от среднего тока $\langle I_a \rangle$, который определяется напряжениями на сетке и аноде в данный момент. Равенства (6—7) справедливы только для среднего тока

$$\langle I_a \rangle = F(U_c + DU_a). \qquad (13.9)$$

Фактический же анодный ток имеет еще флюктуационную компоненту $I_\Phi$:

$$I_a = F(U_c + DU_a) + I_\Phi(t), \qquad (13.10)$$

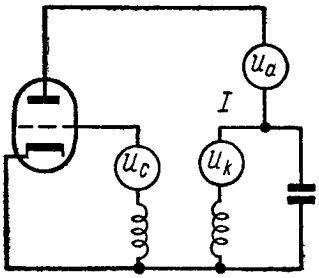



Рис. 13.3. Подача внешних воздействий на генератор.

интенсивность которой пропорциональна заряду электрона и величине среднего тока. После подстановки (10) в (4) получаем уравнение

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 [-RC\dot{I} + F(M\dot{I} - DL\dot{I} - DRI) + I_\Phi(t)], \qquad (13.11)$$

которое отличается от (3) дополнительным флюктуационным членом в правой части.

Если пренебречь реакцией анодной нагрузки, т. е. положить $D = 0$, то последнее уравнение несколько упростится и примет вид

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 [-RC\dot{I} + F(M\dot{I}) + I_\Phi(t)]. \qquad (13.12)$$

Учет реакции анодной нагрузки сводится в основном к замене $M$ на $M' = M - DL$.

Внешние воздействия могут быть введены в различные части схемы. На рис. 13.3 показано введение дополнительного переменного анодного напряжения $u(t)$, а также дополнительного напряжения на сетку $u_c(t)$ и индуктивную ветвь контура $u_к(t)$. Последнее может быть осуществлено путем индуктивной связи с третьей катушкой.

Чтобы не повторять сходных выкладок, будем считать, что все три внешних напряжения существуют одновременно. В окончательном уравнении отсутствующие напряжения можно положить равными нулю. Тожде-

ственность напряжений на обеих ветвях контура выражается равенством

$$L\dot{I} + RI - u_к = \frac{1}{C}\int (I_а - I)\, dt.$$

Поскольку сеточное напряжение в этом случае равно $MI + u_с$, результирующее уравнение колебаний в пренебрежении дробовыми флюктуациями имеет вид

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 [- RC\dot{I} + F(M\dot{I} - DL\dot{I} - DRI + \\ + u_с + Du_к + Du_а) + C\dot{u}_к]. \qquad (13.13)$$

Сравнивая члены $RI$ и $LI \sim L\omega_0 I$, приходим к заключению, что первый член пренебрежимо мал по сравнению со вторым при большой добротности колебательного контура. Пренебрегая им и обозначая

$$u = u_с + Du_а + Du_к, \qquad (13.14)$$

записываем уравнение колебаний (13) в виде

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 [- RC\dot{I} + F(M'\dot{I} + u(t)) + C\dot{u}_к]. \qquad (13.15)$$

Здесь $M'$ равно $M - DL$ и в пренебрежении реакцией анодной нагрузки не отличается от $M$.

Внешние воздействия могут быть как регулярными, так и флюктуационными. Если, например,

$$u_с = u_а = 0;\ u_к = U_0 \cos \omega_с t, \qquad (13.16)$$

то при учете дробовых флюктуаций и в пренебрежении реакцией анодной нагрузки ($D = 0$) будем иметь

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 [- RC\dot{I} + F(M\dot{I}) - \\ - \omega_с C U_0 \sin \omega_с t + I_ф(t)]. \qquad (13.17)$$

Чтобы полученные уравнения (11), (15), (17) по своей форме совпадали с (3), остается ввести малый параметр $\varepsilon$. Прежде чем это сделать, нужно избавиться от постоянной составляющей $I_=$ анодного тока, которая иногда довольно велика. Удаление постоянной состав-

ляющей можно произвести путем ее вычитания или путем дифференцирования обоих частей уравнения по времени. Последний путь целесообразен тогда, когда составляющая $I_{=}$, хотя и постоянна в течение периода, но может существенно меняться в продолжении многих периодов. После дифференцирования удобно записать уравнение колебаний относительно сеточного напряжения $U_c = M\dot{I}$.

Если же $I_{=}$ не изменяется даже в течение больших отрезков времени, то целесообразно записывать уравнение для переменной составляющей $I - I_{=}$ тока через индуктивность или, что в сущности то же, для пропорциональной ей величины

$$x = \omega_0 M (I - I_{=}), \tag{13.18}$$

имеющей размерность напряжения. При чисто гармонических колебаниях это напряжение по амплитуде совпадает с переменным напряжением на сетке лампы. Вместе с тем введем особое обозначение для характеристики, описывающей анодный ток за вычетом постоянной составляющей:

$$\langle I_a \rangle - I_{=} = F_0(U), \ (U = U_c + DU_a). \tag{13.19}$$

Преобразуем для примера к новому виду уравнение (12). Согласно (18), (19) его можно записать

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left[ \omega_0 M F_0 \left( \frac{x}{\omega_0} \right) - \right.$$

$$\left. - RC\dot{x} + \omega_0 M i_\Phi(t) \right]. \tag{13.20}$$

Совершенно аналогично при подаче внешнего напряжения на контур в соответствии с (15) будем иметь

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left[ \omega_0 M F_0 \left( \frac{\dot{x}}{\omega_0} \right) - \right.$$

$$\left. - RC\dot{x} + \omega_0 M C \dot{u}_к(t) \right], \tag{13.21}$$

если $D = 0$; $u_c = 0$.

Характеристику лампы удобно аппроксимировать кубической параболой

$$F(U) = I_{=} + F_0(U) = I_{=} + SU + \\ + \frac{\beta}{2} U^2 - \frac{\gamma}{3} U^3, \qquad (13.22)$$

где $S$ — крутизна; $\gamma$ — параметр, иногда записываемый в форме $S/V^3$. При характеристике, симметричной относительно рабочей точки, можно пользоваться более простым выражением

$$F_0(U) = SU - \frac{\gamma}{3} U^3. \qquad (13.23)$$

Выбор того или иного вида аппроксимации не является принципиальным и лишь видоизменяет выкладки. Использование наиболее простого выражения (23) иногда возможно и при несимметричной характеристике (22), так как член $\beta U^2/2$ в первом приближении не сказывается.

Если использовать аппроксимацию (23), то уравнения (20), (21) примут вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\omega_0 \left(1 - \frac{4\dot{x}^2}{3\omega_0^2 A_0^2}\right)\dot{x} + \omega_0^2 \varepsilon \xi(t). \qquad (13.24)$$

Здесь введены обозначения: $\varepsilon = \omega_0(MS - RC)$ — малый параметр; величина

$$A_0 = 2\left(\frac{MS - RC}{M\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{\varepsilon}{\omega_0 M\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (13.25)$$

как видно из дальнейшего, имеет смысл амплитуды колебаний сеточного напряжения; $\xi(t)$ — случайная функция, равная

$$\xi(t) = \frac{\omega_0 M I_\Phi}{\varepsilon} \text{ или } \xi(t) = \frac{\omega_0 M C \dot{u}_\text{к}}{\varepsilon}. \qquad (13.26)$$

в случае дробовых флюктуаций и внешних шумов соответственно.

Флюктуационный член $\varepsilon\xi(t)$ в уравнении колебаний (24) можно также записать в другой форме, а именно выбрать один из следующих вариантов:

$$\xi_0(t); \quad \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}}(t); \quad \varepsilon^2\xi_2(t) \text{ и т. д.}$$

Выбор между той или иной формой записи в известной степени определяется степенью интенсивности флюктуаций (при бо́льших флюктуациях предпочтительнее меньшая степень $\varepsilon$), а в некоторой мере так и остается произвольным. В самом деле, нам ничто не мешает в рамках выбранного выражения $\varepsilon^r\xi_r(t)$ считать флюктуации малыми или большими

Для конкретной автоколебательной системы вопрос о выборе того или иного варианта имеет не столь уж большое значение, ибо главные зависимости в полученных результатах оказываются одинаковыми.

Как будет видно из дальнейшего, форма $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}}$ имеет то преимущество перед всеми остальными, что только для нее флюктуационный разброс амплитуды остается конечным, если стремить $\varepsilon \to 0$, оставляя в уравнении

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\omega_0\left(1 - \frac{4\dot{x}^2}{3\omega_0^2 A_0^2}\right)\dot{x} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\omega_0^2\xi(t) \qquad (13.27)$$

другие параметры, в том числе $\xi(t)$, без изменения.

Форма записи $\xi_0(t)$, хоть и не отражает явно малости флюктуаций, но зато позволяет избежать несколько искусственной процедуры деления истинных флюктуаций (например, $\omega_0 MI_\Phi$) на $\varepsilon^r$, а затем умножения на эту же степень при подстановке $\xi_r$ в уравнение колебаний.

Рассмотрим примерные численные значения параметров, входящих в уравнение (24). Пусть в генераторе, изображенном на рис. 13.1 и 13.2, емкость, индуктивность, сопротивление и коэффициент взаимной индукции имеют значения

$$C = 135\ мкмкф;\ L = 1{,}6\ мкгн;\ R = 1\ ом;\ M = 0{,}18\ мкгн.$$

Им соответствует резонансная частота (5) $\omega_0 = 7 \times 10^7\ сек^{-1}$. Далее пусть использована лампа Г-837, работающая в режиме со следующими постоянными составляющими напряжений:

$$E_c = -10\ в;\ E_a = 400\ в;\ E_э = 200\ в;\ (u_н = 12\ в).$$

Сеточная характеристика лампы представлена на рис. 13.4 линией $AB$. Там же пунктиром $CD$ представлена аппроксимация (22) с численными значениями

$$S = 6\ ма/в;\ \beta = 0{,}18\ ма/в^2;\ \gamma = 0{,}06\ ма/в^3. \qquad (13.28)$$

При этом согласно (25) имеем

$$\varepsilon = 0{,}05;\quad A_0 = 20\ в.$$

В случае других схем часто получаются еще меньшие значения параметра $\varepsilon$ вследствие меньшей крутизны $S$. Значение амплитуды 20 *в* получилось больше экспериментального значения ($A_0 = 11$ *в*), поскольку такие значения заходят в области, где принятая аппроксимация нарушается (кривые $AB$ и $CD$ на рис. 13.4 расходятся). Для более точного анализа следовало бы взять более близкую (при больших $U$) аппроксимацию.

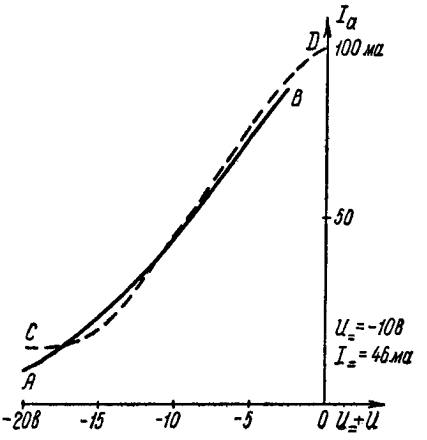


Рис 13 4. Характеристика лампы Г-835 и ее аппроксимация (пунктир).

Приведенная оценка показывает, что неравенство

$$\varepsilon \ll 1, \quad (13.29)$$

которое лежит в основе теории автоколебательных систем томсоновского типа, хорошо выполняется.

Уравнение вида (24), взятое без флюктуационного члена $\omega_0^2 \varepsilon \xi(t)$, хорошо изучено в теории колебаний. Наличие случайной функции $\xi(t)$, конечно, вносит некоторое своеобразие и вызывает необходимость дополнить обычную теорию нелинейных колебаний вероятностными представлениями. В этом параграфе статистические методы исследования автоколебаний при наличии флюктуаций, применяемые нами в дальнейшем, мы проиллюстрируем на примере уравнения (24).

### 3. Уравнения в стандартной форме и упрощенные уравнения

Для изучения автоколебаний целесообразно перейти от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка, описывающих поведение амплитуды и фазы. Поскольку амплитуда и фаза как функции времени содержат большие, но медленно меняющиеся компоненты, а также быстро меняющиеся, но малые компоненты, то можно ожидать, что временные производные амплитуды и фазы в указанных уравнениях будут приравнены малым величинам.

Понятия амплитуды и фазы интуитивно наглядны, но при попытке точно определить эти понятия для колебаний, хотя и близких, но не совпадающих с гармоническими, мы встречаем некоторый произвол, который тем меньше, чем ближе данные колебания к гармоническим (см. § 7). Приведем следующее исчерпывающее определение амплитуды и фазы колебаний, описываемых уравнением (3):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi);\quad \dot{x} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (13.30)$$

где $\omega_0$ — угловая частота, стоящая в левой части (3).

Дифференцируя равенства

$$A = \left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}};\quad \varphi = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{x}}{\omega_0 x} - \omega_0 t, \qquad (13.30a)$$

явно определяющие амплитуду и фазу, получаем

$$\dot{A} = \frac{\dot{x}}{\omega_0^2 A}(\ddot{x} + \omega_0^2 x);\quad \dot{\varphi} = -\frac{x}{\omega_0 A^2}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) \qquad (13.31)$$

или, если использовать (3),

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A}\dot{f}(x, \dot{x}, t)\dot{x};\quad \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 A^2}f(x, \dot{x}, t)x. \qquad (13.32)$$

В этих равенствах $x$, $\dot{x}$ должны быть выражены через $A$ и $\varphi$ по формулам (30). В целях краткости обозначим выражения, получающиеся в результате этого, через $G$ и $H$:

$$G(A, \varphi, t) = -\frac{1}{\omega_0} f(A\cos\Phi, -\omega_0 A\sin\Phi, t)\sin\Phi;$$

$$H(A, \varphi, t) = -\frac{1}{\omega_0 A} f(A\cos\Phi, -\omega_0 A\sin\Phi, t)\cos\Phi,$$

$$(\Phi = \omega_0 t + \varphi). \qquad (13.33)$$

Используя терминологию, предложенную в книге Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского *, назовем найденную систему уравнений

$$\dot{A} = \varepsilon G(A, \varphi, t);\quad \dot{\varphi} = \varepsilon H(A, \varphi, t) \qquad (13.34)$$

* Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний», ГИТТЛ, 1955.

«уравнениями в стандартной форме». В них, действительно, производные оказываются пропорциональными малому параметру. Функции $G$ и $H$ в общем случае содержат флюктуационное воздействие $\xi(t)$.

Найдем конкретный вид системы (34), соответствующий уравнению (24). Для этого согласно (32) следует умножить правую часть (24) на $\frac{\dot{x}}{\omega_0^2 A}$ и $-\frac{x}{\omega_0 A^2}$, после чего будем иметь

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 A}\left(\dot{x}^2 - \frac{4\dot{x}^4}{3\omega_0^2 A_0^2}\right) + \frac{\varepsilon}{A}\dot{x}\xi;$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{A^2}\left(1 - \frac{4\dot{x}^2}{3\omega_0^2 A_0^2}\right)\dot{x}x - \frac{\varepsilon\omega_0}{A^2}x\xi. \qquad (13.35)$$

Подставляя сюда выражения (30) и совершая преобразование от произведения и степени тригонометрических функций к функциям кратных углов, находим

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}A\left(1 - \cos 2\Phi - \frac{A^2}{A_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\cos 2\Phi - \frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\cos 4\Phi\right) - \varepsilon\omega_0\xi\sin\Phi;$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left[\left(1 - \frac{2}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\right)\sin 2\Phi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\sin 4\Phi\right] - \frac{\varepsilon\omega_0}{A}\xi\cos\Phi. \qquad (13.36)$$

Наряду с известными преимуществами уравнения в стандартной форме имеют одно неудобство. Оно заключается в том, что правые части $G$ и $H$ зависят не только от $A(t)$, $\varphi(t)$, $\xi(t)$, но и явно зависят от времени через тригонометрические функции от $\omega_0 t$. Такие функции дают быстрые колебания, и мы будем их называть «вибрационными». Например, в первом уравнении (36) член

$$\dot{A}\cos 2\Phi = A\cos(2\omega_0 t + 2\varphi) = A\cos 2\omega_0 t\cos 2\varphi -$$

$$- A\sin 2\omega_0 t\sin 2\varphi \qquad (13.37)$$

содержит вибрационные функции $\cos 2\omega_0 t$, $\sin 2\omega_0 t$ двойной частоты наряду с медленно меняющимися функциями

от $A$ и $\varphi$. Наша задача — исключить вибрационные функции и получить уравнения, которые не содержали бы пульсаций. Такие уравнения мы для краткости будем называть «упрощенными».

Как видно из (36), вибрации входят не только в регулярные члены типа (37), но и во флюктуационные члены

$$-\varepsilon\omega_0\xi(t)\sin(\omega_0 t+\varphi);\quad -\frac{\varepsilon\omega_0}{A}\xi(t)\cos(\omega_0 t+\varphi). \qquad (13.38)$$

В связи с этим задача исключения вибраций разделяется на два этапа, которые можно проводить в произвольном порядке.

Начнем с исключения вибраций из нефлюктуационных членов. Такие члены можно выделить, усредняя уравнения (34). Поэтому рассмотрим вспомогательные уравнения

$$\dot{A}=\varepsilon\langle G\rangle\equiv\varepsilon G_c(A,\varphi);\quad \dot{\varphi}=\varepsilon\langle H\rangle\equiv\varepsilon H_c(A,\varphi), \qquad (13.39)$$

имеющие в нашем конкретном случае вид

$$\dot{A}=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}A\left[1-\frac{A^2}{A_0^2}+\left(\frac{4}{3}\frac{A^2}{A_0^2}-1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos 2\Phi-\frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\cos 4\Phi\right];$$
$$\dot{\varphi}=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left[\left(1-\frac{2}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\right)\sin 2\Phi+\frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\sin 4\Phi\right] \qquad (13.40)$$

и зададимся целью исключить из них колебательные функции. В первом приближении это достигается путем простого усреднения за период в предположении неизменности амплитуды и фазы. В результате этого хорошо известного приема в уравнениях (40) останутся лишь безвибрационные члены

$$\dot{A}=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}A\left(1-\frac{A^2}{A_0^2}\right);\quad \dot{\varphi}=0. \qquad (13.41)$$

Такие уравнения обычно называют «укороченными».

Если требуется бóльшая степень точности, то нужно обратиться к регулярным методам. В более высоких приближениях, соответствующих любой требуемой точности, безвибрационные уравнения могут быть получены асим-

птотическими методами, разработанными Н. Н. Боголюбовым.

Изложим особый вариант этих методов. Существо метода состоит в том, что вводится преобразование переменных

$$A = A^* + \varepsilon u(A^*, \Phi^*);$$

$$\varphi = \varphi^* + \varepsilon v(A^*, \Phi^*) \cdot (\Phi^* = \omega_0 t + \varphi^*). \quad (13.42)$$

Это соответствует переходу к новой амплитуде $A^*$ и фазе $\varphi^*$, определенным несколько иначе, чем прежние амплитуда и фаза (30), (30а). Функции $u(A^*, \Phi^*)$, $v(A^*, \Phi^*)$ в равенствах (42), дающих новое определение, подбираются из тех соображений, чтобы уравнения для новой амплитуды и фазы, будучи эквивалентными уравнениям (39), не содержали вибраций.

Такие функции отыскиваются не вполне точно, а последовательными приближениями; другими словами, последовательно определяются члены разложения

$$u(A^*, \Phi^*) = u_1(A^*, \Phi^*) + \varepsilon u_2(A^*, \Phi^*) + \ldots;$$

$$v(A^*, \Phi^*) = v_1(A^*, \Phi^*) + \varepsilon v_2(A^*, \Phi^*) + \ldots. \quad (13.43)$$

Вместе с тем последовательно находятся члены безвибрационных уравнений

$$\dot{A}^* = \varepsilon G_c^*(A^*, \varphi^*) = \varepsilon G_1^* + \varepsilon^2 G_2^* + \ldots;$$

$$\dot{\varphi}^* = \varepsilon H_c^*(A^*, \varphi^*) = \varepsilon H_1^* + \varepsilon^2 H_2^* + \ldots. \quad (13.44)$$

Покажем, как это делается. Подставляя (42) в (39), имеем

$$\dot{A}^* + \varepsilon \dot{u} = \varepsilon G_c(A^* + \varepsilon u, \quad \varphi^* + \varepsilon v);$$

$$\dot{\varphi}^* + \varepsilon \dot{v} = \varepsilon H_c(A^* + \varepsilon u, \varphi^* + \varepsilon v). \quad (13.45)$$

Если здесь учесть, что

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial A^*} \dot{A}^* + \frac{\partial u}{\partial \Phi^*} \cdot (\omega_0 + \dot{\varphi}^*); \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial A^*} \dot{A}^* + \frac{\partial v}{\partial \Phi^*} \cdot (\omega_0 + \dot{\varphi}^*)$$

и подставить, кроме того, (44) в (45), то получим равенства

$$G_c^* + \omega_0 \frac{\partial u}{\partial \Phi^*} = G_c(A^* + \varepsilon u, \quad \varphi^* + \varepsilon v) -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial u}{\partial A^*} G_c^* - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \Phi^*} H_c^*;$$

$$H_c^* + \omega_0 \frac{\partial v}{\partial \Phi^*} = H_c(A^* + \varepsilon u,\ \varphi^* + \varepsilon v) -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial v}{\partial A^*} G_c^* - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \Phi^*} H_c^*, \qquad (13.46)$$

которые служат для определения функций $u$, $v$, $G^*$, $H^*$. Именно, записывая в них эти функции как разложения по $\varepsilon$ (43), (44) и приравнивая члены при одинаковых степенях $\varepsilon$, находим уравнения последовательных приближений:

$$G_1^* + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \Phi^*} = G_c(A^*, \varphi^*);$$

$$H_1^* + \omega_0 \frac{\partial v_1}{\partial \Phi^*} = H_c(A^*, \varphi^*) \qquad (13.47)$$

— в первом приближении и

$$G_2^* + \omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \Phi^*} = \frac{\partial G_c}{\partial A} u_1 + \frac{\partial G_c}{\partial \varphi} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial A^*} G_1^* - \frac{\partial u_1}{\partial \Psi^*} H_1^*;$$

$$H_2^* + \omega_0 \frac{\partial v_2}{\partial \Phi^*} = \frac{\partial H_c}{\partial A} u_1 + \frac{\partial H_c}{\partial \varphi} v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial A^*} G_1^* - \frac{\partial v_1}{\partial \Phi^*} H_1^* \qquad (13.48)$$

— во втором приближении. Каждое из последних равенств разделяется на две части: вибрационные члены относятся к $du/d\Phi^*$ и $dv/d\Phi^*$, а невибрационные к $G^*$ и $H^*$. Так для уравнения (40) в соответствии с (47) имеем

$$G_1^*(A, \varphi) = \frac{\omega_0}{2} A\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right); \quad H_1^*(A, \Phi) = 0; \qquad (13.49)$$

$$\frac{\partial u_1(A, \Phi)}{\partial \Phi} = \frac{A}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\frac{A^2}{A_0^4} - 1\right)\cos 2\Phi - \frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^4}\cos 4\Phi\right];$$

$$\frac{\partial v_1(A, \Phi)}{\partial \Phi} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{A^2}{A_0^4}\right)\sin 2\Phi + \frac{1}{6}\frac{A^2}{A_0^4}\sin 4\Phi. \qquad (13.50)$$

Отсюда

$$u_1(A, \Phi) = \frac{A}{8}\left[2\left(\frac{4}{3}\frac{A^2}{A_0^2} - 1\right)\sin 2\Phi - \frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\sin 4\Phi\right]; \qquad (13.51)$$

$$v_1(A, \Phi) = -\frac{1}{8}\left[2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\right)\cos 2\Phi + \frac{1}{3}\frac{A^2}{A_0^2}\cos 4\Phi\right].$$

Как видно из (49) первое приближение, действительно, дает тот же результат, что и простое усреднение (41). Для получения второго приближения следует обратиться к (48). На $G_2^*$, $H_2^*$ влияют

лишь невибрационные члены, которые не содержатся в членах типа $\frac{\partial u}{\partial A^*} G_1^*$. Поэтому

$$G_2^* = \text{невибрационные члены от } \left\{ \frac{\partial G_c}{\partial A} u_1 + \frac{\partial G_c}{\partial \varphi} v_1 \right\};$$

$$H_2^* = \text{невибрационные члены от } \left\{ \frac{\partial H_c}{\partial A} u_1 + \frac{\partial H_c}{\partial \varphi} v_1 \right\}.$$

Учитывая вид функций $G_c$, $H_c$, $u_1$, $v_1$ (40), (51), отсюда получаем

$$G_2^* = 0; \quad H_2^*(A, \varphi) = -\frac{\omega_0}{16}\left(2 - 4\frac{A^2}{A_0^2} + 3\frac{A^4}{A_0^4}\right). \quad (13.52)$$

Таким образом, преобразование (42), (43), (51) переводит уравнения (40) в безвибрационные уравнения

$$A^* = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A^{*2}}{A_0^2}\right)A^* + \varepsilon^3\ldots,$$

$$\varphi^* = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{16}\left(2 - 4\frac{A^{*2}}{A_0^2} + 3\frac{A^{*4}}{A_0^4}\right) + \varepsilon^3\ldots \quad (13.53)$$

Генерируемый сигнал $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ в силу (42) без труда выражается через безвибрационную амплитуду и фазу. Так, если оставить только первую поправку, то будем иметь

$$x = A^*\cos\Phi^* + \varepsilon u_1(A^*, \Phi^*)\cos\Phi^* - \\ - \varepsilon A^* v_1(A^*, \Phi^*)\sin\Phi^* \quad (13.54)$$

и, следовательно, согласно (51)

$$x = A^*\cos\Phi^* + \frac{\varepsilon}{4}A^*\left(\frac{A^{*2}}{A_0^2} - 1\right)\sin\Phi^* + \\ + \frac{\varepsilon}{24}\frac{A^{*3}}{A_0^2}\sin 3\Phi^*. \quad (13.55)$$

Отсюда видно, что амплитуда и фаза $A^*$, $\Phi^*$ не совпадают с амплитудой и фазой метода Крылова—Боголюбова в узком смысле, поскольку соответственно метод Крылова—Боголюбова требует отсутствия поправок к основной частоте. Как известно, имеется некоторый произвол в выборе безвибрационной амплитуды и фазы, приводящий к различию безвибрационных уравнений. Так, уравнения (53) можно перевести в уравнения метода Крылова—Боголюбова дополнительной заменой переменных $A^*$, $\varphi^*$ на $A_Б$, $\varphi_Б$. В соответствии с (55) амплитуды $A^*$ и $A_Б$ совпадают в первом

приближении, фазы же уже в первом приближении различаются на величину

$$\varphi_{\text{Б}} - \varphi^* = \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - \frac{A^{*2}}{A_0^2}\right).$$

Вернемся к полным уравнениям (34), (35). Преобразование переменных (42), (51) исключает вибрации из нефлюктуационных членов. Оно переводит уравнения (36) в уравнения

$$\dot{A}^* = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A^{*2}}{A_0^2}\right)A^* - \varepsilon\omega_0\xi\sin\Phi^* + \varepsilon^2\omega_0\xi \times$$

$$\times\left[-v_1\cos\Phi^* + \frac{\partial u_1}{\partial A^*}\sin\Phi^* + \frac{\partial u_1}{\partial\Phi^*}\frac{\cos\Phi^*}{A^*}\right];$$

$$\dot{\varphi}^* = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{16}\left(2 - 4\frac{A^{*2}}{A_0^2} + 3\frac{A^{*4}}{A_0^4}\right) - \frac{\varepsilon\omega_0}{A^*}\xi\cos\Phi^* + \frac{\varepsilon^2\omega_0}{A^*}\xi \times$$

$$\times\left[v_1\sin\Phi^* + u_1\frac{\cos\Phi^*}{A^*} + \frac{\partial v_1}{\partial A^*}\sin\Phi^* + \frac{\partial v_1}{\partial\Phi^*}\frac{\cos\Phi^*}{A^*}\right], \quad (13.56)$$

содержащие вибрации лишь в членах со случайной функцией. Хотя самые последние члены с $v_1$ и $u_1$ формально имеют порядок $\varepsilon^2$, их фактическая роль, как будет видно из дальнейшего, при не слишком больших временах корреляции относится к третьему и четвертому порядку. Это объясняется тем, что флюктуационные толчки в противоположные стороны частично компенсируют друг друга, что приводит к уменьшению влияния флюктуаций и делает желательным частичное изменение формальной схемы построения приближений. Поэтому уравнения второго приближения с упрощенной нефлюктуационной частью имеют вид

$$\dot{A}^* = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A^{*2}}{A_0^2}\right)A^* - \varepsilon\omega_0\xi\sin\Phi^*;$$

$$\dot{\varphi}^* = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{16}\left(2 - 4\frac{A^{*2}}{A_0^2} + 3\frac{A^{*4}}{A_0^4}\right) - \frac{\varepsilon\omega_0}{A^*}\xi\cos\Phi^*. \quad (13.57)$$

В дальнейшем мы для сокращения записи будем опускать звездочку, отмечающую безвибрационную амплитуду и фазу, записывая уравнения типа (57) в форме

$$\dot{A} = \varepsilon G^*(A, \Phi, \xi, \varepsilon); \quad \dot{\varphi} = \varepsilon H^*(A, \Phi, \xi, \varepsilon). \quad (13.58)$$

Здесь через $G^*$, $H^*$ обозначены выражения, стоящие в правой части (57). Можно опустить звездочку даже при этих функциях, так как это не вызовет какой-либо неясности.

### 4. Упрощение флюктуационных членов

Дальнейшее упрощение уравнений, описывающих поведение амплитуды и фазы, будет основано на предположении относительно малости времени корреляции $\tau_{кор}$ случайной функции $\xi(t)$. При этом мы сравниваем его не с периодом колебаний, а с временем релаксации амплитуды (которое по порядку величины равно $1/\varepsilon\omega_0$), требуя выполнения неравенства

$$\tau_{кор} \ll \frac{1}{\varepsilon\omega_0}. \qquad (13.59)$$

Это условие означает, что воздействующий на генератор шум является значительно более широкополосным, чем генерируемый сигнал, что выполняется во многих практических случаях. Противоположный случай будет рассмотрен в § 17. Условие (59) является вполне естественным с точки зрения метода малого параметра, так как при достаточно малом $\varepsilon$ оно заведомо будет выполняться, если только скорость флюктуаций не зависит от $\varepsilon$.

При выполнении неравенства (59) можно применять к данной задаче стохастические методы, т. е. рассматривать эволюцию амплитуды как процесс без последействия. В соответствии с содержанием § 4 (разд. 8, 9) на основе уравнений (58) может быть построено обобщенное уравнение Фоккера — Планка, представляющее собой ряд, члены которого убывают в сущности как степени от величины $\varepsilon\omega_0\tau_{кор} \ll 1$.

При учете лишь членов порядка $\varepsilon$ и $\varepsilon^2$, т. е. в диффузионном приближении, указанное уравнение согласно формуле (4.194) имеет вид

$$\dot{w}(A, \varphi) = -\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\varepsilon\langle G\rangle + \varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{0} K\left\{\frac{\partial G}{\partial A}, G_\tau\right\}d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{0} K\left\{\frac{\partial G}{\partial \varphi}, H_\tau\right\}d\tau\right] w\right\} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\left[\varepsilon\langle H\rangle + \right.\right.$$

$$+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial H}{\partial A},\ G_\tau\right\}d\tau+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial H}{\partial\varphi},\ H_\tau\right\}d\tau\Bigg]w\Bigg\}+$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left[\int_{-\infty}^{0}K\{G,\ G_\tau\}\,d\tau w\right]+\varepsilon^2\frac{c^2}{\partial A\partial\varphi}\left[\int_{-\infty}^{0}(K\{G,\ H_\tau\}+\right.$$

$$\left.+K\{H,\ G_\tau\})\,d\tau w\right]+\varepsilon^2\frac{c^2}{\partial\varphi^2}\left[\int_{-\infty}^{0}K\{H,\ H_\tau\}\,d\tau w\right]. \quad (13.60)$$

[$\varepsilon G=\varepsilon G^*$; $\varepsilon H=\varepsilon H^*$ — правые части (58)].

Здесь при усреднении и при вычислении корреляционных функций амплитуда $A$ и фаза $\varphi$, входящие в $G$ и $H$ рассматриваются не как случайные величины, а как фиксированные аргументы. Для корреляционных функций применено обозначение

$$K\{P,\ Q\}=\langle PQ\rangle-\langle P\rangle\langle Q\rangle,$$

и при их вычислении необходимо учитывать лишь флюктуационные части выражений $G^*$ и $H^*$, т. е. — $\varepsilon\omega_0\xi\sin\Phi$ и $-A^{-1}\varepsilon\omega_0\xi\cos\Phi$ в случае (57).

Вследствие наличия во флюктуационных членах вибрационных функций правая часть уравнения (60), наряду с плавно меняющимися членами, будет содержать вибрационные члены частоты $2\omega_0$. Поскольку мы интересуемся плавными изменениями амплитуды и фазы, а не высокочастотными колебаниями, напрашивается мысль отбросить вибрационные члены, произведя некоторым образом усреднение за период.

Такое упрощение допустимо, но лишь со следующей оговоркой. Вибрационный член, имеющий, скажем, порядок $\varepsilon$, не только описывает вибрации плотности распределения порядка $\varepsilon$, но и влияет на ее плавное изменение, правда, в высшем порядке $\varepsilon^2$. Вибрационные члены в интегральных членах (60) имеют порядок $\varepsilon^2$, поэтому они влияют на плавное изменение в более высоком порядке, который можно не учитывать, так как само уравнение (60) не имеет точности выше второго порядка. Это позволяет отбрасывать вибрационные члены второго порядка. Вибрационные члены первого порядка в $\langle G\rangle$ и $\langle H\rangle$, если бы мы их не удалили ранее, внесли бы значительное усложнение, так как потребовалось бы учесть их влияние на плавное изменение плотности распределения во втором порядке. Чтобы избежать этого усложнения, мы и потребовали пред-

варительного исключения вибраций из нефлюктуационной части, приведенного в предыдущем разделе.

Из (60) легко видеть, что флюктуационный член, имеющий порядок $\varepsilon$ (содержащий $\varepsilon\xi$), фактически влияет на изменение плотности распределения в порядке $\varepsilon^2$. При этом большей точности, чем $\varepsilon^2$, диффузионное уравнение (60) не имеет. Это оправдывает, в частности, сделанное ранее пренебрежение членами типа $\varepsilon^2\xi\cos\Phi\, v_1$ в (56) Фактический порядок остающихся членов ($\varepsilon\xi\sin\Phi$ и $\varepsilon\xi\cos\Phi$) — второй, а так как этот порядок соответствует максимальной точности, то третьего приближения по рецептам (46)—(48) находить не имеет смысла.

Иначе обстоит дело, если случайное воздействие взято в форме $\varepsilon^r\xi_r$ (см стр. 345). Тогда фактический порядок флюктуационных членов равен $2r$. Путем построения последовательных приближений и переопределения амплитуды и фазы следует из $\langle G\rangle$ и $\langle H\rangle$ предварительно удалить как минимум вибрации порядков от $\varepsilon$ до $\varepsilon^{2r}$ включительно Таким образом, минимальное число последовательных приближений равно $2r$; более высокое приближение, чем $(2r)$ — е находить не имеет смысла.

В частности, если флюктуации взяты в виде $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_{\frac{1}{2}}$, то достаточно вычислить $G_1{}^*$, $H_1{}^*$; все члены уравнений в стандартной форме будут в сущности первого порядка, так же, как и в уравнении Фоккера—Планка Если $r=1$, как мы принимали ранее, то достаточно учета функций первого и второго приближений (47), (48). Уравнение Фоккера—Планка имеет точность $\varepsilon^2$ При выборе формы $\varepsilon^2\xi_2$, следовало бы вычислить также функции $u_2$, $v_2$, $u_3$, $v_3$, с их помощью определить новую амплитуду и фазу, записать для последних уравнения, содержащие $G_1{}^*$, $H_1{}^*$, . . , $G_4{}^*$, $H_4{}^*$. Полученные уравнения будут иметь точность $\varepsilon^4$.

После этих общих замечаний, вернемся к конкретному случаю (57), для которого остается лишь удалить вибрации из интегральных членов (60), обусловленных флюктуациями. Рассмотрим один из таких членов. Подставляя вместо $\varepsilon G$, его случайную составляющую — $\varepsilon\omega_0\xi(t)\sin\Phi$, имеем

$$\int_{-\infty}^{0} K\{G,\ G_\tau\}\,d\tau = \omega_0{}^2\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\sin\Phi\sin\Phi_\tau d\tau.$$

Используя тождество

$$\sin\Phi\sin\Phi_\tau = \frac{1}{2}\cos(\Phi_\tau-\Phi) - \frac{1}{2}\cos 2\Phi\cos(\Phi_\tau-\Phi) +$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2\Phi\sin(\Phi_\tau-\Phi),$$

преобразуем это выражение к виду

$$\int_{-\infty}^{0} K\{G,\ G_\tau\}\,d\tau = \frac{\omega_0^2}{2}(1-\cos 2\Phi)\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\omega_0\tau d\tau +$$

$$+\frac{\omega_0^2}{2}\sin 2\Phi\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\sin\omega_0\tau d\tau.$$

В случае стационарного случайного процесса $\xi(t)$, когда $<\xi\xi_\tau>$ зависит только от $\tau$, последние интегралы в правой части равенства постоянны. Поэтому быстрота изменения во времени всего выражения определяется тригонометрическими множителями. Выделяя плавно меняющуюся часть, имеем

$$\int_{-\infty}^{0} K\{G,\ G_\tau\}\,d\tau = \frac{\omega_0^2}{2}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\omega_0\tau d\tau + \text{вибр. члены.}$$

Таким образом, в (60) можно сделать замену

$$\int_{-\infty}^{0} K\{G,\ G_\tau\}\,d\tau \to \frac{\omega_0^2}{4}\varkappa(\omega_0), \qquad (13.61)$$

где

$$2\varkappa(\omega_0) = 2\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\omega_0\tau d\tau = S[\xi,\ \omega_0] \qquad (13.62)$$

— спектральная плотность шума $\xi(t)$ на частоте $\omega_0$.

Другие два члена, которые можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{0}(K\{G,\ H_\tau\}+K\{H,\ G_\tau\})\,d\tau = \frac{\omega_0^2}{A}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\times$$

$$\times\sin(\Phi+\Phi_\tau)\,d\tau = \frac{\omega_0^2}{A}\sin 2\Phi\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\omega_0\tau d\tau +$$

$$+\frac{\omega_0^2}{A}\cos 2\Phi\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\sin\omega_0\tau d\tau,$$

содержат исключительно вибрационные члены. Последний член при второй производной в (60)

$$\int_{-\infty}^{0} K\{H,\ H_\tau\}\,d\tau = \frac{\omega_i^2}{A^2}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\Phi\cos\Phi_\tau d\tau$$

преобразуется по аналогии с (61)

$$\int_{-\infty}^{0} K\{H,\ H_\tau\}\,d\tau = \frac{\omega_0^2}{4A^2}\varkappa(\omega_0) + \text{вибр. члены.} \qquad (13.63)$$

Точно таким же способом могут быть рассмотрены интегральные члены при первых производных в уравнении (60). Первый из них сразу же выпадает вследствие того, что флюктуационная часть выражения $G$ не зависит от $A$. Из других членов, которые имеют вид

$$\int_{-\infty}^{0} K\left\{\frac{\partial G}{\partial\varphi},\ H_\tau\right\}d\tau = \frac{\omega_0^2}{A}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\Phi\cos\Phi_\tau d\tau;$$

$$\int_{-\infty}^{0}\left[K\left\{\frac{\partial H}{\partial A},\ G_\tau\right\} + K\left\{\frac{\partial H}{\partial\varphi},\ H_\tau\right\}\right]d\tau =$$

$$= -\frac{\omega_0^2}{A^2}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\sin(\Phi+\Phi_\tau)\,d\tau,$$

невибрационную часть имеет лишь один:

$$\int_{-\infty}^{0} K\left\{\frac{\partial G}{\partial\varphi},\ H_\tau\right\}d\tau = \frac{\omega_0^2}{4A}\varkappa(\omega_0) + \text{вибр. члены.} \qquad (13.64)$$

После удаления вибраций из флюктуационной части в соответствии с (61) — (64) уравнение Фоккера — Планка (60) принимает форму

$$\dot{w} = -\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\varepsilon\langle G\rangle + \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{4A}\varkappa(\omega_0)\right]w\right\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}[\varepsilon\langle H\rangle w] + \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{4}\varkappa(\omega_0)\left(\frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)w. \qquad (13.65)$$

Последнее уравнение эквивалентно следующим «полностью упрощенным» уравнениям

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)A + \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{4A}\varkappa(\omega_0) + \varepsilon\omega_0\eta_1(t); \quad (13.66)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{16}\left(2 - 4\frac{A^2}{A_0^2} + 3\frac{A^4}{A_0^4}\right) + \frac{\varepsilon\omega_0}{A}\zeta(t), \quad (13.67)$$

где $\eta$, $\zeta$ — одинаковые взаимно независимые гауссовы случайные функции, имеющие нулевое среднее значение и функцию корреляции

$$\langle\eta_t\eta_\tau\rangle = \langle\overset{\tau\tau}{\zeta\zeta}_\tau\rangle = \frac{\varkappa(\omega_0)}{2}\delta(\tau). \quad (13.68)$$

В самом деле, если мы построим уравнение Фоккера — Планка для системы (66), (67) по общему рецепту (60), то получим уравнение, совпадающее с (66).

Упрощение флюктуационных членов, приводящее от уравнений (57) к (66), (67), можно, конечно, произвести также и другими способами. Один из них состоит в рассмотрении уравнений, аналогичных (57), в декартовых координатах $A\cos\varphi$, $A\sin\varphi$, по отношению к которым $A$ и $\varphi$ являются полярными координатами и в которых флюктуационные члены имеют более простой вид (не зависят от координат). Мы кратко изложим другой способ; он хотя и нестрогий, но довольно близко примыкает к изложенному ранее методу, давая в какой-то степени наглядную интерпретацию некоторым членам, входящим в уравнение (60).

Обозначим в (57)

$$\eta_{i_1}(t) = -\xi(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t));$$
$$\zeta_1(t) = -\xi(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (13.69)$$

В этих функциях фаза $\varphi(t)$ коррелирована со значением случайной функции $\xi(t)$, и это обстоятельство сильно затрудняет вычисление их среднего значения и корреляционных функций. Мы считаем, однако, что время корреляции процесса $\xi(t)$ довольно мало (59), так что можно подобрать такой сдвиг во времени $\Delta$, чтобы одновременно выполнялись соотношения

$$\Delta \gg \tau_{\text{кор}};$$
$$|A(t) - A(t-\Delta)| \cong |A - A_{-\Delta}| \ll A_0;$$
$$|\varphi - \varphi_{-\Delta}| \ll 1. \quad (13.70)$$

Это значит, что в течение времени $\Delta$, хотя оно и превосходит время корреляции, амплитуда и фаза не успевают сильно измениться. При этом значения $A(t-\Delta) \equiv A_{-\Delta}$, $\varphi(t-\Delta) \equiv \varphi_{-\Delta}$, будучи близки к $A(t)$, $\varphi(t)$, существенно отличаются от них тем, что уже статистически независимы от $\xi(t)$. Вследствие указанной близости, выражение (69) можно приближенно записать так:

$$\eta_1 \approx -\xi \sin(\omega_0 t + \varphi_{-\Delta}) - \xi \cos(\omega_0 t + \varphi_{-\Delta})\Delta\varphi;$$
$$\zeta_1 \approx -\xi \cos(\omega_0 t + \varphi_{-\Delta}) + \xi \sin(\omega_0 t + \varphi_{-\Delta})\Delta\varphi \quad (13.71)$$
$$(\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{-\Delta}).$$

Статистическая независимость позволяет производить усреднение по $\xi$ и по $\varphi_{-\Delta}$ раздельно, в результате среднее значение от (71) примет вид:

$$\langle \eta_1 \rangle = -\cos(\omega_0 t + \varphi)\langle \xi \Delta\varphi \rangle;$$
$$\langle \zeta_1 \rangle = \sin(\omega_0 t + \varphi)\langle \xi \Delta\varphi \rangle. \quad (13.72)$$

Интегрируя уравнение для фазы, имеем

$$\Delta\varphi = \varepsilon \int_{t-\Delta}^{t} H dt = \varepsilon \int_{-\Delta}^{0} H_\tau d\tau.$$

Вследствие этого, учитывая вид флюктуационной части выражения $H$, получим

$$\langle \xi \Delta\varphi \rangle = -\varepsilon\omega_0 \int_{-\Delta}^{0} \left\langle \xi \frac{\xi_\tau}{A_\tau} \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \right\rangle d\tau. \quad (13.73)$$

Используем еще раз малую величину разности между $A_\tau$, $\varphi_\tau$ и значениями $A_{\tau-\Delta}$, $\varphi_{\tau-\Delta}$, которые уже независимы от $\xi_\tau$, $\xi$, и преобразуем (73) к виду

$$\langle \xi \Delta\varphi \rangle = -\frac{\varepsilon\omega_0}{A} \int_{-\infty}^{0} \langle \xi \xi_\tau \rangle \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi)\, d\tau. \quad (13.74)$$

Здесь нижний предел интегрирования мы распространили до $-\infty$ вследствие того, что уже при $|\tau| > \Delta \gg \tau_{кор}$ подынтегральная корреляционная функция исчезает.

Подставляя найденное выражение (74) в первое равенство (72), определяющее $\langle\eta_1\rangle$, получаем

$$\langle\eta_1\rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{A}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos(\omega_0 t+\varphi)\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau+\varphi)\,d\tau =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega_0}{4A}\varkappa(\omega_0) + \text{вибр. члены}, \qquad (13.75)$$

что в точности совпадает с выражением (64), дающим в (65), (66) член $\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4A}\varkappa(\omega_0)$. Таким образом, этот член вошел в (66) вследствие того, что корреляции между $\xi(t)$ и $\varphi(t)$ дали отличное от нуля среднее значение флюктуационного члена $\varepsilon\omega_0\eta_1$.

Путем подстановки (74) во второе равенство (72) убеждаемся, что среднее значение второго флюктуационного члена содержит лишь вибрационные компоненты, которые в среднем за период дают нуль.

Найдем корреляционную функцию процессов $\eta=\eta_1-\langle\eta_1\rangle$; $\zeta=\zeta_1$, имеющих нулевое среднее значение. Наличие вторых членов в (71) влияет лишь на среднее значение, поэтому можно полагать

$$\eta = -\xi\sin\Phi - \frac{\varepsilon\omega_0}{4A}\varkappa(\omega_0) \approx -\xi\sin(\omega_0 t+\varphi_{-\Delta}); \qquad (13.76)$$

$$\zeta = -\xi\cos\Phi \approx -\xi\cos(\omega_0 t+\varphi_{-\Delta}).$$

Поскольку время корреляции значительно меньше времени релаксации, случайные возмущения действуют как если бы они были некоррелированными, и фактическую функцию корреляции можно заменить на дельта-образную

$$\langle\eta\eta_\tau\rangle \to \delta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\langle\eta\eta_\tau\rangle\,d\tau. \qquad (13.77)$$

Коэффициент интенсивности $\int\langle\eta\eta_\tau\rangle\,d\tau$ здесь подобран так, чтобы при интегрировании обеих частей по $\tau$ мы получили тождество.

Учитывая (76), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta\eta_\tau \rangle d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi\xi_\tau \rangle \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi\xi_\tau \rangle \cos(\omega_0 \tau + \varphi_\tau - \varphi)\, d\tau + \text{вибр. члены} \approx$$

$$\approx \frac{\varkappa(\omega_0)}{2} + \text{вибр. члены} \qquad (13.78)$$

(так как $|\varphi_\tau - \varphi| \ll 1$ при $\tau \sim \tau_{\text{кор}}$)

и совершенно аналогично для $\zeta$. Принимая во внимание (77), (78), легко заметить, что функции (76) в отношении их безвибрационного действия совпадают с функциями (68), что оправдывает переход от (57) к упрощенным уравнениям (66), (67).

Удобно ввести безразмерный параметр

$$c = \frac{\varepsilon\omega_0 \varkappa(\omega_0)}{A_0^2}, \qquad (13.79)$$

характеризующий интенсивность флюктуационных воздействий. Переходя к безразмерной амплитуде $a = A/A_0$, уравнения (66), (67) можно записать в следующем простом виде:

$$\frac{2}{\varepsilon\omega_0} \dot{a} = a - a^3 + \frac{c}{2a} + 2\frac{\eta}{A_0},$$

$$\frac{2}{\varepsilon\omega_0} \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{8}(2 - 4a^2 + 3a^4) + \frac{2}{a}\frac{\zeta}{A_0}. \qquad (13.80)$$

## § 14. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1. Флюктуации амплитуды как процесс Маркова. Уравнение Фоккера—Планка

В настоящем параграфе сделаем краткий обзор методов решения полученных уравнений, имея в виду, что более полно читатель сможет познакомиться с ними в последующих параграфах.

Начнем с метода, основанного на рассмотрении уравнения Фоккера — Планка. Применимость этого метода ограничена лишь условием малости времени корреляции

по сравнению с временными постоянными, определяющими скорость изменения амплитуды и фазы со временем. Указанное условие, имеющее в рассмотренном случае вид (59), позволяет рассматривать процесс изменения амплитуды и фазы как процесс Маркова, а флюктуационные возмущения — как дельта-коррелированные, совершая замену типа (77). Это обеспечивает справедливость уравнения Фоккера — Планка для плотности распределения амплитуды и фазы.

Описанный метод одинаково применим как при большой, так и при малой интенсивности флюктуационных воздействий. Пожалуй, наиболее характерным для него является то, что он даже в типично нелинейных случаях позволяет находить одномерные стационарные плотности распределения, а также решать задачи, связанные с достижением границ. Задача отыскания корреляционной функции в нелинейном случае поддается решению значительно труднее.

Обратимся для примера к первому уравнению (13.80). При помощи случайной функции

$$\eta' = \frac{\omega \varepsilon_0}{A_0}\,\eta, \quad \Big(\langle \eta_t' \rangle = 0;$$

$$\langle \eta_t' \eta_{t+\tau}' \rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} c\delta(\tau); \quad c = \varepsilon\omega_0 A_0^{-2}\varkappa(\omega_0)\Big) \qquad (14.1)$$

его можно записать в виде

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right) + \eta_t'. \qquad (14.2)$$

Будем представлять себе для наглядности плотность распределения вероятности $w(a)$ на оси $a$ как плотность некоторого вещества, введенного в однородную среду, и будем говорить об изменении вероятности, как о диффузии этого вещества. Случайная реализация $a(t)$ описывается движением изображающей точки на оси $a$, являющейся как бы «молекулой» этого вещества, траектория которой весьма запутана.

В соответствии с (2) средняя скорость изображающей точки в выбранном месте оси $a$ равна $\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right)$. Умножив ее на плотность таких точек («моле-

кул») $w(a)$, мы получим конвекционный поток изображающих точек или вероятности

$$\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right)w(a).$$

Наличие градиента концентрации $dw(a)/da$ приводит, кроме того, к появлению диффузионного потока, который пропорционален градиенту концентрации. В итоге полный поток вероятности равен

$$G(a) = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right)w - \frac{\varepsilon\omega_0 c}{4}\frac{dw}{da}. \qquad (14.3)$$

Уравнение непрерывности

$$\dot{w}(a) = -\frac{dG(a)}{da} \qquad (14.4)$$

согласно (3) есть не что иное, как уравнение Фоккера — Планка (4.33)

$$\dot{w} = -\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right)w\right] + \frac{\varepsilon\omega_0 c}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}. \qquad (14.5)$$

Одномерное уравнение Фоккера — Планка (5) может быть получено из двумерного (13.65) путем интегрирования обеих частей равенства по φ.

Отыскание изменения $w(a)$ во времени по уравнению (5) затруднительно, когда задача нелинейна, т. е. когда соответствующее ему уравнение для случайных функций (2) нелинейно (как это имеет место в данном случае). Однако стационарное распределение амплитуд может быть получено без большого труда по формуле (4.49).

Любое начальное распределение вероятностей, изменяясь во времени в соответствии с уравнением (5), приближается к определенному стационарному распределению, которое уже не меняется во времени. Полагая в (5) временную производную $\dot{w}$ равной нулю, получаем уравнение

$$\frac{c}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} - \frac{\partial}{\partial a}\left[\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right)w\right] = 0, \qquad (14.6)$$

которому удовлетворяет стационарное распределение. Интегрируя его, находим

$$\frac{c}{2}\frac{dw}{da} - \left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right)w = \text{const}. \qquad (14.7)$$

Последнее равенство означает, что поток вероятности (3) через все сечения один и тот же. Разумеется, это необходимо для того, чтобы вероятность нигде не накапливалась. Однако в данном случае можно сказать большее. Изображающие точки не могут систематически уходить в бесконечность или приходить из нее, так как практически величина амплитуды всегда ограничена. Следовательно, при очень больших значениях амплитуды поток вероятности равен нулю, а значит он равен нулю и при любых других значениях амплитуды:

$$\frac{dw}{da} - \left(2\frac{a - a^3}{c} + \frac{1}{a}\right)w = 0.$$

В результате интегрирования этого уравнения находим

$$w(a) = \frac{a}{N'} e^{\frac{1}{c}\left(a^2 - \frac{a^4}{2}\right)} = \frac{2a}{N} e^{-\frac{1}{2c}(a^2-1)^2}, \qquad (14.8)$$

где $N$ — постоянная, определяемая из условия нормировки

$$\int_0^\infty \tilde{w}(a)\, da = 1.$$

Вычисление последнего интеграла дает

$$N = \left(\frac{\pi c}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{\sqrt{2c}}\right). \qquad (14.9)$$

Вид стационарной функции распределения $w(a)$ для нескольких значений параметра $c$, определяющего относительную интенсивность флюктуационных воздействий, показан на рис. 14.1. Плотность вероятности достигает максимального значения при

$$a_{\text{макс}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2c}}. \qquad (14.10)$$

Чем меньше шум, тем ближе это наиболее вероятное значение амплитуды к единице, т. е. к стационарной амплитуде в отсутствие флюктуаций. Из приведенных графиков видно, что с уменьшением $c$ острота максимумов вероятности быстро возрастает. При больших зна-

чениях $c$, напротив, максимум вероятности носит слабо выраженный характер и амплитуда может принимать значения в широкой области.

Зная плотность распределения (8), можно найти моменты амплитуды

$$\langle a^k\rangle = \frac{1}{N}\int_{-1}^{\infty}(1+x)^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{x^2}{2c}}dx. \qquad (14.11)$$

Здесь произведена замена переменной $x=a^2-1$.

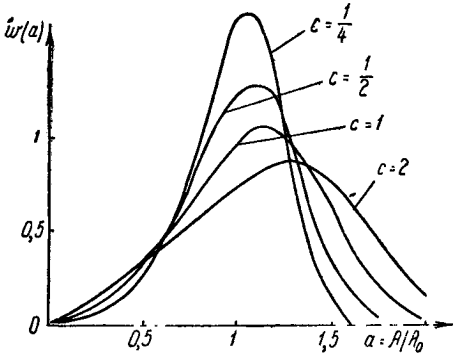



Рис. 14 1. Стационарное распределение амплитуды при наличии широкополосных флюктуаций

Для их вычисления удобно использовать рекуррентную формулу, получаемую из (11) путем интегрирования по частям,

$$\langle a^{k+2}\rangle - \langle a^k\rangle = \frac{1}{N}\int_{-1}^{\infty}(1+x)^{\frac{k}{2}}xe^{-\frac{x^2}{2c}}dx =$$

$$= -\frac{c}{N}(1+x)^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{x^2}{2c}}\Big|_{-1}^{\infty} + \frac{ck}{2N}\int_{-1}^{\infty}(1+x)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2c}}dx. \qquad (14.12)$$

Полагая здесь $k=0$, имеем

$$\langle a^2\rangle = 1 + \frac{c}{N}e^{-\frac{1}{2c}}. \qquad (14.13)$$

Если $k>0$, то

$$\langle a^{k+2}\rangle - \langle a^k\rangle = \frac{ck}{2}\langle a^{k-2}\rangle, \qquad (14.14)$$

и в частности

$$\langle a^4\rangle = \langle a^2\rangle + c = 1 + c + \frac{c}{N}\, e^{-\frac{1}{2c}};$$

$$\langle a^6\rangle = \langle a^4\rangle + 2c\langle a^2\rangle = 1 + 3c + (1+2c)\,\frac{c}{N}\, e^{-\frac{1}{2c}}. \quad (14.15)$$

Чтобы воспользоваться формулой (14) для отыскания нечетных моментов, требуется предварительно найти моменты $\langle a^{-1}\rangle$ и $\langle a\rangle$.

Удобно ввести особые обозначения для следующих интегралов:

$$Z_1(y) = 2\int_0^\infty e^{-t^4 - 4yt^2}\,dt; \quad Z_2(y) = 2\int_0^\infty e^{-t^4 - 4yt^2} t^2\,dt, \quad (14.16)$$

через которые указанные моменты выражаются по формулам

$$\langle a^{-1}\rangle = \frac{2}{N} e^{-\frac{1}{2c}} \int_0^\infty e^{-\frac{a^4}{2c} + \frac{a^2}{c}}\,da = \frac{(2c)^{\frac{1}{4}}}{N} e^{-\frac{1}{2c}} Z_1\left(-\frac{1}{2\sqrt{2c}}\right);$$

$$\langle a\rangle = \frac{2}{N} e^{-\frac{1}{2c}} \int_0^\infty e^{-\frac{a^4}{2c} + \frac{a^2}{c}} a^2\,da =$$

$$= \frac{(2c)^{\frac{3}{4}}}{N} e^{-\frac{1}{2c}} Z_2\left(-\frac{1}{2\sqrt{2c}}\right). \quad (14.17)$$

Как показывает вычисление, интегралы (16) представляются через цилиндрические функции дробного порядка:

$$Z_1(y) = y^{\frac{1}{2}} e^{2y^2} K_{\frac{1}{4}}(2y^2) \quad (y > 0);$$

$$Z_1(y) = |y|^{\frac{1}{2}} e^{2y^2}\left[K_{\frac{1}{4}}(2y^2) + \pi\sqrt{2} I_{\frac{1}{4}}(2y^2)\right] \quad (y < 0);$$

$$Z_2(y) = y^{\frac{3}{2}} e^{2y^2}\left[K_{\frac{3}{4}}(2y^2) - K_{\frac{1}{4}}(2y^2)\right] \quad (y > 0); \quad (14.18)$$

$$Z_2(y) = |y|^{\frac{3}{2}} e^{2y^2}\left[K_{\frac{3}{4}}(2y^2) + K_{\frac{1}{4}}(2y^2) + \pi\sqrt{2}I_{\frac{3}{4}}(2y^2) + \right.$$

$$\left. + \pi\sqrt{2}I_{\frac{1}{4}}(2y^2)\right] \quad (y < 0).$$

Таблицы функций $Z_1$, $Z_2$, из которых последняя будет нами использована также в дальнейшем (разд. 1, § 16), приведены в приложении. При помощи этих функций может быть найден ход зависимости моментов (17) от $c$. Вследствие флюктуационного разброса средние значения $\langle a\rangle$ и $\langle a^{-1}\rangle$ при $c \sim 1$ отличаются от единицы, но не очень сильно (на несколько десятков процентов).

Когда интенсивность флюктуационных воздействий относительно мала, т. е. когда $c \ll 1$, можно воспользоваться известными асимптотическими выражениями для цилиндрических функций, входящих в (18), и получить

$$\langle a^{-1}\rangle = 1 + \frac{3}{8}c + c^2\ldots;$$

$$\langle a\rangle = 1 - \frac{1}{8}c + c^2\ldots \qquad (14.19)$$

С еще большей точностью согласно (13) при малом $c$ имеем

$$\langle a^2\rangle \approx 1. \qquad (14.20)$$

Последние равенства позволяют найти приближенное значение флюктуационного разброса амплитуды

$$Da \equiv \langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2 = \frac{c}{4} + c^2\ldots,$$

$$\langle (A - A_0)^2\rangle = (\langle a^2\rangle - 2\langle a\rangle + 1)A_0^2 =$$

$$= \frac{c}{4}A_0^2 + c^2\ldots, \qquad (14.21)$$

что справедливо при $c \ll 1$.

Мы пока ограничимся приведенными результатами, отложив рассмотрение поведения фазы до разд. 1, § 16.

## 2. Метод линеаризации

Методы, основанные на уравнении Фоккера — Планка и уравнениях, содержащих дельта-коррелированные функции, неприменимы, если время корреляции флюктуаций не является малым по сравнению с временем релаксации, т. е. если не выполняется условие (13.59). Метод линеаризации, к изложению которого мы переходим, удобен тем, что его применимость не ограничена какими-либо условиями, касающимися времени корреляции. Вместе с тем он имеет по сравнению с указанным стохастическим методом тот недостаток, что накладывает ограничения на величину флюктуаций. Для его применимости необходимо, чтобы можно было, используя малость флюктуаций, линеаризовать основные уравнения относительно отклонений от невозмущенных значений, пренебрегая нелинейными членами.

При рассмотрении автоколебаний в приближении линеаризации нет особой необходимости исключать пульсации из флюктуационной части стандартных уравнений, так как их наличие не препятствует решению задачи. Упрощение же нефлюктуационной части производится тем же способом, что и ранее. Для этого отыскивается такое преобразование (13.42), которое переводит усредненные уравнения (13.39) в безвибрационные уравнения (13.44). Последние описывают плавные изменения амплитуды и фазы, совершающиеся без флюктуаций.

Отмечая плавные усредненные траектории индексом п, запишем эти уравнения так:

$$\dot{A}_{\text{п}} = G_{\text{с}}^{*}(A_{\text{п}}, \varphi_{\text{п}}); \quad \dot{\varphi}_{\text{п}} = H_{\text{с}}^{*}(A_{\text{п}}, \varphi_{\text{п}}). \qquad (14.22)$$

Полные стандартные уравнения (13.34) переходят при указанном преобразовании (13.42) в уравнения (13.58)

$$\dot{A}^{*} = G^{*}(A^{*}, \varphi^{*}, \xi); \quad \dot{\varphi}^{*} = H^{*}(A^{*}, \varphi^{*}, \xi), \qquad (14.23)$$

которые дают траектории уже с учетом флюктуаций.

В приближении линеаризации отклонения

$$\delta A = A^{*} - A_{\text{п}}; \quad \delta\varphi = \varphi^{*} - \varphi_{\text{п}} \qquad (14.24)$$

от плавно меняющихся значений должны быть малы вследствие малости случайных воздействий. Вычитая (22) из (23) и ограничиваясь линейными членами раз-

ложения по $\delta A$ и $\delta\varphi$ с усредненными коэффициентами, получаем следующие линейные уравнения:

$$\delta\dot{A} = \frac{\partial G_c^*}{\partial A^*}(A_п, \varphi_п)\,\delta A +$$

$$+ \frac{\partial G_c^*}{\partial \varphi^*}(A_п, \varphi_п)\,\delta\varphi + G^*(A_п, \varphi_п, \xi) - G_c^*(A_п, \varphi_п);$$

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\partial H_c^*}{\partial A^*}(A_п, \varphi_п)\,\delta A + \frac{\partial H_c^*}{\partial \varphi}(A_п, \varphi_п)\,\delta\varphi +$$

$$+ H^*(A_п, \varphi_п, \xi) - H_c^*(A_п, \varphi_п), \qquad (14.25)$$

которые часто оказываются линейными также и по $\xi(t)$.

