**А. Н. СЕСЕКИН, А. А. ЧЕНЦОВ,
А. Г. ЧЕНЦОВ**

ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Допущено УМО по образованию в области прикладной математики и управления качеством в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 230400 — «Прикладная математика», специальности 230401 — «Прикладная математика»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2011

ББК 22.18я73
С 33

Сесекин А. Н., Ченцов А. А., Ченцов А. Г.

С 33 Задачи маршрутизации перемещений: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 240 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1220-4

Учебное пособие посвящено исследованию задач маршрутизации с ограничениями, имеющих своим источником известную задачу коммивояжера. Рассматриваемые постановки имеют смысл задачи о посещении мегаполисов при соблюдении некоторых условий предшествования. Обосновано уравнение Беллмана, рассмотрены численный алгоритм построения функции Беллмана и алгоритм нахождения оптимального маршрута и трассы посещения мегаполисов. Получено также обобщение задачи о посещении мегаполисов в случае, когда функция затрат явным образом зависит от списка невыполненных заданий. В качестве примера анализируется модельный пример задачи минимизации дозовой нагрузки при выполнении ремонтных и профилактических работ на атомных электростанциях.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная математика», а также для студентов, аспирантов и специалистов, интересующихся методами оптимизации и исследования операций.

ББК 22.18я73

Рецензенты:

В. И. МАКСИМОВ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделом ИММ УрО РАН; *В. Г. ПИМЕНОВ* — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой вычислительной математики УГУ.

Обложка
Л. А. АРНДТ

Оглавление

Введение

В предлагаемом учебном пособии рассматриваются вопросы оптимизации перемещений, включая выбор очередности и вариантов конкретных действий в рамках условий, связанных с выбранной очередностью. В содержательном отношении исследуемые ниже задачи можно рассматривать как посещение конечной системы множеств при тех или иных ограничениях. В простейшем случае можно говорить о многозначной версии хорошо известной задачи коммивояжера (ЗК) [25], когда города (терминология, сложившаяся в исследованиях ЗК) заменяются мегаполисами, причем в процессе посещения достаточно побывать в каком-то одном городе мегаполиса (возможны различные усложнения постановки). При этом наряду с выбором очередности посещения мегаполисов, именуемой далее маршрутом, следует выбирать и трассу, определяемую как кортеж точек посещения. Совокупный выбор маршрута и трассы подчиняем соображениям оптимизации (в пособии рассматриваются задачи минимизации) некоторого агрегированного критерия. Предполагается при этом, что каждое конкретное перемещение с множества на множество сопровождается индивидуальными затратами, с учетом которых определяется совокупный критерий, оценивающий всю систему перемещений, т.е. пару маршрут-трасса. В настоящем пособии рассматривается только аддитивный способ агрегирования индивидуальных затрат: упомянутые затраты суммируются (возможны и другие способы агрегирования [24, 54]; особо отметим вариант задачи "на узкие места"). Конкретный выбор маршрута может быть стеснен различными ограничениями, связанными с особенностями прикладных задач. В настоящем пособии основное внимание уделяется т.н. условиям предшествования (см. [25, с. 7], [47-51], [55, 56]), когда задается определенная система адресных пар "отправитель — получатель", роль "отправителя" и "получателя" по-прежнему играет то или иное множество; однако можно считать, имея в виду некоторую предварительную нумерацию целевых множеств, что в качестве "отправителей" и "получателей" используются индексы.

Последнее соглашение используется в дальнейшем для более краткой записи ограничений, которые приобретают смысл некой директивной компоненты, диктующей всякий раз перемещение от "отправителя" к "получателю" с возможным посещением по пути каких-то других целевых множеств. Следует отметить, что условия предшествования возникают в прикладных задачах самой различной природы: морские и авиационные перевозки, организация технологических процессов и др. В частности, такого рода условия встречаются в некоторых задачах атомной энергетики. В последней главе пособия рассматривается одна из таких задач. Имеется в виду постановка, ориентированная на использование при решении задачи о демонтаже оборудования энергоблока атомной электростанции (АЭС), выведенного из эксплуатации. В упомянутой постановке имеется еще одна существенная особенность: стоимость перемещения от одного множества к другому явным образом зависит от списка оставшихся заданий. В содержательной задаче [42], связанной с АЭС, это происходит потому, что фрагменты оборудования, не демонтированные на момент перемещения, создают совокупное радиационное воздействие на работника (работников), деятельность которого можно, следовательно, связать с маршрутизацией "выключений" упомянутых источников радиационного фона. Итак, предлагаемое пособие ориентировано с принципиальной точки зрения на актуальные инженерные задачи.

Отметим, что в идейном отношении исследуемые в пособии постановки восходят к ЗК [25], которая является одной из классических NP – полных задач (см. [12]). Данная задача справедливо считается трудно решаемой в связи с факториальной зависимостью количества маршрутов от числа городов (считается, что данная задача имеет экспоненциальную сложность). В этой связи большой интерес представляют приближенные методы решения; см. в этой связи [27] и библиографию [27]. В то же время имеет смысл прояснение вопросов теории. Среди теоретических методов решения ЗК и более сложных маршрутных задач с ограничениями основное внимание в пособии уделяется методу динамического программирования (МДП); см. в этой связи оригинальные работы [5, 44]. Для целей решения рассматриваемых в пособии задач требуется, однако, серьезная переработка конструкций МДП, важная прежде всего для решения задач с ограничениями (в связи с общими процедурами МДП отметим монографию [28]; кроме того, следует упомянуть работу [38]). В связи с реализацией МДП в маршрутных задачах с ограничениями отметим подход [49, 51, 55, 56], в рамках которого используется насчитывание усеченного массива значений функции Беллмана без потери оптимальности. Этот подход позволяет преодолеть ряд трудностей вычислительного характера и повысить размерность задач, допускающих эффективное решение.

В связи с другими методами решения задач маршрутизации следует отметить метод ветвей и границ [1, 37].

Отметим, что МДП, предложенный Р.Беллманом, широко применяется при решении различных экстремальных задач; в этой связи см. в частности, [5, 6, 15, 28]. Этот метод широко используется в задачах теории управления и теории дифференциальных игр (см. [20, 21, 39]). Полезно отметить, что в главах 4 и 5 пособия используется одно свойство, допускающее идейную аналогию с фундаментальным свойством стабильности мостов в теории дифференциальных игр, предложенным Н.Н.Красовским и сыгравшим важную роль в доказательстве основополагающей теоремы [21] об альтернативе в нелинейной игре. Использование МДП в задачах маршрутизации осложнено прежде всего трудностями, вычислительного характера, связанными с построением массива значений функции Беллмана. Используемая в пособии усеченная реализация этой функции (см.[49, 51, 55, 56]) базируется на рациональном использовании условий предшествования; данная конструкция позволяет решать многие задачи, моделирующие процедуры обслуживания АЭС, фактическая размерность которых не высока, а трудности обусловлены в основном большим числом ограничений. Представляется, что для прикладных задач такого рода методы, излагаемые в пособии, могут оказаться весьма работоспособными, что было отмечено в [42, 43, 4].

Теоретический материал сопровождается в пособии примерами, одни из которых имеют иллюстрированный характер (заинтересованный читатель может проследить на этих примерах элементы постановки задачи и теоретические конструкции ее решения), а другие (более серьезные) показывают возможности компьютерной реализации предлагаемых методов решения. Авторы надеются, что данное пособие инициирует применение предлагаемых методов в конкретных прикладных задачах и, в частности, в задачах атомной энергетики. Представляется также, что излагаемые конструкции найдут применение в учебном процессе. В настоящее время материалы данного учебного пособия используются в преподавании курсов “Методы оптимизации”, “Исследование операций” студентам специальности 230401 - “Прикладная математика” в Уральском федеральном университете имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, а также при курсовом и дипломном проектировании.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 10-01-96020 и 10-08-00484) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” и “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” при поддержке УрО РАН, проекты 09-П-1-1014 и 09-П-1-1007.

Глава 1

Предварительные построения

1.1. Общие обозначения и определения

Будем использовать далее стандартную теоретико-множественную символику, включающую кванторы, пропозициональные связки и некоторые специальные символы. Впрочем, эти (в достаточной мере) традиционно употребляемые понятия будут привлекаться исключительно в интересах более краткого изложения как "заменители" соответствующих словесных высказываний. В связи с общими конструкциями теории множеств отметим монографию [22], на которую мы и будем ориентироваться в идейном отношении. Кроме того, нужные для дальнейшего понятия можно найти в [57]. В настоящем разделе ограничимся сводкой понятий и обозначений общего характера, используемых в дальнейшем.

Кванторы $(\forall, \exists)$ используются в традиционном понимании, символ $\exists!$ (выражение) заменяет фразу "существует и единственно", def — фразу "по определению". Кроме того, используем традиционные обозначения: $\neg$ (не), $\Rightarrow$ (влечет), $\Leftrightarrow$ (эквивалентно), $\in$ (принадлежит), & (и), $\vee$ (или). Двоеточие в формулах заменяет фразу "такой (такая, такое), что". Символ $\triangleq$ обозначает равенство по определению.

Для всяких двух объектов x и y через $\{x; y\}$ обозначаем неупорядоченную пару этих объектов x, y; $\{x; y\}$ есть единственное множество, содержащее в качестве своих элементов объекты x, y и не содержащее никаких других элементов. Будем также называть $\{x; y\}$ двоеточием, отвечающим x и y. Если u — объект, то $\{u\} \triangleq \{u; u\}$ есть одноэлементное множество, содержащее u.

Семейством называем всякое множество, все элементы которого сами являются множествами. Если A и B — множества, то

$$(A \subset B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a \in B \ \ \forall a \in A);$$

если $A \subset B$, то называем, как обычно [22], A подмножеством (п/м) множества B. Напомним важное соглашение, связанное с определением равенства множеств: если U и V — множества, то [22]

$$(U = V) \Leftrightarrow ((U \subset V)\&(V \subset U)).$$

Иными словами, два множества совпадают тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Отметим очевидное следствие: если x и y — объекты, то

$$\{x; y\} = \{y; x\}.$$

Упорядоченные пары. Если x и y — объекты, то [22]

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$$

есть упорядоченная пара x, y. Основное свойство упорядоченных пар имеет следующий вид (см. [22], [57]): если x, y, u и v — объекты,то

$$((x, y) = (u, v)) \Leftrightarrow ((x = u)\&(y = v)). \tag{1.1.1}$$

С понятием упорядоченной пары (а это — одно из важнейших понятий современной теории множеств) тесно связано понятие декартова произведения, которое мы приведем несколько позднее. Предварительно условимся о традиционном соглашении: если A — множество, то выражение $\{a \in A \,|\, ...\}$, где вместо a может использоваться произвольная буква (ПБ), заменяет высказывание "множество всех элементов A, для которых истинно ..."; здесь, строго говоря, мы имеем дело с одной из важнейших аксиом системы Цермело-Френкеля (см. [22]).

Через $\mathcal{P}(E)$ обозначаем далее семейство всех п/м произвольного множества E. Если же H — множество, то, как легко видеть, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(H))$ есть множество всевозможных семейств п/м H или, что короче, множество всех подсемейств $\mathcal{P}(H)$.

Если A и B — множества, то, как обычно, $A \cup B$ есть объединение множеств A и B, т.е. такое единственное множество, что

$$(A \subset A \cup B)\&(B \subset A \cup B)\&(\forall x \in A \cup B \quad (x \in A) \vee (x \in B));$$

$$A \backslash B \triangleq \{a \in A \,|\, a \notin B\}$$

и, наконец,

$$A \cap B \triangleq A \backslash (A \backslash B)$$

есть пересечения множеств A и B. Пустое, т.е. не содержащее никаких элементов, множество обозначаем через $\varnothing$. Если E — множество, то

$$\mathcal{P}'(E) \triangleq \mathcal{P}(E) \backslash \{\varnothing\}$$

есть очевидно семейство всех непустых п/м E. Эти определения "работают", в частности, в случае, когда множества являются семействами, т.е. сами "составлены" из множеств. Следуя [22], полагаем с учетом этого, что для всяких множеств A и B

$$A \times B \triangleq \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \,|\, \exists x \in A \,\exists y \in B : z = (x, y)\}, \tag{1.1.2}$$

получая декартово произведение множеств A и B : $A \times B$ есть такое единственное множество, что:

1) $(a, b) \in A \times B \quad \forall a \in A \;\forall b \in B$;

2) $\forall z \in A \times B \;\exists u \in A \;\exists v \in B \;:\; z = (u, v)$.

Следующим важным понятием, связанным с декартовым произведением, является отношение. Множество U называем отношением, если существуют множества V и W, для которых

$$U \subset V \times W;$$

отношения — суть множества, состоящие из упорядоченных пар. Декартовы произведения являются, конечно, отношениями, но можно указать отношения, не сводящиеся к виду (1.1.2).

В связи с последующими построениями см. [57, §1]. Если H — отношение, то единственным образом определяется множество $\mathrm{Dom}(H)$, для которого:

1') при некотором выборе множества Y справедливо вложение

$$H \subset \mathrm{Dom}(H) \times Y;$$

2') для всякого множества S из того, что

$$H \subset S \times Z$$

для некоторого множества Z, вытекает вложение

$$\mathrm{Dom}(H) \subset S.$$

Аналогичным образом, произвольному отношению H сопоставляется единственное множество $\mathrm{Im}(H)$, для которого:

1") при некотором выборе множества X

$$H \subset X \times \mathrm{Im}(H);$$

2") для любого множества T, обладающего свойством:

$$H \subset M \times T$$

при некотором выборе множества M, непременно справедливо вложение

$$\mathrm{Im}(H) \subset T.$$

Разумеется, для каждого отношения H имеет место свойство: $\mathrm{Dom}(H)$ и $\mathrm{Im}(H)$ — суть наименьшие по вложению множества A, B, для которых

$$H \subset A \times B$$

(см. [57, с. 19]); это означает, что $\mathrm{Dom}(H)$ и $\mathrm{Im}(H)$ — суть множества такие, что при всяком выборе множеств U и V истинна импликация

$$(H \subset U \times V) \Rightarrow (\mathrm{Dom}(H) \subset U) \& (\mathrm{Im}(H) \subset V)).$$

С учетом (1.1.1) корректно следующее определение (см. [57, §1]): если z — упорядоченная пара некоторых (определяемых единственным образом) объектов x и y, т.е. $z = (x, y)$, то через $pr_1(z)$ и $pr_2(z)$ обозначаем первую и вторую компоненты z :

$$(pr_1(z) = x) \& (pr_2(z) = y);$$

при этом, конечно, $z = (pr_1(z), pr_2(z))$.

Разумеется, в случае декартова произведения множеств A и B (см. (1.1.2)) элементами $A \times B$ являются упорядоченные пары; при этом $\forall z \in A \times B$

$$(pr_1(z) \in A) \& (pr_2(z) \in B).$$

Подробное изложение упомянутых построений, связанных с компонентами упорядоченных пар, см. в [57, с. 18-20].

При этом область определения $\mathrm{Dom}(H)$ и область значений $\mathrm{Im}(H)$ произвольного отношения H исчерпывающим образом характеризуются в терминах упорядоченных пар из H:

$$\mathrm{Dom}(H) = \{pr_1(z) : z \in H\}, \mathrm{Im}(H) = \{pr_2(z) \, : \, z \in H\}; \qquad (1.1.3)$$

точный смысл (1.1.3) разъясняется в [57, с. 20].

Напомним, что произвольному (в том числе пустому) семейству $\mathcal{H}$ сопоставляется единственное множество

$$\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$

для которого справедливы свойства:

$$1^\circ) U \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H \quad \forall U \in \mathcal{H};$$

$$2^\circ)\forall x \in \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H \quad \exists V \in \mathcal{H} : x \in V.$$

В частности, если A и B — множества, то $\{A; B\}$ есть (непустое) семейство и

$$A \cup B = \bigcup_{H\in\{A;B\}} H.$$

Если же $\mathcal{H}$ — произвольное непустое семейство, то полагаем

$$\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H \triangleq \{z \in \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H \,|\, z \in U \quad \forall U \in \mathcal{H}\},$$

получая [57, с. 22] множество всех объектов, принадлежащих каждому множеству семейства $\mathcal{H}$.

Легко видеть, что в случае, когда имеются два множества A и B, неупорядоченная пара $\{A; B\}$ есть непустое семейство и

$$A \cap B = \bigcap_{H\in\{A;B\}} H.$$

В свою очередь с отношениями связываем две важные операции: построение обратного отношения и суперпозицию двух отношений (см. [57, §1]).

Если P — отношение, то отношение

$$\overset{-1}{P} \triangleq \{z \in \mathrm{Im}(P) \times \mathrm{Dom}(P) \,|\, (pr_2(z), pr_1(z)) \in P\}$$

называем обратным к P (легко видеть, что $\mathrm{Dom}(\overset{-1}{P}) = \mathrm{Im}(P)$ и $\mathrm{Im}(\overset{-1}{P}) = \mathrm{Dom}(P)$). Если же P и Q — произвольные отношения, то

$$P \circ Q = \{z \in \mathrm{Dom}(Q) \times \mathrm{Im}(P) \,|\, \exists x \in \mathrm{Im}(Q) \cap \mathrm{Dom}(P) :$$

$$((pr_1(z), x) \in Q) \& ((x, pr_2(z)) \in P)\}$$

есть суперпозиция P и Q; область определения и область значений $P \circ Q$ указаны в [57, с. 24]

Если f — отношение, то (следуя [22]) называем f функцией, если $\forall x \in f\ \forall y \in f$

$$(pr_1(x) = pr_1(y)) \Rightarrow (pr_2(x) = pr_2(y)).$$

Разумеется, при всяком выборе f имеем свойство

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \exists! y \in \mathrm{Im}(f) : (x, y) \in f.$$

С учетом этого свойства корректно определяется значение функции в произвольной точке ее области определения: если f — функция и $x \in \mathrm{Dom}(f)$, то def $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$:
$$(x, f(x)) \in f.$$
Разумеется, функцию f можно при этом рассматривать как правило
$$f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f),$$
которое можно интерпретировать также как
$$x \longmapsto f(x) : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f).$$
Функции являются отношениями, а потому для них определены соответствующие обратные отношения и суперпозиции. Очень важно, что суперпозиция функций сама является функцией: если f и g — функции, то $g \circ f$ есть функция, для которой
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g \circ f) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(g \circ f).$$
Отметим и некоторые полезные (и часто встречающиеся) частные случаи: если X, Y и Z — множества, $G \in \mathcal{P}(X \times Y)$ и $H \in \mathcal{P}(Y \times Z)$, то
$$H \circ G = \{u \in X \times Z \,|\, \exists y \in Y :$$
$$((pr_1(z), y) \in G) \& ((y, pr_2(z)) \in H)\} \in \mathcal{P}(X \times Z).$$
Кроме того, если X и Y — множества, а $G \in \mathcal{P}(X \times Y)$, то
$$\overset{-1}{G} = \{z \in Y \times X \,|\, (pr_2(z), pr_1(z)) \in G\} \in \mathcal{P}(Y \times X).$$
Более привычным является, вероятно, понятие функции, действующей из одного наперед заданного множества в другое. Располагая общим определением, мы вводим сразу множество всех таких функций: если X и Y — множества, то рассматриваем множество всех отношений $f \in \mathcal{P}(X \times Y)$, каждое из которых является функцией такой, что $\mathrm{Dom}(f) = X$; легко видеть, что множество
$$Y^X \triangleq \{f \in \mathcal{P}(X \times Y) \,|\, \forall x \in X \ \exists!\ y \in Y : (x, y) \in f\} \tag{1.1.4}$$
как раз обладает вышеупомянутыми свойствами (см. в этой связи (1.1.3) в интерпретации [57, с. 20]); подчеркнем сразу, что при всяком выборе $u \in Y^X$ имеем свойство: u — функция, для которой $\mathrm{Dom}(u) = X$. Разумеется, при $x \in X$ определено значение $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, где $\mathrm{Im}(u) \subset Y$. В дальнейшем

для всяких множеств X, Y и функции $f \in Y^X$ используется также традиционное обозначение

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Если X, Y и Z — множества, $g \in Y^X$ и $h \in Z^Y$, то

$$h \circ g \in Z^X$$

есть такая функция (из множества X в Z, т.е.

$$h \circ g \, : \, X \longrightarrow Z;$$

мы использовали здесь традиционное обозначение), что

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) \quad \forall x \in X;$$

иными словами, $h \circ g$ есть правило

$$x \longmapsto h(g(x)) : X \longrightarrow Z.$$

Напомним, что [57, §1] справедливо следующее свойство: если f — функция и $E \in \mathcal{P}(\mathrm{Dom}(f))$ (E — п/м области определения f), то

$$(f|E) \triangleq f \cap (E \times \mathrm{Im}(f))$$

есть функция, для которой

$$(\mathrm{Dom})[(f|E)] = E;$$

последнее позволяет определять значения функции $(f|E)$ в точках множества E. При вышеупомянутых условиях на f и на E

$$(f|E)(x) = f(x) \quad \forall x \in E. \tag{1.1.5}$$

В частности, для всяких множеств X, Y и $E \in \mathcal{P}(X)$, а также для произвольной функции $f \in Y^X$

$$(f|E) \in Y^E$$

при этом справедливо (1.1.5).

Отметим очевидное следствие: если f — функция (отображение), то

$$(f|\mathrm{Dom}(f)) = f \cap (\mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Im}(f)) = f. \tag{1.1.6}$$

Учитывая важность понятия функции, действующей из одного наперед заданного множества в другое (см. в этой связи (1.1.4)), приведем дополнительно краткую сводку некоторых понятий, конкретизирующих вышеупомянутые общие положения. Наряду с термином “функция” будем часто использовать термин “отображение”.

В этой связи напомним также, что если X —множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначается семейство всех (всех непустых) п/м множества X; полагаем, что $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, тогда

$$(\mathrm{FIN})[X] \triangleq \mathrm{Fin}(X) \cup \{\varnothing\}$$

есть семейство всех конечных п/м X ($\mathrm{Fin}(X)$ является, как уже отмечалось, семейством всех непустых конечных п/м X).

Если A и B — множества, то через B^A обозначается множество всех отображений (функций)

$$f : A \longrightarrow B$$

(т.е. множество всех функций, действующих из A в B).

Как обычно, для всяких множеств $A,\ B$, отображения $f \in B^A$ и точки $a \in A$ через $f(a)$,

$$f(a) \in B,$$

обозначается значение отображения f в точке a. Напомним также, что при всяком выборе множеств $P,\ Q$, отображений $f \in Q^P$ и $g \in Q^P$

$$(f = g) \Leftrightarrow (f(x) = g(x) \quad \forall x \in P).$$

Индексная форма записи функций. Если $X,\ Y$ — непустые множества и $y_x \in Y\ \forall x \in X$, то через $(y_x)_{x\in X}$ обозначаем такое единственное отображение $f \in Y^X$, для которого $f(u) = y_u\ \forall u \in X$.

Если A и B — непустые множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то (см (1.1.5))

$$(f|C) = (f(x))_{x\in A} \in B^C.$$

Если f — функция и $E \in \mathcal{P}(\mathrm{Dom}(f))$, то полагаем

$$f^1(E) \triangleq \mathrm{Im}((f|E)),$$

получая при этом единственное множество, для которого [57, §1]:

1*) $f(x) \in f^1(E) \quad \forall x \in E$;

2*) $\forall y \in f^1(E)\ \exists x \in E : y = f(x)$.

С учетом 1*), 2*) можно рассматривать $f^1(E)$ как “совокупность” всех $f(x),\ x \in E$, т.е. полагать, что [57, с. 27]

$$f^1(E) = \{f(x) \,:\, x \in E\}, \tag{1.1.7}$$

интерпретируя (1.1.7) как множество со свойствами 1*), 2*). В частности, при всяком выборе множеств X, Y и $E \in \mathcal{P}(X)$, а также функции $f \in Y^X$

определено единственное множество (1.1.7), для которого выполняются 1*), 2*). Это множество называем, как обычно, образом E при действии f.

С учетом (1.1.6) получаем при всяком выборе функции f равенство

$$f^1(\mathrm{Dom}(f)) = \mathrm{Im}(f).$$

Разумеется, при всяком выборе множеств X и Y, а также функции $f \in Y^X$

$$f^1(X) = \mathrm{Im}(f). \tag{1.1.8}$$

Если φ — функция и L — множество, то прообраз L при действии φ есть множество

$$\varphi^{-1}(L) \triangleq \{x \in \mathrm{Dom}(\varphi) \,|\, \varphi(x) \in L\}.$$

Из этого общего определения вытекает следующая его конкретизация: если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $M \in \mathcal{P}(Y)$, то (см. (1.1.4))

$$f^{-1}(M) = \{x \in X \,|\, f(x) \in M\} \in \mathcal{P}(X).$$

Общие свойства образов и прообразов см. в [57, §1].

Функция f называется инъективной (взаимно однозначной), если $\forall x_1 \in \mathrm{Dom}(f)$ $\forall x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2). \tag{1.1.9}$$

В частности, при всяком выборе множеств X и Y

$$\begin{aligned}(\mathrm{in})[X;Y] \triangleq \{f \in Y^X \,|\, \forall x_1 \in X\, \forall x_2 \in X \\ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)\}\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

есть множество всех инъективных отображений из Y^X.

Напомним, что, поскольку функция — отношение, то для всякой функции f определено отношение $\overset{-1}{f}$ (отношение, обратное к f). Если же f — инъективна, то $\overset{-1}{f}$ — функция.

Введем в рассмотрение сюръективные отображения из одного множества в другое. Если X и Y — множества, то [57, §1]

$$Y^X_{(*)} \triangleq \{f \in Y^X \,|\, f^1(X) = Y\} \tag{1.1.11}$$

есть множество всех сюръекций из X в Y. Отображения, являющиеся одновременно инъективными и сюръективными, называют биективными или (более кратко) биекциями. Итак, при всяком выборе множеств X и Y

$$(\mathrm{bi})[X;Y] \triangleq (\mathrm{in})[X;Y] \cap Y^X_{(*)}. \tag{1.1.12}$$

Вернемся к общему определению инъективной функции. Если f — инъективная функция, то область определения и область значений функции $\overset{-1}{f}$, именуемой далее обратной по отношению к f, удовлетворяют соотношениям [57, с. 32]

$$(\mathrm{Dom}(\overset{-1}{f})) = \mathrm{Im}(f))\&(\mathrm{Im}(\overset{-1}{f}) = \mathrm{Dom}(f)); \qquad (1.1.13)$$

еще раз отметим, что в данном случае $\overset{-1}{f}$ есть функция (отображение), что позволяет определять ее значения в точках первого из упомянутых в (1.1.13) множества, т.е. в точках $\mathrm{Im}(f)$. При этом для всякой инъективной функции f справедливы следующие равенства

$$(\overset{-1}{f}(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f))\&(f(\overset{-1}{f}(y)) = y \quad \forall y \in \mathrm{Im}(f)). \qquad (1.1.14)$$

Кроме того [57, с. 33], для всякой инъективной функции f функция $\overset{-1}{f}$ также инъективна. Возвращаясь к (1.1.12), отметим, что при всяком выборе множеств X и Y, а также функции $f \in (\mathrm{bi})[X;Y]$ имеем свойство: f — инъективная функция, для которой (см. (1.1.8))

$$(\mathrm{Dom}(f) = X)\&(\mathrm{Im}(f) = Y);$$

следовательно, согласно (1.1.13)

$$(\mathrm{Dom}(\overset{-1}{f}) = Y)\&(\mathrm{Im}(\overset{-1}{f}) = X), \qquad (1.1.15)$$

причем $\overset{-1}{f} \subset Y \times X$. Таким образом (см. [57, (1.17)]), при вышеупомянутых условиях

$$\overset{-1}{f} \in X^Y, \qquad (1.1.16)$$

причем, как уже отмечалось ранее, $\overset{-1}{f}$ — инъективная функция, т.е., согласно (1.1.9) и (1.1.15), $\forall y_1 \in Y \;\; \forall y_2 \in Y$

$$(\overset{-1}{f}(y_1) = \overset{-1}{f}(y_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2);$$

с учетом (1.1.10), (1.1.16) имеем теперь

$$\overset{-1}{f} \in (\mathrm{in})[Y;X]. \qquad (1.1.17)$$

Вместе с тем (при упомянутых условиях на X, Y и f : X и Y — множества, $f \in (\mathrm{bi})[X;Y]$) из (1.1.11), (1.1.15) и (1.1.16) вытекает, что

$$\overset{-1}{f} \in X^Y_{(*)}, \qquad (1.1.18)$$

а тогда из (1.1.12), (1.1.17) и (1.1.18) следует включение

$$\overset{-1}{f} \in (\mathrm{bi})[Y; X]. \tag{1.1.19}$$

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую (для обозначения всевозможных промежутков $\mathbb{R}$ используем только квадратные скобки; см. [57, с. 54]), $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; ...\}$ — натуральный ряд (всюду в дальнейшем постулируем, что элементы $\mathcal{N}$, т.е. натуральные числа, не являются множествами; мы специально оговариваем данное весьма традиционное соглашение)

$$\mathcal{N}_0 \triangleq \mathcal{N} \cup \{0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Если $p \in \mathcal{N}_0$ и $q \in \mathcal{N}_0$, то полагаем, что

$$\overline{p, q} \triangleq \{i \in \mathcal{N}_0 \,|\, (p \leq i) \& (i \leq q)\} \tag{1.1.20}$$

(всюду в дальнейшем линейные операции и умножение в $\mathbb{R}$ полагаем известными; кроме того, используем обычную упорядоченность в $\mathbb{R}$, для обозначения которой применяем традиционный символ $\leq$). Из (1.1.20) вытекает, что

$$\overline{1, m} = \{i \in \mathcal{N} \,|\, i \leq m\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{N}). \tag{1.1.21}$$

С учетом этого свойства и ранее оговоренного правила относительно природы элементов $\mathcal{N}$ принимаем следующее соглашение относительно обозначений (это соглашение также является традиционным и зачастую специально не оговаривается): если A — множество и $m \in \mathcal{N}$, то вместо $A^{\overline{1,m}}$ используем обозначение A^m; следовательно, A^m есть множество всех отображений (кортежей)

$$(a_i)_{i \in \overline{1,m}} : \overline{1, m} \longrightarrow A;$$

элементы A^m являются, таким образом, функциями, действующими из "отрезка" $\overline{1, m}$ (1.1.21) в множество A.

Ранее (см. (1.1.1)) было введено хорошо известное понятие декартова произведения двух множеств. Сейчас, используя понятие кортежа, напомним традиционное понятие декартова произведения произвольного конечного набора множеств (более общие варианты декартова произведения (см. [22]) в настоящей книге не используются). Если E — множество, $m \in \mathcal{N}$ и $(E_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{P}(E)^m$ (иными словами,

$$(E_i)_{i \in \overline{1,m}} : \overline{1, m} \longrightarrow \mathcal{P}(E);$$

короче говоря, E_1 — п/м $E, ..., E_m$ — п/м E), то

$$\prod_{i=1}^{m} E_i \triangleq \{(e_i)_{i \in \overline{1,m}} \in E^m | e_j \in E_j \quad \forall j \in \overline{1, m}\}. \tag{1.1.22}$$

В связи с (1.1.22) отметим, что в левой части этой формулы не упоминается множество E, содержащее $E_1, ..., E_m$; тем не менее, это не приводит к какой-либо двусмысленности. В самом деле, пусть H — такое множество, что

$$(E_i)_{i\in\overline{1,m}} : \overline{1,m} \longrightarrow \mathcal{P}(H)$$

(иными словами, при $j \in \overline{1,m}$ справедливы вложения $E_j \subset E$ и $E_j \subset H$). Тогда

$$\{(e_i)_{i\in\overline{1,m}} \in E^m | e_j \in E_j \quad \forall j \in \overline{1,m}\} =$$
$$= \{(e_i)_{i\in\overline{1,m}} \in H^m | e_j \in E_j \quad \forall j \in \overline{1,m}\}$$

(доказательство этого очевидного равенства предоставляется читателю). Поэтому параметр E в правой части (1.1.22) можно считать незначащим; вместо E можно было бы использовать любое множество S, для которого

$$E_j \subset S \quad \forall j \in \overline{1,m};$$

получаемое при этой замене множество не будет отличаться от (1.1.22).

Итак, если E — множество, $m \in \mathcal{N}$ и $(E_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{P}(E)^m$, то $\prod_{i=1}^m E_i$ есть множество всех кортежей

$$(e_i)_{i\in\overline{1,m}} : \overline{1,m} \longrightarrow E,$$

для каждого из которых справедливо свойство:

$$e_j \in E_j \quad \forall j \in \overline{1,m}.$$

Полезно напомнить, что множество K называется конечным, если $K = \varnothing$ или

$$\exists m \in \mathcal{N} : (\mathrm{bi})[\overline{1,m}, K] \neq \varnothing. \tag{1.1.23}$$

Свойство (1.1.23) характеризует, следовательно, непустые конечные множества (заметим, что $\varnothing^A = \varnothing$ при всяком выборе непустого множества A; в частности, это верно при $A = \overline{1,k}$, где $k \in \mathcal{N}$). В связи с (1.1.10) и (1.1.12) отметим, кстати, что множества вида (1.1.21) конечны и при этом [57, §2] для всякого $m \in \mathcal{N}$

$$\Pi_m \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,m}; \overline{1,m}]$$

есть множество всех перестановок в множестве $\overline{1,m}$ (в связи с общим понятием перестановки напомним определение [15]: для всякого множества X перестановка в X есть произвольная биекция $f \in (\mathrm{bi})[X; X]$). Рассуждением по индукции проверяется, что [57, §2]

$$\Pi_m = (\mathrm{in})[\overline{1,m}; \overline{1,m}]. \tag{1.1.24}$$

Кроме того, напомним известное свойство: каждому непустому конечному множеству можно единственным образом сопоставить мощность или количество элементов. Точнее [57, §2]: если K — непустое конечное множество, то

$$\exists!\ m \in \mathcal{N} : (\mathrm{bi})[\overline{1,m}; K] \neq \varnothing.$$

С учетом этого свойства полагаем, что для всякого непустого конечного множества K def $|K| \in \mathcal{N}$ есть такое единственное число, что

$$(\mathrm{bi})[\overline{1,|K|}; K] \neq \varnothing;$$

кроме того, полагаем, что $|\varnothing| \triangleq 0$. В целях сокращения обозначений условимся, что при всяком выборе непустого конечного множества K

$$(bi)[K] \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,|K|}; K];$$

это означает, в частности, что элементы $\alpha \in (bi)[K]$ являются каждый отображением "отрезка" $\overline{1,|K|}$, где $|K| \in \mathcal{N}$, на множество K; при этом

$$\alpha : \overline{1,|K|} \longrightarrow K.$$

Сделаем некоторые очевидные добавления к построениям, связанным с декартовыми произведениями. Если x, y и z — объекты, то полагаем (см. [22])

$$(x, y, z) \triangleq ((x, y), z), \tag{1.1.25}$$

получая упорядоченный триплет в виде упорядоченной пары с компонентами (x, y) и z; см. в этой связи [57, с. 50]. Из общих свойств упорядоченных пар (см. (1.1.1)) легко следует, что при всяком выборе объектов x, y, z, u, v и w

$$((x, y, z) = (u, v, w)) \Leftrightarrow ((x = u)\&(y = v)\&(z = w)).$$

С определением (1.1.25) хорошо согласуется следующая конструкция декартова произведения трех множеств: если X, Y и Z — множества, то

$$X \times Y \times Z \triangleq (X \times Y) \times Z$$

есть единственное множество, обладающее свойствами:

$$((x, y, z) \in X \times Y \times Z \quad \forall x \in X\ \forall y \in Y\ \forall z \in Z)\&$$

$$(\forall r \in X \times Y \times Z\ \exists u \in X\ \exists v \in Y\ \exists w \in Z\ :\ r = (u, v, w)).$$

Следуем далее естественному соглашению об обозначении значений функции трех переменных: если X, Y, Z и T — множества, $f \in T^{X \times Y \times Z}$, $x \in X$, $y \in Y$ и $z \in Z$, то

$$f(x, y, z) \triangleq f((x, y, z)) \in T.$$

Условимся о традиционном правиле экономии скобок: если A и B — непустые множества, $C \in \mathcal{P}'(A \times B)$,

$$f : C \longrightarrow \mathbb{R},$$

$z \in C,\ x = pr_1(z)$ и $y = pr_2(z)$, то $f(x, y) \triangleq f((x, y))$ и $f(z)$ используются как эквивалентные обозначения.

1.2. Содержательное обсуждение используемых методов решения задач маршрутизации

В пособии рассматриваются задачи о посещении конечной системы множеств, являющихся конечными п/м некоторого множества X, именуемого далее пространством состояний. Эти множества предполагаются в дальнейшем попарно непересекающимися; они играют роль своеобразных "островов" в пространстве X. Кроме того, будет фиксироваться некоторая точка $x^0 \in X$, не принадлежащая ни одному из упомянутых "островов". Посещение последних может сопровождаться выполнением тех или иных работ, называемых далее внутренними. Будут рассматриваться также постановки, когда упомянутые (внутренние) работы отсутствуют, а соответствующие затраты касаются только оценки перемещений между целевыми множествами (т.е. между "островами"). Среди задач такого рода выделяем в качестве простейших постановки, в которых целевые множества являются одноточечными (одноэлементными). При отсутствии ограничений на способ нумерации в последнем случае реализуется вариант ЗК. Нас, однако, будет интересовать в большей степени случай, когда упомянутые ограничения имеются, что может быть связано, в частности, с потребностями инженерных задач. Более того, мы будем использовать ограничения для построения процедур направленного перебора. Последнее весьма существенно, поскольку ЗК, являющаяся прототипом рассматриваемых ниже задач, является, как известно [12], труднорешаемой (ЗК, рассматриваемая как задача распознавания, является одной из классических NP - полных задач; [12]). В этой связи мы предпринимаем далее усилия с целью "уменьшения объема" переборных процедур за счет рационального учета специфики рассматриваемых задач, включая учет ограничений.

В простейшей из рассматриваемых далее задач — задаче последовательного обхода множеств (ПОМ) — мы имеем фактически многозначный вариант ЗК. Тем не менее, уже в этом случае каждое конкретное решение имеет вид упорядоченной пары, компонентами которой являются перестановка индексов целевых множеств, именуемая далее маршрутом, и кортеж точек посещения, именуемый далее трассой. По существу этот кортеж является траекторией, а критерий (аддитивный в настоящей книге) явным образом зависит в упомянутой задаче ПОМ только от трассы. Маршрут определяет при этом множество возможных трасс. Мы сталкиваемся здесь с экстремальной задачей с зависимыми (связанными) переменными: множество всех допустимых решений (пар маршрут - трасса) является отношением, не сводящимся, как правило, к декартову произведению. Это обстоятельство проявляется как в процедуре поиска функции Беллмана, где локальные задачи на экстремум также являются задачами с зависимыми переменными, так и в общих вопросах, связанных со структурой решения: декомпозиция совокупного процесса решения в задачу поиска маршрута и задачу поиска трассы приводит, вообще говоря, к потере качества. По этой причине оптимальная процедура решения задачи ПОМ (и более сложных задач с ограничениями) реализует "выращивание" пары маршрут-трасса на основе соответствующего уравнения Беллмана.

В то же время соображения, связанные с решением практических задач, заставляют в силу уже упомянутых трудностей вычислений использовать вышеупомянутые декомпозиции. В этой связи далее конструируются итерационные методы с элементами декомпозиций, реализуемых на каждом шаге (этапе) процедуры. Эти методы не доставляют, вообще говоря, оптимальных решений, но могут быть полезными в качестве основы для построения приближенных алгоритмов.

Хорошо известно, что в прикладных задачах, содержащих элементы маршрутизации, имеется, как правило, много разнообразных ограничений, затрудняющих применение традиционных методов дискретной оптимизации. В настоящем пособии подробно рассматривается один из вариантов ограничений такого рода, а именно: ограничения, порождаемые условиями предшествования, которые часто бывают связанными с технологическими требованиями. С формальной точки зрения, в упомянутых условиях предшествования предполагается заданным конечный набор упорядоченных пар, компонентами которых являются задания, подлежащие выполнению. Для каждой такой пары, называемой далее адресной, первое задание (первая компонента упорядоченной пары) должно выполняться ранее второго. Нередко данное соглашение можно трактовать как требование, связанное с перемещением какого-либо груза или с передачей той или иной адресной информации от отправителя к получателю. Тогда мы имеем дело с конечным набором пар отправитель-получатель, определяющих некую директивную компоненту в процессе выполнения заданий. В настоящем пособии рассматриваются теоретические конструкции, связанные с решением маршрутных задач, осложненных вышеупомянутыми ограничениями и предусматривающие некоторые редукции этих ограничений к более простым вариантам.

Наконец, в последней главе пособия рассматривается задача маршрутизации с ограничениями, ориентированная на использование в постановках, связанных с приложениями к задачам атомной энергетики. Основной особенностью здесь является функция затрат на перемещения между точками (городами в терминологии ЗК): допускается явная зависимость от списка невыполненных заданий. Эта особенность в задачах обслуживания АЭС может быть связана, в частности, с необходимостью учета радиационного фона при последовательном демонтаже элементов энергоблока, выведенного из эксплуатации.

Глава 2

Метод динамического программирования в задаче коммивояжера

Задача о коммивояжере обычно формулируется следующим образом: торговец, начиная свой путь с некоторого нулевого города, хочет посетить каждый из N других городов один и только один раз. Бывают задачи двух типов: незамкнутая – от коммивояжера не требуется возвращения в первоначальный город, и замкнутая - коммивояжер должен вернуться в начальный город (в дальнейшем мы покажем, как переходить от одной задачи к другой). Можно допустить и такой случай, когда вернуться требуется не в начальный город, а в какой-то наперед заданный пункт. В каком порядке должен он посещать города, чтобы минимизировать суммарное пройденное "расстояние"? Под "расстоянием"мы можем понимать время, издержки или другой показатель по нашему желанию. В то же время постановки, в которых используются именно расстояния, встречаются достаточно часто, а потому упомянутый вариант ЗК представляет самостоятельный интерес. В этом случае можно говорить о метрической ЗК. Расстояния (или издержки) между любыми двумя городами считаются известными.

В связи с данной задачей приведем высказывание из статьи [1], посвященной исследованию этой задачи.

"Задача привлекла к себе внимание исследователей, так как в ней сочетается простота постановки и трудность решения. Трудности имеют чисто вычислительный характер, т.к. существование решения очевидно. Имеется $N!$ возможных путей, один из которых или несколько дают минимум издержек (минимальные издержки могут быть и бесконечными - например, если между городами нет прямого сообщения). Задача о коммивояжере приобрела известность в США после того, как одна мыловаренная фирма объявила конкурс, предложив 10 000 долларов за отыскание наилучшего пути для задачи с 33 городами. Очень немногие нашли наилучший путь.

История вопроса освещена в работе М. Флада [60]. В последние годы было предложено много методов решения задачи. Одни из них неэффективны, другие дают не обязательно оптимальное решение, и, наконец, некоторые требуют принятия интуитивных решений, а это затрудняет программирование для машины. Мы ограничимся рассмотрением методов, которые: 1) гарантируют оптимальность; 2) позволяют удобно программировать решение; 3) являются универсальными, т.е. не приспособлены с самого начала для задач специальной структуры.