Применим изложенную программу к уравнениям (13.57), которые имеют точную, неупрощенную флюктуационную часть. Линеаризованные уравнения (25) в этом случае приобретают вид

$$\delta\dot{A} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - 3\frac{A_п^2}{A_0^2}\right)\delta A - \varepsilon\omega_0\xi\sin(\omega_0 t + \varphi_п),$$

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon^2\omega_0}{4}\left(2\frac{A_п}{A_0^2} - 3\frac{A_п^3}{A_0^4}\right)\delta A -$$

$$- \frac{\varepsilon\omega_0}{A_п}\xi\cos(\omega_0 t + \varphi_п), \qquad (14.26)$$

где $A_п$, $\varphi_п$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{A}_п = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A_п^2}{A_0^2}\right)A_п; \qquad (14.27)$$

$$\dot{\varphi}_п = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{16}\left(2 - 4\frac{A_п^2}{A_0^2} + 3\frac{A_п^4}{A_0^4}\right).$$

Для примера рассмотрим флюктуационные отклонения

$$\delta A = A^* - A_0; \quad \delta\varphi = \varphi^* - \varphi_п$$

от стационарного значения амплитуды $A_п = A_0$ и от фазы

$$\varphi_п = -\frac{\varepsilon^2}{16}\omega_0 t + \varphi_0, \qquad (14.28)$$

где $\varphi_0$ — некоторая начальная фаза, которую мы считаем случайной величиной, равномерно распределенной на интервале от 0 до $2\pi$.

Уравнения (26) при этом принимают вид

$$\delta\dot{A} = -\varepsilon\omega_0\delta A - \varepsilon\omega_0\xi\sin(\omega_1 t + \varphi_0);$$

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{4}\frac{\delta A}{A_0} - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\xi\cos(\omega_1 t + \varphi_0) \qquad (14.29)$$

$$\left(\omega_1 = \omega_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)\right).$$

Первое уравнение (29) представляет собой линейное дифференциальное уравнение, имеющее решение

$$\delta A(t) = -\varepsilon\omega_0\int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon\omega_0(t-t')}\xi(t')\sin(\omega_1 t' + \varphi_0)\,dt'. \qquad (14.30)$$

Произвольной постоянной интегрирования мы распорядились таким образом, чтобы $\delta A(t)$ являлось стационарным случайным процессом, начавшимся в далеком прошлом. Умножая (29) на такое же выражение, но соответствующее другому моменту времени, и усредняя, находим корреляционную функцию

$$\langle\delta A\delta A_\tau\rangle = \varepsilon^2\omega_0^2\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-\varepsilon\omega_0(2t+\tau-t'-t'')}, \qquad (14.31)$$

$$\langle\xi(t')\xi(t'')\sin(\omega_1 t' + \varphi_0)\sin(\omega_1 t'' + \varphi_0)\rangle\,dt'dt''.$$

Когда шум $\xi(t)$ является стационарным и статистически независимым от начальной фазы колебаний $\varphi_0$, имеем

$$\langle\xi(t')\xi(t'')\sin(\omega_1 t' + \varphi_0)\sin(\omega_1 t'' + \varphi_0)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle\xi(t')\xi(t'')\rangle\cos\omega_1(t' - t''), \qquad (14.32)$$

так как

$$\langle\sin(\omega_1 t' + \varphi_0)\sin(\omega_1 t'' + \varphi_0)\rangle = \frac{1}{2}\langle\cos\omega_1(t' - t'')\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\langle\cos(\omega_1 t' + \omega_1 t'' + 2\varphi_0)\rangle = \frac{1}{2}\cos\omega_1(t' - t'').$$

После подстановки (32) в (31) произведем замену переменных интегрирования

$$t' - t'' + \tau = \sigma;$$

$$\frac{t' + t''}{2} = s$$

и запишем функцию корреляции в виде

$$\langle \delta A \delta A_\tau \rangle = \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int\limits_{-\infty}^{t+\frac{\tau}{2}-\frac{|\sigma|}{2}} e^{-\varepsilon\omega_0(2t+\tau-2s)} \times$$

$$\times \langle \xi\xi_{\sigma-\tau} \rangle \cos\omega_1(\sigma-\tau)\, ds.$$

В результате вычисления интеграла по $s$ находим

$$\langle \delta A \delta A_\tau \rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\omega_0|\sigma|} \langle \xi\xi_{\sigma-\tau} \rangle \cos\omega_1(\sigma-\tau)\, d\sigma, \quad (14.33)$$

откуда, в частности, следует

$$\langle \delta A^2 \rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon\omega_0\sigma} \langle \xi\xi_\sigma \rangle \cos\omega_1\sigma d\sigma$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \delta A \delta A_\tau \rangle\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \xi\xi_\rho \rangle \cos\omega_1\rho d\rho = \frac{1}{2}\varkappa(\omega_1). \quad (14.34)$$

Первую формулу удобно также записать через спектральную плотность $\varkappa(\omega)$ шума $\xi(t)$

$$\langle \delta A^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{\varepsilon^2\omega_0^2 + (\omega-\omega_1)^2} \varkappa(\omega)\, d\omega. \quad (14.35)$$

Полученные результаты справедливы при условии, что допустимо пренебрежение нелинейными членами, произведенное при линеаризации первого уравнения (13.57). Это условие сводится к соотношению

$$\langle \delta A^2 \rangle \ll A_0^2, \quad (14.36)$$

при выполнении которого с подавляющей вероятностью справедливо неравенство

$$\delta A \ll A_0.$$

Учитывая (35), запишем критерий применимости метода линеаризации (36) в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{\varepsilon^2\omega_0^2 + (\omega-\omega_1)^2} \varkappa(\omega)\, d\omega \ll A_0^2, \quad (\omega_1 \approx \omega_0).$$

Оценивая приближенно стоящий здесь интеграл, последнее условие можно записать более просто

$$\frac{1}{4}\int_{\omega_0-\frac{\varepsilon\omega_0}{2}}^{\omega_0+\frac{\varepsilon\omega_0}{2}} \varkappa(\omega)\,d\omega \ll A_0^2 \qquad (14.37)$$

или даже, если шум не очень узкополосный,

$$\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0\varkappa(\omega_0) \ll A_0^2, \text{ т. е. } \frac{c}{4} \ll 1.$$

Вместе с тем формула (33) справедлива при любых временах корреляции, при которых только не нарушается независимость между $\xi$ и $\varphi_0$, в том числе и при малом времени корреляции, удовлетворяющем соотношению (13.59). В последнем случае пригодными оказываются оба метода и они дают, конечно, одинаковый результат. Когда время корреляции мало по сравнению с $1/\varepsilon\omega_0$, функция $\langle \xi\xi_{\tau-\sigma}\rangle$ в (33) имеет острый максимум при $\sigma=\tau$ и заметно отлична от нуля лишь в узкой области, примыкающей к этому значению. Функцию $e^{-\varepsilon\omega_0|\sigma|}$ в подынтегральном выражении (33), которая меняется значительно медленнее, можно поэтому заменить на $e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|}$.

В результате получаем следующие выражения:

$$\langle \delta A \delta A_\tau\rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{4} e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|}\int_{-\infty}^{\infty}\langle \xi\xi_{\sigma-\tau}\rangle \cos\omega_1(\sigma-\tau)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\varkappa(\omega_1)\,e^{-\varepsilon\omega_1|\tau|} \qquad (14.38)$$

и

$$\langle \delta A^2\rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\varkappa(\omega_1) \approx \frac{c}{4} A_0^2. \qquad (14.39)$$

Такую функцию корреляции имеет экспоненциально-коррелированный марковский случайный процесс. Это не случайно, так как при $\tau_{к.р} \ll 1/\varepsilon\omega_0$ применимы стохастические методы, и формулы (37), (38) могут быть получены также при помощи уравнения Фоккера — Планка и уравнений с дельта-коррелированными случайными функциями. Флюктуационный разброс амплитуды (39) совпадает со значением (21), найденным ранее.

Когда выполняется только одно из соотношений: (13.59) или (37), то выбор метода является однозначным. Так, общий вид функции распределения (8) не может быть получен методом линеаризации, с другой стороны, общая формула (33) не может быть выведена марковскими методами.

Обращаясь ко второму уравнению (29), замечаем, что первый член, содержаший отклонение $\delta A$, определяемое формулой (30), много меньше, чем второй член, и им можно пренебречь. После этого получаем, что набег фазы за время $T$ равен

$$\Delta\varphi = \delta\varphi_T - \delta\varphi = -\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\int_0^T \xi(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_0)\,dt. \quad (14.40)$$

Отсюда находим дисперсию набега фазы

$$\langle\Delta\varphi^2\rangle = \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{A_0^2}\int_0^T\int_0^T \langle\xi(t')\,\xi(t'')\cos(\omega_1 t' + \varphi_0)\cos(\omega_1 t'' + \varphi_0)\rangle\,dt'dt'' \quad (14.41)$$

или в тех же предположениях, что и (32)

$$\langle\Delta\varphi^2\rangle = \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{2A_0^2}\int_0^T\int_0^T \langle\xi\xi_{t'-t''}\rangle\cos\omega_1(t'-t'')\,dt'dt'' = \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{2A_0^2}\int_{-T}^{T}(T-|\tau|)\,\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\omega_1\tau\,d\tau. \quad (14.42)$$

При больших временах $T$, значительно превышающих время корреляции $\tau_{\text{кор}}$, набег фазы приобретает диффузионный характер — зависимость дисперсии от времени приближается к прямой пропорциональности

$$\langle\Delta\varphi^2\rangle = D_0 T,$$

$$D_0 = \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{2A_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\xi_\tau\rangle\cos\omega_1\tau\,d\tau \approx \frac{\varepsilon\omega_0}{2}c. \quad (14.43)$$

На разобранном выше примере мы видим, что при использовании метода линеаризации к линеаризованным уравнениям типа (29) с успехом применяется корреля-

ционная теория. Аналогичным же образом в линейном приближении могут быть решены различные другие задачи, некоторые из них будут рассмотрены в дальнейшем (§ 15, разд. 1 и § 18, разд. 1).

### 3. Квазистатический метод

Аппарат процессов Маркова становится неприменимым, когда время корреляции сравнимо с масштабными постоянными времени, описывающими скорость изменения амплитуды и фазы, т. е. с временем релаксации амплитуды и фазы (если последнее имеется). Тем более он неприменим, когда время корреляции превосходит указанные временные постоянные. Однако значительное превосходство времени корреляции над временами релаксации

$$\tau_{\text{кор}} \gg T_{\text{рел}}, \tag{14.44}$$

имеющее место при очень медленном изменении флюктуаций, служит основанием для применения другого, как бы прогивоположного метода, который можно назвать квазистатическим.

Для упрощения уравнений в стандартной форме (13.34) в квазистатическом мегоде отыскивается такое преобразование от $A$, $\varphi$ к новым амплитуде и фазе $A^*$, $\varphi^*$, которое устраняет вибрации не из уравнений (13.39), а из уравнений

$$\dot{A} = \varepsilon (G)_{\xi=\text{const}}; \quad \dot{\varphi} = \varepsilon (H)_{\xi=\text{const}}, \tag{14.45}$$

отличающихся от (13.34) тем, что в них $\xi$ рассматривается как постоянный параметр. Указанное преобразование в остальном находится тем же способом, что и ранее, отличаясь от (13.42) лишь тем, что явно зависит от $\xi$.

Если медленно меняется не сам процесс $\xi(t)$, а некоторые его параметры ($\rho(t)$, $\chi(t)$ в рассматриваемом ниже примере), то в (45) следует полагать постоянными именно их.

Применив это преобразование к фактическим стандартным уравнениям (13.34), в которых $\xi(t)$ (или $\rho(t)$, ...) хотя и медленно, но меняется со временем, получим полные безвибрационные уравнения

$$\dot{A}^* = \varepsilon G^* (A^*, \varphi^*, \xi); \quad \dot{\varphi}^* = H^* (A^*, \varphi^*, \xi). \tag{14.46}$$

Если теперь учесть, что время корреляции в данном случае является настолько большим, что при каждом значении $\xi(t)$ ($\rho(t)$, ...) будет успевать устанавливаться соответствующее ему «квазистационарное» значение, то будем иметь

$$G^*(A^*, \dot{\varphi}^*, \xi(t)) = 0; \quad H^*(\dot{A}^*, \varphi^*, \xi(t)) = 0. \quad (14.47)$$

Последние равенства получены из (46) путем приравнивания нулю временных производных. Если в правые части (46) входит производная $\dot{\xi}$, ($\dot{\rho}$, ...), то ее с тем же основанием, что и $\dot{A}^*$, $\dot{\varphi}^*$, можно приравнять нулю.

Равенства (47) определяют амплитуду и фазу как безынерционную функцию от случайного процесса, т. е. как функцию от значения $\xi(t)$ (или $\rho(t)$, ...), в тот же момент. Для отыскания статистических характеристик амплитуды и фазы теперь достаточно теории безынерционных нелинейных преобразований (§ 8).

Чтобы получить более точные результаты, безынерционную амплитуду и фазу из (47) можно взять в качестве первого приближения и отыскивать, используя (46), высшие приближения, соответствующие малым отклонениям.

Для иллюстрации квазистатического метода рассмотрим, ограничиваясь первым приближением, воздействие на генератор, описываемый уравнением (13.36), узкополосного возмущения

$$\xi(t) = -\rho(t)\sin[(\omega_0 - \Delta)t + \chi(t)]. \quad (14.48)$$

Здесь $\rho(t)$ и $\chi(t)$ — флюктуационная амплитуда и фаза, меняющиеся достаточно медленно. Для конкретности закон распределения амплитуды можно, например, предполагать релеевским:

$$w(\rho)\,d\rho = \frac{\rho}{\sigma_0^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2}} d\rho = d e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (14.49)$$

где при полностью случайной начальной фазе $\sigma_0^2$ есть дисперсия сигнала (48):

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{2}\langle \rho^2 \rangle = \sigma_0^2.$$

Представив флюктуационные члены в виде

$$-\varepsilon\omega_0\xi\sin\Phi=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\rho\,[\cos(\chi-\varphi-\Delta t)-$$
$$-\cos(2\omega_0 t-\Delta t+\chi+\varphi)];$$
$$-\varepsilon\omega_0\xi\cos\Phi=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\rho\,[\sin(\chi-\varphi-\Delta t)+$$
$$+\sin(2\omega_0 t-\Delta t+\chi+\varphi)], \qquad (14.50)$$

отбросим в уравнениях (13.36) вибрационные члены. В результате получим следующие уравнения первого приближения или укороченные уравнения:

$$\dot{A}=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}A\left(1-\frac{A^2}{A_0^2}\right)+\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\rho\cos(\chi-\psi);$$
$$\dot{\psi}=\Delta+\frac{\varepsilon\omega_0}{2A}\rho\sin(\chi-\psi), \qquad (14.51)$$

где $\psi=\varphi+\Delta\cdot t$. Отсюда видно, что время релаксации амплитуды равно $1/\varepsilon\omega_0$, а среднее время релаксации фазы можно оценить как

$$T_{\text{рел}}=\left\langle\frac{2A}{\varepsilon\omega_0\rho}\right\rangle\sim\frac{1}{\varepsilon\omega_0}\frac{A_0}{\sigma_0}. \qquad (14.52)$$

Таким образом, условия применимости квазистатического метода в данном случае имеют вид

$$\tau_{\text{кор}}\gg\frac{1}{\varepsilon\omega_0};\quad \tau_{\text{кор}}\gg\frac{1}{\varepsilon\omega_0}\frac{A_0}{\sigma_0}. \qquad (14.53)$$

При их выполнении амплитуда и фаза успевают принимать «квазистабильные» значения, обращающие в нуль выражения (51). Приравнивая последние нулю, находим

$$\rho\cos(\chi-\psi)=A\left(\frac{A^2}{A_0^2}-1\right);$$
$$\rho\sin(\chi-\psi)=-\frac{2A\Delta}{\varepsilon\omega_0}. \qquad (14.54)$$

Возводя оба равенства в квадрат и складывая, получаем

$$\rho^2=A^2\left[\left(\frac{A^2}{A_0^2}-1\right)^2+\left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_0}\right)^2\right]. \qquad (14.55)$$

Чтобы найти $A$, соответствующее данному значению $\rho$, нужно разрешить полученное уравнение и взять наибольший корень

$$A > A_0. \tag{14.56}$$

Другие корни соответствуют неустойчивым колебаниям. Но из неравенства (56), если принять во внимание (55), вытекает неравенство

$$\rho > \rho_1, \quad \text{где} \quad \rho_1 = \frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_0} A_0. \tag{14.57}$$

Только при его выполнении возможны устойчивые стационарные стабильные значения $A$ и $\psi$, удовлетворяющие равенствам (54). Вследствие (49) такие состояния осуществляются с вероятностью

$$P_1 = e^{-\frac{\rho_1^2}{2\sigma_0^2}}. \tag{14.58}$$

В противоположном случае, который осуществляется с вероятностью $1 - P_1$, стабильная амплитуда $A$ и фаза $\psi$ невозможны, и разность фаз $\chi - \psi$ неограниченно возрастает:

$$|\chi - \psi| = |\chi - \varphi - \Delta t| \sim |\Delta| t.$$

В этом случае усреднение флюктуационных сил (50) за интервалы времени, превосходящие $2\pi/\Delta$, обращает их в нуль. При отсутствии флюктуаций устанавливаются постоянная фаза $\varphi = \varphi_0$ и амплитуда $A = A_0$.

Таким образом, амплитуда принимает значения $A = A_0$ с вероятностью $1 - P_1$ и с вероятностью $P_1$ имеет значения $A > A_0$, определяемые по формуле (55). Подставляя (55) в (49), находим функцию распределения амплитуды

$$\int_A^\infty w(A_1)\, dA_1 = \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma_0^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\frac{A^2}{A_0^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_0}\right)^2\right]\right\} \quad \text{при } A > A_0; \tag{14.59}$$

и равно 1 при $A < A_0$.

$$w(A) = (1 - P_1)\,\delta(A - A_0) + \frac{A_0}{\sigma_0^2}\,a\left[3a^4 - 4a^2 + \right.$$

$$\left. + 1 + \left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_0}\right)^2\right] \exp\left\{-\frac{A_0^2}{2\sigma_0^2}\,a^2\left[(a^2-1)^2 + \left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_0}\right)^2\right]\right\} \quad (14.60)$$

$$\left(a = \frac{A}{A_0} \geqslant 1\right).$$

В том частном случае, когда $\Delta = 0$, последняя формула дает

$$w(A) = \frac{A_0}{\sigma_0^2}\,a\,(a^2-1)(3a^2-1)\,e^{-\frac{A_0^2}{2\sigma_0^2}a^2(a^2-1)^2}, \quad (14.61)$$

$$(a \geqslant 1).$$

Форма распределения (61) изображена на рис. 14 2. Если раньше, в формуле (8), интенсивность флюктуационного

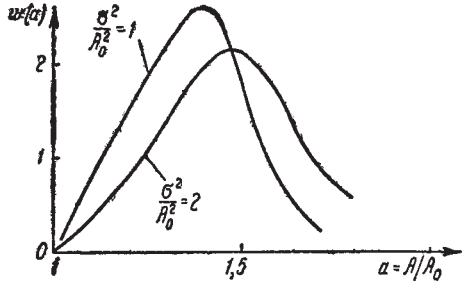



Рис. 14.2. Плотность распределения амплитуды при узкополосном флюктуационном воздействии.

разброса определялась параметром $c$, то теперь аналогичную же роль играет параметр $\sigma_0^2/A_0^2$. При малых его значениях

$$\frac{\sigma_0^2}{A_0^2} \ll 1 \quad (14.62)$$

флюктуационный разброс мал

$$a - 1 \ll 1; \quad \langle a^2\rangle - 1 \ll 1. \quad (14.63)$$

Поэтому

$$a^2 - 1 \approx 2(a-1); \quad a^2(a^2-1)^2 \approx 4(a-1)^2;$$

$$3a^2 - 1 \approx 2,$$

и распределение (61) можно записать в виде

$$w(A) = 4\,\frac{A - A_0}{\sigma_0^2}\,e^{-\frac{2(A-A_0)^2}{\sigma_0^2}},$$

Мы видим, что оно приближается к Релеевскому распределению, сдвинутому по оси $A$. При помощи последней формулы находим

$$\langle (A - A_0)^2 \rangle = \frac{\sigma_0^2}{2}. \qquad (14.64)$$

Неравенство (62) является условием применимости метода линеаризации, и поэтому можно надеяться получить соотношение (64) при помощи линеаризованного уравнения (29). При этом нужно, однако, иметь в виду, что фаза колебаний $\varphi_0$ при флюктуациях (48) не является теперь независимой от $\xi(t)$. Вследствие тесной связи $\varphi_0$ и $\xi(t)$ соотношение (32) нарушается. Запишем первое уравнение (29) в виде

$$\frac{\dot{\delta A}}{\varepsilon \omega_0} = -\delta A + \eta(t). \qquad (14.65)$$

Входящую сюда флюктуационную силу $\eta = -\xi \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ можно записать в форме (50) и пренебречь вибрационным членом двойной частоты, что дает $\eta = \rho \cos(\chi - \psi)/2$. Как отмечалось при $\rho > \rho_1$ устанавливается стабильное значение разности фаз $\chi - \psi$, определяемой теперь в силу (54), (63) из равенства.

$$\rho \sin(\chi - \psi) = -\rho_1. \qquad (14.66)$$

Поэтому

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \rho(t) \cos(\chi - \psi) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2(t) - \rho_1^2}. \qquad (14.67)$$

В противном случае, когда $\rho < \rho_1$, сила $\eta = \rho \cos(\chi - \psi)/2$ в среднем за интервал времени $2\pi/\Lambda$ исчезает и можно полагать $\eta(t) = 0$. Сказанное позволяет, используя (67), (49), найти функцию

$$\langle \eta \eta_\tau \rangle = \frac{1}{4} \langle \sqrt{\rho^2 - \rho_1^2} \sqrt{\rho_\tau^2 - \rho_1^2} \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\rho_1}^{\infty} \int_{\rho_1}^{\infty} \sqrt{\rho^2 - \rho_1^2} \sqrt{\rho_\tau^2 - \rho_1^2}\, w(\rho, \rho_\tau)\, d\rho d\rho_\tau. \qquad (14.68)$$

Вследствие условий (53) с помощью линеаризованного уравнения (65) можно получить

$$\langle \delta A \delta A_\tau \rangle = \langle \eta \eta_\tau \rangle. \qquad (14.69)$$

В самом деле, в выражении

$$\langle \delta A \delta A_\tau \rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\omega_0 |\sigma|} \langle \eta \eta_{\sigma-\tau} \rangle \, d\sigma,$$

которое вытекает из (65) и аналогично (33), экспоненциальный множитель меняется значительно быстрее, чем $\langle \eta \eta_{\sigma-\tau} \rangle$ и вырезает из области интегрирования узкий интервал, где

$$\sigma \sim \frac{1}{\varepsilon\omega_0} \ll \tau_{\text{кор}} \quad \text{и} \quad \langle \eta \eta_{\sigma-\tau} \rangle \approx \langle \eta \eta_\tau \rangle.$$

Поэтому $\langle \eta \eta_\tau \rangle$ можно вынести за знак интеграла и получить (69).

Полагая в (68), (69) $\tau = 0$, находим, в частности,

$$\langle \delta A^2 \rangle = \frac{1}{4} [\langle \rho^2 \rangle - \rho_1^2] \tag{14.70}$$

и

$$\langle \delta A^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \rho^2 \rangle = \frac{\sigma_0^2}{2} \quad \text{при } \rho_1 = 0,$$

что, действительно, совпадает с (64).

Таким образом, квазистатический метод, будучи полной противоположностью стохастического метода, имеет, так же как и последний, некоторую общую область применимости с методом линеаризации.

### 4. Таблица применимости различных методов

Подводя итоги вышеизложенному, можно констатировать, что применимость того или иного метода определяется, с одной стороны, быстротой изменения флюктуаций или, иначе, их спектральным составом, а с другой стороны, независимо от скорости флюктуаций — их интенсивностью.

Время корреляции следует сравнивать не с периодом колебаний, а с временем релаксации. На спектральном языке это означает, что сравнивается ширина полосы частот флюктуационных возмущений с шириной полосы генерируемого сигнала. Если спектр флюктуаций является более широкополосным, чем спектр автоколебаний ($\Delta\omega \gg \varepsilon\omega_0$), то применим аппарат марковских случайных процессов, справедливы уравнения с дельта-

коррелированными случайными функциями и уравнение Фоккера—Планка.

Если спектр шума, напротив, имеет ширину значительно меньше $\varepsilon\omega_0$, то применим квазистатический метод, сводящий изменение амплитуды автоколебаний к безынерционной зависимости от шума. Сказанное относится к случаю, когда время релаксации фазы находится в том же соотношении с временем корреляции, что и время релаксации амплитуды. Возможны, конечно, более сложные комбинированные случаи, когда, например, время релаксации фазы превосходит $\tau_{кор}$, так что к фазовому уравнению применим стохастический метод, а время релаксации амплитуды находится в противоположном соотношении с $\tau_{кор}$, вследствие чего амплитудное уравнение может быть рассмотрено квазистатически. Для простоты подобные случаи мы не рассматриваем.

Вне зависимости от величины времени корреляции, при малой величине флюктуационных возмущений применим метод линеаризации. Выводимые при этом линеаризованные уравнения, решение которых без труда записывается в квадратуре, сводят задачу к линейному преобразованию случайной функции. В результате путем применения корреляционной теории отыскиваются корреляционные функции амплитуды и фазы. В ряде случаев, при гауссовом случайном воздействии или при малом времени корреляции, можно указать также законы распределения амплитуды и фазы, которые являются нормальными.

При исследовании применимости метода линеаризации следует принимать во внимание не фактическую величину самой случайной функции $\xi(t)$, а вызываемый ею флюктуационный разброс амплитуды автоколебаний. Среднеквадратичное отклонение $\sigma(A) = \sqrt{<\delta A^2>}$, строго говоря, следует сравнивать с «масштабом нелинейности», который может быть определен, например, равенством

$$\Delta A = \frac{\frac{\partial G}{\partial A}}{\frac{\partial^2 G}{\partial A^2}}.$$

Условие $\sigma(A) \ll \Delta A$ при этом будет говорить о малой роли квадратичного члена $\frac{\partial^2 G}{\partial A^2}\delta A^2$ по сравнению с ли-

нейным $\frac{\partial G}{\partial A}\delta A$. Однако в большинстве случаев $\Delta A$ имеет тот же порядок, что и $A_0$, поэтому $\sigma(A)$ можно сравнивать не с $\Delta A$, а с $A_0$. Поскольку для оценки применимости метода линеаризации достаточно грубое соотношение «$\ll$», касающееся лишь порядка величины, то можно брать приближенную прикидку возможного значения $<\delta A^2>$ и находить ее, например, методом линеаризации, даже если он в точном смысле неприменим.

В настоящем параграфе был рассмотрен пример аддитивного флюктуационного члена (не входящего в нелинейность, а прибавляющегося к уравнению колебаний). Для этого примера мы получили условие (36) применимости метода линеаризации в форме неравенств (37), (62). Последнее соотношение можно также записать в форме (37), так как в случае медленных изменений $\rho(t)$ и $\chi(t)$ весь спектр $\varkappa(\omega_0)$ сосредоточен вблизи $\omega_0$ и

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \varkappa(\omega)\,d\omega \approx \frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\frac{\varepsilon\omega_0}{2}}^{\omega_0+\frac{\varepsilon\omega_0}{2}} \varkappa(\omega)\,d\omega.$$

Поэтому неравенство

$$\frac{1}{4}\int_{\omega_0-\frac{\varepsilon\omega_0}{2}}^{\omega_0+\frac{\varepsilon\omega_0}{2}} \varkappa(\omega)\,d\omega \ll A_0^2$$

эквивалентно условию (36) при любой быстроте изменения случайного воздействия в случае аддитивного флюктуационного члена.

Методы исследования автоколебаний при наличии флюктуаций и условия их применимости можно свести в простую табл. 14.1. В ней для аддитивных флюктуационных воздействий, спектр которых сосредоточен вокруг основной частоты и не имеет острых максимумов при других частотах, в качестве $<\delta A^2>$, следует, учитывая выше сказанное, брать выражение

$$\frac{1}{4}\int_{\omega_0-\frac{\varepsilon\omega_0}{2}}^{\omega_0+\frac{\varepsilon\omega_0}{2}} \varkappa(\omega)\,d\omega.$$

В некоторых графах приведенной таблицы указана применимость двух методов. В то же время в графе, соответствующей $\tau_{кор} \sim \varepsilon\omega_0$, $\langle \delta A^2 \rangle \sim A_0^2$, пришлось, к сожалению, оставить пустое место ввиду того, что пригодные в этом случае достаточно простые аналитические методы неизвестны.

Таблица 14.1

| Быстрота изменения флюктуаций | Интенсивность флюктуаций | |
|---|---|---|
| | малая, $\langle \delta A^2 \rangle \ll A_0^2$ | большая, $\langle \delta A^2 \rangle \sim A_0^2$ |
| Большая, $\tau_{кор} \ll 1/\varepsilon\omega_0$ | 1) Метод линеаризации и корреляционная теория<br>2) Аппарат марковских процессов | Аппарат марковских процессов |
| Средняя, $\tau_{кор} \sim 1/\varepsilon\omega_0$ | Метод линеаризации и корреляционная теория | |
| Малая $\tau_{кор} \gg 1/\varepsilon\omega_0$ | 1) Метод линеаризации и корреляционная теория<br>2) Квазистатический метод | Квазистатический метод |

## § 15. ВЛИЯНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ НА РАБОТУ ГЕНЕРАТОРА

Даже если на генератор не действуют никакие внешние флюктуационные воздействия и если предположить идеально стабильные условия работы, например постоянство напряжения питания и температуры, то генерируемые автоколебания все же не будут вполне стабильны. Постоянство амплитуды и частоты будет нарушаться флюктуациями, которые возникают в элементах схемы генератора и которые поэтому можно назвать «собственными».

Источником собственных флюктуаций в первую очередь является электронная лампа, которой присущи дробовой и катодно-ионный шумы. Из этих шумов мы разберем лишь дробовой шум, поскольку он лучше изучен и на высоких частотах является определяющим.

Кроме лампы, флюктуации порождаются имеющимися в схеме активными сопротивлениями. Это тепловые флюктуации, имеющие термодинамическую природу. Спектральная плотность флюктуационной электродвижущей силы $\mathcal{E}$, возникающей в комплексном сопротивле-

нии $Z(i\omega)$, согласно формуле Найквиста $S[\mathcal{E}, \omega] = 4kT\mathrm{Re}Z(i\omega)$, пропорциональна активному сопротивлению $R = \mathrm{Re}Z$. В ламповых генераторах с колебательным контуром и индуктивной обратной связью, подобных генератору на рис. 13.1, активные сопротивления не являются главными элементами схемы. Омическое сопротивление индуктивности должно быть не слишком большим, чтобы не нарушать добротности контура; другие сопротивления также играют подчиненную роль. Поэтому тепловые шумы в подобных схемах не являются определяющими.

В некоторых случаях, конечно, пренебрежение тепловыми флюктуациями может оказаться недопустимым. Так, например, в случае колебательного контура, помещенного в цепи сетки, может быть существенным тепловой шум активного сопротивления контура. Тепловой шум может оказаться важным также в RC и других генераторах, содержащих активные сопротивления как принципиально важные элементы схемы. Однако учет теплового шума не вносит никаких принципиальных затруднений и изменений методов расчета. В принципиальном отношении он даже проще дробового шума, поскольку ему всегда свойственна стационарность и равномерность спектра. Роль теплового шума сводится лишь к увеличению дисперсии амплитудного разброса и повышению интенсивности диффузии фазы. Поэтому мы не будем его рассматривать более подробно.

## 1. Малая интенсивность дробовых флюктуаций и линеаризованное уравнение

Обратимся для примера к рассмотренной ранее схеме генератора, изображенной на рис. 13.1. Работа этого генератора описывается уравнением (13.12), которое для координаты (13.18) преобразуется к виду (13.20). Если ввести обозначение

$$\xi(t) = \frac{\omega_0}{\varepsilon} M I_\Phi(t) \qquad (15.1)$$

и использовать самую простую аппроксимацию характеристики (13.23), то уравнение колебаний будет иметь вид (13.24) и к нему будет применимо все сказанное в последних двух параграфах.

Оценим в случае дробовых шумов величину безразмерного параметра

$$c = \varepsilon\omega_0 A_0^{-2}\varkappa(\omega_0), \qquad (15.2)$$

который определяет степень влияния флюктуаций на работу генератора.

При постоянном анодном токе и пренебрежении депрессией дробового шума и временем пролета электронов от катода к аноду дробовой шум является стационарным и имеет согласно (6.40) корреляционную функцию

$$\langle I_\phi I_{\phi\tau}\rangle = e\langle I_a\rangle\delta(\tau). \qquad (15.3)$$

Вследствие этого, если учесть (1) и (2), будем иметь

$$\varkappa(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\varepsilon^2} M^2 e\langle I_a\rangle;$$

$$c = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\omega_0 M}{A_0}\right)^2 \omega_0 e\langle I_a\rangle. \qquad (15.4)$$

Оценим численное значение этой величины для примера, приведенного на стр. 340 в разделе 2, § 13. Амплитуда колебаний сеточного напряжения $A_0$ достигала 11 *в*, средний анодный ток имел значение 0,047 *а*. После подстановки в (4) этих цифр, а также других соответствующих цифр со стр. 346 получаем

$$c = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 7\cdot 10^{-13} = 1{,}4\cdot 10^{-11}. \qquad (15.5)$$

Крайне малое значение постоянной $c$ говорит о чрезвычайно слабом влиянии дробовых флюктуаций, о малой величине отклонений от стационарного значения амплитуды и, следовательно, о применимости метода линеаризации.

Интересно отметить, что малое значение (5) получилось вопреки тому, что в указанном выражении малый параметр стоит в знаменателе. Если уменьшить $\varepsilon$, оставляя параметры $\omega_0$, $M$, $A_0$, $<I_a>$ без изменения, то рано или поздно наступит момент, когда $c$ не будет уже малой величиной, несмотря на малость дробового шума. Тогда метод линеаризации станет неприменимым и задачу можно будет решать лишь путем применения аппарата марковских процессов.

Незначительная интенсивность собственных флюктуаций является, пожалуй, наиболее характерной их чертой. Другой характерной чертой является их широкополосность, т. е. малое время корреляции. Корреляции в анод-

ном токе, подверженном дробовым флюктуациям, сохраняются, конечно, в течение длительности импульса тока, создаваемого одним электроном, но по мере того, как происходит смена электронов в пространстве между анодом и катодом, корреляции исчезают. Поэтому время корреляции дробового шума равно времени пролета электрона от катода к аноду. Это время обычно не только меньше времени релаксации, но и периода. Это обеспечивает применимость стохастических методов к данной задаче. Указанные обстоятельства делают исследование собственных флюктуаций, пожалуй, наиболее простой задачей из всех задач, связанных с флюктуациями в автоколебательных системах. Для нее могут быть получены наиболее полные ответы на интересующие вопросы.

Приведенная выше оценка величины $c$ получена в предположении постоянства анодного тока и при других упрощающих предположениях. Отказ от этих упрощений не меняет порядок величины $c$, которая по-прежнему будет значительно меньше единицы. Поэтому метод линеаризации, как и стохастический метод, применим к задаче исследования собственных флюктуаций также при более полном учёте всех особенностей задачи.

Мы выберем за основу метод линеаризации, а условие малости времени корреляции используем для упрощения получаемых результатов, которые были бы справедливы и без этого условия.

Если производить более полный учет формы характеристики лампы и пользоваться аппроксимацией (13.22), а не (13.23), то (13.20) перейдет в уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\omega_0 \left(1 + \frac{\rho}{2}\frac{\dot{x}}{\omega_0 A_0} - \frac{4}{3}\frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A_0^2}\right)\dot{x} + \\ + \omega_0^2 \varepsilon \xi(t), \quad \left(\rho = \frac{\omega_0 M \beta A_0}{\varepsilon}\right), \tag{15.6}$$

которое отличается от уравнения (24) лишь членом $\frac{\rho\dot{x}}{2\omega_0 A_0}$. Этому уравнению соответствуют уравнения в стандартной форме

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} a\left[1 - a^2 - \frac{3}{4}\rho a \sin\Phi + \left(\frac{4}{3}a^2 - 1\right)\cos 2\Phi + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\rho a \sin 3\Phi - \frac{a^2}{3}\cos 4\Phi\right] - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\xi \sin\Phi;$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left[-\frac{1}{4}\rho a\cos\Phi + \left(1-\frac{2}{3}a^2\right)\sin 2\Phi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\rho a\cos 3\Phi + \frac{1}{3}a^2\sin 4\Phi\right] - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\frac{\xi}{a}\cos\Phi, \quad \left(a = \frac{A}{A_0}\right).$$

Отсюда, путем отбрасывания вибрационных членов, пропорциональных синусам и косинусам от Φ, 2Φ, 3Φ, 4Φ, могут быть получены «укороченные» уравнения, которые отличаются от (13.41) присутствием флюктуационных членов. Им соответствуют следующие линеаризованные уравнения

$$\dot{\delta a} = -\varepsilon\omega_0\delta a - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\xi\sin(\omega_0 t + \varphi_0); \qquad (15.8)$$

$$\dot{\delta\varphi} = -\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\xi\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (\delta a = a - 1;\ \delta\varphi = \varphi - \varphi_0).$$

Поскольку флюктуации очень малы, вибрации амплитуды и фазы, непременно сопровождающие нелинейные колебания и происходящие когерентно с основной частотой, значительно превосходят флюктуационные изменения амплитуды и фазы. Рассмотрим хотя бы главные из таких вибраций. Это достигается путем перехода к безвибрационной амплитуде и фазе, которые определяются преобразованием переменных

$$a = a^* + \varepsilon u(a^*, \Phi^*);$$

$$\varphi = \varphi^* + \varepsilon v(a^*, \Phi^*) \quad (\Phi^* = \omega_0 t + \varphi^*). \qquad (15.9)$$

Функции $u$, $v$, определяемые тем же способом, что и ранее (стр. 352), в первом приближении имеют вид

$$u(a, \Phi) = \frac{a}{8}\left[3\rho a\cos\Phi + 2\left(\frac{4}{3}a^2 - 1\right)\sin 2\Phi - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho a}{3}\cos 3\Phi - \frac{a^2}{3}\sin 4\Phi\right]; \qquad (15.10)$$

$$v(a, \Phi) = \frac{1}{8}\left[-\rho a\sin\Phi + 2\left(\frac{2}{3}a^2 - 1\right)\cos 2\Phi + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho a}{3}\sin 3\Phi - \frac{a^2}{3}\cos 4\Phi\right].$$

При этом преобразование (9) превращает (7) в безвибрационные уравнения

$$\dot{a}^* = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} a^* (1 - a^{*2}) - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0} \xi \sin \Phi^*; \qquad (15.11)$$

$$\dot{\varphi}^* = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{16} \left\{2 - 4a^{*2} + \frac{2}{3}\rho^2 a^{*2} + 3a^{*4}\right\} - \\ - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0} \frac{\xi}{a^*} \cos \Phi^*.$$

Процесс уточнения вибрационных составляющих амплитуды и фазы можно продолжать до более высокого порядка по $\varepsilon$. Однако выражения (10) дают важнейшие составляющие и мы ими ограничимся. Используя формулы (9), (10), легко найти, как выражается генерируемый сигнал $y$ через вибрационные амплитуду и фазу

$$\frac{x}{A_0} = a \cos \Phi = a^* \cos \Phi^* + \varepsilon u \cos \Phi^* - \varepsilon a^* v \sin \Phi^* = \\ = a^* \cos \Phi^* + \frac{\varepsilon}{4} \rho a^{*2} - \frac{\varepsilon}{4} a^* (1 - a^{*2}) \sin \Phi^* + \qquad (15.12)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{12} \rho a^{*2} \cos 2\Phi^* + \frac{\varepsilon}{24} a^{*3} \sin 3\Phi^* + \varepsilon^2 \ldots$$

Когда установится стационарный режим генерации, амплитуда $a^*$ вследствие малости шума будет очень близка к 1, как это следует из первого уравнения (11). Из второго уравнения (11) вытекает, что при этом частота мало отличается от частоты

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\varepsilon^2}{16} \omega_0 \left(1 + \frac{2}{3} \rho^2\right) \qquad (15.13)$$

(что получено путем подстановки $a^* = 1$).

Отклонения от указанных стационарных значений амплитуды и частоты обозначим

$$\delta a = a^* - 1; \quad \delta\dot{\varphi} = \dot{\Phi}^* - \omega_1. \qquad (15.14)$$

Учитывая, что эти отклонения малы, находим из (11) следующие линеаризованные уравнения

$$\delta\dot{a} = -\varepsilon\omega_0 \delta a - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0} \xi \sin(\omega_1 t + \varphi_0);$$

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon^2\omega_0}{4} \left(1 + \frac{\rho^2}{3}\right) \delta a - \\ - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0} \xi \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \qquad (15.15)$$

Малые значения флюктуационных отклонений позволяют также преобразовать выражение (12), определяющее генерируемый сигнал, к виду

$$\frac{x}{A_0} = \cos\Phi^* + \delta a\cos\Phi^* + \frac{\varepsilon}{2}\rho\delta a + \frac{\varepsilon}{2}\delta a\sin\Phi^* +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{12}\rho\cos 2\Phi^* + \frac{\varepsilon}{6}\rho\delta a\cos 2\Phi^* +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{24}\sin 3\Phi^* + \frac{\varepsilon}{8}\delta a\sin 3\Phi^* + \varepsilon^2\ldots \qquad (15.16)$$

Если оставить лишь главные, наибольшие члены, то будем иметь

$$\frac{x}{A_0} = \cos\Phi^* + \delta a\cos\Phi^* +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{12}\rho\cos 2\Phi^* + \frac{\varepsilon}{24}\sin 3\Phi^*. \qquad (15.17)$$

В приведенном выше выводе основных равенств (15), (17) не делалось каких-либо предположений относительно стационарности случайных возмущений $\xi(t)$, поэтому эти равенства можно использовать при учете нестационарности дробового шума.

Вследствие очень малого уровня шума может возникнуть мнение, что необходимо учитывать все поправки высших порядков по $\varepsilon$, превосходящие шум по своей величине, т. е. необходимо вычислять высшие приближения. Однако это не так, даже вычисленные нами поправки второго приближения не являются обязательными. Чтобы убедиться в этом, сравним уравнения первого и второго приближения.

Отыскав уравнения второго приближения (15), мы получили две поправки к (8). Во-первых, нашли поправку в средней частоте генерирования $\omega_0$ и, во-вторых, во втором уравнении получили дополнительные члены. Поправка к частоте, действительно, намного превосходит флюктуационный разброс. Поправки третьего и высших приближений также будут его превосходить, но эти поправки не носят флюктуационного характера. Высшие приближения уточняют неслучайные параметры $\omega_0$, $A_0$, входящие в линеаризованные уравнения. Но этим их роль по существу ограничивается. Дополнительный член — $\varepsilon^2\omega_0(1+\rho^2/3)\delta a/4$ в (15) играет малую роль, так как он пропорционален флюктуациям $\delta a$ и, кроме того,

содержит еще дополнительный множитель $\varepsilon$. Аналогичные члены высших приближений будут играть еще меньшую роль. Поэтому уравнениями (8) можно пользоваться, понимая, однако, под $\delta A$ и $\delta\varphi$ отклонение от «истинной» амплитуды и частоты. Точность определения последних может быть меньше флюктуационного разброса.

Минуя вычисление высших приближений, под этими «истинными» значениями можно понимать даже экспериментальные значения. Поскольку множители $\varepsilon\omega_0$, $\varepsilon\omega_0/A_0$ стоят в (8) перед малыми величинами $\delta a$, $\xi$, в них в качестве $\omega_0$ и $A_0$ можно брать прежние неточные значения.

### 2. Дробовые флюктуации в пренебрежении периодическими изменениями анодного тока

При постоянстве среднего анодного тока $\langle J_a \rangle$ дробовой шум является стационарным и, следовательно, стационарной будет входящая в (8) случайная функция $\xi(t)$. Если пренебречь временем пребывания электронов в пространстве катод—анод, то анодный ток будет суммой предельно коротких импульсов

$$I_a(t) = e\sum_j \delta(t - t_j), \tag{15.18}$$

где $t_j$ — случайное время появления (например, на аноде) $j$-го электрона. Средний ток

$$\langle I_a(t)\rangle = en(t) \tag{15.19}$$

и среднее число пролетающих электронов $n(t)$ мы считаем здесь постоянными. В соответствии со второй формулой (6.28) моментная функция анодного тока, определяемого суммой (18), выражается формулой

$$\langle I_a(t)\, I_a(t')\rangle = e^2 f_1(t)\,\delta(t - t') + e^2 f_2(t,\ t'), \tag{15.20}$$

где $f_1(t)$ — однократная функция распределения, совпадающая с $n(t)$, а $f_2(t, t')$ — двукратная функция распределения. Корреляционная функция анодного тока выражается по аналогичной же формуле

$$\mathrm{K}[I_a(t),\ I_a(t')] = \langle I_\Phi(t)\, I_\Phi(t')\rangle = \\ = e^2 f_1(t)\,\delta(t - t') + e^2 g_2(t,\ t') \tag{15.21}$$

через функцию корреляции распределения

$$g_2(t,\ t') = f_2(t,\ t') - f_1(t) f_1(t') \qquad (15.22)$$

(или в стационарном случае $g_2(t-t') = f_2(t-t') - f_1^2$). Функция $g_2(t, t')$ описывает корреляцию моментов пролета различных электронов. При отсутствии корреляций $g_2 = 0$. Если же корреляции имеют место, но являются достаточно кратковременными, так что $g_2(t-t')$ можно заменить на дельта-функцию

$$g_2(\tau) \to \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau)\, d\tau \cdot \delta(\tau), \qquad (15.23)$$

то в соответствии с (21) корреляционная функция будет иметь дельта-образный вид

$$\langle I_\Phi(t)\, I_\Phi(t')\rangle = \Gamma^2 e^2 f_1 \delta(t-t') = \\ = \Gamma^2 e \langle I_a\rangle \delta(t-t'). \qquad (15.24)$$

Здесь коэффициент

$$\Gamma^2 = 1 + \frac{1}{f_1} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau)\, d\tau \qquad (15.25)$$

носит название коэффициента депрессии дробового шума. Этот коэффициент близок к единице, если лампа работает в режиме насыщения. Когда же лампа работает в режиме ограничения тока пространственным зарядом, то имеет место депрессия шума пространственным зарядом. В этом случае $\Gamma^2$ меньше единицы $\left(\Gamma^2 = \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}\right)$.

Пользуясь соотношением (24), легко находим корреляционную функцию и спектральную плотность

$$\langle \xi\xi_\tau\rangle = \Gamma^2 e \langle I_a\rangle \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon}\right)^2 \delta(\tau);$$

$$S[\xi, \omega] = 2\varkappa(\omega) = 2\Gamma^2 e \langle I_a\rangle \varepsilon^{-2} (\omega_0 M)^2 \qquad (15.26)$$

случайных воздействий $\xi(t)$ в линеаризованном уравнении (8). Во втором разделе предыдущего параграфа рассматривались именно такие уравнения (14.29) и была найдена корреляционная функция амплитуды (14.33), которая в случае малого времени корреляции пропор-

циональна $\varkappa(\omega_0)$ в соответствии с (14.38). Подставляя (26) в указанную формулу, получаем

$$\langle \delta A \delta A_\tau \rangle = \sigma^2 e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|},$$
$$\sigma^2 = \frac{\Gamma^2}{4\varepsilon} e \langle I_a \rangle \omega_0^3 M^2. \qquad (15.27)$$

Этой корреляционной функции соответствует следующая спектральная плотность амплитудных флюктуаций

$$S[\delta A, \omega] = \frac{4\sigma^2\varepsilon\omega_0}{\varepsilon^2\omega_0^2 + \omega^2}. \qquad (15.28)$$

Аналогичным же образом согласно (14.43) и (26) находим коэффициент диффузии фазы

$$D_0 = \frac{1}{2}\Gamma^2 e \langle I_a \rangle \left(\frac{\omega_0^2 M}{A_0}\right)^2 = 2\left(\frac{\sigma}{A_0}\right)^2 \varepsilon\omega_0. \qquad (15.29)$$

Вследствие малого времени корреляции дробового шума набег фазы происходит по диффузионному закону. Отклонения от этого закона, заметные в течение времени порядка времени корреляции, здесь не учитываются.

Пользуясь (27), легко определить флюктуации амплитуды колебаний тока в индуктивной ветви контура. Амплитуда $A_I$ указанных колебаний в силу (13.18) связана с $A$ соотношением

$$A_I = \frac{A}{\omega_0 M} = I_0 a, \qquad (15.30)$$

где $I_0 = \frac{A_0}{\omega_0 M}$ — стационарная амплитуда колебаний тока $I = I_= + \frac{x}{\omega_0 M}$. Поэтому согласно (27) имеем

$$\langle \delta A_I \delta A_{I\tau} \rangle = \frac{\Gamma^2}{4\varepsilon} e \langle I_a \rangle \omega_0 e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|}. \qquad (15.31)$$

Через стационарную амплитуду тока контура удобно записывается также формула (29)

$$D_0 = \frac{1}{2}\Gamma^2\omega_0^2 e \langle I_a \rangle / I_0^2. \qquad (15.32)$$

То обстоятельство, что время корреляции дробового шума значительно меньше всех других учитываемых нами постоянных времени системы, приводит к следующему благоприятному следствию. Оно дает возможность

пользоваться двумерным уравнением Фоккера—Планка, определяющим изменение во времени совместного распределения $\delta a$ и $\delta\varphi$. При линейных же уравнениях движения последнее приводит к нормальным законам распределения. Поэтому можно считать $\delta a(t)$, $\delta\varphi(t)$ нормальными (гауссовыми) случайными процессами. Они имеют нулевое среднее значение. Их функции корреляции мы уже определили. Единственное, что еще остается определить, — это функции взаимной корреляции. Вследствие равномерного распределения случайной начальной фазы $\varphi_0$, которая статистически независима от $\xi(t)$, имеем, используя (26),

$$\langle \xi \sin\Phi\, \xi_\tau \cos\Phi_\tau\rangle = \frac{1}{2}\langle \xi\xi_\tau\rangle \langle \sin(\Phi - \Phi_\tau) + \sin(\Phi + \Phi_\tau)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma^2 e \langle I_a\rangle \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon}\right)^2 \delta(\tau)\sin(\varphi - \varphi_\tau) = 0. \quad (15.33)$$

Член с $\sin(\Phi+\Phi_\tau)$ исчезает при усреднении по $\varphi_0$; последнее выражение с $\sin(\varphi-\varphi_\tau)$ обращается в нуль вследствие свойств дельта-функции. Отсутствие корреляций между случайным воздействием на амплитуду и воздействием на фазу приводит в рамках первого приближения, соответствующего уравнениям (8) к статистической независимости флюктуаций амплитуды и фазы. В самом деле, умножая (14.30) на (14.40) и усредняя, легко доказать с помощью (33) их некоррелированность. Для обоснования их независимости следует учесть еще, что $\delta a$ и $\delta\varphi$ распределены по закону Гаусса.

Знание корреляционных функций нормальных случайных процессов $\delta a(t)$ и $\delta\varphi(t)$ дает о них полную информацию. Как известно, по общим правилам, изложенным в § 3 (раздел 1), можно записать законы распределения произвольного числа случайных значений $\delta a(t_1)$, $\delta a(t_2),\ldots$ и $\delta\varphi(t_1)$, $\delta\varphi(t_2),\ldots$ в любые моменты времени. Так, например, двумерный закон распределения значений амплитуды $\delta a$, $\delta a_\tau$ в сдвинутые моменты времени имеет вид

$$w(\delta a, \delta a_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2}(1 - e^{-2\varepsilon\omega_0\tau})^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\delta a^2 - 2e^{-\varepsilon\omega_0\tau}\delta a\delta a_\tau + \delta a_\tau^2}{2\sigma_1^2(1 - e^{-2\varepsilon\omega_0\tau})}\right\}, \quad (15.34)$$

где

$$\sigma_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{A_0^2} = \frac{\Gamma^2 e \langle I_a \rangle \omega_0}{4\varepsilon I_0^2}$$

$$(\tau > 0).$$

Найдем функцию корреляции и спектральную плотность генерируемого сигнала. Под последним мы подразумеваем либо ток через индуктивность $I$, либо сеточное напряжение $U_c$, либо напряжение на контуре $U_к$. Поскольку ток $I(t)$ пропорционален функции $x(t)$, а указанные напряжения — ее производной

$$I - I_= = \frac{x_\sim}{\omega_0 M} = \frac{I_0}{A_0} x; \quad U_c = \frac{\dot{x}}{\omega_0};$$

$$U_к = \frac{L}{M} U_c = \frac{L}{\omega_0 M} \dot{x}, \tag{15.35}$$

то достаточно найти функцию корреляции и спектральную плотность для $x$.

Используя формулу (17) и учитывая, что флюктуации амплитуды и фазы независимы и что $\langle \delta a \rangle = 0$, имеем

$$\frac{\langle x x_\tau \rangle}{A_0^2} = \langle 1 + \delta a \delta a_\tau \rangle \langle \cos \Phi_\tau^* \cos \Phi_\tau^* \rangle +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{24} \langle \cos \Phi^* (2\rho \cos 2\Phi_\tau^* + \sin 3\Phi_\tau^*) \rangle +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{24} \langle (2\rho \cos 2\Phi^* + \sin 3\Phi^*) \cos \Phi_\tau^* \rangle +$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2 \langle (2\rho \cos 2\Phi^* + \sin 3\Phi^*) \times$$

$$\times (2\rho \cos 2\Phi_\tau^* + \sin 3\Phi_\tau^*) \rangle. \tag{15.36}$$

Произведение синусов и косинусов в (36) преобразуем к их сумме и (при фиксированных флюктуациях $\delta\varphi$) произведем прежде всего усреднение по случайной начальной фазе $\varphi_0$, входящей в $\Phi^* = \omega_0 t + \varphi_0 + \delta\varphi$. После этого некоторые члены уравнения выпадут и мы будем иметь

$$A_0^{-2} \langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle \delta a \delta a_\tau \rangle) \cos (\Phi_\tau^* - \Phi^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{12} \rho\right)^2 \times$$

$$\times \cos 2 (\Phi_\tau^* - \Phi^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2 \cos 3 (\Phi_\tau^* - \Phi^*). \tag{15.37}$$

Поскольку

$$\Phi_\tau^* - \Phi^* = \omega_0\tau + \delta\varphi_\tau - \delta\varphi = \omega_0\tau + \Delta\varphi,$$

то последнее выражение можно записать в виде

$$A_0^{-2}\langle x x_\tau\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{(1 + \langle \delta a \delta a_\tau\rangle)\langle e^{i\Delta\varphi}\rangle e^{i\omega_0\tau} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon\rho}{12}\right)^2 \langle e^{2i\Delta\varphi}\rangle e^{2i\omega_0\tau} + \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2 \langle e^{3i\Delta\varphi}\rangle e^{3i\omega_0\tau}\right\}. \quad (15.38)$$

Входящие сюда средние $\langle e^{i\Delta\varphi}\rangle$ ,... легко выражаются через характеристическую функцию набега фазы. Поскольку $\Delta\varphi$ — нормальная случайная величина с известной дисперсией (14.43), то характеристическая функция имеет вид

$$\langle e^{iu\Delta\varphi}\rangle = e^{-\frac{u^2}{2} D_0 |\tau|}. \quad (15.39)$$

Полагая в этом выражении $u = 1, 2, 3$, а также подставляя (27), получаем из (38)

$$\langle x x_\tau\rangle = \frac{A_0^2}{2}\left[(1 + \sigma_1^2 e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|}) e^{-\frac{1}{2} D_0|\tau|}\cos\omega_0\tau + \right.$$
$$+ \left(\frac{\varepsilon\rho}{12}\right)^2 e^{-2D_0|\tau|}\cos 2\omega_0\tau +$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2 e^{-\frac{9}{2} D_0|\tau|}\cos 3\omega_0\tau\right]. \quad (15.40)$$

После того, как определена корреляционная функция, нетрудно найти спектральную плотность, совершая преобразование Фурье. Спектр функции корреляции, имеющий вид $\sigma^2 e^{-\gamma|\tau|}\cos\omega_0\tau$, вычислялся нами ранее (раздел I § 2). Пользуясь формулой (2.24), а также пренебрегая во втором члене величиной $D_0$ по сравнению с $\varepsilon\omega_0$, получаем

$$2A_0^{-2} S[x, \omega] = \frac{D_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4} D_0^2} + 2\sigma_1^2 \frac{\varepsilon\omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \varepsilon^2\omega_0^2} +$$
$$+ \left(\frac{\varepsilon\rho}{12}\right)^2 \frac{4D_0}{(\omega - 2\omega_0)^2 + 4D_0^2} +$$
$$+ \left(\frac{\varepsilon}{24}\right)^2 \frac{9D_0}{(\omega - 3\omega_0)^2 + \frac{81}{4} D_0^2}. \quad (15.41)$$

Найденный спектр сигнала вследствие условий $\varepsilon \ll 1$ $D_0 \ll \omega_0$ имеет полосовую структуру, которая схематически показана на рис. 15.1. При исследовании этого спектра надо иметь в виду хорошо выполняющееся соотношение $D_0 \ll \varepsilon\omega_0$. В самом деле, в случае рассмотренного ранее примера $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$; $D_0/\omega_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-14}$.

Большая часть мощности сигнала попадает в полосу частот, расположенную вблизи основной частоты $\omega_0$. Примерно в $(\varepsilon/24)^2$ раз меньшая мощность попадает

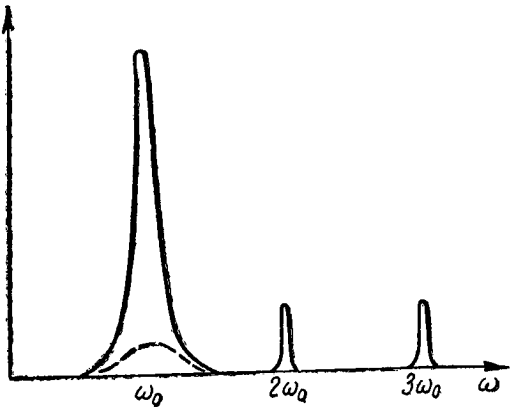



Рис. 15.1. Полосовая структура спектра генерируемого сигнала.

в узкие полосы, лежащие вблизи кратных частот $2\omega_0$, $3\omega_0$; более высоким гармоникам соответствует еще меньшая мощность. Чтобы рассчитать их, требуется проводить вычисления с большей точностью по $\varepsilon$.

Рассмотрим подробнее спектр сигнала вблизи основной частоты. Из формулы (41) видно, что этот спектр содержит две компоненты. Первый член описывает узкополосную компоненту, полная мощность которой равна $A_0^2/2$. Эта компонента собственно и соответствует самим гармоническим колебаниям, образуя в спектре дискретную линию, которая при отсутствии флюктуационных воздействий имеет нулевую толщину. Вследствие диффузии фазы эта дискретная линия расширяется до ширины $D_0/2$.

Вторая компонента, описываемая вторым членом в (41), является более широкополосной. Она возникает

вследствие флюктуаций амплитуды и имеет ширину полосы $\varepsilon\omega_0$ и мощность

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{1}{8}\Gamma^2 e \langle I_a \rangle \frac{\omega_0 A_0^2}{\varepsilon I_0^2}.$$

Эта мощность меньше, чем мощность дискретной линии основной частоты. Последние два члена выражения (41) описывают несколько расширенные дискретные линии на частотах $2\omega_0$ и $3\omega_0$. На кратных частотах также имеется более широкополосная компонента, однако мы их не выписали вследствие того, что они имеют еще меньшую мощность.

Спектр тока $I(t)$ и напряжений (35) выражается через $S[x, \omega]$ по очевидным формулам

$$S[I - \langle I \rangle, \omega] = \left(\frac{I_0}{A_0}\right)^2 S[x, \omega];$$

$$S[U_c, \omega] = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 S[x, \omega]; \qquad (15.42)$$

$$S[U_к, \omega] = \left(\frac{L}{M}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 S[x, \omega].$$

Спектральные плотности напряжений $U_c$ и $U_к$, получаемых из $x$ дифференцированием, отличаются тем, что содержат слабо выраженную компоненту равномерного спектра, т. е. компоненту «белого шума». Эта компонента, хотя ее спектральная плотность невелика (для $U_c$ равна $(A_0^2/2\omega_0^2)(D_0 + 2\sigma_1^2\varepsilon\omega_0 + \varepsilon^2 D_0 \ldots)$ приводит к большой (в нашем приближении — бесконечной) дисперсии флюктуаций напряжения. Для определения фактической величины дисперсии потребовался бы более детальный анализ с учетом паразитных интегрирующих параметров схемы или пролетного времени.

### 3. Периодическая нестационарность дробового шума

Поскольку интенсивность дробового шума пропорциональна анодному току, который меняется в течение периода, то интенсивность шума также периодически меняется и дробовые флюктуации являются, следовательно, нестационарными. Этой нестационарностью можно пренебречь, когда гармоническая составляющая анодного тока значительно меньше его постоянной

составляющей, и пользоваться результатами предыдущего раздела.

Однако во многих практических случаях возникающие автоколебания приобретают большую величину, так что пренебрежение переменной составляющей анодного тока становится недопустимым. В случае примера, рассмотренного в разделе 2 § 13, анодный ток имеет резко выраженный пульсирующий характер. В течение периода величина анодного тока, а следовательно, и интенсивность флюктуаций изменяются более чем в 60 раз. При таких условиях естественно ожидать, что учет пульсирующего характера шума, периодических изменений его интенсивности внесет значительные изменения в результаты, найденные в предыдущем разделе.

Формулы (18)—(25) сохраняют свое значение и в случае непостоянного мгновенного среднего тока $\langle I_a(t)\rangle$ и числа пролетающих электронов $n(t)$.

При этом функция корреляции анодного тока (24) зависят не только от разности времени $t-t'$, но и явно от $t$, поскольку $\langle I_a(t)\rangle$ зависит от $t$. В пренебрежении пролетным временем средний анодный ток (13.9) можно представить тригонометрическим рядом

$$\langle I_a(t)\rangle = F\left[A\cos\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= i_0 + i_1\cos\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right) + i_2\cos 2\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right)+\ldots, \quad (15.43)$$

так как сеточное напряжение $U_c \approx -A\sin\Phi$.