Среди методов такого типа наиболее эффективными (в вычислительном отношении) оказались основанные на идеях динамического программирования. Большинство опубликованных задач симметрично, т.е. расстояние от города i до города j то же, что от j до i. Алгоритм ветвей и границ годится и для асимметричных задач (возможно, для таких задач он работает даже лучше). Асимметричные задачи появляются в разных приложениях. Приведем пример из области календарного планирования производства. Предположим, что в течение некоторого периода времени сборочная линия должна собирать изделия n различных типов. Стоимость перехода от изделия типа i к типу j равна $c_{i,j}$. Какая последовательность типов собираемых изделий минимизирует суммарные издержки? Это задача о коммивояжере, в которой нет надобности предполагать, что $c_{i,j} = c_{j,i}$".

Мы привели данную выдержку из работы [1], имея в виду приведенную в ней точную характеристику исследуемой задачи, возникающих трудностей и подходов к ее решению. Мы в своих ближайших построениях будем ориентироваться на использование МДП, имея в виду качественное исследование ЗК и ее аналогов. В то же время отметим, что важную роль в процедурах решения ЗК играет метод ветвей и границ; см. в этой связи [1].

2.1. Замкнутая и незамкнутая задачи коммивояжера

Будем рассматривать известную (см. [25, 26, 27] и монографию [12]) задачу коммивояжера, именуемую, как и ранее, кратко ЗК, в двух вариантах:

1) "обычная" замкнутая задача;

2) незамкнутая задача.

В первом случае предполагается заданной матрица

$$A = (A_{i,j} \geq 0,\ i \in \overline{0, N},\ j \in \overline{0, N}),$$

где $N,\ N \geq 3,$ – натуральное число (размерность, представляющая практический интерес). Мы должны организовать процесс перемещений

$$0 \longrightarrow i_1 \longrightarrow ... \longrightarrow i_N \longrightarrow 0, \tag{2.1.1}$$

начинающийся и заканчивающийся “в индексе” 0: последний именуется зачастую базой, в то время как индексы $j \in \overline{1,N}$ определяют города, которые требуется посетить. В (2.1.1) $\mathbf{i} = (i_j)_{j\in\overline{1,N}}$ есть перестановка чисел в $\overline{1,N} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathcal{N} | k \le N\}$, где, как уже отмечалось, через $\mathcal{N}$ обозначается множество $\{1; 2; ...\}$ всех натуральных чисел (напомним, что здесь и ниже $\stackrel{\triangle}{=}$ – равенство по определению). Система перемещений (2.1.1) оценивается следующей суммой

$$A_{0,i_1} + A_{i_1,i_2} + ... + A_{i_{N-1},i_N} + A_{i_N,0}, \tag{2.1.2}$$

которую требуется минимизировать выбором перестановки $\mathbf{i}$. Заметим, что возможны и другие способы агрегирования индивидуальных затрат, определяемых посредством $A_{i,j}$. Наиболее известный среди них отвечает задаче на узкие места (см., в частности, подобный способ агрегирования в [54]). В отношении более общих вариантов агрегирования отметим работу [24]. Здесь же отметим монографию [28], где рассматривались общие вопросы теории МДП с неаддитивными, вообще говоря, вариантами агрегирования индивидуальных затрат. В результате выбора $\mathbf{i}$ складывается некоторая “орбита” (2.1.1), определяемая нашей перестановкой однозначно.

В случае 2) мы работаем с матрицей

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{i,j} \in [0, \infty[, \ i \in \overline{0,N}, \ j \in \overline{1,N}) \tag{2.1.3}$$

и оцениваем выбор каждой перестановки $\mathbf{i}$ чисел из $\overline{1,N}$ посредством следующей суммы:

$$\mathbb{A}_{0,i_1} + \mathbb{A}_{i_1,i_2} + ... + \mathbb{A}_{i_{N-1},i_N}, \tag{2.1.4}$$

где $\mathbf{i} = (i_j)_{j\in\overline{1,N}}$. Различие (2.1.2) и (2.1.4) не представляется существенным (в [25] указывается способ преобразования одной из постановок 1), 2) к другой). Постановка 1) является более традиционной; однако постановка 2) будет (в используемых ниже конструкциях) проще для дальнейших построений, и мы будем в значительной степени ее придерживаться, ориентируясь на использование только одного метода решения, а именно метода динамического программирования (МДП). В связи с преобразованием задачи 2) к форме 1) отметим, что мы можем определить (в терминах $\mathbb{A}$) матрицу A следующим образом: при $i \in \overline{0,N}, \ j \in \overline{1,N}$ полагаем $A_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j}$ и $A_{i,0} = 0$ при $i \in \overline{0,N}$.

Преобразование $A \longrightarrow \mathbb{A}$, т.е. сведение задачи 1) к виду 2), можно осуществить по приводимой далее схеме. Рассмотрим процедуру сведения замкнутой ЗК к незамкнутой, действуя в идейном отношении так же, как и в работе [25].

Итак, мы располагаем матрицей A, которая позволяла нам оценивать перемещения (2.1.1) суммой вида (2.1.2). Мы построим сейчас модель разомкнутой ЗК с N+1 городом; в связи с изменением числа городов будем вместо $\mathbb{A}$ использовать обозначение $\mathbf{A}$. Для этого мы сначала выберем достаточно большое число $K,\ K > 0$. Именно, будем полагать

$$K \overset{\triangle}{=} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} A_{i,j} + 1. \tag{2.1.5}$$

Мы будем полагать, кроме того, что матрица

$$\mathbf{A} \overset{\triangle}{=} (\mathbf{A}_{i,j};\ i \in \overline{0, N+1},\ j \in \overline{1, N+1}) \tag{2.1.6}$$

определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}_{i,j} \overset{\triangle}{=} A_{i,j}\ \forall i \in \overline{0,N}\ \forall j \in \overline{1,N})\& \\ \&(\mathbf{A}_{i,N+1} \overset{\triangle}{=} A_{i,0} + 2K\ \forall i \in \overline{1,N})\& \\ \&(\mathbf{A}_{0,N+1} \overset{\triangle}{=} 3K)\&(\mathbf{A}_{N+1,j} \overset{\triangle}{=} 3K\ \forall j \in \overline{1,N+1}).\end{gathered} \tag{2.1.7}$$

В результате матрица $\mathbf{A}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{0,1} & A_{0,2} & ... & A_{0,N} & 3K \\ A_{1,1} & A_{1,2} & ... & A_{1,N} & A_{1,0} + 2K \\ A_{2,1} & A_{2,2} & ... & A_{2,N} & A_{2,0} + 2K \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{N,1} & A_{N,2} & ... & A_{N,N} & A_{N,0} + 2K \\ 3K & 3K & ... & 3K & 3K \end{pmatrix}.$$

Смысл определения (2.1.6), (2.1.7) состоит на содержательном уровне в следующем.

Мы стремимся "обязать" коммивояжера в нашей новой незамкнутой задаче только к таким перемещениям

$$0 \longrightarrow i_1 \longrightarrow ... \longrightarrow i_N \longrightarrow i_{N+1}, \tag{2.1.8}$$

для которых "система" $(i_j)_{j=1}^{N+1}$ была бы перестановкой в $\overline{1, N+1}$, для которой имело бы место свойство

$$i_s \in \overline{1,N}\ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{2.1.9}$$

Стало быть, при нашем сценарии город с номером $N+1$ обязательно посещается последним, т.е. $i_{N+1} = N+1$, и при этом переход $i_N \longrightarrow i_{N+1}$ оценивается числом $A_{i_N,0} + 2K$.

Обсудим, чем же обеспечивается гарантированное развитие маршрута по такому сценарию.

Итак, переход из 0 в город $N+1$ приводит к затратам, равным $3K$; общие же затраты при всех последующих перемещениях будут не меньше, чем число $3K$, которое в силу (2.1.5) мажорирует затраты для любого замкнутого маршрута. С точки зрения маршрутов в нашей незамкнутой задаче число $3K$ будет строго больше, чем затраты вдоль любого маршрута, удовлетворяющего (2.1.9).

В самом деле, если у нас имеет место (2.1.9), то затраты определяются выражением

$$\mathbf{A}_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} + \mathbf{A}_{i_N,N+1} =$$

$$= A_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N-1} A_{i_j,i_{j+1}} + A_{i_N,0} + 2K < 3K. \qquad (2.1.10)$$

Если же $i_1 = N+1$, то для такого маршрута затраты имеют вид (см. (2.1.7))

$$\mathbf{A}_{0,N+1} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} = \mathbf{A}_{0,N+1} + \mathbf{A}_{N+1,i_2} + \sum_{j=2}^{N} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} =$$

$$= 3K + 3K + \sum_{j=2}^{N} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} \geq 6K.$$

С учетом этой оценки и (2.1.10) можно утверждать, что оптимальный в разомкнутой ЗК маршрут (2.1.8) не может удовлетворять условию $i_1 = N+1$. Неравенство (2.1.10) показывает, что переход из 0 в город $N+1$ заведомо неоптимален. Стало быть, на оптимальном маршруте (2.1.8) в разомкнутой ЗК непременно $i_1 \in \overline{1,N}$.

На самом же деле для упомянутого оптимального маршрута (2.1.8) исключена ситуация, когда $i_s = N+1$ при некотором $s \in \overline{1,N}$. Допустим противное, т.е. предположим, что $i_s = N+1$ для какого-то $s \in \overline{2,N}$. Напомним, что получающиеся в незамкнутой ЗК затраты имеют вид

$$\mathbf{A}_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}}. \qquad (2.1.11)$$

При этом возможен случай $s = 2$, а тогда эти затраты имеют вид

$$\mathbf{A}_{0,i_1} + A_{i_1,0} + 2K + b,$$

где b неотрицательно и, более того, $b \geq 3K$, поскольку $\mathbf{A}_{i_s,i_{s+1}} = 3K$. Стало быть, при $s = 2$ затраты (2.1.11) будут не меньше $5K$. Возможен и вариант $s > 2$. Тогда (2.1.11) имеет вид

$$\mathbf{A}_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} + A_{i_{s-1},0} + 2K + \mathbf{A}_{N+1,i_{s+1}} + c,$$

где $i_{s+1} \in \overline{1,N}$ и $c \geq 0$. Но тогда в силу (2.1.7) для затрат (2.1.11) в рассматриваемом сейчас случае имеем следующую оценку

$$\mathbf{A}_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} \geq 5K, \tag{2.1.12}$$

как и в случае $s = 2$. Стало быть, во всех случаях оценка (2.1.12) имеет место, в то время как любой маршрут со свойством (2.1.9) оценивается сверху числом $3K$ в соответствии с (2.1.10). Поскольку случай $s = 1$, т.е. переход $0 \longrightarrow N+1$, также оценивается переходом с большими затратами, то установлено, что оптимальный маршрут в незамкнутой ЗК имеет вид (2.1.9), т.е. $N + 1 = i_{N+1}$. С другой стороны, для всякого маршрута (2.1.8) со свойством (2.1.9) имеет место равенство

$$\mathbf{A}_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} = \mathbf{A}_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{A}_{i_j,i_{j+1}} + \mathbf{A}_{i_N,N+1} =$$

$$= A_{0,i_1} + \sum_{j=1}^{N-1} A_{i_j,i_{j+1}} + A_{i_N,0} + 2K =$$

$$= A_{0,i_1} + A_{i_1,i_2} + ... + A_{i_{N-1},i_N} + A_{i_N,0} + 2K, \tag{2.1.13}$$

т.е. наши потери в разомкнутой задаче для маршрута со свойством (2.1.9) совпадают с увеличенными на $2K$ потерями в замкнутой ЗК для маршрута, получаемого отбрасыванием $i_{N+1} = N + 1$.

При этом в незамкнутой ЗК мы действительно можем ограничиться в процессе минимизации затрат маршрутами вида (2.1.9). С учетом этого обстоятельства для экстремума $V_{\text{НЗК}}$ нашей незамкнутой ЗК имеет место следующая связь с экстремумом в замкнутой задаче:

$$V_{\text{НЗК}} = V_{\text{ЗЗК}} + 2K, \tag{2.1.14}$$

где $V_{\text{ЗЗК}}$ — экстремум исходной замкнутой ЗК. Свойства (2.1.13), (2.1.14) фактически означают, что в виде полученной на основе (2.1.7) незамкнутой ЗК мы имеем эквивалентную с практической точки зрения задачу по отношению к исходной замкнутой ЗК. В самом деле, чтобы решить последнюю, т.е. найти значение и оптимальный маршрут, достаточно воспользоваться (2.1.14) и найти оптимальный маршрут для незамкнутой ЗК (в последней следует учесть роль маршрутов вида (2.1.9)).

Отметим, что рассматриваемая в данной книге ЗК является задачей, весьма трудной в вычислительном отношении. В этой связи полезно отметить, что в нашей разомкнутой ЗК возникает проблема перебора очень большого (при достаточно большом N) числа маршрутов. Именно в данной задаче имеется (и мы это сейчас проверим) $N!$ возможных маршрутов. Ранее мы обсуждали практически интересный случай, когда $N \geq 3$. Однако сейчас от этого условия мы отказываемся, добавляя к нашему рассмотрению очевидные случаи $N = 1$ и $N = 2$.

При $N = 1$ данное утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для $N = n$. Рассмотрим задачу с $n + 1$ городом. Тогда каждый из возможных маршрутов можно охарактеризовать первым городом посещения, т.е. тем городом, куда коммивояжер перемещается из базы 0. Тогда множество всех "первых" городов, складывающихся вдоль какого-либо маршрута, есть $\overline{1, N+1}$, т.е. количество всех "первых" возможных городов у нас равно $N + 1$, и мы можем начинать свои перемещения с любого из этих городов.

Далее, после перемещения в "первый" город у нас остается много возможностей для дальнейших посещений городов. Именно их количество есть n. В самом деле, из $\overline{1, n+1}$ мы "вычеркиваем" город, получая n – элементное множество. Фактически упомянутый "первый" город является базой для ЗК по обходу n городов. Мы знаем уже, что в этой задаче у нас имеется $n! = N!$ возможных маршрутов. Но поскольку количество самих "первых" городов у нас есть число $n + 1$, то вообще всех маршрутов для ЗК с "настоящей" базой у нас $(n + 1)!$. Здесь мы учитываем, конечно, что маршруты в этой основной ЗК, проходящие на первом шаге также через разные города, непременно различны.

Тем самым по индукции мы установили, что наша ЗК имеет $N!$ возможных маршрутов, что создает большие трудности с вычислениями при росте N. Отметим, что ЗК является одной из основных NP – полных задач (см. [12, 29]). Строго говоря, в теории NP – полных задач рассматриваются [12] задачи распознавания. В нашем случае речь могла бы идти о возможности выбора маршрута

$$(i_j)_{j\in\overline{1,N}},$$

при котором сумма (2.1.4) не превосходит заданного числа. Однако, и это отмечается в [12], задача оптимизации маршрута "не легче" упомянутой задачи распознавания, и потому можно, как и в [12], говорить о ней, как о NP – полной.

Во всяком случае для задач этого типа не известны полиномиальные алгоритмы (т.е. алгоритмы, для которых время вычислений было бы ограничено некоторой полиномиальной функцией от размерности задачи), приводящие к оптимальным решениям.

Нашей целью является изложение одного известного теоретического метода, восходящего к работам [5, 44]. Речь идет о конкретизации МДП с целью решения ЗК в постановках 1), 2). Логика такого использования МДП традиционна: сначала происходит построение функции Беллмана (в обратном "времени": от простого к сложному), а затем конструируется маршрут, т.е. некоторая перестановка $\mathbf{i}$, исходя из решения (на каждом шаге) уравнения Беллмана. В результате конечного числа однотипных шагов формируется оптимальный маршрут.

2.2. Простейшие эвристические алгоритмы (примеры)

В настоящем разделе рассмотрим несколько простейших примеров ЗК, в которой города будут размещены на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Матрица затрат будет определена посредством расстояний, каждое из которых будет модулем разности двух вещественных чисел. Мы предполагаем показать возможные недостатки, связанные с применением т.н. жадных алгоритмов [15] при решении ЗК. В рассматриваемых сейчас случаях упомянутые жадные алгоритмы можно рассматривать как реализации понятного правила "иди в ближайший город". Мы ограничимся здесь использованием содержательного способа рассуждений, не претендующего на математическую строгость.

Итак, пусть рассматриваются "одномерные" варианты метрической ЗК. Сначала рассмотрим незамкнутую ЗК.

Пусть n — натуральное число, т.е. $n \in \mathcal{N}$, $N \triangleq n+1$. Пусть база ("город" с номером 0, начальный пункт) отождествляется с числом 0. Города с номерами $i \in \overline{1,n}$ отождествляются с самими этими числами: при $k \in \overline{1,n}$ город с номером k есть число k. Полагаем, что $n \geq 2$. Город с номером $N = n+1$

отождествляем с числом $-1,1$. Итак, полагаем, что кортеж городов

$$(\Gamma_i)_{i\in\overline{1,N}}$$

определяется условиями

$$(\Gamma_i \triangleq i \quad \forall i \in \overline{1,n})\&(\Gamma_N \triangleq -1,1). \tag{2.2.1}$$

Кроме того, введем город с номером 0, т.е. Γ_0, полагаем

$$\Gamma_0 \triangleq 0;$$

иными словами, Γ_0 есть база. Теперь определим матрицу $\mathbb{A}$ (2.1.3) следующим образом (см. (2.2.1)):

$$\mathbb{A}_{i,j} \triangleq |\Gamma_i - \Gamma_j| \quad \forall i \in \overline{0,N}\ \forall j \in \overline{1,N}. \tag{2.2.2}$$

Полагаем, что коммивояжер, находясь в городе Γ_j, где $j \in \overline{1,N}$, и имея непустое множество K городов, которые надо посетить, выбирает для очередного посещения город с индексом $s \in K$, для которого

$$|\Gamma_j - \Gamma_s| \leq |\Gamma_j - \Gamma_k| \quad \forall k \in K.$$

Данное правило будем называть следующим образом: "иди в ближайший город". Рассмотрим перемещения коммивояжера, который руководствуется данным правилом.

Сначала, находясь на базе, т.е. в городе Γ_0, он выбирает город Γ_1, который является ближайшим к Γ_0, и перемещается в Γ_1, вычеркивая его одновременно из списка оставшихся заданий; тогда

$$K_1 \triangleq \overline{1,N}\backslash\{\Gamma_1\} = \overline{1,N}\backslash\{1\}$$

(выражение в фигурных скобках означает соответствующее одноэлементное множество). Из K_1 выбирается в качестве ближайшего к Γ_1 город $\Gamma_2 = \{2\}$ (учитываем, что $n \geq 2$), после чего коммивояжер перемещается в Γ_2. Такой процесс будет продолжаться до тех пор, пока коммивояжер не окажется в городе $\Gamma_n = n$, куда он перемещается из $\Gamma_{n-1} = n-1$, действуя по вышеуказанному правилу "иди в ближайший город". К этому моменту коммивояжер пройдет расстояние, равное числу n, после чего у него останется непосещенным город $\Gamma_N = \Gamma_{n+1}$, т.е.

$$K_n = \{\Gamma_N\}.$$

Коммивояжер вынужден теперь возвращаться и, не задерживаясь на базе, перемещаться в город Γ_N, проходя при этом расстояние, равное

$$n + 1,1.$$

В итоге коммивояжер пройдет полное расстояние, равное $2n+1,1$. Это расстояние и будет ценой маршрута, формируемого по вышеупомянутому правилу на основе жадного алгоритма. Позднее мы вернемся к решению данного примера, применяя оптимальный алгоритм. Сейчас же отметим только, что, если коммивояжер изменит правило выбора очередного города, то он может получить существенный выигрыш.

В самом деле, пусть коммивояжер сначала посещает Γ_N, а затем $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$. Тогда пройденное им расстояние будет

$$2,2+n.$$

Тогда (в нашем случае $n \geq 2$) достижимый выигрыш есть число

$$(2n+1,1)-(2,2+n)=n-1,1 \geq 0,9.$$

Следовательно, в рассматриваемом примере имеет смысл отказаться от правила “иди в ближайший город”.

Рассмотрим теперь вариант применения вышеупомянутого правила в “одномерной” замкнутой ЗК. Мы полагаем, что у нас имеется три города

$$\Gamma_1 \triangleq 1,\ \Gamma_2 \triangleq 4,\ \Gamma_3 \triangleq -1,1. \tag{2.2.3}$$

База Γ_0 по-прежнему отождествляется с нулем: $\Gamma_0=0$. Полагаем $N=3$ и

$$A_{i,j} \triangleq |\Gamma_i - \Gamma_j| \quad \forall i \in \overline{0,3}\ \forall j \in \overline{0,3}. \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим процесс перемещения коммивояжера на основе жадного алгоритма. Находясь в точке $\Gamma_0=0$, т.е. на базе, коммивояжер среди городов (2.2.3) выбирает Γ_1, который является ближайшим к Γ_0. Затем он перемещается в Γ_1 и вычеркивает этот город из списка заданий; в этом списке остаются, следовательно, только города Γ_2 и Γ_3. При этом переход

$$\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$$

оценивается расстоянием $A_{0,1}=1$; среди городов Γ_2 и Γ_3 ближайшим к Γ_1 является Γ_3, т.к.

$$A_{1,3}=2,1<A_{1,2}=3.$$

Поэтому коммивояжер “разворачивается” и перемещается в город Γ_3, “затрачивая” расстояние $A_{1,3}=2,1$. После этого в списке оставшихся заданий остается только один город $\Gamma_2=4$ и коммивояжер перемещается в этот город, “затрачивая” расстояние

$$A_{3,2}=5,1.$$

В результате общий путь, пройденный коммивояжером, есть число

$$1 + 2,1 + 5,1 + 4 = 12,2.$$

Рассмотрим теперь другой маршрут коммивояжера:

$$\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_0. \tag{2.2.5}$$

С учетом (2.2.4) расстояние, пройденное при маршрутизации (2.2.5), есть

$$1,1 + 2,1 + 3 + 4 = 10,2.$$

Мы снова получили улучшение результата в уравнении с правилом “иди в ближайший город”.