В случае характеристики лампы, аппроксимируемой полиномом (13.22), коэффициенты указанного ряда равны

$$i_0 = I_= + \frac{\beta}{4}A^2;\quad i_1 = SA - \frac{\gamma}{4}A^3;$$
$$i_2 = \frac{\beta}{4}A^2;\quad i_3 = \frac{\gamma}{12}A^3;\quad i_4 = \ldots = 0. \quad (15.44)$$

Вследствие того, что флюктуационные отклонения от стационарной амплитуды сеточного напряжения $A_0$ являются малыми ($a-1 \ll 1$), можно полагать

$$i_0 = I_= + \frac{\beta}{4}A_0^2;\quad i_1 = SA_0 - \frac{\gamma}{4}A_0^3;$$
$$i_2 = \frac{\beta}{4}A_0^2;\quad i_3 = \frac{\gamma}{12}A_0^3;\quad i_4 = \ldots = 0. \quad (15.45)$$

Вычислим корреляционные функции случайных процессов

$$\zeta_1 = -\frac{\varepsilon}{A_0}\xi\sin\Phi = \frac{I_\Phi}{I_0}\cos\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right);$$
$$\zeta_2 = -\frac{\dot{\varepsilon}}{A_0}\xi\cos\Phi = -\frac{I_\Phi}{I_0}\sin\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right). \quad (15.46)$$

В отличие от стационарного случая, рассмотренного ранее, теперь флюктуации анодного тока не являются независимыми от фазы колебаний, поэтому равенство (14.32) является несправедливым. Усреднение выражения $I_\Phi \sin\Phi\, I_{\Phi\tau}\sin\Phi_\tau$ мы будем производить в два приема: сначала усредним его по анодным флюктуациям (это усреднение не коснется множителей $\sin\Phi$, $\sin\Phi_\tau$), а затем произведем усреднение по фазе колебаний. Такое двойное усреднение можно записать в виде

$$\langle\zeta_1\zeta_{1\tau}\rangle = I_0^{-2}\langle\langle I_\Phi I_{\Phi\tau}\rangle\sin\Phi\sin\Phi_\tau\rangle. \quad (15.47)$$

Обозначенное внутренней скобкой усреднение по дробовым флюктуациям, не затрагивающее фазы колебаний, есть как раз не что иное, как усреднение, дающее корреляционную функцию (24). Поэтому

$$\langle\zeta_1\zeta_{1\tau}\rangle = \Gamma^2e^2I_0^{-2}\delta(\tau)\langle\langle I_a(t)\rangle\sin^2\Phi\rangle. \quad (15.48)$$

Подставляя сюда ряд (43), имеем

$$\langle\zeta_1\zeta_{1\tau}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2e}{I_0^2}\langle(i_0+i_1\cos\Phi'+i_2\cos2\Phi'+\ldots)(1+$$
$$+\cos2\Phi')\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2e}{I_0^2}\left\langle i_0+\frac{i_2}{2}+i_1\cos\Phi'+\frac{i_3}{2}\cos\Phi'+\right.$$
$$\left.+i_2\cos2\Phi'+\ldots\right\rangle, \quad (15.49)$$
$$\left(\Phi' = \Phi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Вследствие того, что начальную фазу $\varphi_0$ мы считаем равномерно распределенной, при усреднении по фазе выпадут тригонометрические функции, которые содержат $\Phi' = \omega_0 t+\varphi_0+\delta\varphi+\frac{\pi}{2}$ в аргументе. Останутся лишь два независящих от $\Phi'$ члена

$$\langle\zeta_1\zeta_{1\tau}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2e}{I_0^2}\left(i_0+\frac{i_2}{2}\right)\delta(\tau). \quad (15.50)$$

Аналогичным образом легко получить

$$\langle \zeta_2 \zeta_{2\tau} \rangle = \frac{1}{2} \Gamma^2 e I_0^{-2} \left( i_0 - \frac{i_2}{2} \right) \delta(\tau);$$

$$\langle \zeta_1 \zeta_{2\tau} \rangle = 0. \qquad (15.51)$$

В конкретном случае (45) эти формулы дают

$$\langle \zeta_1 \zeta_{1\tau} \rangle = \frac{1}{2} \Gamma^2 e \left( I_= + \frac{3}{8} \beta A_0^2 \right) I_0^{-2} \delta(\tau);$$

$$\langle \zeta_2 \zeta_{2\tau} \rangle = \frac{1}{2} \Gamma^2 e \left( I_= + \frac{1}{8} \beta A_0^2 \right) I_0^{-2} \delta(\tau). \qquad (15.52)$$

Мы видим, что периодическая нестационарность дробовых флюктуаций приводит к тому, что интенсивность флюктуационных воздействий на амплитуду и фазу становится неодинаковой; величина воздействий на амплитуду увеличивается, а на фазу уменьшается (при $\beta > 0$). Дальнейшее рассмотрение проводится так же, как и ранее, на основе уравнений

$$\dot{\delta a} + \varepsilon \omega_0 \delta a = \omega_0 \vec{r}_1;$$

$$\dot{\delta \varphi} = \omega_0 \vec{r}_2. \qquad (15.53)$$

Увеличение флюктуационных воздействий на амплитуду дает увеличение амплитудных флюктуаций в $1 + i_2/2i_0$ раз

$$\langle \delta a \delta a_\tau \rangle = \frac{1}{4\varepsilon} \Gamma^2 e \left( i_0 + \frac{i_2}{2} \right) \omega_0 I_0^{-2} \qquad (15.54)$$

по сравнению с формулой (27), если в ней полагать $\langle I_a \rangle = i_0$.

Диффузия фазы, напротив, происходит менее интенсивно. Коэффициент диффузии фазы в выражении (14.43) становится равным

$$D_0 = \frac{1}{2} \Gamma^2 e \left( i_0 - \frac{i_2}{2} \right) \frac{\omega_0^2}{I_0^2}. \qquad (15.55)$$

Соответствующие изменения следует внести также в выражение для спектра генерируемого сигнала. Ширина дискретной спектральной линии уменьшается на $(50 i_2/i_0)\,\%$; ее интенсивность остается без изменения. Обусловленная амплитудными флюктуациями полоса в спектре сигнала, напротив, не меняет своей ширины, равной $\varepsilon\omega_0$, но ее интенсивность возрастает в $1 + i_2/2i_0$ раз.

В случае рассмотренного ранее примера $A_0 = 11$ *в*, $I_{\sim} = 0{,}046$ *а*; $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ *а/в*$^2$. В соответствии с (45), указанные выше изменения составляют 5%. При этом интенсивность флюктуационных воздействий на амплитуду будет на 10% больше, чем интенсивность воздействий на фазу.

Характерной особенностью рассмотренного здесь влияния нестационарности дробового шума является то, что его степень определяется не величиной основной гармоники колебаний анодного тока, а амплитудой двойной частоты.

### 4. О влиянии флюктуаций амплитуды на диффузию фазы

Уравнение колебаний (13.20), описывающее работу генератора в рамках принятой идеализации, дает уравнения первого приближения (8), по которым влияние флюктуаций амплитуды на фазу отсутствует. Эффект влияния амплитуды описывается лишь уравнениями второго приближения (14) и является, следовательно, небольшим. В некоторых случаях, однако, флюктуации амплитуды могут существенным образом влиять на флюктуации фазы вследствие причин, не учтенных при выводе уравнения (13.20), например вследствие имеющихся сеточных токов. Поэтому представляет интерес исследовать указанное явление. При этом мы будем исходить из линеаризованного уравнения для фазы

$$\dot{\delta\varphi} = -\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\gamma\delta A - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\zeta(t). \qquad (15.56)$$

Здесь $\zeta(t)$ — флюктуационный процесс, входящий в (13.67) или (15) и имеющий после «упрощения» корреляционную функцию (13.68) ($\langle\zeta\zeta_\tau\rangle = \varkappa(\omega_0)\delta(\tau)/2$). Коэффициент $\gamma$ описывает степень влияния амплитуды на фазу; в том случае, когда справедливы уравнения (14), он равен

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{p^2}{3}\right). \qquad (15.57)$$

Флюктуации амплитуды $\delta A(t)$ в линейном приближении представляют собой нормальный случайный процесс, независимый от $\zeta(t)$ и имеющий корреляционную функцию (14.38). Если не учитывать разницы между

$\omega_1$ и $\omega_0$, то последняя будет определяться выражением (27)

$$\langle \delta A \delta A_\tau \rangle = \sigma^2 e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|},$$

$$\left(\sigma^2 = \frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 \varkappa(\omega_0)\right). \qquad (15.58)$$

Интегрируя (56), получаем приращение фазы за время $T$

$$\Delta\varphi = -\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\gamma\int_0^T \delta A dt - \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\int_0^T \zeta dt. \qquad (15.59)$$

Это равенство при учете (58) позволяет определить дисперсию

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \left(\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\right)^2 \left[\gamma^2 \int_0^T\int_0^T \langle \delta A(t)\delta A(t')\rangle dt dt' + \right.$$

$$\left. + \int_0^T\int_0^T \langle \zeta(t)\zeta(t')\rangle dt dt'\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\right)^2 \varkappa(\omega_0) \times$$

$$\times \left\{\gamma^2\left(T - \frac{1-e^{-\varepsilon\omega_0 T}}{\varepsilon\omega_0}\right) + T\right\} \qquad (15.60)$$

и корреляции

$$\langle \delta A \Delta\varphi \rangle = \langle \delta A_T \Delta\varphi \rangle = k(T),$$

$$k(T) = \frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\gamma\int_0^\tau \langle \delta A \delta A_\sigma\rangle d\sigma = -\frac{\sigma^2}{A_0}\gamma\left[1 - e^{-\varepsilon\omega_0 T}\right]. \qquad (15.61)$$

С возрастанием времени при $T \gg \frac{1}{\varepsilon\omega_0}$ формула (60) дает чисто диффузионный закон нарастания фазы

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = D_1 \tau,$$

где

$$D_1 = D_0 \cdot (1+\gamma^2), \quad \left(D_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{A_0}\right)^2 \varkappa(\omega_0)\right) \qquad (15.62)$$

— уточненный коэффициент диффузии, учитывающий влияние амплитудных флюктуаций. Корреляции (61) при этом приобретают предельное значение

$$\langle \delta A \Delta\varphi \rangle = \langle \delta A_\tau \Delta\varphi \rangle = -\frac{\sigma^2\gamma}{A_0}. \qquad (15.63)$$

Корреляция между амплитудой и фазой несколько изменяет корреляционную функцию генерируемого сигнала

$$x = \mathrm{Re}\,(Ae^{i\omega_0 t + i\varphi}) = \mathrm{Re}\,(ze^{i\omega_0 t}).$$

Пользуясь формулой (7.16) и (7.73) в данном случае вместо (7.76), будем иметь

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\langle AA_\tau e^{-i\Delta\varphi}\rangle e^{-i\omega_0\tau}]$$

или

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\langle (A_0^2 + A_0\delta A + A_0\delta A_\tau + \delta A\delta A_\tau)\, e^{-i\Delta\varphi}\rangle e^{-i\omega_0\tau}]\,. \qquad (15.64)$$

Входящее сюда среднее значение можно выразить по формуле

$$\langle (A_0\delta A + A_0\delta A_\tau + \delta A\delta A_\tau)\, e^{-i\Delta\varphi}\rangle =$$

$$= \left[\left(A_0\frac{\partial}{i\partial u} + A_0\frac{\partial}{i\partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\right)\Theta(u, v, w)\right]_{\substack{u=v=0\\ w=-1}} \qquad (15.65)$$

через характеристическую функцию

$$\Theta(u, v, w) = \langle e^{iu\delta A + iv\delta A_\tau + iw\Delta\varphi}\rangle,$$

которая согласно (3.1) имеет вид

$$\Theta(u, v, w) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,[u^2\langle\delta A^2\rangle + 2uv\langle\delta A\delta A_\tau\rangle + v^2\langle\delta A_\tau^2\rangle + 2uwk(\tau) + 2vwk(\tau) + w^2\langle\Delta\varphi^2\rangle]\right\}. \qquad (15.66)$$

Подставляя (66) в (65), получаем

$$\langle (A_0 + \delta A)(A_0 + \delta A_\tau)\, e^{-i\Delta\varphi}\rangle =$$

$$= [A_0^2 - 2iA_0k(\tau) - k^2(\tau) + \langle\delta A\delta A_\tau\rangle]\, e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle}.$$

Принимая во внимание (64), поэтому имеем

$$\langle xx_\tau\rangle = [A_0^2 + \langle\delta A\delta A_\tau\rangle - k^2(\tau)]\, e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle}\cos\omega_0\tau -$$

$$- 2A_0k(\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle}\sin\omega_0\tau. \qquad (15.67)$$

Сравнение полученного выражения с формулой (7.4) позволяет определить функции

$$r(\tau) = [A_0^2 + \langle \delta A \delta A_\tau \rangle - k^2(\tau)]\, e^{-\frac{1}{2} D\varphi} \approx$$

$$\approx [A_0^2 + \langle \delta A \delta A_\tau \rangle]\, e^{-\frac{1}{2} D\varphi},$$

$$s(\tau) = 2A_0 k(\tau)\, e^{-\frac{1}{2} D\varphi}, \qquad (15.68)$$

спектр которых по формуле (7.8) составляет спектральную плотность генерируемого сигнала $S[x, \omega]$.

Теперь отлична от нуля нечетная функция $s(\tau)$, которая вносит несимметрию в форму спектральной линии. Подсчитаем ее спектр $\sigma(\Omega)$, пользуясь малостью дисперсии $D\varphi$ при $\tau \sim \varepsilon\omega_0$. Согласно (61), (68) и (7.6) имеем

$$\sigma(\Omega) = -2 \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-i\Omega t} s(t)\, dt =$$

$$= 4\sigma^2\gamma \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-i\Omega t} [e^{-\frac{1}{2} D_1 t} - e^{-\varepsilon\omega_0 t}]\, dt =$$

$$= -4\sigma^2\gamma \left[ \frac{\Omega}{\Omega^2 + \frac{1}{4} D_1^2} - \frac{\Omega}{\Omega^2 + \varepsilon^2\omega_0^2} \right]. \qquad (15.69)$$

Таким образом, согласно (7.8) влияние флюктуаций амплитуды на фазу добавляет к спектральной плотности генерируемого сигнала несимметричную функцию

$$-4\sigma^2\gamma(\omega - \omega_0) \left[ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4} D_1^2} - \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \varepsilon^2\omega_0^2} \right] =$$

$$= -4\sigma^2\gamma \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4} D_1^2} \cdot \frac{\varepsilon^2\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \varepsilon^2\omega_0^2}.$$

Между амплитудой и фазой устанавливается корреляция и это нарушает симметрию спектральной линии колебаний.

## § 16. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИНТЕНСИВНЫХ ВНЕШНИХ ФЛЮКТУАЦИЙ НА ГЕНЕРАТОР

Рассмотрим работу генератора гармонических колебаний при подаче на него внешнего флюктуационного напряжения, которое может иметь значительную интен-

сивность. Практически подобное напряжение является иногда внешней помехой, а иногда специально подается на генератор для тех или иных целей, например для получения колебаний, модулированных шумом.

В § 13 было выведено уравнение колебаний (13.13), описывающее работу генератора при подаче внешнего напряжения на сетку, на контур и на анод, что изображено на рис. 13.3. Как видно из этого уравнения, подача напряжения на сетку и на анод приводит к сходным уравнениям колебаний, содержащим внешнее напряжение в нелинейной функции. В отличие от этого при подаче внешнего напряжения на контур соответствующая ему функция добавляется линейно в виде отдельного члена. Вследствие этого различия математическое рассмотрение указанных двух случаев неодинаково и получаемые результаты аналитически отличаются друг от друга. Займемся этими случаями отдельно.

### 1. Флюктуации фазы при подаче шума на колебательный контур

Начнем с рассмотрения воздействия флюктуационного напряжения на контур. Пренебрегая реакцией анодной нагрузки $D=0$, из (13.13) в этом случае имеем

$$\ddot{I}+\omega_0^2 I=\omega_0^2[F(M\dot{I})-RC\dot{I}]+\omega_0^2 C\dot{u}_{\text{к}}. \qquad (16.1)$$

Переменная $x=\omega_0 M(I-I_{=})$, пропорциональная переменной составляющей тока $I$ и имеющая размерность напряжения, удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^3\left[MF_0\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)-RC\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right]+$$
$$+\omega_0^3 MC\dot{u}_{\text{к}}, \qquad (16.2)$$

где

$$F_0(u)=F(u)-I_{=}=Su+\frac{\beta}{2}u^2-\frac{\gamma}{3}u^3,$$

если использовать прежнюю аппроксимацию характеристики лампы (рис. 13.4). Член $\beta u_c^2$ не сказывается в упрощенных уравнениях первого приближения. Поэтому его можно не писать.

Уравнение (2) совпадает после этого с уравнением (13.24), детально рассмотренным в § 13 и 14, при этом

в соответствии с принятыми там обозначениями следует полагать

$$\varepsilon\xi(t) = \omega_0 MC\dot{u}_к,$$
$$\varkappa(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 MC}{\varepsilon}\right)^2 \omega^2 S[u_к, \omega]. \qquad (16.3)$$

Ранее было показано (§ 13), что в результате упрощения уравнений в стандартной форме, определяющих поведение амплитуды и фазы $A$, $\varphi$ колебательного процесса

$$x = A\cos\Phi = aA_0\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (\dot{x} = -\omega_0 A\sin\Phi),$$

получаем уравнения (13.80) или в первом приближении

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(a - a^3 + \frac{c}{2a}\right) + \eta',$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\zeta'}{a}. \qquad (16.4)$$

Здесь $\eta'(t)$, $\zeta'(t)$ — одинаковые независимые нормальные случайные функции с нулевым средним значением и корреляционными функциями

$$\langle\eta'\eta'_\tau\rangle = \langle\zeta'\zeta'_\tau\rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} c\delta(\tau), \qquad (16.5)$$

причем согласно (13.79), (3)

$$c = \frac{\varepsilon\omega_0\varkappa(\omega_0)}{A_0^2} = \frac{\omega_0}{2\varepsilon U_0^2} S[u_к, \omega_0] \qquad (16.6)$$

($U_0 = \frac{LA_0}{M}$ — амплитуда колебаний напряжения на индуктивности).

Большая интенсивность флюктуаций, предполагаемая в настоящем параграфе, означает, что коэффициент интенсивности $c$ сравним с единицей.

В § 14 разд. 1 были рассмотрены флюктуации амплитуды, описываемые первым уравнением (4). Там была найдена стационарная плотность распределения амплитуды (14.8), имеющая форму, изображенную на рис. 14.1, а также были вычислены моменты $\langle a^k\rangle$ различных порядков, начиная с $\langle a^{-1}\rangle$.

Здесь мы рассмотрим незатронутый ранее вопрос о флюктуациях фазы, которые описываются вторым уравнением (4).

Чтобы получить величину флюктуационного набега фазы $\Delta\varphi$ в течение интервала времени от момента $t_0$ до момента времени $t_0+\tau$, следует проинтегрировать указанное уравнение; после чего имеем

$$\Delta\varphi = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\zeta'(t)}{a(t)}\, dt. \qquad (16.7)$$

Здесь $a(t)$, как и $\zeta'(t)$ является случайной функцией, но не имеет дельтаобразной корреляционной функции. Существенно, что $a(t)$ статистически независима от $\zeta'(t)$, так как полностью определяется независимой случайной функцией $\eta'(t)$ в силу первого уравнения (4).

Вычислим плотность распределения вероятностей $w(\Delta\varphi)$ для набега фазы $\Delta\varphi$, полагая $t_0=0$. В соответствии с формулой (1.8) ее можно записать в виде среднего от дельта-функции

$$w(\psi) = \langle \delta(\psi - \Delta\varphi)\rangle = \left\langle \delta\left(\psi - \int_0^{\tau} \frac{\zeta'(t)}{a(t)}\, dt\right)\right\rangle. \qquad (16.8)$$

Имеющееся здесь усреднение будем производить в два этапа, используя независимость между $a(t)$ и $\zeta'(t)$. Сначала при фиксированной реализации функции $a(t)$ произведем усреднение по ансамблю функций $\zeta'(t)$ и получим вспомогательную условную плотность вероятностей

$$w(\psi \mid a(t)) = \left\langle \delta\left(\psi - \int_0^{\tau} \frac{\zeta'}{a}\, dt\right)\right\rangle_{a(t)=fix}. \qquad (16.9)$$

Если рассматривать $a(t)$ не как фиксированную функцию, а как случайный процесс, то эта плотность сама будет случайной. Для получения истинной плотности распределения (8) требуется ее дальнейшее усреднение по различным возможным реализациям процесса $a(t)$

$$w(\psi) = \langle w(\psi \mid a(t))\rangle. \qquad (16.10)$$

Поскольку $\zeta'(t)$ — нормальная случайная функция, то при любой фиксированной функции $a(t)$ величина $\int (\zeta'/a)\,dt$ будет иметь нормальный закон распределения.

Учитывая дельтаобразный вид функции корреляции от $\zeta'$, находим условную дисперсию

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle_{a=fix} = \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{\langle \zeta'(t)\zeta'(t')\rangle}{a(t)\,a(t')}\,dt\,dt' = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} c \int_0^\tau \frac{dt}{a^2(t)}. \quad (16.11)$$

Эта дисперсия (а также нулевое среднее значение) однозначно определяет нормальный закон распределения

$$w[\psi \mid a(t)] = \left(\pi\varepsilon\omega_0 c \int_0^\tau \frac{dt}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\psi^2}{\varepsilon\omega_0 c \int_0^\tau \frac{dt}{a^2}}\right\}. \quad (16.12)$$

Теперь остается лишь в соответствии с (10) произвести усреднение по $a(t)$.

Нужно отметить, что при стационарном процессе генерирования набег фазы имеет бесконечную дисперсию. В самом деле, после усреднения по $a(t)$ условной дисперсии (11) получим

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} c \int_0^\tau \langle a^{-2}(t)\rangle\,dt = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} c \langle a^{-2}\rangle \tau, \quad (16.13)$$

(так как $\langle a^{-2}(t)\rangle$ не зависит от $t$). Но, пользуясь распределением (14.8), убеждаемся, что $\langle a^{-2}\rangle$ равно бесконечности вследствие расходимости интеграла

$$\langle a^{-2}\rangle = \frac{2}{N} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2c}(a^2-1)^2} \frac{da}{a}$$

в нижнем пределе $a=0$. Такое особо сильное влияние малых значений амплитуды на расплывание фазы объясняется следующим образом. Относительно часто происходит значительное уменьшение амплитуды колебаний; автоколебания почти совсем срываются, после этого они возникают заново, но эти по существу своему новые колебания имеют фазу, очень мало связанную с фазой прежних колебаний. Такая малая преемственность фазы, которая тем меньше, чем до меньших значений спадала амплитуда, приводит, понятно, к повышенной интенсив-

ности набега фазы. Если принять меры, препятствующие уменьшению амплитуды до нулевых значений, то дисперсия набега фазы будет конечной.

Вместо дисперсии, разброс $\Delta\varphi$ можно характеризовать средним модулем $\langle|\Delta\varphi|\rangle$, который имеет конечное значение

$$\langle|\Delta\varphi|\rangle=\left(\frac{\varepsilon\omega_0 c}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\langle\left(\int_0^{\tau}\frac{dt}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\rangle. \qquad (16.14)$$

Ввиду того, что $a(t)$ есть сложный случайный процесс, проведение вычислений по формулам (12), (10), (14) в общем виде затруднительно. Мы ограничимся случаем малых интервалов времени $\tau$, а именно будем рассматривать такие интервалы времени, в течение которых значение амплитуды не успевает сильно измениться. Хотя можно добиться и бóльшей точности, но мы возьмем самое простое соотношение

$$\int_0^{\tau}\frac{dt}{a^2(t)}\approx\frac{\tau}{a^2(0)}, \qquad (16.15)$$

полученное в предположении постоянства амплитуды в течение рассматриваемого интервала. Подставляя это соотношение в (12), (10), (14), находим

$$w(\psi)=(\pi c\varepsilon\omega_0\tau)^{-\frac{1}{2}}\left\langle a\exp\left\{-\frac{\psi^2a^2}{c\varepsilon\omega_0\tau}\right\}\right\rangle; \qquad (16.16)$$

$$\langle|\Delta\varphi|\rangle=\left(\frac{c\varepsilon\omega_0\tau}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\langle a^{-1}\rangle. \qquad (16.17)$$

Сюда входят средние от мгновенного значения амплитуды. Для их вычисления достаточно знать плотности распределения (14.8). Для $w(\psi)$ при этом получаем выражение

$$w(\psi)=\frac{2}{N\sqrt{\pi c\varepsilon\omega_0\tau}}e^{-\frac{1}{2c}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{a^4}{2c}+\frac{a^2}{c}-\frac{\psi^2a^2}{c\varepsilon\omega_0\tau}}a^2da, \qquad (16.18)$$

которое при помощи функции $Z_2(y)$, введенной в формуле (14.16), можно записать в виде

$$w(\psi)=\frac{1}{N_2}Z_2\left(\frac{\frac{\psi^2}{\varepsilon\omega_0\tau}-1}{\sqrt{8c}}\right). \qquad (16.19)$$

Здесь $N_2$ — нормировочная постоянная

$$N_2 = N(8c)^{-\frac{1}{4}}(\pi\varepsilon\omega_0\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{2c}}.$$

Функция $Z_2(y)$ выражается через цилиндрические функции по формулам (14.18). Если воспользоваться асимптотическим выражением для цилиндрических функций, то при больших значениях $y$ имеем

$$Z_2(y) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{16}\,y^{-\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$w(\psi) \approx \frac{1}{N_2}\frac{\sqrt{\pi}}{16}(8c)^{\frac{3}{4}}(\varepsilon\omega_0\tau)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times(\psi^2 - \varepsilon\omega_0\tau)^{-\frac{3}{2}} \sim \text{const}\,\psi^{-3}. \qquad (16.20)$$

Мы видим, что плотность распределения $w(\psi)$ медленно убывает с увеличением $\psi$, так что интеграл $\int \psi^2 w(\psi)\,d\psi$, выражающий средний квадрат $\langle\Delta\varphi^2\rangle$, действительно расходится в отличие от интеграла $\int |\psi| w(\psi)\,d\psi = \langle|\psi|\rangle$.

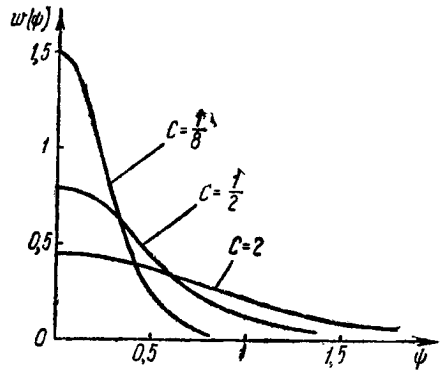



Рис 16 1 Плотность вероятности приращений фазы Δφ при различных уровнях шума ($z = \Delta\varphi/\sqrt{\varepsilon\omega_0\tau}$).

На рис. 16.1 представлен ход кривой плотности распределения (19) для значений $c = \frac{1}{8};\ \frac{1}{2};\ 2$.

Как видно из вышеизложенного, при больших интенсивностях случайных воздействий процесс расплывания фазы сильно отличается от обычного диффузионного процесса, так как формально он имеет бесконечный коэффициент диффузии $D = \infty$ и приводит к негауссовому закону распределения (19).

Большой интерес представляет вычисление корреляционной функции и спектральной плотности сигнала

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A_0\,\mathrm{Re}\,(a e^{i\varphi + i\omega_0 t}).$$

Согласно (7.16) его корреляционную функцию можно записать

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{A_0^2}{2}\,\mathrm{Re}\,[\langle aa_\tau e^{-i\Delta\varphi}\rangle e^{-i\omega_0\tau}].$$

Подставляя сюда (7) и производя, как и раньше, усреднение по статистическому ансамблю функций $\zeta'$, получаем в силу (11)

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{A_0^2}{2}\left\langle aa_\tau \exp\left\{-\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 c\int_t^{t+\tau}\frac{dt}{a^2(t)}\right\}\right\rangle \cos\omega_0\tau. \quad (16.21)$$

При малых $\tau$, когда $a_\tau$ мало отличается от $a$ и когда можно пользоваться соотношением (15), полученное равенство дает

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{A_0^2}{2}\left\langle a^2 e^{-\frac{\varepsilon\omega_0 c}{4a^2}|\tau|}\right\rangle \cos\omega_0\tau, \quad (16.22)$$

где знак среднего $\langle\ldots\rangle$ обозначает усреднение с весом (14.8). Разлагая экспоненту $\exp\left\{-\frac{\varepsilon\omega_0 c|\tau|}{4a^2}\right\}$, стоящую в (22), в ряд Тейлора, находим величину излома, который имеет корреляционная функция (21) в начале координат

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{A_0^2}{2}\left[\langle a^2\rangle - \frac{\varepsilon\omega_0 c}{4}|\tau| + R_1\right]\cos\omega_0\tau. \quad (16.23)$$

Остаток, обозначенный через $R_1$, больше не имеет изломов, т. е. его производная по $\tau$ непрерывна. Величина излома корреляционной функции определяет те спектральные компоненты, которые наиболее медленно убывают с увеличением частоты. Это дает возможность получить асимптотическую формулу для спектральной плотности $S[x, \omega]$.

Когда флюктуации малы ($c \ll 1$), можно пользоваться линейным приближением, полагая в (21) $a = a_\tau = 1$. При этом будем иметь выражение

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{A_0^2}{2}e^{-\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 c|\tau|}\cos\omega_0\tau, \quad (16.24)$$

составляющее основной вклад в найденную ранее корреляционную функцию (15.40). В этом приближении

имеет место обычный диффузионный процесс расплывания фазы, соответствующий коэффициенту диффузии $D_0=\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0 c$ (14.43). Этот коэффициент определяет ширину спектральной линии генерируемого сигнала, поскольку корреляционная функция (24) дает спектральную плотность

$$S[x,\ \omega]=\frac{A_0^2}{4}\frac{\varepsilon\omega_0 c}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 c\right)^2}.$$

При $|\omega-\omega_0|\gg\varepsilon\omega_0 c$ имеет место асимптотическая формула

$$S[x,\ \omega]=\frac{A_0^2}{4}\frac{\varepsilon\omega_0 c}{(\omega-\omega_0)^2}, \qquad (16.25)$$

соответствующая излому

$$\langle xx_\tau\rangle=\frac{A_0^2}{2}\left[1-\frac{\varepsilon\omega_0 c}{4}|\tau|+R_2\right]\sin\omega_0\tau$$

функции (24) в начале координат. Но функция (21) имеет согласно (23) излом (разрыв производной) точно такой же величины. Отсюда следует, что формула (25) справедлива при $|\omega-\omega_0|\gg\varepsilon\omega_0 c$ также при больших интенсивностях шума, когда $c\sim 1$, несмотря на то, что коэффициент диффузии фазы при этом бесконечен.

Выражению (22) соответствует согласно формуле (2.24) спектральная плотность

$$S[x,\ \omega]=\frac{A_0^2}{4}\left\langle\frac{\varepsilon\omega_0 c a^2}{a^2(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 c\right)^2}\right\rangle.$$

Это выражение при частотах $|\omega-\omega_0|\gg\varepsilon\omega_0 c$ действительно переходит в асимптотическое выражение (25).

Прежде чем закончить рассмотрение случая подачи флюктуационного напряжения на контур, приведем числовые оценки величины $c$ применительно к рассмотренному ранее в разд. 2 § 13 примеру. Подставляя в (6) значение $U_0=11\cdot 1{,}6/0{,}18=100$ *в*, а также $\varepsilon=0{,}05$, находим

$$c=\frac{\omega_0}{1000\,\mathscr{E}^2}S[u_к,\ \omega].$$

Как легко видеть, для вычисления $c$ следует принимать во внимание не среднеквадратичное значение

флюктуационного напряжения, а условную «эквивалентную величину» флюктуаций, определенную как

$$\sigma_э = (\omega_0 S [u_к, \omega])^{\frac{1}{2}}.$$

В нашем примере $c$ сравнимо с единицей, если «эквивалентная величина» флюктуационного напряжения имеет порядок 30 *в*.

## 2. Воздействие шума на сетку генератора. Разброс амплитуды

Когда внешнее флюктуационное напряжение воздействует на сетку генератора, в уравнении колебаний случайная функция входит в нелинейность. Так, полагая в (13.13) $u_к = 0$; $D = 0$, $u_c = u$, получаем

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 [F(M\dot{I} + u(t)) - RC\dot{I}]. \quad (16.26)$$

Если, как и ранее, обозначить $x = \omega_0 M(I - I_-)$ и воспользоваться прежней аппроксимацией характеристики (13.22), то будем иметь уравнение колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^3 MS\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0} + u\right) + \omega_0^3 M \frac{\beta}{2}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0} + u\right)^2 - \\ - \omega_0^3 M \frac{\gamma}{3}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0} + u\right)^3 - \omega_0^2 RC\dot{x}. \quad (16.27)$$

Хотя все члены в правой части (27) должны быть невелики, мы не будем, однако, вводить единого малого параметра $\varepsilon$, а используем следующие обозначения:

$$q_0 = \omega_0 M\left(Su + \frac{\beta}{2}u^2 - \frac{\gamma}{3}u^3\right);$$

$$q_1 = \omega_0(MS - RC) + \omega_0 M(\beta u - \gamma u^2); \quad (16.28)$$

$$q_2 = \omega_0 M\left(\frac{\beta}{2} - \gamma u\right);$$

$$q_3 = -\omega_0 M \frac{\gamma}{3}.$$

Тогда (27) запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left[q_0 + q_1\frac{\dot{x}}{\omega_0} + q_2\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + q_3\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^3\right]. \quad (16.29)$$

Уравнения в стандартной форме (13.31), соответствующие этому уравнению, имеют вид

$$\dot{A} = \frac{\omega_0}{A}\left[q_0 \frac{\dot{x}}{\omega_0} + q_1\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + q_2\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^3 + q_3\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^4\right], \quad (16.30)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\omega_0}{A^2}\left[q_0 + q_1\frac{\dot{x}}{\omega_0} + q_2\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + q_3\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^3\right]x,$$

где

$$x = A\cos\Phi; \quad \frac{\dot{x}}{\omega_0} = -A\sin\Phi \quad (\Phi = \omega_0 t + \varphi).$$

От степеней и произведений тригонометрических функций целесообразно перейти к тригонометрическим функциям кратных углов

$$\dot{A} = \frac{\omega_0}{A}\left[\frac{1}{2}q_1A^2 + \frac{3}{8}q_3A^4 - q_0A\sin\Phi - \frac{3}{4}q_2A^3\sin\Phi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}q_1A^2\cos 2\Phi - \frac{1}{2}q_3A^4\cos 2\Phi + \ldots\right]; \quad (16.31)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\omega_0}{A^2}\left[q_0A\cos\Phi + \frac{1}{4}q_2A^3\cos\Phi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}q_1A^2\sin 2\Phi - \frac{1}{4}q_3A^4\sin 2\Phi + \ldots\right].$$

Точки здесь обозначают аналогичные члены, содержащие синусы и косинусы от $3\Phi$ и $4\Phi$.

То обстоятельство, что случайное воздействие $u(t)$ входит в нелинейность, привело к появлению значительного числа флюктуационных членов в стандартных уравнениях (31). Раньше в стандартных уравнениях (13.36) случайная функция $\xi(t)$ присутствовала лишь в комбинации с синусом и косинусом основной частоты $\xi\cos\Phi$, $\xi\sin\Phi$. Соответственно этому в первом приближении оказывало влияние лишь значение спектральной плотности $\varkappa(\omega_0)$ случайного воздействия на основной частоте. Теперь в (29) воздействие $u(t)$ входит в различных комбинациях с тригонометрическими функциями частот 0, $\omega_0$, $2\omega_0$, $3\omega_0$. В самом деле, выражение $q_1A^2/2$ содержит, например, член $\omega_0M\beta uA^2/2$, не имеющий тригонометрической функции; выражение $q_0A\sin\Phi$ содержит, в частности, комбинацию случайного воздействия с синусом основной частоты $\omega_0MSu\sin\Phi$; далее, например, член $q_1A^2\cos 2\Phi$ содержит произведение $\beta u$ и гармонической

функции двойной частоты. Поэтому в первом приближении на процесс генерирования существенное влияние оказывают значение спектральной интенсивности $S[u, \omega]$ воздействия $u(t)$ вблизи нулевой частоты и частот, кратных основной частоте. Наличие членов типа $\gamma u^2$, $\gamma u^3 \sin \Phi$ и др., содержащих степени случайной функции, приводит к тому, что оказывают влияние значения спектральной плотности и при других частотах.

Положение, конечно, упрощается, если случайное воздействие $u(t)$ является узкополосным сравнительно с частотой $\omega_0$. В этом случае некоторые члены в (31) оказывают слабое влияние и число существенных членов сокращается.

Мы рассмотрим тот частный случай, когда спектральная плотность воздействия $u(t)$ заметно отлична от нуля лишь в полосе частот, которая имеет сравнительно малую ширину $\Delta\omega \ll \omega_0$ и расположена вблизи малых частот. Это означает, что случайное воздействие $u(t)$ медленно меняется по сравнению с высокочастотным колебанием, и его время изменения $\tau_{кор}$ значительно больше периода

$$\tau_{кор} \gg \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Если усреднить правые части (31) за период, то члены с тригонометрическими функциями выпадут вследствие того, что коэффициенты, стоящие перед ними и зависящие от $A$ и $u$, почти не изменяются в течение периода. В итоге в первом приближении мы получим укороченные уравнения

$$\dot{A} = \frac{\omega_0}{2} A\left(q_1 + \frac{3}{4} q_3 A^2\right);$$

$$\dot{\varphi} = 0.$$

Разобьем выражение (28) для $q_1$ на две части

$$q_1 = 2\mu + 2\zeta(t), \tag{16.32}$$

где

$$2\mu = \omega_0 (MS - RC) + \omega_0 M \langle \beta u - \gamma u^2 \rangle, \tag{16.33}$$

а $\zeta(t)$ — случайная функция

$$\zeta = \frac{1}{2} \omega_0 M \left[\beta u - \gamma u^2 - \langle \beta u - \gamma u^2 \rangle\right] \tag{16.34}$$

с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle \zeta\zeta_\tau \rangle = \left(\frac{\omega_0 M}{2}\right)^2 \mathrm{K}\{\beta u - \gamma u^2,\ \ \beta u_\tau - \gamma u_\tau^2\} =$$

$$= \left(\frac{\omega_0 M}{2}\right)^2 [\beta^2 \mathrm{K}\{u,\ u_\tau\} - \beta\gamma \mathrm{K}\{u,\ u_\tau^2\} -$$

$$- \beta\gamma \mathrm{K}\{u^2,\ u_\tau\} + \gamma^2 \mathrm{K}\{u^2,\ u_\tau^2\}]. \qquad (16.35)$$

Если предположить, что $u$ — нормальный стационарный случайный процесс, имеющий функцию корреляции

$$\langle u u_\tau \rangle = k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$$

и нулевое среднее значение, то

$$\mathrm{K}\{u,\ u_\tau\} = k(\tau);\quad \mathrm{K}\{u,\ u_\tau^2\} = 0.$$

Для вычисления выражения

$$\mathrm{K}\{u^2,\ u_\tau^2\} \equiv \langle u^2 u_\tau^2 \rangle - \langle u^2 \rangle^2$$

можно воспользоваться формулой (1.70); полагая в ней $t_1 = t_2 = t$ и $t_3 = t_4 = t + \tau$, $(k_4 = 0)$, получаем

$$\langle u^2 u_\tau^2 \rangle = 2k^2(\tau) + k^2(0) = 2\sigma^4 R^2(\tau) + \sigma^4.$$

Поэтому корреляционная функция (35) будет равна

$$\langle \zeta\zeta_\tau \rangle = \left(\frac{\omega_0 M}{2}\right)^2 \sigma^2 [\beta^2 R(\tau) + 2\gamma^2\sigma^2 R^2(\tau)]. \qquad (16.36)$$

В обозначениях (33), (34) мы имеем следующее уравнение, описывающее флюктуации амплитуды:

$$\dot{A} = \omega_0 A\left(\mu + \frac{3}{8} q_3 A^2\right) + \omega_0 A\zeta(t). \qquad (16.37)$$

Когда время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ внешнего флюктуационного воздействия меньше времени релаксации амплитуды

$$\tau_{\text{кор}} \ll \frac{1}{\mu\omega_0}, \qquad (16.38)$$

указанное уравнение можно решать методом уравнения Фоккера—Планка. Случайную функцию $\zeta(t)$ при этом

можно представить как дельта-коррелированный процесс и заменить корреляционную функцию (36) на

$$\langle \zeta_{\tau} \zeta_{\tau} \rangle = K\delta(\tau), \tag{16.39}$$

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \zeta_{\tau} \zeta_{\tau} \rangle d\tau = \left(\frac{1}{2}\omega_0 M\sigma\right)^2 \left[\beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, d\tau + 2\gamma^2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\tau)\, d\tau\right].$$

По обычным правилам (§ 4) выписываем уравнение Фоккера—Планка (4.162), (4.161), (4.170)

$$\dot{w}(A) = -\frac{\partial}{\partial A}\left[\omega_0 A\left(\mu + \frac{3}{8} q_3 A^2\right) w\right] + \frac{K}{4}\omega_0^2 \frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{\partial}{\partial A}(A^2 w) + A^2 \frac{\partial w}{\partial A}\right], \tag{16.40}$$

соответствующее уравнению (37).

Стационарное распределение амплитуды характеризуется нулевым потоком вероятности

$$\omega_0 A\left(\mu + \frac{3}{8} q_3 A^2\right) w - \frac{1}{4} K\omega_0^2 \times \left[\frac{\partial}{\partial A}(A^2 w) + A^2 \frac{\partial w}{\partial A}\right] = 0. \tag{16.41}$$

Вводя обозначения

$$\Lambda = -\frac{3}{8}\frac{q_3}{\omega_0 K}; \quad \nu = \frac{\mu}{\omega_0 K} \tag{16.42}$$

и интегрируя уравнение (41), получаем стационарное распределение

$$w(A) = \frac{2\Lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)} A^{2\nu-1} e^{-\Lambda A^2} \tag{16.43}$$

(см. § 4 формулы (4.49), (4.171)).

Из полученной формулы видно, что величина $\Lambda$ определяет как бы масштабные единицы по оси $A$. В самом деле, в выражении для элемента вероятности $w(A)dA$ амплитуда входит в комбинации $A\sqrt{\Lambda} \equiv B$

$$dP = w(A)\, dA = \frac{2}{\Gamma(\nu)} e^{-B^2} B^{2\nu-1} dB.$$

Форма же кривой распределения определяется величиной $\nu$, т. е. соотношением между $\mu$ и эквивалентной

дисперсией флюктуационного воздействия $\omega_0 K$. С качественной точки зрения, по форме кривой распределения режимы работы генератора можно классифицировать следующим образом.

Если $\mu<0$ ($\nu<0$), то имеет место полное отсутствие генерации. Точка, изображающая величину амплитуды, заведомо находится в начале координат, независимо от величины флюктуационного воздействия.

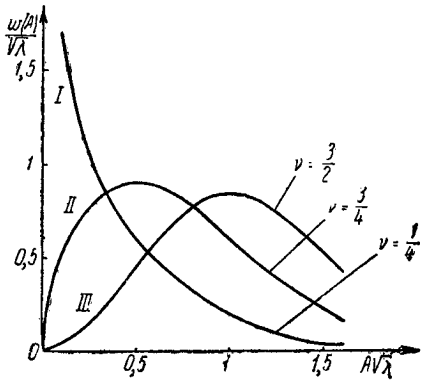



Рис. 16.2 Плотность распределения амплитуды при воздействии шума на сетку:

*I* Режим неразвитой генерации, *II*. Режим не полностью развитой генерации, *III*. Режим развитой генерации.

При положительных, но малых значениях $\mu$, когда $\omega_0 K/2 > \mu > 0$ (т. е. $\frac{1}{2} > \nu > 0$), степень $2\nu - 1$ у $A$ в (43) отрицательна. Однако возникающее вследствие этого бесконечное значение плотности распределения в нуле является интегрируемым, т. е. имеется конечная вероятность малых амплитуд. Это случай большой величины флюктуационных воздействий относительно прочности предельного цикла. Они настолько велики, что сильно сбивают автоколебания с устойчивого цикла, и поэтому не наблюдается каких-либо преимущественных амплитуд генерации. Плотность вероятности, как видно из рис. 16.2, в этом случае является монотонной: чем меньше амплитуда, тем больше ее вероятность. Такой режим можно назвать режимом неразвитой генерации.

При меньшем относительном уровне шумов, когда $\omega_0 K > \mu > \omega_0 \frac{K}{2}$ $\left(\text{т. е. } 1 > \nu > \frac{1}{2}\right)$, кривая плотности распределения не монотонна. В этом случае уже существует некоторое наиболее вероятное значение амплитуды, которое равно

$$A_m = \left[\frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)}{\mathbf{A}}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (16.44)$$

Однако максимум вероятности при этом значении не сильно выражен (рис. 16.2). Амплитуда колебаний рассеивается в широкой полосе и со значительной вероятностью может быть близка к нулю. Описанный режим работы целесообразно назвать режимом не полностью развитой генерации.

Наконец, при еще меньшем уровне шумов или большей прочности предельного цикла при выполнении неравенства $\mu > \omega_0 K$ $(\nu > 1)$ мы имеем наиболее интересный случай — режим развитой генерации, когда изображающая точка находится преимущественно вблизи предельного цикла. Разброс вокруг наиболее вероятного значения (44) играет подчиненную роль и становится все меньше и меньше по мере дальнейшего роста $\nu$.

Вычислим моменты амплитуды, соответствующие найденному распределению. Используя (43), получаем

$$\langle A^k \rangle = \frac{2\Lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty A^{2\nu+k-1} e^{-\Lambda A^2} dA = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{k}{2}\right)}{\Lambda^{\frac{k}{2}} \Gamma(\nu)}. \quad (16.45)$$

Особенно простые формулы имеем для четных моментов

$$\langle A^2 \rangle = \frac{\nu}{\Lambda}; \quad \langle A^4 \rangle = \frac{(\nu+1)\nu}{\Lambda^2}; \ldots$$

$$\langle A^{2l} \rangle = \Lambda^{-l}(\nu + l - 1) \ldots (\nu + 1)\nu. \quad (16.46)$$

Среднее значение амплитуды в отличие от наиболее вероятного значения (44) определяется выражением

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}. \quad (16.47)$$

Пользуясь последними формулами (46), (47), находим величину дисперсии

$$DA = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \frac{1}{\Lambda}\left[\nu - \frac{\Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(\nu)}\right]. \quad (16.48)$$

Из формулы (45) можно получить также следующие формулы для нечетных моментов, которые легко выражаются через первый момент:

$$\langle A^3 \rangle = \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\Lambda} \langle A \rangle;$$

$$\langle A^5 \rangle = \Lambda^{-2}\left(\nu + \frac{3}{2}\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\langle A \rangle, \ldots \quad (16.49)$$

Таким образом, в элементарных функциях не выражается лишь среднее значение $\langle A\rangle$. Однако для него может быть указана приближенная формула, пригодная при больших значениях $\nu$. Пользуясь известным асимптотическим представлением гамма-функции, нетрудно получить

$$\langle A\rangle = \sqrt{\frac{\nu}{\Lambda}}\, e^{-\frac{1}{8\nu}}\left[1+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right], \qquad (16.50)$$

откуда вследствие (48) имеем

$$DA = \frac{1}{4\Lambda}\left[1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]. \qquad (16.51)$$

В заключение настоящего раздела свяжем параметры $\mu$, $\nu$ с величинами $\varepsilon$, $A_0$, фигурировавшими ранее, и приведем примерные численные оценки. Учитывая (28), (33), а также (13.25), получаем

$$\mu = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}\omega_0 M\gamma\sigma^2 = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - 4\frac{\sigma^2}{A_0^2}\right);$$

$$-\frac{3}{8}q_3 = \frac{1}{8}\omega_0 M\gamma = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{A_0^2}$$

и, следовательно,

$$\Lambda = \frac{\varepsilon}{2A_0^2\omega_0 K}; \quad \nu = \frac{\varepsilon}{2\omega_0 K}\left(1-4\frac{\sigma^2}{A_0^2}\right). \qquad (16.52)$$

Но в силу (39) имеем

$$K = \left(2\varepsilon\frac{\sigma^2}{A_0^2}\right)^2\left[\frac{\beta^2}{\gamma^2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,d\tau + 2\int_{-\infty}^{\infty} R^2(\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{2\sigma}{A_0}\right)^4\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2\sigma^2}\tau_{\text{кор}} + 2\tau'_{\text{кор}}\right),$$

где

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} R(\tau)\,d\tau; \quad \tau'_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} R^2(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя сюда значения $A_0 = 11в$, $\frac{\beta}{\gamma} = 3в$, находим

$$2\omega_0 K = \varepsilon^2\omega_0\tau_{\text{кор}}\left(\frac{\sigma}{5{,}5}\right)^4\left[\left(\frac{3}{\sigma}\right)^2 + 1\right], \qquad (16.53)$$

если $\tau'_{кор} \approx \tau_{кор}$. Положим для примера $\varepsilon = 0{,}01$, $\omega_0 \tau_{кор} = 10$, тогда

$$\nu \approx 10\left(\frac{5{,}5}{\sigma}\right)^2 \frac{\left(\frac{5{,}5}{\sigma}\right)^2 - 1}{\left(\frac{3}{\sigma}\right)^2 + 1}.$$

Отсюда следует, что режим развитой генерации нарушается ($\nu = 1$) при увеличении шума до значений $\sigma = 5\varepsilon$. При значениях $\sigma = 5{,}5\ \varepsilon$ и больше происходит полный срыв автоколебаний.

### 3. Корреляционная функция амплитуды и спектральная плотность

Рассмотрев стационарное распределение, перейдем к исследованию временных изменений амплитуды.

Уравнение (37), описывающее эти изменения, особенно просто записывается в безразмерном времени

$$t_0 = \omega_0^2 K t, \tag{16.54}$$

а именно принимает вид

$$\frac{dA}{dt_0} = \nu A - \Lambda A^3 + A\zeta_0(t_0), \tag{16.55}$$

где $\zeta_0$ — случайный процесс с функцией корреляции

$$\langle \zeta_0(t_0')\zeta_0(t_0)\rangle = \delta(t_0' - t_0), \quad \left(\zeta_0 = \frac{\zeta}{\omega_0 K}\right). \tag{16.56}$$

Наша задача — найти корреляционную функцию амплитуды $\langle A(t_0')A(t_0)\rangle$, которая будет обозначаться через $v_2(t_0 - t_0')$ в соответствии с обозначениями

$$v_k(t_0 - t_0') = \langle A(t_0')A^{k-1}(t_0)\rangle, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{16.57}$$

Для этого применим следующий метод. Дифференцируя $\langle A(t_0')\ A(t_0)\rangle$ по $t_0$ и используя уравнение (55), получаем

$$\left\langle A' \frac{dA}{dt_0}\right\rangle = \nu\langle A'A\rangle - \Lambda\langle A'A^3\rangle + \langle A'A\zeta_0\rangle,$$
$$(A' = A(t_0')). \tag{16.58}$$

При вычислении последнего члена следует учесть корреляцию между $A(t_0)$ и $\zeta_0(t_0)$. Вследствие малого

времени корреляции процесса $\zeta_0$ первый член $(A_{-\Delta})$ суммы

$$A(t_0) = A(t_0 - \Delta) + \Delta A \equiv A_{-\Delta} + \Delta A$$

не зависим от $\zeta_0(t_0)$ даже при малых $\Delta \ll \frac{1}{\nu}$, если только $\Delta \gg \tau_{\text{кор}}$. Поэтому

$$\langle A' A_{-\Delta} \zeta_0 \rangle = \langle A' A_{-\Delta} \rangle \langle \zeta_0 \rangle;$$

но этот член обращается в нуль, так как $\zeta_0$ имеет нулевое среднее значение. Следовательно,

$$\langle A' A \zeta_0 \rangle = \langle A' A_{-\Delta} \zeta_0 \rangle + \langle A' \Delta A \zeta_0 \rangle = \langle A' \Delta A \zeta_0 \rangle.$$

Если подставить сюда найденное из (55) выражение

$$\Delta A = (\nu A_{-\Delta} - \Lambda A_{-\Delta}^3)\Delta + A_{-\Delta} \int_{t_0-\Delta}^{t_0} \zeta_0 dt_0',$$

то получим

$$\langle A' A \zeta_0 \rangle = \left\langle A' A_{-\Delta} \int_{t_0-\Delta}^{t_0} \zeta_0(t_0')\, dt_0' \cdot \zeta(t_0) \right\rangle.$$

Снова используя независимость между $A_{-\Delta}$ и $\zeta_0(t_0)$, записываем правую часть в виде произведения средних

$$\langle A' A \zeta_0 \rangle = \langle A' A_{-\Delta} \rangle \int_{t_0-\Delta}^{t_0} \langle \zeta_0(t_0) \zeta_0(t_0') \rangle dt_0'.$$

Так как $\Delta$ берется значительно бо́льшим, чем время корреляции, то входящий сюда интеграл равен половине коэффициента интенсивности

$$\int_{t_0-\Delta}^{t_0} \langle \zeta_0(t_0) \zeta_0(t_0') \rangle dt_0' = \int_{-\infty}^{0} \langle \zeta_0(t_0) \zeta_0(t_0 + \tau) \rangle d\tau = \frac{1}{2}$$

и поэтому

$$\langle A' A \zeta_0 \rangle = \frac{1}{2} \langle A' A \rangle. \qquad (16.59)$$

При переходе к (59) мы учли также, что разность $A - A_{-\Delta}$ мала вследствие $\Delta \ll \frac{1}{\nu}$.

Аналогичным же способом можно убедиться в справедливости более общего соотношения

$$\langle f(A(t_0)) \zeta_0(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial f}{\partial A}(A(t_0))\, A(t_0) \right\rangle, \qquad (16.60)$$

которое является приближенным при конечном, но малом времени корреляции и точным для дельта-коррелированного процесса $\zeta_0$. Оно может быть выведено также из формулы (4.167).

Подставляя (59) в (58) получаем в обозначениях (57)

$$\frac{dv_2(\tau)}{d\tau} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) v_2(\tau) - \Lambda v_4(\tau). \qquad (16.61)$$

Аналогично в силу (55) будем иметь

$$\left\langle A' \frac{dA^3}{dt_0} \right\rangle = 3\nu \langle A' A^3 \rangle - 3\Lambda \langle A' A^5 \rangle + 3 \langle A' A^3 \zeta_0 \rangle$$

или, если использовать (60),

$$\frac{dv_4(\tau)}{d\tau} = 3\left(\nu + \frac{3}{2}\right) v_4(\tau) - 3\Lambda v_6(\tau). \qquad (16.62)$$

При этом вводятся в рассмотрение функции (57) все более высокого порядка, для которых в свою очередь могут быть выведены уравнения типа (61), (62). Тем самым мы получаем бесконечную цепочку уравнений, определяющих поведение функций (57). Начальными условиями для этих уравнений являются очевидные равенства

$$v_2(0) = \langle A^2 \rangle;\ v_4(0) = \langle A^4 \rangle; \ldots \qquad (16.63)$$

причем одновременные моменты $\langle A^2 \rangle$, $\langle A^4 \rangle, \ldots$ были определены раньше (45).

Указанную цепочку уравнений можно решать тем или иным приближенным способом. Один из таких способов заключается в обрывании цепочки, рассмотрении лишь конечного числа функций $v_2, v_4, \ldots, v_{2l}$. Функция $v_{2l+2}$, входящая в уравнение для $v_{2l}$, при этом выражается через низшие функции. Целесообразно выражать $v_{2l+2}$ через $v_{2l}$ которая больше всего напоминает ее по своему поведению.

Хорошие результаты дает следующий способ представления $v_{2l+2}$ через $v_{2l}$. При раздвижении времен $t_0 - t_0' \to \infty$ функции $v_k$ переходят в произведение моментов

$$v_k \to \langle A \rangle \langle A^{k-1} \rangle.$$

Выражение

$$\frac{v_k - \langle A \rangle \langle A^{k-1} \rangle}{\langle A^k \rangle - \langle A \rangle \langle A^{k-1} \rangle} \qquad (16.64)$$

образует коэффициент корреляции между $A(t_0')$ и $A^{k-1}(t_0)$, нормированный так, чтобы обращался в единицу при $t_0=t_0'$. Эти коэффициенты корреляции для разных $k$, вообще говоря, различны. Однако интуитивно ясно, что форма зависимости коэффициентов (64) от времени не должна сильно отличаться по крайней мере для близких значений $k$ (например, $2l$ и $2l+2$). Приравняв коэффициенты корреляции (64) для $k=2l$ и $k=2l+2$, мы получим один из возможных способов представления $v_{2l+2}$ через $v_{2l}$.

После обрывания цепочки уравнений система оставшихся уравнений, которые являются линейными, решается обычными методами. Разумеется, чем больше число оставленных уравнений, тем с большей точностью вычисляется искомая корреляционная функция. Это связано, правда, с увеличением объема вычислений.

Применим изложенный метод в его простейшем варианте, оставляя лишь одно уравнение (61) и выражая $v_4(\tau)$ через $v_2(\tau)$. Приравнивая коэффициенты корреляции

$$\frac{v_4(\tau)-\langle A\rangle\langle A^3\rangle}{\langle A^4\rangle-\langle A\rangle\langle A^3\rangle}=\frac{v_2(\tau)-\langle A\rangle^2}{\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2}$$

и используя найденные ранее формулы для моментов

$$\langle A^3\rangle=\frac{\nu+\frac{1}{2}}{\Lambda}\langle A\rangle;\ \langle A^4\rangle=\frac{\nu+1}{\Lambda}\langle A^2\rangle,$$

получаем

$$v_4(\tau)=\frac{(\nu+1)\langle A^2\rangle-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\langle A\rangle^2}{\Lambda DA}v_2(\tau)-\frac{\langle A^2\rangle\langle A\rangle^2}{2\Lambda DA}. \quad (16.65)$$

В силу этой аппроксимации уравнение (61) переходит в следующее уравнение:

$$\frac{dv_2(\tau)}{d\tau}=\langle A^2\rangle\frac{v_2(\tau)-\langle A\rangle^2}{2DA}. \quad (16.66)$$

Его решение при начальном условии (63) имеет вид

$$v_2(\tau)=\langle A\rangle^2+DA\cdot\exp\left\{-\frac{\langle A^2\rangle}{2DA}\tau\right\}$$

или, если вернуться к обычному времени,

$$\langle AA_\tau\rangle = \langle A^2\rangle e^{-\frac{\tau}{\tau_к}} + \langle A\rangle^2\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_к}}\right). \qquad (16.67)$$

Здесь $\tau_к$ есть время корреляции амплитуды, определяемое соотношением

$$\tau_к = \frac{1}{\omega_0{}^2 K}\frac{2DA}{\langle A^2\rangle} = \frac{2\Lambda}{\omega_0\mu}DA =$$

$$= \frac{2}{\omega_0\mu}\left[\nu - \frac{\Gamma^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(\nu)}\right]. \qquad (16.68)$$

На рис. 16.3 представлена зависимость времени корреляции от интенсивности шума, деленной на прочность предельного цикла (т. е. от $1/\nu = \omega_0 K/\mu$). Сам факт зависимости времени корреляции от интенсивности шума является типично нелинейным эффектом. Как видно из графика, большие интенсивности шума приводят к уменьшению времени корреляции. При малых интенсивностях $\nu \gg 1$ из (68), (51) вытекает соотношение

$$\tau_к = \frac{1}{2\mu\omega_0}, \qquad (16.69)$$

которое может быть получено также методом линеаризации.

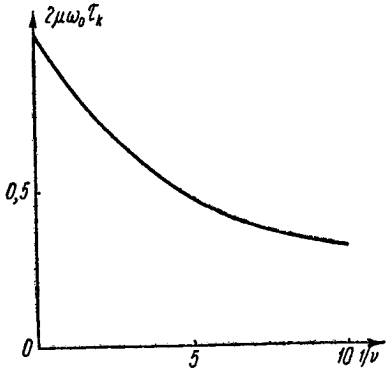


Рис 16 3 Зависимость времени корреляции $\tau_к$ от интенсивности шума.

В рассматриваемом приближении флюктуации амплитуды являются, следовательно, экспоненциально - коррелированным случайным процессом с корреляционной функцией $DA\cdot e^{-\frac{|\tau|}{\tau_к}}$. Отсюда следует, что спектральная плотность флюктуаций имеет вид

$$S[A - \langle A\rangle, \omega] = \frac{4\tau_к DA}{1+\omega^2\tau_к{}^2}. \qquad (16.70)$$

Легко получить также выражение для спектральной плотности генерируемых автоколебаний $x = A\cos\omega_0\tau$ (флюктуации фазы в рассматриваемом приближении от-

сутствуют). После усреднения по случайной начальной фазе мы будем иметь

$$\langle xx_\tau \rangle = \frac{1}{2}\langle AA_\tau \rangle \cos \omega_0 \tau \qquad (16.71)$$

или в силу (67)

$$\langle xx_\tau \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle A \rangle^2 + DA \cdot e^{-\frac{|\tau|}{\tau_к}}\right]\cos \omega_0 \tau. \qquad (16.72)$$

Указанной спектральной плотности соответствует спектральная плотность

$$S[x, \omega] = \pi \langle A \rangle^2 \delta(\omega - \omega_0) + \frac{\tau_к DA}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau_к^2}. \qquad (16.73)$$

Для рассмотренного случая введения относительно медленных флюктуаций в сеточную цепь (т. е. в нелинейность) характерным является то, что величина флюктуаций амплитуды намного превосходит флюктуации фазы. Поэтому мы имеем в спектре автоколебаний (73) довольно острую спектральную линию наряду с полосой, обусловленной флюктуациями амплитуды.

## § 17. ВЛИЯНИЕ МЕДЛЕННЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ И ТЕХНИЧЕСКАЯ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ЧАСТОТЫ

Дробовые и тепловые шумы, обязательно присущие каждой схеме генератора и рассмотренные в § 15, приводят лишь к очень небольшим флюктуациям амплитуды и фазы. При исследовании вопроса о стабильности работы генератора следует принимать во внимание также другие факторы, нарушающие работу генератора и приводящие к значительно бо́льшим искажениям частоты. К этим факторам следует отнести непостоянство параметров схемы вследствие различных причин, например вследствие колебаний температуры и механических сотрясений. Так, изменения температуры могут привести к изменению емкости и индуктивности контура, к изменению катодной эмиссии. Существенное влияние может оказать непостоянство питающего напряжения и фликкер-шум эмиссионного тока лампы.

Указанные причины приводят к бо́льшим флюктуациям амплитуды и частоты, чем «собственные шумы», но для них характерна медленность изменений во времени. Обусловленную ими нестабильность работы генератора,

которая сопровождается медленными флюктуационными изменениями, будем называть «технической» нестабильностью. Качественное отличие скорости процессов приводит к тому, что «собственные» флюктуации не вполне теряются среди превосходящих их «технических» флюктуаций.

Медленность технических флюктуаций позволяет пользоваться квазистатическим методом (§ 14, разд. 3). Если $\xi(t)$ — случайная функция, описывающая непостоянство какого-либо параметра, то могут быть выведены уравнения (13.34), (14.46)

$$\dot{A} = \varepsilon G(A, \xi); \quad \dot{\varphi} = \varepsilon H(A, \xi), \tag{17.1}$$

описывающие процесс генерации. Мы предполагаем, что время корреляции флюктуаций $\xi(t)$ значительно превосходит время релаксации

$$\tau_{\text{кор}} \gg \frac{1}{\varepsilon\omega_0}. \tag{17.2}$$

В силу последнего предположения для каждого значения $\xi(t)$ успеет установиться соответствующее ему стационарное значение амплитуды

$$A(t) = A(\xi(t)), \tag{17.3}$$

которое находится из уравнения

$$G(A(t), \xi(t)) = 0.$$

Таким образом, зависимость $A(t)$ от $\xi(t)$ сводится к безынерционному преобразованию. В силу второго уравнения (1) частота при этом также будет безынерционной функцией от $\xi(t)$:

$$\dot{\varphi} = \Omega(\xi); \quad \Omega(\xi) = \varepsilon H(A(\xi), \xi). \tag{17.4}$$

Практически к схеме генератора предъявляется требование, чтобы нестабильность параметров не вносила очень большого блуждания амплитуды. Поэтому в сущности как техническое требование ставится условие

$$\langle \delta A^2 \rangle \ll A_0^2, \tag{17.5}$$

которое дает основание для применения метода линеаризации, изложенного в разд. 2 § 14. Это еще более упрощает задачу рассмотрения технической нестабильности.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретного вида уравнений (3), (4), сделаем общее предварительное замечание, что различные случаи технической нестабильности фазы существенно различаются в зависи-

мости от того, больше или меньше единицы величина $\tau_{кор}\sigma(\Omega)$. Этот вопрос будет затронут в дальнейшем.

Мы рассмотрим в настоящем параграфе лишь некоторые и, возможно, не самые важные причины технической нестабильности, а именно флюктуации анодного напряжения и фликкер-шум лампы. Эти случаи нестабильности обладают всеми типическими чертами, и в основной своей части используемые ниже методы и качественная сторона результатов применимы также и к другим причинам нестабильности.

### 1. Уравнения, описывающие автоколебания при флюктуациях анодного напряжения

При непостоянстве анодного напряжения можно себе представлять, будто к анодной цепи подведено переменное напряжение $u_a(t)$, показанное на рис. 13.3. Полагая в уравнении (13.15) другие внешние напряжения равными нулю, получаем

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 \left[F\left(M'\dot{I} + u(t)\right) - RC\dot{I}\right]. \qquad (17.6)$$

Это уравнение отличается от (16.26) лишь тем, что в нем $M$ и $u = u_c$ заменены на $M' = M - DL$ и $u = Du_a$. Полагать $D = 0$ теперь, конечно, нельзя, если мы хотим исследовать влияние непостоянства анодного напряжения и использовать при этом приближенную замену характеристики (13.6) на (13.7).