Рассмотрим теперь работу правила “иди в ближайший город” для усложненной версии ЗК (эта версия в [27] именуется задачей курьера). Мы также будем рассматривать эту задачу в дальнейшем, несколько усложняя ее посредством замены городов мегаполисами, т.е. конечными множествами городов. Сейчас мы на содержательном уровне обсуждаем модифицированный должным образом жадный алгоритм, по–прежнему полагая задачу “одномерной”.

Итак, пусть города (на вещественной прямой $\mathbb{R}$) определяются при $N = 3$ условиями:

$$\Gamma_0 = 0,\ \Gamma_1 = 1,\ \Gamma_2 = 3,\ \Gamma_3 = -2.$$

Коммивояжер стартует из Γ_0 и посещает города $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$; ограничимся сейчас незамкнутой задачей, т.е. не требуем от коммивояжера возвращения на базу.

Полагаем, однако, что на выбор маршрута накладывается ограничение: город Γ_1 может посещаться только после города Γ_2. Иными словами, коммивояжер может использовать один из следующих маршрутов:

$$\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_3, \tag{2.2.6}$$

$$\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_1, \tag{2.2.7}$$

$$\Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_3 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma_1. \tag{2.2.8}$$

Пусть матрица $\mathbb{A}$ определяется посредством (2.2.2). Действуя на основе жадного алгоритма, коммивояжер, находясь на базе, т.е. в точке Γ_0, имеет право перемещаться либо в город Γ_2, либо в город Γ_3. Перемещение в Γ_1 заведомо недопустимо, поскольку нарушает вышеупомянутые ограничения. Применяя правило “иди в ближайший город”, коммивояжер выбирает Γ_3, поскольку

$$A_{0,3} = 2 < 3 = A_{0,2}.$$

Итак, коммивояжер перемещается в город Γ_3, “затрачивая” расстояние $A_{0,3} = 2$. После этого коммивояжер обязан перемещаться в город Γ_2, “затрачивая” расстояние

$$A_{3,2} = 5,$$

после чего у него остается только одно задание на посещение Γ_1. Это последнее перемещение оценивается расстоянием

$$A_{2,1} = 2.$$

Таким образом, общая длина пути, пройденная коммивояжером при использовании жадного алгоритма, есть число

$$2 + 5 + 2 = 9. \tag{2.2.9}$$

Укажем теперь способ улучшения результата при отказе от использования жадного алгоритма. Заметим, что результат (2.2.9) достигается на маршруте (2.2.8).

В то же время маршрут (2.2.6) оценивается суммарным расстоянием

$$A_{0,2} + A_{2,1} + A_{1,3} = 3 + 2 + 3 = 8. \tag{2.2.10}$$

В свою очередь, маршрут (2.2.7) оценивается суммарным расстоянием

$$A_{0,2} + A_{2,3} + A_{3,1} = 3 + 5 + 3 = 11$$

и не представляет для нас интереса. В то же время маршрут (2.2.6) “выигрывает” у (2.2.8); достаточно сравнить (2.2.9) и (2.2.10).

Мы снова получили улучшение при отказе от использования жадного алгоритма. При отказе от жадного алгоритма мы должны анализировать (при выборе соответствующего маршрута) не только “сиюминутные” ситуации, но и стараться заглянуть в будущее с целью прогноза перспективного варианта поведения. Мы увидим в дальнейшем, что эту функцию в полной мере реализует метод динамического программирования, подробно рассматриваемый в дальнейшем.

2.3. Метод динамического программирования

Мы рассматриваем здесь один из методов решения ЗК. Более того, данный метод, т.е. МДП, может рассматриваться как метод качественного исследования этой задачи. Вернемся к определениям разд. 1 для случая незамкнутой ЗК (возможность сведения к ней замкнутой ЗК мы уже проверили;

в дальнейшем, однако, этот интересный в практическом отношении случай будет рассмотрен специально). Фиксируем N, $N \geq 2$, матрицу $\mathbb{A}$ раздела 1; тогда $\mathbb{A}_{i,j} \in [0, \infty[$ при $i \in \overline{0, N}$ и $j \in \overline{1, N}$.

Через $\mathbb{P}$ будем обозначать множество всех перестановок [29] индексов из $\overline{1, N}$:

$$\mathbb{P} = \Pi_N.$$

Элементы $\mathbb{P}$ являются взаимно однозначными отображениями $\overline{1, N}$ на $\overline{1, N}$. Для обозначения элементов $\mathbb{P}$ будем использовать буквы α, β, γ, ...; при этом для $\eta \in \mathbb{P}$ имеем

$$\eta : \overline{1, N} \longrightarrow \overline{1, N}.$$

В (2.1.4) для $\mathbf{i} \in \mathbb{P}$ мы имеем, стало быть, число

$$\pi(\mathbf{i}) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{A}_{0,\mathbf{i}(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\mathbf{i}(j),\mathbf{i}(j+1)}. \tag{2.3.1}$$

Из (2.3.1) видно, что к перестановкам мы относимся, как к функциям. В (2.3.1) мы определили отображение

$$\pi \ : \ \mathbb{P} \longrightarrow [0, \infty[; \tag{2.3.2}$$

перестановки и допустимые маршруты разд. 1 – одно и то же, поэтому (см. заключительную часть разд. 1) $\mathbb{P}$ – конечное множество. Следовательно, задача

$$\pi(\mathbf{i}) \longrightarrow \min, \ \ \mathbf{i} \in \mathbb{P}, \tag{2.3.3}$$

непременно имеет решение. Введем в этой связи значение

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} \min_{\mathbf{i} \in \mathbb{P}} \pi(\mathbf{i}) \tag{2.3.4}$$

задачи (2.3.3) и непустое множество

$$\mathbb{S} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} | \pi(\alpha) = \mathbb{V}\} \tag{2.3.5}$$

всех ее решений. Под решением задачи (2.3.3) будем понимать нахождение $\mathbb{V}$, определяемого в (2.3.4), и какого-то элемента $\alpha \in \mathbb{S}$.

Данную задачу (2.3.3) мы включаем в множество (подобных) задач, которые будем именовать укороченными.

Через $\mathfrak{N}$ обозначаем семейство всех непустых подмножеств множества $\overline{1, N}$ (разумеется, все множества $K \in \mathfrak{N}$ конечны). Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $|K|$ обозначаем (см. главу 1) количество элементов (мощность) множества K, $|K| \in \overline{1, N}$; элементы данного множества K можно занумеровать без повторений числами из $\overline{1,|K|}$. При этом для всякого $K \in \mathfrak{N}$ получаем (см. главу 1) множество $(bi)[K]$ всех биективных [10, с. 319] отображений

$$\mathbb{B}\ :\ \overline{1,|K|} \longrightarrow K. \qquad (2.3.6)$$

Разумеется, биекции (2.3.6) суть взаимно однозначные отображения из $\overline{1,|K|}$ на K, т.е. нумерации элементов K без повторений. Заметим, что биекции (2.3.6) – аналоги перестановок из множества $\mathbb{P}$; более того, $\mathbb{P} = (bi)[\overline{1,N}]$. В виде

$$(bi)[K],\ \ K \in \mathfrak{N},$$

мы всякий раз имеем непустое конечное множество. Условимся, что $|\varnothing| = 0$ ($\varnothing$ принято рассматривать как конечное множество). Полагаем, что $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N} \bigcup \{\varnothing\}$ (семейство всех подмножеств $\overline{1,N}$). Пусть

$$\mathbb{N}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathbb{N} \,|\, s = |K|\}\ \ \forall s \in \overline{0,N}. \qquad (2.3.7)$$

Полезно заметить, что при $s \in \overline{1,N}$ имеет место

$$\mathfrak{N}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \,|\, s = |K|\} = \mathbb{N}_s.$$

Пары (m,K), где $m \in \overline{0,N}$ и $K \in \mathbb{N}$, называем (при рассмотрении ЗК) позициями.

Множество всех таких позиций можно разбить на слои, соответствующие разбиению

$$(\mathbb{N}_s)_{s\in\overline{0,N}}$$

семейства $\mathbb{N}$ всех подмножеств множества $\overline{1,N}$. Полагаем

$$D_0 \stackrel{\triangle}{=} \overline{1,N} \times \mathbb{N}_0 = \overline{1,N} \times \{\varnothing\}, \qquad (2.3.8)$$

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \{(m,K) \in \overline{1,N} \times \mathfrak{N}_s | m \notin K\} =$$
$$= \{(m,K) \in \overline{1,N} \times \mathbb{N}_s | m \notin K\} \qquad \forall s \in \overline{1,N-1}, \qquad (2.3.9)$$

$$D_N \stackrel{\triangle}{=} \{(0,\overline{1,N})\}. \qquad (2.3.10)$$

Напомним, что в (2.3.8) – (2.3.10) используется соглашение главы 1: если x – какой-либо объект (число, упорядоченная пара, множество, ...), то $\{x\}$ есть одноэлементное множество (синглетон), содержащее x.

Отметим одно простое свойство, связанное с (2.3.8) – (2.3.10): если $s \in \overline{1,N}$, $K \in \mathfrak{N}_s$ и $k \in K$, то справедливо включение

$$(k, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}. \qquad (2.3.11)$$

Введем теперь нужные для последующего построения функции Беллмана "укороченные"задачи. Они будут состоять в наиболее экономном осуществлении последовательного обхода городов из множеств K, $K \subset \overline{1,N}$. Для наших целей существенны экстремумы таких задач. Напомним, что $\mathbb{A}_{i,j} \in [0,\infty[\ \forall i \in \overline{0,N}\ \forall j \in \overline{1,N}$. В этой связи полагаем, что на D_0 определяется функция

$$V_0 : D_0 \to [0,\infty[,$$

тождественно равная нулю: $V_0(s,\varnothing) = 0\ \forall s \in \overline{1,N}$. Кроме того, введем функцию

$$V_1 : D_1 \to [0,\infty[$$

посредством следующего условия, учитывающего очевидное равенство:

$$D_1 = \bigcup_{i=1}^{N} \{(m,\{i\}) :\ m \in \overline{1,N} \setminus \{i\}\}. \tag{2.3.12}$$

Для $(m,K) \in D_1$ полагается

$$V_1(m,K) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{A}_{m,i}, \tag{2.3.13}$$

где $i \in \overline{1,N}$ есть тот (единственный) индекс, для которого $K = \{i\}$. Иными словами, имея $(m,K) \in D_1$, нам следует с учетом (2.3.12) подобрать индекс $i \in \overline{1,N}$, для которого $K = \{i\}$; при этом

$$m \in \overline{1,N} \backslash \{i\},$$

откуда обязательно следует свойство $m \neq i$. Тогда

$$V_1(m,K) = V_1(m,\{i\}) = \mathbb{A}_{m,i}.$$

Наконец, если $s \in \overline{2,N}$ и $(m,K) \in D_s$, то

$$V_s(m,K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha \in (bi)[K]} (\mathbb{A}_{m,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)}) \in [0,\infty[. \tag{2.3.14}$$

Тем самым у нас определены неотрицательные функции V_0, V_1, ..., V_N. При $j \in \overline{0,N}$ функция V_j определена на D_j. С учетом (2.3.11) мы получаем также, что при $s \in \overline{1,N}$, $(m,K) \in D_s$ и $k \in K$

$$\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K \backslash \{k\}) \in \mathbb{R}. \tag{2.3.15}$$

Среди чисел (2.3.15) мы можем определить наименьшее при переборе всех $k \in K$, т.е определить соответствующий минимум.

Предложение 2.3.1. *Если* $s \in \overline{1,N}$ *и* $(m,K) \in D_s$, *то*

$$V_s(m,K) = \min_{k \in K} \ [\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K \backslash \{k\})]. \qquad (2.3.16)$$

Замечание. В (2.3.16) мы фактически имеем известное уравнение Беллмана, представленное, однако, в нетрадиционной форме, связанной с эволюцией слоев $V_0, \ V_1, \ \ldots, \ V_N$ этой функции. Эти слои оказываются далее более удобными при построении алгоритма. Отметим также, что предложение 2.1 в своей существенной части содержится в [5, 44]. Рассмотрим, однако, подробное доказательство (2.3.16), учитывая, в частности, особенности данной формы изложения, связанной с (2.3.8)–(2.3.10), т.е. с построением функции Беллмана по слоям.

Доказательство. Фиксируем число $s \in \overline{1,N}$ и $(m,K) \in D_s$. Имеет смысл выделить для отдельного рассмотрения случаи $s = 1$ и $s = 2$. При $s = 1$ из (2.3.14) и определения V_0 имеем (см. (2.3.12)):

$$\begin{aligned} V_s(m,K) &= V_1(m,K) = V_1(m,\{i\}) = \mathbb{A}_{m,i} = \\ &= \min_{k \in \{i\}} [\mathbb{A}_{m,k} + 0] = \min_{k \in \{i\}} [\mathbb{A}_{m,k} + V_0(k, \varnothing)] = \\ &= \min_{k \in K} \ [\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K \backslash \{k\})], \end{aligned} \qquad (2.3.17)$$

где $i \in \overline{1,N}$ таково, что $K = \{i\}$. Рассмотрение случая $s = 1$ завершено.

Рассмотрим теперь случай $s = 2$. Это означает, что $|K| = 2$, причем $m \notin K$. Заметим, что в этом случае можно указать два различных индекса $p \in \overline{1,N}$ и $q \in \overline{1,N}$, для которых $K = \{p;q\} = \{p\} \bigcup \{q\}$. В этом простейшем (но уже содержательном) случае при посещении городов из множества K, т.е. городов p и q, можно указать два возможных варианта посещения (из города m):

$$m \longrightarrow p \longrightarrow q, \ \ m \longrightarrow q \longrightarrow p. \qquad (2.3.18)$$

В то же время множество $K \setminus \{k\}$, где $k \in K$, непременно является синглетоном, причем в соответствии с (2.3.18)

$$(K \setminus \{k\} = \{q\}) \vee (K \setminus \{k\} = \{p\}); \qquad (2.3.19)$$

варианты в (2.3.19) соответствуют первому и второму случаю в (2.3.18). Экстремум затрат на перемещения из города m в нашем случае определяется предельно просто: следует оценить затраты на каждое "путешествие"в (2.3.18) и среди двух полученных величин выбрать наименьшую. Это означает, что мы должны сравнить числа

$$A_{m,p} + A_{p,q}, \ \ A_{m,q} + A_{q,p}.$$

Стало быть, величина (2.3.14) здесь определяется выражением

$$V_s(m, K) = V_2(m, \{p; q\}) = \min(\{A_{m,p} + A_{p,q};\ A_{m,q} + A_{q,p}\}); \qquad (2.3.20)$$

множество $(bi)[K]$ состоит здесь из двух элементов, соответствующих вариантам нумерации $K = \{p; q\}$ в (2.3.18). Далее учтем, что в силу (2.3.13)

$$V_1(p, \{q\}) = V_1(p, K \setminus \{p\}) = \mathbb{A}_{p,q},$$

$$V_1(q, \{p\}) = V_1(q, K \setminus \{q\}) = \mathbb{A}_{q,p},$$

поэтому (2.3.20) сводится к выражению

$$V_s(m, K) = \min(\{\mathbb{A}_{m,p} + V_1(p, \{q\}); \mathbb{A}_{m,q} + V_1(q, \{p\})\}) =$$

$$= \min_{k \in \{p;q\}}[\mathbb{A}_{m,k} + V_1(k, K \setminus \{k\})] = \min_{k \in K}[\mathbb{A}_{m,k} + V_1(k, K \setminus \{k\})]. \qquad (2.3.21)$$

Итак, в достаточно простом случае $s = 2$ мы также получили равенство (2.3.16) и (попутно) "смоделировали"вариант проверки (2.3.16) в более сложных случаях. Таким образом, при $s = 1$ и $s = 2$ нужное представление (2.3.16) устанавливается очевидным образом.

Рассмотрим теперь случай $s \geq 3$. В этом случае $V_s(m, K)$ определяется в виде (2.3.14). Если $k \in K$, то $|K \setminus \{k\}| = s - 1 \geq 2$ и, стало быть, в силу (2.3.14) имеет место равенство

$$V_{s-1}(k, K \setminus \{k\}) = \min_{\alpha \in (bi)[K \setminus \{k\}]}(\mathbb{A}_{k,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)}). \qquad (2.3.22)$$

Мы сравним далее (2.3.14) и правую часть (2.3.16), где следует применять (2.3.22). Напомним, что $(m, K) \in D_s$, откуда согласно (2.3.9) вытекает включение $K \in \mathfrak{N}_s$ и, согласно определению справедливо $|K| = s$.

Пусть $\mathbf{u} \in (bi)[K]$ обладает (см. (2.3.14)) свойством

$$V_s(m, K) = \mathbb{A}_{m,\mathbf{u}(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)}. \qquad (2.3.23)$$

По выбору $\mathbf{u}$ имеем, в частности, что (см. раздел 1.1)

$$\mathbf{u}:\overline{1; s} \longrightarrow K \qquad (2.3.24)$$

(на самом деле $\mathbf{u}$ отображает $\overline{1, s}$ на K, т.е. нумерует все точки множества K) и $\forall i_1 \in \overline{1, s}\ \forall i_2 \in \overline{1, s}$

$$(\mathbf{u}(i_1) = \mathbf{u}(i_2)) \implies (i_1 = i_2). \qquad (2.3.25)$$

Из (2.3.24) имеем, в частности, свойство

$$\mathbf{u}(1) \in K. \tag{2.3.26}$$

Как следствие, получаем неравенство

$$\min_{k \in K}[\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K \setminus \{k\})] \leq$$
$$\leq \mathbb{A}_{m,\mathbf{u}(1)} + V_{s-1}(\mathbf{u}(1), P), \tag{2.3.27}$$

где $P \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\mathbf{u}(1)\} \in \mathfrak{N}_{s-1}$. Следовательно,

$$|P| = s - 1.$$

Из (2.3.24) получаем, что при $i \in \in \overline{1, s-1}$

$$\mathbf{u}(i+1) \in K;$$

вместе с тем из (2.3.25) следует, что

$$\mathbf{u}(i+1) \neq \mathbf{u}(1) \tag{2.3.28}$$

для таких номеров i. Следовательно,

$$\mathbf{v} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{u}(i+1))_{i \in \overline{1,s-1}}$$

есть отображение из $\overline{1, s-1}$ в P. Разумеется, это отображение

$$\mathbf{v} : \overline{1, s-1} \longrightarrow P$$

имеет следующие значения: при $i \in \overline{1, s-1}$

$$\mathbf{v}(i) = \mathbf{u}(i+1). \tag{2.3.29}$$

Если $p \in P$, то, поскольку $P \subset K$, имеем из сюръективности [10, с. 319] $\mathbf{u}$, что для некоторого $\mathbf{i} \in \overline{1, s}$ выполнено $p = \mathbf{u}(\mathbf{i})$; в силу (2.3.25) и определения P следует (см. (2.3.28)), что $\mathbf{i} \neq 1$, т.е. $\mathbf{i} \in \overline{2, s}$, $\mathbf{i} - 1 \in \overline{1, s-1}$ и (см. (2.3.29)) $\mathbf{v}(\mathbf{i} - 1) = \mathbf{u}(\mathbf{i}) = p$. Поскольку выбор p был произвольным, сюръективность $\mathbf{v}$ установлена. Далее, из (2.3.29) и инъективности [10, с. 319] $\mathbf{u}$ вытекает, что v также инъективно, т.е. $\forall i_1 \in \overline{1, s-1}$ $\forall i_2 \in \overline{1, s-1}$

$$(\mathbf{v}(i_1) = \mathbf{v}(i_2)) \Longrightarrow (i_1 = i_2).$$

Стало быть, $\mathbf{v}$ – биекция $\overline{1, s-1}$ на P, т.е. $\mathbf{v} \in (bi)[P]$. С другой стороны, из (2.3.22) и (2.3.29) имеем теперь

$$V_{s-1}(\mathbf{u}(1), P) = \min_{\alpha \in (bi)[P]}(\mathbb{A}_{\mathbf{u}(1),\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)}) \leq$$

$$\leq \mathbb{A}_{\mathbf{u}(1),\mathbf{v}(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\mathbf{v}(j),\mathbf{v}(j+1)} = \mathbb{A}_{\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\mathbf{u}(j+1),\mathbf{u}(j+2)} =$$

$$= \mathbb{A}_{\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2)} + \sum_{j=2}^{s-1} \mathbb{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)} = \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)}. \qquad (2.3.30)$$

Из (2.3.27) и (2.3.30) получаем неравенство

$$\min_{k\in K}[\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K\backslash\{k\})] \leq$$

$$\leq \mathbb{A}_{m,\mathbf{u}(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)}. \qquad (2.3.31)$$

Теперь учтем (2.3.23). В самом деле, из (2.3.23) и (2.3.31) следует неравенство

$$\min_{k\in K}[\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K\backslash\{k\})] \leq V_s(m, K). \qquad (2.3.32)$$

Выберем теперь $n \in K$ так, чтобы при этом

$$\mathbb{A}_{m,n} + V_{s-1}(n, K\backslash\{n\}) = \min_{k\in K}[\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K\backslash\{k\})]. \qquad (2.3.33)$$

Полагаем для краткости $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} K\backslash\{n\}$, Тогда $|\mathbb{K}| = s-1$. С учетом (2.3.22) получаем

$$V_{s-1}(n, \mathbb{K}) = \min_{\alpha\in(bi)[\mathbb{K}]}(\mathbb{A}_{n,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)}). \qquad (2.3.34)$$

Используя (2.3.34), подберем $\delta \in (bi)[\mathbb{K}]$ так, что при этом

$$V_{s-1}(n, \mathbb{K}) = \mathbb{A}_{n,\delta(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\delta(j),\delta(j+1)}. \qquad (2.3.35)$$

При этом δ отображает $\overline{1, s-1}$ на $\mathbb{K}$ и является взаимно однозначной функцией, т.е. $\forall i_1 \in \overline{1, s-1}$ $\forall i_2 \in \overline{1, s-1}$

$$(\delta(i_1) = \delta(i_2)) \Rightarrow (i_1 = i_2). \qquad (2.3.36)$$

Напомним, что $i - 1 \in \overline{1, s-1}$ $\forall i \in \overline{2, s}$. С учетом этого определяем отображение

$$\gamma : \overline{1, s} \to K$$

посредством следующего правила:

$$(\gamma(1) \stackrel{\triangle}{=} n)\&(\gamma(j) \stackrel{\triangle}{=} \delta(j-1) \qquad \forall j \in \overline{2, s}). \qquad (2.3.37)$$

Справедливо равенство $K = \mathbb{K} \bigcup \{n\}$; тогда, коль скоро δ отображает $\overline{1, s-1}$ на $\mathbb{K}$, мы имеем из (2.3.37) и очевидного равенства

$$\overline{1, s-1} = \{i - 1 : i \in \overline{2, s}\}$$

тот факт, что γ отображает $\overline{1, s}$ на K. Иными словами, γ – сюръекция $\overline{1, s}$ на K. С учетом (2.3.36), (2.3.37) имеем также по выбору n свойство $\forall i_1 \in \overline{1, s}$ $\forall i_2 \in \overline{1, s}$

$$(\gamma(i_1) = \gamma(i_2)) \Longrightarrow (i_1 = i_2). \tag{2.3.38}$$

Проверка этого очевидного свойства предоставляется читателю. С учетом ранее доказанного свойства сюръективности γ и (2.3.38) получаем, что γ есть биекция $\overline{1, s}$ на K, где, как уже отмечалось, $s = |K|$. Тогда $\gamma \in (bi)[K]$, а поэтому (см. (2.3.14))

$$V_s(m, K) \leq \mathbb{A}_{m,\gamma(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\gamma(j),\gamma(j+1)}. \tag{2.3.39}$$

С учетом (2.3.35) и (2.3.37) получаем, однако, что

$$\mathbb{A}_{m,\gamma(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\gamma(j),\gamma(j+1)} = \mathbb{A}_{m,n} + \mathbb{A}_{\gamma(1),\gamma(2)} + \sum_{j=2}^{s-1} \mathbb{A}_{\gamma(j),\gamma(j+1)} =$$

$$= \mathbb{A}_{m,n} + \mathbb{A}_{n,\delta(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbb{A}_{\delta(j),\delta(j+1)} = \mathbb{A}_{m,n} + V_{s-1}(n, \mathbb{K}). \tag{2.3.40}$$

Из (2.3.33), (2.3.39) и (2.3.40) вытекает, что (поскольку $\gamma(1) = n$; см. (2.3.37))

$$\min_{k \in K} [\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K \setminus \{k\})] = \mathbb{A}_{m,\gamma(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbb{A}_{\gamma(j),\gamma(j+1)} \geq V_s(m, K),$$

что с учетом (2.3.32) доставляет равенство (2.3.16) и в случае $s \geq 3$, т.е.

$$(s \geq 3) \Rightarrow (V_s(m, K) = \min_{k \in K} [\mathbb{A}_{m,k} + V_{s-1}(k, K \setminus \{k\})]). \tag{2.3.41}$$

Поскольку случаи $s = 1$ и $s = 2$ исследованы ранее (в каждом из них равенство (2.3.16) уже установлено — см. (2.3.17),(2.3.21)), то с учетом (2.3.41) мы и получаем наше свойство (2.3.16) в общем случае. $\square$

В предложении 2.1 получено соотношение, имеющее смысл уравнения Беллмана, модифицированное для рассматриваемой ЗК. В следующем разделе мы рассмотрим его использование при непосредственном решении этой задачи. Данное решение включает в себя рекуррентное построение слоев функции Беллмана, т.е. функций V_1, V_2, ..., V_N, и на этой основе построение оптимального маршрута обхода городов из $\overline{1, N}$.

2.4. Решение задачи коммивояжера методом динамического программирования

В этом разделе мы рассмотрим построение экстремума (значения) и оптимального маршрута ЗК. Это требует в первую очередь построения всех слоев функции Беллмана. В непосредственном виде имеем слои V_0 и V_1 (см. (2.3.13) и определение V_0). Пусть вообще построены функции

$$V_i, \quad i \in \overline{0, p}, \tag{2.4.1}$$

где $p \in \overline{1, N}$. Если $p = N$, то наше построение слоев функции Беллмана завершено. Пусть $p < N$, т.е. $p \leq N - 1$. Функцией V_p мы уже располагаем. Воспользуемся теперь предложением 2.3.1 для построения функции V_{p+1}. С этой целью в предложении 2.3.1 полагаем $s = p+1$; будем учитывать также (2.3.15). Как следствие, мы при $(m, K) \in D_{p+1}$ и $k \in K$ знаем значение

$$\mathbb{A}_{m,k} + V_p(k, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[.$$

Из предложения 2.3.1 следует теперь, что при $(m, K) \in D_{p+1}$

$$V_{p+1}(m, K) = \min_{k \in K} [\mathbb{A}_{m,k} + V_p(k, K \setminus \{k\})]. \tag{2.4.2}$$

Мы насчитываем все значения $V_{p+1}(m, K)$ по формуле (2.4.2) и получаем неотрицательную функцию V_{p+1}. Итак, при $p < N$ мы достраиваем кортеж (2.4.1) до следующего кортежа

$$V_i, \quad i \in \overline{0, p+1}. \tag{2.4.3}$$

После конечного числа указанных однотипных шагов мы построим все функции $V_0, \ V_1, \ \ldots \ V_N$.

Перейдем к построению оптимального маршрута для нашей незамкнутой ЗК (напомним (1.1.21)), полагая до конца настоящего раздела, что $N \geq 3$ (случай $N = 2$ предоставляем читателю в качестве упражнения).

Отметим, что из (2.4.2), в частности, имеем следующее равенство

$$V_N(0, \overline{1, N}) = \min_{k \in \overline{1, N}} [\mathbb{A}_{0,k} + V_{N-1}(k, \overline{1, N} \setminus \{k\})]. \tag{2.4.4}$$

С учетом этого равенства выбираем $\eta_1 \in \overline{1, N}$ из условия минимума в правой части (2.4.4):

$$V_N(0, \overline{1, N}) = \mathbb{A}_{0,\eta_1} + V_{N-1}(\eta_1, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\})]. \tag{2.4.5}$$

Для удобства в обозначениях полагаем также $\eta_0 \stackrel{\triangle}{=} 0$. Этому соглашению следуем до конца раздела. Располагая индексом η_1, перемещаемся в соответствующий город, получая позицию

$$(\eta_1, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1\})) \in D_{N-1} \tag{2.4.6}$$

согласно (2.3.9). Далее комбинируем (2.4.2) и (2.4.6), учитывая, что $(N-2) \geq 1$. Тогда согласно (2.3.9), (2.4.2) и (2.4.6)

$$V_{N-1}(\eta_1, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}) = \min_{k\in\overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}}[\mathbb{A}_{\eta_1,k} + V_{N-2}(k, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; k\})], \tag{2.4.7}$$

с учетом (2.4.7) выбираем $\eta_2 \in \overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}$ так, что при этом реализуется минимум в правой части (2.4.7):

$$V_{N-1}(\eta_1, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1\}) = \mathbb{A}_{\eta_1,\eta_2} + V_{N-2}(\eta_2, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\}). \tag{2.4.8}$$

Из (2.4.5) и (2.4.8) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} V_N(0, \overline{1,N}) &= \mathbb{A}_{\eta_0,\eta_1} + \mathbb{A}_{\eta_1,\eta_2} + V_{N-2}(\eta_2, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\}) = \\ &= \mathbb{A}_{0,\eta_1} + \mathbb{A}_{\eta_1,\eta_2} + V_{N-2}(\eta_2, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\}). \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

В целях полноты изложения рассмотрим еще один шаг процедуры (построения маршрута), имея в виду, что (см. (2.3.9))

$$(\eta_2, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\})) \in D_{N-2}. \tag{2.4.10}$$

Мы снова воспользуемся (2.4.2), получая равенство

$$\begin{gathered} V_{N-2}(\eta_2, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\}) = \\ = \min_{k\in\overline{1,N}\setminus\{\eta_1,\eta_2\}}[\mathbb{A}_{\eta_2,k} + V_{N-3}(k, (\overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\})\setminus\{k\})]. \end{gathered} \tag{2.4.11}$$

Используя (2.4.11), выбираем $\eta_3 \in \overline{1,N}\setminus\{\eta_1; \eta_2\}$, доставляющее минимум правой части:

$$V_{N-2}(\eta_2, \overline{1,N}\setminus\{\eta_1, \eta_2\}) = \mathbb{A}_{\eta_2,\eta_3} + V_{N-3}(\eta_3, \overline{1,N}\setminus\{\eta_i : i \in \overline{1,3}\}). \tag{2.4.12}$$

Из (2.4.9) и (2.4.12) мы получаем очевидное равенство

$$V_N(0, \overline{1,N}) = \mathbb{A}_{\eta_0,\eta_1} + \mathbb{A}_{\eta_1,\eta_2} + \mathbb{A}_{\eta_2,\eta_3} + V_{N-3}(\eta_3, \overline{1,N}\setminus\{\eta_i : i \in \overline{1,3}\}). \tag{2.4.13}$$

Замечание. Если $N = 3$, то в согласии с (2.3.8) и определением V_0 имеем из (2.4.13) равенство

$$V_N(0, \overline{1,N}) = \mathbb{A}_{\eta_0,\eta_1} + \mathbb{A}_{\eta_1,\eta_2} + \mathbb{A}_{\eta_2,\eta_3}, \tag{2.4.14}$$

где η_1, η_2, η_3 попарно различны. Из (2.3.4), (2.4.14) следует по определению $V_n(0, \overline{1,N}) = \mathbb{V}$, что кортеж $(\eta_i)_{i \in \overline{1,3}}$ есть оптимальный маршрут. $\square$

Пусть $r \in \overline{1,N}$ и уже построен кортеж (частичный маршрут)

$$(\eta_i)_{i \in \overline{1,r}} : \overline{1,r} \longrightarrow \overline{1,N}$$

со следующими свойствами:

1) $\eta_i \neq \eta_j \quad \forall i \in \overline{1,r} \;\; \forall j \in \overline{1,r} \setminus \{i\}$;

2) $V_{N-i}(\eta_i, \overline{1,N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1,i}\}) = \mathbb{A}_{\eta_i, \eta_{i+1}} +$
$+ V_{N-(i+1)}(\eta_{i+1}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1,i+1}\}) \;\; \forall i \in \overline{0, r-1}$;

3)$V_N(0, \overline{1,N}) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{A}_{\eta_{i-1}, \eta_i} + V_{N-r}(\eta_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_j : j \in \overline{1,r}\})$.

Возможен один из следующих двух случаев: 1') $r = N$; 2') $r < N$.

1') Пусть $r = N$. Тогда наш кортеж имеет вид

$$(\eta_i)_{i \in \overline{1,N}} : \; \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{2.4.15}$$

причем $\eta_i \neq \eta_j$ при $i \in \overline{1,N}$, $j \in \overline{1,N}$, $i \neq j$. Это означает, в частности, что

$$(\eta_i)_{i \in \overline{1,N}} \in (bi)[\overline{1,N}], \tag{2.4.16}$$

т.е. мы получили полный маршрут. Из 3) вытекает, поскольку

$$\overline{1,N} = \{\eta_i \, : \, i \in \overline{1,N}\},$$

следующее равенство

$$V_N(0, \overline{1,N}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{A}_{\eta_{i-1}, \eta_i} + V_0(\eta_N, \varnothing) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{A}_{\eta_{i-1}, \eta_i} \tag{2.4.17}$$

(мы учли, что $V_0(j, \varnothing) = 0$ при всяком $j \in \overline{1,N}$). Из (2.4.16) и (2.4.17) следует, что построен полный маршрут (2.4.15) со свойством оптимальности, наша задача решена.

2') Пусть $r < N$. Тогда $r + 1 \leq N$ и $N - r \in \overline{1, N-1}$;

$$\eta_r \notin \overline{1,N} \setminus \{\eta_i \, : \, i \in \overline{1,r}\}. \tag{2.4.18}$$

Рассмотрим следующую позицию:

$$(\eta_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i \, : \, i \in \overline{1,r}\}).$$

Для этой позиции будем использовать соответствующий вариант предложения 2.3.1. Как следствие, получаем (см. (2.3.16) при $s = N - r$) равенство

$$V_{N-r}(\eta_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i \, : \, i \in \overline{1,r}\}) =$$

$$= \min_{k \in \overline{1,N}\setminus\{\eta_i\,:\,i\in\overline{1,r}\}} [\mathbb{A}_{\eta_r,k} + V_{N-(r+1)}(k, (\overline{1,N}\setminus\{\eta_i\,:\,i \in \overline{1,r}\})\setminus\{k\})].$$

С учетом этого равенства выбираем

$$\eta_{r+1} \in \overline{1,N}\setminus\{\eta_i\,:\,i \in \overline{1,r}\} \tag{2.4.19}$$

так, что при этом реализуется минимум в правой части равенства:

$$V_{N-r}(\eta_r, \overline{1,N}\setminus\{\eta_i\,:\,i \in \overline{1,r}\}) =$$

$$= \mathbb{A}_{\eta_r,\eta_{r+1}} + V_{N-(r+1)}(\eta_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\eta_i\,:\,i \in \overline{1,r+1}\}). \tag{2.4.20}$$

Тогда мы располагаем (см. (2.4.19)) кортежем

$$(\eta_i)_{i\in\overline{1,r+1}}\,:\;\overline{1,r+1} \longrightarrow \overline{1,N},$$

для которого:

a) $\eta_i \neq \eta_j\ \forall i \in \overline{1,r+1}\ \forall j \in \overline{1,r+1}\setminus\{i\}$ (см. (2.4.19) и свойство 1) кортежа $(\eta_i)_{\overline{1,r}}$);

b) $V_{N-i}(\eta_i, \overline{1,N}\setminus\{\eta_j\,:\,j\in\overline{1,i}\}) = A_{\eta_i,\eta_{i+1}}+$ $+V_{N-(i+1)}(\eta_{i+1}, \overline{1,N}\setminus\{\eta_j\,:\,j\in\overline{1,i+1}\})\ \forall i \in \overline{0,r}$ (см. 2) и (2.4.20); напомним, что при $i = 0$ множество $\{\eta_j\,:\,j\in\overline{1,i}\} = \{\eta_j\,:\,j \in \in \overline{1,0}\}$ является пустым, коль скоро $\overline{1,i} = \overline{1,0} = \varnothing$);

c) $V_N(0,\overline{1,N}) = \sum_{i=1}^{r+1} \mathbb{A}_{\eta_{i-1},\eta_i} + V_{N-(r+1)}(\eta_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\eta_i\,:\,i\in\overline{1,r+1}\})$ (см. (2.4.20)) и свойство 3) набора $(\eta_i)_{i\in\overline{1,r}}$).

Итак, мы установили, при $r < N$ исходный набор (кортеж) $(\eta_i)_{i\in\overline{1,r}}$ можно продолжить до $(\eta_i)_{i\in\overline{1,r+1}}$ с сохранением всех основных свойств упомянутого исходного набора: свойство 1) превращается в свойство a), свойство 2) превращается в свойство b), а свойство 3) — в свойство c).

В результате после исполнения конечного числа таких (регулярных) этапов для случаев вида 2') мы получим ситуацию, соответствующую случаю 1'), для которого, как уже отмечалось, процедура построения оптимального маршрута завершена.

В заключение раздела обсудим реализацию процедуры для одного совсем простого примера, допускающего идейную аналогию с примером раздела 2.2, где рассматривался жадный алгоритм. Пусть на вещественной прямой размещены города: 0 (база) – город с (нулевой) координатой $\Gamma_0 \triangleq 0$; 1 – город с координатой $\Gamma_1 \triangleq 1$; 2 – город с координатой $\Gamma_2 \triangleq 2$; 3 – город с координатой $\Gamma_3 \triangleq -1{,}1$. Итак, в данном примере $N = 3$. Определим матрицу $\mathbb{A}$ следующим образом: если $i \in \overline{0,3}$ и $j \in \overline{1,3}$, то $\mathbb{A}_{i,j} = |\Gamma_i - \Gamma_j|$

есть расстояние между городами i, j. Итак,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1,1 \\ 0 & 1 & 2,1 \\ 1 & 0 & 3,1 \\ 2,1 & 3,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашей конструкции $V_0(i, \varnothing) \equiv 0$. Тем самым определяется функция V_0, заданная на множестве

$$D_0 = \overline{1,3} \times \{\varnothing\} = \{(1, \varnothing);\ (2, \varnothing);\ (3, \varnothing)\}.$$

Введем далее множество D_1 :

$$D_1 = \{(1, \{2\});\ (1, \{3\});\ (2, \{1\});\ (2, \{3\});\ (3, \{1\});\ (3, \{2\})\},$$

на котором определяется функция V_1.

Конкретизируем множество D_2 :

$$D_2 = \{(1, \{2; 3\});\ (2, \{1; 3\});\ (3, \{1; 2\})\}.$$

Наконец, $D_3 = D_N = \{(0, \overline{1,3})\}$. Введем функцию V_1 :

$$V_1(1, \{2\}) = \mathbb{A}_{1,2} = 1,$$

$$V_1(1, \{3\}) = \mathbb{A}_{1,3} = 2,1,$$

$$V_1(2, \{1\}) = \mathbb{A}_{2,1} = 1,$$

$$V_1(2, \{3\}) = \mathbb{A}_{2,3} = 3,1,$$

$$V_1(3, \{1\}) = \mathbb{A}_{3,1} = 2,1,$$

$$V_1(3, \{2\}) = \mathbb{A}_{3,2} = 3,1.$$

Данные равенства полностью определяют V_1. Рассмотрим построение V_2, учитывая, что эта функция определена на D_2; последнее – трехэлементное множество. Имеем

$$V_2(1, \{2; 3\}) = \min(\{\mathbb{A}_{1,2} + V_1(2, \{3\});\ \mathbb{A}_{1,3} + V_1(3, \{2\})\}) =$$

$$= \min(\{1 + 3,1;\ 2,1 + 3,1\}) = 4,1;$$

$$V_2(2, \{1; 3\}) = \min(\{\mathbb{A}_{2,1} + V_1(1, \{3\});\ \mathbb{A}_{2,3} + V_1(3, \{1\})\}) =$$

$$= \min(\{1 + 2,1;\ 3,1 + 2,1\}) = 3,1;$$

$$V_2(3, \{1; 2\}) = \min(\{\mathbb{A}_{3,1} + V_1(1, \{2\});\ \mathbb{A}_{3,2} + V_1(2, \{1\})\}) =$$

$$= \min(\{2,1+1;\ 3,1+1\}) = 3,1.$$

Таким образом, функция V_2 построена. Осталось найти значение $V_3(0,\overline{1,3})$, используя предложение 2.1:

$$V_3(0,\overline{1,3}) = \min(\{\mathbb{A}_{0,1} + V_2(1,\{2;3\});\ \mathbb{A}_{0,2} + V_2(2,\{1;3\});$$

$$\mathbb{A}_{0,3} + V_2(3,\{1;2\})\}) = \min(\{1+4,1;\ 2+3,1; 1,1+3,1\}) =$$

$$= \min(\{5,1;\ 5,1;\ 4,2\}) = 4,2.$$

Итак, 4,2 есть экстремум (значение) нашей ЗК.

Рассмотрим теперь процедуру построения оптимального маршрута. Для определения "первого" города η_1 воспользуемся (2.4.5). В нашем примере (2.4.5) имеет вид

$$\mathbb{A}_{0,\eta_1} + V_2(\eta_1, \overline{1,3}\backslash\{\eta_1\}) = 4,2.$$

При этом $(\eta_1 = 1) \vee (\eta_1 = 2) \vee (\eta_1 = 3)$, поэтому рассмотрим три величины

$$\mathbb{A}_{0,1} + V_2(1,\overline{2,3}) = 1 + 4,1 = 5,1$$

(мы делаем предположение о том, что $\eta_1 = 1$),

$$\mathbb{A}_{0,2} + V_2(2,\{1;3\}) = 2 + 3,1 = 5,1$$

(предполагаем, что $\eta_1 = 2$),

$$\mathbb{A}_{0,3} + V_2(3,\overline{1,2}) = 1,1 + 3,1 = 4,2$$

(рассматриваем возможность того, что $\eta_1 = 3$). Из сравнения трех упомянутых величин и предшествующего им равенства получаем, что

$$\eta_1 = 3$$

(полезно отметить, что на заключительном этапе построения функции Беллмана мы уже сталкивались с вышеупомянутыми величинами с целью выбора наименьшей в качестве $V_3(0,\overline{1,3})$).

Для нахождения города η_2 будем использовать (2.4.8). Поскольку η_1 уже найдено, имеем следующую конкретизацию (2.4.8):

$$3,1 = V_2(3,\overline{1,2}) = \mathbb{A}_{3,\eta_2} + V_1(\eta_2, \overline{1,3}\backslash\{3;\eta_2\}).$$

При этом $(\eta_2 = 1)\vee(\eta_2 = 2)$, поэтому последнее равенство связано с проверкой двух возможностей; нам следует выбирать наименьшую из следующих двух величин:

$$\mathbb{A}_{3,1} + V_1(1,\{2\}) = 2,1 + \mathbb{A}_{1,2} = 2,1 + 1 = 3,1$$

(случай отвечает гипотезе $\eta_2 = 1$),

$$\mathbb{A}_{3,2} + V_1(2, \{1\}) = 3,1 + \mathbb{A}_{2,1} = 3,1 + 1 = 4,1$$

(данный случай соответствует предположению $\eta_2 = 2$). Из сравнения двух упомянутых величин следует, что $\eta_2 = 1$.