Для координаты $x = \omega_0 M'(I - I_=)$ находим из (6) уравнение колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left[q_0 + q_1\frac{\dot{x}}{\omega_0} + q_2\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 + q_3\left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^3\right], \qquad (17.7)$$

совпадающее с (16.29). Здесь коэффициенты $q$ определяются теми же соотношениями (16.28), но с указанной заменой $M$ на $M'$. Уравнению (7) соответствуют уравнения в стандартной форме (16.30), которые кратко записываются так:

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 A} f(y,\ u)\, y = \frac{\omega_0}{A}\left(q_0 y + q_1 y^2 + q_2 y^3 + q_3 y^4\right);$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 A^2} f(y,\ u)\, x =$$

$$= -\frac{\omega_0}{A^2}\left(q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3\right) x, \qquad (17.8)$$

$$\left(y = \frac{\dot{x}}{\omega_0}\right).$$

Пользуясь уравнением колебаний (7), последнему уравнению можно придать вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 A^2} f \frac{\ddot{x} - \varepsilon f}{\omega_0^2} = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A^2} f(y, u)\dot{y} - \\ - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^3 A^2} f^2(y, u). \qquad (17.9)$$

Если бы $A$ и $u$ были постоянны, то первый член в правой части был бы временной производной от $\varepsilon\omega_0^{-2}A^{-2}\tilde{f}(y, u)$, где

$$\frac{\partial \tilde{f}(y, u)}{\partial y} = f(y, u), \qquad (17.10)$$

т. е.

$$\varepsilon\tilde{f}(y, u) = \omega_0^2\left(q_0 y + \frac{1}{2} q_1 y^2 + \frac{1}{3} q_2 y^3 + \frac{1}{4} q_3 y^4\right). \qquad (17.11)$$

Вследствие медленного изменения функций $A(t)$, $u(t)$ этот член не будет точно равен второй производной, а войдут небольшие поправочные члены:

$$\frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A^2} f(y, u)\dot{y} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A^2}\tilde{f}(y, u)\right] - \\ - \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\dot{u} + \frac{2\varepsilon}{\omega_0^2 A^3}\tilde{f}\dot{A}.$$

Используя первое уравнение (8) и подставляя это выражение в (9), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi - \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A^2}\tilde{f}\right] = -\frac{\varepsilon}{\omega_0^2 A^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\dot{u} + \\ + \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^3 A^2} f \cdot \left[\frac{2\tilde{f}y}{A^2} - f\right]. \qquad (17.12)$$

Это уравнение вместе с первым уравнением (8) образует точную систему уравнений. В нее входит лишь одна быстро меняющаяся функция $y = -A\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Пользуясь тем, что $A$ и $u$ мало меняются в течение периода, можно провести усреднение за период. При этом

нечетные степени от быстро меняющейся функции выпадут, так как они содержат лишь вибрационные компоненты. Четные степени от $y$ надо будет заменить на их безвибрационную составляющую:

$$y^2 \to \frac{1}{2} A^2;\ y^4 \to \frac{3}{8} A^4;\quad y^6 \to \frac{5}{16} A^6;\quad y^8 \to \frac{35}{128} A^8. \quad (17.13)$$

Так, первое уравнение (8) даст

$$\dot{A} = \omega_0 A \left(\frac{1}{2} q_1 + \frac{3}{8} q_3 A^2\right). \quad (17.14)$$

Преобразование уравнения (12) начнем с членов первого порядка по $\varepsilon$. Вследствие (11) имеем

$$\varepsilon \tilde{f} \to \omega_0^2 \left(\frac{1}{4} q_1 A^2 + \frac{3}{32} q_3 A^4\right). \quad (17.15)$$

Последнее выражение удобно обозначить через $\omega_0^2 A^2 \chi$. Преобразуя далее выражение $f[\tilde{f} y A^{-2} - f]$ путем использования (13), получаем

$$\dot{\varphi} - \dot{\chi} = -\frac{\partial \chi}{\partial u} \dot{u} - \omega_0 \left(\frac{q_1^2}{8} + \frac{1}{6} q_2^2 A^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{32} q_1 q_3 A^2 + \frac{45}{256} q_3^2 A^4\right). \quad (17.16)$$

Уравнения (14), (16) служат примером системы (1); они справедливы при условии $\tau_{кор} \gg 1/\omega_0$. Выполнение условия (2), говорящего об еще большей медленности флюктуаций, позволяет перейти к квазистатическому приближению. Соответствующие уравнения мы получаем, полагая в (14), (16) $\dot{u} = 0$ и $\dot{A} = 0$. Из уравнения (14) имеем

$$A^2 = -\frac{4}{3} \frac{q_1}{q_3}. \quad (17.17)$$

Подставляя (17) в (16), будем иметь

$$\dot{\varphi} = -\omega_0 q_1 \left(\frac{q_1}{16} - \frac{2}{9} \frac{q_2^2}{q_3}\right). \quad (17.18)$$

Преобразуем выражение в правой части при помощи (16.28), пользуясь обозначениями

$$q_1 = 2\mu + 2\zeta; \quad (17.19)$$

$$\mu = \frac{\omega_0}{2} (M'S - RC);\quad \zeta = \frac{1}{2} \omega_0 M' (\beta u - \gamma u^2),$$

которые близки к обозначениям предыдущего параграфа. В отличие от (16.32)—(16.34) мы не добиваемся нулевого среднего значения $\langle\zeta\rangle$; функция корреляции обоих случайных функций $\zeta$ (16.34) и (19) совпадает. Если в (18) подставить соотношение (19), а также вытекающее из (16.28) равенство

$$q_2^2=\left(\frac{1}{2}\,\omega_0 M'\beta\right)^2-2\omega_0 M'\gamma\zeta,$$

то получим

$$\dot{\varphi}=-\omega_0(\mu+\zeta)\left(\frac{\mu+\zeta}{4}+\frac{1}{3\gamma}\,\omega_0 M'\beta^2-\frac{8}{3}\,\zeta\right)=$$

$$=-\frac{\omega_0}{4}(\mu+\zeta)\left(\mu_1-\frac{29}{3}\zeta\right), \qquad (17.20)$$

$$\left(\mu_1=\mu+\frac{4}{3\gamma}\,\omega_0 M'\beta^2\right).$$

В то же время для амплитуды (17) вследствие (16.28) имеем

$$A^2=8\,\frac{\mu+\zeta}{\omega_0 M'\gamma}. \qquad (17.21)$$

Дополнительное условие (5) малости блужданий амплитуды, как видно из (21), в данном случае обозначает

$$\langle\zeta^2\rangle\ll\mu^2. \qquad (17.22)$$

Если оно выполняется, то правую часть (20) можно упростить, отбрасывая квадратичные члены

$$\dot{\varphi}=-\frac{\omega_0}{4}\left(\frac{29}{3}\mu-\mu_1\right)\zeta\equiv\omega_0\mu_2\zeta; \qquad (17.23)$$

$$\left(\mu_2=\frac{26}{12}\,\mu-\frac{1}{3\gamma}\,\omega_0 M'\beta^2\right).$$

Здесь опущен также постоянный член $-\omega_0\mu\mu_1/4$, не влияющий на величину флюктуаций, а уточняющий лишь основную частоту генерирования.

Полученные уравнения (20) и менее точное (23) служат конкретизацией уравнения (4). Интегрируя его, получаем набег фазы за время $\tau$

$$\Delta\varphi=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Omega dt. \qquad (17.24)$$

Поведение фазы особенно просто исследуется в том случае, когда $\Omega$ является нормальным случайным процессом.

## 2. Корреляционная функция и спектр сигнала при гауссовых флюктуациях частоты

Пусть флюктуации анодного напряжения $u_a$, а следовательно, и $u=Du_a$ образуют нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$\langle uu_\tau \rangle = \sigma^2 R(\tau). \tag{17.25}$$

Пусть далее выполняется соотношение (22), которое по существу эквивалентно двум условиям

$$\left(\frac{1}{2}\omega_0 M'\right)^2 \beta^2\sigma^2 \ll \mu^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}\omega_0 M'\right)^2 \gamma^2\sigma^4 \ll \mu^2; \quad \left(\mu = \frac{\omega_0}{2}(M'S - RC)\right). \tag{17.26}$$

Из определения (19) функции $\zeta$ видно, что соотношения (26) во всяком случае достаточны для выполнения (22). Обычно $RC$ не совпадает с $M'S$ и порядок величины $M'S - RC$ тот же, что и $M'S$. После отбрасывания $RC$ первое соотношение (26) примет вид

$$\beta^2\sigma^2 \ll S^2,$$

т. е.

$$\beta\sigma \ll S. \tag{17.27}$$

Иногда также выполняется неравенство

$$\gamma\sigma \ll \beta. \tag{17.28}$$

Оно говорит о том, что квадратичная составляющая — $\omega_0 M'\gamma u^2/2$ процесса $\zeta$ много меньше линейной составляющей и мы можем ею пренебречь, считая

$$\zeta = \frac{\omega_0 M'}{2}\beta u. \tag{17.29}$$

Но это значит, что частота $\Omega$, входящая в (4) и (24), является нормальным случайным процессом с корреляционной функцией

$$\langle \Omega\Omega_\tau \rangle = \sigma_\Omega^2 R(\tau); \quad \left(\sigma_\Omega = \frac{1}{2}\mu_2\omega_0^2 M'\beta\sigma\right) \tag{17.30}$$

и нулевым средним значением.

В этом случае без большого труда могут быть вычислены различные статистические характеристики флюктуаций фазы и амплитуды, выражение для которой в силу (21), (22) можно записать в виде

$$A = A_0 + \frac{A_0}{2\mu}\zeta; \quad \left(A_0 = 2\left(\frac{2\mu}{\omega_0 M'\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{17.31}$$

и которая, следовательно, также совершает нормальные флюктуации.

Найдем корреляционную функцию и спектральную плотность генерируемого сигнала $A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ в предположении, что $\varphi=\Omega(t)$ есть стационарный гауссов случайный процесс. Если пренебречь вследствие (5) флюктуациями амплитуды, не приводящими к расширению дискретной спектральной линии, то

$$x = A_0\cos(\omega_0 t+\varphi),$$

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}A_0^2\left\langle\cos\left(\omega_0\tau+\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Omega dt\right)\right\rangle. \quad (17.32)$$

Здесь произведено усреднение по случайной начальной фазе и использовано выражение (24). Корреляционную функцию (32) можно выразить через характеристическую функцию набега фазы

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}A_0^2\,\mathrm{Re}\left\{e^{i\omega_0\tau}\left\langle\exp i\int_{t_0}^{t_0+\tau}\Omega dt\right\rangle\right\}. \quad (17.33)$$

Чтобы ее записать, достаточно знать лишь дисперсию набега фазы, которая в силу (24), (30) равна

$$\langle\Delta\varphi^2\rangle = \sigma_\Omega^2\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int R(t-t')\,dtdt' =$$

$$= 2\sigma_\Omega^2\int_0^\tau(\tau-\tau')R(\tau')\,d\tau'. \quad (17.34)$$

Поэтому

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}A_0^2\times$$

$$\times\exp\left\{-\sigma_\Omega^2\int_0^\tau(\tau-\tau')R(\tau')\,d\tau'\right\}\cos\omega_0\tau. \quad (17.35)$$

Спектральная плотность $S[x,\omega]$ находится путем вычисления Фурье-преобразования от полученного выражения.

Пример 1. Пусть, например, коэффициент корреляции $R(\tau)$ имеет вид

$$R(\tau) = \tau_к^3(\tau^2+\tau_к^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (17.36)$$

Тогда

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = 2\sigma_\Omega^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} R(\tau'')\, d\tau'' = 2\sigma_\Omega^2 \tau_к \left(\sqrt{\tau^2 + \tau_к^2} - \tau_к\right)$$

и, следовательно,

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \exp\left\{\sigma_\Omega^2 \tau_к^2 - \sigma_\Omega^2 \tau_к \sqrt{\tau^2 + \tau_к^2}\right\} \cos \omega_0 \tau. \quad (17.37)$$

При помощи формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z - p\sqrt{z^2+q^2}}\, dz = \frac{2qp}{\sqrt{p^2+\omega^2}} K_1\left(q\sqrt{p^2+\omega^2}\right) \quad (17.38)$$

найдем преобразование Фурье (7.6) от выражения

$$r(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \exp\left\{\sigma_\Omega^2 \tau_к^2 - \sigma_\Omega^2 \tau_к \sqrt{\tau^2 + \tau_к^2} - i\omega\tau\right\}, \quad (17.39)$$

спектр которого согласно (7.8) при положительных частотах практически совпадает с искомым спектром от (37). В результате имеем

$$S[x, \omega] = A_0^2 e^{\sigma_\Omega^2 \tau_к^2} \times$$

$$\times \frac{\sigma_\Omega^2 \tau_к^2}{\sqrt{\sigma_\Omega^4 \tau_к^2 + (\omega - \omega_0)^2}} K_1\left(\tau_к \sqrt{\sigma_\Omega^4 \tau_к^2 + (\omega - \omega_0)^2}\right). \quad (17.40)$$

Пример 2. Пусть частота представляет собой экспоненциально-коррелированный процесс с корреляционной функцией

$$\langle \Omega \Omega_\tau \rangle = \sigma_\Omega^2 e^{-\beta|\tau|} = \Lambda\beta^2 e^{-\beta|\tau|}, \quad (17.41)$$

$$\left(\beta = \frac{1}{\tau_{кор}}\right).$$

В этом случае согласно (35) имеем

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \exp\left\{-\Lambda\left[\beta\tau - 1 + e^{-\beta\tau}\right]\right\} \cos \omega_0 \tau \quad (17.42)$$

$$(\tau > 0).$$

Чтобы найти спектральную плотность $S[x, \omega]$, вычислим сначала преобразование Фурье (7.6)

$$\rho(\omega) = A_0^2 \int_0^\infty \exp\{-\Lambda[\beta\tau - 1 + e^{-\beta\tau}]\} \cos\omega\tau d\tau =$$

$$= A_0^2 \mathrm{Re} \int_0^\infty \exp\{-\Lambda[\beta\tau - 1 + e^{-\beta\tau}]\} e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (17.43)$$

Заменой переменной $e^{-\beta\tau} = z$ его можно привести к виду

$$\rho(\omega) = \frac{A_0^2}{\beta} e^{\Lambda} \mathrm{Re} \int_0^1 e^{-\Lambda z} z^{\Lambda + \frac{i\omega}{\beta} - 1} dz. \quad (17.44)$$

Последний интеграл после замены $\Lambda z = t$ можно выразить через неполную гамма-функцию:

$$\rho(\omega) = \frac{A_0^2}{\beta} e^{\Lambda} \mathrm{Re} \left[ \Lambda^{-\Lambda - \frac{i\omega}{\beta}} \int_0^\Lambda e^{-t} t^{\Lambda + \frac{i\omega}{\beta} - 1} dt \right] =$$

$$= \frac{A_0^2}{\beta} e^{\Lambda} \mathrm{Re} \left[ \Lambda^{-\Lambda - \frac{i\omega}{\beta}} \left( \Lambda - 1 + \frac{i\omega}{\beta}, \Lambda \right)! \right]. \quad (17.45)$$

Для практических расчетов целесообразно разложить экспоненту $e^{-\Lambda z}$ в (44) в ряд, после чего будем иметь

$$\rho(\omega) = \frac{A_0^2}{\beta} e^{\Lambda} \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{n!} \frac{1}{n + \Lambda + \frac{i\omega}{\beta}},$$

или, взяв действительную часть,

$$\rho(\omega) = A_0^2 \beta e^{\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{n!} \frac{n + \Lambda}{\omega^2 + (n + \Lambda)^2 \beta^2}. \quad (17.46)$$

Учитывая (42), (43), (46) и принимая во внимание, что согласно (7.8) умножение на функцию $\cos\omega_0 t$ в (42) при вычислении спектральной плотности приводит к сдвигу по оси частот на $\omega_0$, получаем

$$S[x, \omega] = \rho(\omega - \omega_0) =$$

$$= A_0^2 \beta e^{\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{n!} \frac{n + \Lambda}{(\omega - \omega_0)^2 + (n + \Lambda)^2 \beta^2}. \quad (17.47)$$

Независимо от вида коэффициента корреляции можно указать следующие формулы для малых и больших интервалов времени:

$$\langle xx_\tau\rangle \approx \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\frac{1}{2}\sigma_\Omega^2\tau^2}\cos\omega_0\tau \text{ при } \tau \ll \tau_{кор} \quad (17.48)$$

и

$$\langle xx_\tau\rangle \approx \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\frac{1}{2}K_\Omega|\tau|}\cos\omega_0\tau \quad (17.49)$$

при $\tau \gg \tau_{кор}$, $\left(K_\Omega = 2\sigma_\Omega^2\int\limits_0^\infty R(\tau)\,d\tau\right)$.

### 3. Влияние фликкер-шума лампы на частоту

Рассмотрим еще один важный частный случай гауссовых флюктуаций частоты, а именно медленных флюктуаций, вызываемых нестабильностью эмиссионного тока лампы. Есть основания полагать, что модуляционные флюктуации анодного тока, имеющие спектральную плотность

$$S[I_ф, \omega] = b\frac{\langle I_a\rangle^2}{\omega^{1+\alpha}}, \quad (I_ф = I_a - \langle I_a\rangle) \quad (17.50)$$

и носящие название «фликкер-шума», вносят существенный вклад в техническую нестабильность частоты автоколебаний. Постоянные $b$ и $\alpha$ в формуле (50) определяются из эксперимента, причем $1+\alpha$ обычно близко к единице.

Флюктуации тока эмиссии вызывают флюктуации пространственного заряда между электродами лампы, который влияет на величину межэлектродной емкости. Частота автоколебаний по известной формуле

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_э}} \quad (17.51)$$

выражается через эквивалентную емкость $C_э$ колебательного контура, зависящую от межэлектродной емкости. Если учесть, что последняя зависит от величины анодного тока $I_a$, то мы получим, что $C_э$ меняется с изменением тока $I_a$. Пусть эта зависимость описывается коэффициентом $\mu$, который определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{C_э}\frac{dC_э}{dI_a} \quad (17.52)$$

и может быть найден из эксперимента. Предполагая, что флюктуации анодного тока относительно малы, путем дифференцирования формулы (51) находим флюктуации частоты

$$\dot{\varphi} = \omega - \omega_0 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC_э}}\frac{1}{C_э}\frac{dC_э}{dI_a} I_ф$$

или, учитывая (52),

$$\dot{\varphi} = \Omega(t) \equiv -\frac{1}{2}\mu\omega_0 I_ф. \qquad (17.53)$$

Величины $\omega_0\mu$ в этой формуле соответствуют среднему значению эмиссионного тока. Из (53), (50) находим спектральную плотность флюктуаций частоты

$$S[\Omega, \omega] = \frac{a}{\omega^{1+\alpha}}, \qquad (17.54)$$

где

$$a = \frac{1}{4}\omega_0^2\mu^2 b \langle I_a\rangle^2.$$

Указанной спектральной плотности согласно формуле (5.30) в случае $\alpha = 0$ соответствует корреляционная функция

$$\langle\Omega\Omega_\tau\rangle = \frac{a}{2\pi}\ln\frac{\omega_в}{\omega_н^2\tau}. \qquad (17.55)$$

Предполагая флюктуации гауссовыми, используем формулу (35) для отыскания корреляционной функции генерируемого сигнала. Непосредственное интегрирование выражения (55) приводит к результату

$$\int_0^\tau (\tau - \tau')\langle\Omega\Omega_{\tau'}\rangle d\tau' = \frac{a\tau^2}{4\pi}\ln\frac{\gamma}{\tau}, \qquad (17.56)$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{\omega_в}{\omega_н^2} e^{\frac{3}{4}}.$$

Область значений $\tau < 1/\omega_в$, где формула (55) несправедлива, не оказывает существенного влияния на интеграл (56) вследствие малости величины $1/\omega_в$ (см. условие (62)).

Заменяя в (35) $\sigma_x^2 R(\tau)$ на выражение (55) и учитывая (56), находим

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \exp\left\{-\frac{a\tau^2}{4\pi} \ln \frac{\gamma}{\tau}\right\} \cos \omega_0 \tau. \qquad (17.57)$$

Точное вычисление спектра этого выражения затруднительно; чтобы найти приближенное выражение для спектральной плотности $S[x, \omega]$, используем то обстоятельство, что логарифм медленно меняется по сравнению с $\tau^2$. На преобразование Фурье от (57) существенное влияние оказывает лишь область, где

$$\frac{a\tau^2}{4\pi} \ln \frac{\gamma}{\tau} \sim 1.$$

Для этой области аргумент $\tau$ под знаком логарифма можно заменить на частное значение $\tau_0$, определяемое из равенства

$$\frac{a\tau_0^2}{4\pi} \ln \frac{\gamma}{\tau_0} = 1. \qquad (17.58)$$

Тогда выражение (57) примет вид

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \exp\left\{-\frac{a\tau^2}{4\pi} \ln \frac{\gamma}{\tau_0}\right\} \cos \omega_0 \tau$$

и будет давать спектральную плотность

$$S[x, \omega] = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} A_0^2 \exp\left\{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right\}, \qquad (17.59)$$

где

$$\beta^2 = \frac{a}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\tau_0}. \qquad (17.60)$$

Обозначая $\frac{\gamma^2}{\tau_0^2} = y$, преобразуем уравнение (58) к виду

$$y = \frac{a\gamma^2}{8\pi} \ln y. \qquad (17.61)$$

В приведенном рассмотрении мы не учитывали поведения корреляционной функции (55) при $\tau < \frac{1}{\omega_в}$ и при $\tau > \frac{1}{\omega_н}$. Это допустимо при условии

$$\frac{a\gamma^2}{8\pi} \gg 1, \text{ т. е. } \frac{a\omega_в^2}{\omega_н^4} \gg 1. \qquad (17.62)$$

Если это условие выполняется, то уравнение (61) можно решать методом последовательных приближений по формуле

$$y_n = \frac{a\gamma^2}{8\pi} \ln y_{n-1}.$$

В первом приближении имеем

$$y_1 = \frac{a\gamma^2}{8\pi} = \frac{a\omega_в^2 e^3}{8\pi\omega_н^4}, \quad \left(\tau_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{a}}\right), \qquad (17.63)$$

во втором —

$$y_2 = \frac{a\gamma^2}{8\pi} \ln\left(\frac{a\gamma^2}{8\pi}\right) \text{ и т. д.}$$

Подставляя (63) в (60), получаем для ширины спектральной линии (59) выражение

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{2\pi} \ln y} = \sqrt{\frac{a}{2\pi} \ln \frac{a\gamma^2}{8\pi}}, \quad \left(\gamma^2 = \frac{\omega_в^2 e^3}{\omega_н^4}\right). \qquad (17.64)$$

Этой формулой можно пользоваться и при подходе к фликкер-шуму как к нестационарному процессу. В этом случае $1/\omega_н$ нужно заменить на время наблюдения $t$, поскольку формула (5.27) только этим отличается от (5.30). В результате мы получим формулу

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{2\pi} \ln \frac{a\omega_в^2 t^4 e^3}{8\pi}}, \qquad (17.65)$$

согласно которой ширина спектральной линии медленно увеличивается при увеличении времени наблюдения. Верхняя частота $\omega_в$ определяется эффектом сглаживания флюктуаций вследствие влияния различных факторов: частотной депрессии шума, пространственного заряда, паразитных емкостей и пр. Она обратна постоянной времени сглаживания: $\omega_в = 1/\tau_{гл}$.

### 4. Случай больших независимых приращений фазы

Частоту $\Omega(t)$ можно считать гауссовым процессом лишь в некоторых случаях. Поэтому перейдем к исследованию фазовых флюктуаций на другой основе, не делая никаких предположений относительно их нормальности.

Согласно (24) набег фазы $\Delta\varphi$ накапливается в результате суммирования элементарных фазовых приращений $\Omega dt$. Эти приращения статистически зависимы вследствие того, что время корреляции $\tau_{кор}$ процесса $\Omega(t)$ имеет конечное, отличное от нуля значение. Выбирая интервалы, несколько превосходящие время корреляции, удобно представлять себе (24) как сумму приращений

$$\Delta\varphi = \int_{t_0}^{t_0+\tau_1} \Omega dt + \int_{t_0+\tau_1}^{t_0+2\tau_1} \Omega dt + \int_{t_0+2\tau_1}^{t_0+3\tau_1} \Omega dt + \\ + \ldots, \ (\tau_1 > \tau_{кор}). \qquad (17.66)$$

которые уже можно с некоторым приближением считать независимыми. Поскольку фаза входит в экспоненту $e^{i\varphi}$, то является существенным, какую среднюю величину, сравнительно с $\pi$, имеют указанные независимые фазовые приращения. В зависимости от этого будут возникать разные статистические картины. В настоящем пункте мы рассмотрим случай независимых приращений, в среднем значительно превосходящих $\pi$, что имеет место, когда выполняется неравенство

$$\sigma_\Omega \tau_{кор} \gg 1. \qquad (17.67)$$

Если $\tau$ — время, в течение которого накапливаются сдвиги фазы порядка $\pi$ (т. е. $\sigma_\Omega \tau \sim 1$), то в силу (67)

$$\tau \ll \tau_{кор}$$

и, следовательно, в течение этого времени частота $\Omega$ не успеет значительно измениться. Поэтому для такого интервала

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \Omega dt \approx \Omega\tau \qquad (17.68)$$

и

$$\langle e^{i\Delta\varphi} \rangle \approx \int e^{i\tau\Omega} w(\Omega)\, d\Omega. \qquad (17.69)$$

В соответствии с (33) для указанных значений $\tau$ имеем

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \mathrm{Re} \left\{ e^{i\omega_0\tau} \int e^{i\tau\Omega} w(\Omega)\, d\Omega \right\}. \qquad (17.70)$$

Если мы будем увеличивать $\tau$, то равенства (69), (70) потеряют свою справедливость, когда $\tau$ достигнет

значений порядка $\tau_{кор}$. Но раньше, чем это произойдет, корреляционная функция $\langle xx_\tau \rangle$, так же как и выражение в правой части (69), уменьшится до пренебрежимо малых значений. В самом деле, функцию $w(\Omega)$ мы предполагаем удовлетворяющей определенным требованиям непрерывности и, следовательно, имеющей спектр, убывающий с увеличением частоты (в данном случае с увеличением $\tau$). Большие значения спектра (69) расположены в области $\tau \sim 1/\sigma_\Omega$, а при $\tau \gg 1\ \sigma_\Omega$ они становятся малыми. Можно убедиться, что $\langle xx_\tau \rangle$ мало при $\tau \gg 1/\sigma_\Omega$ путем рассмотрения промежуточных значений $1/\sigma_\Omega \ll \tau \ll \tau_{кор}$, для которых равенство (70) еще выполняется, а выражение в правой части уже успевает довольно сильно уменьшиться.

Поскольку обе части равенства (70) малы в тех областях, где оно нарушается, им можно пользоваться при вычислении спектральной плотности повсеместно. Преобразование Фурье от характеристической функции будет, конечно, выражаться через исходную плотность распределения. Поэтому спектр корреляционной функции (70) будет иметь вид

$$S[x,\ \omega] = \pi A_0^2 [w_\Omega(\omega - \omega_0) + w_\Omega(-\omega - \omega_0)]. \quad (17.71)$$

Если, как и раньше, пренебречь хвостом от функции $w_\Omega(-\omega-\omega_0)$, заходящим в область положительных частот из области отрицательных частот и не играющим, вследствие узкополосности сигнала, никакой роли, то

$$S[x,\ \omega] = \pi A_0^2 w_\Omega(\omega - \omega_0). \quad (17.72)$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу, что спектральная плотность определяется плотностью распределения частоты. Хотя это положение может на первый взгляд показаться тривиальным, оно справедливо лишь в случае больших независимых фазовых приращений, т. е. в случае или большой дисперсии флюктуаций частоты, или большой их длительности.

Пример 1. Если $\Omega(t)$ имеет нормальный закон распределения, то вследствие (72) непосредственно имеем

$$S[x, \omega] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sigma_\Omega} A_0^2 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_\Omega^2}}. \quad (17.73)$$

Этот результат соответствует равенству (48). Для частного вида корреляционной функции (36) указанная

формула может быть получена из (40). В самом деле, вследствие (67) аргумент функции $K_1$ имеет большие значения, для которых можно использовать асимптотическое выражение и получить

$$S[x, \omega] = A_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_\Omega^2 \tau_к^3}{\left(\tau_к \sqrt{\sigma_\Omega^4 \tau_к^2 + (\omega - \omega_0)^2}\right)^3} \times$$

$$\times \exp\left\{\sigma_\Omega^2 \tau_к^2 - \tau_к \sqrt{\sigma_\Omega^4 \tau_к^2 + (\omega - \omega_0)^2}\right\}.$$

Поскольку

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\Omega^2 \tau_к^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\sigma_\Omega^4 \tau_к^2}}\right] \approx \\ &\approx -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_\Omega^2}; \\ &\sqrt{\sigma_\Omega^4 \tau_к^2 + (\omega - \omega_0)^2} \approx \sigma_\Omega^2 \tau_к \end{aligned}\right\} \text{ при } \omega - \omega_0 \ll \sigma_\Omega^2 \tau_к,$$

то отсюда вытекает (73) для значений $|\omega - \omega_0| \ll \ll \sigma_\Omega^2 \tau_к$.

Пример 2. Пусть теперь $\Omega$ не нормальный процесс, пропорциональный квадрату гауссового процесса. Это имеет место в случае $\beta = 0$, когда в силу (19)

$$\zeta = -\frac{1}{2} \omega_0 M' \gamma u^2 = -4\mu \frac{u^2}{A_0^2}, \quad \left(A_0^2 = \frac{8\mu}{\omega_0 M' \gamma}\right).$$

После подстановки в (23) имеем

$$\Omega = -\frac{26}{3} \omega_0 \mu^2 \frac{u^2}{A_0^2}, \qquad (17.74)$$

причем $u$ характеризуется плотностью распределения

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

Разрешая (74) относительно $u$ и подставляя полученное выражение в $w(u)$, находим

$$w(\Omega) = w(u) \left|\frac{du}{d\Omega}\right| =$$

$$= \frac{A_0}{4\mu\sigma} \left(\frac{3}{13\pi\omega_0 |\Omega|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{3A_0^2}{4\mu^2\sigma^2} \frac{|\Omega|}{13\omega_0}\right\}, \qquad (\Omega < 0)$$

и вследствие (72)

$$S[x,\ \omega] = \frac{A_0^3}{4\mu\sigma}\left(\frac{3\pi}{13\omega_0(\omega_0-\omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{3A_0^2}{4\mu^2\sigma^2}\frac{\omega_0-\omega}{13\omega_0}\right\} \quad \text{при } \omega < \omega_0; \qquad (17.75)$$

$$S[x,\ \omega] = 0 \quad \text{при } \omega > \omega_0.$$

Не представляет никаких принципиальных затруднений более общий случай, когда $\beta \neq 0$, а также когда нужно пользоваться равенством (20), а не (23), по причине большой величины $\langle\zeta^2\rangle$.

### 5. Малые независимые фазовые приращения

Перейдем к рассмотрению флюктуаций частоты, имеющих время корреляции, значительно меньшее, чем время, необходимое для накопления больших фазовых сдвигов порядка $\pi$. Это имеет место при

$$\sigma_\Omega \tau_{\text{кор}} \ll 1. \qquad (17.76)$$

Тогда большие сдвиги фазы будут являться, по существу, стохастической суммой большого числа независимых величин. Поэтому в течение интервалов времени

$$\tau \gtrsim \frac{1}{\sigma_\Omega} \gg \tau_{\text{кор}} \qquad (17.77)$$

успеет произойти нормализация сдвига фазы, который будет иметь нормальный закон распределения и характеристическую функцию

$$\langle e^{iu\Delta\varphi}\rangle = e^{-\frac{u^2}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle}, \qquad (17.78)$$

где

$$\langle\Delta\varphi^2\rangle = \int_{-\tau}^{\tau}(\tau - |\tau'|)\langle\Omega\Omega_{\tau'}\rangle d\tau' \approx \tau K_\Omega,$$

$$\left(K_\Omega = 2\int_0^\infty \langle\Omega\Omega_\tau\rangle d\tau\right),$$

вследствие условия (77).

В соответствии с (33) из (78) имеем

$$\langle x x_\tau\rangle = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\frac{1}{2}K_\Omega|\tau|}\cos\omega_0\tau, \quad (\tau \gg \tau_{\text{кор}}). \qquad (17.79)$$

Последнее равенство несправедливо лишь в полосе $\tau \lesssim \tau_{кор}$, которая является узкой по сравнению с масштабом изменения функции $\exp\left(-\frac{K_\Omega \tau}{2}\right)$, равным $\frac{1}{K_\Omega} \sim$ $\sim (\sigma_\Omega^2 \tau_{кор})^{-1}$. При вычислении спектра от (79) для частот $\omega \lesssim K_\Omega$ этой полосой можно пренебречь, так как она составляет лишь небольшую долю периода. Пользуясь выражением (79) повсеместно, получаем

$$S[x, \omega] = \frac{1}{2} A_0^2 \frac{K_\Omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4} K_\Omega^2} \qquad (17.80)$$

при $|\omega - \omega_0| \lesssim K_\Omega$.

Полученная формула позволяет исследовать обусловленное флюктуациями расширение дискретной спектральной линии, так как для этого требуется знать спектральную плотность как раз в области малых частотных отклонений $\omega - \omega_0$. Из (80) видно, что нестабильность частоты приводит к расширению дискретной спектральной линии до значений

$$\Delta\omega \approx K_\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Omega \Omega_\tau \rangle \, d\tau. \qquad (17.81)$$

Часто представляет интерес значение спектральной плотности при бо́льших отклонениях от основной частоты, а именно при

$$|\omega - \omega_0| \gtrsim \tau_{кор}^{-1},$$

так как вследствие медленности флюктуаций значение $\frac{1}{\tau_{кор}}$ является довольно малым $\left(\frac{1}{\tau_{кор}} \ll \varepsilon\omega_0\right)$.

Вследствие (76) в течение интервалов времени, имеющих порядок времени корреляции, накапливаются лишь малые фазовые сдвиги

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \Omega dt \ll 1; \quad e^{i\Delta\varphi} \approx 1 + i\Delta\varphi - \frac{1}{2}\Delta\varphi^2 + \ldots \qquad (17.82)$$

Поэтому

$$\langle e^{-i\Delta\varphi} \rangle \approx 1 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int \langle \Omega(t) \Omega(t') \rangle dt dt' \qquad (17.83)$$

при $\tau \ll \frac{1}{\sigma_\Omega}$

и

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}A_0^2\left[1 - \frac{1}{2}\int_0^\tau (\tau-\tau')\langle\Omega\Omega_{\tau'}\rangle d\tau'\right]\cos\omega_0\tau. \quad (17.84)$$

Чтобы вычислить спектральную плотность при $\omega - \omega_0 \gtrsim \frac{1}{\tau_{кор}}$, найдем предварительно спектральную плотность процесса

$$\eta(t) = \frac{d}{dt}e^{i\varphi} = ie^{i\varphi}\dot{\varphi}.$$

Его корреляционную функцию

$$\langle\eta\eta_\tau^*\rangle = \langle\Omega\Omega_\tau\rangle e^{i\Delta\varphi} \quad (17.85)$$

можно при всех $\tau$ заменить выражением $\langle\Omega\Omega_\tau\rangle$:

$$\langle\eta\eta_\tau\rangle = \langle\Omega\Omega_\tau(1 + i\Delta\varphi + \ldots)\rangle \to \langle\Omega\Omega_\tau\rangle. \quad (17.86)$$

При $\tau \ll 1/\sigma_\Omega$ это можно сделать в силу (82), а при $\tau \gtrsim 1/\sigma_\Omega \gg \tau_{кор}$ вследствие того, что оба выражения (85) и (86) близки к нулю и поэтому мало отличаются. Из (86) видно, что спектральная плотность $S[\eta, \omega]$ совпадает со спектральной плотностью $S[\Omega, \omega]$ частоты $\Omega(t)$. Поскольку процесс $\eta(t)$ есть производная от процесса $e^{i\varphi} \equiv z$, то их спектральные плотности связаны между собой:

$$S[\eta, \omega] = \omega^2 S[z, \omega].$$

Заменяя здесь $S[\eta, \omega]$ на $S[\Omega, \omega]$, проходим к выводу, что процесс $z$ с корреляционной функцией $\langle e^{i\Delta\varphi}\rangle$ имеет спектральную плотность

$$S[z, \omega] = \frac{1}{\omega^2}S[\Omega, \omega]. \quad (17.87)$$

Это, впрочем, может быть выведено также непосредственно из (83). Чтобы получить спектральную плотность для

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}A_0^2\,\mathrm{Re}\,[e^{i\omega_0\tau}\langle z^*z_\tau\rangle],$$

остается умножить (87) на $\frac{A_0^2}{4}$ и сдвинуть по оси частот:

$$S[x, \omega] = \frac{1}{4} A_0^2 S[z, |\omega - \omega_0|] =$$

$$= \frac{1}{4} A_0^2 \frac{\dot{S}[\Omega, |\omega - \omega_0|]}{(\omega - \omega_0)^2}, \qquad (17.88)$$

$$\left(\text{при } |\omega - \omega| \sim \frac{1}{\tau_{\text{кор}}}\right).$$

Вблизи основной частоты $\omega_0$ эта формула, дающая неограниченные значения плотности, является неправильной; вместо нее следует брать выведенную ранее формулу (80).

Если раньше спектральная плотность генерируемого сигнала выражалась через плотность распределения частоты (72), то теперь, как мы видим, она выражается через спектральную плотность флюктуаций частоты.

Для случая малых независимых приращений фазы является характерным неодинаковый ход спектральной плотности при малых и больших отклонениях $\omega - \omega_0$ от основной частоты. Такой двойственности не было при больших независимых приращениях (раздел 4).

Пример 1. Обратимся к рассмотренным ранее нормальным флюктуациям частоты, дающим спектральную плотность (40). При условии (76) и при малых отклонениях $(\omega - \omega_0)^2 \ll \tau_к^{-2}$ аргумент функции $K_1(z)$ много меньше единицы, поэтому ее можно заменить на асимптотическое выражение $z^{-1}$ и получить

$$S[x, \omega] = A_0^2 \frac{\sigma_\Omega^2 \tau_к}{(\omega - \omega_0)^2 + \sigma_\Omega^4 \tau_к^2}. \qquad (17.89)$$

Эта формула совпадает с (80) поскольку для коэффициента корреляции (36)

$$K_\Omega = 2\sigma_\Omega^2 \tau_к.$$

Пусть теперь условие (77) сочетается с большими значениями $(\omega - \omega_0)^2 \tau_к^2 \gg 1$. Пренебрегая величиной $\sigma_\Omega^4 \tau_к^4$ по сравнению с $(\omega - \omega_0)^2 \tau_к^2$, из (40) имеем

$$S[x, \omega] = A_0^2 \frac{\sigma_\Omega^2 \tau_к^2}{|\omega - \omega_0|} K_1(\tau_к |\omega - \omega_0|). \qquad (17.90)$$

Это есть не что иное, как формула (88), ибо коэффициенту корреляции (36) согласно (2.10) соответствует спектральная плотность

$$S[\Omega, \omega] = 4\sigma_\Omega^2 \tau_к^2 \omega K_1(\tau_к \omega).$$

Пример 2. В случае нормального процесса с корреляционной функцией (41) условие (76) малых независимых приращений имеет вид $\Lambda \ll 1$. При этом ряд (47) быстро сходится. Оставляя два первых члена этого ряда и пренебрегая величинами порядка $\Lambda^2$, получаем

$$S[x, \omega] = \frac{\Lambda\beta^3 A_0^2}{[(\omega - \omega_0)^2 + \Lambda^2\beta^2][(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2]}. \qquad (17.91)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$S[x, \omega] = \frac{\Lambda\beta A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Lambda^2\beta^2} \text{ при } |\omega - \omega_0| \sim \Lambda\beta;$$

и

$$S[x, \omega] = \frac{\Lambda\beta^3 A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2[(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2]} \text{ при } |\omega - \omega_0| \sim \beta.$$

Последние равенства совпадают с (80) и (88), так как $K_\Omega = 2\Lambda\beta$ и

$$S[\Omega, \omega] = \frac{4\Lambda\beta^3}{\omega^2 + \beta^2}.$$

Пример 3. Пусть случайный процесс $\zeta$, который определен формулой (19) и входит в уравнение (23), является существенно не гауссовским ($\gamma\sigma \gtrsim \beta$). Его корреляционная функция совпадает с корреляционной функцией (16.36) процесса (16.34). Поэтому

$$\langle \Omega\Omega_\tau \rangle = (\omega_0\mu_2)^2 \left(\frac{1}{2}\omega_0 M'\sigma\right)^2 [\beta^2 R(\tau) + 2\gamma^2\sigma^2 R^2(\tau)] =$$

$$= (4\mu\mu_2\omega_0\sigma^2 A_0^{-2})^2 \left[2R^2(\tau) + \left(\frac{\beta}{\gamma\sigma}\right)^2 R(\tau)\right]. \qquad (17.92)$$

Форма спектра существенно зависит от конкретного вида коэффициента корреляции $R(\tau)$, входящего в последнее выражение. Если, например, $R(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_к}$, то $R(\tau)$ и $R^2(\tau)$ соответственно имеют спектры

$$\frac{2\tau_к}{\omega^2\tau_к^2 + 1} \text{ и } \frac{4\tau_к}{\omega^2\tau_к^2 + 4}.$$

Следовательно,

$$S[\Omega,\ \omega] = 4(\mu\mu_2\omega_0)^2\left(2\frac{\sigma}{A_0}\right)^4\left[\frac{4\tau_к}{\omega^2\tau_к^2+4}+\left(\frac{\beta}{\gamma\sigma}\right)^2\frac{\tau_к}{\omega^2\tau_к^2+1}\right]$$

и согласно формуле (88) имеем

$$S[x,\ \omega] = (\mu\mu_2 A_0)^2\left(2\frac{\sigma}{A_0}\right)^4\frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{4\tau_к}{(\omega-\omega_0)^2\tau_к^2+4}+\left(\frac{\beta}{\gamma\sigma}\right)^2\frac{\tau_к}{(\omega-\omega_0)^2\tau_к^2+1}\right]. \quad (17.93)$$

В то же время форма дискретной спектральной линии описывается выражением (80), где

$$K_\Omega = 2(\mu\mu_2\omega_0)^2\left(\frac{2\sigma}{A_0}\right)^4\left[1+\left(\frac{\beta}{\gamma\sigma}\right)^2\right]\tau_к. \quad (17.94)$$

Как видно из предыдущего изложения, почти вся мощность колебаний, равная $A^2/2$, сосредоточена в дискретной спектральной линии, которая имеет спектр (80). Более широкополосные флюктуации, частоты которых попадают в область

$$|\omega-\omega_0| \sim \frac{1}{\tau_{кор}},$$

имеют малую мощность. Порядок величины спектральной плотности в этой области равен $\frac{1}{2}A_0^2\sigma_\Omega^2\tau_{кор}^3$, а их суммарную мощность можно оценить как $\frac{1}{2}A_0^2\sigma_\Omega^2\tau_{кор}^2$. При этом может оказаться, что неучтенные амплитудные флюктуации дадут вклад, превосходящий для этих частот указанную величину.

### 6. Модуляция автоколебаний шумом

Рассмотренные медленные флюктуации, нарушающие стабильный режим работы генератора и приводящие к «уходам» амплитуды и частоты, характеризуются небольшой величиной, в результате чего отклонения от стабильных значений амплитуды $A_0$ и частоты $\omega_0$ малы.

В некоторых случаях на генератор специально подается медленное флюктуационное напряжение значительно большей величины, например для получения колебаний, модулированных шумом (генераторы помех).

Если время корреляции модулирующего шума превосходит время релаксации амплитуды, то этот случай близок к случаю технической нестабильности, когда автоколебания модулируются по амплитуде и частоте техническими причинами. Отличие его лишь в том, что величина шума берется достаточно большой, чтобы получить глубокую модуляцию, т. е. большой флюктуационный разброс амплитуды

$$DA \sim A_0^2. \qquad (17.95)$$

Автоколебания при этом описываются прежними уравнениями (3), (4). Когда модулирующее флюктуационное напряжение подается на сетку генератора, конкретный вид этих уравнений совпадает с (20), (21), но в выражении (19) для $\zeta$ нужно брать $u=u_c$, а не $u = Du_a$.

При вычислении спектра генерируемого сигнала теперь нельзя пользоваться формулами (32), (33), а следует производить учет флюктуаций амплитуды:

$$x = A(\zeta)\cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left\langle A(\zeta)\, A(\zeta_\tau) \exp\left[i\int_{t_0}^{t_0+\tau} \Omega dt\right]\right\rangle e^{i\omega_0\tau}\right\}. \qquad (17.96)$$

Как и ранее, мы имеем существенно различные флюктуационные процессы в зависимости от того, какие значения приобретает $\sigma_\Omega \tau_{кор}$ по сравнению с единицей.

Начнем со случая больших независимых приращений фазы:

$$\sigma_\Omega \tau_{кор} \gg 1. \qquad (17.97)$$

Наличие фазового множителя $e^{i\Delta\varphi}$, $(\Delta\varphi \sim \sigma_\Omega \tau)$ приводит к тому, что корреляционная функция (96) обрезается при $\tau > \frac{1}{\sigma_\Omega}$, $\left(\text{т. е. при } \tau \gg \frac{1}{\sigma_\Omega} \text{ приобретает практически нулевые значения}\right)$. Но та область $\tau \lesssim \frac{1}{\sigma_\Omega}$, где она имеет ненулевые значения, много у́же, чем время корреляции: $\tau \ll \tau_{кор}$ (в силу (97)) и в ней амплитуда и частота остаются практически неизменными. Поэтому функцию корреляции (96) можно записать

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\ [\langle A^2(\zeta) e^{i\Omega(\zeta)\tau}\rangle e^{i\omega_0\tau}]. \qquad (17.98)$$

Для вычисления среднего здесь достаточно знать однократный закон распределения $w(\zeta)$.

Совершая преобразование Фурье, из (98) находим спектральную плотность

$$\int \langle A^2(\zeta)\, e^{-i\Omega(\zeta)\tau}\rangle e^{i\omega\tau} d\tau = 2\pi \langle A^2(\zeta)\, \delta(\omega - \Omega(\zeta))\rangle$$

и, следовательно,

$$S[x,\ \omega] = \pi \langle A^2(\zeta)\, \delta(\omega - \omega_0 - \Omega(\zeta))\rangle. \qquad (17.99)$$

Входящий сюда интеграл усреднения с плотностью распределения $w(\zeta)$ можно взять, пользуясь свойствами дельта-функции. Пусть уравнение

$$\Omega(\zeta) - z = 0$$

имеет $r$ корней, которые обозначим

$$\zeta = Q_1(z),\ Q_2(z), \ldots,\ Q_r(z).$$

Результат усреднения (99) записывается в виде следующей суммы по различным корням

$$S[x,\ \omega] = \pi \sum_{j=1}^{r} A^2(\zeta)\, w(\zeta) \left.\frac{d\zeta}{d\Omega}\right|_{\zeta = Q_j(\omega - \omega_0)}. \qquad (17.100)$$

Если функция $\Omega(\zeta)$ такова, что обратная зависимость $\zeta$ от $\Omega$ $[\zeta = Q(\Omega)]$ однозначна, то сумма (100) имеет лишь один член, который можно выразить через плотность распределения частоты:

$$S[x,\ \omega] = \pi A^2(Q(\omega - \omega_0))\, w_2(\omega - \omega_0). \qquad (17.101)$$

Применим формулу (100) к конкреному случаю уравнений (20), (21). Опуская член, дающий регулярное смещение частоты, и используя принятые ранее обозначения $\mu_2$ и $A_0$, запишем указанные уравнения в виде

$$A = A_0 \sqrt{1 + \frac{\zeta}{\mu}}; \qquad (17.102)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \mu_2 \zeta + \frac{29}{12}\, \omega_0 \zeta^2. \qquad (17.103)$$

В целях сокращения записи, заменим в (103) число 29 на 30. Функция

$$\Omega(\zeta) = \omega_0 \mu_2 \zeta + \frac{5}{2}\, \omega_0 \zeta^2 \qquad (17.104)$$

имеет двузначную обратную функцию

$$\zeta = Q_{1,2}(\Omega);$$

$$Q_{1,2}(\Omega) = \frac{1}{5}\left(-\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 + 10\frac{\Omega}{\omega_0}}\right). \quad (17.105)$$

Подставляя (105) в выражение $\omega_0(\mu_2 + 5\zeta)$ для производной $\frac{d\Omega}{d\zeta}$ от (104), находим для обоих корней одинаковое значение

$$\left|\frac{d\zeta}{d\Omega}\right|_{\zeta = Q_{1,2}} = \frac{1}{\omega_0\sqrt{\mu_2^2 + 10\frac{\Omega}{\omega_0}}}.$$

Вследствие найденных соотношений формула (100) дает

$$S[x,\ \omega] = \pi\frac{A_0^2}{\mu\omega_0}\frac{1}{\sqrt{v}}\left[\frac{5\mu - \mu_2 + \sqrt{v}}{5}w_\zeta\left(\frac{-\mu + \sqrt{v}}{5}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{5\mu - \mu_2 - \sqrt{v}}{5}w_\zeta\left(\frac{-\mu - \sqrt{v}}{5}\right)\right], \quad (17.106)$$

$$\left(v = \mu_2^2 + 10\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} > 0\right).$$

Приведенное выражение справедливо для тех частот, которым соответствуют положительные значения $v$. Там, где $v < 0$, спектральная плотность флюктуаций равна нулю.

Для больших внешних шумов, дающих глубокую модуляцию, $\langle\zeta^2\rangle \sim \mu^2$. Спектр генерируемого сигнала (106) при этом лежит в полосе частот $\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$, имеющей ширину

$$2\Delta\omega \sim \mu^2 v_0. \quad (17.107)$$

Перейдем к случаю малых независимых фазовых приращений; ($\sigma_\Omega\tau_{кор} \ll 1$), когда спектр генерируемого сигнала имеет двойную структуру, а именно, когда имеется узкая мощная спектральная линия среди слабых более широкополосных флюктуаций.

Дискретная спектральная линия исследуется так же, как в разделе 5, ибо амплитудные флюктуации не имеют дискретной составляющей, а содержатся в полосе

$$|\omega - \omega_0| \sim \frac{1}{\tau_{кор}}. \quad (17.108)$$

В эту полосу частот, помимо амплитудных флюктуаций, попадают также фазовые флюктуации, рассмотренные в разделе 5. Там было отмечено, что суммарная мощность в этой полосе, обусловленная фазовыми флюктуациями, имеет порядок $(A_0\sigma_\Omega\tau_{кор})^2$. В то же время при глубокой модуляции (95) амплитудные флюктуации, приводящие в предположение постоянства фазы $\varphi$ к корреляционной функции вида

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}\langle AA_\tau\rangle\cos\omega_0\tau \qquad (17.109)$$

дают мощность порядка $\frac{A_0^2}{2}$. Эта мощность в рассматриваемом случае намного превосходит мощность, вносимую флюктуациями частоты. Отсюда следует, что при глубокой модуляции можно пренебрегать непостоянством частоты, если мы интересуемся частотами $|\omega-\omega_0|\sim\frac{1}{\tau_{кор}}$ (оно становится важным при $|\omega-\omega_0|\ll\ll\frac{1}{\tau_{кор}}$), и пользоваться формулой (109).

Спектральная плотность от (109) выражается через спектральную плотность амплитуды $S[A, \omega]$ по формуле

$$S[x, \omega] = \frac{1}{4}S[A, \omega-\omega_0]. \qquad (17.110)$$

Поскольку амплитуда определяется через $\zeta(t)$ посредством безынерционного нелинейного преобразования (102), то ее спектральная плотность вычисляется методами, изложенными в § 8. Так, например, при

$$\beta=0;\quad \zeta=-\frac{4\mu}{A_0^2}u^2;\quad A=A_0\sqrt{1-4\frac{u^2}{A_0^2}}$$

может быть использована формула (8.119), приводящая к спектральной интенсивности

$$S[A-\langle A\rangle, \nu] = A_0^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}g_{1,2m}^2\left(\frac{A_0}{2\sigma}\right)\times$$

$$\times\int_0^\infty R^{2m}(\tau)\cos\nu\tau d\tau. \qquad (17.111)$$

Сложнее всего является промежуточный случай средних независимых приращений $\sigma_\Omega\tau_{кор}\sim 1$. При этом не-

которые результаты, лишенные большой общности и точности, могут быть получены путем громоздких вычислений. Исключение составляет, конечно, случай нормальных флюктуаций частоты $\Omega(t)$.

В этом случае можно по общему правилу непосредственно записать выражение для совместной характеристической функции случайных величин $\Omega$, $\Omega_\tau$ и $\Delta\varphi$:

$$\langle \exp i(u\Omega + v\Omega_\tau + w\Delta\varphi)\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}[\langle\Omega^2\rangle(u^2+v^2) + \right.$$

$$\left. + 2\langle\Omega\Omega_\tau\rangle uv + \langle\Delta\varphi^2\rangle w^2 + 2\langle\Omega\Delta\varphi\rangle uw + 2\langle\Omega_\tau\Delta\varphi\rangle vw]\right\} =$$

$$= \langle \exp i(u\Omega + v\Omega_\tau)\rangle \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle w^2 - \right.$$

$$\left. - \langle\Omega\Delta\varphi\rangle uw - \langle\Omega_\tau\Delta\varphi\rangle vw\right\}, \qquad (7.112)$$

где $\exp i(u\Omega + v\Omega_\tau)$ — двумерная характеристическая функция для $\Omega$ и $\Omega_\tau$. Через характеристическую функцию (112) записывается входящее в (96) выражение

$$\langle A(\Omega)A(\Omega_\tau)e^{i\Delta\varphi}\rangle = (2\pi)^{-2}\int\int\int\int A(\Omega')\times$$

$$\times A(\Omega_\tau')e^{-iu\Omega'-iv\Omega_\tau'}\langle e^{iu\Omega+iv\Omega_\tau+i\Delta\varphi}\rangle d\Omega' d\Omega_\tau' du dv. \quad (17.113)$$

Здесь $A(\Omega)$ — функция, определяющая зависимость амплитуды от частоты: $A = A(\Omega)$. В справедливости равенства (113) можно, например, убедиться, приняв во внимание, что

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-iu(\Omega'-\Omega)}du = \delta(\Omega'-\Omega);$$

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-iv(\Omega_\tau'-\Omega_\tau)}dv = \delta(\Omega_\tau'-\Omega_\tau). \qquad (17.114)$$

Подставляя (112) в (113), получаем, после интегрирования по $u$, $v$, $\Omega'$ $\Omega_\tau'$ при учете (114)

$$\langle A(\Omega)A(\Omega_\tau)e^{i\Delta\varphi}\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle}\langle A(\Omega + i\langle\Omega\Delta\varphi\rangle)A(\Omega_\tau + i\langle\Omega_\tau\Delta\varphi\rangle)\rangle. \quad (17.115)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию корреляционной функции при безынерционном нелинейном преобразовании $A = A(\Omega + m)$, $m = i\langle\Omega\Delta\varphi\rangle$.

Поскольку результат является аналитической функцией от $m$, можно вести вычисления, например, методом Райса (§ 8, раздел 4) так, как если бы $m$ было постоянной действительной величиной. Далее, после того, как корреляционная функция

$$\langle xx_\tau\rangle = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\langle\Delta\varphi^2\rangle}\, \mathrm{Re}[\langle A(\Omega + m)\, A(\Omega_\tau + m)\rangle e^{i\omega_0\tau}] \quad (17.116)$$

будет вычислена, в найденном выражении следует положить

$$m = i\langle\Omega\Delta\varphi\rangle = i\sigma_\Omega^2 \int_0^\tau R(\tau')\, d\tau';$$

$$\langle\Delta\varphi^2\rangle = 2\sigma_\Omega^2 \int_0^\tau (\tau - \tau')\, R(\tau')\, d\tau'. \quad (17.117)$$

## § 18. СИНХРОНИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ

Решение многих радиотехнических задач возможно лишь при достижении достаточно высокой стабильности частоты автоколебаний. Так повышение стабильности частоты позволяет, например, добиться большей пропускной способности каналов и помехоустойчивости. Рассмотренные ранее дробовые флюктуации анодного тока, флюктуации внешнего напряжения и другие помехи приводят к нестабильности частоты, к расширению спектральной линии в спектре генерируемых колебаний.

Эффективным средством достижения большего постоянства частоты автоколебаний является внешняя синхронизация, т. е. подача на генератор синхронизирующего напряжения от другого генератора, который обладает большей степенью стабильности частоты, хотя и малой мощностью. При этом осуществляется увлечение частоты колебаний и, следовательно, ее стабилизация.

Наличие флюктуаций приводит, однако, к некоторым отклонениям от вполне синхронного режима, которые заключаются в следующем. Во-первых, имеют место беспрестанные малые флюктуационные отклонения фазы от синхронного значения, наблюдаемого при отсутствии флюктуаций. Во-вторых, изредка возникают большие отклонения фазы, сравнимые с $\pi/2$. В-третьих, происходят, правда еще реже, перескоки фазы на целое число пе-

риодов. Такие перескоки не компенсируются, накапливаются и приводят к тому, что средняя частота автоколебаний не совпадает с синхронизирующей частотой, а также к тому, что возникает необратимая диффузия фазы, дающая диффузионную нестабильность частоты.

Первый эффект (малые флюктуации) рассчитывается путем применения метода линеаризации. Другие эффекты являются существенно нелинейными, и для их исследования целесообразно использовать аппарат марковских процессов, который в отношении нелинейных задач имеет то огромное вычислительное преимущество, что непосредственно дает квадратуру стационарного распределения.

### 1. Основные уравнения. Малые отклонения от синхронного режима в приближении линеаризации

Если синхронизирующее напряжение подается на колебательный контур, то в соответствии с (13.13), (13.16) работа генератора будет описываться уравнением (13.17), которое относительно напряжения $x = \omega_c M(I - I_=)$ запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left[\omega_c F\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c}\right) - RC\dot{x}\right] - \\ - \omega_0^2\omega_c^2 MCU_0 \sin\omega_c t + \omega_0^2\omega_c M I_{\text{аф}}. \qquad (18.1)$$

В том случае, когда помехой является не дробовой шум, а флюктуационное напряжение $u_к(t)$, подаваемое на контур, здесь $\omega_0^2\omega_c M I_{\text{аф}}$ следует заменить на $\omega_0^2\omega_c MC\dot{u}_к$.

От уравнения колебаний (1) перейдем к уравнению в стандартной форме. Однако, в отличие от (13.30), амплитуду и фазу определим теперь через частоту синхронизации $\omega_c$, а не через резонансную частоту контура. После такой замены

$$x = A\cos(\omega_c t + \varphi); \quad \dot{x} = -\omega_c A\sin(\omega_c t + \varphi) \qquad (18.2)$$

выполняются равенства

$$\dot{A} = -\frac{1}{\omega_c}\sin(\omega_c t + \varphi)(\ddot{x} + \omega_c^2 x);$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\omega_c A}\cos(\omega_c t + \varphi)(\ddot{x} + \omega_c^2 x), \qquad (18.3)$$

аналогичные (13.31).

Пользуясь прежней аппроксимацией ламповой характеристики и вводя обозначения

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{\omega_c}(MS - RC); \quad A_0^2 = 4\,\frac{MS - RC}{M\gamma}; \qquad (18.4)$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2 - \omega_c^2}{2\omega_c} \approx \omega_0 - \omega_c; \quad E = \omega_0^2 MCU_0 = \frac{M}{L}\,U_0,$$

запишем уравнение (1) в форме

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = -2\Delta\omega_c x + \varepsilon\omega_c \dot{x}\left[1 - \frac{4}{3A_0^2}\left(\frac{\dot{x}}{\omega_c}\right)^2\right] - \\ - \omega_c^2 E \sin\omega_c t - \omega_c^2 \eta(t), \qquad (18.5)$$

удобной для подстановки в уравнения (3). Здесь $\eta(t)$ — случайная функция, равная

$$\eta = -\frac{\omega_0^2}{\omega_c} MI_\Phi \text{ или } \eta = -\frac{\omega_0^2}{\omega_c} MC\dot{u}_\text{к} \qquad (18.6)$$

в зависимости от рода помех. После указанной подстановки и выбрасывания из полученных стандартных уравнений вибрационных членов находим следующие укороченные уравнения первого приближения:

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon\omega_c}{2}\left(1 - \frac{A^2}{A_0}\right)A + \frac{\omega_c}{2}E\cos\varphi + \omega_c\eta\sin(\omega_c t + \varphi);$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_c E}{2A}\sin\varphi + \frac{\omega_c}{A}\eta\cos(\omega_c t + \varphi). \qquad (18.7)$$

Упрощение входящих сюда флюктуационных членов $\eta\sin\Phi$ и $\eta\cos\Phi/A$ может быть выполнено тем же способом, что и в разделе 4, § 13, если случайный процесс $\eta$ имеет достаточно малое время корреляции в сравнении с временем релаксации:

$$\tau_\text{кор} \ll \frac{1}{\varepsilon\omega_0}. \qquad (18.8)$$

При этом условии к рассматриваемой задаче применимы стохастические методы и уравнение Фоккера—

Планка. Случайные возмущения, входящие в упрощенные уравнения

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon\omega_c}{2}\left(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)A + \frac{\omega_c E}{2}\cos\varphi + \frac{K}{2A} + \xi_1,$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega_c E}{2A}\sin\varphi + \frac{\xi_2}{A}, \qquad (18.9)$$

можно считать независимыми дельта-коррелированными нормальными случайными функциями с нулевым средним значением:

$$\langle\xi_{1,2}\rangle = 0; \quad \langle\xi_1\xi_{2\tau}\rangle = 0;$$

$$\langle\xi_1\xi_{1\tau}\rangle = \langle\xi_2\xi_{2\tau}\rangle = K\delta(\tau); \quad K = \frac{\omega_c^2}{2}\varkappa_\eta(\omega_c). \qquad (18.10)$$

Если $\omega_c$ совпадает с $\omega_0$, то случайные функции $\xi_1$, $\xi_2$ связаны с функциями $\eta$, $\zeta$, $\eta'$, $\zeta'$, входящими в уравнения (13.67), (13.18), (16.4), соотношениями $\xi_1 = \varepsilon\omega_0\eta = A_0\eta'$; $\xi_2 = \varepsilon\omega_0\zeta = A_0\zeta'$.

При выводе уравнений (9) мы предполагали синусоидальную форму синхронизирующего воздействия. Между тем точно такие же уравнения справедливы, когда внешнее воздействие является периодической функцией любой другой формы, например последовательностью импульсов. Важно лишь, чтобы ее частота $\omega$ была близка к собственной частоте генератора (синхронизацию на побочных частотах — кратных или дробных мы не рассматриваем). Любую периодическую функцию можно записать в виде тригонометрического ряда

$$f_c(t) = E_0 + E_1\sin(\omega_c t + \chi_1) + E_2\sin(2\omega_c t + \chi_2) + \ldots$$

После подстановки его в (3) и отбрасывания вибрационных членов в первом приближении все члены, кроме $E_1\sin(\omega_c t + \chi_1)$, выпадут. Фаза $\chi_1$ связана с выбором начала отсчета времени, ее можно обратить в нуль. Поэтому функция $f_c(t)$ в отношении ее синхронизирующего действия в первом приближении полностью эквивалентна рассмотренной ранее синусоиде $E\sin\omega_c t$, где теперь следует полагать

$$E = \left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_c(t)\cos\omega_c t\, d\omega_c t\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_c(t)\sin\omega_c t\, d\omega_c t\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В этом смысле приводимые ниже результаты справедливы при произвольном виде синхронизирующего сигнала. Так, при синхронизации импульсами высоты $E_и$ и скважности $\Theta$ следует брать

$$E = \frac{2}{\pi} E_и \sin \pi\Theta.$$

Полученная основная система уравнений (9) в самом общем виде трудно поддается решению. Однако с ее помощью можно получить ряд важных частных результатов.

Если бы случайные возмущения отсутствовали ($\xi_1 = \xi_2 = 0$; $K = 0$), то при выполнении условий захватывания имел бы место синхронный режим с неизменными значениями амплитуды и фазы $A_1$, $\varphi_1$. Уравнения, определяющие указанные значения, мы получим из (9), приравнивая нулю временные производные:

$$\varepsilon (a_1^2 - 1) a_1 = \frac{E}{A_0} \cos \varphi_1; \qquad (18.11)$$

$$2 \frac{\Delta}{\omega_c} a_1 = \frac{E}{A_0} \sin \varphi_1,$$

где $a_1 = \frac{A_1}{A_0}$. Комбинируя эти уравнения, находим

$$\left[(a_1^2 - 1)^2 + \left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_c}\right)^2\right] a_1^2 = \left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^2. \qquad (18.12)$$

В результате решения выведенного кубического уравнения для каждого конкретного случая могут быть найдены стационарные значения амплитуды и фазы $A_1$, $\varphi_1$. Уравнение (12) удобно исследовать графически, записав его в виде

$$x(x-1)^2 = \left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^2 - \left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_c}\right)^2 x, \qquad (18.13)$$

$$(x = a_1^2).$$

Изображенный на рис. 18.1 график функции $x(x-1)^2$ пересекается прямой, которая соответствует правой части (13) и определяется параметрами $E/\varepsilon A_0$, $2\Delta/\varepsilon\omega_c$. Если имеется не одна, а три точки пересечения (прямая $CB$ на рис. 18.1), то устойчивая амплитуда соответствует точке $N$ с наибольшей абсциссой.

Синхронный режим возможен лишь при расстройках $\Delta$, которые меньше некоторого значения, зависящего от амплитуды $E$.

Как следует из второго равенства (11), условие захватывания имеет вид

$$\Delta < \frac{\omega_c E}{2A_1} \text{ или } \Delta < \frac{\Delta_c}{a_1}, \qquad (18.14)$$

где $\Delta_c = \frac{\omega_c E}{2A_0}$ — параметр системы, называемый шириной полосы синхронизации.

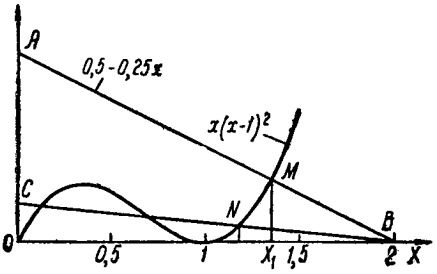



Рис. 18.1. Графическое определение стационарной амплитуды $a_1 = \sqrt{x_1}$. ($AB$ соответствует $\left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^2 = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $CB$ соответствует $\left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^2 = \frac{1}{10}$, $\left(\frac{2\Delta}{\varepsilon\omega_c}\right)^2 = \frac{1}{20}$).

Предполагая, что это условие выполняется, рассмотрим сначала случай малых флюктуационных отклонений от синхронного режима.

Выражения в правой части (9), взятые без флюктуационных членов $\xi_1$, $\xi_2$, имеют малые значения вблизи точки $A = A_1$, $\varphi = \varphi_1$, так как в самой этой точке они обращаются в нуль. Разложим эти выражения в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами. При вычислении частных производных первого порядка по $A$ и $\varphi$ от этих выражений используем соотношения (11). Поскольку линеаризация применима лишь в случае малой интенсивности шума, флюктуационный член $\xi_2/A$ при этом можно заменить на $\xi_2/A_1$, а член $K/2A$ отбросить. Описанным способом получаем следующие линеаризованные уравнения:

$$\delta\dot{A} = -\varepsilon\omega_c \frac{3a_1^2 - 1}{2}\delta A - \Delta A_1 \delta\varphi + \xi_1;$$

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\Delta}{A_1}\delta A - \varepsilon\omega_c \frac{a_1^2 - 1}{2}\delta\varphi + \frac{\xi_2}{A_1},$$

$$(\delta A = A - A_1; \quad \delta\varphi = \varphi - \varphi_1).$$

Если в целях кратности обозначить

$$\delta A = y;\ A_1\delta\varphi = z;\ \varepsilon\omega_c(3a_1^2 - 1) = 2\delta;$$
$$\varepsilon\omega_c(a_1^2 - 1) = 2\delta', \qquad (18.15)$$

то эти уравнения примут вид

$$\dot{y} = -\delta y - \Delta z + \xi_1;$$
$$\dot{z} = \Delta y - \delta' z + \xi_2. \qquad (18.16)$$

Полученная система уравнений может быть решена обычными способами. Если мы интересуемся стационарным процессом, то начальные условия не будут сказываться. Влияние возмущений $\xi_1$, $\xi_2$ надо будет учитывать, начиная с самых отдаленных моментов времени $(t = -\infty)$.

Применяя спектральный метод, заменим в (16) оператор дифференцирования на $i\omega$ и разрешим относительно $y$, $z$ систему

$$(i\omega + \delta)\, y + \Delta z = \xi_1;$$
$$-\Delta y + (i\omega + \delta')\, z = \xi_2,$$

как систему алгебраических уравнений. В результате получим

$$y = \frac{(i\omega + \delta')\,\xi_1 - \Delta\xi_2}{Z(i\omega)} \equiv L_{y1}\xi_1 + L_{y2}\xi_2;$$
$$z = \frac{\Delta\xi_1 + (i\omega + \delta)\,\xi_2}{Z(i\omega)} \equiv L_{z1}\xi_1 + L_{z2}\xi_2, \qquad (18.17)$$
$$\left(Z(i\omega) = (i\omega + \delta)(i\omega + \delta') + \Delta^2\right)$$

($L$ — краткие обозначения стоящих здесь комплексных выражений).

Согласно правилам преобразования спектральной плотности стационарных процессов при линейном преобразовании случайных функций имеем отсюда, учитывая независимость процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$,

$$\varkappa_y = |L_{y1}|^2\varkappa_{\xi 1} + |L_{y2}|^2\varkappa_{\xi 2},$$
$$\varkappa_z = |L_{z1}|^2\varkappa_{\xi 1} + |L_{z2}|^2\varkappa_{\xi 2},$$
$$\varkappa_{yz} = \varkappa^*_{zy} = L_{y1}L^*_{z1}\varkappa_{\xi 1} + L_{y2}L^*_{z2}\varkappa_{\xi 2};\quad (\varkappa_{\xi 1} = \varkappa_{\xi 2} = K),$$

т. е.

$$\varkappa_y(\omega)=\frac{1}{2}S[y,\ \omega]=\frac{\omega^2+\delta'^2+\Delta^2}{(\delta\delta'+\Delta^2-\omega^2)^2+\omega^2(\delta+\delta')^2}K;$$

$$\varkappa_z(\omega)=\frac{1}{2}S[z,\ \omega]=\frac{\omega^2+\delta^2+\Delta^2}{(\delta\delta'+\Delta^2-\omega^2)^2+\omega^2(\delta+\delta')^2}K; \quad (18.18)$$

$$\varkappa_{yz}(\omega)=\frac{1}{2}S[y,\ z,\ \omega]=\frac{\delta'-\delta+2i\omega}{(\delta\delta'+\Delta^2-\omega^2)^2+\omega^2(\delta+\delta')^2}\Delta K.$$

По найденным спектральным плотностям можно, конечно, отыскать явный вид корреляционных функций, являющихся обратным Фурье-преобразованием от (18). Спектральную плотность подобного вида мы получили в § 2. Принимая во внимание формулы (5), (6) табл. 2.1, приходим к заключению, что корреляционные функции процессов $y(t)$, $z(t)$ выражаются через функции $e^{-\gamma|\tau|}\cos\nu\tau$ и $e^{-\gamma|\tau|}\sin\nu\tau$, где $\gamma$, $\nu$ — величины, находимые из уравнений

$$\gamma^2+\nu^2=\delta\delta'+\Delta^2;\quad 2\gamma=\delta+\delta'$$

и равные

$$\gamma=\varepsilon\omega_c\left(a_1^2-\frac{1}{2}\right);$$

$$\nu=\sqrt{\Delta^2-\left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^2}=\sqrt{\Delta^2-\left(\frac{\varepsilon\omega_c}{2}a_1\right)^2}. \quad (18.19)$$

Умножая соотношения (5), (6) табл. 2.1 на коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы при сложении получить выражения (18), находим соответствующие им корреляционные функции

$$k_y(\tau)=\frac{K}{4\gamma}\frac{1}{\delta\delta'+\Delta^2}e^{-\gamma|\tau|}\times$$

$$\times\left\{[\delta'^2+\delta'\delta+2\Delta^2]\cos\nu\tau+(\delta-\delta')\frac{\delta'\gamma}{\nu}\sin\nu|\tau|\right\};$$

$$k_z(\tau)=\frac{K}{4\gamma}\frac{1}{\delta\delta'+\Delta^2}e^{-\gamma|\tau|}\times$$

$$\times\left\{[\delta^2+\delta\delta'+2\Delta^2]\cos\nu\tau-(\delta-\delta')\frac{\delta\gamma}{\nu}\sin\nu|\tau|\right\};$$

$$k_{yz}(\tau)=\frac{K}{4\gamma}\frac{\Delta}{\delta\delta'+\Delta^2}\left(\delta'-\delta+2\frac{d}{d\tau}\right)\times$$

$$\times\left\{e^{-\gamma|\tau|}\left(\cos\nu\tau+\frac{\gamma}{\nu}\sin\nu|\tau|\right)\right\}. \quad (18.20)$$

Полагая здесь $\tau = 0$, найдем дисперсию и коэффициент корреляции флюктуаций амплитуды и фазы

$$\langle y^2\rangle = \frac{K}{2\gamma}\frac{\delta'\gamma + \Delta^2}{\delta\delta' + \Delta^2};\quad \langle z^2\rangle = A_1^2\langle\delta\varphi^2\rangle = \frac{K}{2\gamma}\frac{\delta\gamma + \Delta^2}{\delta\delta' + \Delta^2};$$

$$\langle yz\rangle = \frac{\Delta K}{4\gamma}\frac{\delta' - \delta}{\delta\delta' + \Delta^2};\quad R_{yz} = \frac{\Delta}{2}\frac{\delta' - \delta}{[(\delta'\gamma + \Delta^2)(\delta\gamma + \Delta^2)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (18.21)$$

Полученные результаты содержат величины, определенные равенствами (15), (19), и могут быть, конечно, преобразованы к другому виду. Мы этого не будем делать, но отметим, что разброс амплитуды всегда меньше разброса в перпендикулярном направлении ($\langle\delta A^2\rangle < A_1^2\langle\delta\varphi^2\rangle$), так как жесткость по амплитуде (по $y$) больше жесткости по $z$ ($\delta > \delta'$). Знак коэффициента корреляции для $y$ и $z$, который можно записать в виде

$$R_{yz} = -\frac{1}{2}\varepsilon\omega_c a_1^2\Delta(\delta\delta'\gamma + 2\Delta^2\gamma^2 + \Delta^4)^{-\frac{1}{2}},$$

определяется знаком расстройки $\Delta$.

Особенно простая флюктуационная картина имеет место при нулевой расстройке $\Delta = 0$. В этом случае флюктуации амплитуды и фазы происходят независимо, так как система (16) расщепляется на два самостоятельных уравнения. По виду этих уравнений можно заключить, что процессы $y(t)$ и $z(t)$ будут иметь экспоненциальную функцию корреляции. Как известно [см. например (4.217)], дисперсия такого процесса равна интенсивности случайных толчков, деленной на удвоенную жесткость. В самом деле, полагая в (21) $\Delta = 0$, получаем

$$\langle y^2\rangle = \frac{K}{2\delta};\quad \langle z^2\rangle = \frac{K}{2\delta'};\quad \langle yz\rangle = 0. \quad (18.22)$$

При использовании этих формул полезно принимать во внимание следующие приближенные соотношения, вытекающие из (12) для крайних случаев малой и большой синхронизирующей амплитуды. При $E/\varepsilon A_0 \ll 1$

$$a_1^2 \approx 1 + \frac{E}{\varepsilon A_0};\ 2\delta \approx 2\varepsilon\omega_c;\ 2\delta' \approx \omega_c\frac{E}{A_0} = 2\Delta_c; \quad (18.23)$$

и при $E/\varepsilon A_0 \gg 1$

$$a_1^2 \approx \left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^{\frac{2}{3}};\ 2\delta \approx 3\varepsilon\omega_c\left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^{\frac{2}{3}};\ 2\delta' \approx \varepsilon\omega_c\left(\frac{E}{\varepsilon A_0}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (18.24)$$

Отсюда видно, что в первом случае жесткость по амплитуде такая же, что и у автономного генератора. Фаза имеет гораздо меньшую жесткость; это приводит к большому разбросу фазы, настолько большому, что ставится под сомнение применимость метода линеаризации. Поскольку для его применимости обязательно условие $\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll 1$, т. е.

$$\langle z^2 \rangle \approx \frac{KA_0}{\omega_c E} \ll A_1^2, \tag{18.25}$$

то при

$$E \gtrsim \frac{\omega_c \varkappa_\eta(\omega_c)}{\varkappa A_0} \tag{18.26}$$

он становится неприемлемым.

Увеличение синхронизирующего воздействия сопровождается увеличением жесткости по амплитуде и фазе, причем жесткость фазы, увеличиваясь быстрее, почти догоняет жесткость по амплитуде. Это значит, что разброс фазы, уменьшаясь быстрее, чем разброс амплитуды, приближается к последнему. Так согласно (24) при $E/\varepsilon A_0 \gg 1$ среднеквадратичный разброс фазы всего лишь в $\sqrt{3}$ раз превосходит относительный разброс $\delta A/A_1$ амплитуды.

Перейдем к вычислению корреляционной функции и спектра генерируемого сигнала $x = A\cos(\omega_c t + \varphi)$. При условии применимости метода линеаризации допустима линеаризация выражения

$$x = (A_1 + y)\cos\left(\omega_c t + \varphi_1 + \frac{z}{A_1}\right) \approx A_1 \cos(\omega_c t + \varphi) + \\ + y\cos(\omega_c t + \varphi_1) - z\sin(\omega_c t + \varphi_1) \tag{18.27}$$

на том же основании, что и линеаризация в основных уравнениях (9). Умножая (27) на аналогичное выражение, но взятое в другой момент времени, и усредняя, найдем корреляционную функцию сигнала, поскольку корреляционные функции для $y$ и $z$ были уже вычислены ранее. Для когерентных устройств и операций, в которых производится сравнение фазы генерируемого сигнала с фазой синхронизирующего воздействия, сигнал $x$ выступает как периодически нестационарный. В соответствии с этим получаемая указанным образом корре-

ляционная функция зависит не только от разности времен $\tau$, но и периодически изменяется при одинаковом сдвиге обоих моментов по оси времени.

Для некогерентных операций и устройств можно произвести дополнительное усреднение по неопределенной начальной фазе, которую можно считать случайной и равномерно распределенной. Такой процесс со случайной начальной фазой является уже стационарным, и его корреляционная функция зависит лишь от разности времен.

В этом случае для отыскания корреляционной функции проще всего применить описанный в § 7 прием, основанный на рассмотрении комплексного случайного процесса

$$Z = A_1 + y + iz,$$

$$x = \mathrm{Re}\,[Ze^{i(\omega_c t + \varphi_1)}]. \qquad (18.28)$$

Корреляционные функции действительного и комплексного процессов связаны соотношением (7.16)

$$\langle xx_\tau \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\langle ZZ_\tau^* \rangle e^{-i\omega_c \tau}], \qquad (18.29)$$

а их спектральные плотности

$$S[x,\ \omega] = \frac{1}{4}S[Z,\ \omega - \omega_c] + \frac{1}{4}S^*[Z,\ \omega + \omega_c] \approx$$

$$\approx \frac{1}{4}S[Z,\ \omega - \omega_c] \quad \text{при } \omega > 0,$$

т. е.

$$S[x,\ \omega] = \frac{1}{2}\varkappa_Z(|\omega| - \omega_c). \qquad (18.30)$$

Принимая во внимание (28) и найденные ранее результаты (18), (20), определяем статистические характеристики комплексного процесса

$$\langle ZZ_\tau^* \rangle = A_1^2 + \langle yy_\tau \rangle + \langle zz_\tau \rangle - i\langle yz_\tau - zy_\tau \rangle;$$

$$\varkappa_Z(\omega) = 2\pi A_1^2 \delta(\omega) + \varkappa_y(\omega) + \varkappa_z(\omega) - i(\varkappa_{yz} - \varkappa_{yz}^*) =$$

$$= 2\pi A_1^2 \delta(\omega) + \frac{2\omega^2 + \delta'^2 + \delta^2 + 2\Delta^2 + 4\omega\Delta}{(\delta\delta' + \Delta^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\delta + \delta')^2} K, \qquad (18.31)$$

которые затем следует подставить в (29), (30). Так, для спектральной плотности имеем

$$S[x, \omega] = \pi A_1^2 \delta(\omega - \omega_c) + \\ + \frac{(|\omega| - \omega_c + \Delta)^2 + \frac{1}{2}(\delta'^2 + \delta^2)}{[\delta\delta' + \Delta^2 - (|\omega| - \omega_c)^2]^2 + (|\omega| - \omega_c)^2(\delta + \delta')^2} K. \quad (18.32)$$

Наличие корреляций между амплитудными и фазовыми флюктуациями здесь, как и в § 15, приводит к несимметрии спектральной плотности относительно основной частоты $\omega_c$ (числитель второго члена симметричен относительно $\omega_c - \Delta$, знаменатель — относительно $\omega_c$).

Полагая $\tau = 0$ в (29) и первом равенстве (31), а также используя (21), находим

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}(A_1^2 + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle) = \\ = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{K}{2\gamma} \frac{\gamma^2 + \Delta^2}{\delta\delta' + \Delta^2}, \quad (18.33)$$

откуда следует, что мощность флюктуаций, имеющих непрерывный спектр, описываемый вторым выражением в правой части (32), составляет лишь

$$\frac{K}{\gamma A_1^2} \frac{\gamma^2 + \Delta^2}{\delta\delta' + \Delta^2} \cdot 100\% \quad (18.34)$$

от мощности дискретной спектральной линии на частоте синхронизации. Это составляет всегда малую часть в рамках применимости метода линеаризации.

С большой степенью условности ширину непрерывной спектральной полосы в (32), обусловленной флюктуациями, можно оценить как равную $2\gamma = \varepsilon\omega_c(2a_1^2 - 1)$ или даже $2\varepsilon\omega_c a_1^2$. Тогда отношение ширины непрерывной части спектра к ширине полосы синхронизации $\frac{\Delta_c}{a_1}$ будет равно

$$2\frac{\varepsilon\omega_c}{\Delta_c} a_1^3. \quad (18.35)$$

Необходимыми условиями применимости метода линеаризации являются условия малости флюктуационных отклонений $\langle \delta A^2 \rangle / A_1^2$, $\langle \delta\varphi^2 \rangle$ по сравнению с единицей. Но эти условия еще не являются достаточными, особенно в отношении фазы при больших расстройках,

близких к границе полосы синхронизации. В этом случае для срыва синхронизации достаточно значительно меньшего отклонения фазы от синхронного режима, чем $\pi$. Если $\Delta_\varphi$ — такое отклонение, то обязательным условием справедливости полученных выше результатов является неравенство

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll \Delta_\varphi^2. \qquad (18.36)$$

Выполнение последнего условия затрудняется еще тем, что с приближением к границе полосы синхронизации происходит уменьшение жесткости по фазе и следовательно, увеличение фазового разброса.

Итак, мы видим, что даже при малом уровне флюктуаций метод линеаризации делается неприменимым, если становится малой амплитуда синхронизирующего воздействия (26) или расстройка приближается к границе полосы синхронизации [нарушается (36)]. Для рассмотрения этих случаев требуется привлечение нелинейной теории.

В приближении линеаризации оказывается, кроме того, совсем обойденным вопрос о возможности перескоков фазы на целое число периодов. При этом молчаливо предполагается, что любое флюктуационное отклонение, как бы велико оно ни было, ликвидируется путем возвратного движения изображающей точки. На самом же деле, если отклонение сравнимо с $\pi$, изображающая точка может снова приблизиться к синхронному положению «с другой стороны», описав вокруг начала координат замкнутую петлю, в результате чего фаза изменится на $2\pi$.

Это явление, в свою очередь, может быть рассмотрено лишь в рамках нелинейной теории, к изложению которой мы и переходим.

## 2. Стационарное распределение фазы и средняя частота

Возвращаясь к нелинейным уравнениям (9), будем предполагать, что выполняется неравенство

$$\frac{E}{A_0} \ll \varepsilon, \text{ т. е. } \varepsilon\omega_c \gg \Delta_c, \qquad (18.37)$$

которое позволяет рассматривать первое и второе уравнения указанной системы отдельно друг от друга. В самом деле, при этом условии амплитуда меняется гораздо быстрее, чем фаза, и при каждом значении фазы $\varphi$ будет успевать установиться равновесное распределение

по амплитудам $w(A|\varphi)$. Чтобы его найти, можно применить метод уравнения Фоккера—Планка (§ 14, раздел 1), полагая в первом уравнении (9) фазу $\varphi$ постоянной. Записывая уравнение Фоккера—Планка и используя условие стационарности $w(A, \varphi) = 0$ для этого условного распределения, получаем

$$w(A|\varphi) = \frac{A}{N_\varphi} \exp \frac{2}{K}\left[\varepsilon\omega_c \frac{A^2}{4}\left(1 - \frac{A^2}{2A_0^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_c E}{2} A\cos\varphi\right], \qquad (18.38)$$

где $N_\varphi$ — нормировочный множитель. Присутствие члена $\frac{1}{2}\omega_c EA\cos\varphi$ в найденном выражении проявляется в том, что наиболее вероятное значение амплитуды сдвигается на величину, примерно равную $-\left(\frac{E}{2\varepsilon}\right)\cos\varphi$.

В силу (37) этот сдвиг много меньше, чем $A_0$ и, если им пренебречь, мы получим плотность распределения

$$w(A|\varphi) = \frac{A}{N_\varphi} \exp\left\{\frac{\varepsilon\omega_c}{4K} A^2\left(2 - \frac{A^2}{A_0^2}\right)\right\} =$$
$$= \frac{A}{N} \exp\left\{-\frac{\varepsilon\omega_c}{4K} A_0^2\left(\frac{A^2}{A_0^2} - 1\right)^2\right\}, \qquad (18.39)$$

совпадающую с (14.8). Таким образом, в случае относительно узкой полосы синхронизации, когда выполняется (37), распределение по амплитудам практически не отличается от распределения в автономном генераторе при любом уровне шума.

Если интенсивность шума невелика

$$K \ll \varepsilon\omega_c A_0^2 \approx A_0^2\delta, \qquad (18.40)$$

то это распределение близко к нормальному

$$w(A|\varphi) \approx \frac{A_0}{N} \exp\left\{-\frac{\varepsilon\omega_c}{K}(A - A_0)^2\right\} \qquad (18.41)$$

для малых отклонений $A - A_0$. Это приближение совпадает с приближением линеаризации, в котором все законы распределения предполагаются нормальными. Поскольку формула (21) вследствие (37) и (23) дает дисперсию $\langle\delta A^2\rangle \approx K/2\delta \approx K/2\varepsilon\omega_0$, то распределение ам-

плитуды, получаемое методом линеаризации, действительно не отличается от (41).

Обратимся ко второму уравнению (9), описывающему поведение фазы. При выполнении неравенства (40) относительный разброс амплитуды невелик

$$\langle (A - A_0)^2 \rangle \ll A_0^2, \tag{18.42}$$

т. е. с достаточно большой вероятностью $A - A_0 \ll A_0$. Поэтому в указанном уравнении (9) точную амплитуду $A$ можно заменить на ее приближенное значение $A_0$. В результате получаем следующее уравнение для фазы

$$\dot{\varphi} = \Delta - \Delta_c \sin\varphi + \frac{\xi_2}{A_0}. \tag{18.43}$$

Это уравнение применимо при выполнении условий (37) и (40), т. е. в том случае, когда допустима линеаризация по амплитуде и недопустима линеаризация по фазе. Ему соответствует следующее уравнение Фоккера—Планка:

$$\dot{w}(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(\Delta - \Delta_c \sin\varphi)\, w(\varphi)\right] + \frac{K}{2A_0^2}\frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial\varphi^2}. \tag{18.44}$$

Последнее уравнение выражает собой закон „сохранения вероятности“ $\dot{w} + \frac{\partial G}{\partial\varphi} = 0$, где

$$G(\varphi) = (\Delta - \Delta_c \sin\varphi)\, w(\varphi) - \frac{K}{2A_0^2}\frac{\partial w(\varphi)}{\partial\varphi} \tag{18.45}$$

есть не что иное, как «поток вероятности» через сечение $\varphi$. Если ввести обозначения

$$D = \frac{2A_0^2\Delta}{K};\quad D_c = \frac{2A_0^2\Delta_c}{K} = \frac{EA_0\omega_c}{K}, \tag{18.46}$$

то последнее выражение можно записать в виде

$$G(\varphi) = \frac{K}{2A_0^2}\left[(D - D_c \sin\varphi)\, w - \frac{\partial w}{\partial\varphi}\right]. \tag{18.47}$$

Мы интересуемся стационарным распределением, которое характеризуется тем, что $w(\varphi)$ не изменяется во времени, или, иначе, тем, что поток вероятности (47) один и тот же во всех сечениях. В этом случае функция $w(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{d}{d\varphi}\left[(D - D_c \sin\varphi)\, w\right] = 0, \tag{18.48}$$

Общее решение полученного уравнения, содержащее две произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$, имеет вид

$$w(\varphi) = C_1 e^{D\varphi + D_c \cos\varphi} \int_{C_2}^{\varphi} e^{D\psi - D_c \cos\psi} d\psi. \qquad (18.49)$$

Для определения постоянных $C_1$ и $C_2$ мы имеем два условия: условие периодичности

$$w(\varphi + 2\pi) = w(\varphi) \qquad (18.50)$$

и условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} w(\varphi)\, d\varphi = 1. \qquad (18.51)$$

Чтобы удовлетворить первому условию, положим $C_2 = \infty$. Тогда из (49) после суммирования бесконечной геометрической прогрессии будем иметь

$$w(\varphi) = \frac{1}{N} e^{D\varphi + D_c \cos\varphi} \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} e^{-D\psi - D_c \cos\psi} d\psi, \qquad (18.52)$$

где $N$ — нормировочный множитель, определяемый из (51) и связанный с $C_1$ $\left(N = -\frac{1 - e^{-2\pi D}}{C_1}\right)$. Вводя переменную $\chi = \psi - \varphi$, интеграл нормировки (51) преобразуем к виду

$$N = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-D\chi + 2D_c \sin\frac{\chi}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\chi}{2}\right)\right\} d\chi d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} e^{-D\chi} I_0\left(2D_c \sin\frac{\chi}{2}\right) d\chi.$$

Если сделать замену переменной $y = \frac{\pi - \chi}{2}$ при $0 < \chi < \pi$ и $y = \frac{\chi - \pi}{2}$ при $\pi < \chi < 2\pi$, то получим

$$N = 8\pi e^{-\pi D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch} 2Dy\, I_0(2D_c \cos y)\, dy =$$

$$= 4\pi^2 e^{-\pi D} I_{iD}(D_c)\, I_{-iD}(D_c). \qquad (18.53)$$

При выводе последнего выражения использована формула 4.453.1 из справочника II. Здесь $I_{iD}(D_c)$ есть

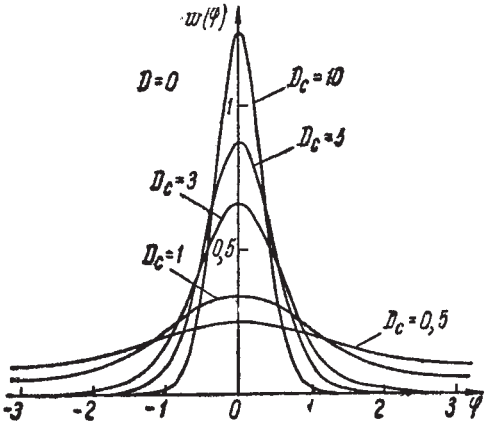



Рис. 18.2. Плотность распределения фазы при нулевой расстройке.

функция Бесселя мнимого аргумента и мнимого индекса.

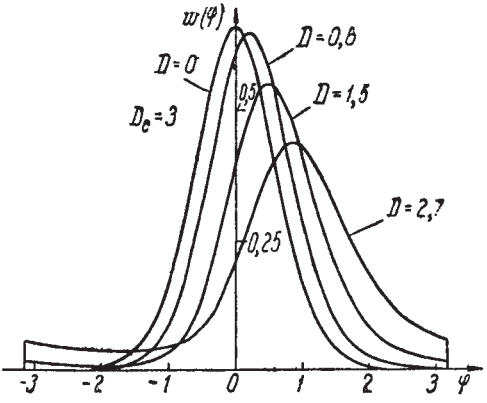



Рис. 18.3. Распределение фазы при $D_c = 3$

В случае нулевой расстройки $D = 0$ распределение фазы (52) определяется выражением

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(D_c)} e^{D_c \cos\varphi} \qquad (18.54)$$

и имеет симметричную форму, изображенную на рис. 18.2. При $D \neq 0$ форма кривой $w(\varphi)$ может быть найдена численным интегрированием. На рис. 18.3 и 18.4 представлены плотности распределения, соответствующие значениям $D_c = 3$, $D_c = 10$ и нескольким значениям параметра $D$.

Полученное специфическое распределение фазы (52) является существенно не гауссовым вследствие нелинейности функции $D - D_c \sin\varphi$. Изображающую точку на

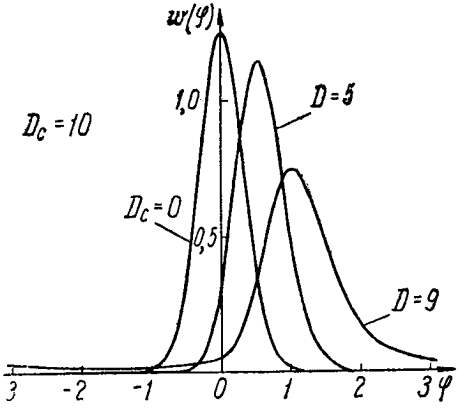



Рис. 18.4. Распределение фазы при $D_c = 10$.

оси $\varphi$ удобно интерпретировать как броуновскую частицу, движущуюся в поле внешних сил, нелинейно зависящих от положения, а именно пропорциональных $D - D_c \sin\varphi$. Тогда функция $-D\varphi - D_c \cos\varphi$ будет служить потенциалом этих внешних сил. Этот потенциал имеет такой же вид, как потенциал тяжелой точки, движущейся по волнистой наклонной поверхности (рис. 18.5). При отсутствии флюктуаций изображающая точка останавливается в самой нижней точке «ямы» $P_1$. Невозможность синхронного режима означает отсутствие таких самых нижних точек вследствие слишком большого наклона, при этом изображающая точка безостановочно «скатывается по склону вниз».

Наличие случайных толчков приводит к тому, что такое «скатывание» частично имеет место даже в том случае, если изображающая точка задерживается в «яме» (когда $\Delta < \Delta_c$). Случайные толчки, во-первых, «разбрасывают ее по дну ямы», во-вторых, более или менее

часто «выбивают» ее из «ямы», после чего она скатывается до следующей более низкой «ямы» $P_2$. Реже случайные толчки забрасывают изображающую точку в «яму» $P_3$, расположенную на более высоком уровне. Первый переход соответствует увеличению фазы на $2\pi$, второй — ее уменьшению на такую же величину. В общем имеет место «сползание» изображающей точки по наклонной поверхности, которое происходит тем быстрее, чем больше наклон (расстройка), чем мельче «ямы» (чем меньше синхронизирующая амплитуда) и чем

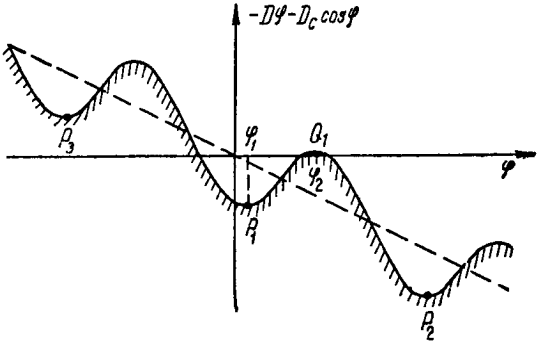



Рис. 18.5. Флюктуации фазы как случайные блуждания тяжелой частицы на волнистой наклонной поверхности.

больше случайные воздействия. Это означает, что имеет место регулярный поток вероятности в сторону наклона, приводящий к изменению средней частоты колебаний, которая смещается в сторону собственной частоты генератора.

Среднюю частоту мы найдем, усредняя равенство (43):

$$\langle\dot{\varphi}\rangle = \langle\Delta - \Delta_c \sin\varphi\rangle = \int_0^{2\pi} (\Delta - \Delta_c \sin\varphi)\, w(\varphi)\, d\varphi.$$

В соответствии с (45), подынтегральное выражение запишем через $G + \frac{K}{2A_0^2}\frac{dw}{d\varphi}$, после чего вследствие постоянства потока $G$ и периодичности (50) будем иметь

$$\langle\dot{\varphi}\rangle = 2\pi G, \quad \text{т. е. } \langle\omega\rangle - \omega_c = 2\pi G.$$

Используя распределение (52) при вычислении потока (47), находим отсюда

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = \pi \frac{K}{A_0^2} \frac{1 - e^{-2\pi D}}{N} = \Delta \frac{\operatorname{sh}\pi D}{\pi D} |I_{iD}(D_c)|^{-2}. \quad (18.55)$$

Перейдем к обсуждению результатов, которые могут быть получены при помощи этой формулы.

На рис. 18.6 приведено несколько кривых, показывающих зависимость смещения частоты $\langle\omega\rangle - \omega_c$ от относительной расстройки $\Delta/\Delta_c$ при различных значениях параметра $D_c$. Очень большим шумам соответствует значение $D_c = 0$, при котором

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = \Delta, \quad \text{т. е.} \quad \langle\omega\rangle = \omega_0.$$

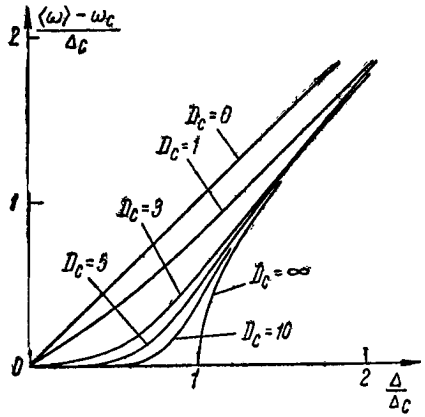



Рис. 18.6. Зависимость сдвига частоты от расстройки при различных уровнях шума.

Это означает, что влияние синхронизирующего сигнала, целиком потонувшего в шуме, не сказывается, и средняя частота автоколебаний равна собственной частоте генератора. В противоположном крайнем случае при очень малых шумах имеет место зависимость

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta < \Delta_c; \\ \sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2} & \text{при } \Delta > \Delta_c. \end{cases}$$

Прочие кривые располагаются между указанными двумя предельными линиями. Они были построены при помощи таблиц функций Бесселя мнимого индекса и мнимого аргумента. Средняя частота автоколебаний всегда лежит между собственной частотой генератора и частотой внешней синхронизирующей силы.

Наибольший практический интерес представляет тот случай, когда выполняется условие $D_c \gg 1$, ибо только тогда возможны режимы, близкие к синхронному. При

этом в зависимости от соотношения между $\Delta$ и $\Delta_c$ удается получить ряд более простых формул, нежели (55).

Если $\Delta \ll \Delta_c$, то можно воспользоваться асимптотической формулой для $I_p$ и в соответствии с (55) получить

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = 2\Delta_c \operatorname{sh} \pi D\, e^{-2D_c}. \qquad (18.56)$$

Если $\Delta$ имеет порядок $\Delta_c$ или больше, то $D \gg 1$ и, следовательно, можно использовать асимптотическое выражение

$$I_{iD}(D_0) = \frac{v}{2\sqrt{3}} e^{\frac{\pi D}{2}} \left[ e^{-\rho + \frac{\pi}{6} i} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{i}{3} D v^3\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\rho - \frac{\pi}{6} i} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{i}{3} D v^3\right)\right]; \qquad (18.57)$$

$$\left(D > 0; \quad Dv = \sqrt{D_c^2 - D^2} > 0;\right.$$

$$\left.\rho = D\left(v - \frac{v^3}{3} - \operatorname{arc\,tg} v\right)\right),$$

пригодное при больших комплексных значениях индекса $p = iD$ с погрешностью по модулю $24\sqrt{2}|p|^{-1}$ (см. [II], 6.464). Формула (57) дает различные упрощенные выражения в зависимости от того, близка или нет расстройка $\Delta$ к ширине полосы синхронизации $\Delta_c$, иначе, от соотношения между $\frac{\Delta_c^2}{\Delta^2} - 1$ и $D^{-\frac{2}{3}}$.

В том случае, когда $\Delta$ не слишком близка к $\Delta_c$, точнее, если $\frac{\Delta_c^2}{\Delta^2} - 1 \gg D^{-\frac{2}{3}}$, имеем $v^2 D^{\frac{2}{3}} \gg 1$. При этом функции Ганкеля в (57) имеют аргумент, значительно превосходящий единицу, и их можно заменить на асимптотические выражения. В результате из (55) будем иметь

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = \Delta v \exp\{-2D(v - \operatorname{arc\,tg} v)\},$$

т. е.

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = \sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} \times$$

$$\times \exp\left\{-2\left(\sqrt{D_c^2 - D^2} - D \arccos\frac{D}{D_c}\right)\right\}. \qquad (18.58)$$

Найденная зависимость, которую можно записать в форме

$$z \equiv \frac{1}{2D_c} \ln \left| \frac{|\langle\omega\rangle - \omega_c|}{\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2}} \right| = f\left(\frac{\Delta}{\Delta_c}\right) - 1, \qquad (18.59)$$

представлена на рис. 18.7. Здесь $f(u) = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + 1$, $(u<1)$ – функция, график которой располагается между прямыми $u$ и $1{,}57u$. Формулы (58), (59) показывают быстрый рост числа срывов синхронизации с увеличением расстройки или шума.

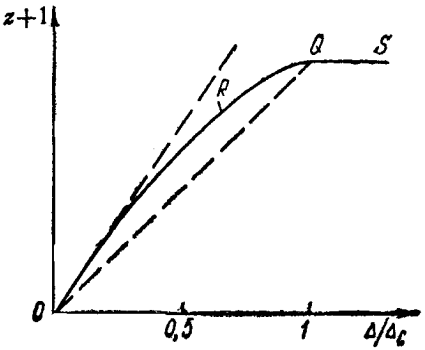


Рис. 18.7. Зависимость средней частоты от расстройки при малых интенсивностях шума.

Рассмотрим особо область значений $\frac{\Delta}{\Delta_c}$, близких к единице, когда происходит разрушение синхронного режима вследствие приближения расстройки к границе полосы синхронизации. Если $\frac{\Delta_c}{\Delta} - 1 \sim \frac{D^{\frac{2}{3}}}{2}$, то аргумент $Dv^3$ в (57) имеет порядок единицы, поэтому необходимо принимать во внимание детальное поведение функций Ганкеля, преобразуя их к другим цилиндрическим функциям порядка $\pm\frac{1}{3}$. В этом случае зато $v \ll 1$ и можно пренебречь величиной $\rho \approx -\frac{(Dv^3)\,v^2}{5}$, так как $|\rho| \ll 1$. Обозначая $\frac{Dv^3}{3} = x^{\frac{3}{2}}$ в соответствии с (55), (57), имеем

$$y = \frac{3}{2\pi x}\left[I^2_{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + I_{-\frac{1}{3}} I_{\frac{1}{3}} + I^2_{\frac{1}{3}}\right]^{-1}, \qquad (18.60)$$

где

$$y = \left(\frac{D}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\langle\omega\rangle - \omega_c}{\Delta}; \quad x \approx 2\left(\frac{D}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\Delta_c}{\Delta} - 1\right) \approx$$

$$\approx 2\left(\frac{D_c}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_c}\right). \qquad (18.61)$$

Эта зависимость изображена на рис. 18.8 кривой $RP$. Уже при $x \approx 0{,}7$ эта кривая близка к кривой $RQ$, представляющей асимптотическое выражение

$$y = x^{\frac{1}{2}} \exp\left(-2x^{\frac{3}{2}}\right).$$

При точном совпадении расстройки с шириной полосы синхронизации ($x = 0$) (60) дает

$$y = \frac{3}{2\pi} 2^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}55, \qquad (18.62)$$

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = 0{,}55\Delta_c \left(\frac{3}{D_c}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}55 \frac{\omega_c}{2} \left(\frac{3}{2} E^2 A_0^{-4} \omega_c \varkappa_\eta(\omega_c)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

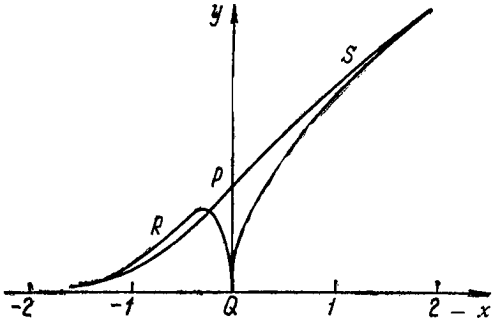



Рис. 18.8. Зависимость средней частоты от расстройки вблизи границы полосы синхронизации

При увеличении расстройки сверх ширины полосы синхронизации смещение частоты продолжает расти. Для этих значений ($\Delta > \Delta_c$; $x < 0$) из (55), (57) выводим зависимость

$$y = \frac{2}{\pi x} \left[ J_{\frac{1}{3}}^2\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right) + N_{\frac{1}{3}}^2\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right)\right]^{-1}, \qquad (18.63)$$

представленную на рис. 18.8 кривой $PS$. Как видно на чертеже, уже при значениях $-x \approx 1$ эта кривая приближается к кривой $QS$, соответствующей асимптотическому выражению $y = (-x)^{\frac{1}{2}}$ (т. е. $\langle\omega\rangle - \omega_c = \sqrt{\Delta^2 - \Delta_c^2}$).

Кривые $RQ$ и $QS$ на рис 18.8 представляют в других переменных ту же зависимость, что и линии $RQ(z = f - 1)$ и $QS(z = 0)$ на рис. 18.7. Таким образом, зависимость $ORQS$, изображенная на рис. 18.7, не при-

годна, по существу, лишь в области значений $|\Delta/\Delta_c - 1| < 0{,}5(3/D_c)^{\frac{2}{3}}$, где кривая $RQS$ должна быть заменена сглаженной монотонной зависимостью $RPS$ (рис. 18.8).

Таким образом, изложенная теория позволяет проследить непрерывный переход от режима глубокой синхронизации при малом уровне помех, когда применим метод линеаризации, к несинхронному режиму, по мере того, как расстройка приближается к границе полосы синхронизации и переходит через нее.

Аналогично можно проследить разрушение синхронного режима при уменьшении амплитуды внешнего периодического воздействия. В этом случае при фиксированной расстройке сужается полоса синхронизации, пока, наконец, значение расстройки не окажется вне ее.

Частота автоколебаний при разрушении синхронного режима постепенно изменяется от синхронизирующей частоты $\omega_c$ до собственной частоты генератора $\omega_0$.

### 3. Большие отклонения фазы и диффузия числа колебаний

Знания полученного ранее стационарного решения уравнения Фоккера—Планка (44) недостаточно для решения некоторых других вопросов, особенно вопросов, затрагивающих быстроту изменения фазы во времени. В настоящем разделе будет дано приближенное решение ряда подобных нестационарных задач, связанных с достижением границ.

Если помехи отсутствуют, то при выполнении условия синхронизации $\Delta < \Delta_c$, фаза принимает стабильное синхронное значение

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{\Delta}{\Delta_c},$$

как это вытекает из (43). Наличие случайных толчков $\xi_2(t)$ приводит к флюктуационным отклонениям от указанной синхронной фазы.

Зададимся вопросом, как часто отклонения фазы $\varphi - \varphi_1 = \delta\varphi$ приобретают значения, превосходящие некоторую фиксированную величину $b$, т. е. как часто график функции $\varphi(t) - \varphi_1 = \delta\varphi(t)$ достигает заданного уровня $b$. В приближении дельта-коррелированных случайных воздействий $\xi_2(t)$ полное число пересечений указанного уровня бесконечно, так как каждое пересечение

сопровождается большим (теоретически бесконечным) числом других пересечений, вызванных флюктуационным «дрожанием» фазы.

Однако если уровень $b$ значительно выше среднеквадратичного отклонения $\sigma(\delta\varphi)$, то указанные пересечения располагаются сериями согласно сказанному в разделе 2, § 10. Совершив ряд пересечений, изображающая точка уходит в область малых отклонений. Она приобретает снова значение $b$ лишь спустя большой отрезок времени и при этом опять дает сразу большую серию пересечений.

Мы займемся подсчетом числа подобных серий, приходящегося на единицу времени и показывающего, как часто происходит выход фазы из области обычных малых отклонений до значений $b$. В сущности, подлежит вычислению среднее время, необходимое для того, чтобы точка, имеющая стандартный малый разброс около синхронного значения, впервые коснулась указанного уровня. В стохастическом приближении подобные задачи на первое достижение границы, как известно, решаются путем присоединения нулевого граничного условия к нестационарному уравнению Фоккера—Планка

Трудность, связанную с отысканием нестационарного решения уравнения (44), нам удастся обойти благодаря использованию условий

$$\langle\delta\varphi^2\rangle \ll \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)^2. \qquad (18.64)$$

Здесь $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ есть (при $\Delta > 0$) половина расстояния между «ямой» $P_1$ (рис. 18.5) и ближайшей вершиной $Q_1$; приведенное неравенство исключает возможность частых срывов синхронизации.

Напомним, что описанное выше разделение пересечений на серии и подсчет числа серий имеет точное содержание лишь при неравенстве $\langle\delta\varphi^2\rangle \ll b^2$, которое совпадает с (64), если $b \sim \frac{\pi}{2} - \varphi_1$.

Условие (64) обеспечивает применимость метода линеаризации для исследования малых отклонений $\delta\varphi$ от синхронного значения Однако мы интересуемся сейчас большими отклонениями, поэтому задача остается существенно нелинейной. Если обратиться к результатам предыдущего раздела, то рассматриваемый случай (64)

можно охарактеризовать выполнением равенства (58). В самом деле, из формул (21), (23), (37) имеем

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{2b'} \frac{K}{A_1^2} = \frac{1}{D_c}. \qquad (18.65)$$

Если, например, $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \sim 1$, то $1 - \frac{\Delta^2}{\Delta_c^2} \sim 1$ и, следовательно, условия (64) приводят к неравенствам

$$D_c \gg 1; \quad \frac{\Delta_c^2}{\Delta^2} - 1 \gg D_c^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\Delta_c}{\Delta}\right)^{\frac{2}{3}},$$

обеспечивающим справедливость (58).

Для вычисления частоты следования серий выбросов применим метод, изложенный в разделе 2, § 10. Последующие рассуждения с несущественными изменениями повторяют рассуждения указанного раздела.

Пусть первое пересечение серии наблюдалось в момент $t$. Спустя отрезок времени $\Delta t$, несколько превосходящий время корреляции для фазы, фаза вернется в область стандартных отклонений, и ее условное распределение примет форму, близкую к стационарному распределению. При достаточно большом превышении уровня $b$ над среднеквадратичным отклонением $\sigma(\delta\varphi)$ среднее расстояние между сериями намного превышает $\Delta t$, поэтому среднее время между первыми пересечениями серий можно вычислять как среднее время от распределения, близкого к стационарному до первого пересечения.

Чтобы его найти, рассмотрим уравнение Фоккера—Планка

$$\dot{w} = -\frac{\partial G}{\partial \varphi}, \qquad (18.66)$$

совпадающее с (44). Но теперь условие нормировки (51) выполняется лишь в начальный момент. Вместо него уравнение (66) решается при граничном условии

$$w(\varphi_r) = 0, \quad (\varphi_r = \varphi_1 + b), \qquad (18.67)$$

в соответствии с которым изображающая точка выбывает из рассмотрения после того, как коснулась уровня $b$, как бы «прилипает» к нему. Число оставшихся в рассмотрении точек

$$W(t) = \int_{\varphi_r - 2\pi}^{\varphi_r} w d\varphi \qquad (18.68)$$

медленно убывает с быстротой, которая находится интегрированием равенства (66):

$$\dot{W}(t) = -G(\varphi_r) + G(\varphi_r - 2\pi). \qquad (18.69)$$

Здесь $G(\varphi_r)$ — число точек, „прилипающих" в единицу времени к уровню $b$. Так как мы не интересуемся частотой отрицательных отклонений, то нужно считать, что при отрицательных отклонениях $\varphi = \varphi_r - 2\pi$ изображающие точки не прилипают, а отражаются, так что $G(\varphi_r - 2\pi) = 0$ и в силу (69)

$$\dot{W} = -G(\varphi_r). \qquad (18.70)$$

Число точек, коснувшихся границы в интервал времени между $t$ и $t + dt$, т. е. продержавшихся время $t$ до соприкосновения, равно $-dW = G(\varphi_r)dt$. Следовательно. среднее время до соприкосновения определяется выражением

$$\langle t \rangle = -\int_0^\infty t\,dW(t) = \int_0^\infty tG(\varphi_r, t)\,dt. \qquad (18.71)$$

Покажем, что убывание числа оставшихся изображающих точек происходит приблизительно по экспоненциальному закону. Вследствие прежнего условия $\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll b^2$ форма распределения почти не меняется с течением времени, уменьшается лишь ее «амплитуда»:

$$w(\varphi, t) = w_1(\varphi)\,v(t), \quad \left(\int w_1 d\varphi = 1\right). \qquad (18.72)$$

Подставляя (72) в (66), находим

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{1}{w_1}\frac{\partial G_1}{\partial \varphi} = -\Lambda$$

$$\left(G_1 = (\Delta - \Delta_c \sin\varphi)\,w_1 - \frac{K}{2A_0^2}\frac{\partial w_1}{\partial \varphi}\right), \qquad (18.73)$$

где $\Lambda$ может быть только постоянной. Отсюда получаем уравнение $\dot{v} + \Lambda v = 0$, решением которого является экспонента, так что

$$w(\varphi, t) = w_1(\varphi)\,e^{-\Lambda t}. \qquad (18.74)$$

Если подставить (74) в (71), то найдем, что постоянная $\Lambda$ обратна среднему времени

$$\Lambda = \langle t \rangle^{-1}, \qquad (18.75)$$

т е. является как раз искомой частотой первых пересечений.

Учитывая (68), (70), вследствие разделения переменных (74), имеем

$$\Lambda = \frac{1}{W} G(\varphi_r) = G_1(\varphi_r). \qquad (18.76)$$

Стоящий здесь поток $G_1(\varphi_r)$ выражается через плотность распределения $w_1(\varphi)$ по формуле (45), (73). Рассмотрим подробнее, что представляет собой указанная плотность распределения, соответствующая режиму «стабильного убывания» числа оставшихся изображающих точек.

Оставшаяся точка в основном пребывает в области значений $\delta\varphi \sim \sigma(\delta\varphi)$, далеких от «захватывающего» уровня $b$. Поэтому ее движение почти не отличается от движения в стационарных условиях. Это значит, что форма кривой $w_1(\varphi)$ при $\delta\varphi \approx \sigma(\delta\varphi)$ очень близка к кривой стационарного распределения (52). Вблизи захватывающей границы плотность $w_1$ существенно отличается от (52): она имеет меньшие значения, но больший градиент, соответствующий увеличенному потоку в сторону захватывающей границы.

Вследствие условия $\sigma(\delta\varphi) \ll b$, лежащего в основе нашего рассмотрения, величина $\Lambda$ невелика; при этом можно считать, что и малые, и большие флюктуации ($\sigma(\delta\varphi) \lesssim \delta\varphi \lesssim b$) описываются прежним уравнением (48)

$$\frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} - \frac{d}{d\varphi}\left[(D - D_c \sin\varphi) w_1\right] = 0. \qquad (18.77)$$

Условие нормировки для него сохраняется, но условие периодичности (50) заменяется на условие «прилипания»

$$w_1(\varphi_r) = 0. \qquad (18.78)$$

Решение уравнения (77) при граничном условии (78) имеет вид

$$w_1(\varphi) = \frac{1}{N_1} \exp(D\varphi + D_c \cos\varphi) \times$$
$$\times \int_{\varphi}^{\varphi_r} \exp(-D\psi - D_c \cos\psi)\, d\psi, \qquad (18.79)$$

получаемый из (49), $\left(C_2 = \varphi_r,\ C_1 = -\frac{1}{N_1}\right)$.

В области значений $\delta\varphi \sim \sigma(\varphi)$, где выражение $D\varphi + D_c \cos\varphi$ имеет максимум, интегралы в (52) и (79) слабо зависят от $\varphi$, ибо в этой области подынтегральные выражения имеют минимум. Поэтому распределения (52) и (79) при $\delta\varphi \sim \sigma(\varphi)$ мало отличаются от выражения

$$w_2 = \frac{1}{N_2} \exp(D\varphi + D_c \cos\varphi) \qquad (18.80)$$

и, следовательно, друг от друга, что уже ожидалось выше. Но в указанной области можно пользоваться разложением

$$D\varphi + D_c \cos\varphi \approx D\varphi_1 + D_c \cos\varphi_1 - \frac{1}{2}\sigma_\varphi^{-2}\delta\varphi^2 \qquad (18.81)$$

$$(\sigma_\varphi^{-2} = D_c \cos\varphi_1 = \sqrt{D_c^2 - D^2}),$$

позволяющим преобразовать (80) к виду

$$w_2 = \frac{1}{N_2} e^{D\varphi_1 + D_c \cos\varphi_1 - \frac{1}{2}\sqrt{D_c^2 - D^2}\,\delta\varphi^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\varphi} e^{-\frac{\delta\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}}. \qquad (18.82)$$

Определяя отсюда $N_2$ и сопоставляя (79) с (80), находим нормировочную постоянную в (79)

$$N_1 = N_2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_\Gamma} e^{-D\psi - D_c \cos\psi} d\psi =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\sigma_\varphi e^{D\varphi_1 + D_c \cos\varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_\Gamma} e^{-D\psi - D_c \cos\psi} d\psi. \qquad (18.83)$$

Чтобы отыскать частоту выбросов (76), остается лишь подставить найденную плотность (79) в выражение (47) для потока $G_1(\varphi_\Gamma)$, после чего будем иметь

$$\Lambda = \frac{K}{2A_0^2 V_1}. \qquad (18.84)$$

Интеграл, входящий в выражение (83), можно вычислить приближенно, используя условие $D_c \gg 1$, вследствие которого подынтегральное выражение за-

метно отлично от нуля лишь в узкой области, примыкающей к $\varphi_r$. Если воспользоваться разложением

$$D\varphi + D_c \cos\varphi \approx D\varphi_r + D_c \cos\varphi_r + (D - D_c \sin\varphi_r)(\varphi - \varphi_r) - \\ - \frac{1}{2} D_c \cos\varphi_r (\varphi - \varphi_r)^2, \qquad (18.85)$$

то из (83), (84) получим

$$\Lambda^{-1} \approx \frac{2A_1^2}{K} \sqrt{2\pi}\, \sigma_\varphi e^{\Delta u} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{0} \exp\left[(D_c \sin\varphi_r - D)\rho - \frac{1}{2} D_c |\cos\varphi_r| \rho^2\right] d\rho, \qquad (18.86)$$

где

$$\Delta u = D\varphi_1 + D_c \cos\varphi_1 - D\varphi_r - D_c \cos\varphi_r$$

является как бы «разностью потенциалов» между точками $\varphi_1$ и $\varphi_r$, взятой в отношении к энергии шума.

Предполагается, что экспонента в последнем интеграле убывает настолько быстро, что принимает исчезающие значения при $\varphi \approx \varphi_1$ (на этом основании нижний предел интегрирования распространен до $-\infty$). Такое быстрое убывание, действительно, имеет место при выполнении условия (64) и при $\sigma_\varphi \ll b$.

Выражение (86) записывается через интеграл вероятности ошибок

$$\Lambda^{-1} = \frac{\pi}{\Delta_c} (\cos\varphi_1 |\cos\varphi_r|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\Delta u + \frac{D_c (\sin\varphi_r - \alpha)^2}{2|\cos\varphi_r|}\right] \times \\ \times \operatorname{erfc}\left[(\sin\varphi_r - \alpha)\left(\frac{D_c}{2|\cos\varphi_r|}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \qquad (18.87)$$

$$\left(\operatorname{erfc} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz, \ \alpha = \frac{D}{D_c}\right).$$

Наименее доступным значением фазы является значение

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \pi - \arcsin\frac{D}{D_c}, \qquad (18.88)$$

которому соответствует „вершина“ $Q_1$ потенциальной функции $-D_\varphi - D_c \cos\varphi$ (рис. 18.5), и, следовательно, максимальная разность потенциалов

$$\Delta u = 2D_c \cos\varphi_1 - D(\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= 2\sqrt{D_c^2 - D^2} - 2D \arccos\frac{D}{D_c}. \qquad (18.89)$$

Кривизна потенциальной функции здесь такая же, что и в самом „низком“ месте $P_1$, где $\varphi = \varphi_1$, но имеет противоположный знак ($D_c \cos\varphi_2 = -\sigma_\varphi^{-2}$). Полагая в (87) $\varphi_r = \varphi_2$, получаем, что фаза, обычно находящаяся вблизи $\varphi_1$, увеличивается и доходит до „вершины“ $Q_1$ с частотой

$$\Lambda = \frac{\Delta_c}{\pi}\cos\varphi_1 e^{-\Delta u} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} \times$$

$$\times \exp\left[-2\left(\sqrt{D_c^2 - D^2} - D\arccos\frac{D}{D_c}\right)\right]. \qquad (18.90)$$

Но если изображающая точка попала на вершину, то она может скатиться с нее как в одну, так и в другую сторону и притом с равной вероятностью. В половине всех случаев точка возвращается назад, в другой половине она скатывается вперед, преодолев, таким образом, вершину. В итоге она попадает в новую, более низко расположенную «яму» $P_2$, и фаза получит приращение $2\pi$. Описанные перескоки фазы вперед происходят с частотой, в два раза меньшей, чем (90):

$$G_+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} \times$$

$$\times \exp\left[-2\left(\sqrt{D_c^2 - D^2} - D\arccos\frac{D}{D_c}\right)\right]. \qquad (18.91)$$

Помимо перескоков «вперед», происходят также перескоки фазы «назад», которые приводят к уменьшению фазы на $2\pi$. Чтобы подсчитать частоту перескоков фазы назад $G_-$, нужно выбирать значение $\varphi_r$, соответствующее ближайшей вершине, лежащей по другую сторону от $\varphi_1$. На этот раз «разность потенциалов» будет

иметь другое значение, и мы аналогично (91) получим

$$G_- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2} \times$$

$$\times \exp\left\{-2\left[\sqrt{D_c^2 - D^2} + D\left(\pi - \arccos\frac{D}{D_c}\right)\right]\right\} =$$

$$= e^{-2\pi D} G_+. \qquad (18.92)$$

В выражениях (91), (92) определяющим множителем является экспонента $e^{-\Delta u}$, имеющая аналогию с распределением Больцмана. Вполне понятен смысл этого выражения, показывающего, что чем больше высота барьера, тем труднее его преодолеть. Какая из вершин, расположенных по обе стороны от $\varphi_1$, выше, определяется законом расстройки $\Delta$. Если $\Delta > 0$, то имеет место «уклон», изображенный на рис. 18.5, приводящий к тому, что скачки «вперед» происходят чаще, чем «назад» ($G_+ > G_-$). При отрицательной расстройке имеется уклон в другую сторону и скачки «назад» являются превалирующими.

Разность выражений (91), (92) образует средний некомпенсируемый поток, приводящий к сдвигу средней частоты автоколебаний в сторону собственной частоты генератора:

$$\langle\omega\rangle - \omega_c = 2\pi(G_+ - G_-) = \sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2}\,(1 - e^{-2\pi D}) \times$$

$$\times \exp\left[-2\left(\sqrt{D_c^2 - D^2} - D\arccos\frac{D}{D_c}\right)\right]. \qquad (18.93)$$

Из последней формулы как частный случай следует (56) при $D \ll D_c$, а также (58) при $D \gg 1$.

Выражение (55), которое, как мы теперь выяснили, равно $2\pi(G_+ - G_-) = 2\pi G_+ (1 - e^{-2\pi D})$, имеет вид разности двух членов, отличающихся друг от друга в $e^{-2\pi D}$ раз [как и в (91), (92)]. Естественно предположить, что уменьшаемые и вычитаемые равны почленно. Это дает результат

$$G_+ = \frac{K}{2A_0^2}\frac{1}{N} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{K}{2A_0^2}\,e^{\pi D}\,|I_{iD}(D_c)|^{-2};$$

$$G_- = e^{-2\pi D} G_+ = \frac{1}{4\pi^2}\frac{K}{2A_0^2}\,e^{-\pi D}\,|I_{iD}(D_c)|^{-2}, \qquad (18.94)$$

обобщающий формулы (91), (92).

Согласно изложенному выше, фаза время от времени совершает скачки на период в ту или в другую сторону. Длительность каждого скачка по порядку величины равна $\frac{1}{\Delta_c}\ln\frac{1}{\sigma_\rho^2}\sim\frac{1}{\Delta_c}\ln D_c$, а средний интервал между ними значительно больше (порядка $\frac{1}{\Delta_c}e^{\Delta u}\sim\frac{1}{\Delta_c}e^{D_c}$). Поэтому скачки можно считать статистически независимыми. Если мы будем подсчитывать число $n$ лишних или недостающих периодов колебаний генератора по сравнению с синхронизирующими колебаниями, то будем наблюдать картину, напоминающую случайные блуждания: в случайные моменты времени происходят скачкообразные изменения указанного числа на $+1$ или $-1$ в зависимости от случая.

Как известно, спустя отрезок времени $t$, значительно превосходящий средний интервал между скачками, произойдет нормализация. Случайная величина $n$ при этом будет асимптотически описываться нормальным законом распределения со средним значением

$$\langle n\rangle=\frac{\langle\omega\rangle-\omega_c}{2\pi}t=(G_+-G_-)t \qquad (18.95)$$

и дисперсией

$$Dn=(G_++G_-)t\equiv D_0t. \qquad (18.96)$$

В самом деле, число положительных скачков имеет среднее значение $G_+t$ и дисперсию $G_+t$, число отрицательных скачков — среднее значение — $G_-t$ и дисперсию $G_-t$. Вследствие независимости положительных и отрицательных скачков средние значения и дисперсии алгебраически складываются.

Чтобы получить полное число колебаний за время $t$, нужно к $n$ прибавить неслучайное число периодов $\frac{\omega_c t}{2\pi}$.

Итак, число колебаний генератора диффузионным образом расплывается, причем коэффициент диффузии равен

$$D_0=G_++G_-=\frac{1}{2\pi^2}\frac{K}{2A_0^2}\operatorname{ch}\pi D\,|I_{iD}(D_c)|^{-2}. \qquad (18.97)$$

То же самое можно сказать и о фазе, пропорциональной числу $n$. Ее коэффициент диффузии больше в $(2\pi)^2$ раз.

Из формул (91), (94), (93) следует, что коэффициент диффузии (97) можно получить умножением

сдвига частоты $\frac{\langle\omega\rangle - \omega_c}{2\pi}$ на $\operatorname{cth}\pi D$; при $D \gg 1$ он попросту равен $\frac{\langle\omega\rangle - \omega_c}{2\pi}$. Таким образом, для его исследования можно применить формулы и графики предыдущего раздела.