Для определения η_3 нет нужды использовать уравнение Беллмана, поскольку у нас возможен здесь лишь один случай $\eta_3 = 2$, т.е. все прочие города уже "пройдены". Итак, мы получили маршрут, характеризуемый следующими переменными:

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2.$$

Сделаем проверку: для упомянутой системы перемещений имеем равенство

$$\mathbb{A}_{0,\eta_1} + \mathbb{A}_{\eta_1\eta_2} + \mathbb{A}_{\eta_2\eta_3} = \mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,1} + \mathbb{A}_{1,2} = 1,1 + 2,1 + 1 = 4,2,$$

т.е. совпадение результата с глобальным экстремумом.

В самом деле, в настоящем примере имеется шесть возможных маршрутов:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3,$$
$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,$$
$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3,$$
$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1,$$
$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2,$$
$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

Мы знаем уже, что пятый из перечисленных маршрутов оценивается значением затрат 4,2. Первый (из шести) маршрутов оценивается значением

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,2} + \mathbb{A}_{2,3} = 1 + 1 + 3,1 = 5,1.$$

Второй из вышеупомянутых маршрутов оценивается значением

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,3} + \mathbb{A}_{3,2} = 1 + 2,1 + 3,1 = 6,2.$$

Третий маршрут характеризуется следующим значением затрат:

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,1} + \mathbb{A}_{1,3} = 2 + 1 + 2,1 = 5,1.$$

Четвертый маршрут оценивается значением

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,3} + \mathbb{A}_{3,1} = 2 + 3,1 + 2,1 = 7,2.$$

Шестому маршруту соответствует значение

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,2} + \mathbb{A}_{2,1} = 1,1 + 3,1 + 1 = 5,2.$$

Из приведенных выше соотношений видно, что пятый маршрут является наилучшим с точки зрения минимизации затрат. Напомним, что этот же маршрут был построен по МДП.

Данное решение хорошо согласуется со здравым смыслом: сначала следует "немного" переместиться влево, после чего надо двигаться вправо вплоть до посещения всех оставшихся городов. При такой логике дважды проходится фрагмент вещественной прямой (отрезок), длина которого невелика (в нашем случае эта длина совпадает с числом 1,1). Данная логика как раз и вырабатывается у нас на основе МДП. Если же стремиться к извлечению на каждом шаге максимальной выгоды, то следует идти из 0 вправо, что увеличивает суммарные потери. Итак, наша процедура на основе МДП действительно доставляет оптимальные и правильные (в логическом отношении) маршруты.

2.5. Метод динамического программирования: добавление ("замкнутая" задача коммивояжера)

В настоящем приложении излагается вариант МДП для решения ЗК в постановке, частным случаем которой является традиционно рассматриваемая замкнутая ЗК. Речь идет о том, что в отличие от раздела 2.3 используется (для оценки затрат) не только матрица

$$\mathbb{A} = \{\mathbb{A}_{i,j};\ \ i \in \overline{0,N},\ \ j \in \overline{1,N}\}$$

раздела 2.3, но и вектор $(f_j)_{j\in\overline{1,N}}$, оценивающий терминальные состояния. Мы полагаем заданной здесь произвольную матрицу

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{i,j} \in [0,\infty[\ :\ \ i \in \overline{0,N},\ \ j \in \overline{0,N}),$$

у которой, однако, будут использоваться только элементы $\mathbf{A}_{p,q}$ при $p \in \overline{0,N},\ q \in \overline{0,N},\ p \neq q$. При этом нулевой индекс соответствует базе, т.е. начальному пункту. Согласование $\mathbf{A}$ с $\mathbb{A}, f_1, ..., f_N$ приведено ниже.

Перемещение из города с номером 0, т.е. из базы, в город с номером $k \in \overline{1,N}$ рассматриваем как начало маршрута, т.е. его начальное "звено"; это перемещение оценивается величиной затрат $\mathbf{A}_{0,k} \in [0,\infty[$. Далее совершаются (в выбранном порядке) перемещения между городами, нумеруемые посредством индексов $i \in \overline{1,N}$ и $j \in \overline{1,N}$; каждое такое перемещение рассматриваем как переход из города i в город j (соответствующие затраты на перемещение — суть величина $\mathbf{A}_{i,j} \in [0,\infty[$). Наконец, при $s \in \overline{1,N}$ мы рассматриваем $\mathbf{A}_{s,0} = f_s \in [0,\infty[$ как "терминальные потери". В частности, это могут быть затраты, связанные с возвращением из города s на базу, хотя возможны и другие интерпретации.

При выбранном маршруте $\beta \in \mathbb{P}$ величина $\mathbf{A}_{0,\beta(1)}$ оценивает перемещение с базы в город с номером $\beta(1)$, значения $\mathbf{A}_{\beta(i),\beta(i+1)}$ оценивают перемещение между городами с номерами $\beta(i)$ и $\beta(i+1)$, а значение $\mathbf{A}_{\beta(N),0}$ играет роль $f_{\beta(N)}$.

Итак, в рассматриваемой сейчас версии ЗК следует полагать, что:

1) $\mathbf{A}_{i,j} \triangleq \mathbb{A}_{i,j} \quad \forall i \in \overline{0,N} \;\; \forall j \in \overline{1,N}$;

2) $\mathbf{A}_{s,0} \triangleq f_s \quad \forall s \in \overline{1,N}$.

Значение $\mathbf{A}_{0,0}$ может быть произвольным (можно, в частности, полагать $\mathbf{A}_{0,0} = 0$).

Рассмотрим следующую задачу

$$\mathbf{A}_{0,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(N),0} \longrightarrow \min, \;\; \alpha \in \mathbb{P}. \qquad (2.5.1)$$

Заметим, что, как показано в разделе 2.1, задачу (2.5.1) можно было бы свести к задаче (2.3.3) при подходящем преобразовании параметров. Однако, имея в виду весьма конкретную постановку, приведенную в следующем разделе, имеет смысл познакомиться со схемой непосредственного решения задачи (2.5.1), соответствующей [5, 44]

Итак, далее мы рассматриваем ЗК с матрицей $\mathbf{A}$ как самостоятельную задачу, для которой и будет приведен нужный вариант МДП, соответствующий [5, 44]). Напомним, что для всякого множества $K \in \mathrm{Fin}(\overline{1,N})$ символ $(bi)[K]$ используется для обозначения множества всех биекций $\overline{1,K}$ на K; $(bi)[K] \neq \varnothing$. Удобно распределить множества из $\mathrm{Fin}(\overline{1,N})$ в семейства, характеризуемые каждое одной и той же мощностью.

Если $k \in \overline{1,N}$, то через $\mathfrak{N}_k$ будем обозначать семейство всех множеств $K \in \mathrm{Fin}(\overline{1,N})$, для каждого из которых $|K| = k$. Если при этом $\mathbb{K} \in \mathfrak{N}_k$, то $|\mathbb{K}| = k$ и $(bi)[\mathbb{K}]$ есть в точности множество всех биекций "отрезка" $\overline{1,k}$ на $\mathbb{K}$. Далее рассмотрим отдельно случаи $k < N$ и $k = N$; позднее нам потребуется также случай $k = 0$, который будет оговорен особо.

Если $s \in \overline{1,N-1}$, то $\mathfrak{N}_s \neq \varnothing$ и при всяком выборе $K \in \mathfrak{N}_s$ непременно

$$\overline{1,N} \setminus K \neq \varnothing.$$

Поэтому при $s \in \overline{1, N-1}$ определено непустое множество

$$D_s \overset{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathfrak{N}_s} \{(i, K) \,:\, i \in \overline{1, N} \setminus K\}. \tag{2.5.2}$$

Итак, $D_s \neq \varnothing$ при $s \in \overline{1, N-1}$; кроме того, $D_s \subset \overline{1, N} \times \mathfrak{N}_s$. Полагаем также

$$D_N \overset{\triangle}{=} \{(0, \overline{1, N})\}. \tag{2.5.3}$$

Итак, D_N — одноэлементное множество, содержащее упорядоченную пару $(0, \overline{1, N})$.

Если теперь $s \in \overline{2, N}$ и, кроме того, $z \in D_s$, $i \overset{\triangle}{=} pr_1(z)$ и $K \overset{\triangle}{=} pr_2(z)$, то рассматриваем задачу

$$A_{i,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} A_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + A_{\alpha(s),0} \longrightarrow \min, \ \ \alpha \in (bi)[K],$$

для которой определяем экстремум

$$v_s(z) \overset{\triangle}{=} \min_{\alpha \in (bi)[K]} [\mathbf{A}_{i,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(s),0}]. \tag{2.5.4}$$

Если $K \in \mathfrak{N}_1$, то существует единственное число $\mathbf{r}[K] \in \overline{1, N}$ такое, что $K = \{\mathbf{r}[K]\}$. Для $z \in D_1$ имеем $K \overset{\triangle}{=} pr_2(z) \in \mathfrak{N}_1$, а потому определен индекс

$$\mathbf{r}[pr_2(z)] = \mathbf{r}[K] \in \overline{1, N}.$$

Теперь находим $v_1(z)$ для $z \in D_1$ при $i \overset{\triangle}{=} pr_1(z)$ и $K \overset{\triangle}{=} pr_2(z)$

$$v_1(z) \overset{\triangle}{=} \mathbf{A}_{i,\mathbf{r}[K]} + \mathbf{A}_{\mathbf{r}[K],0}. \tag{2.5.5}$$

В рассматриваемом простейшем случае проблема маршрутизации тривиальна, т.е. мы имеем ровно одно невыполненное задание. Если $|K| > 1$, то для определения $v_s(z)$ (2.5.4) требуется уже решение специальной маршрутной задачи. Так или иначе в (2.5.4), (2.5.5) при любом $s \in \overline{1, N}$ определена функция

$$z \longmapsto v_s(z) \,:\, D_s \longrightarrow [0, \infty[. \tag{2.5.6}$$

Введем теперь $D_0 \overset{\triangle}{=} \{(i, \varnothing) \,:\, i \in \overline{1, N}\}$, $D_0 \neq \varnothing$, а также функцию

$$v_0 \,:\, D_0 \longrightarrow [0, \infty[,$$

для которой $v_0(z) \overset{\triangle}{=} \mathbf{A}_{pr_1(z),0} \quad \forall z \in D_0$.

Проще говоря, для $i \in \overline{1,N}$ имеем следующее равенство

$$v_0(i, \varnothing) = \mathbf{A}_{i,0}. \tag{2.5.7}$$

Далее, при $l \in \overline{1,N}$ и $i \in \overline{1,N} \setminus \{l\}$ имеем $\{l\} \in \mathfrak{N}_1$, $(i, \{l\}) \in D_1$, $\mathbf{r}[\{l\}] = l$ и

$$v_1(i, \{l\}) = \mathbf{A}_{i,l} + \mathbf{A}_{l,0}. \tag{2.5.8}$$

Кроме того, если $s \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathfrak{N}_s$ и $i \in \overline{1,N} \setminus K$, то $(i, K) \in D_s$ и

$$v_s(i, K) = \min_{\alpha \in (bi)[K]} [\mathbf{A}_{i,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(s),0}]. \tag{2.5.9}$$

Наконец, $(0, \overline{1,N}) \in D_N$ и при этом

$$v_N(0, \overline{1,N}) = \min_{\alpha \in \mathbb{P}} [\mathbf{A}_{0,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(N),0}]. \tag{2.5.10}$$

Выражения (2.5.9), (2.5.10) можно записать следующим единым способом: если $s \in \overline{2,N}$ и $(i, K) \in D_s$, то

$$v_s(i, K) = \min_{\alpha \in (bi)[K]} [\mathbf{A}_{i,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(s),0}]. \tag{2.5.11}$$

Здесь учтено равенство $\mathbb{P} = (bi)[\overline{1,N}]$. В (2.5.8) – (2.5.11) введены экстремумы задач маршрутизации: полной (см. (2.5.10)) и укороченной (см. (2.5.8), (2.5.9)). В случае (2.5.8), как уже отмечалось, какой-либо оптимизации не требуется, коль скоро остающееся для исполнения задание там единично: речь идет о том, что находясь в городе i, мы располагаем списком заданий (последующих городов), в котором ровно один элемент — город с номером l. Задачи, приводящие к (2.5.9), неполны, т.е. в “списке” K содержатся не все индексы из $\overline{1,N}$. В (2.5.10) имеем глобальный экстремум исходной ЗК. В методических целях имеет смысл “соединить” (2.5.7) и (2.5.8): при $l \in \overline{1,N}$ и $i \in \overline{1,N} \setminus \{l\}$ для $(i, \{l\}) \in D_1$ имеем очевидную цепочку равенств

$$v_1(i, \{l\}) = \mathbf{A}_{i,l} + v_0(l, \varnothing) = \min_{j \in \{l\}} [\mathbf{A}_{i,j} + v_0(j, \varnothing)]. \tag{2.5.12}$$

Разумеется, минимизация в (2.5.12) является фиктивной. Полезно, однако, в связи с (2.5.12) обратить внимание на случай $s = 2$ в (2.5.9), (2.5.10).

Замечание 2.5.1. Пусть $N = s = 2$; рассмотрим конкретизацию (2.5.10), отвечающую данному простейшему случаю

$$v_N(0, \overline{1,N}) = v_2(0, \overline{1,2}) = \min_{\alpha \in \mathbb{P}} [\mathbf{A}_{0,\alpha(1)} + \mathbf{A}_{\alpha(1),\alpha(2)} + \mathbf{A}_{\alpha(2),0}]. \tag{2.5.13}$$

Здесь множество $\mathbb{P}$ состоит из двух элементов — перестановок μ и ν, где

$$\mu\,:\,\overline{1,2}\longrightarrow\overline{1,2},\quad \nu\,:\,\overline{1,2}\longrightarrow\overline{1,2},$$

$\mu(1)\stackrel{\triangle}{=}1,\ \ \mu(2)\stackrel{\triangle}{=}2,\ \nu(1)\stackrel{\triangle}{=}2,\ \ \nu(2)\stackrel{\triangle}{=}1$. Тогда (2.5.13) сводится к определению наименьшего из следующих двух выражений:

$$\mathbf{A}_{0,1}+\mathbf{A}_{1,2}+\mathbf{A}_{2,0},\quad \mathbf{A}_{0,2}+\mathbf{A}_{2,1}+\mathbf{A}_{1,0}. \tag{2.5.14}$$

Упомянутое (наименьшее в (2.5.14)) значение как раз и совпадает с $v_N(0,\overline{1,N})=v_2(0,\overline{1,2})$ (2.5.13). Учтем теперь (2.5.8). Тогда (см. (2.5.13), (2.5.14))

$$v_N(0,\overline{1,N})=v_2(0,\overline{1,2})=$$

$$=\inf(\{\mathbf{A}_{0,1}+v_1(1,\{2\});\mathbf{A}_{0,2}+v_1(2,\{1\})\})=$$
$$=\inf(\{\mathbf{A}_{0,1}+v_1(1,\overline{1,2}\backslash\{1\});\mathbf{A}_{0,2}+v_1(2,\overline{1,2}\backslash\{2\})\})=$$
$$=\min_{j\in\overline{1,2}}[\mathbf{A}_{0,j}+v_1(j,\overline{1,2}\backslash\{j\})]. \tag{2.5.15}$$

В (2.5.15) простейшая экстремальная операция сразу приводит к глобальному экстремуму полной ЗК. □

Замечание 2.5.2. Пусть $s=2$, но $N\neq s$. Последнее означает, что в данном случае $N\geq 3,\ \ s\in\overline{2,N-1}$. Используем (2.5.9), где $K\in\mathfrak{N}_2,\ \ \mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}_s$, и $i\in\overline{1,N}\backslash K$. Итак, K — двухэлементное множество; пусть $p\in\overline{1,N}$, $q\in\overline{1,N}$, $p\neq q$, реализуют равенство $K=\{p;q\}=\{p\}\bigcup\{q\}$. Множество $(bi)[K]$ является также двухэлементным; $(bi)[K]=\{\tilde\mu;\tilde\nu\}$, где

$$\tilde\mu\,:\,\overline{1,2}\longrightarrow K,\ \ \tilde\nu\,:\,\overline{1,2}\longrightarrow K,$$

$\tilde\mu(1)\stackrel{\triangle}{=}p,\ \tilde\mu(2)\stackrel{\triangle}{=}q,\ \tilde\nu(1)\stackrel{\triangle}{=}q,\ \tilde\nu(2)\stackrel{\triangle}{=}p$. С учетом (2.5.9) имеем

$$(i,K)=(i,\{p;q\})\in D_2,$$

$$v_s(i,K)=v_2(i,\{p;q\})=\min_{\alpha\in\{\tilde\mu;\tilde\nu\}}[\mathbf{A}_{i,\alpha(1)}+\mathbf{A}_{\alpha(1),\alpha(2)}+\mathbf{A}_{\alpha(2),0}]=$$
$$=\inf(\{\mathbf{A}_{i,\tilde\mu(1)}+\mathbf{A}_{\tilde\mu(1),\tilde\mu(2)}+\mathbf{A}_{\tilde\mu(2),0};\mathbf{A}_{i,\tilde\nu(1)}+\mathbf{A}_{\tilde\nu(1),\tilde\nu(2)}+\mathbf{A}_{\tilde\nu(2),0}\})=$$
$$=\inf(\{\mathbf{A}_{i,p}+\mathbf{A}_{p,q}+\mathbf{A}_{q,0};\ \ \mathbf{A}_{i,q}+\mathbf{A}_{q,p}+\mathbf{A}_{p,0}\}). \tag{2.5.16}$$

Из (2.5.8), (2.5.16) извлекаем следующую цепочку равенств

$$v_s(i,K)=v_2(i,\{p;q\})=\inf(\{\mathbf{A}_{i,p}+v_1(p,\{q\});\ \ \mathbf{A}_{i,q}+v_1(q,\{p\})\})=$$

$$=\min_{j\in K}[\mathbf{A}_{i,j}+v_1(j,K\backslash\{j\})], \tag{2.5.17}$$

где учтены следующие очевидные равенства

$$K\backslash\{p\} = \{p, q\}\backslash\{p\} = \{q\},$$

$$K\backslash\{q\} = \{p, q\}\backslash\{q\} = \{p\}.$$

Полезно сравнить (2.5.15) и (2.5.17) с тем, чтобы уяснить общую закономерность эволюции зависимости экстремума при изменении позиции. $\square$

Для перехода к рассмотрению общего случая полезно

Предложение 2.5.1. *Если* $s \in \overline{1,N}$, $(i, K) \in D_s$, *и* $j \in K$, *то*

$$(j, K\backslash\{j\}) \in D_{s-1}. \tag{2.5.18}$$

Доказательство. По выбору s имеем, что (см. (2.5.2)) $K \subset \overline{1,N}$ и при этом

$$(s \in \overline{1, N-1}) \vee (s = N). \tag{2.5.19}$$

Рассмотрим эти два случая отдельно.

1) Пусть $s \in \overline{1, N-1}$. Тогда по выбору (i, K) имеем, что $K \in \mathfrak{N}_s$ и при этом $i \in \overline{1,N}\backslash K$. Напомним, что $j \in K$. Кроме того

$$|K\backslash\{j\}| = s - 1 \tag{2.5.20}$$

(по определению множества $\mathfrak{N}_s$). По выбору s имеем, что

$$(s - 1 = 0) \vee (s - 1 \in \overline{1, N-2}). \tag{2.5.21}$$

В случае $s - 1 = 0$ получаем $K = \{j\}$, т.е. $j \in K$, а поэтому

$$K\backslash\{j\} = \varnothing,$$

а тогда $(j, K\backslash\{j\}) \in D_0$, т.к. $j \in \overline{1,N}$. Итак, истинна импликация

$$(s - 1 = 0) \Rightarrow ((j, K\backslash\{j\}) \in D_{s-1}). \tag{2.5.22}$$

Пусть $s - 1 \in \overline{1, N-2}$. В этом случае определено семейство $\mathfrak{N}_{s-1}$ и согласно (2.5.2)

$$D_{s-1} = \bigcup_{\mathbb{K} \in \mathfrak{N}_{s-1}} \{(i, \mathbb{K}) : i \in \overline{1,N}\backslash\mathbb{K}\}. \tag{2.5.23}$$

При этом $j \notin K\backslash\{j\}$, где (в рассматриваемом сейчас случае $s - 1 \geq 1$)

$$K\backslash\{j\} \in \mathfrak{N}_{s-1} \tag{2.5.24}$$

согласно (2.5.20) (семейство $\mathfrak{N}_{s-1}$ корректно определяется при

$$s-1 \in \overline{1, N-2},$$

т.е. в случае, который сейчас обсуждается). При этом согласно (2.5.23) и (2.5.24)

$$(j, K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}. \tag{2.5.25}$$

Итак (см. (2.5.25)), установлена импликация

$$(s-1 \in \overline{1, N-2}) \Rightarrow ((j, K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}). \tag{2.5.26}$$

Из (2.5.21), (2.5.22) и (2.5.26) имеем в рассматриваемом сейчас случае 1), что

$$(j, K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}.$$

Тем самым, установлена следующая импликация

$$(s \in \overline{1, N-1}) \Rightarrow ((j, K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}). \tag{2.5.27}$$

2) Пусть $s = N$, а тогда в силу (2.5.3)

$$D_s = D_N = \{(0, \overline{1, N})\}$$

и, по выбору (i, K), имеем с очевидностью

$$(i = 0) \& (K = \overline{1, N}). \tag{2.5.28}$$

Кроме того, $s - 1 = N - 1 \in \overline{1, N-1}$, что с учетом (2.5.2) означает:

$$D_{s-1} = D_{N-1} = \bigcup_{\mathbb{K} \in \mathfrak{N}_{N-1}} \{(i, \mathbb{K}) : i \in \overline{1, N} \backslash \mathbb{K}\}. \tag{2.5.29}$$

При этом $|\overline{1, N} \backslash \{j\}| = N - 1$, т.к. $j \in \overline{1, N}$,

$$j \notin \overline{1, N} \backslash \{j\}. \tag{2.5.30}$$

Тогда $\overline{1, N} \backslash \{j\} \in \mathfrak{N}_{N-1}$ и (согласно (2.5.30)) $j \in \overline{1, N} \backslash (\overline{1, N} \backslash \{j\})$, а тогда из (2.5.29) вытекает включение

$$(j, \overline{1, N} \backslash \{j\}) \in D_{N-1}.$$

Тем самым, установлено включение $(j, K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}$ (см. (2.5.28), (2.5.29)) и нужное свойство установлено и в случае 2), т.е. при $s = N$. Таким образом установлена импликация

$$(s = N) \Rightarrow ((j, K \backslash \{j\}) \in D_{s-1}). \tag{2.5.31}$$

Из (2.5.19), (2.5.27) и (2.5.31) получаем, что $(j, K\setminus\{j\}) \in D_{s-1}$ во всех возможных случаях. $\square$

Из предложения 2.5.1 и (2.5.6) вытекает, что при $s \in \overline{2, N}$, $(i, K) \in D_s$ и $j \in K$

$$v_{s-1}(j, K\setminus\{j\}) \in [0, \infty[. \tag{2.5.32}$$

Кроме того (см. предложение 2.5.1 и определение v_0) для $s = 1$, $(i, K) \in D_s$ и $j \in K$ величина (2.5.32) также определена. Стало быть, значением (2.5.32) мы располагаем при $s \in \overline{1, N}$, $(i, K) \in D_s$ и $j \in K$; заметим, что в данном случае $i \neq j$ (в самом деле, согласно (2.5.2) $i \in \overline{1, N}\setminus K$, а $j \in K$) и определена величина $\mathbf{A}_{i,j}$. Как следствие, получаем, что при $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$ определяется значение

$$\min_{j \in K}[\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K\setminus\{j\})] \in [0, \infty[. \tag{2.5.33}$$

Значения (2.5.33) и $v_s(j, K) \in [0, \infty[$ связаны, как будет показано ниже (см. также [5, 44]), специальным соотношением, которое имеет смысл уравнения Беллмана [6, 7].