Диффузия числа колебаний естественно возрастает при увеличении интенсивности шума. Так, при нулевой расстройке $\Delta = 0$ из (97) получаем зависимость

$$D_0' = \frac{1}{4\pi^2}\frac{K}{A_0^2 v^2(D_c)} = \frac{\Delta_c}{2\pi^2}\frac{1}{D_c v^2(D_c)}, \qquad (18.98)$$

представленную на рис 18.9.

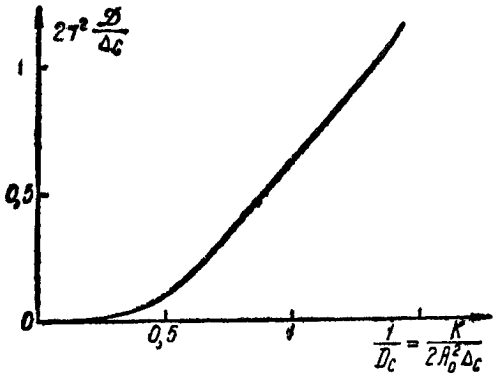



Рис. 18.9. Зависимость коэффициента диффузии от интенсивности шума при нулевой расстройке.

В тех случаях, когда справедливы соотношения (91), (92), в результате их сложения имеем

$$D_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2}\,(1 + e^{2\pi D}) \times$$

$$\times \exp\left\{-2\left(\sqrt{D_c^2 - D^2} - D\arccos\frac{D}{D_c}\right)\right\}. \qquad (18.99)$$

С увеличением расстройки интенсивность диффузии монотонно и довольно быстро возрастает. Это возрастание можно наблюдать на рис. 18.7, откладывая по оси ординат

$$z = \frac{1}{2D_c}\ln\frac{2\pi D_0}{\sqrt{\Delta_c^2 - \Delta^2}}. \qquad (18.100)$$

В заключение настоящего раздела опишем качественно спектральный аспект диффузии числа периодов.

Она приводит к появлению в спектре генерируемых колебаний непрерывного спектра, имеющего ширину порядка $\Delta_c$ и несимметрично сдвинутого на величину примерно $\Delta$. Интегральная мощность этого добавочного спектра имеет порядок $\Delta_c e^{-\Delta/\Delta_c}$. В сочетании с дискретной линией единичной мощности он, естественно, дает сдвиг средней частоты на $\sim\Delta e^{-\Delta/\Delta_c}$.

## 4. Случай большого синхронизирующего воздействия

В двух предыдущих разделах рассмотрение было ограничено условием (37) малой амплитуды $E$ внешнего синхронизирующего воздействия. Между тем, практически иногда увеличивают синхронизирующую амплитуду, чтобы добиться более быстрого установления синхронного режима. Поэтому представляет интерес задача изучения синхронизации при внешних амплитудах $E$, сравнимых с $\varepsilon A_0$.

Относящиеся к этому случаю малые отклонения от синхронного режима были рассмотрены в приближении линеаризации ранее в разд. 1. Нелинейная задача, однако, оказывается весьма сложной; поэтому, чтобы ее разрешить, мы введем упрощение по другой линии, а именно, ограничимся случаем нулевой расстройки ($\Delta=0$). Последний случай имеет наибольший практический интерес по сравнению с другими значениями расстройки, так как соответствует максимально стабильному синхронному режиму и является поэтому оптимальным.

Теперь целесообразно основывать рассмотрение не на уравнениях (9), а на эквивалентных им уравнениях, которые нетрудно вывести следующим образом. Перейдем от полярных координат $A$ и $\varphi$ к декартовым координатам

$$z_1 = A\cos\varphi;\ z_2 = A\sin\varphi \qquad (18.101)$$

в фазовой плоскости, вращающейся с угловой скоростью $\omega_c$. Дифференцируя (101) по времени и используя уравнения (7), получаем

$$\dot z_1 = \dot A\cos\varphi - A\sin\varphi\dot\varphi = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{z_1^2+z_2^2}{A_0^2}\right)z_1 + \frac{\omega_c E}{2} - \Delta z_2 + \omega_c\eta\sin\omega_c t; \qquad (18.102)$$

$$\dot z_2 = \dot A\sin\varphi + A\cos\varphi\dot\varphi = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1 - \frac{z_1^2+z_2^2}{A_0^2}\right)z_2 + \Delta z_1 + \omega_c\eta\cos\omega_c t.$$

Упростить входящие сюда флюктуационные члены $\omega_c\eta\sin\omega_c t$, $\omega_c\eta\cos\omega_c t$ значительно легче, чем флюктуационные члены в (7), ибо аргумент тригонометрических функций теперь не зависит от $\varphi$ и, следовательно, от $\eta$. Если время корреляции процесса $\eta(t)$ значительно меньше времен релаксации амплитуды и фазы, то корреляционную функцию

$$\langle\omega_c\eta\sin\omega_c t\cdot\omega_c\eta\sin\omega_c(t+\tau)\rangle=$$
$$=\frac{\omega_c^2}{2}\langle\eta_t\eta_{t+\tau}\rangle[\cos\omega_c\tau-\cos\omega_c(2t+\tau)]$$

можно заменить на

$$\delta(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_c^2}{2}\langle\eta_t\eta_{t+\tau}\rangle\cos\omega_c\tau\,d\tau=K\delta(\tau)$$

и аналогично для второго члена $\omega_c\eta\cos\omega_c t$.

В итоге мы будем иметь систему

$$\dot z_1=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1-\frac{z_1^2+z_2^2}{A_0^2}\right)z_1+\frac{\omega_c E}{2}-\Delta z_2+\xi_1;$$
$$\dot z_2=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(1-\frac{z_1^2+z_2^2}{A_0^2}\right)z_2+\Delta z_1+\xi_2, \qquad (18.103)$$

где $\xi_1$, $\xi_2$ – одинаковые независимые случайные функции, имеющие свойства (10), т. е. точно такие же, как функции $\xi_1$, $\xi_2$ в (9).

Эквивалентность систем (9) и (103) можно доказать многими другими способами.

При $\Delta=0$ система уравнений (103) описывает движение броуновской частицы в потенциальном поле сил. В самом деле, в этом случае уравнения (103) можно записать в виде

$$\dot z_1=-\frac{\partial U}{\partial z_1}+\xi_1;\quad \dot z_2=-\frac{\partial U}{\partial z_2}+\xi_2, \qquad (18.104)$$

где

$$U=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\left(\frac{z_1^2+z_2^2}{2A_0^2}-1\right)\frac{z_1^2+z_2^2}{2}-\frac{\omega_c E}{2}z_1 \qquad (18.105)$$

– потенциальная функция, изображенная на рис. 18.10.

Системе (104) соответствует уравнение Фоккера–Планка

$$\dot w=\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial U}{\partial z_1}w\right)+\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_2}w\right)+\frac{K}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2}\right). \qquad (18.106)$$

Стационарное распределение удовлетворяет вытекающему отсюда уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z_2^2}+\frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial U}{\partial z_1}w\right)+\frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_2}w\right)=0. \quad (18.107)$$

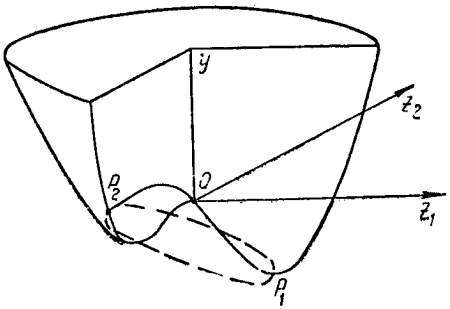



Рис. 18.10. Форма потенциальной поверхности $y=U(z_1, z_2)$ в виде чаши, имеющей наклонный желоб в нижней части.

При обычных условиях исчезновения плотности $w$ на бесконечности легко находим решение последнего уравнения

$$w(z_1, z_2)=\frac{1}{N}e^{-\frac{2U}{K}}, \quad (18.108)$$

которое, как и в одномерном случае, имеет вид распределения Больцмана.

Найденное стационарное распределение легко записать как распределение по амплитуде и фазе. Учитывая, что $dz_1dz_2=AdAd\varphi$, находим из (108), (105) совместную плотность распределения для амплитуды и фазы

$$w(A, \varphi)=\frac{A}{N}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\varepsilon\omega_0}{K}\left(\frac{A^2}{2A_0^2}-1\right)\frac{A^2}{2}+\frac{\omega_c E}{K}A\cos\varphi\right\}. \quad (18.109)$$

Плотность распределения только по амплитуде и только по фазе находится отсюда интегрированием по второй переменной. Так, интегрируя (109) по фазе и пользуясь интегральным представлением функций Бес-

селя, получаем стационарное распределение амплитуды

$$w(A)=\frac{2\pi}{N}A\exp\left\{-\frac{\varepsilon\omega_0}{2K}\left(\frac{A^2}{2A_0^2}-1\right)A^2\right\}I_0\left(\frac{\omega_0 E}{K}A\right).$$

Наибольший практический интерес представляют те случаи, когда шумы не настолько велики, чтобы исчезло всякое подобие синхронизации. Генератор должен работать в основном в условиях, близких к режиму синхронизации, испытывающему, правда, некоторые флюктуационные нарушения. Такое не слишком большое отличие от синхронного режима имеет место при выполнении неравенства

$$\frac{K}{\varepsilon\omega_0 A_0^2}\ll 1, \tag{18.110}$$

которое будет лежать в основе нашего дальнейшего рассмотрения. Тогда основная доля вероятности (108) будет концентрироваться вблизи синхронных значений $z_1=A_0a_1$; $z_2=0$.

Среднеквадратичные отклонения $\sigma(z_1)$, $\sigma(z_2)$ будут невелики, и их можно рассматривать методом линеаризации, приводящим к результату (22). В указанных условиях можно воспользоваться разложением

$$U(z_1,\ z_2)\approx U_1+\frac{1}{2}\delta(z_1-A_0a_1)^2+\frac{1}{2}\delta' z_2^2,$$
$$\left(\delta=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}(3a_1^2-1);\quad \delta'=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}(a_1^2-1)\right), \tag{18.111}$$

приводящим при обычных малых отклонениях к нормальному закону распределения (108):

$$w(z_1, z_2)=\frac{1}{N}e^{-2\frac{U_1}{K}}\exp\left\{-\frac{\delta}{K}(z_1-A_0a_1)^2-\frac{\delta'}{K}z_2^2\right\}.$$

Из условия нормировки в этом случае легко получаем

$$\frac{1}{N}e^{-2\frac{U_1}{K}}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\delta}{K}\frac{\delta'}{K}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi K}\sqrt{\delta\delta'}. \tag{18.112}$$

Рассмотрим, как и ранее, нелинейную задачу определения частоты срывов синхронизации, которые приводят к потере периода или, наоборот, к появлению дополнительного периода. При этом мы интересуемся теми случаями, когда это происходит довольно редко, т. е.

выполняется условие удовлетворительной синхронизации (110), которое приводит к неравенствам $\langle \delta A^2 \rangle \ll A_0^2$, $\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll 1$.

Потенциальная поверхность $y = U(z_1, z_2)$ (105) (рис. 18.10) образует (при не слишком больших $\Delta_c$) в плоскости $z_1$, $z_2$ желоб, который замкнут петлей вокруг начала координат и имеет наклон в сторону оси $z_1$. Точка с синхронными значениями амплитуды и фазы $z_1 = A_0 a_1$; $z_2 = 0$ расположена в самой нижней точке этого желоба. Скачок фазы осуществится, если изображающая точка под действием флюктуационных толчков начнет двигаться вдоль по желобу вверх и зайдет так далеко, что преодолеет самую верхнюю точку дна желоба $P_2$ и сползет в исходную «яму» с противоположной стороны. Самая высокая точка желоба $P_2$ с координатами $z_1 = -A_0 a_2$; $z_2 = 0$ расположена на оси $z_1$ по другую сторону от начала координат, чем самая низкая точка $P_1$, имеющая координаты $z_1 = A_0 a_1$; $z_2 = 0$.

Естественно ожидать, что частота скачков фазы будет зависеть от разности высот между точками $P_1$ и $P_2$. Чтобы определить ее, найдем координаты указанных точек. Обе точки являются экстремальными для выражения (105) при $z_2 = 0$; дифференцируя его, находим уравнение

$$a^3 - a - \frac{\Delta_c}{\varepsilon\omega_0} = 0; \qquad \left(a = \frac{z_1}{A_0}, \quad \Delta_c = \frac{\omega_c E}{2A_0}\right), \tag{18.113}$$

корни которого $a_1$ и $a_2$ определяют положение точек $P_1$, $P_2$. Если обозначить $a = -(3p)^{-\frac{1}{2}} y$, то кубическое уравнение (113) приведется к обычному виду

$$y^3 - 3py + 2 = 0, \quad \left(3p = \left(\frac{\varepsilon\omega_0}{\Delta_c}\right)^{\frac{2}{3}}\right).$$

Корни этого уравнения, пронумерованные в порядке: $y_1 > y_2 > 0 > y_3$ табулированы как функция от $3p$, например, в таблицах [I]. Вследствие сказанного, при каждом конкретном значении величины $\varepsilon\omega_c\,\Delta_c$ мы можем найти амплитуды

$$A_1 = A_0 a_1; \quad a_1 = -\frac{y_3}{\sqrt{3p}} = |y_3| \sqrt[3]{\frac{\Delta_c}{\varepsilon\omega_0}}; \qquad A_2 = A_0 a_2; \quad a_2 = \frac{y_1}{\sqrt{3p}} = y_1 \sqrt[3]{\frac{\Delta_c}{\varepsilon\omega_0}}, \tag{18.114}$$

соответствующие точкам $P_1$, $P_2$, а также значение потенциала (105) в указанных точках

$$U_1 = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} A_0^2 \left[\frac{a_1^4}{4} - \frac{a_1^2}{2} - \frac{2\Delta_c}{\varepsilon\omega_0} a_1\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega_0 A_0^2}{2(3p)^2}\left[\left(\frac{y_2^2}{2}\right)^2 - 3p\frac{y_2^2}{2} + 2y_3\right] < 0; \quad (18.115)$$

$$U_2 = \frac{\varepsilon\omega_0}{2} A_0^2 \left[\frac{a_2^4}{4} - \frac{a_2^2}{2} + \frac{2\Delta_c}{\varepsilon\omega_0} a_2\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega_0 A_0^2}{2(3p)^2}\left[\left(\frac{y_2^2}{2}\right)^2 - 3p\frac{y_2^2}{2} + 2y_1\right].$$

Подсчет числа срывов синхронизации по существу означает подсчет числа пересечений изображающей точкой луча $z_1 < 0$ $(z_2 = 0)$. Вычислим, как часто изображающая точка касается указанной полупрямой. Искомая частота выражается формулой (76) Теперь $\Lambda = G_1(\text{гран.})$ есть поток вероятности, подходящий к полупрямой $z_1 < 0$. Поскольку теперь мы рассматриваем двумерный случай, то плотность потока, соответствующая уравнению (106), есть вектор с компонентами

$$-\frac{\partial U}{\partial z_1} w - \frac{K}{2}\frac{\partial w}{\partial z_1} \text{ и } -\frac{\partial U}{\partial z_2} w - \frac{K}{2}\frac{\partial w}{\partial z_2}.$$

Следовательно, поток изображающих точек, «прилипающих» к полупрямой $z_1 < 0$ $(z_2 = 0)$ с одной стороны (сверху), есть

$$G_1(\text{гран.}) = \frac{K}{2}\int_{-\infty}^{0}\left.\frac{\partial w_1}{\partial z_2}\right|_{z_2=0} dz_1, \text{ (так как } w_1(\text{гран.}) = 0). \quad (18.116)$$

По аналогии с предыдущим разделом входящая сюда плотность вероятности $w_1$ мало отличается от стационарного распределения (108) в местах скопления основной массы вероятности. Вблизи «захватывающей» полупрямой ее поведение существенно другое и характеризуется нулевым граничным условием

$$w_1 = 0 \text{ при } z_1 < 0; \quad z_2 = 0. \quad (18.117)$$

В областях, заключенных между захватывающей границей и местом максимума вероятности, плотность распределения $w_1(z_1, z_2)$ удовлетворяет тому же самому

уравнению (107). Чтобы найти поток (116), требуется найти хотя бы приближенное решение последнего уравнения с граничным условием (117).

Запишем искомое решение в форме

$$w_1(z_1, z_2) = v(z_1)\, w_2(z_1, z_2), \tag{18.118}$$

где

$$v(z_1) = \exp\left\{-\frac{2}{K} U(z_1, 0)\right\} \tag{18.119}$$

является функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} + \frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial U(z_1, 0)}{\partial z_1} v\right) = 0.$$

Подставляя (118) в (107), находим следующее точное уравнение для функции $w_2(z_1, z_2)$:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} + \frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_2} w_2\right) =$$

$$= -\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_1^2} - \left(\frac{2}{v}\frac{\partial v}{\partial z_1} + \frac{2}{K}\frac{\partial U}{\partial z_1}\right)\frac{\partial w_2}{\partial z_1} - \frac{w_2}{v}\frac{2}{K}\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\left[U(z_1, z_2) - U(z_1, 0)\right] v\right). \tag{18.120}$$

Выражение, стоящее в правой части вблизи границы, приобретает малые значения В самом деле вследствие (117)

$$w_2(z_1, 0) = 0 \text{ при } z_1 < 0; \tag{18.121}$$

и поэтому

$$w_2(z_1, z_2) = \beta(z_1) z_2 + z_2^2 \ldots \quad (z_1 < 0) \tag{18.122}$$

($\beta(z_1)$ — некоторая функция) Подставляя (122) в правую часть (120), получаем

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} + \frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial U}{\partial z_2} w_2\right) = -B(z_1) z_2 + z_2^2 \ldots, \tag{18.123}$$

где вследствие (120), (119), (122)

$$B(z_1) = \frac{d^2\beta(z_1)}{dz_1^2} + \frac{2}{K}\frac{\partial U(z_1, 0)}{\partial z_1}\frac{d\beta(z_1)}{dz_1}. \tag{18.124}$$

Интегрируя уравнение (123), находим

$$\frac{\partial w_2}{\partial z_2} + \frac{2}{K}\frac{\partial U}{\partial z_2} w_2 = \beta(z_1) - B(z_1)\frac{z_2^2}{2} + \ldots \tag{18.125}$$

Постоянной интегрирования мы придали значение $\beta(z_1)$ в результате сопоставления полученного равенства с (122). Интегри-

руя далее (125) как линейное дифференциальное уравнение первого порядка с граничным условием (121), приходим к результату

$$w_2(z_1, z_2) = e^{-2\frac{U}{K}} \int_0^{z_2} e^{2\frac{U}{K}} \left[\beta_2(z_1) - B(z_1)\frac{z_2^2}{2} + \ldots\right] dz_2. \quad (18.126)$$

Входящий сюда интеграл возьмем, используя соотношение

$$U(z_1, z_2) = U(z_1, 0) - \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\left(1 - \frac{2z_1^2 + z_2^2}{2A_0^2}\right) z_2^2 =$$

$$= U(z_1, 0) - \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\left(1 - \frac{z_1^2}{A_0^2}\right) z_2^2 + z_2^4 \ldots, \quad (18.127)$$

вытекающее из вида потенциальной функции (105). Если обозначить

$$\alpha^2(z_1) = \frac{\varepsilon\omega_0}{K}\left(1 - \frac{z_1^2}{A_0^2}\right), \ (z_1^2 < A_0^2), \quad (18.128)$$

то в силу (126) будем иметь

$$w_2(z_1, z_2) = \exp\left\{-\frac{2}{K}U(z_1, z_2) + \frac{2}{K}U(z_1, 0)\right\} \int_0^{z_2} e^{-\frac{\alpha^2 z_2^2}{2}} \times$$

$$\times \left(\beta - \frac{1}{2}Bz_2^2 + \ldots\right) dz_2 \approx \exp\left\{-\frac{2}{K}[U(z_1, z_2) - U(z_1, 0)]\right\} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{B}{2\alpha^3} + \ldots\right) \text{ при } \alpha z_2 \gg 1.$$

Тем самым искомая плотность распределения (118) выражена через функцию $\beta(z_1)$, описывающую градиент вероятности вблизи границы

$$w_1(z_1, z_2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\beta(z_1)}{\alpha(z_1)} - \frac{B(z_1)}{2\alpha^3(z_1)} + \ldots\right) e^{-\frac{2U}{K}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta(z_1)}{\alpha(z_1)} e^{-\frac{2U}{K}} \quad (18.129)$$

согласно (118), (119), (128).

Все члены, кроме первого $\beta/\alpha$, здесь можно не учитывать, если выполняется неравенство

$$\alpha^2(z_1) A_0^2 \gg 1, \text{ т. е. } 1 - \frac{z_1^2}{A_0^2} \gg \frac{K}{\varepsilon\omega_0 A_0^2}. \quad (18.130)$$

В самом деле, при этом условии уже второй член будет значительно меньше первого: $\frac{B}{\alpha^3} \ll \frac{\beta}{\alpha}$, поскольку $B \sim \frac{\beta}{A_0^2}$, как это видно из (124).

Остается лишь определить функцию $\beta(z_1)$, которая является как раз самой важной, поскольку искомая частота (76) вследствие (116), (118), (122) выражается именно через нее:

$$\Lambda = \frac{K}{2} \int_{-\infty}^{0} v(z_1)\,\beta(z_1)\,dz_1. \tag{18.131}$$

Чтобы отыскать $\beta(z_1)$, используем отмеченное ранее условие близости плотности распределения (118) к стационарному распределению (108) в местах наиболее вероятных значений. Сопоставление формул (108) и (129) (где учитывается лишь первый член) непосредственно дает

$$\beta(z_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a(z_1)}{N}. \tag{18.132}$$

Согласно (131), (128) получаем, следовательно, формулу для частоты достижения границы

$$\Lambda = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\varepsilon\omega_0 K}{2\pi}} \int_{z_1<0} \exp\left[-\frac{2}{K}U(z_1, 0)\right]\sqrt{1-\frac{z_1^2}{A_0^2}}\,dz_1. \tag{18.133}$$

Интегрирование здесь следует проводить лишь по тому отрезку полупрямой $z_1<0$, где выполняется условие (130). Этого вследствие (110) вполне достаточно для определения $\Lambda$, если только $\Delta_c/\varepsilon\omega_0$ не слишком мало. В самом деле, в нашем случае функция $U(z_1, 0)/K$ очень быстро меняется, и в интеграле (133) область значений $z \approx -A_0$ не является важной. Более того, существенный вклад в интеграл дают лишь узкие участки, примыкающие к точкам, где потенциал $U(z_1, 0)$ имеет минимальные значения. Если принять во внимание вид потенциальной функции, изображенный на рис. 18.10, то легко придти к заключению, что такими точками могут быть лишь две точки, а именно экстремальная точка $P_2$, если она имеется, или начало координат.

Точка $P_2$ характеризуется координатой $z_1 = -A_0 a_1$ [см. (114)] и потенциалом (115). Вблизи этой точки ход потенциальной функции приближенно можно представить

$$U(z_1, z_2) \approx U_2 + \frac{1}{2}\delta_2(z_1 + A_0 a_2)^2 - \frac{1}{2}\delta_2' z_2^2, \tag{18.134}$$

где

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}(3a_2^2 - 1); \quad \delta_2' = \frac{\varepsilon\omega_0}{2}(1 - a_2^2) > 0. \tag{18.135}$$

— величины, играющие для точки $P_2$ такую же роль, что и «жесткости» (15) для точки $P_1$ [ср. (111)].

Подставляя (134) в (133) и производя интегрирование в бесконечных пределах, что возможно в силу условия (110), получаем

$$\Lambda = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\varepsilon\omega_0 K}{2\pi}}\sqrt{\pi\frac{K}{\delta_2}}\sqrt{1-a_2^2}\,e^{-\frac{2U_2}{K}} = \frac{K}{N}\sqrt{\frac{\delta_2'}{\delta_2}}\,e^{-\frac{2U_2}{K}}. \qquad (18.136)$$

Если использовать выражение (112) для $N$, то будем иметь

$$\Lambda = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\delta}{\delta_2}\,\delta'\delta_2'\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{K}(U_2-U_1)},$$

где

$$\frac{\delta}{\delta_2}\,\delta'\delta_2' = \left(\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\right)^2 \frac{3a_1^2-1}{3a_2^2-1}(a_1^2-1)(1-a_2^2). \qquad (18.137)$$

С увеличением амплитуды внешнего воздействия $E/2\varepsilon A_0$, т. е. с уменьшением $3p$, точка $P_2$ (рис. 18.10) поднимается все выше. Если внешняя амплитуда не слишком велика, так что точка перевала $P_2$ лежит ниже точки $O$ (т. е. если $U_2<0$), то подавляющее большинство срывов синхронизации происходит по дну желоба, через точку $P_2$, что и учитывается формулой (137). Однако при значениях

$$3p = 3{,}8, \text{ т. е. } \frac{E}{2\varepsilon A_0} = \frac{\Delta_c}{\varepsilon\omega_0} = 0{,}135, \qquad (18.138)$$

точка $P_2$ имеет тот же уровень, что и точка $O$, т. е. $U_2=0$. В этом случае следует учитывать возможность пересечь полупрямую $z_1 < 0$, $(z_2 = 0)$ вблизи начала координат. Если раньше в подавляющем большинстве случаев антисинхронная фаза $\varphi=\pi$ достигалась при амплитуде $A_0 a_2$, то теперь эти случаи становятся такими же редкими, как и те случаи, когда антисинхронная фаза достигается с очень малой амплитудой. При $3p<3{,}8$ подавляющее большинство срывов синхронизации осуществляется именно через малые амплитуды. Подобные срывы фазы выглядят так: амплитуда колебаний флюктуационным образом уменьшается почти до нуля и спустя некоторое время возрастает, приобретая прежнее

значение. Если проанализировать кривую колебаний за тот отрезок времени, когда амплитуда была мала, то окажется, что в некоторых случаях имеется лишний или недостающий период. Однако вследствие малых амплитуд в момент срыва синхронизации эта аномалия мало заметна, и поэтому такие срывы представляют меньший интерес. Для полноты изложения, однако, приведем формулу для частоты таких срывов

$$\Lambda = \pi^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\delta\delta'} \left(\frac{\varepsilon K}{2\omega_0 E^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{2\frac{U_1}{K}}. \qquad (18.139)$$

Она получена путем подстановки $U(z_1\ 0) = -\frac{1}{2}\omega_0 E z_1$ в интервал (133).

При $3<3p<3{,}8$ возможны срывы синхронизации обоих видов как через амплитуды $A_0 a_2$, так и через малые амплитуды, причем преобладают последние. При еще больших синхронизирующих амплитудах ($3p<3$) вообще не существует каких-либо преимущественных амплитуд в момент, когда колебания имеют антисинхронную фазу; чем меньше такая амплитуда, тем больше ее вероятность. Этому соответствует то, что уравнение (113) имеет лишь один вещественный корень. Последняя из преимущественных амплитуд антисинхронной фазы имеется при $3p \approx 3$ и равна $A_2 = A_0/\sqrt{3} = A_1/2$, однако практически она уже потеряна в общей массе срывов, осуществляющихся с другими амплитудами.

Возвратимся к случаю, когда $3p$ имеет не слишком малые значения и когда антисинхронная фаза, как правило, достигается при амплитуде $A_2 = A_0 a_2 (A_0 > A_2 > A_0/\sqrt{3};\ A_1 > A_2 > A_1/2)$. Если фаза $\varphi = \pi$ достигнута, то в дальнейшем в половине случаев фаза вернется к синхронному значению попятным движением, а в другой половине случаев — сползет с седловой точки в другую сторону и в итоге, описав петлю вокруг начала координат, получит приращение $2\pi$. Поэтому частота скачков фазы на $2\pi$ равна $\Lambda/2$. Аналогично этому частота скачков на $-2\pi$ равна той же величине. Общая частота скачков, следовательно, есть $\Lambda$. Если, как и в предыдущем разделе, перейти к коэффициенту диффузии для числа периодов, то будем иметь

$$D_0 = \Lambda = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\delta'\delta_2'\delta}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{K}(U_2 - U_1)}. \qquad (18.140)$$

Эта формула является обобщением на случай больших амплитуд синхронизирующего воздействия полученного ранее соотношения (99), взятого при $\Delta=0$.

С появлением отличной от нуля расстройки число срывов синхронизации быстро возрастает. Закончим настоящий раздел кратким приближенным рассмотрением случая больших расстроек $\Delta \sim \Delta_c$. Точки $P_1$, $P_2$ теперь не будут лежать на оси $z_1$. Их положение определяется путем приравнивания нулю выражений (103) в предположении $\xi_1=\xi_2=0$. В разделе 1 были выведены уравнения (11), (12), служащие для определения полярных координат $r=A_0a_1$; $\varphi=\varphi_1$ точки $P_1$. Координаты второй точки $a_2$, $\varphi_2$ определяются из таких же самых уравнений. Когда уравнение (12) имеет единственный корень, точка $P_2$ не существует.

В разделе 1 рассматривались радиальный и азимутальный коэффициенты жесткости (15) в точке $P_1$:

$$\delta=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}(3a_1^2-1);\ \delta'=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}(a_1^2-1)\ .$$

Если вторая точка существует, то соответствующие радиальный и азимутальный коэффициенты для нее определяются аналогичными же выражениями

$$\delta_2=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}(3a_2^2-1);\quad \delta_2'=\frac{\varepsilon\omega_0}{2}(1-a_2^2),$$

совпадающими с (135).

При приближенном обобщении формулы (140) на случай ненулевых расстроек следует сначала найти новые значения $a_1$, $a_2$ и подставить в последние выражения. Разность уровней $U_2-U_1$ в (140) следует заменить на контурный интеграл от выражений, стоящих в правых частях (103), который равен

$$U(a_2,\varphi_2)-U(a_1,\varphi_1)+\Delta\int_{P_1}^{P_2}(z_2dz_1-z_1dz_2),\quad (18.141)$$

где

$$U(a,\varphi)=\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0A_0^2\left(\frac{a^2}{2}-1\right)a^2-\frac{\omega_cE}{2}A_0a\cos\varphi.$$

Точное решение задачи при ненулевых расстройках весьма затруднительно, что связано с непотенциальным характером поля скоростей $\langle\dot{z}_1\rangle$, $\langle\dot{z}_2\rangle$. Минуя трудности, мы приведем лишь весьма приближенную оценку,

достаточную для практических целей. Хотя контурный интеграл зависит от пути интегрирования, положим

$$\int_{P_1}^{P_2} (z_2 dz_1 - z_1 dz_2) \approx -A_0^2 a_1 a_2 (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (18.142)$$

тогда обобщенная формула (140) примет вид

$$D_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\delta' \delta_2' \delta}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-a_1 a_2 \pi |D|} \operatorname{ch}(a_1 a_2 |\pi - \varphi_2 + \varphi_1| D) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{2}{K}[U(a_2, \varphi_2) - U(a_1, \varphi_1)]\right\}. \quad (18.143)$$

С теми же приближениями для смещения средней частоты, вызванного срывами синхронизации, будем иметь формулу

$$\langle \omega \rangle - \omega_c = 2\left(\frac{\delta' \delta_2' \delta}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-a_1 a_2 \pi |D|} \operatorname{sh}(a_1 a_2 |\pi - \varphi_2 + \varphi_1| D) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{2}{K}[U(a_2, \varphi_2) - U(a_1, \varphi_1)]\right\}. \quad (18.144)$$

## § 19. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

К параметрическим мы относим те явления и процессы, которые описываются дифференциальными уравнениями с переменными параметрами. Последнее означает, что в указанных уравнениях некоторые линейные члены имеют коэффициенты, зависящие от времени. Уравнения в целом могут быть как линейными, так и нелинеиными. Регулярные или нерегулярные колебания параметров могут привести к возбуждению колебаний в системе. Условия возбуждения таких колебаний удобнее исследовать на примере линейной системы, тогда как для вычисления амплитуды колебаний следует учитывать нелинейность. Даже линейная теория параметрического возбуждения по предмету и методам тесно связана с теорией нелинейных колебаний. Поэтому мы, следуя тради-

ции, помещаем исследование параметрических явлений в главу, посвященную нелинейным колебаниям

В качестве простейшего примера электрической системы с переменным параметром укажем колебательный контур, изображенный на рис. 19.1, в котором емкость $C$ или индуктивность $L$ меняется во времени. Колебания в нем описываются уравнением

$$\ddot{y} + 2\delta(t)\dot{y} + k(t)y = 0. \qquad (19.1)$$

Здесь $y$ — ток или напряжение на каком-либо элементе, $k(t) = \frac{1}{LC}$; $2\delta(t) = \frac{R}{L}$ — переменные параметры, изменяющиеся во времени вследствие непостоянства емкости или индуктивности.

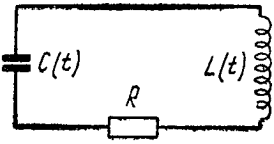


Рис. 19.1. Колебательный контур с переменными параметрами

Указанное непостоянство может быть обусловлено самопроизвольными флюктуациями, а также может быть вызвано специально путем подачи извне некоторого переменного напряжения. Для получения управляемого изменения параметров могут быть использованы различные специальные эффекты, например, зависимость межэлектродной емкости от потенциала на других сетках, зависимость магнитной проницаемости ферромагнетиков от напряженности магнитного поля и др. Параметрические системы с управляемым изменением частоты родственны системам, производящим частотную модуляцию, и отличаются от последних лишь быстротой изменения частоты.

Обширную группу параметрических систем представляют механические системы. Примером может служить маятник, совершающий горизонтальные колебания при вертикальных перемещениях точки подвеса. К параметрическим явлениям относятся также поперечные колебания балок, шарнирно закрепленных по концам, и струн при непостоянных продольных усилиях.

Изменение параметров может носить как регулярный, так и флюктуационный характер. Возможны также комбинированные случаи, когда на регулярные, например, гармонические колебания накладываются флюктуационные возмущения.

Мы ограничимся рассмотрением тех случаев, когда изменения параметров имеют малую интенсивность, так

что колебания не теряют формы, близкой к синусоидальной. Так, применительно к последнему члену уравнения (1) это означает, что $k(t)$ складывается из большой постоянной и малой переменной компонент:

$$k(t) = k_0^2 + \varepsilon k_1(t). \tag{19.2}$$

Здесь $\varepsilon$ — малый параметр, присутствие которого позволяет применять ассимптотические методы, рассмотренные ранее. С их помощью может быть достигнута точность различных порядков относительно $\varepsilon$. Первое приближение, учитывающее первый порядок по $\varepsilon$, позволяет исследовать основной параметрический резонанс, при котором система откликается на те составляющие в спектре функции $k(t)$, которые имеют частоту $2\omega_0$. Для исследования резонанса более высоких порядков нужно перейти к высшим приближениям. Мы ограничимся, однако, изучением основного параметрического резонанса и рассмотрением уравнений первого приближения, которые совпадают с укороченными уравнениями (см. § 13, раздел 3).

### 1. Линейные параметрические колебания. Основные уравнения

Рассмотрим линейное уравнение (1). Совершая замену переменной

$$x(t) = \exp\left\{\int_0^t \delta(t')\,dt'\right\} \cdot y(t), \tag{19.3}$$

преобразуем его к виду

$$\ddot{x} + [k(t) - \delta^2(t) - \dot{\delta}(t)]\,x = 0. \tag{19.4}$$

Выделим из $k(t) - \delta^2(t) - \dot{\delta}(t)$ постоянную составляющую, которую обозначим $\omega_0^2$. Для остальной части введем обозначение $\omega_0^2\xi(t)$:

$$k(t) - \delta^2(t) - \dot{\delta}(t) = \omega_0^2[1 + \xi(t)]. \tag{19.5}$$

Если $k(t) - \delta^2(t)$ — стационарный случайный процесс, то мы подбираем $\omega_0^2 = \langle k(t) - \delta^2(t)\rangle$, так что выполняется условие нулевого среднего значения $\langle\xi\rangle = 0$. Учитывая (5), записываем уравнение (4) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 x\xi(t). \tag{19.6}$$

Применяя к нему тот же прием, что и в разделе, 3 § 13, определяем амплитуду и фазу колебаний равенствами

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \qquad (19.7)$$

Амплитуда и фаза удовлетворяют уравнениям (13.31), которые в данном случае вследствие (6) приобретают вид

$$\dot{A} = -\frac{x\dot{x}}{A}\xi(t); \quad \dot{\varphi} = \omega_0 \frac{x^2}{A^2}\xi(t). \qquad (19.8)$$

После подстановки (7) имеем

$$\frac{\dot{A}}{A} = \omega_0 \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi)\cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \xi(t) \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \qquad (19.9)$$

Амплитуда $A$, входящая в последние равенства, является амплитудой вспомогательного процесса (3), отличающегося множителем $\exp\left[\int \delta(t)\,dt\right]$ от исходного процесса $y$, имеющего обычно прямой физический смысл. «Физическая» амплитуда колебаний $y(t)$ равна

$$\exp\left[-\int_0^t \delta(t')\,dt'\right] A(t). \qquad (19.10)$$

Удобно ввести особое обозначение для ее логарифма

$$u = \ln A - \int_0^t \delta(t')\,dt'. \qquad (19.11)$$

Тогда уравнения (9) можно записать

$$\dot{u} = -\delta(t) + \frac{\omega_0}{2}\xi(t)\sin(2\omega_0 t + 2\varphi),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{2}\xi(t) + \frac{\omega_0}{2}\xi(t)\cos(2\omega_0 t + 2\varphi). \qquad (19.12)$$

Последние уравнения являются вполне точными; они справедливы при любых функциях $\xi(t)$ и $\delta(t)$ как случайных, так и неслучайных. Нас интересуют, конечно, те задачи, когда они случайны, или хотя бы содержат случайные составляющие. Будем предполагать, что выполняются условия малости

$$\xi(t) \ll 1; \quad \delta(t) \ll \omega_0. \qquad (19.13)$$

В противном случае уравнения (12), хотя и сохраняют смысл, но трудно поддаются решению. Кроме того, сами понятия амплитуды и фазы при этом становятся непоказательными для процесса $x(t)$ или $y(t)$.

Легко понять, что для ответа на вопрос, возбуждаются ли в системе колебания или нет, т. е. устойчива ли система, следует проанализировать среднюю величину производной $\langle \dot{u} \rangle$, которая определяется первым уравнением (12). Усредняя его, получаем условие параметрического возбуждения колебаний в виде неравенства

$$\langle \delta(t) \rangle < \frac{\omega_0}{2} \langle \xi(t) \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \rangle. \qquad (19.14)$$

Если это неравенство не выполняется, то колебания, имеющиеся в системе, с течением времени неограниченно затухают и, следовательно, система устойчива. Коэффициент затухания

$$\delta_{кр} = \frac{\omega_0}{2} \langle \xi(t) \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \rangle \qquad (19.15)$$

является критическим. При меньших затуханиях в системе происходит возбуждение, при больших — не происходит. Граница области возбуждения определяется совпадением затухания $\delta$ с критическим.

Тем самым исследование параметрической системы на устойчивость сводится к вычислению критического затухания (15). Для его вычисления, однако, следует обратиться ко второму уравнению (12), поскольку фаза $\varphi(t)$ находится в тесной зависимости от $\xi(t)$. К счастью, уравнение для фазы не содержит $u(t)$ и его можно рассматривать обособленно от первого уравнения.

Тригонометрический множитель $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ в указанном уравнении, содержащий явно время, выделяет из функции $\xi(t)$ гармонические составляющие частоты, близкой к $2\omega_0$. В этом и заключается специфическая черта основного параметрического резонанса. Чтобы рассмотреть ее в чистом виде, предположим, что функция $\xi(t)$ имеет спектр, заметно отличный от нуля лишь в узкой полосе $|\omega - 2\omega_0| \lesssim \Delta\omega$ 2 вблизи частоты $2\omega_0 \gg$ $\gg \Delta\omega$. Тогда ее можно записать

$$\xi(t) = h(t) \sin(2\omega_0 t + \psi(t)), \qquad (19.16)$$

где $h(t)$ и $\psi(t)$ — амплитуда и фаза, которые медленно меняется по сравнению с $\sin 2\omega_0 t$, но могут быстро ме-

няться по сравнению с $A(t)$, $\varphi(t)$. Подставляя (16) в (12), пользуясь преобразованием

$$2\sin(2\omega_0 t+\psi)\cos(2\omega_0 t+2\varphi)=$$
$$=\sin(4\omega_0 t+\psi+2\varphi)+\sin(\psi-2\varphi)$$

и отбрасывая вибрационные члены с $\sin(4\omega_0 t+\psi+2\varphi)$ и $\sin(2\omega_0 t+\psi)$, которые несущественны в первом приближении, получаем укороченное уравнение первого приближения

$$\dot{\varphi}=-\frac{\omega_0}{4}h(t)\sin(2\varphi-\psi(t)). \qquad (19.17)$$

При выводе этого уравнения, уже не содержащего явно времени, мы впервые допустили погрешность и ограничили себя лишь основным параметрическим резонансом. Таким же образом можно преобразовать и первое уравнение (12) или выражение (15) для критического затухания. С тем же основанием получаем

$$\delta_{кр}=\frac{\omega_0}{4}\langle h(t)\cos(2\varphi-\psi(t))\rangle. \qquad (19.18)$$

К сожалению, даже простое уравнение (17) не имеет точного решения, записывающегося в квадратурах. Частные результаты могут быть получены путем использования условий, касающихся быстроты изменения функций $h(t)$ и $\psi(t)$.

## 2. Узкополосные колебания параметров, близкие к гармоническим

Как видно из уравнения (17), быстрота изменения фазы характеризуется постоянной времени

$$T_{рел}=(\langle h\rangle\,\omega_0)^{-1}, \qquad (19.19)$$

которую можно назвать временем релаксации по фазе Для анализа указанного уравнения важно, успевают ли функции $h(t)$, $\psi(t)$ существенно измениться в течение этого времени.

Рассмотрим случай медленно меняющихся функций $h(t)$, $\psi(t)$, когда время их изменения $\frac{h}{\dot{h}}$, $\frac{\psi}{\dot{\psi}}$ или $T_\psi$ значительно превосходит время релаксации по фазе ($T_\psi$ — время, за которое накапливается изменение $\psi$ порядка 1).

Обозначая через $\chi$ отклонение

$$\chi(t) = 2\varphi(t) - \psi(t),$$

запишем уравнение (17) в виде

$$\dot{\chi} + \frac{\omega_0}{2} h(t) \sin\chi = -\dot{\psi}(t). \qquad (19.20)$$

При медленных изменениях частоты внешних колебаний $\left(\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} \ll h\omega_0\right)$ рассогласование фаз $\chi$ будет мало отличаться от «мгновенного стабильного» значения $\chi_0(t)$, которое определяется из уравнения

$$\frac{\omega_0}{2} h(t) \sin\chi_0 = -\dot{\psi}. \qquad (19.21)$$

Это уравнение следует из (20), если положить $\dot{\chi}=0$. Подставляя в (18), вместо $2\varphi - \psi$, значение

$$\chi_0 = -\arcsin\frac{2\dot{\psi}}{\omega_0 h} \qquad (19.22)$$

из (21), получим следующее выражение для критического затухания:

$$\delta_{кр} = \frac{1}{4}\left\langle\sqrt{\omega_0^2 h^2(t) - 4\dot{\psi}^2}\right\rangle. \qquad (19.23)$$

При постоянных $h$ и $\dot{\psi}$ формула (23) совпадает с результатом обычной нефлюктуационной теории параметрического возбуждения. Возбуждение возможно лишь при обязательном условии $|2\dot{\psi}| < \omega_0 h$, которое мы предполагаем выполняющимся. Иначе квазистатическое рассмотрение настоящего раздела было бы неприменимым.

Уточняя выражение (23), произведем учет отклонения

$$\chi_1 = \chi - \chi_0 \qquad (19.24)$$

от значения (22). Для малых отклонений можно произвести линеаризацию уравнения (20), которая приводит к следующему линейному уравнению

$$\dot{\chi}_1 + \frac{\omega_0}{2} h(t) \cos\chi_0(t) \cdot \chi_1 = -\dot{\chi}_0. \qquad (19.25)$$

Предполагая, что процесс начался в отдаленном прошлом, запишем обычным способом решение последнего уравнения

$$\chi_1 = -\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_{t'}^{t} \gamma dt} \dot{\chi}_0(t')\,dt'$$

$$\gamma(t) = \frac{\omega_0}{2} h(t) \cos\chi_0 = \sqrt{\frac{1}{4}\omega_0^2 h^2 - \dot{\psi}^2}. \tag{19.26}$$

В выражении (18) при этом можно удержать лишь основные члены разложения по $\chi_1$. Отбрасывая кубические члены и более высокие, находим

$$\delta_{кр} = \frac{\omega_0}{4}\left\langle h\cos\chi_0 \cdot \left(1 - \frac{\chi_1^2}{2}\right)\right\rangle - \frac{\omega_0}{4}\langle h \sin\chi_0 \cdot \chi_1\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle \sqrt{\frac{1}{4}\omega_0^2 h^2 - \dot{\psi}^2} \cdot \left(1 - \frac{\chi_1^2}{2}\right)\right\rangle + \frac{1}{2}\langle \dot{\psi}\chi_1\rangle. \tag{19.27}$$

Подставляя сюда выражения (26), (22) можем вычислить $\delta_{кр}$, если известны статистические свойства исходных процессов $h(t)$ и $\psi(t)$. В приведенном рассмотрении был использован квазистатический метод, изложенный в разделе 3 § 14. Легко видеть, что уравнение (17) напоминает второе уравнение (14.51).

Если с подавляющей вероятностью выполняется условие

$$T_\psi \gg \frac{1}{\omega_0 h}, \tag{19.28}$$

то квазистатическое рассмотрение параметрического возбуждения упрощается. В этом случае $\chi$ мало и, пользуясь этим, можно в уравнении (20) заменить $\sin\chi$ на $\chi$. После этого будем иметь линейное уравнение

$$\dot{\chi} + \frac{1}{2}\omega_0 h\chi = -\dot{\psi}, \tag{19.29}$$

которое имеет решение

$$\chi(t) = -\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\omega_0 \int_{t'}^{t} h\,dt} \dot{\psi}(t')\,dt'. \tag{19.30}$$

Для вычисления затухания (18) в данном случае, вместо $\cos\chi$, целесообразно взять $1-\frac{\chi^2}{2}$, вследствие чего

$$\delta_{кр}=\frac{\omega_0}{4}\left\langle h(t)\cdot\left(1-\frac{\chi^2}{2}\right)\right\rangle. \qquad (19.31)$$

В последнее выражение надо подставить (30) и произвести усреднение.

Остановимся для примера на том частном случае, когда амплитуда колебаний параметра является постоянной, а фаза испытывает совершенно случайные блуждания, иначе $\dot{\psi}$ — есть дельта-коррелированный случайный процесс с нулевым средним значением и с известной интенсивностью $\varkappa$

$$\langle\dot{\psi}\dot{\psi}_\tau\rangle=\varkappa\delta(\tau).$$

Формула (30) в этом случае имеет вид

$$\chi(t)=-\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{1}{2}\omega_0 h(t-t')}\dot{\psi}(t')\,dt'.$$

Отсюда, учитывая вид корреляционной функции для $\dot{\psi}$, получаем

$$\langle\chi^2\rangle=\frac{\varkappa}{\omega_0 h}. \qquad (19.32)$$

В соответствии с (31) находим критическое затухание

$$\delta_{кр}=\frac{\omega_0 h}{4}\left(1-\frac{\varkappa}{2\omega_0 h}\right). \qquad (19.33)$$

Следовательно, параметрическая система является устойчивой, если

$$\delta>\frac{\omega_0 h}{4}\left(1-\frac{\varkappa}{2\omega_0 h}\right) \qquad (19.34)$$

и неустойчивой в противном случае.

Первый член $\omega_0 h/4$ в формулах (33), (34) может быть получен из обычной нефлюктуационной теории. Второй член, который в $\varkappa/2\omega_0 h$ раз меньше, чем первый, описывает влияние флюктуационного непостоянства колебаний параметра на условия возбуждения. Мы видим, что нестабильность вибраций параметра ухудшает усло-

вия параметрического возбуждения. Она эквивалентна уменьшению амплитуды вибраций. Выражение (33) не является, конечно, вполне точным. Уточнение его дало бы поправку, относительная величина которой еще примерно в $\varkappa/2\omega_0 h$ раз меньше, чем второй член. При $\varkappa/2\omega_0 h \gtrsim 1$ формула (33) теряет справедливость, ибо исчезают условия применимости квазистатического рассмотрения.

При быстрых изменениях амплитуды, фазы и частоты, когда они успевают существенно измениться в течение времени порядка времени релаксации фазы (19), использованный метод неприменим. В этом случае решение уравнения (17) или (20) затруднительно. Однако в противоположном крайнем случае при достаточно быстрых флюктуациях параметров возможно применение стохастических методов, основанных на замене реальных флюктуаций $\xi(t)$ дельта-коррелированными.

### 3. Быстрые флюктуации параметров. Применение стохастических методов

Мы будем предполагать здесь, что время релаксации по фазе значительно больше, чем время корреляции флюктуирующих параметров

$$T_{\text{рел}} \gg \tau_{\text{кор}}. \tag{19.35}$$

Здесь $T_{\text{рел}}$ определено формулой (19), а $\tau_{\text{кор}}$ связано с быстротой изменения функций $\psi(t)$, $h(t)$, если пользоваться представлением $\xi(t)$ в форме (16). Теперь, однако, нет особой надобности пользоваться указанным представлением, и можно рассматривать непосредственно уравнения (12), а под $\tau_{\text{кор}}$ понимать время корреляции исходного процесса $\xi(t)$.

Следует отметить, что условие применимости стохастического метода связано с условием малости флюктуаций параметров. Если уменьшать функцию $\xi(t)$, оставляя скорость ее изменения той же самой, то время релаксации по фазе будет увеличиваться, и мы попадем в область применимости стохастического метода при любом времени корреляции.

Переходя к стохастическим представлениям, процесс $\xi(t)$ в уравнениях (12) следует представлять как

дельта-коррелированный процесс. Флюктуации фазы при этом будут процессом Маркова и для них можно записать уравнение Фоккера—Планка. В разделе 8 §4 были изложены правила, указывающие, как это сделать. Второе уравнение (12) есть частный случай уравнения (4.142). Применяя формулы (4.162), (4.161), получаем для него уравнение Фоккера—Планка

$$\dot{w}(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial\varphi}[m_2(\varphi)\,w(\varphi)] + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[K_2(\varphi)\,w(\varphi)], \qquad (19.36)$$

где

$$m_2(\varphi) = \frac{\omega_0^2}{4}\int_{-\infty}^{0}\langle\xi\xi_\tau\rangle\frac{\partial}{\partial\varphi}[1+\cos(2\omega_0 t+2\varphi)]\times \\ \times[1+\cos(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\varphi)]\,d\tau; \qquad (19.37)$$

$$K_2(\varphi) = \frac{\omega_0^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\xi_\tau\rangle[1+\cos(2\omega_0 t+2\varphi)]\times \\ \times[1+\cos(2\omega_0 t+2\omega_0\tau+2\varphi)]\,d\tau. \qquad (19.38)$$

Выражение (37) есть среднее значение от выражения $\frac{1}{2}\omega_0\xi(t)\cdot[1+\cos(2\omega_0 t+2\varphi)]$, стоящего в правой части второго равенства (12). Ввиду того, что по определению $\langle\xi\rangle=0$, отличное от нуля значение $m_2(\varphi)$, обусловлено корреляциями между $\xi(t)$ и $\varphi$ в $\xi(t)\cos[2\omega_0 t+2\varphi]$. В справедливости соотношения (37), а также дальнейшего равенства (39), можно убедиться также, применив приближенный способ рассмотрения, изложенный на стр. 360—361.

Для исследования устойчивости параметрической системы следует найти среднее значение от выражения, стоящего в первом равенстве (12). Здесь аналогичным образом существенную роль играют корреляции между $\xi(t)$ и $\varphi$ в выражении $\xi(t)\sin(2\omega_0 t+2\varphi)$. Усреднение выражений, содержащих случайное воздействие и марковский процесс, проводилось нами в § 4 разд. 8, где

была указана формула (4.167). Применяя эту формулу, получаем результат усреднения

$$\langle \xi(t) \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \rangle = \frac{\omega_0}{2} \int_{-\infty}^{0} \langle \xi\xi_\tau \rangle \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \varphi} [\sin(2\omega_0 t + 2\varphi)] [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\omega_0 \tau + 2\varphi)] d\tau, \quad (19.39)$$

очень напоминающий (37).

Последние выражения (37)—(39) явно зависят от времени. Наряду с постоянными составляющими они содержат вибрационные компоненты, быстро меняющиеся с частотой $2\omega_0$ и $4\omega_0$. Ввиду того, что $\varphi$ и $w(\varphi)$ меняются значительно медленнее, вибрационные составляющие оказывают малое влияние. В первом приближении их можно попросту отбросить, производя усреднение за период, как это мы делали в разделе 4 § 13. Преобразуя, например, в (38) выражение

$$[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)] [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\omega_0 \tau + 2\varphi)]$$

к виду

$$1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) + \cos(2\omega_0 t + 2\omega_0 \tau + 2\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau + \frac{1}{2} \cos(4\omega_0 \tau + 2\omega_0 \tau + 4\varphi)$$

и отбрасывая вибрационные члены (второй, третий и пятый), будем иметь:

$$K_2(\varphi) = \frac{\omega_0^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi\xi_\tau \rangle \left[1 + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau\right] d\tau =$$

$$= \frac{\omega_0^4}{4} \left[\varkappa(0) + \frac{1}{2} \varkappa(2\omega_0)\right], \quad (19.40)$$

где

$$\varkappa(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi\xi_\tau \rangle \cos \omega\tau d\tau. \quad (19.41)$$

Совершенно аналогично, после отбрасывания вибрационных членов в (37), (39) получаем

$$m_2(\varphi) = \frac{\omega_0^2}{4} \int_{-\infty}^{0} \langle \xi \xi_\tau \rangle \sin 2\omega_0 \tau d\tau; \qquad (19.42)$$

$$\langle \xi(t) \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \rangle =$$

$$= \frac{\omega_0}{2} \int_{-\infty}^{0} \langle \xi \xi_\tau \rangle \cos 2\omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{4} \varkappa(2\omega_0). \qquad (19.43)$$

Последний результат позволяет определить критическое затухание

$$\delta_{кр} = \frac{\omega_0}{2} \langle \xi(t) \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \rangle = \frac{\omega_0^2}{8} \varkappa(2\omega_0). \qquad (19.44)$$

При $\delta < \delta_{кр}$ в первом уравнении (12) $\langle \dot{u} \rangle > 0$, и следовательно, имеет место параметрическое возбуждение.

Наряду с уравнением (36), соответствующим второму уравнению (12), может быть выведено стохастическое уравнение, описывающее эволюцию распределения $w(u)$ и заменяющее первое уравнение. Учитывая (44), его можно записать в виде

$$\dot{w}(u) = (\langle \delta \rangle - \delta_{кр}) \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{K_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \qquad (19.45)$$

где аналогично (38), (40)

$$K_1 = \frac{\omega_0^2}{8} \varkappa(2\omega_0) + \int_{-\infty}^{\infty} K[\delta, \delta_\tau] d\tau. \qquad (19.46)$$

Уравнения (45), (36) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\dot{u} = \delta_{кр} - \langle \delta \rangle + \xi_1,$$

$$\dot{\varphi} = m_2 + \xi_2, \qquad (19.47)$$

содержащим дельта-коррелированные случайные функции $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, с нулевым средним значением и интенсивностью (46) и (40) соответственно

$$\langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = K_1 \delta(\tau), \quad \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = K_2 \delta(\tau).$$

Рассмотрим в качестве примера тот же случай, что и в конце предыдущего раздела. Пусть $\xi(t)$ представ-

ляет собой колебания с фиксированной амплитудой $h$ и фазой, испытывающей случайные блуждания:

$$\xi(t) = h\sin\left(2\omega_0 t + \psi(t)\right);$$

$$\langle\dot{\psi}\rangle = 0; \quad \langle\dot{\psi}\dot{\psi}_\tau\rangle = \varkappa\delta(\tau). \tag{19.48}$$

Для применимости стохастических методов теперь требуется достаточно энергичные блуждания фазы, т. е. большое $\varkappa$. Нужно, чтобы в течение времени порядка $1/\omega_0 h$ накапливался сдвиг фазы, значительно превосходящий $\pi$, иначе говоря, происходила полная смена фазы $\psi$. Вследствие принятого вида корреляционной функции $\langle\dot{\psi}\dot{\psi}_\tau\rangle$ указанное условие дает

$$\frac{\varkappa}{\omega_0 h} \gg 1. \tag{19.49}$$

Корреляционную функцию $\langle\xi\xi_\tau\rangle$ нетрудно вычислить, зная характеристическую функцию фазового приращения за время $\tau$:

$$\Theta(v) = \left\langle \exp\left\{ iv\int_t^{t+\tau}\dot{\psi}\,dt\right\}\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\varkappa\tau v^2}, \quad (\tau > 0). \tag{19.50}$$

В результате усреднения по случайной начальной фазе выпадет член, вибрационно зависящий от времени, и мы будем иметь

$$\langle\xi\xi_\tau\rangle = \frac{h^2}{2}\langle\cos(2\omega\tau + \psi_\tau - \psi)\rangle.$$

Но поскольку $\cos(2\omega_0\tau + \psi_\tau - \psi)$ есть реальная часть от $\exp i(2\omega_0\tau + \psi_\tau - \psi)$, последнее выражение удобно вычислить, умножив (50) на $e^{2i\omega_0\tau}$, взяв действительную часть и положив $v = 1$. После этого получим

$$\langle\xi\xi_\tau\rangle = \frac{h^2}{2} e^{-\frac{1}{2}\varkappa|\tau|}\cos 2\omega_0\tau. \tag{19.51}$$

Найденной корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$\varkappa(\omega) = \frac{h^2\varkappa}{4}\left\{\frac{1}{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2 + (\omega - 2\omega_0)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2 + (\omega + 2\omega_0)^2}\right\}. \tag{19.52}$$

Подставляя (52) в (44), находим критическое затухание

$$\delta_{кр} = \frac{\omega_0^2 h^2}{8\varkappa}\left[1 + \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + 64\omega_0^2}\right]. \qquad (19.53)$$

Интересно сравнить полученный результат с критическим затуханием (33) для случая слабых блужданий фазы. Ограничиваясь значениями $\varkappa \ll 8\omega_0$, согласно формулам (33), (53) имеем следующую зависимость критического затухания от $x = \frac{\varkappa}{\omega_0 h}$

$$\frac{4\delta_{кр}}{h\omega_0} = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{при } x \ll 1, \\ \frac{1}{2x} & \text{при } x \gg 1. \end{cases} \qquad (19.54)$$

Найденная асимптотическая зависимость при малых и больших $x$ изображена на рис. 19.2. Для промежуточных значений теоретический анализ затруднителен, однако, совершенно очевидно, что истинная неизвестная кривая должна осуществлять плавный переход от одной крайней зависимости к другой. Примерный ее ход показан на рисунке пунктиром.

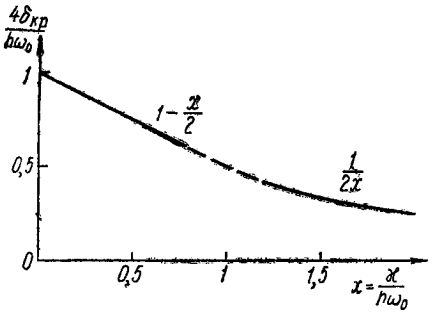



Рис. 19.2. Зависимость критического затухания от интенсивности блуждания фазы.

Разобранный пример позволяет проследить переход от строго гармонических колебаний параметров к флюктуационным дрожаниям. При этом спектр колебаний параметров расширяется, будучи сначала дельта-образным, достигая затем ширины порядка $\langle h \rangle \omega_0$ и потом приобретая значительно большую ширину. Нестабильность колебаний параметров монотонным образом ухудшает условия параметрического возбуждения. Поскольку $\delta_{кр}$ уменьшается, для возбуждения требуется все меньшее затухание в системе.

## 4. Одновременное присутствие как гармонического, так и флюктуационного параметрического воздействия

Перейдем к тому случаю, когда изменение параметров содержит как строго гармоническую составляющую, так и относительно широкополосную флюктуационную компоненту. Спектральная плотность функции $\xi(t)$ при этом имеет двойную структуру, а именно, содержит дискретную линию на фоне непрерывного спектра. Обозначая флюктуационную составляющую через $\zeta(t)$, имеем

$$\xi(t) = h \sin \nu t + \zeta(t). \tag{19.55}$$

Поскольку мы интересуемся основным параметрическим резонансом, который описывается первым приближением в стандартных уравнениях, то частоту $\nu$ гармонической составляющей мы будем предполагать близкой к $2\omega_0$. Если расстройку обозначить

$$\Delta = 2\omega_0 - \nu, \tag{19.56}$$

то указанное условие можно записать

$$\Delta \sim h\omega_0 \ll \omega_0. \tag{19.57}$$

В (55) мы не выписали произвольной начальной фазы колебаний, что связано с выбором начала отсчета времени.

Вывод стандартных уравнений производим почти так же, как в первом разделе. Единственное отличие будет в том, что фазу определим несколько иначе, а именно, вместо (7) положим

$$x = A\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right),$$

$$\dot{x} = -\frac{\nu}{2}A\sin\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi\right). \tag{19.58}$$

Тогда вместо уравнений (12) будем иметь

$$\dot{u} = -\delta(t) + \frac{1}{\nu}\left[\omega_0^2 - \frac{\nu^2}{4} + \omega_0^2\xi\right]\sin(\nu t + 2\varphi), \tag{19.59}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\nu}\left[\omega_0^2 - \frac{\nu^2}{4} + \omega_0^2\xi\right]\left[1 + \cos(\nu t + 2\varphi)\right].$$

Подставляя сюда (55) и отбрасывая вибрационные члены, получаем уравнения

$$\dot{u} = -\delta(t) + \frac{h\omega_0}{4}\cos 2\varphi + \frac{\omega_0}{2}\zeta(t)\sin(\nu t + 2\varphi);$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta}{2} - \frac{h\omega_0}{4}\sin 2\varphi + \frac{\omega_0}{2}\zeta(t)\,[1 + \cos(\nu t + 2\varphi)]. \quad (19.60)$$

Здесь произведено упрощение коэффициентов путем использования неравенства $\Delta \ll \omega_0$. Последнее позволяет приближенно полагать

$$\omega_0^2 - \frac{\nu^2}{4} \approx \omega_0\Delta; \quad \frac{\omega_0^2}{\nu} \approx \frac{\omega_0}{2}.$$

Мы рассмотрим тот случай, когда флюктуации $\zeta(t)$ сравнительно широкополосны, т. е. когда их время корреляции мало по сравнению с временем релаксации фазы

$$\tau_{\text{кор}} \ll \frac{1}{h\omega_0}. \quad (19.61)$$

Тогда к уравнениям (60) можно применять стохастический подход, аналогичный тому, который был изложен в разделе 3. Флюктуационные члены в (60) точно такие же, что и в (12), разница лишь в том, что в роли $\xi(t)$ теперь выступает $\zeta(t)$.

Разобьем каждый из этих членов на две части: среднее значение и флюктуационный добавок

$$\frac{\omega_0}{2}\zeta(t)\sin(\nu t + 2\varphi) = m_1 + \zeta_1(t),$$

$$\frac{\omega_0}{2}\zeta(t)\,[1 + \cos(\nu t + 2\varphi)] = m_2 + \zeta_2(t). \quad (19.62)$$

Уравнения (60) при этом принимают вид

$$\dot{u} = m_1 - \delta(t) + \frac{h\omega_0}{4}\cos 2\varphi + \zeta_1, \quad (19.63)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta}{2} + m_2 - \frac{h\omega_0}{4}\sin 2\varphi + \zeta_2.$$

Средние значения $m_1$, $m_2$, а также коэффициенты интенсивности $K_1$, $K_2$ процессов $\zeta_1$, $\zeta_2$ определяются точно так же, как и раньше в разд. 3. В формулах (37) — (43) следует лишь заменить $\xi(t)$ на $\zeta(t)$. Приведем здесь важнейшие из соответствующих формул:

$$K_1 = \frac{\omega_0^2}{8} \varkappa(2\omega_0) + \int_{-\infty}^{\infty} [\langle \delta\delta_\tau \rangle - \langle \delta \rangle^2]\, d\tau,$$

$$K_2 = \frac{\omega_0^2}{4} \left[ \varkappa(0) + \frac{1}{2} \varkappa(2\omega_0) \right], \qquad (19.64)$$

$$m_1 = \frac{\omega_0}{2} \langle \zeta(t) \sin(\nu t + 2\varphi) \rangle = \frac{\omega_0^2}{8} \varkappa(2\omega_0),$$

где $\varkappa(\omega)$ — теперь спектральная плотность случайного процесса $\zeta(t)$.

Интенсивность обоих процессов $\zeta_1$ и $\zeta_2$ одинакова

$$K_1 = K_2 = K = \frac{\omega_0^2}{8} \varkappa(2\omega_0) \qquad (19.65)$$

в том случае, если затухание $\delta$ постоянно во времени и если $\zeta(t)$ не содержит низкочастотных составляющих ($\varkappa(0) = 0$). Для простоты мы будем предполагать, что имеет место именно этот случай, а также, что $m_2 = 0$, хотя отказ от этих ограничений не вызывает осложнений. Так ненулевое значение $m_2$ всегда можно отнести к члену $\Delta/2$.

Усреднение первого уравнения (63) дает критическое затухание

$$\delta_{\text{кр}} = m_1 + \frac{h\omega_0}{4} \langle \cos 2\varphi \rangle. \qquad (19.66)$$

Чтобы полностью его вычислить, следует найти $\langle \cos 2\varphi \rangle$, пользуясь вторым уравнением (63).

При выполнении условия (61) процессы $\zeta_1$, $\zeta_2$ в (63) можно представить как дельта-коррелированные (с корреляционной функцией $K\delta(\tau)$. Тогда уравнение для фазы будет эквивалентно уравнению Фоккера—Планка

$$\dot{w}(\varphi) = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \left[ \left( \frac{\Delta}{2} - \frac{h\omega_0}{4} \sin 2\varphi \right) w(\varphi) \right] + \frac{K}{2} \frac{\partial^2 w(\varphi)}{\partial\varphi^2}. \qquad (19.67)$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (18.44), встречающимся в теории синхронизации. В § 18 было найдено стационарное решение такого уравнения. Используя условие периодичности и применяя тот прием, который привел к выражению (18.52),

получаем стационарное решение указанного уравнения

$$w(\varphi) = \frac{1}{N} \exp\left[\frac{1}{K}\left(\Delta\varphi + \frac{\hbar\omega_0}{4}\cos 2\varphi\right)\right] \times$$

$$\times \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \exp\left[-\frac{1}{K}\left(\Delta\psi + \frac{\hbar\omega_0}{4}\cos 2\psi\right)\right] d\psi. \qquad (19.68)$$

Полученная стационарная плотность распределения является периодической с периодом $\pi$. Постоянная $N$ определяется из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} w(\varphi)\, d\varphi = 1. \qquad (19.69)$$

Последнее дает

$$N = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \exp\left[\frac{1}{K}\left(\Delta\varphi - \Delta\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\hbar\omega_0}{4}\cos 2\varphi - \frac{\hbar\omega_0}{4}\cos 2\psi\right)\right] d\psi.$$

Вводя переменную $\chi = \psi - \varphi$, имеем

$$N = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \exp\left[-\frac{\Delta}{K}\chi + \right.$$

$$\left. + \frac{\hbar\omega_0}{2K}\sin\chi\sin(2\varphi+\chi)\right] d\varphi d\chi. \qquad (19.70)$$

Записывая результат интегрирования по $\varphi$ через функцию Бесселя и вторично делая замену переменной $y = \frac{\pi}{2} - \chi$ при $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ и $y = \chi - \frac{\pi}{2}$ при $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$, приходим к результату

$$N = 2\pi\int_0^{\pi} e^{-\frac{\Delta}{K}\chi} I_0\left(\frac{\hbar\omega_0}{2K}\sin\chi\right) d\chi =$$

$$= 2\pi^2 e^{-\pi q}\left|I_{iq}\left(\frac{\hbar\omega_0}{4K}\right)\right|^2, \qquad (19.71)$$

который аналогичен (18.53). Здесь $q = \frac{\Delta}{2K}$.

Чтобы вычислить стационарное среднее значение косинуса $\langle \cos 2\varphi \rangle$, входящее в (66), остается произвести усреднение с весом (68). Представляя его в виде

$$\cos 2\varphi = \cos(2\varphi + \chi - \chi) =$$
$$= \cos\chi \cos(2\varphi + \chi) + \sin\chi \sin(2\varphi + \chi)$$

и заменяя в (68) $\psi$ на $\varphi + \chi$, будем иметь

$$\langle \cos 2\varphi \rangle = 2 \int_0^{\pi} \cos 2\varphi \, w(\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{N} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [\cos\chi \cos(2\varphi + \chi) + \sin\chi \sin(2\varphi + \chi)] \times$$

$$\times \exp\left[ -\frac{\Delta}{K}\chi + \frac{\hbar\omega_0}{2K} \sin\chi \sin(2\varphi + \chi) \right] d\varphi d\chi. \quad (19.72)$$

Учитывая, что функция $\cos(2\varphi + \chi)$ меняет знак, нетрудно убедиться, что при любом значении $\chi$ следующий интеграл исчезает:

$$\int_0^{\pi} \cos(2\varphi + \chi) \exp\left[ \frac{\hbar\omega_0}{2K} \sin\chi \sin(2\varphi + \chi) \right] d\varphi = 0.$$

Поэтому в (72) следует принимать во внимание лишь второй член

$$\langle \cos 2\varphi \rangle = \frac{2}{N} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin\chi \sin(2\varphi + \chi) \times$$

$$\times \exp\left[ -\frac{\Delta}{K}\chi + \frac{\hbar\omega_0}{2K} \sin\chi \sin(2\varphi + \chi) \right] d\varphi d\chi. \quad (19.73)$$

Если сравнить последний интеграл с (70), то легко заметить, что его можно получить из (70) дифференцированием по $\hbar\omega_0/2K$. Следовательно, искомое среднее значение просто выражается через функцию (71)

$$\langle \cos 2\varphi \rangle = \frac{1}{N} \frac{N}{d\left(\frac{\hbar\omega_0}{2K}\right)} = F\left(\frac{\hbar\omega_0}{4K}, \frac{\Delta}{2K}\right), \quad (19.74)$$

где

$$F(z, q) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln N(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln [I_{iq}(z) I_{-iq}(z)]. \quad (19.75)$$

Пользуясь свойствами цилиндрических функций, последнюю функцию также можно записать в виде

$$F(z,\ q) = \frac{1}{2}\left[\frac{I_{1+iq}(z)}{I_{iq}(z)} + \frac{I_{1-iq}(z)}{I_{-iq}(z)}\right]. \qquad (19.76)$$

Подставляя (74) в (66) и поделив обе части равенства на $K = \frac{\omega_0^2 \varkappa\ (2\omega_0)}{8}$, получаем искомое критическое затухание в форме

$$\frac{\delta_{\text{кр}}}{K} = 1 + \frac{\hbar\omega_0}{4K} F\left(\frac{\hbar\omega_0}{4K},\ \frac{\Delta}{2K}\right). \qquad (19.77)$$

Для получения численных результатов можно пользоваться таблицами бесселевых функций мнимого аргумента и мнимого индекса, через которые путем дифференцирования выражается функция $F(z, q)$. Кроме того, в различных частных случаях могут быть использованы различные асимптотические выражения для цилиндрических функций. В этой связи существенны соотношения между аргументами $\hbar\omega_0/4K$, $\Delta/2K$ и единицей. В зависимости от величины $\hbar\omega_0/4K$ мы имеем три различных случая: 1) относительно большая амплитуда гармонического воздействия ($\hbar\omega_0/4K \gg 1$), 2) средние амплитуды ($\hbar\omega_0/4K \sim 1$) и 3) относительно большие шумы ($\hbar\omega_0/4K \ll 1$). Независимо от этого по величине $\Delta/2K$ можно произвести разбиение на случаи малых, средних и больших расстроек. Классификация различных частных случаев приведена в табл. 19.1, где указано 11 различных областей (область 9 допускает разделение еще на 3 подобласти).

Таблица 19.1

**Классификация частных случаев при одновременном гармоническом и флюктуационном изменении параметра**

| | $\frac{\Delta}{2K} \ll 1$ | $\frac{\Delta}{2K} \sim 1$ | $\frac{\Delta}{2K} \gg 1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\hbar\omega_0}{4K} \gg 1$ | 1. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \ll 1$ | 2. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \ll 1$ | 3. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \ll 1$ | 4. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \sim 1$ | 5. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \gg 1$ |
| $\frac{\hbar\omega_0}{4K} \sim 1$ | 6. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \ll 1$ | 7. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \sim 1$ | 8. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \gg 1$ | | |
| $\frac{\hbar\omega_0}{4K} \ll 1$ | 9. | 10. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \gg 1$ | 11. $\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} \gg 1$ | | |

Начнем обзор частных случаев с больших амплитуд $h \gg \frac{4K}{\omega_0}$ (области 1—5).

В областях 1—2 можно пользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя

$$J_{\pm iq}(iz) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{z \mp \frac{\pi q}{2}}. \qquad (19.78)$$

При больших индексах $q \gg 1$ (в областях 3, 4, 5, 8, 11) можно пользоваться формулой (18.57). Кроме того, в областях 3 и, частично, 4 можно заменить функции $H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(iy)$, $H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(iy)$, $\left(y = \frac{(z^2-q^2)^{\frac{3}{2}}}{3q^2}\right)$ на асимптотические выражения, пригодные при больших аргументах $y \gg 1$, что приводит к формуле

$$J_{\pm iq}(iz) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi q v}} e^{q\,'v - \operatorname{Arc\,tg} v'}, \quad \left(v = \frac{\sqrt{z^2-q^2}}{q}\right). \qquad (19.79)$$

Она включает в себя (78) как частный случай, если учесть, что выбор значения функции $\operatorname{Arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg} v$ или $-\pi + \operatorname{arc\,tg} v$ определяется знаком индекса $\pm iq$. Подставляя (79) в (75) и дифференцируя, находим

$$F(z, q) \approx \frac{1}{z}\sqrt{z^2-q^2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2-q^2}. \qquad (19.80)$$

Следовательно, критическое затухание (77) определяется приближенной формулой

$$\frac{\delta_{кр}}{K} = \frac{\hbar\omega_0}{4K}\sqrt{1-\left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)^2} + 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)^2}, \qquad (19.81)$$

справедливой в областях 1, 2, 3 и, частично 4.

Основной член в (81), дающий $\delta_{кр} = \sqrt{(\hbar\omega_0)^2 - 4\Delta^2}/4$ имеет нефлюктуационный характер и может быть получен на основе простой теории, не принимающей во внимание флюктуаций. Следующие два члена обязаны своим существованием случайным воздействиям и описывают смещение границы области параметрического возбуждения вследствие флюктуационных толчков.

Из формулы (81) видно, что с увеличением расстройки $\Delta$ $\left(\text{точнее относительной расстройки } \frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)$ параметрическое возбуждение все более затрудняется. Присутствие флюктуаций сначала при $\left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)^2 < \frac{1}{2}$ не-

сколько способствует возбуждению, а затем при больших расстройках $\left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)^2 > \frac{1}{2}$ ухудшает условия возбуждения, вызываемого синусоидальными колебаниями параметров.

В области 4 особое место занимает случай значений $2\Delta/\hbar\omega_0$, близких к единице. При этом формула (81) теряет свою годность. Между тем именно при таких значениях вклад первого нефлюктуационного члена (81) становится сравнимым с вкладом других членов, иначе, роль гармонического изменения параметра в процессе возбуждения уменьшается настолько, что становится сравнимой с ролью его беспорядочных флюктуаций. При еще больших расстройках

$$\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} - 1 \sim 1$$

роль синусоидальных колебаний параметров становится меньше роли их флюктуационных изменений. Переходная область

$$\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} - 1 \ll 1$$

составляет лишь малую долю всего диапазона $2\Delta/\hbar\omega_0 \sim 1$, входящего в область 4, поэтому мы не будем ее подробно анализировать. При желании это можно проделать и при помощи формулы (18.57) получить выражение для $\delta_{кр}/K$ в виде комбинации цилиндрических функций индекса $q = {}^1/_3$ и их производных, которая равна логарифмической производной от выражений (18.60), (18.63).

При значениях

$$\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0} - 1 \gtrsim 1,$$

т. е. в остальной части области 4 и в областях 8 и 11 аргумент цилиндрических функций индекса ${}^1/_3$ значительно превосходит единицу, и для них можно брать асимптотические выражения. В результате мы имеем

$$J_{iq}(iz)\,J_{-iq}(iz) = \left(\frac{u}{2\sqrt{3}}\right)^2 \left|H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{qu^3}{3}\right)\right|^2 \approx \frac{1}{2\pi qu} \quad (19.82)$$

$$(qu = \sqrt{q^2 - z^2}),$$

и поэтому

$$F(z,\ q) = \frac{1}{2}\,\frac{z}{q^2 - z^2},$$

$$\frac{\delta_{кр}}{K} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)^2 - 1} \qquad (19.83)$$

в областях 5, 8, 11 и, частично, 4.

Если сравнить последнее выражение с (81), то можно видеть, что его отличие лишь в отсутствии первого члена. В промежуточной области $(2\Delta/\hbar\omega_0)^2 - 1 \ll 1$ цилиндрические функции плавным («аналитическим») образом осуществляют выключение указанного члена. Единица, стоящая в правой части (83), имеет простой смысл, она дает то значение для отношения $\delta_{кр}/K$, которое было бы при отсутствии синусоидальных колебаний параметра. Второй член $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega_0}\right)^2 - 1\right]^{-1}$ описывает влияние синусоиды. Наличие синусоиды вносит изменения в эффективность имеющихся флюктуаций, увеличивая их способность давать возбуждение. Однако даже и такое стимулирующее влияние сходит на нет с уменьшением амплитуды $h$ или с увеличением расстройки $\Delta$. В областях 5, 8, 11 им можно пренебрегать.

Доминирующая роль, которую играет синусоидальное изменение параметра в области 1, утрачивается не только вследствие увеличения расстройки, но и в результате увеличения шума или уменьшения амплитуды $h$, т. е. при переходе в область 6 или 9. Рассмотрим относящийся к областям 1, 6, 9 случай нулевой расстройки, когда имеют место наиболее благоприятные условия для параметрического возбуждения колебаний. Полагая в (75) или (76) $\Delta = 0$, $q = 0$, находим

$$F(z, 0) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}, \qquad (19.84)$$

и формула (77) приобретает вид

$$\frac{\delta_{кр}}{K} = 1 + \frac{\hbar\omega_0}{4K}\frac{I_1\left(\frac{\hbar\omega_0}{4K}\right)}{I_0\left(\frac{\hbar\omega_0}{4K}\right)} \qquad (19.85)$$

в областях 1, 6, 9.

Второй член является доминирующим в области 1. Пользуясь соотношением

$$\frac{I_1(z)}{I_0(z)} = 1 - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

вытекающим из асимптотических формул, выделяем

в (85) основной нефлюктуационный член и главную шумовую поправку, которая вносит относительно малые искажения:

$$\frac{\delta_{кр}}{K} = \frac{\hbar\omega_0}{4K} + \frac{1}{2} \quad \text{(в области 1).} \qquad (19.86)$$

При уменьшении амплитуды синусоиды или увеличении шума второй член в правой части (85) уменьшается и делается сравнимым с первым чисто флюктуационным членом. При дальнейшем уменьшении амплитуды он начинает играть уже подчиненную роль. В области 9 основную поправку, обусловленную синусоидальными изменениями параметра, можно записать в более простой форме

$$\frac{\delta_{кр}}{K} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega_0}{4K}\right)^2. \qquad (19.87)$$

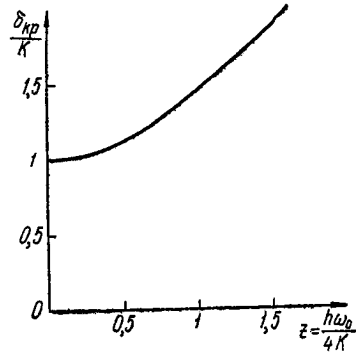


Рис. 19.3. Критическое затухание при нулевой расстройке

Зависимость критического затухания (85) от отношения $\hbar\omega_0/4K$ представлена на рис. 19.3. Обе причины: и гармонические, и флюктуационные колебания параметра — способствуют параметрическому возбуждению.

В областях 9 и 10, как и в областях 5, 8, 11, роль гармонического параметрического воздействия очень мала. В самом деле, функция $F = \langle \cos 2\varphi \rangle$ не может превосходить единицу, а стоящий перед ней в (77) малый множитель делает второй член значительно меньше, чем первый чисто флюктуационный член. Для областей 5, 8, 11 достаточна та простая теория, которая излагалась в разд. 3.

Труднее всего для исследования срединная область 7, в которой не пригодны упрощенные асимптотические выражения. Здесь следует пользоваться непосредственно формулой (75), определяющей $F(z, q)$ через функции Бесселя мнимого индекса и мнимого аргумента.

### 5. Плотность распределения амплитуды. Влияние нелинейности

Ранее мы интересовались условием параметрического возбуждения колебаний, которое имеет вид $\langle \delta \rangle <$

$<\delta_{кр}$. Однако изложенная теория позволяет получить более полные сведения, касающиеся амплитуды колебаний в параметрической системе.

Обратимся к уравнениям (12), (47). Если интересоваться поведением системы в течение временных интервалов $\Delta t$, значительно превосходящих время корреляции случайной функции $\xi(t)\sin(2\omega_0 t+2\varphi)$ (а также функции $\delta(t)$, когда она представляет собой случайный процесс), то первое уравнение можно записать в форме

$$\dot{u}=\delta_{кр}-\langle\delta\rangle+\xi_1(t), \tag{19.88}$$

содержащей дельта-коррелированный процесс $\xi_1(t)$ интенсивности (46).

Уравнению (88) соответствует уравнение Фоккера—Планка (45). Если в момент $t=0$ величина $u$ фиксирована ($u(0)=u_0$), то плотность распределения $w(u,\ t)$ в любой другой момент времени получается путем решения указанного уравнения. Такое решение, как известно, имеет вид

$$w(u,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi K_1 t}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2K_1 t}\left[u-u_0-(\delta_{кр}-\langle\delta\rangle)\,t\right]^2\right\}. \tag{19.89}$$

Простой заменой переменной $u=\ln A$ переходим от логарифма амплитуды к самой амплитуде колебаний и получаем закон изменения распределения амплитуды в параметрической линейной системе

$$w(A,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi K_1 t}}A^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2K_1 t}\ln^2\left(\frac{A}{A_0}\,e^{-\gamma t}\right)\right\} \tag{19.90}$$

$$(\gamma=\delta_{кр}-\langle\delta\rangle,\quad A_0=e^{u_0}).$$

Зафиксировав любой уровень $A=b$, можно доказать, что вероятность неравенства $A(t)>b$ с возрастанием $t$ стремится к единице при $\delta_{кр}-\langle\delta\rangle>0$ и к нулю при $\delta_{кр}-\langle\delta\rangle<0$. Следовательно, условие $\langle\delta\rangle<\delta_{кр}$ действительно является условием возбуждения, а противоположное неравенство — условием параметрической устойчивости.

В чисто линейных системах невозможен стационарный режим параметрических колебаний. Колебания

в них будут или неограниченно возрастать или убывать до нуля. В практических системах, конечно, невозможно беспредельное возрастание амплитуды колебаний. В них произойдет либо ограничение амплитуды нелинейностью, либо разрушение системы. Соответственно первому случаю, вводя нелинейность, можно вычислить стационарное распределение амплитуды.

В качестве примера нелинейной параметрической системы рассмотрим автоколебательную систему, описываемую уравнением

$$\ddot{y} + 2[\delta + \alpha y^2]\dot{y} + \omega_0^2[1 + \xi(t)]y = 0, \quad (19.91)$$
$$(\alpha > 0).$$

Переходя к переменным $u$ и $\varphi$, которые определены равенствами

$$y = e^u \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \dot{y} = -\omega_0 e^u \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (19.92)$$

обычным способом получаем укороченные уравнения

$$\dot{u} = \delta_{кр} - \delta - \alpha e^{2u} + \xi_1(t),$$
$$\dot{\varphi} = m_2 + \xi_2(t). \quad (19.93)$$

В предположении, что процесс $\xi(t)$ имеет достаточно малое время корреляции $\tau_{кор} \ll \frac{1}{|\delta_{кр} - \delta|}$; $\tau_{кор} \ll T_{рел}$, случайные функции $\xi_1$, $\xi_2$ можно считать дельта-коррелированными

$$\langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle = K_1 \delta(\tau); \quad \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle = K_2 \delta(\tau).$$

Величины $\delta_{кр}$, $m_2$, $K_1$, $K_2$ здесь определяются по прежним формулам (40), (42), (44), (46), $\left(K_1 = \delta_{кр} = \frac{\omega_0^2}{8} \varkappa(2\omega_0)\right)$.

Первому уравнению (93) соответствует уравнение Фоккера — Планка

$$\dot{w}(u) = -\frac{\partial}{\partial u}[(\delta_{кр} - \delta - \alpha e^{2u}) w(u)] + \frac{K_1}{2} \frac{\partial^2 w(u)}{\partial u^2}, \quad (19.94)$$

которое имеет стационарное решение

$$w(u) = C \exp\left\{\frac{2}{K_1}(\delta_{кр} - \delta)\, u - \frac{\alpha}{K_1} e^{2u}\right\}. \quad (19.95)$$

Переходя к амплитуде колебаний $A=e^u$ и определяя нормировочную постоянную $C$, получаем стационарное распределение амплитуды

$$w(A)=\frac{2}{\Gamma\left(1-\frac{\delta}{K_1}\right)}\left(\frac{\alpha}{K_1}\right)^{1-\frac{\delta}{K_1}}A^{1-2\frac{\delta}{K_1}}e^{-\frac{\alpha}{K_1}A^2} \qquad (19.96)$$

Здесь использовано равенство $\delta_{кр}=K_1$.

Найденное распределение с точностью до обозначений совпадает с плотностью распределения (16.43), которая изображена на рис. 16.2. В том случае, когда $\delta \ll K_1$, распределение (96) мало отличается от релеевского.

Выражение (96) имеет смысл лишь при условии параметрической неустойчивости $K_1>\delta$. В противном случае указанное выражение дает в нуле ($A=0$) неинтегрируемую особенность, которая означает, что $w(A)$ следует брать в виде $\delta(A)$. В реальных случаях, конечно, амплитуда при условии устойчивости параметрической системы не может в точности равняться нулю вследствие наличия флюктуаций непараметрической природы. Эти флюктуации добавляются в уравнение (91) в виде аддитивного члена и они вносят некоторый минимальный разброс амплитуды даже в устойчивом состоянии.

Указанные обстоятельства — ограничения амплитуды нелинейностью в случае параметрического возбуждения и наличие минимального разброса амплитуд в случае устойчивости приводят к тому, что при переходе от условия устойчивости к неустойчивости не наблюдается качественного скачка, который был бы в идеальной линейной системе. Такой переход характеризуется лишь более или менее заметным расширением распределения амплитуд. Это расширение тем более заметно, чем меньше аддитивные флюктуации. При большой нелинейности и большом уровне аддитивных флюктуаций расширение плотности распределения $w(A)$ при потере устойчивости может оказаться трудно отличимым от того расширения, которое имеет место при увеличении $K_1$ в пределах применимости формулы (96).

### 6. Двухконтурные параметрические системы. Параметрические усилители

Наряду с параметрическим возбуждением представляет интерес другое явление, используемое в радиотехнике: параметрическое усиление. Оно имеет место, когда

на параметрическую систему, находящуюся в устойчивом состоянии, подается внешнее воздействие, которое описывается в уравнении колебаний аддитивным членом. В этом случае энергия параметрических колебаний («накачки») недостаточна для того, чтобы дать возбуждение, но она накапливается и передается усиливаемому сигналу.

При гармоническом воздействии уравнение, описывающее параметрическую систему, имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 [1 + h \sin(\nu t + \psi)] x = \\ = -\omega_0^2 E \sin(\omega_c t + \chi). \qquad (19.97)$$

При условии, что частота $\omega_c$ близка к собственной частоте $\omega_0$, а $\nu$ — к $2\omega_0$, отсюда обычным способом подстановкой (7) выводятся укороченные уравнения

$$\dot{A} = -\delta A + \frac{\omega_0 h}{4} A \cos[(2\omega_0 - \nu) t + 2\varphi - \psi] + \\ + \frac{\omega_0 E}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_c) t + \varphi - \chi],$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\omega_0 h}{4} \sin[(2\omega_0 - \nu) t + 2\varphi - \psi] - \\ - \frac{\omega_0 E}{2A} \sin[(\omega_0 - \omega_c) t + \varphi - \chi].$$

При отсутствии расстроек $\omega_0 - \omega_c = 0$; $2\omega_0 - \nu = 0$ они принимают вид

$$\dot{A} = -\delta A + \frac{\omega_0 h}{4} A \cos(2\varphi - \psi) + \\ + \frac{\omega_0 E}{2} \cos(\varphi - \chi), \qquad (19.98)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\omega_0 h}{4} \sin(2\varphi - \psi) - \frac{\omega_0 E}{2A} \sin(\varphi - \chi).$$

Пользуясь ими, можно убедиться, что на процесс усиления существенное влияние оказывают фазовые соотношения между параметрическими колебаниями $h \sin(\nu t + \psi)$ и внешними колебаниями $E \sin(\omega_c t + \chi)$. При благоприятном соотношении $\psi = 2\chi$ согласно вто-

рому уравнению (98) устанавливается постоянная фаза $\varphi=\chi=\psi/2$, и первое уравнение (98), приобретающее вид

$$\dot{A}=-\left(\delta-\frac{\omega_0 h}{4}\right)A+\frac{\omega_0 E}{2},$$

дает коэффициент усиления

$$\frac{A}{E}=\frac{\omega_0}{2}\,\frac{1}{\delta-\frac{\omega_0 h}{4}}.$$

При неблагоприятных фазовых соотношениях (например, при $\psi=2\chi\pm\pi$) параметрические колебания не только не обеспечивают усиления, но, напротив, приводят к дополнительному затуханию в контуре и ослаблению сигнала. Так при условии $E\gg h$ имеем $\varphi=\chi$ и

$$\frac{A}{E}=\frac{\omega_0}{2}\,\frac{1}{\delta-\frac{\omega_0 h}{4}\cos(2\chi-\psi)}.$$

В частности $\frac{A}{E}=\frac{\omega_0}{2}\left[\delta+\frac{\omega_0 h}{4}\right]^{-1}$, если $2\chi-\psi=\pm\pi$.

Хотя описанную зависимость усиления от фазы иногда целесообразно использовать в специальных устройствах, для общих целей неискаженного усиления сигналов она нежелательна, и от нее следует избавиться. Это достигается применением двухконтурных параметрических систем.

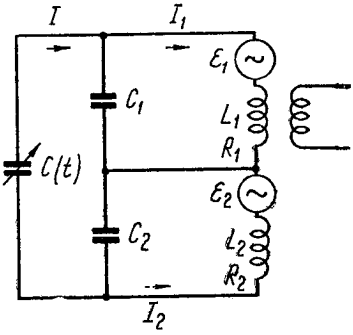


Рис. 19.4

На рис. 19.4 изображены два колебательных контура, которые связаны между собой переменной емкостью $C(t)$. На контуры подаются сторонние электродвижущие силы $E_1(t)$, $E_2(t)$. В качестве последних может выступать также электродвижущая сила тепловых шумов, возникающая в омических сопротивлениях $R_1, R_2$.

При помощи токов $I_1$, $I_2$, $I$, обозначенных на рисунке, записываем уравнения Кирхгофа

$$L_1\dot{I}_1 + R_1 I_1 = -\frac{1}{C_1}\int (I_1 - I)\,dt + E_1,$$

$$L_2\dot{I}_2 + R_2 I_2 = -\frac{1}{C_2}\int (I_2 + I)\,dt + E_2,$$

$$\frac{1}{C(t)}\int I dt + \frac{1}{C_1}\int (I - I_1)\,dt + \frac{1}{C_2}\int (I + I_2)\,dt = 0.$$

Обозначая

$$x_1 = \frac{1}{C_1}\int I_1 dt; \quad x_2 = \frac{1}{C_2}\int I_2 dt,$$

из последнего уравнения находим

$$\left(\frac{1}{C(t)} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\int I dt = x_1 - x_2.$$

Поэтому первые два уравнения дают

$$\ddot{x}_1 + 2\delta_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 =$$

$$= \omega_1^2 \frac{C_1^{-1}}{C^{-1}(t) + C_1^{-1} + C_2^{-1}}(x_1 - x_2) + \omega_1^2 E_1,$$

$$\ddot{x}_2 + 2\delta_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 =$$

$$= \omega_2^2 \frac{C_2^{-1}}{C^{-1}(t) + C_1^{-1} + C_2^{-1}}(x_2 - x_1) + \omega_2^2 E_2$$

$$\left(\omega_k^{-2} = L_k C_k; \quad 2\delta_k = \frac{R_k}{L_k}, \quad k = 1, 2\right).$$

Полученные уравнения можно также записать

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \omega_1^2 f_1; \quad \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \omega_2^2 f_2,$$

где введены обозначения

$$f_1 = -\frac{2\delta_1}{\omega_1^2}\dot{x}_1 + \gamma H(t)(x_1 - x_2) + E_1;$$

$$f_2 = -\frac{2\delta_2}{\omega_2^2}\dot{x}_2 + \frac{1}{\gamma}H(t)(x_2 - x_1) + E_2; \quad (19.99)$$

$$H(t) = \frac{C(t)\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 C_2 + (C_1 + C_2)C(t)}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}.$$

Мы предполагаем, что переменная емкость $C(t)$ не имеет большой постоянной составляющей, которая существенно изменяла бы собственные частоты $\omega_1$, $\omega_2$ контуров. В противном случае можно было бы вместо $x_1$, $x_2$ рассматривать их линейные комбинации, соответствующие нормальным колебаниям, и перейти к эквивалентной схеме того же вида, что и раньше (рис. 19.4), но с малой емкостью связи.

Далее, переменную составляющую $H(t)$, а также $\delta_1$, $\delta_2$, $E_1$, $E_2$, в свою очередь, мы предполагаем малыми, чтобы процессы $x_1$, $x_2$ были узкополосными и к ним можно было применять описанные ранее методы.

В указанных предположениях комплексные амплитуды (7.31)

$$z_1=\left(x_1+\frac{\dot{x}_1}{i\omega_1}\right)e^{-i\omega_1 t};\quad z_2=\left(x_2+\frac{\dot{x}_2}{i\omega_2}\right)e^{-i\omega_2 t} \tag{19.100}$$

будут мало меняться в течение периода $\frac{2\pi}{\omega_1}$ и $\frac{2\pi}{\omega_2}$ (§ 7). Согласно (7.32) их изменение описывается уравнениями

$$\dot{z}_1=\frac{1}{i\omega_1}e^{-i\omega_1 t}(\ddot{x}_1+\omega_1^2 x_1)=-i\omega_1 e^{-i\omega_1 t}f_1;$$

$$\dot{z}_2=-i\omega_2 e^{-i\omega_2 t}f_2. \tag{19.101}$$

В качестве аргументов функций $f_1$, $f_2$ здесь следует брать

$$x_k=\frac{1}{2}(z_k e^{i\omega_k t}+z_k^* e^{-i\omega_k t}),$$

$$\dot{x}_k=\frac{i\omega_k}{2}(z_k e^{i\omega_k t}-z_k^* e^{-i\omega_k t}),\quad (k=1,\ 2). \tag{19.102}$$

При подстановке (102) в (99) учтем, что члены вида $z_k^* e^{-2i\omega_k t}$ не оказывают существенного влияния и их можно отбросить. В самом деле, действия этого члена через полпериода взаимно уничтожаются, так как $z_k^*$ при этом практически не изменяется. В результате имеем

$$\dot{z}_1+\delta_1 z_1=-\frac{i\omega_1\gamma}{2}[H(t)z_1+He^{-2i\omega_1 t}z_1^*-$$

$$-He^{i(\omega_2-\omega_1)t}z_2-He^{-i(\omega_1+\omega_2)t}z_2^*]-i\omega_1 E_1 e^{-i\omega_1 t}; \tag{19.103}$$

$$\dot{z}_2+\delta_2 z_2=-\frac{i\omega_2}{2\gamma}[Hz_2+He^{-2i\omega_2 t}z_2^*-$$

$$-He^{i(\omega_1-\omega_2)t}z_1-He^{-i(\omega_1+\omega_2)t}z_1^*]-i\omega_2 E_2 e^{-i\omega_2 t}.$$

Из полученных уравнений видно, что на комплексную амплитуду $z_1$ существенное влияние оказывают спектральные составляющие функции $H(t)$, лежащие вблизи частот 0, $2\omega_1$, $|\omega_1 - \omega_2|$, $\omega_1 + \omega_2$, а также составляющие функции $E_1(t)$, лежащие вблизи частоты $\omega_1$.

Первая полоса частот обусловлена уходами собственной частоты контура, вследствие медленных флюктуаций параметров. Вторая полоса частот $\omega \approx 2\omega_1$ соответствует главному параметрическому резонансу. Оба эти явления охватываются теорией параметрических явлений в одноконтурной системе, поэтому мы не будем их рассматривать. Ограничимся рассмотрением полосы $\omega \approx \approx \omega_1 + \omega_2$ обусловленной исключительно взаимодействием двух контуров.

1. Пусть $H(t)$, $E_1(t)$ близки к синусоидам частот $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1$ соответственно

$$H(t) = h_0(t) \sin[(\omega_1 + \omega_2)t + \psi(t)], \quad (19.104)$$
$$E_1(t) = -E_0(t) \sin[\omega_1 t + \chi(t)], \quad E_2(t) = 0.$$

Здесь $h_0(t)$, $E_0(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — медленно меняющиеся амплитуды и фазы. Записав синусы в форме

$$\sin\Phi = \frac{1}{2i}(e^{i\Phi} - e^{-i\Phi})$$

и подставив в (103), убеждаемся, что большинство членов в правой части являются быстро меняющимися и их можно отбросить. Оставляя лишь существенные члены, имеем

$$\dot{z}_1 + \delta_1 z_1 = \frac{\omega_1 \gamma}{4} h(t) z_2^* + \frac{\omega_1}{2} E(t) \quad (19.105)$$

$$\dot{z}_2 + \delta_2 z_2 = \frac{\omega_2}{4\gamma} h(t) z_1^*,$$

где $h(t) = h_0(t) e^{i\psi(t)}$; $E(t) = E_0(t) e^{i\chi(t)}$ — комплексные амплитуды сигналов.

В том частном случае, когда сигналы $H(t)$, $E_1(t)$ строго гармонические с частотами $\nu$, $\omega_c$

$$H(t) = h_0 \sin(\nu t + \psi_0); \quad E_1(t) = -E_0 \sin(\omega_c t + \chi_0),$$

уравнения (105) принимают вид

$$\dot{z}_1 + \delta_1 \dot{z}_1 = \frac{\omega_1 \gamma}{4} h e^{i\Delta t} z_2^* + \frac{\omega_1}{2} E e^{i\Delta_1 t}; \quad (19.106)$$
$$\dot{z}_2^* + \delta_2 z_2^* = \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* e^{-i\Delta t} z_1.$$

Здесь $h = h_0 e^{i\psi_0}$; $E = E_0 e^{i\chi_0}$, а через $\Delta_1$, $\Delta$ обозначены расстройки

$$\Delta_1 = \omega_c - \omega_1, \quad \Delta = \nu - \omega_1 - \omega_2.$$

Заменой переменных

$$z_1' = e^{-i\Delta_1 t} z_1; \quad z_2' = e^{-i\Delta_2 t} z_2 \quad (\Delta_2 = \Delta - \Delta_1),$$

эти уравнения обращаются в уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1' + \alpha_1 z_1' - \frac{\omega_1 \gamma}{4} h z_2'^* &= \frac{\omega_1}{2} E, \\ \dot{z}_2'^* + \alpha_2^* z_2'^* - \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* z_1' &= 0, \end{aligned} \tag{19.107}$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_1(\Delta_1) = \delta_1 + i\Delta_1, \quad \alpha_2 = \alpha_2(\Delta_2) = \delta_2 + i\Delta_2. \tag{19.108}$$

Отыскивая решение полученной системы уравнений в форме $\text{const}\, e^{pt}$, получаем для $p$ характеристическое уравнение

$$p^2 + (\alpha_1 + \alpha_2^*) p + \alpha_1 \alpha_2^* - \frac{\omega_1 \omega_2}{16} h_0^2 = 0.$$

Решая его, находим

$$2p_{1,2} = -\alpha_1 - \alpha_2^* \pm \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2^*)^2 + \frac{\omega_1 \omega_2}{4} h_0^2}.$$

При $h_0 = 0$ имеем $p_1 = -\alpha_1$; $p_2 = -\alpha_2^*$. Если увеличивать $h_0$, то затухание в системе уменьшается, реальная часть одного из корней $p_1$, $p_2$ по абсолютной величине становится меньше, чем $\delta_1$, $\delta_2$. При достаточно большом $h_0 = h_{кр}$ она обращается в нуль. При еще больших значениях $h_0 > h_{кр}$ она становится положительной, что свидетельствует о неограниченном возрастании колебаний, т. е. о самовозбуждении. Из условия $\mathrm{Re}\, p = 0$ находим критическое значение амплитуды «накачки»

$$h_{кр} = 4 \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{\omega_1 \omega_2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{\delta_1 + \delta_2}\right)^2}, \tag{19.109}$$

соответствующее потере устойчивости.

Параметрическое усиление должно производиться в устойчивом режиме, когда $\mathrm{Re}\, p_{1,2} < 0$ и все переходные процессы затухают с постоянными времени

$$T_{1,2} = \frac{1}{-\mathrm{Re}\, p_{1,2}}.$$

В случае точной настройки частоты «накачки» на сумму собственных частот $\nu=\omega_1+\omega_2$ имеем $\Delta=0$ и

$$T_{1,2}=\frac{2}{\delta_1+\delta_2\mp\sqrt{(\delta_1-\delta_2)^2+\frac{1}{4}\omega_1\omega_2 h_0^2}}.$$

Когда с начального момента времени пройдет время $t\gg T_{1,2}$, переходные процессы затухнут и установится стабильный режим колебаний, соответствующий нулевым производным $\dot{z}_1'$, $\dot{z}_2'$ в уравнениях (107). Из них находим стационарные комплексные амплитуды вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 e^{-i\Delta_1 t}=\frac{\omega_1}{2}\frac{\alpha_2^*}{\alpha_1\alpha_2^*-\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}E, \\ z_2' &= z_2 e^{-i\Delta_2 t}=\frac{1}{8\gamma}\frac{\omega_1\omega_2 h}{\alpha_1^*\alpha_2-\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}E^*. \end{aligned} \tag{19.110}$$

Чтобы получить коэффициент усиления, следует взять модуль соответствующего комплексного выражения

$$\frac{A_1}{E_0}=\left|\frac{z_1'}{E}\right|=\frac{\omega_1}{2}\left|\frac{\alpha_2^*}{\alpha_1\alpha_2^*-\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}\right|=k_{11}(\omega_c).$$

Учитывая определение (108) величин $\alpha_1$, $\alpha_2$, для квадрата коэффициента усиления находим выражение

$$\begin{aligned} k_{11}^2(\omega_c) &= \frac{\omega_1^2}{4}\left|\frac{\alpha_2(\omega_c-\omega_1-\Delta)}{\alpha_1(\omega_c-\omega_1)\alpha_2(\omega_c-\omega_1-\Delta)-\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}\right|= \\ &= \frac{\omega_1^2}{4}\frac{\delta_2^2+(\omega_c-\omega_1-\Delta)^2}{[\delta_1\delta_2-\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2-(\omega_c-\omega_1)(\omega_c-\omega_1-\Delta)]^2+} \\ &\quad \leftarrow \overline{+[\delta_1(\omega_c-\omega_1-\Delta)+\delta_2(\omega_c-\omega_1)]^2}. \end{aligned} \tag{19.111}$$

Аналогично получаем

$$k_{21}^2(\omega_c)=\frac{A_2^2}{E_0^2}=\left|\frac{z_2'}{E}\right|^2=\frac{1}{64\gamma^2}\times$$

$$\times\frac{\omega_1^2\omega_2^2 h_0^2}{\left|\alpha_1(\omega_c-\omega_1)\alpha_2(\omega_c-\omega_1-\Delta)-\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2\right|^2}. \tag{19.112}$$

Таким же способом можно вычислить коэффициенты усиления при подаче гармонического напряжения $E_2(t) = -E_0 \sin(\omega_c t + \chi_0)$ на второй контур. Заменяя в последних выражениях индексы 1 и 2 друг на друга, будем иметь

$$k_{12}^2(\omega_c) = \frac{\gamma^2}{64} \times$$

$$\times \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 h_0^2}{\left| \alpha_1(\omega_c - \omega_2 - \Delta)\alpha_2(\omega_c - \omega_2) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2 \right|^2},$$

$$k_{22}^2(\omega_c) = \frac{\omega_2^2}{4} \times$$

$$\times \frac{|\alpha_1(\omega_c - \omega_2 - \Delta)|^2}{\left| \alpha_1(\omega_c - \omega_2 - \Delta)\alpha_2(\omega_c - \omega_2) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2 \right|^2}. \quad (19.113)$$

Когда амплитуды и фазы сигналов не вполне постоянны, приведенные результаты справедливы, если время их изменения значительно превосходит постоянные времени $T_1$, $T_2$.

2. Перейдем к тому случаю, когда напряжение $E_1(t)$ содержит, кроме гармонического сигнала, флюктуационную составляющую $\xi(t)$, имеющую спектральную плотность $S[\xi; \omega]$. Флюктуации $\xi(t)$ могут попадать в схему вместе с гармоническим сигналом, могут порождаться в омическом сопротивлении $R_1$, как тепловые шумы, наконец, могут возникать вследствие флюктуаций тока, протекающего через переменную емкость, т. е. порождаться этой емкостью. То же самое можно сказать о втором контуре. Все указанные причины нарушают стабильный режим колебаний, приводят к отклонениям от стабильных значений (110). Согласно (103) эти флюктуации описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 + \delta_1 z_1 - \frac{\omega_1\gamma}{4} h e^{i\Delta t} z_2^* &= \omega_1 \xi'(t) \\ \dot{z}_2^* + \delta_2 z_2^* - \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* e^{-i\Delta t} z_1 &= 0, \end{aligned} \quad (19.114)$$

где $\xi'(t) = -ie^{-i\omega_1 t}\xi(t)$ — случайная функция, имеющая корреляционную функцию

$$\langle \xi' \xi'^*_\tau \rangle = e^{i\omega_1 \tau} \langle \xi \xi_\tau \rangle$$

и спектральную интенсивность

$$S[\xi',\ \omega] = 2\int \langle \xi'\xi_\tau'^* \rangle e^{i\omega\tau} d\tau = S[\xi,\ \omega+\omega_1]. \quad (19.115)$$

Представляя в (114) процессы $z_1$, $z_2$, $\xi'$ в форме спектральных разложений

$$z_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\omega t} z_1(\omega)\, d\omega,\ z_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\omega t} z_2(\omega)\, d\omega,$$

$$\xi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\omega t}\xi'(\omega)\, d\omega$$

и приравнивая в этих уравнениях спектральные компоненты одинаковой частоты, получаем

$$(i\omega+\delta_1) z_1(\omega) - \frac{\omega_1\gamma}{4} h z_2^*(\Delta-\omega) = \omega_1\xi'(\omega),$$

$$[-i(\Delta-\omega)+\delta_2]\, z_2^*(\Delta-\omega) - \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* z_1(\omega) = 0.$$

Отсюда находим соотношения

$$z_1(\omega) = \omega_1 \frac{\alpha_2^*(\Delta-\omega)}{\alpha_1(\omega)\alpha_2^*(\Delta-\omega) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}\xi'(\omega);$$

$$z_2(\omega) = \frac{1}{4\gamma}\frac{\omega_1\omega_2 h}{\alpha_1^*(\Delta-\omega)\alpha_2(\omega) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}\xi'^*(\Delta-\omega),$$

аналогичные (110). Здесь

$$\alpha_1(\Omega) = \delta_1 + i\Omega,\quad \alpha_2(\Omega) = \delta_2 + i\Omega.$$

Следовательно, для спектральных интенсивностей имеем

$$S[z_1,\ \omega] = \omega_1^2 \frac{\delta_2^2 + (\Delta-\omega)^2}{\left|\alpha_1(\omega)\alpha_2^*(\Delta-\omega) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2\right|^2} S[\xi',\ \omega],$$

$$S[z_2,\ \omega] = \frac{1}{16\gamma^2}\frac{\omega_1^2\omega_2^2 h_0^2}{\left|\alpha_1^*(\Delta-\omega)\alpha_2(\omega) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2\right|^2} S[\xi',\ \Delta-\omega].$$

Чтобы найти флюктуационный спектр колебаний $x_1 = \mathrm{Re}\, z_1 e^{i\omega_1 t}$, следует воспользоваться формулой (7.13). Учитывая также (115), искомую спектральную плотность

можно записать при помощи коэффициентов усиления (111)—(113)

$$\begin{aligned} S[x_1, \omega] &= k_{11}^2(\omega) S[\xi, \omega], \\ S[x_2, \omega] &= k_{21}^2(\nu - \omega) S[\xi, \nu - \omega]. \end{aligned} \tag{19.116}$$

Таким же способом исследуются флюктуации, порождаемые шумовой электродвижущей силой во втором контуре $E_2(t)$. Они создают флюктуации тока, спектральная плотность которых определяется формулами, аналогичными формулам (116):

$$\begin{aligned} S[x_1, \omega] &= k_{12}^2(\nu - \omega) S[E_2, \nu - \omega], \\ S[x_2, \omega] &= k_{22}^2(\omega) S[E_2, \omega]. \end{aligned} \tag{19.117}$$

Чтобы получить выражение непосредственно для тока в первом контуре, достаточно учесть, что $I_1 = C_1 \dot{x}_1$ и следовательно

$$S[I_1, \omega] = \omega^2 C_1^2 S[x_1, \omega].$$

3. Помимо аддитивных флюктуаций, входящих в $E_1$, $E_2$, возможны параметрические флюктуации, т. е. флюктуационные изменения функции $H(t)$. Поэтому будем полагать

$$H(t) = h_0 \sin(\nu t + \psi) + \zeta(t). \tag{19.118}$$

Как отмечалось ранее, на процесс колебаний существенное влияние оказывают спектральные составляющие флюктуаций $\zeta(t)$, лежащие в четырех областях вблизи частот 0, $2\omega_1$, $|\omega_1 - \omega_2|$, $\omega_1 + \omega_2$. Когда флюктуационные воздействия не слишком интенсивны, эти области можно рассматривать порознь, а затем суммировать спектральные плотности флюктуаций, обусловленных различными областями, а также напряжениями $E_1$, $E_2$.

Рассматривая лишь флюктуации $\zeta_1(t)$ в полосе частот $|\omega - \omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$, мы можем отбросить члены $\zeta(t)$, $\zeta(t) e^{-2i\omega_1 t}$, $\zeta(t) e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}$ в (103). При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 + \delta_1 z_1 - \frac{\omega_1 \gamma}{4} h e^{i\Delta t} z_2^* &= \frac{\omega_1}{2} E e^{i\Delta_1 t} + \\ &+ \frac{\omega_1 \gamma}{2} \zeta'(t) z_2^*, \\ \dot{z}_2^* + \delta_2 z_2^* - \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* e^{-i\Delta t} z_1 &= \frac{\omega_2}{2\gamma} \zeta'^*(t) z_1, \end{aligned} \tag{19.119}$$

где $\zeta' = ie^{-i(\omega_1+\omega_2)t}\zeta$ — случайная функция с корреляционной функцией и со спектральной плотностью

$$\langle \zeta' \zeta_\tau'^* \rangle = e^{i(\omega_1+\omega_2)\tau} \langle \zeta \zeta_\tau \rangle,$$
$$S[\zeta', \omega] = S[\zeta, \omega + \omega_1 + \omega_2]. \tag{19.120}$$

Влияние параметрических флюктуаций, описываемых членами $\zeta' z_2^*$, $\zeta'^* z_1$ в (119), проявляется в двух отношениях. Во-первых, они изменяют среднее значение комплексной амплитуды колебаний $\langle z_1 \rangle$, $\langle z_2 \rangle$, во-вторых, они приводят к дополнительному флюктуационному разбросу вокруг этого среднего значения.

При исследовании первого эффекта будем предполагать, что спектральная интенсивность остается приблизительно постоянной в узкой полосе частот

$$|\omega - \omega_1 - \omega_2| \sim \frac{1}{T_{1,2}}.$$

Это обстоятельство позволяет считать время корреляции $\tau_{кор}$ функции $\zeta'(t)$ в (119) много меньше, чем время релаксации $T_{1,2}$, характеризующие быстроту изменения амплитуд ($\tau_{кор} \ll T_{1,2}$).

Усредняя уравнения (119), имеем

$$\langle \dot{z}_1 \rangle + \delta_1 \langle z_1 \rangle - \frac{\omega_1 \gamma}{4} h e^{i\Delta t} \langle z_2^* \rangle = \frac{\omega_1}{2} E e^{i\Delta_1 t} + \frac{\omega_1 \gamma}{2} \langle \zeta' z_2^* \rangle;$$
$$\langle \dot{z}_2^* \rangle + \delta_2 \langle z_2^* \rangle - \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* e^{-i\Delta t} \langle z_1 \rangle = \frac{\omega_2}{2\gamma} \langle \zeta'^* z_1 \rangle. \tag{19.121}$$

Чтобы вычислить средние $\langle \zeta' z_2^* \rangle$, $\langle \zeta'^* z_1 \rangle$, используем метод, примененный на стр. 360—361, который основан на указанном условии $\tau_{кор} \ll T_{1,2}$. Подберем временной сдвиг $\Delta_0$ такой, что $\tau_{кор} \ll \Delta_0 \ll T_{1,2}$. Вследствие первого неравенства $\tau_{кор} \ll \Delta_0$ корреляции между $\zeta'(t)$ и $z_2^*(t - \Delta_0)$ отсутствуют, поэтому

$$\langle \zeta'(t) z_2^*(t) \rangle = \langle \zeta'(t) [z_2^*(t) - z_2^*(t - \Delta_0)] \rangle. \tag{19.122}$$

Далее за время $\Delta_0$ амплитуды не успевают существенно измениться и при интегрировании второго уравнения (119) можно полагать

$$z_2^*(t) - z_2^*(t-\Delta_0) = -\delta_2 z_2^* \Delta_0 + \\ + \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* e^{-i\Delta t} z_1 \Delta_0 + \frac{\omega_2}{2\gamma} z_1 \int_{t-\Delta_0}^{t} \zeta'^*(t)\, dt. \qquad (19.123)$$

Подставляя (123) в (122), получаем

$$\langle \zeta' z_2^* \rangle = \frac{\omega_2}{2\gamma} \langle z_1 \rangle \int_{-\infty}^{0} \langle \zeta' \zeta_\tau'^* \rangle\, d\tau + O(\Delta_0) = \frac{\omega_2}{4\gamma} \langle z_1 \rangle \varkappa,$$

где

$$\varkappa = 2\int_{-\infty}^{0} \langle \zeta' \zeta_\tau'^* \rangle\, d\tau = 2\int_{-\infty}^{0} \langle \zeta \zeta_\tau \rangle e^{i(\omega_1+\omega_2)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} S[\zeta,\ \omega_1+\omega_2] + 2i\int_{-\infty}^{0} \langle \zeta \zeta_\tau \rangle \sin(\omega_1+\omega_2)\tau\, d\tau. \qquad (19.124)$$

Аналогично для второго члена

$$\langle \zeta'^* z_1 \rangle = \frac{\omega_1 \gamma}{4} \langle z_2^* \rangle \varkappa^*.$$

Вследствие этого уравнение (121) приобретает вид

$$\langle \dot{z}_1 \rangle + \left(\delta_1 - \frac{\omega_1\omega_2}{8}\varkappa\right)\langle z_1 \rangle - \frac{\omega_1\gamma}{4} h e^{i\Delta t} \langle z_2^* \rangle = \frac{\omega_1}{2} E e^{i\Delta_1 t},$$

$$\langle \dot{z}_2^* \rangle + \left(\delta_2 - \frac{\omega_1\omega_2}{8}\varkappa^*\right)\langle z_2^* \rangle - \frac{\omega_2}{4\gamma} h^* e^{-i\Delta t} \langle z_1 \rangle = 0. \qquad (19.125)$$

Полученные уравнения отличаются от уравнений (106) тем, что в них $\delta_1$, $\delta_2$ заменяются на $\delta_1 - \frac{1}{8}\omega_1\omega_2\varkappa \equiv \tilde{\delta}_1$, $\delta_2 - \frac{1}{8}\omega_1\omega_2\varkappa^* \equiv \tilde{\delta}_2$. Принимая во внимание действительную часть этой поправки, приходим к выводу, что наличие параметрических флюктуаций приводит к уменьшению затухания контуров $\delta_1$, $\delta_2$ на величину $\frac{1}{16}\omega_1\omega_2 S[\zeta,\ \omega_1+\omega_2]$. Решение уравнений (125) аналогично решению уравнений (106), разница лишь в том,

что в формулах (107), (110)—(113) следует $\alpha_1(\Omega)$, $\alpha_2(\Omega)$ заменить на

$$\tilde{\alpha}_1(\Omega) = \delta_1 - \frac{1}{8}\omega_1\omega_2\varkappa + i\Omega,$$

$$\tilde{\alpha}_2(\Omega) = \delta_2 - \frac{1}{8}\omega_1\omega_2\varkappa^* + i\Omega. \qquad (19.126)$$

Так стационарные средние амплитуды (110) будут иметь вид

$$\langle z_1'\rangle = \langle z_1\rangle e^{-i\Delta_1 t} = \frac{\omega_1}{2}\frac{\tilde{\alpha}_2 - \Delta_2)E}{\tilde{\alpha}_1(\Delta_1)\tilde{\alpha}_2(-\Delta_2) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}, \qquad (19.127)$$

$$\langle z_2'\rangle = \langle z_2\rangle e^{-i\Delta_2 t} = \frac{1}{8\gamma}\frac{\omega_1\omega_2 hE^*}{\tilde{\alpha}_1(-\Delta_1)\tilde{\alpha}_2(\Delta_2) - \frac{1}{16}\omega_1\omega_2 h_0^2}.$$

Новые значения коэффициентов усиления (111)—(113), в которых $\alpha_1$, $\alpha_2$ заменены на $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, мы будем обозначать $\tilde{k}_{11}$, $\tilde{k}_{21}$, $\tilde{k}_{12}$, $\tilde{k}_{22}$.

Перейдем к рассмотрению второго эффекта — дополнительных флюктуационных отклонений от средних амплитуд, которые вызываются параметрическими флюктуациями $\zeta(t)$. Указанные отклонения обозначим

$$\delta z_1 = z_1 - \langle z_1\rangle; \quad \delta z_2 = z_2 - \langle z_2\rangle. \qquad (19.128)$$

Можно доказать, что при малых флюктуациях из (119) следуют уравнения

$$\delta\dot{z}_1 + \tilde{\delta}_1\delta z_1 - \frac{\omega_1\gamma}{4}he^{i\Delta t}\delta z_2^* = \frac{\omega_1\gamma}{2}\langle z_2^*\rangle\zeta',$$

$$\delta\dot{z}_2^* + \tilde{\delta}_2\delta z_2^* - \frac{\omega_2 h^*}{4\gamma}e^{-i\Delta t}\delta z_1 = \frac{\omega_2}{2\gamma}\langle z_1\rangle\zeta'^*. \qquad (19.129)$$

Найденные уравнения аналогичны (114). Разница заключается в том, что в них заменены затухания и флюктуационные воздействия присутствуют в обоих уравнениях. Совпадение будет еще более полным, если обозначить

$$\xi_1(t) = \frac{\gamma}{2}\langle z_2^*\rangle\zeta' e^{i\omega_1 t} = \frac{i\gamma}{2}\langle z_2'^*\rangle\zeta e^{-i(\nu-\omega_c)t}.$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2\gamma}\langle z_1\rangle^*\zeta' e^{i\omega_2 t} = \frac{i}{2\gamma}\langle z_1'\rangle^*\zeta e^{-i\omega_c t}. \qquad (19.130)$$

Этим случайным функциям соответствуют спектральные плотности

$$S[\xi_1, \omega] = \frac{\gamma^2}{4} |\langle z_2 \rangle|^2 S[\zeta, \omega + \nu - \omega_c],$$

$$S[\xi_2, \omega] = \frac{1}{4\gamma^2} |\langle z_1 \rangle|^2 S[\zeta, \omega + \omega_c]. \quad (19.131)$$

Рассматривая стационарный режим колебаний, в последних формулах в качестве $\langle z_1' \rangle$, $\langle z_2' \rangle$ следует брать (127). Функции $\xi_1(t)$, $\xi_2^*(t)$ можно считать некоррелированными, так как их корреляционная функция, пропорциональная выражению

$$\langle \zeta \zeta_\tau \rangle e^{-i(\nu - 2\omega_c)t + i\omega_c \tau},$$

в среднем по $t$ исчезает.

Пользуясь формулами (116), (117) с соответствующими изменениями, получаем вследствие (131) спектральную интенсивность флюктуаций

$$S[x_1, \omega] = k_{11}^2(\omega) \frac{\gamma^2}{4} |\langle z_2 \rangle|^2 S[\zeta, \omega + \nu - \omega_c] +$$

$$+ k_{12}^2(\nu - \omega) \frac{1}{4\gamma^2} |\langle z_1 \rangle|^2 S[\zeta, \nu + \omega_c - \omega];$$

$$S[x_2, \omega] = k_{21}^2(\nu - \omega) \frac{\gamma^2}{4} |\langle z_2 \rangle|^2 S[\zeta, 2\nu - \omega_c - \omega] +$$

$$+ k_{22}^2(\omega) \frac{1}{4\gamma^2} |\langle z_1 \rangle|^2 S[\zeta, \omega + \omega_c].$$

Входящие сюда средние $\langle z_1 \rangle$, $\langle z_2 \rangle$ определяются по формулам, аналогичным (110). Записывая их при помощи коэффициентов усиления (111)—(113), имеем

$$S[x_1, \omega] = \frac{\gamma^2}{4} E^2 k_{21}^2(\omega_c) k_{11}^2(\omega) S[\zeta, \omega + \nu - \omega_c] +$$

$$+ \frac{E^2}{4\gamma^2} k_{11}^2(\omega_c) k_{12}^2(\nu - \omega) S[\zeta, \nu + \omega_c - \omega]; \quad (19.132)$$

$$S[x_2, \omega] = \frac{\gamma^2}{4} E^2 k_{21}^2(\omega_c) k_{21}^2(\nu - \omega) S[\zeta, 2\nu - \omega_c - \omega] +$$

$$+ \frac{E^2}{4\gamma^2} k_{11}^2(\omega_c) k_{22}^2(\omega) S[\zeta, \omega + \omega_c].$$

Как видно из полученных формул, особенностью параметрических флюктуаций $\zeta(t)$ является то, что их влияние пропорционально квадрату амплитуды $E$ усиливае-

мого сигнала. На спектр флюктуаций вблизи частоты $\omega_c$ существенное влияние оказывают спектральные компоненты параметрических флюктуаций вблизи частоты $\nu$. Если в области частот, лежащей вблизи $\nu$ и имеющей ширину порядка $\delta_1$, $\delta_2$ или $\Delta_1$, $\Delta_2$, спектр $S[\zeta, \omega]$ остается приблизительно постоянным, то в (132) можно все спектральные плотности в правой части заменить на $S[\zeta, \nu]$. Интегрируя первое равенство (132) по частоте и учитывая (2.15), получаем дисперсию флюктуаций усиленного сигнала

$$\frac{\sigma^2(x_1)}{E^2} = \frac{1}{8\pi} S[\zeta, \nu] \left[ \gamma^2 k_{21}^2(\omega_c) \int_0^\infty k_{11}^2(\omega)\, d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\gamma^2} k_{11}^2(\omega_c) \int_0^\infty k_{12}^2(\omega)\, d\omega \right], \qquad (19.133)$$

где $k_{11}^2(\omega)$, $k_{12}^2(\omega)$, $k_{21}^2(\omega)$ определяются выражениями (111)—(113). Параметрические флюктуации дают, следовательно, постоянное отношение сигнала к шуму, независящее от величины сигнала:

$$\frac{k_{11}(\omega_c) E}{\sigma(x_1)} = 2\sqrt{2\pi}\gamma \left\{ S[\zeta, \nu] \left[ \int_0^\infty k_{12}^2(\omega)\, d\omega + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \gamma^4 \frac{k_{21}^2(\omega_c)}{k_{11}^2(\omega_c)} \int_0^\infty k_{11}^2(\omega)\, d\omega \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Присутствие других неучтенных членов в правой части уравнений (103) приводит к тому, что на флюктуационный разброс сигналов $x_1$, $x_2$ оказывают влияние другие области частот в спектре $S[\zeta, \omega]$. Так благодаря члену $Hz_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}$ появляются флюктуационные компоненты, интенсивность которых пропорциональна $S[\zeta, \omega_1 - \omega_2]$. Для них могут быть выведены аналогичные же формулы.

**Таблица функций** $Z_1(y) = 2\int_0^\infty e^{-t^4-4yt^2}\,dt$, $Z_2(y) =$

$$= 2\int_0^\infty e^{-t^4-4yt^2}\,t^2\,dt$$

| $x$ | $Z_1(\sqrt{x}2)$ | $Z_1(-\sqrt{x}2)$ | $Z_2(\sqrt{x}2)$ | $Z_2(-\sqrt{x}2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 1,4058 | 2,6196 | 0,3399 | 1,2993 |
| 0,3 | 1,2163 | 3,8250 | 0,2381 | 2,5743 |
| 0,6 | 1,0843 | 6,3355 | 0,1777 | 5,7653 |
| 0,9 | 1,0050 | 10,4622 | 0,1453 | 11,851 |
| 1,9 | 0,9494 | 17,4873 | 0,1245 | 23,498 |
| 1,5 | 0,9067 | 29,6282 | 0,1094 | 45,629 |
| 1,8 | 0,8721 | 50,8187 | 0,0984 | 87,481 |
| 2,1 | 0,8432 | 87,9723 | 0,0898 | 166,23 |
| 2,9 | 0,8191 | 153,512 | 0,0822 | 313,99 |
| 2,7 | 0,7987 | 269,57 | 0,0764 | 590,52 |
| 3,0 | 0,7802 | 475,61 | 0,0707 | 1106,0 |
| 3,4 | 0,7561 | 1019,17 | 0,0669 | 2544,0 |
| 3,8 | 0,7400 | 2197,4 | 0,0578 | 5823,6 |

## Принятые обозначения

$\langle \xi \rangle$ — статистическое среднее значение (математическое ожидание) случайной величины $\xi$;

$w(\xi)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины $\xi$;

$D\xi = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$ — дисперсия случайной величины $\xi$;

$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$ — среднеквадратичное значение величины $\xi$;

$\xi = \xi(t)$; $\xi_\tau = \xi(t+\tau)$ — значения функции в сдвинутые моменты времени;

$K[\xi, \eta] = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle$ — корреляция случайных величин $\xi$ и $\eta$;

$k_2(t, t') = K[\xi(t), \xi(t')]$ — корреляционная функция;

$S[\xi, \omega] = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle \xi\xi_\tau \rangle d\tau$ — спектральная интенсивность стационарной случайной функции $\xi(t)$;

$S[\xi, \eta, \omega] = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle \xi\eta_\tau^* \rangle d\tau$ — взаимная спектральная интенсивность случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$;

$\xi_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \xi(t)\, dt$ — случайный спектр процесса $\xi(t)$;

$L[\xi, p] = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} \xi(t)\, dt$ — изображение Лапласа;

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-y^2} dy \\ \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-y^2} dy \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}\right\}$$ — интегралы вероятности ошибок;

$F^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{y^2}{2}}$ — производные интеграла вероятности ошибок;

$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{F^{(1)}(x)} F^{(n+1)}(x)$ — полиномы Эрмита;

$z^* = \mathrm{Re}z - i\mathrm{Im}z$ — комплексно сопряженное значение комплексной величины $z = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z$.