Предложение 2.5.2. *Если $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$, то*

$$v_s(i, K) = \min_{j \in K}[\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K\setminus\{j\})]. \tag{2.5.34}$$

Доказательство. Фиксируем $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$. Напомним, что $\mathfrak{N}_1 = \{\{l\} \,:\, l \in \overline{1, N}\}$, а потому (см. (2.5.2))

$$D_1 = \bigcup_{l \in \overline{1, N}} \{(i, \{l\}) \,:\, i \in \overline{1, N}\setminus\{l\}\}.$$

Как следствие, из (2.5.12) извлекается равенство (2.5.34) при $s = 1$. Здесь мы учитываем очевидное свойство:

$$(s = 1) \Rightarrow (K\setminus\{j\} = \varnothing \quad \forall j \in K).$$

Итак, у нас истинна импликация

$$(s = 1) \Rightarrow (v_s(i, K) = \min_{j \in K}[\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K\setminus\{j\})]). \tag{2.5.35}$$

Удобно также (см. замечания 2.5.1, 2.5.2) рассмотреть отдельно случай $s = 2$.

Итак, пусть $s = 2$. В согласии с замечаниями 2.5.1, 2.5.2 уместно (при $s = 2$) рассмотреть отдельно следующие два случая:

$$(N = 2) \vee (N \neq 2). \tag{2.5.36}$$

Пусть $N = 2$, а тогда $s = N$ и $(i, K) \in D_N$, т.е. $i = 0$ и $K = \overline{1, N} = \overline{1, 2}$. Согласно (2.5.15)

$$v_s(i, K) = v_N(0, \overline{1, N}) = v_2(0, \overline{1, 2}) = \min_{j \in \overline{1,2}} [\mathbf{A}_{0,j} + v_1(j, \overline{1, 2} \setminus \{j\})] =$$

$$= \min_{j \in \overline{1,N}} [\mathbf{A}_{0,j} + v_{N-1}(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})] = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})],$$

чем завершается рассмотрение случая $N = 2$. Итак, при $s = 2$ установлена импликация

$$(N = 2) \Rightarrow (v_s(i, K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]). \tag{2.5.37}$$

Пусть $N \neq 2$. Тогда, кстати, $N \neq s$ (поскольку мы обсуждаем сейчас случай $s = 2$). У нас выполнены все условия замечания 2.5.2. Поэтому из (2.5.2) и (2.5.17) имеем цепочку равенств

$$v_s(i, K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_1(j, K \setminus \{j\})] = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})].$$

Тем самым установлена при $s = 2$ импликация

$$(N \neq 2) \Rightarrow (v_s(i, K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]). \tag{2.5.38}$$

Из (2.5.36), (2.5.37) и (2.5.38) имеем (при $s = 2$) во всех возможных случаях равенство (2.5.34). Итак, истинна импликация

$$(s = 2) \Rightarrow (v_s(i, K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]). \tag{2.5.39}$$

Из (2.5.35), (2.5.39) вытекает истинность импликации

$$(s \in \{1; 2\}) \Rightarrow (v_s(i, K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]). \tag{2.5.40}$$

Иными словами, (см. (2.5.40)), истинна следующая импликация:

$$(s \in \overline{1, 2}) \Rightarrow (v_s(i, K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]). \tag{2.5.41}$$

Возвращаясь к условиям доказываемого предложения, отметим, что

$$(s \in \overline{1, 2}) \vee (s \in \overline{3, N}). \tag{2.5.42}$$

Первый в (2.5.42) случай мы уже рассмотрели (см. (2.5.41)). Пусть

$$s \in \overline{3, N} \tag{2.5.43}$$

(разумеется, в данном случае N с необходимостью удовлетворяет неравенству $3 \leq N$). Тогда $v_s(i, K)$ определяется посредством (2.5.11). Поскольку (см. (2.5.43)) $3 \leq s$, то

$$s - 1 \in \overline{2, N-1} \qquad (2.5.44)$$

и, также в согласии с (2.5.11) и предложением 8.1, получаем, что при $j \in K$ верно (2.5.18), где $K \backslash \{j\} \in \mathfrak{N}_{s-1}$, и как следствие при $s - 2 \in \overline{1, N-2}$ справедливо равенство

$$v_{s-1}(j, K \backslash \{j\}) = \min_{\beta \in (bi)[K \backslash \{j\}]} [\mathbf{A}_{j,\beta(1)} + \sum_{l=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\beta(l),\beta(l+1)} + \mathbf{A}_{\beta(s-1),0}]. \qquad (2.5.45)$$

(в силу (2.5.44) нам, конечно, в (2.5.11) следует заменить s на $s-1$, i на j и, наконец, K на $K \backslash \{j\}$). С учетом (2.5.11) выберем $\mathbf{u} \in (bi)[K]$ так, что при этом

$$v_s(i, K) = \mathbf{A}_{i,\mathbf{u}(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)} + \mathbf{A}_{\mathbf{u}(s),0}. \qquad (2.5.46)$$

Итак (см. (2.5.46)), $\mathbf{u}$ есть оптимальный (для позиции (i, K)) маршрут. Напомним, что в силу (2.5.2) $K \in \mathfrak{N}_s$ и $i \in \overline{1, N} \backslash K$. При этом, конечно, $|K| = s$ и, как следствие,

$$\mathbf{u} : \overline{1, s} \longrightarrow K, \qquad (2.5.47)$$

причем справедливы следующие свойства:

$$(\forall k \in K \ \exists j \in \overline{1, s} : k = \mathbf{u}(j)) \,\&\, (\mathbf{u}(i) \neq \mathbf{u}(j)$$
$$\forall i \in \overline{1, s} \ \forall j \in \overline{1, s} \backslash \{i\}). \qquad (2.5.48)$$

Из (2.5.47) имеем, в частности, что справедливо включение

$$\mathbf{u}(1) \in K. \qquad (2.5.49)$$

Полагая $P \triangleq K \backslash \{\mathbf{u}(1)\}$, получаем свойства $P \in \mathfrak{N}_{s-1}$ и (см. (2.5.33))

$$\min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \backslash \{j\})] \leq \mathbf{A}_{i,\mathbf{u}(1)} + v_{s-1}(\mathbf{u}(1), P). \qquad (2.5.50)$$

Отметим, кроме того, что $i + 1 \in \overline{2, s} \quad \forall i \in \overline{1, s-1}$. С учетом (2.5.47) получаем систему включений

$$\mathbf{u}(i+1) \in K \quad \forall i \in \overline{1, s-1}. \qquad (2.5.51)$$

С другой стороны, из (2.5.48) имеем, что

$$\mathbf{u}(1) \neq \mathbf{u}(i+1) \quad \forall i \in \overline{1, s-1}.$$

С учетом (2.5.51) это означает, в частности, что справедливы включения

$$\mathbf{u}(i+1) \in P \quad \forall i \in \overline{1, s-1}. \tag{2.5.52}$$

Определяем теперь (с учетом (2.5.52)) следующее отображение:

$$\mathfrak{U} \triangleq (\mathbf{u}(i+1))_{i \in \overline{1, s-1}} \tag{2.5.53}$$

(всюду в дальнейшем $\mathfrak{U}$ понимается только в смысле (2.5.53)), действующее из $\overline{1, s-1}$ в P (см. (2.5.52))). Итак, согласно (2.5.53)

$$\mathfrak{U} : \overline{1, s-1} \longrightarrow P$$

есть такое отображение, что $\forall i \in \overline{1, s-1}$

$$\mathfrak{U}(i) = \mathbf{u}(i+1). \tag{2.5.54}$$

Из (2.5.48), (2.5.54) вытекает, что $\forall i_1 \in \overline{1, s-1}$ $\forall i_2 \in \overline{1, s-1}$

$$(\mathfrak{U}(i_1) = \mathfrak{U}(i_2)) \Rightarrow (i_1 = i_2). \tag{2.5.55}$$

Стало быть, $\mathfrak{U}$ есть инъективное отображение или, кратко, инъекция $\overline{1, s-1}$ в P.

Если $l \in P$, то в силу (2.5.48) найдется индекс $j \in \overline{1, s}$ такой, что $l = \mathbf{u}(j)$; здесь мы учли вложение $P \subset K$. Кроме того, $l \neq \mathbf{u}(1)$, а тогда $j \neq 1$. Стало быть, $j \in \overline{2, s}$ и, как следствие,

$$j - 1 \in \overline{1, s-1}. \tag{2.5.56}$$

Согласно (2.5.54) $\mathfrak{U}(j-1) = \mathbf{u}(j) = l$. С учетом (2.5.56) и того, что выбор l был произвольным, получаем, что

$$\forall i \in P \ \exists k \in \overline{1, s-1} \ : \ i = \mathfrak{U}(k).$$

В сочетании с (2.5.55) получаем, что $\mathfrak{U}$ есть биекция $\overline{1, s-1}$ на P, см. (1.1.12). Таким образом, из определения P вытекает, что (см. предложение 2.5.1)

$$(\mathbf{u}(1), P) \in D_{s-1} \tag{2.5.57}$$

и $\mathfrak{U} \in (bi)[P]$ (заметим, кстати, что $s - 1 = |P|$). С учетом (2.5.32) и (2.5.57) имеем значение (экстремум)

$$v_{s-1}(\mathbf{u}(1), P) \in [0, \infty[. \tag{2.5.58}$$

При этом (см. (2.5.10), (2.5.44), (2.5.45)) справедливо равенство

$$v_{s-1}(\mathbf{u}(1), P) = \min_{\alpha \in (bi)[P]} [\mathbf{A}_{\mathbf{u}(1),\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(s-1),0}]. \qquad (2.5.59)$$

Поскольку $\mathfrak{U} \in (bi)[P]$, имеем из (2.5.59) очевидную оценку экстремума (2.5.58):

$$v_{s-1}(\mathbf{u}(1), P) \leq \mathbf{A}_{\mathbf{u}(1),\mathfrak{U}(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\mathfrak{U}(j),\mathfrak{U}(j+1)} + \mathbf{A}_{\mathfrak{U}(s-1),0}.$$

С учетом (2.5.54) получаем из последнего неравенства, что

$$v_{s-1}(\mathbf{u}(1), P) \leq \mathbf{A}_{\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\mathbf{u}(j+1),\mathbf{u}(j+2)} + \mathbf{A}_{\mathbf{u}(s),0} =$$

$$= \mathbf{A}_{\mathbf{u}(1),\mathbf{u}(2)} + \sum_{l=2}^{s-1} \mathbf{A}_{\mathbf{u}(l),\mathbf{u}(l+1)} + \mathbf{A}_{\mathbf{u}(s),0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)} + \mathbf{A}_{\mathbf{u}(s),0}. \qquad (2.5.60)$$

Из (2.5.50), (2.5.60) вытекает, что справедливо неравенство

$$\min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})] \leq \mathbf{A}_{i,\mathbf{u}(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\mathbf{u}(j),\mathbf{u}(j+1)} + \mathbf{A}_{\mathbf{u}(s),0}.$$

С учетом (2.5.46) получаем очевидную оценку

$$\min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})] \leq v_s(i, K). \qquad (2.5.61)$$

Докажем противоположное неравенство. Для этого выберем и зафиксируем индекс $q \in K$, для которого

$$\mathbf{A}_{i,q} + v_{s-1}(q, K \setminus \{q\}) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]. \qquad (2.5.62)$$

Поскольку (см. (2.5.43)) $s \in \overline{1, N}$, $(i, K) \in D_s$ и $q \in K$, то согласно предложению 2.5.1

$$(q, Q) \in D_{s-1}, \qquad (2.5.63)$$

где $Q \triangleq K \setminus \{q\}$. Из (2.5.62) имеем, следовательно, равенство

$$\mathbf{A}_{i,q} + v_{s-1}(q, Q) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]. \qquad (2.5.64)$$

Заметим, что в силу (2.5.63)

$$|Q| = |K\backslash\{q\}| = s - 1.$$

Ниже используем (2.5.45), рассматривая это равенство как конкретизацию (2.5.11). Из этих соотношений вытекает равенство

$$v_{s-1}(q, Q) = \min_{\alpha \in (bi)[Q]} [\mathbf{A}_{q,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(s-1),0}]. \tag{2.5.65}$$

Пусть $\eta \in (bi)[Q]$ таково, что (см. (2.5.65))

$$v_{s-1}(q, Q) = \mathbf{A}_{q,\eta(1)} + \sum_{j=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\eta(j),\eta(j+1)} + \mathbf{A}_{\eta(s-1),0}. \tag{2.5.66}$$

При этом $\eta : \overline{1, s-1} \longrightarrow Q$ обладает следующими свойствами (см. (1.1.12)):

1*) η сюръективно, т.е. $\forall j \in Q \, \exists k \in \overline{1, s-1} \, : \, j = \eta(k)$;

2*) η инъективно, т.е. $\forall j_1 \in \overline{1, s-1} \; \forall j_2 \in \overline{1, s-1}\backslash\{j_1\}$

$$\eta(j_1) \neq \eta(j_2).$$

Отметим, что $K = \{q\} \bigcup Q$, причем $q \notin Q$. Кроме того, напомним, что

$$j - 1 \in \overline{1, s-1} \quad \forall j \in \overline{2, s}. \tag{2.5.67}$$

Наконец, $\overline{1, s} = \{1\} \bigcup \overline{2, s}$ (см. (2.5.43)), где $1 \notin \overline{2, s}$. Пусть отображение

$$\lambda : \overline{1, s} \longrightarrow K$$

определяется условиями: $(\lambda(1) \stackrel{\triangle}{=} q) \& (\lambda(j) \stackrel{\triangle}{=} \eta(j-1) \quad \forall j \in \overline{2, s})$. Тогда в силу 1*) и (2.5.67) мы получаем, что

$$\forall j \in Q \, \exists k \in \overline{2, s} \, : \, j = \lambda(k) \tag{2.5.68}$$

(если $j \in Q$, то в силу 1*) найдется $l \in \overline{1, s-1}$ со свойством $j = \eta(l)$, а тогда $k \stackrel{\triangle}{=} l + 1 \in \overline{2, s}$ и, в силу (2.5.67), $k - 1 = l \in \overline{1, s-1}$ и $\lambda(k) = \eta(l)$; в итоге $\lambda(k) = j$). Из (2.5.68) следует, с учетом определения $\lambda(1)$, что λ сюръективно (как отображение из $\overline{1, s}$ в K), т.е.

$$\forall k \in K \, \exists j \in \overline{1, s} \, : \, k = \lambda(j). \tag{2.5.69}$$

Если $j_1 \in \overline{1, s}$ и $j_2 \in \overline{1, s}\backslash\{j_1\}$, то $\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2)$ В самом деле, $j_1 \neq j_2$. Если $j_1 = 1$, то $\lambda(j_1) = q \notin Q$, $j_2 \in \overline{2, s}$ и $\lambda(j_2) = \eta(j_2 - 1) \in Q$; итак, $\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2)$ в данном конкретном случае. Стало быть, истинна импликация

$$(j_1 = 1) \Rightarrow (\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2)). \tag{2.5.70}$$

Пусть $j_1 \in \overline{2,s}$, тогда $j_1 - 1 \in \overline{1,s-1}$ и $\lambda(j_1) = \eta(j_1 - 1) \in Q$. Далее в этом случае

$$(j_2 = 1) \Rightarrow (\lambda(j_2) \notin Q),$$

а потому имеем (при условии $j_1 \in \overline{2,s}$) импликацию

$$(j_2 = 1) \Rightarrow (\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2)). \tag{2.5.71}$$

В случае $j_2 \in \overline{2,s}$ имеем $j_2 - 1 \in \overline{1,s-1}$ и $\lambda(j_2) = \eta(j_2 - 1)$, где

$$j_2 - 1 \in \overline{1,s-1} \setminus \{j_1 - 1\},$$

а потому (см. свойство 2*), т.е. (инъективность η) имеем очевидное следствие

$$\lambda(j_1) = \eta(j_1 - 1) \neq \eta(j_2 - 1) = \lambda(j_2).$$

Тем самым (при условии $j_1 \in \overline{2,s}$) истинна импликация

$$(j_2 \in \overline{2,s}) \Rightarrow (\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2)).$$

С учетом (2.5.71) мы получаем (коль скоро $(j_2 = 1) \vee (j_2 \in \overline{2,s})$ по выбору j_2), что

$$\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2) \tag{2.5.72}$$

во всех возможных, при условии $j_1 \in \overline{2,s}$, случаях. Стало быть,

$$(j_1 \in \overline{2,s}) \Rightarrow (\lambda(j_1) \neq \lambda(j_2)). \tag{2.5.73}$$

Из (2.5.70) и (2.5.73) получаем (коль скоро $(j_1 = 1) \vee (j_1 \in \overline{2,s})$ по выбору j_1), что (2.5.72) справедливо всегда. Поскольку выбор j_1 и j_2 был произвольным, установлено, что $\forall k_1 \in \overline{1,s}\ \ \forall k_2 \in \overline{1,s} \setminus \{k_1\}$

$$\lambda(k_1) \neq \lambda(k_2).$$

Стало быть, λ — инъективное отображение и в силу (2.5.69)

$$\lambda \in (bi)[K]. \tag{2.5.74}$$

С учетом (2.5.11) и (2.5.43) получаем следующую оценку

$$v_s(i,K) \leq \mathbf{A}_{i,\lambda(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\lambda(j),\lambda(j+1)} + \mathbf{A}_{\lambda(s),0}. \tag{2.5.75}$$

С учетом (2.5.43), (2.5.44) и определения λ имеем, однако, цепочку равенств

$$\mathbf{A}_{i,\lambda(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\lambda(j),\lambda(j+1)} + \mathbf{A}_{\lambda(s),0} = \mathbf{A}_{i,q} + \mathbf{A}_{\lambda(1),\lambda(2)} + \sum_{j=2}^{s-1} \mathbf{A}_{\lambda(j),\lambda(j+1)} +$$

$$+\mathbf{A}_{\lambda(s),0} = \mathbf{A}_{i,q} + \mathbf{A}_{q,\eta(1)} + \sum_{j=2}^{s-1} \mathbf{A}_{\eta(j-1),\eta(j)} + \mathbf{A}_{\eta(s-1),0} =$$

$$= \mathbf{A}_{i,q} + \mathbf{A}_{q,\eta(1)} + \sum_{l=1}^{s-2} \mathbf{A}_{\eta(l),\eta(l+1)} + \mathbf{A}_{\eta(s-1),0}. \qquad (2.5.76)$$

Из (2.5.66), (2.5.76) вытекает очевидное равенство

$$\mathbf{A}_{i,\lambda(1)} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_{\lambda(j),\lambda(j+1)} + \mathbf{A}_{\lambda(s),0} = \mathbf{A}_{i,q} + v_{s-1}(q,Q).$$

В силу (2.5.75) имеем теперь следующую оценку

$$v_s(i,K) \leq \mathbf{A}_{i,q} + v_{s-1}(q,Q),$$

из которой с учетом (2.5.64) извлекается неравенство

$$v_s(i,K) \leq \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]. \qquad (2.5.77)$$

Из (2.5.61) и (2.5.77) получаем (при условии (2.5.43)) равенство

$$v_s(i,K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]. \qquad (2.5.78)$$

Тем самым (см. (2.5.43), (2.5.78)) установлена импликация

$$(s \in \overline{3,N}) \Rightarrow (v_s(i,K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_{s-1}(j, K \setminus \{j\})]).$$

С учетом (2.5.41), (2.5.42) имеем теперь (2.5.34) во всех возможных случаях. □

Предложение 2.5.2 позволяет построить все слои функции Беллмана (см. (2.5.6), (2.5.7)) по следующей рекуррентной процедуре.

Функция v_0 определяется на D_0 посредством (2.5.7). Пусть теперь $n \in \overline{0,N}$ и функции

$$v_0 : D_0 \longrightarrow [0, \infty[, ..., v_n : D_n \longrightarrow [0, \infty[\qquad (2.5.79)$$

уже построены. Тогда с учетом предложения 2.5.1 конструируем, при условии $n \leq N-1$, функцию

$$v_{n+1} : D_{n+1} \longrightarrow [0, \infty[$$

посредством предложения 2.5.2 (применяемого при $s = n+1$): для $(i,K) \in D_{n+1}$

$$v_{n+1}(i,K) = \min_{j \in K} [\mathbf{A}_{i,j} + v_n(j, K \setminus \{j\})];$$

учитываем при этом предложение 2.5.1 и то, что функция v_n нам уже известна. Если же $n = N$, то посредством (2.5.79) уже изначально определены все слои функции Беллмана.

Если же функции v_0, v_1, ..., v_N нам известны, то по правилу, как в разделе 2.3, легко конструируется оптимальный маршрут в задаче

$$\mathbf{A}_{0,\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{A}_{\alpha(j),\alpha(j+1)} + \mathbf{A}_{\alpha(N),0} \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.5.80}$$

В связи с (2.5.80) см. равенство (2.5.10). Сейчас ограничимся обсуждением двух первых шагов процедуры построения оптимального маршрута.

Используя предложения 2.5.1 и 2.5.2, выбираем (см. (2.5.3), (2.5.34)) $\mathbf{j}_1 \in \overline{1,N}$ так, что при этом

$$v_N(0, \overline{1,N}) = \mathbf{A}_{0,\mathbf{j}_1} + v_{N-1}(\mathbf{j}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}); \tag{2.5.81}$$

при этом $(0, \overline{1,N}) \in D_N$ и $(\mathbf{j}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) \in D_{N-1}$. Перемещаемся в позицию $(\mathbf{j}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$, для которой вновь применяем предложение 2.5.2 при $i = \mathbf{j}_1$ и $K = \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}$. Именно

$$v_{N-1}(\mathbf{j}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) = \min_{k \in \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}} [\mathbf{A}_{\mathbf{j}_1,k} + v_{N-2}(k, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; k\})]; \tag{2.5.82}$$

напомним, что у нас $N \geq 2$. С учетом (2.5.82) выбираем

$$\mathbf{j}_2 \in \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}$$

так, что при этом справедливо равенство

$$v_{N-1}(\mathbf{j}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) = \mathbf{A}_{\mathbf{j}_1,\mathbf{j}_2} + v_{N-2}(\mathbf{j}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_i \, : \, i \in \overline{1,2}\}). \tag{2.5.83}$$

Отметим, что из (2.5.81) и (2.5.83) следует, в частности, равенство

$$v_N(0, \overline{1,N}) = \mathbf{A}_{0,\mathbf{j}_1} + \mathbf{A}_{\mathbf{j}_1,\mathbf{j}_2} + v_{N-2}(\mathbf{j}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_i \, : \, i \in \overline{1,2}\}). \tag{2.5.84}$$

Перемещаемся в позицию $(\mathbf{j}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_i \, : \, i \in \overline{1,2}\})$. Далее процедура выбора индексов из $\overline{1,N}$ повторяется. После ее исполнения будет построен маршрут $(\mathbf{j}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}$, являющийся оптимальным в задаче (2.5.80). Мы рекомендуем читателю проделать это в порядке упражнения самостоятельно (см. в этой связи [56, §4.7]), а сейчас ограничимся обсуждением только наиболее очевидного случая $N = 2$.

Итак, пусть $N = 2$. Тогда из (2.5.84) имеем равенство

$$v_N(0, \overline{1,N}) = \mathbf{A}_{0,\mathbf{j}_1} + \mathbf{A}_{\mathbf{j}_1,\mathbf{j}_2} + v_0(\mathbf{j}_2, \varnothing) = \mathbf{A}_{0,\mathbf{j}_1} + \mathbf{A}_{\mathbf{j}_1,\mathbf{j}_2} + \mathbf{A}_{\mathbf{j}_2,0}. \tag{2.5.85}$$

Оптимальность маршрута $(\mathbf{j}_i)_{i \in \overline{1,2}} \in \mathbb{P}$ непосредственно следует из (2.5.10). Отметим, что построение решения при $N > 2$ является несколько усложненной “копией” только что рассмотренной процедуры.

2.6. Применение метода динамического программирования для решения задачи оптимизации дозовых затрат ремонтного персонала атомных электрических станций

В настоящем разделе обсуждается вопрос о применении вышеупомянутого точного метода решения ЗК (имеется в виду МДП) в весьма актуальной инженерной задаче, связанной с обслуживанием атомных электрических станций (АЭС); см. в связи с упомянутой инженерной задачей учебное пособие [41].

При выполнении технического обслуживания и профилактических работ ремонтный персонал АЭС получает определенные дозы облучения. Нормативные документы (Нормы радиационной безопасности – НРБ-99) устанавливают предельно допустимые нормы облучения персонала, и естественно организовывать работу ремонтного персонала так, чтобы упомянутая доза облучения каждого работника была минимальной. При выполнении ремонтных и профилактических работ в зоне с высоким уровнем радиации зачастую работник выполняет несколько заданий на объектах, расположенных в разных местах одного или нескольких обслуживаемых помещений. Доза облучения ремонтного персонала складывается из дозы облучения, полученной при выполнении конкретных технологических операций, и дозы облучения, полученной при перемещении от одного объекта к другому [40, 31].

В настоящем разделе мы будем рассматривать задачу минимизации дозы облучения работников, получаемой при перемещениях между местами выполнения конкретных технологических операций. Ниже используется процедура, изложенная в предыдущем разделе.

На рис. 2.6.1 показан план помещения, в котором работнику необходимо выполнить 12 технологических операций, связанных с посещением рабочих мест, именуемых далее объектами. Зайти в помещение и выйти из него работник может через входы-выходы a, b и c. Ниже приведена матрица доз облучения, получаемых работником при перемещении от одного объекта к

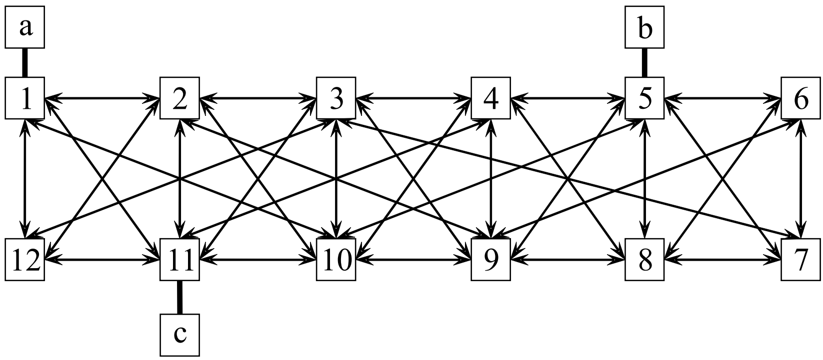

Рис. 2.6.1.

другому.

$$\begin{pmatrix}
0 & 8,2 & M & M & M & M & M & M & M & 23 & 5,6 & 7,5 \\
8,2 & 0 & 11 & M & M & M & M & M & 22 & 13,2 & 9,8 & 11 \\
M & 11 & 0 & 23 & M & M & 17,5 & M & 17,5 & 22 & 11,5 & 31 \\
M & M & 23 & 0 & 7,8 & M & M & 21,5 & 11 & 13,2 & 24 & M \\
M & M & M & 7,8 & 0 & 11 & 19 & 7,8 & 16,5 & 19,8 & M & M \\
M & M & M & M & 11 & 0 & 19 & 20 & 27,5 & M & M & M \\
M & M & 17,5 & M & 19 & 19 & 0 & 21 & M & M & M & M \\
M & M & M & 21,5 & 7,8 & 20 & 21 & 0 & 15 & M & M & M \\
M & 22 & 17,5 & 11 & 16,5 & 27,5 & M & 15 & 0 & 13 & M & M \\
23 & 13,2 & 22 & 13,2 & 19,8 & M & M & M & 13 & 0 & 10 & M \\
5,6 & 9,8 & 11,5 & 24 & M & M & M & M & M & 10 & 0 & 22 \\
7,5 & 11 & 31 & M & M & M & M & M & M & M & 22 & 0
\end{pmatrix}$$

Данные представлены в единицах измерения эффективной дозы облучения персонала – в микрозивертах (мкзв). В случае, если перемещение между двумя объектами считается невозможным, соответствующая доза облучения полагается равной M, где M – достаточно большое число, значительно большее, чем дозы на допустимых перемещениях. При этом перемещение считаем невозможным, если такое перемещение не удается осуществить, минуя те или иные промежуточные объекты (возможно, что при перемещении с посещением промежуточных объектов работник получает сразу недопустимо большую дозу радиации).

Были рассмотрены следующие варианты оптимальных маршрутов. Первый вариант – работник заходит в помещение через вход a и выходит через

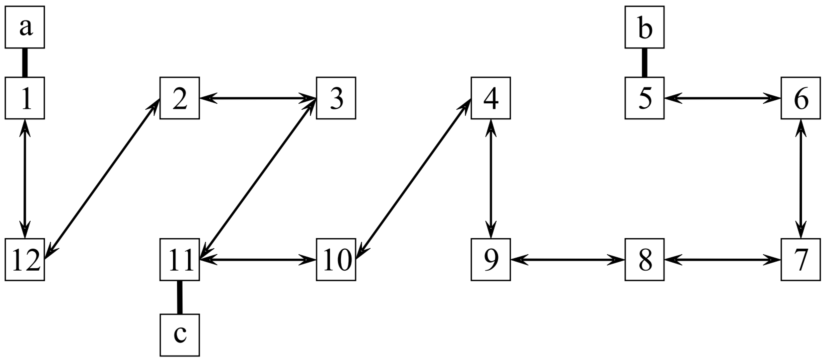

Рис. 2.6.2.

выход b. В результате решения по МДП (см. предыдущий раздел) получился следующий оптимальный маршрут:

$$1 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5.$$

Оптимальная доза облучения, полученная на этом маршруте, равна 142,9 мкзв. Данный маршрут приведен на рис. 2.6.2.

Далее был рассмотрен второй вариант, когда работник заходит в помещение через вход a и выходит через c. В этом случае получился следующий оптимальный маршрут:

$$1 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11.$$

При этом оптимальная доза облучения на маршруте оказалась равной 134 мкзв. Соответствующий маршрут приведен на рис. 2.6.3.

Следующим вариантом был случай, когда работник заходит в помещение через вход b, выходит через c. Здесь оптимальный маршрут получился таким:

$$5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 12 \longrightarrow 1 \longrightarrow 11.$$

Оптимальная доза облучения на этом маршруте равна 140,6 мкзв. Сам маршрут приведен на рис 2.6.4.

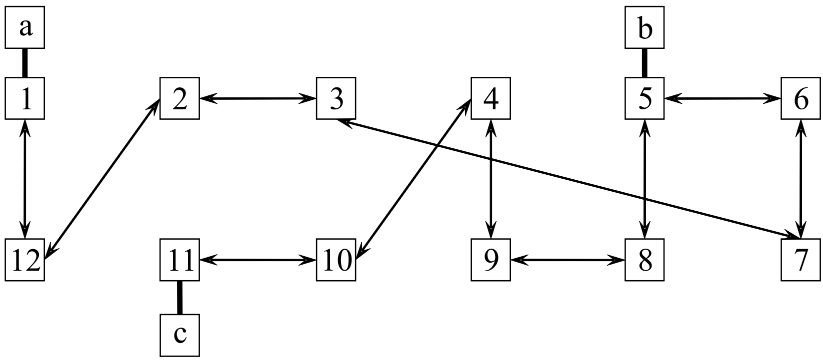

Рис. 2.6.3.

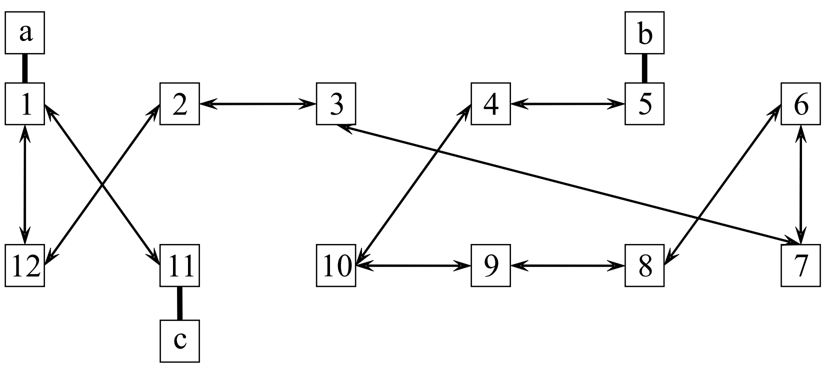

Рис. 2.6.4.

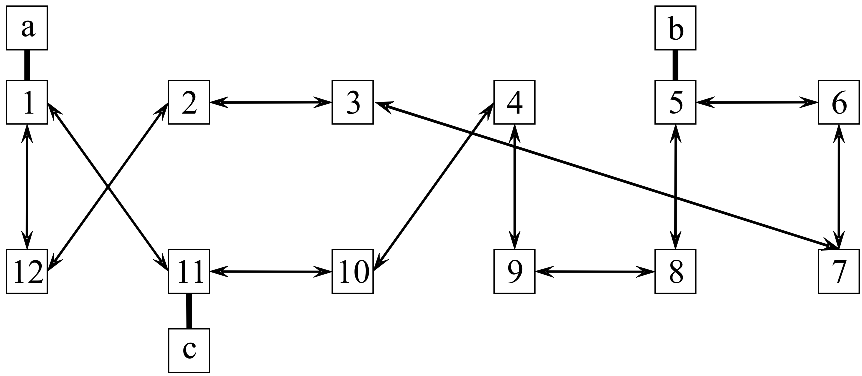

Рис. 2.6.5.

Осталось рассмотреть маршруты, начинающиеся и заканчивающиеся в одном и том же входе. Таких маршрутов три. Очевидно, что геометрия этих маршрутов будет одинаковая и дозы облучения для них совпадут. Оптимальный маршрут, построенный для входа a, будет следующим:

$$1 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 1.$$

Доза облучения, полученная вдоль этого маршрута, равна 139,6 мкзв. Сам маршрут представлен на рис. 2.6.5. Сравнивая маршруты, представленные на рис. 2.6.3 и 2.6.5, видим, что последний отличается от первого лишь дополнительным отрезком, соединяющим объекты 1 и 11, и поэтому этот маршрут заведомо неоптимален для исходной задачи.

Теперь сравним величины затрат для всех четырех рассмотренных маршрутов. Из сравнения видно, что оптимальным маршрутом для исходной задачи будет маршрут, представленный на рис. 2.6.3, а оптимальная доза облучения равна 134 мкзв.

В заключение приведем еще два маршрута, соответствующие решению незамкнутой задачи. Первый получился в результате решения задачи минимизации затрат, когда вход в помещение допускается через любой из входов a, b или c, а на последнюю точку никаких ограничений не накладывается (т.е. выход из помещения не требуется). В этом случае получился маршрут

$$5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 1 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6.$$

Оптимальная доза облучения на этом маршруте оказалась равной 128,6 мкзв.

В случае, если мы будем осуществлять обход объектов в порядке, соответствующем их нумерации (второй маршрут) по замкнутому маршруту, то суммарная доза облучения будет равна 168,5 мкзв.

Компьютерное моделирование задачи осуществлено М.Ю. Куклиным.

2.7. Одно обобщение задачи коммивояжера: маршрутная задача последовательного обхода множеств

В настоящем разделе мы на идейном уровне обсудим возможность применения МДП для решения задачи, несколько более общей в сравнении с ЗК. Упомянутая задача рассматривалась в большой серии работ (см. [56] и библиографию к книге); сейчас отметим в числе наиболее ранних работ исследование [16]. Обсудим кратко содержательную постановку задачи, акцентируя внимание на следующей особенности.

Если в ЗК переход из города в город являлся действием, определенным единственным образом, то в нашей последующей задаче будет допускаться многовариантность упомянутого перехода. Мы обсуждаем далее (как и в [16]) только одну из возможных постановок такого рода, в рамках которой города заменяются множествами, по которым следует организовать перемещения в том или ином порядке. Таким образом, речь идет о многозначной версии ЗК; используется также термин: обобщенная ЗК.

Мы будем предполагать, что данные множества, именуемые целевыми, попарно не пересекаются, что, кстати, создает им некоторое сходство с городами в ЗК. Кроме того, будем предполагать, что аналог базы (в ЗК) – то или иное начальное состояние – упомянутым целевым множествам не принадлежит. Сами целевые множества будем полагать конечными с тем, чтобы избежать осложнений топологического характера (это может быть связано с проблемой существования оптимального решения) и сосредоточиться на вычислительной стороне (в этой связи заметим, что в наиболее распространенном случае задачи обхода непустых ограниченных и замкнутых множеств в конечномерном арифметическом пространстве решение сводится фактически к упомянутому случаю посещения конечных множеств, выбираемых из соображений аппроксимации "первоначальных" целевых множеств; в этой связи отметим известное свойство компактности, см. [14]).

Итак, пусть X– непустое множество произвольной природы. Напомним, что (см. §1.1) $\mathrm{Fin}(X)$– семейство всех непустых конечных подмножеств X (заметим, что, как отмечалось в главе 1, при $x \in X$ всегда $\{x\} \in \mathrm{Fin}(X)$; если $y \in X$ и $z \in X$, то $\{y; z\} \in \mathrm{Fin}(X)$, и т.д.). Полагаем, что $x^0 \in X$; рассматриваем x^0 в качестве базы (начального пункта). Пусть, кроме того,

$$(M_i)_{i \in \overline{1,N}} \ : \ \overline{1,N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X), \tag{2.7.1}$$

где число N соответствует определению разд. 2.1, $N \geq 3$ (случай $N < 3$ не представляет серьезного интереса в силу достаточной простоты). Итак, у нас даны множества $M_1, \ldots, M_N$ такие, что $M_i \subset X$ при $i \in \overline{1,N}$. Каждое из этих множеств конечно. Будем предполагать в дальнейшем:

1) $x^0 \notin \bigcup_{i=1}^{N} M_i$;

2) $M_p \bigcap M_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}$.

Мы занимаемся далее проблемой оптимизации перемещений следующего вида:

$$x^0 \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow (x_2 \in M_{\alpha(2)}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (x_N \in M_{\alpha(N)}), \tag{2.7.2}$$

где α – перестановка чисел из $\overline{1,N}$, т.е. $\alpha \in \mathbb{P}$. Мы полагаем, что при организации перемещений вида (2.7.2) допустимо использовать любые перестановки α в $\overline{1,N}$ и любые варианты выбора точек x_i из множества $M_{\alpha(i)}$, $i \in \overline{1,N}$. Сами перестановки α именуем, как и раньше, маршрутами, а наборы $(x_1, \ldots, x_N)$ – трассами. Наше решение сводится, таким образом, к выбору пары маршрут – трасса. Целью такого выбора является оптимизация некоторого критерия. Мы не требуем здесь возвращения на базу, т.е. в точку x^0 (в этой связи см., в частности, построение раздела 2.1).

Мы ограничимся сейчас рассмотрением наиболее традиционного аддитивного критерия (как и в случае решения ЗК). Будем полагать заданной следующую функцию (двух переменных):

$$\mathbf{c} \ : \ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}; \tag{2.7.3}$$

именуем $\mathbf{c}$ (2.7.3) функцией потерь. Тогда перемещения (2.7.2) в своей совокупности характеризуются затратами

$$\mathbf{c}(x^0, x_1) + \ldots + \mathbf{c}(x_{N-1}, x_N).$$

Множество всех возможных трасс (при заданном маршруте $\alpha \in (bi)[\overline{1,N}]$) есть декартово произведение всех множеств $M_{\alpha(1)}, \ldots, M_{\alpha(N)}$, т.е. множество

$$\prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)};$$

см. в этой связи (1.1.22). Данное множество всякий раз непусто. Искомое оптимальное качество характеризуется величиной

$$\mathcal{V} \overset{\triangle}{=} \min_{\alpha \in \mathbb{P}} \min_{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)}} [\mathbf{c}(x^0, x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1})]. \tag{2.7.4}$$

Для удобства в последующих определениях введем некоторые дополнительные соглашения. Если

$$(x_i)_{i \in \overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow X, \tag{2.7.5}$$

то полагаем, что

$$\Pi[(x_i)_{i \in \overline{1,N}}] \overset{\triangle}{=} \mathbf{c}(x^0, x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}). \tag{2.7.6}$$

В качестве (2.7.5) можно, конечно, использовать любой элемент декартова произведения всех множеств $M_{\alpha(i)}$, $i \in \overline{1,N}$, в условиях, когда $\alpha \in \mathbb{P}$. Это соглашение позволяет оценивать и сами маршруты $\alpha \in \mathbb{P}$:

$$\pi[\alpha] \overset{\triangle}{=} \min_{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)}} \Pi[(x_i)_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{2.7.7}$$

В этих обозначениях величина $\mathcal{V}$ (2.7.4) имеет следующий вид:

$$\mathcal{V} = \min_{\alpha \in \mathbb{P}} \pi[\alpha]. \tag{2.7.8}$$

В (2.7.8) мы, собственно говоря, имеем значение задачи

$$\pi[\alpha] \longrightarrow \min, \ \ \alpha \in \mathbb{P}, \tag{2.7.9}$$

являющейся усложненным аналогом ЗК. Разумеется, и в