Обозначения справочников:

I. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГИТТЛ, 1949.

II. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951.

III. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов. Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, 1951.

ДОПОЛНЕНИЕ 1 (к п. 4 § 4)

## К ЗАМЕНЕ РЕАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ПРОЦЕССОМ МАРКОВА

Здесь приводятся некоторые промежуточные выкладки, которые помогут читателю разобраться в достаточно сложном выводе формул (4.179). Из (4.151) и (4.152) следует, что

$$L(1 - L + L^2 - \dots) = \varepsilon A + \varepsilon^2 B + \varepsilon^3 C + \dots,$$

где

$$C = -\frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_3 \rangle + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\langle \dot{H}_2 H_1 \rangle + \langle \dot{H}_1 H_2 \rangle] - \frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\langle \dot{H}_1 H_1^2 \rangle -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}\left[\langle \dot{H}_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1 \rangle + \langle \dot{H}_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_2 \rangle\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1 \rangle \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle H_1^2 \rangle +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle \dot{H}_1 H_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1 \rangle - \frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1 \rangle. \quad (4.290)$$

Запишем формулу (4.290) в виде

$$C = -\frac{\partial}{\partial x}C_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}C_2 + \frac{\partial^3}{\partial x^3}C_3, \quad (4.291)$$

где $C_1$, $C_2$ и $C_3$ являются функциями, которые можно выразить через производные и интегралы от функций $F$, входящих в формулу (4.142). Используем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_2 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_1 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle \dot{H}_2 \rangle \langle H_1 \rangle - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial \dot{H}_2}{\partial x} \right\rangle \langle H_1 \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle \dot{H}_1 \rangle \frac{\partial}{\partial x}\langle H_2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle \dot{H}_1 \rangle \langle H_2 \rangle - \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial x} \right\rangle \langle H_2 \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\dot{H}_1\rangle\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle H_1^2\rangle = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\langle\dot{H}_1\rangle\langle H_1^2\rangle -$$
$$- 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1^2\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\left\langle\frac{\partial^2\dot{H}_1}{\partial x^2}\right\rangle\langle H_1^2\rangle,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle\dot{H}_1H_1\rangle\frac{\partial}{\partial x}\langle H_1\rangle = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\langle\dot{H}_1H_1\rangle\langle H_1\rangle -$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}H_1\right\rangle\langle H_1\rangle - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\langle\dot{H}_1\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\dot{H}_1\rangle\frac{\partial}{\partial x}\langle H_1\rangle\frac{\partial}{\partial x}\langle H_1\rangle = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\langle\dot{H}_1\rangle\langle H_1\rangle^2 +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[2\left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle^2 + \langle\dot{H}_1\rangle\left\langle\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\left\langle\frac{\partial^2\dot{H}_1}{\partial x^2}\right\rangle\langle H_1\rangle^2 + \left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle\left\langle\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle\right],$$

которые являются следствием операторного тождества

$$f(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Подставляя эти соотношения в (4.290), получим

$$C_1 = \langle\dot{H}_3\rangle - \left\langle\frac{\partial\dot{H}_2}{\partial x}\right\rangle\langle H_2\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial^2\dot{H}_2}{\partial x^2}\right\rangle\langle H_1^2\rangle +$$
$$+ \left\langle\frac{\partial^2\dot{H}_2}{\partial x^2}\right\rangle\langle H_1\rangle^2 + \left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle\left\langle\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle,$$
$$C_2 = \langle\dot{H}_2H_1\rangle + \langle\dot{H}_1H_2\rangle - \langle\dot{H}_2\rangle\langle H_1\rangle - \langle\dot{H}_1\rangle\langle H_2\rangle - \left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1^2\rangle -$$
$$- \left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}H_1\right\rangle\langle H_1\rangle - \left\langle\dot{H}_1\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle + 2\left\langle\frac{\partial\dot{H}_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle^2 +$$
$$+ \langle\dot{H}_1\rangle\left\langle\frac{\partial H_1}{\partial x}\right\rangle\langle H_1\rangle, \qquad (4.292)$$
$$C_3 = \frac{1}{2}\langle\dot{H}_1H_1^2\rangle - \frac{1}{2}\langle\dot{H}_1\rangle\langle H_1^2\rangle - \langle\dot{H}_1H_1\rangle\langle H_1\rangle + \langle\dot{H}_1\rangle\langle H_1\rangle^2.$$

Затем подставим (4.146) и (4.147) в (4.292). С учетом (1.47) получим

$$C_3 = \frac{1}{2}\mathbf{K}[\dot{H}_1, H_1, H_1] = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0}\mathbf{K}[F, F_\tau, F_\sigma]d\tau d\sigma.$$

Аналогично, для $C_1$ находим

$$C_1 = \frac{1}{2}\mathbf{K}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, H_1, H_1\right] + \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}\int\limits_{t_0}^{t} dt' \frac{\partial F}{\partial x}(t')\int\limits_{t_0}^{t'} F(t'')dt''\right\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial F}{\partial x}(t')dt'\right\rangle\left\langle\int\limits_{t_0}^{t} F(t'')dt''\right\rangle -$$

$$- \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle\left\langle\int\limits_{t_0}^{t} dt'\frac{\partial F}{\partial x}(t')\int\limits_{t_0}^{t'} F(t'')dt''\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle\left\langle\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial F}{\partial x}(t')dt'\right\rangle\left\langle\int\limits_{t_0}^{t} F(t'')dt''\right\rangle.$$

Теперь разобьем область интегрирования $t' < t, t'' < t$ в третьем и последнем членах на две части, т. е. области $t' > t''$ и $t' < t''$. Затем используем тождество

$$\langle\xi\eta\zeta\rangle - \langle\xi\rangle\langle\eta\zeta\rangle - \langle\xi\eta\rangle\langle\zeta\rangle + \langle\xi\rangle\langle\eta\rangle\langle\zeta\rangle = \mathbf{K}[\xi,\eta,\zeta] + \langle\eta\rangle\mathbf{K}[\xi,\zeta].$$

В результате получаем формулу

$$C_1 = \frac{1}{2}\mathbf{K}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, H_1, H_1\right] +$$

$$+ \iint\limits_{0>\tau>\sigma}\left\{\mathbf{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F_\tau}{\partial x}, F_\sigma\right] + \left\langle\frac{\partial F_\tau}{\partial x}\right\rangle\mathbf{K}\left[\frac{\partial F}{\partial x}, F_\sigma\right]\right\}d\sigma d\tau -$$

$$- \iint\limits_{\tau<\sigma<0}\left\{\left\langle\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F_\tau}{\partial x}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle\left\langle\frac{\partial F_\tau}{\partial x}\right\rangle\right\}\langle F_\sigma\rangle d\tau d\sigma.$$

Для получения окончательного результата нужно лишь сделать замену переменных $\sigma \to \tau$, $\tau \to \sigma$ в последнем интеграле. Выражение для $C_2$ находится по той же схеме. Теперь вывод формулы (4.179) становится вполне прозрачным.

ДОПОЛНЕНИЕ 2 (к п. 5 § 11)

## О ВЫБРОСАХ СГЛАЖЕННОГО ПРОЦЕССА

В этом приложении приводятся некоторые промежуточные выкладки, поясняющие вывод нескольких последних формул из § 11.

1. После исключения выбросов и интервалов, более коротких чем $2\tau_{sm}$, плотность вероятности для длительности выбросов дается выражением

$$w_1(\tau) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n_1(2\tau_{sm})}\dfrac{dn_1(\tau)}{d\tau} & \text{при } \tau > 2\tau_{sm}, \\ 0 & \text{при } \tau \leqslant 2\tau_{sm}. \end{cases} \tag{11.97}$$

Аналогично для интервалов получаем

$$w_2(\tau) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n_2(2\tau_{sm})}\dfrac{dn_2(\tau)}{d\tau} & \text{при } \tau > 2\tau_{sm}, \\ 0 & \text{при } \tau \leqslant 2\tau_{sm}. \end{cases}$$

Здесь среднее число выбросов в единицу времени равно $n_1(2\tau_{sm})$, тогда как для интервалов оно равно $n_2(2\tau_{sm})$. Доля полного времени, занимаемого выбросами, составляет

$$n_1(2\tau_{sm})\langle\tau_1\rangle = n_1(2\tau_{sm})\int \tau w_1(\tau)d\tau,$$

для интервалов эта величина имеет вид

$$n_2(2\tau_{sm})\langle\tau_2\rangle = n_2(2\tau_{sm})\int \tau w_2(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$n_1(2\tau_{sm})\langle\tau_1\rangle + n_2(2\tau_{sm})\langle\tau_2\rangle = 1 \tag{11.98}$$

Для достаточно малых $\tau_{sm}$ среднее число выбросов и интервалов приблизительно одинаково, т. е.

$$n_1(2\tau_{sm}) \approx n_2(2\tau_{sm}) \approx \frac{1}{2} w(b) \sqrt{\frac{K}{\pi \tau_{sm}}}, \tag{11.99}$$

и поэтому формула (11.98) принимает вид

$$n_1(2\tau_{sm}) = \frac{1}{\langle \tau_1 \rangle + \langle \tau_2 \rangle}. \tag{11.100}$$

Используя (11.97), получаем характеристическую функцию

$$\Theta_1(u) = -\frac{1}{n_1(2\tau_{sm})} \int\limits_{2\tau_{sm}}^{\infty} e^{iu\tau} \frac{dn_1(\tau)}{d\tau} d\tau =$$

$$= e^{2iu\tau_{sm}} + \frac{iu}{n_1(2\tau_{sm})} \int\limits_{2\tau_{sm}}^{\infty} e^{iu\tau} n_1(\tau) d\tau,$$

откуда следует

$$\Theta_1(u) \approx 1 - \frac{\bar{n}_1(-iu)}{n_1(2\tau_{sm})} \tag{11.101}$$

при условии, что $|u|$ не слишком велико, т. е. если $|u| \ll \frac{1}{2\tau_{sm}}$.

Благодаря исключению «коротких» выбросов и интервалов теперь нет необходимости, чтобы за выбросом следовал интервал, и действительно за выбросом может следовать другой выброс. Возникновение (Наличие) выброса или интервала является событием, не зависящим от того, что имело место перед ним — выброс или интервал. В силу (приближенного) соотношения $n_1(2\tau_{sm}) = n_2(2\tau_{sm})$ вероятность появления выброса или интервала всегда равна $\frac{1}{2}$. Рассмотрим выброс, которому предшествовал интервал. Этот выброс является «одиночным» (за ним следует интервал) с вероятностью $\frac{1}{2}$, «двойным» (за ним сначала следует один выброс, а затем один интервал) — с вероятностью $\frac{1}{4}$, «тройным» — с вероятностью $\frac{1}{8}$ и так далее. Поэтому плотность вероятности сглаженного выброса, простирающегося от одного интервала до следующего, имеет вид

$$\tilde{w}_1(\tau) = \frac{1}{2}w_1(\tau) + \frac{1}{4}\int w_1(\tau_1)w_1(\tau-\tau_1)d\tau_1 + \\ + \frac{1}{4}\iint w_1(\tau_1)w_1(\tau_2)w_1(\tau-\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \ldots.$$

Переходя к характеристической функции, имеем

$$\tilde{\Theta}_1(u) = \frac{1}{2}\Theta_1(u) + \frac{1}{4}\Theta_1^2(u) + \frac{1}{8}\Theta_1^3(u) + \ldots = \frac{\Theta_1(u)}{2-\Theta_1(u)}. \quad (11.102)$$

Подстановка (11.101) в (11.102) приводит к

$$\tilde{\Theta}_1(u) = \frac{n_1(2\tau_{sm}) - \tilde{n}_1(-iu)}{n_1(2\tau_{sm}) + \tilde{n}_1(-iu)}. \quad (11.103)$$

Затем найдем среднюю длительность

$$\langle\tilde{\tau}_1\rangle = \int \tau\tilde{w}_1(\tau)d\tau = \left[\frac{1-\Theta_1(ip)}{p}\right]_{p=0} \quad (11.104)$$

сглаженных выбросов, которую затем сравним с $\langle\tau_1\rangle$. Подставляя (11.102) в (11.104), получаем

$$\langle\tilde{\tau}_1\rangle = 2\lim_{p\to 0}\frac{1-\Theta_1(ip)}{p[2-\Theta_1(ip)]},$$

откуда следует

$$\langle\tilde{\tau}_1\rangle = 2\langle\tau_1\rangle, \quad (11.105)$$

поскольку

$$\lim_{p\to 0}\frac{1-\Theta_1(ip)}{p} = \langle\tau_1\rangle.$$

Проделывая все то же самое для интервалов, находим

$$\tilde{\Theta}_2(u) = \frac{n_1(2\tau_{sm}) - \tilde{n}_2(-iu)}{n_1(2\tau_{sm}) + \tilde{n}_2(-iu)}, \quad (11.106)$$
$$\langle\tilde{\tau}_2\rangle = 2\langle\tau_2\rangle.$$

Очевидно, среднее число объединенных выбросов (или интервалов) в единицу времени равно

$$\tilde{n}_1(2\tau_{sm}) = \tilde{n}_2(2\tau_{sm}) = \frac{1}{\langle\tilde{\tau}_1\rangle + \langle\tilde{\tau}_2\rangle}.$$

С учетом (11.100), (11.105) и (11.106) отсюда следует

$$\tilde{n}_1(2\tau_{sm}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\langle\tau_1\rangle + \langle\tau_2\rangle} = \frac{1}{2}n_1(2\tau_{sm}). \tag{11.107}$$

И наконец, для вычисления ненормированного распределения (по длительности) $\tilde{n}_1(\tau)$ объединенных выбросов нам нужно всего лишь использовать формулу (11.67), заменяющую величину $n(0)$ на конечную плотность объединенных пиков $\tilde{n}_1(2\tau_{sm})$

$$\tilde{n}_1(p) = \tilde{n}_1(2\tau_{sm})[1 - \tilde{\Theta}_1(ip)]. \tag{11.108}$$

Затем подстановка (11.103) и (11.107) в (11.108) приводит к искомой формуле (11.93).

2. Для доказательства (11.94) применим формулу (6.130) к процессу $\tilde{\eta}$, полученному исключением «коротких» выбросов и интервалов. Используя величины, имеющие отношение к объединенным выбросам и интервалам, получаем

$$pL\left[-\frac{dK_{\tilde{\eta}}}{d\tau}, p\right] = \frac{1}{\langle\tilde{\tau}_1\rangle + \langle\tilde{\tau}_2\rangle}\frac{[1 - \tilde{\Theta}_1(ip)][1 - \tilde{\Theta}_2(ip)]}{1 - \tilde{\Theta}_1(ip)\tilde{\Theta}_2(ip)}.$$

Как и при выводе (11.76), правую часть этого выражения можно записать в виде

$$\left[\frac{1}{\tilde{n}_1(2\tau_{sm})[1 - \tilde{\Theta}_1(ip)]} + \frac{1}{\tilde{n}_1(2\tau_{sm})[1 - \tilde{\Theta}_2(ip)]} - \frac{1}{\tilde{n}_1(2\tau_{sm})}\right]^{-1}.$$

Используя (11.108), находим

$$pL\left[-\frac{dK_{\tilde{\eta}}}{d\tau}, p\right] = \left[\frac{1}{\tilde{n}_1(p)} + \frac{1}{\tilde{n}_2(p)} - \frac{1}{\tilde{n}_1(2\tau_{sm})}\right]^{-1}. \tag{11.109}$$

Для получения (11.94) нужно всего лишь подставить (11.93) и аналогичное выражение для $\tilde{n}_2(p)$ в (11.109), учитывая при этом (11.107).

3. Для сглаженного марковского процесса с постоянной времени $2\tau_{sm}$ число выбросов с длительностью $\tau \gg 2\tau_{sm}$ остается практически неизменным, тогда как число выбросов с длительностью $\tau \sim 2\tau_{sm}$ меняется, но не порядок величины. Поэтому

$$\tilde{n}_1(2\tau_{sm}) \sim n_1(2\tau_{sm}).$$

Более короткие выбросы $\tau \ll 2\tau_{sm}$ практически все сглаживаются, и следовательно

$$\tilde{n}_1(0) \sim \tilde{n}_1(2\tau_{sm}) \sim n_1(2\tau_{sm}). \tag{11.110}$$

Точное значение $\tilde{n}_1(0)$ зависит от того, как конкретно проводится сглаживание, но при оценке по порядку величины формула (11.110) справедлива при любом способе сглаживания. Поскольку

$$n_1(\tau) \approx w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi\tau}} \tag{11.111}$$

при условии, что $\tau$ существенно меньше других постоянных системы (скажем, порядка $T_0$), соотношение (11.110) принимает вид

$$\tilde{n}_1(0) \sim \tilde{n}_1(2\tau_{sm}) \sim \frac{1}{2}w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi\tau}} \tag{11.112}$$

(выражения (11.99) и (11.107) служат примером этой формулы). В то же время, как показано в разделе 5 §11

$$\tilde{n}_1(\tau) \approx n_1(\tau) \quad \text{при} \quad \tau \gg 2\tau_{sm}.$$

Поэтому, согласно (11.111)

$$\tilde{n}_1(\tau) \approx w_0(b)\sqrt{\frac{K}{2\pi\tau}} \quad \text{при} \quad 2\tau_{sm} \ll \tau \ll T_0. \tag{11.113}$$

Вводя интерполяцию функции $f(z)$, можно объединить формулы (11.112) и (11.113) в одну формулу (11.95). Тогда легко видеть, что из формул (11.112) и (11.113) следует соотношение (11.96).

ДОПОЛНЕНИЕ 3 (к §13)

## ИСКЛЮЧЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ИЗ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для полноты здесь приводится описание общего метода исключения колебательных членов непосредственно из стохастического уравнения. Допустим, что последнее имеет вид

$$\dot{w} = \varepsilon L(t\varepsilon)w = \varepsilon L_1(t)w + \varepsilon^2 L_2(t)w + \ldots, \tag{13.81}$$

где $w = w(z)$ и $L(t,\varepsilon)$ — некоторый линейный оператор (данный метод может быть также обобщен на случай нелинейных операторов). Пусть зависимость от времени в $L(t,\varepsilon)$ будет исключительно за счет колебательных процессов, скажем от функций $\sin k\omega_0 t$, $\cos k\omega_0 t$. Рассмотрим, например, уравнение (13.60) в виде (13.81) с $w(z) = w(A,\varphi)$. Допустим требуется заменить (13.81) эквивалентным неколебательным уравнением

$$\dot{w}^* = \varepsilon L^* w^*, \tag{13.82}$$

записанное с помощью некоторой другой функции $w^*$. Затем используем следующий метод, обобщающий метод, описанный на стр. 351–353. Суть этого метода состоит в проведении преобразования

$$w = w^* + \varepsilon F[w^*] = w^* + \varepsilon F_1[w^*] + \varepsilon^2 F_2[w^*] + \ldots, \tag{13.83}$$

где $F^*[w] \equiv F[w^*, z, t, \varepsilon]$ и $F_k[w^*, z, t]$ — функционалы от $w^*$, которые имеют колебательную зависимость от $t$. Дифференцируя (13.83) по времени, с учетом (13.82) имеем

$$\dot{w} = \varepsilon L^* w^* + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial t} + \ldots$$
$$+ \varepsilon \int \frac{\delta F_1}{\delta w^*(z)} \varepsilon L^* w^* dz + \varepsilon^2 \int \frac{\delta F_2}{\delta w^*(z)} \varepsilon L^* w^* dz + \ldots. \tag{13.84}$$

Найдем последовательные приближения оператора $L^*$ и преобразования (13.82) при помощи последовательного вычисления членов $L_k^*$ в разложении

$$\varepsilon L^* = \varepsilon L_1^* + \varepsilon^2 L_2^* + \dots \tag{13.85}$$

и функционалов $F_1, F_2, \dots$. Подставляя (13.85) в (13.84) и используя (13.81) и (13.83), получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&\varepsilon L_1^* w^* + \varepsilon^2 L_2^* w^* + \dots + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial t} + \dots = \\
&\quad = \varepsilon L(t,\varepsilon) w^* + \varepsilon^2 L(t,\varepsilon) F_1 + \varepsilon^3 L(t,\varepsilon) F_2 + \dots - \\
&\quad - \varepsilon \int \frac{\delta F_1}{\delta w^*} (\varepsilon L_1^* + \varepsilon^2 L_2^*) w^* dz - \\
&\quad - \varepsilon^2 \int \frac{\delta F_2}{\delta w^*} (\varepsilon L_1^* + \varepsilon^2 L_2^*) w^* dz - \dots,
\end{aligned} \tag{13.86}$$

которое может быть использовано для обобщения искомых последовательных приближений. Приравнивая члены одного порядка по $\varepsilon$ в (13.86), находим

$$\begin{aligned}
&L_1^* w^* + \frac{\partial F_1}{\partial t} = L_1(t) w^*, \\
&L_2^* w^* + \frac{\partial F_2}{\partial t} = L_2(t) w^* + L_1(t) F_1 - \int \frac{\delta F_1}{\delta w^*} L_1^* w^* dz, \\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Неколебательные члены в правых частях принадлежат $L_k^* w^*$, тогда как колебательные к $\partial F_k / \partial t_k$. Поэтому

$$\begin{aligned}
L_1^* w^* &= \text{неколебательные члены в } L_1(t) w^*, \\
\frac{\partial F_1}{\partial t} &= \text{колебательные члены в } L_1(t) w^*, \\
L_2^* w^* &= \text{неколебательные члены в } L_2(t) w^* + \\
&\quad + L_1(t) F_1 - \int \frac{\delta F_1}{\delta w^*} L_1^* w^* dz, \\
\frac{\partial F_2}{\partial t} &= \text{колебательные члены в } L_2(t) w^* + \\
&\quad + L_1(t) F_1 - \int \frac{\delta F_1}{\delta w^*} L_1^* w^* dz, \\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{13.87}$$

Используя эти соотношения, можно последовательно найти $L_1^*$, $F_1$, $L_2^*$, $F_2, \ldots$, т. е. можно записать уравнение (13.82) и преобразование (13.83) с любой точностью.

Теперь приведем два примера, иллюстрирующих данный метод.

**Пример 1.** Пусть (13.81) является уравнением первого порядка вида

$$\dot{w} = -\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[A-\frac{A^3}{A_0^2}+\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)\cos 2\Phi-\frac{A^3}{3A_0^2}\cos 4\Phi\right]w\right\}-$$
$$-\frac{\varepsilon\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\sin 2\Phi+\frac{A^2}{3A_0^2}\sin 4\Phi\right]w\right\}\equiv\varepsilon L_1(t)w, \tag{13.88}$$

которое соответствует уравнению (13.40) без флуктуаций В этом случае первые два члена в (13.87) имеют вид

$$L_1^* w^* = -\frac{\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(A-\frac{A^3}{A_0^2}\right)w^*\right],$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)\cos 2\Phi-\frac{A^3}{3A_0^2}\cos 4\Phi\right]w^*\right\}-$$
$$-\frac{\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\sin 2\Phi+\frac{A^2}{3A_0^2}\sin 4\Phi\right]w^*\right\}.$$

Из последнего уравнения следует

$$F_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)\sin 2\Phi-\frac{A^3}{6A_0^2}\sin 4\Phi\right]w^*\right\}-$$
$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\cos 2\Phi+\frac{A^2}{6A_0^2}\cos 4\Phi\right]w^*\right\}. \tag{13.89}$$

Поскольку

$$\int\frac{\delta F_1}{\delta w^*}L_1^* w^* dA d\varphi$$

не содержит неколебательных членов, находим, что третье уравнение (13.87) принимает вид

$$L_2^* w^* = \quad \text{неколебательные члены в} \quad L_1(t)F_1.$$

Теперь нужно сделать подстановку из (13.88) и (13.89) и затем отбросить колебательные члены. Очевидно выражение

$$-\frac{\omega_0}{2}\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(A-\frac{A^3}{A_0^2}\right)F_1\right],$$

содержит только колебательные члены. Члены типа $\cos k\Phi \sin l\Phi$ также являются осциляторными. Поэтому $L_2^* w^*$ равно неколебательным членам в следующем выражении:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\omega_0}{8}\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)\cos 2\Phi-\frac{A^3}{3A_0^2}\cos 4\Phi\right]\times\\
&\qquad\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\cos 2\Phi+\frac{A^2}{6A_0^2}\cos 4\Phi\right]w^*+\\
&+\frac{\omega_0}{8}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\sin 2\Phi+\frac{A^2}{3A_0^2}\sin 4\Phi\right]\times\\
&\qquad\times\frac{\partial}{\partial A}\left[\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)\sin 2\Phi-\frac{A^3}{6A_0^2}\sin 4\Phi\right]w^*-\\
&-\frac{\omega_0}{8}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\sin 2\Phi+\frac{A^2}{3A_0^2}\sin 4\Phi\right]\times\\
&\qquad\times\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\cos 2\Phi+\frac{A^2}{6A_0^2}\cos 4\Phi\right]w^*.
\end{aligned}$$

Используя формулы

$$\sin k\Phi\frac{\partial}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin k\Phi-k\cos k\Phi,$$

$$\cos k\Phi\frac{\partial}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos k\Phi-k\sin k\Phi,$$

переместим оператор $\partial/\partial\varphi$ налево. Затем, опуская ряд колебательных членов, получаем

$$\begin{aligned}
L_2^* w^* = &-\frac{\omega_0}{16}\frac{\partial^2}{\partial A\partial\varphi}\left[\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)-\frac{A^5}{18A_0^4}\right]w^*+\\
&+\frac{\omega_0}{16}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{4A^3}{3A_0^2}-A\right)-\frac{A^2}{3A_0^2}\frac{\partial}{\partial A}\frac{A^3}{6A_0^2}\right]w^*+
\end{aligned}$$

$+$ неколебательные члены в

$$-\frac{\omega_0}{4}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\left(-\cos 2\Phi+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin 2\Phi\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2A^2}{3A_0^2}\left(-\cos 4\Phi+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\varphi}\sin 4\Phi\right)\right]\times$$

$$\times\left[\left(1-\frac{2A^2}{3A_0^2}\right)\cos 2\Phi+\frac{A^2}{6A_0^2}\cos 4\Phi\right]w^*.$$

Используя соотношение

$$f(A)\frac{\partial}{\partial A}=\frac{\partial}{\partial A}f(A)-f'(A)$$

для преобразования среднего члена и оставляя только неколебательные выражения в последнем члене, после алгебраических преобразований в конце концов получим

$$L_2^*w^*=\frac{\omega_0}{16}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(2-4\frac{A^2}{A_0^2+3\dfrac{A^4}{A_0^4}}\right)w^*\right].$$

В этом приближении неколебательное уравнение (13.82) принимает вид

$$\dot{w}^*=\varepsilon L_1^*w_1^*+\varepsilon^2L_2^*w_2^* \tag{13.90}$$

и в точности соответствует уравнениям (13.53), полученным ранее для неколебательной амплитуды и фазы. Таким образом метод исключения колебаний из уравнения в частных производных (13.88) эквивалентен методу исключения колебаний непосредственно из дифференциальных уравнений (13.53), т. е. методу, описанному на стр. 353–356.

**Пример 2.** Далее рассмотрим уравнение

$$\dot{w}=\varepsilon L_1^0w+\varepsilon^{2r}\frac{\partial^2}{\partial A\partial\varphi}\left[\frac{\omega_0^2\kappa(\omega_0)}{2}\frac{\sin 2\Phi}{A}w\right]\equiv\varepsilon L_1^0w+\varepsilon^{2r}L_{2r}(t)w,$$

где $L_1^2$ — некоторый неколебательный оператор и последний член является типичным, подобным тем, которые входят в (13.60)

при условии, что флуктуационные члены в (13.47) выбраны в виде $\varepsilon'\xi\omega_0 \sin\Phi$, $\varepsilon'\xi\omega_0 \cos\Phi$. Этот член в (13.90) возникает из члена (13.62) в уравнении (13.60). Применяя (13.87) к данному случаю, видим, что $L_1^* = L_1^0$, в то время как все функции $F_1, L_1^*, \ldots, F_{2r-1}, L_{2r}^*$ исчезают. Первое нетривиальное уравнение в (13.87) соответствует индексу $2r$ и имеет вид

$$\frac{\partial F_{2r}}{\partial t} = \frac{\omega_0^2 \kappa(\omega_0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} \left[ \frac{\sin 2\Phi}{A} w^* \right],$$

откуда следует

$$F_{2r} = \frac{\omega_0 \kappa(\omega_0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} \left[ \frac{\cos 2\Phi}{A} w^* \right]. \tag{13.91}$$

Теперь найдем первую ненулевую поправку, возникающую за счет функции (13.91), к неколебательному уравнению

$$\dot{w}^* = \varepsilon L_1^0 w^*$$

Принимая во внимание (13.80), легко видеть, что первая ненулевая поправка $\varepsilon^{4r} L_{4r}^* w^*$ возникает за счет формы $\varepsilon^{4r} L_{2r}(t) F_{2r}$, и соответствующее уравнение (13.87) имеет вид

$$\begin{aligned}
L_{4r}^* &= \text{неколебательные члены в} L_{2r}(t) F_{2r} = \\
&= \text{неколебательные члены в} \\
&- \frac{\omega_0^3}{8} \kappa^2(\omega_0) \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} \left[ \frac{\sin 2\Phi}{A} \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} \left( \frac{\cos 2\Phi}{A} w^* \right) \right] = \\
&= \text{неколебательные члены в} \\
&\frac{\omega_0^3}{8} \kappa^2(\omega_0) \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} \left[ \frac{\cos 2\Phi}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\cos 2\Phi}{A} w^* \right) \right] = \\
&= \frac{\omega_0^3}{8} \kappa^2(\omega_0) \frac{\partial^2}{\partial A \partial \varphi} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{w^*}{A} \right) \right].
\end{aligned}$$

Поэтому колебательные члены порядка $\varepsilon^{2r}$ сначала действуют на неколебательные члены более высокого порядка $\varepsilon^{4r}$. Все это согласуется с тем, что сказано на стр. 359–360.

ДОПОЛНЕНИЕ 4 (к §14)

## О МЕТОДАХ РЕШЕНИЙ УПРОЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном приложении приводятся подробности расчетов, с помощью которых из формулы (14.16) получаем формулу (14.18). Чтобы вывести первую формулу (14.18), сделаем замену переменных $t = 2y^{1/2}\sinh\xi$. При этом получаем

$$2\int_0^\infty e^{-t^4-4yt-2y^2}dt = 4y^{1/2}\int_0^\infty e^{-2y^2\coth 4\xi}\coth 4\xi d\xi =$$

$$= y^{1/2}\int_0^\infty e^{-2y^2\coth\eta}\coth\frac{\eta}{4}d\eta = y^{1/2}K_{1/4}(2y^2),$$

где последний шаг следует из формулы (6.444.1) из справочника Рыжика и Градштейна [II].

Третья формула (14.18) легко выводится из первой при помощи соотношения

$$Z_2(y) = -\frac{1}{4}\frac{dZ_1(y)}{dy}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} Z_2(y) &= -\frac{1}{4}\frac{d}{dy}[y^{1/2}e^{2y^2}K_{1/4}(2y^2)] = \\ &= -\frac{1}{4}e^{2y^2}\frac{d}{dy}[y^{1/2}K_{1/4}(2y^2)] - y^{3/2}e^{2y^2}K_{1/4}(2y^2). \end{aligned} \tag{14.71}$$

Но

$$\frac{d}{dy}[y^{1/2}K_{1/4}(2y^2)] = \frac{dz}{dy}\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^{1/4}K_{1/4}(z)\right],$$

где $z = 2y^2$. Используя формулы (6.496.14) и (6.496.16) из вышеупомянутого Справочника [II], получаем

$$\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^{1/4} K_{1/4}(z)\right] = -\left(\frac{z}{2}\right)^{1/4} K_{-3/4}(z) = -\left(\frac{z}{2}\right)^{1/4} K_{3/4}(z).$$

Поэтому получаем выражение

$$\frac{d}{dy}[y^{1/2} K_{1/4}(2y^2)] = -4y^{3/2} K_{3/4}(2y^2),$$

из которого при подстановке в (14.71) получаем третью формулу (14.18).

Для вывода второй и четвертой формул (14.18) необходимо сделать комплексное продолжение первой и третьей формулы, что соответствует подстановке $y \to e^{\pi i} y_0$, где $\operatorname{Im} y_0 = 0$. Начиная с соотношений

$$K_p(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(z) - I_p(z)}{\sin p\pi},$$
$$I_q(e^{2\pi i} z) = e^{2\pi i q} I_q(z)$$

(см. формулы (6.495), (6.455) из Рыжика и Градштейна [II]), находим что

$$\begin{aligned}(e^{2\pi i} z)^{1/4} K_{1/4}(e^{2\pi i} z) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} z^{1/4} [I_{-1/4}(z) + I_{1/4}(z)] = \\ &= z^{1/4} [K_{1/4}(z) + \pi\sqrt{2} I_{1/4}(z)],\end{aligned} \tag{14.72}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}(e^{2\pi i} z)^{3/4} K_{3/4}(e^{2\pi i} z) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} z^{3/4} [I_{-3/4}(z) + I_{3/4}(z)] = \\ &= z^{3/4} [K_{3/4}(z) + \pi\sqrt{2} I_{3/4}(z)].\end{aligned} \tag{14.73}$$

Согласно (14.72) получаем формулу

$$\begin{aligned}Z_1(e^{\pi i} y_0) &= (e^{\pi i} y_0)^{1/2} e^{2y_0^2} K_{1/4}(e^{2\pi i} 2y_0^2) = \\ &= y_0^{1/2} e^{2y_0^2} [K_{1/4}(2y_0^2) + \pi\sqrt{2} I_{1/4}(2y_0^2)],\end{aligned}$$

которая и является второй формулой (14.18). Аналогично, используя формулы (14.72) и (14.73), можно легко проверить четвертую формулу (14.18).

ДОПОЛНЕНИЕ 5 (к §18)

## СПЕКТРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СИГНАЛОВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ СИНХРОНИЗОВАННЫМ АВТОГЕНЕРАТОРОМ

Здесь мы поясним замечания, сделанные в конце §18, которые касаются спектральной структуры сигнала, генерируемого синхронизованным генератором. Допустим, что скачки фазы вперед происходят в моменты времени $t_i^+$ и имеют пуассоновское распределение с плотностью $G_+$. Обозначим аналогичные величины для обратных скачков через $t_i^-$ и $G_-$. Тогда, пренебрегая малыми фазовыми флуктуациями, имеем

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_i F_+(t - t_i^+) - \sum_i F_-(t - t_i^-), \tag{18.145}$$

где $F_+$ и $F_-$ представляют собой некоторые «импульсы» (см. ниже) типа

$$\int F_\pm(\theta)d\theta = 2\pi. \tag{18.146}$$

Пусть

$$\xi_\pm(t) = \sum_i \delta(t - t_i^\pm) \tag{18.147}$$

представляют собой соответствующие «случайные функции плотности» [см. (6.21)], которые описываются следующими обобщающими функционалами

$$L_\pm[v(t)] = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} G_\pm v(t)dt\right\} \tag{18.148}$$

[см. (6.31)]. В таком случае из (18.145) следует соотношение

$$\varphi(\tau)-\varphi(0) = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^{\infty} [F_+(t-s)\xi_+(s) - F_-(t-s)\xi_-(s)]ds. \tag{18.149}$$

По аналогии с (7.16) и (17.32) корреляционную функцию обобщенного сигнала можно записать в виде

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 \,\mathrm{Re} \langle e^{-i\varphi(\tau)+i\varphi(0)-i\omega_s \tau} \rangle. \qquad (18.150)$$

Далее следует подставить (18.149) в (18.150). Совместное использование (6.24) и (18.148) приводит к

$$\left\langle \exp\left\{ i \int u(s)\xi(s)ds \right\} \right\rangle = \exp\left\{ G_\pm \int [e^{ius} - 1] ds \right\}. \qquad (18.151)$$

Тогда из (18.149) и (18.150) следует что

$$\langle x x_\tau \rangle = \frac{1}{2} A_0^2 Re \left[ \exp\left\{ G_+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-i\int\limits_0^\tau F_+(t-s)dt} - 1 \right] ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + G_+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-i\int\limits_0^\tau F_+(t-s)dt} - 1 \right] ds - i\omega_s t \right\} \right], \quad \tau \geqslant 0. \qquad (18.152)$$

Здесь мы считаем функции $\xi_+(t)$ и $\xi_-(t)$ статистически независимыми, что является вполне естественным допущением в пуссоновском приближении. Теперь с помощью преобразования Фурье выражения (18.152) можно найти искомую спектральную плотность. По аналогии с (7.13) и (17.88) имеем

$$S[x, \omega] = \frac{1}{4} A_0^2 S_1(\omega - \omega_s), \qquad (18.153)$$

где

$$S_1(\nu) = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_+(\tau) f_-(\tau) e^{i\nu\tau} d\tau =$$

$$= 4\,\mathrm{Re} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_+(\tau) f_-(\tau) e^{i\nu\tau} d\tau \right\} \qquad (18.154)$$

[см. (18.157)] и

$$f_\pm(\tau) = \exp\left\{ G_\pm \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{\mp i\int\limits_0^\tau F(t-s)dt} - 1 \right] ds \right\}, \quad \tau \geqslant 0. \qquad (18.155)$$

Функции $F_\pm$ можно найти из уравнений вида

$$F_+(\theta) = \Delta - \Delta_s \sin \int_c^\theta F(\theta')d\theta',$$

полученных в результате усреднения формулы (18.43), но можно сделать качественные оценки, используя приближение

$$F_+(\theta) = F_-(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\tau_0} & \text{при } 0 \leqslant \theta \leqslant \tau_0, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где

$$\tau_0 \sim \frac{1}{\Delta_s} \ln D_s$$

[см. (18.95)]. В этом случае

$$\int_0^\tau F_\pm(t-s)dt = \frac{2\pi}{\tau_0} \begin{cases} s+\tau_0 & \text{при} \quad -\tau_0 \leqslant s \leqslant -\tau_0 + \tau, \\ \tau & \text{при} \quad -\tau_0 + \tau \leqslant s \leqslant 0, \\ \tau - s & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

если $\tau \leqslant \tau_0$, тогда как

$$\int_0^\tau F_\pm(t-s)dt = \frac{2\pi}{\tau_0} \begin{cases} s+\tau_0 & \text{при} \quad -\tau_0 \leqslant s \leqslant 0, \\ \tau_0 & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau - \tau_0, \\ \tau - s & \text{при} \quad \tau - \tau_0 \leqslant s \leqslant \tau, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

если $\tau \geqslant \tau_0$. Подставляя эти функции в (18.155) и интегрируя по $s$, получаем

$$f_\pm(\tau) = \exp\Bigg\{2G_\pm \int_0^\tau \left(e^{\mp 2\pi i s/\tau_0} - 1\right) ds + \\ + G_\pm(\tau_0 - \tau)\left(e^{\mp 2\pi i s/\tau_0} - 1\right)\Bigg\} \quad \text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0,$$

$$f_\pm(\tau) = \exp\left\{2G_\pm \int_0^\tau \left(e^{\mp 2\pi i s/\tau_0} - 1\right) ds\right\} \qquad \text{при} \quad \tau \geqslant \tau_0,$$

и следовательно

$$f_+(\tau)f_-(\tau) =$$
$$= \exp\left\{(G_+ + G_-)\left[\frac{\tau_0}{\pi}\sin\frac{2\pi\tau}{\tau_0} + (\tau_0 - \tau)\cos\frac{2\pi\tau}{\tau_0} - \tau - \tau_0\right] -\right.$$
$$\left. -i(G_+ - G_-)\left[\frac{\tau_0}{\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi\tau}{\tau_0}\right) + (\tau_0 - \tau)\sin\frac{2\pi\tau}{\tau_0}\right]\right\} \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0,$$

$$f_+(\tau)f_-(\tau) = \exp\{-2(G_+ + G_-)\tau_0\} \quad \text{при} \quad \tau \geqslant \tau_0 \qquad (18.156)$$

Функция $f_+(\tau)f_-(\tau)$ может быть продолжена в область $\tau < 0$ при помощи формулы

$$f_+(-\tau)f_-(-\tau) = f_+^*(\tau)f_-^*(\tau), \qquad (18.157)$$

следующей из соотношения

$$\langle e^{-i\varphi(-\tau)+i\varphi(0)}\rangle = \langle e^{i\varphi(\tau)-i\varphi(0)}\rangle.$$

Присутствие в $f_+(\tau)f_-(\tau)$ мнимых членов (и, следовательно, членов нечетных по $\tau$) говорит об асимметричности спектральной плотности $S_1(\nu)$ относительно $\nu = 0$, т. е. спектральной плотности $S[x, \omega]$ относительно $\omega = \omega_s$. Эта асимметрия вытекает из того факта, что $G_+ - G_-$ не равно нулю. Из (18.154) и (18.156) с очевидностью следует, что $S[x, \omega]$ имеет дельтаобразный выброс (пик)

$$\pi A_0^2 e^{-2(G_+ + G_-)\tau_0}\delta(\omega - \omega_s),$$

вклад которого в мощность составляет

$$\langle x^2\rangle_1 = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-2(G_+ + G_-)\tau_0}.$$

Оставшаяся мощность

$$\langle x^2\rangle_2 = \langle x^2\rangle - \langle x^2\rangle_1 =$$
$$= \frac{1}{2}A_0^2[1 - e^{-2(G_+ + G_-)\tau_0}] \approx A_0^2(G_+ + G_-)\tau_0 \sim A_0^2 e^{\delta u}$$

представляет собой полную мощность непрерывной компоненты спектральной плотности, ширина полосы которой, согласно (18.156), имеет порядок

$$\frac{1}{\tau_0} \sim \Delta_s.$$

Пусть $\omega_c$ является «центральной частотой» непрерывной компоненты, т. е. ее центром тяжести. Тогда средняя частота $\langle\omega\rangle$, равная центру тяжести полной спектральной плотности, представляет собой взвешенное среднее от дискретной и непрерывной компонент:

$$\begin{aligned}\langle\omega\rangle &= [1-2(G_+ + G_-)\tau_0]\omega_s + 2(G_+ + G_-)\tau_0\omega_c = \\ &= \omega_s + 2(G_+ + G_-)\tau_0(\omega_c - \omega_s).\end{aligned}$$

Используя (18.93), находим, что непрерывная компонента сдвинута относительно дискретной компоненты на величину

$$\omega_c - \omega_s = \frac{\langle\omega\rangle - \omega_s}{2\tau_0(G_+ + G_-)} = \frac{\pi}{\tau_0}\frac{G_+ - G_-}{G_+ + G_-} \sim \Delta_s \operatorname{th}\pi D.$$

## ЛИТЕРАТУРА

### Глава 1


1. Г. Крамер. Математические методы статистики, ИИЛ, 1948.
2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, 1954.
3. А. М. Яглом Введение в теорию стационарных случайных функций УМН, 1952, вып. 7, 5, стр. 3—168, т. 7.
4. А. Эйнштейн, М. Смолуховский. Броуновское движение. Сборник статей под ред. Б. И. Давыдова. ОНТИ, 1936.
5. М. А. Леонтович. Статистическая физика. ГИТТЛ, 1944.
6. С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии Изд-во иностранной литературы, 1947.
7. В. И. Бунимович. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. «Советское радио», 1951.
8. Б. Р. Левин Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике «Советское радио», 1957.
9. Ван дер Зил. Флюктуации в радиотехнике и физике. Госэнергоиздат, 1958
10. Л. Понтрягин, А. Андронов, А. Витт. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 1938, 3, 3.
11. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сборник переводов под ред Н. А. Железнова, изд-во иностранной литературы, 1953
12. П. И. Кузнецов, Р. Л Стратонович, В. И. Тихонов Прохождение некоторых случайных процессов через линейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 2, стр 144—163

    Прохождение случайных функций через нелинейные системы «Автоматика и телемеханика», 1953, т. 14, № 4, стр. 375—391.
    Квазимоментные функции в теории случайных процессов. ДАН СССР, 1954, Новая серия, т. 94, вып 4, 615.
    Корреляционные функции в теории броуновского движения. ЖЭТФ, 1954, т. 26, № 2, стр. 189—207.
13. В. С. Пугачев Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Гостехиздат, 1957.
14. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович К математической теории коррелированных случайных точек. Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, т. 20, стр. 167—178.
15. H. A. Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. Physica, 1940, vol 7, N 4, p. 284—304.

## Глава 2

Литература [7, 8, 9, 11, 12] из гл. 1, а также

16. D. Middleton. Some general results in the theory of noise through nonlinear devices. Quart. Appl. Math., 1948, Jan., vol. 5, N 4.

## Глава 3

Литература [11] из гл. 1, а также

17. В. И. Бунимович, М. А. Леонтович. О распределении числа больших отклонений при электрических флюктуациях. ДАН СССР, 1946, т. 53, вып. 1, стр. 21—24.

18. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов. О длительности выборов случайной функции. ЖТФ, 1954, т. 24, вып. 1, стр. 103—112.

19. И. Я. Барит, М. И. Подгорецкий. К статистической теории просчетов выбросов ЖТФ, 1949, т. 19, вып. 6.

20. М. И. Подгорецкий. О числе ложных импульсов. ДАН СССР, 1952, т. 82, вып. 6, стр. 881.

21. J. A. Mc Fadden The azis-crossings intervals of random functions. Trans. IRE, 1956, IT-2, N 4, 1958, 4, N 1.

22. В. И. Тихонов Воздействие малых флюктуаций на электронное реле «Вестник Московского университета», 1956, № 5, стр. 31—41.
Воздействие больших флюктуаций на электронное реле. «Радиотехника и электроника», 1956, т. 1, № 2, стр. 213—224.
Распределение выбросов нормальных флюктуаций по длительности «Радиотехника и электроника», 1956, т. 1, № 1, стр. 23—33.

23. S. O. Rice Distribution of the duration of the duration of fades in radio transmission. Bell Syst. Techn. Journ., 1958. vol. 37, № 3.

## Глава 4

Литература [10] из гл. 1, а также

24. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, 1955.

25. И. Л. Берштейн. Флюктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора. ЖТФ, 1941, т. 11, вып. 4, стр. 305—316.

26. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов. О воздействии электрических флюктуаций на ламповый генератор. ДАН СССР, 1954, т. 97, вып. 4, стр. 639—642.
Воздействие электрических флюктуаций на ламповый генератор. ЖЭТФ, 1955, т. 28, вып. 5, стр. 509—523.

27. С. М. Рытов Флюктуации в автоколебательных системах томсоновского типа. ЖЭТФ, 1955, т. 29, вып. 3, стр. 304—322.

28. Л. И. Гудзенко. О флюктуациях в ламповом генераторе при наличии сеточного тока. «Радиотехника и электроника», 1956, т. 1, вып. 9, стр. 1240—1254

29. Р. Л. Стратонович. Синхронизация автогенератора при наличии помех. «Радиотехника и электроника», 1958, т. III, вып. 4, стр. 497—506.

30. Р. Л. Стратонович, Ю. М Романовский. Параметрическое воздействие случайной силы на линейные и нелинейные колебательные системы. Научные доклады высшей школы физ.-мат. наук, 1958, т. 3, стр. 221.
Одновременное параметрическое воздействие гармонической и случайной силы на колебательные системы. Научные доклады высшей школы физ.-мат. наук, 1958, т. 4, стр. 161.

31. H. Heffner, G. Wade. Gain, band width and noise characteristic of the variable-parameter amplifier, Journ. Applic. Phys., 1958, vol. 29, N 9, p. 1321—1331.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


**А**

Амплитуда узкополосного процесса, 178—179
— колебаний генератора при синхронизации, 460—461

**Б**

Белый шум, 59

**В**

Вероятность, 8
— перехода марковская, 54, 104
Верхняя граничная частота, 59, 127, 267
Взаимная спектральная плотность, 37
Вибрационные члены в уравнениях колебаний, 349
Воспроизведение огибающей при детектировании, 228—232
Время гладкости, 118—119, 267, 303
— достижения границ, 76, 78—79
— корреляции, 25

**Г**

Гауссов (нормальный) процесс, 40

**Д**

Двумерные моменты гауссового процесса, 195—196
— — релеевского процесса, 198—200
Дельта-коррелированный процесс, 59
Детекторный каскад инерционный, 188, 223
Дисперсия случайной величины, 13
— времени срабатывания реле, 335
Диффузионное (Фоккера—Планка) уравнение, 59, 72, 91, 98
Диффузия фазы автономного генератора, 375, 394
Достижение границ, 76
Дробовой шум, 144—147
— — периодически нестационарный, 400—402

**З**

Закон Пуассона, 143
Замена случайных переменных, 10, 189—191

**И**

Импульсный случайный процесс, 150

**К**

Квазимоментные функции, 48
Кинетическое (стохастическое) уравнение, 56—57, 83, 88—95
Колмогорова уравнение, 61—62
Комплексный процесс, соответствующий узкополосному процессу, 167—168, 171
Корреляции парные, 16
— высших порядков, 16—18
Корреляционная матрица, 41
Корреляционные функции, 21
Корреляционная функция генерируемого сигнала, 397, 413, 427, 435 438, 440
— — на выходе детекторного каскада, 238 239, 255
— — ограниченного процесса, 207—209, 297, 298.
— — сигнала, модулированного шумом, 451—456
— — периодически нестационарного процесса, 132
— — процесса со стационарными приращениями, 126, 129

Коэффициент асимметрии, 13
— диффузии фазы автономного генератора, 375, 394, 403—404
— — — при синхронизации, 488—489, 500—502
— корреляции, 16
— усиления параметрического усилителя, 531, 536—537, 542
— эксцесса, 13
Коэффициенты интенсивности, 25, 58, 82, 85
Крамера разложение, 43
Критическое затухание параметрической системы, 507, 510, 514, 516, 522—526
Кумулянты (семиинварианты), 12

**М**

Маркова процессы, 53
— условие, 53
Моментные функции, 21
Моменты, 11
— амплитуды колебаний генератора, 367—369, 421

**Н**

Негауссовы процессы, 47
Независимые случайные величины, 15
Нелинейное преобразование безынерционное кусочно-разрывное, 201—207.
— — — полиномиальное, 192—194
— — — представляемое контурным интегралом, 213—218
— — инерционное, 188, 223
Несближающиеся случайные точки, 148—149
Нижняя граничная частота, 130
Нормальный (гауссов) процесс, 40
Нормировки условие, 9—10

**О**

Ограниченный процесс, 295

**П**

Парнокоррелированные случайные точки, 148
Перескоки фазы при синхронизации, 473—474, 486—488, 194—502
Плотность распределения вероятностей, 9
— — амплитуды колебаний автономного генератора, 366, 395, 419
— — — —синхронизируемого генератора, 469, 493
— — — —параметрических, 527—529
— — выбросов по длительности, 293, 309, 311, 314, 318
— — времени срабатывания реле, 335—336
— — на выходе детекторного каскада, 241
— — фазы колебаний автономного генератора, 411—412
— — — — синхронизируемого генератора, 471—473, 493
— — — — параметрических, 520
Полиномы Эрмита обобщенные, 50, 52
Потенциальное стационарное решение уравнения Фоккера—Планка, 74
Потенциальности условие, 74, 75
Поток вероятности, 60
Производящий функционал системы случайных точек, 135—136, 138
Процессы периодически нестационарные, 130—132
— со спектральной плотностью $1/\omega$, 129
— со стационарными приращениями, 124
— установления, 123
Пуассоновские случайные точки, 143

**Р**

Разложение плотности распределения по собственным функциям, 65—71, 106—110, 115
Распределение выбросов по длительности, 285—292, 309, 311
— — по площади превышения, 322—323
Релеевский процесс, 178—182
Решение уравнения Фоккера—Планка стационарное, 64, 106, 114, 117
— — — нестационарное, 68

**С**

Сглаженный процесс, 118—120
Случайная величина, 7
— функция, 18
— — плотности, 140
Случайные точки, 133—134
Случайный спектр, 29
Смолуховского уравнение, 55

Собственные функции уравнения Фоккера—Планка, 65
Сопряженный процесс данному узкополосному процессу, 168—171
Спектральная интенсивность, 25
— — генерируемого сигнала, 397, 399, 414, 427—428, 435—438, 440, 443—450
— — импульсного случайного процесса, 151, 155, 162—163
— — колебаний синхронизируемого генератора, 467
— — сигнала, модулированного шумом, 452—454
— — флюктуаций на выходе детекторного каскада, 257
Среднее время достижения границ, 78, 79
— значение, 7, 8
— число выбросов, 266, 267
— — ложных срабатываний реле, 327—328
— — пропусков полезных срабатываний реле, 329—331
— — серий выбросов, 276—279
Средняя частота колебаний синхронизируемого генератора, 474—478
Стационарный процесс, 23—24
Стохастическое (кинетическое) уравнение, 56, 57, 83, 88—95

**У**

Уравнение колебаний, 339, 341—345
Уравнения колебаний в стандартной форме, 348—354
— — линеаризованные, 372, 389—390
— — укороченные, 350
— — упрощенные, 350, 360
— — — автономного генератора, 360, 364, 372
— — — синхронизируемого генератора, 459
— — — параметрической системы, 505, 533
Условная дисперсия, 47
— плотность распределения, 14, 15
Условные корреляционные функции, 47
Усреднение по времени, 33

**Ф**

Флюктуации амплитуды и фазы автономного генератора малые, 371—375
Флюктуации амплитуды и фазы синхронизируемого генератора малые, 461—466
Флюктуации фазы синхронизируемого генератора большие, 479—485
Флюктуационное уравнение, 80, 93—94, 96, 99—100, 104, 105
Фоккера—Планка (диффузионное) уравнение, 59, 72, 91, 98
Функции распределения случайных точек, 134—136, 139, 143
Функция распределения, 9

**Х**

Характеристическая функция, 11
Характеристический функционал, 20, 140—141

**Ш**

Шумы параметрического усилителя, 539, 543—544

**Э**

Эджворта ряд, 51
— — обобщенный, 50
Экспоненциально - коррелированный процесс, 27, 102—104
Эргодические процессы, 33

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие к новому изданию . . . . . iii

Предисловие . . . . . 3

Глава 1. **Математический аппарат для исследования флюктуационных процессов** . . . . 7

§ 1. Случайная функция и ее статистические характеристики . . . . . 7

1. Способы описания случайной величины . . . . . 7
2. Корреляции между случайными величинами . . . 13
3. Случайная функция и способы ее описания . . . 18

§ 2. Стационарный случайный процесс и спектральная интенсивность . . . . . 23

1. Основные понятия . . . . . 23
2. Вычисление спектральной плотности при помощи преобразования Лапласа . . . . . 28
3. Случайный спектр и его связь со спектральной интенсивностью . . . . . 29
4. Усреднение стационарных случайных процессов по времени . . . . . 33
5. Парные корреляции нескольких случайных процессов 37

§ 3. Гауссовы и негауссовы случайные процессы. Квазимоментные функции . . . . . 40

1. Нормальная случайная функция и ее плотности распределения . . . . . 40
2. Условные корреляционные функции нормального процесса . . . . . 44
3. Негауссов случайный процесс и квазимоментные функции . . . . . 47

§ 4. Процессы Маркова и родственные им случайные процессы . . . . . 53

1. Определение процесса Маркова и стохастическое уравнение . . . . . 53
2. Дельта-коррелированные случайные функции . . 58
3. Уравнение Фоккера—Планка и уравнение Колмогорова . . . . . 59
4. Решение уравнения Фоккера—Планка . . . . 63
5. Многомерное уравнение Фоккера—Планка . . . 72
6. Задачи, связанные с достижением границ . . . 76
7. Замена реального случайного процесса процессом Маркова. Частный случай . . . . . 80

8. Замена реального случайного процесса процессом Маркова. Общий случай . . . . . 86
9. Система уравнений для нескольких случайных процессов . . . . . 96
10. Нормальные процессы Маркова . . . . . 100
11. Флюктуационное уравнение второго порядка и решение двумерного уравнения Фоккера—Планка в частных случаях . . . . . 104
12. Переход от процесса Маркова к сглаженному процессу . . . . . 118

§ 5. Нестационарные случайные процессы . . . . . 122

1. Процессы с медленными нестационарными изменениями . . . . . 122
2. Процессы установления . . . . . 123
3. Процессы со стационарными приращениями . . 124
4. Периодически нестационарные случайные процессы 130

§ 6. Системы случайных точек и связанные с ними случайные функции . . . . . 133

1. Способы описания системы случайных точек . . . 133
2. Случайные функции, построенные на основе системы случайных точек . . . . . 140
3. Точки, распределенные по закону Пуассона. Дробовой шум . . . . . 143
4. Системы случайных точек, полностью определяемые первыми двумя моментами . . . . . 147
5. Спектральная плотность последовательности импульсов . . . . . 150

§ 7. Узкополосные случайные процессы . . . . . 164

1. Эквивалентность узкополосной случайной функции двум медленно меняющимся процессам . . . . 164
2. Узкополосные случайные процессы, определяемые дифференциальными уравнениями . . . . . 172
3. Амплитуда и фаза узкополосного процесса. Релеевские флюктуации . . . . . 177
4. Квазирелеевский флюктуационный процесс . 183

Глава 2. **Преобразование флюктуаций и полезного сигнала нелинейными радиотехническими элементами** . . 187

§ 8. Методы анализа безынерционных нелинейных преобразований . . . . . 187

1. Преобразование плотностей вероятности . . . . 189
2. Моментные функции при полиномиальном преобразовании . . . . . 192
3. Моментные функции при кусочно-разрывных преобразованиях. Прямой метод . . . . . 201
4. Вычисление моментных функций при экспоненциальном преобразовании. Метод Райса . . . . . 212

§ 9. Методы анализа инерционных нелинейных преобразований Детектирование случайных сигналов . . 222

1. Воздействие узкополосного процесса на детектор. Метод огибающей . . . . . 224
2. Метод малой нелинейности . . . . . 234
3. Метод уравнения Фоккера—Планка . . . . . 240
4. Детектирование гармонического сигнала и шума с малым временем корреляции . . . . . 244
5. Случай промежуточных времен корреляции . . . 248

**Глава 3. Выбросы случайной функции и воздействие шума на электронное реле** . . . . . 263

§ 10. Среднее число выбросов случайной функции . . 264

1. Число выбросов плавно меняющегося случайного процесса . . . . . 264
2. Среднее число серий выбросов для процессов Маркова . . . . . 267
3. Примеры применения формулы, определяющей частоту повторения серий . . . . . 276

§ 11. Длительность выбросов случайных процессов Маркова . . . . . 279

1. Число выбросов марковского процесса с длительностью, превышающей фиксированную величину . 280
2. Примеры . . . . . 285
3. Ненормированная плотность распределения выбросов по длительности . . . . . 293
4. Связь распределения выбросов по длительности с корреляционной функцией ограниченного процесса 295
5. Выбросы сглаженного процесса . . . . . 299

§ 12. Воздействие плавно меняющихся флюктуаций на реле с высоким уровнем срабатывания . . 301

1. Распределение выбросов гладких флюктуаций по длительности . . . . . 302
2. Другие методы исследования выбросов плавных флюктуаций . . . . . 310
3. Площадь выбросов над уровнем срабатывания . 319
4. Воздействие импульсных сигналов и флюктуационных помех на электронное реле. Время нечувствительности . . . . . 324
5. Нестабильность момента срабатывания реле, вызванная прибавлением флюктуаций к полезному импульсу . . . . . 331

**Глава 4. Нелинейные автоколебания при наличии флюктуаций** . . . . . 337

§ 13. Основные уравнения, описывающие работу генератора при наличии флюктуаций . . . . . 337

1. Предварительные замечания . . . . . 337
2. Пример автоколебательной системы Ламповый генератор . . . . . 340
3. Уравнения в стандартной форме и упрощенные уравнения . . . . . 347

4. Упрощение флюктуационных членов . . . . . 355

§ 14. Методы решения упрощенных уравнений . . . 363

1. Флюктуации амплитуды как процесс Маркова. Уравнение Фоккера—Планка . . . . . 363
2. Метод линеаризации . . . . . 370
3. Квазистатический метод . . . . . 376
4. Таблица применимости различных методов . . . 382

§ 15. Влияние собственных флюктуаций на работу генератора . . . . . 385

1. Малая интенсивность дробовых флюктуаций и линеаризованное уравнение . . . . . 386
2. Дробовые флюктуации в пренебрежении периодическими изменениями анодного тока . . . . 392
3. Периодическая нестационарность дробового шума . 399
4 О влиянии флюктуаций амплитуды на диффузию фазы . . . . . 403

§ 16. Воздействие интенсивных внешних флюктуаций на генератор . . . . . 406

1. Флюктуации фазы при подаче шума на колебательный контур . . . . . 407
2. Воздействие шума на сетку генератора. Разброс амплитуды . . . . . 415
3. Корреляционная функция амплитуды и спектральная плотность . . . . . 423

§ 17. Влияние медленных флюктуаций и техническая нестабильность частоты . . . . . 428

1. Уравнения, описывающие автоколебания при флюктуациях анодного напряжения . . . . . 430
2. Корреляционная функция и спектр сигнала при гауссовых флюктуациях частоты . . . . . 434
3. Влияние фликкер шума лампы на частоту . . . 438
4. Случай больших независимых приращений фазы . . 441
5 Малые независимые фазовые приращения . . . 445
6. Модуляция автоколебаний шумом . . . . . 450

§ 18. Синхронизация генератора при наличии помех . . 456

1. Основные уравнения. Малые отклонения от синхронного режима в приближении линеаризации . . . 457
2. Стационарное распределение фазы и средняя частота 468
3. Большие отклонения фазы и диффузия числа колебаний . . . . . 479
4. Случай большого синхронизирующего воздействия . 490

§ 19. Параметрические колебания . . . . . 502

1. Линейные параметрические колебания Основные уравнения . . . . . 504
2. Узкополосные колебания параметров, близкие к гармоническим . . . . . 507
3 Быстрые флюктуации параметров. Применение стохастических методов . . . . . 511

**4. Одновременное присутствие как гармонического, так и флюктуационного параметрического воздействия** . 517
**5. Плотность распределения амплитуды. Влияние нелинейности** . . . . . 526
**6. Двухконтурные параметрические системы. Параметрические усилители** . . . . . 529
Приложение . . . . . 545
Принятые обозначения . . . . . 546
Дополнение 1 (к п. 4 § 4) . . . . . 548
Дополнение 2 (к п. 5 § 11) . . . . . 551
Дополнение 3 (к § 13) . . . . . 556
Дополнение 4 (к § 14) . . . . . 562
Дополнение 5 (к § 18) . . . . . 564
Литература . . . . . 569
Предметный указатель . . . . . 572

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

**subscribe@rcd.ru**

**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. (499) 135–54–37
2. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
3. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)
«Библиоглобус» (м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6)
Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный, Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409–93–28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**Стратонович Руслан Леонтьевич**

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

под ред. Ю. Л. Климонтовича, Ю. М. Романовского

*Дизайнер С. В. Дементьев*
*Редактор Н. Д. Иванушко*
*Технический редакторы А. А. Свешников, А. В. Широбоков*

Подписано в печать 9.11.2009. Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$.
Усл. печ. л. 31,08. Уч. изд. л. 36,65. Бумага офсетная №1.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Заказ № 64.

АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru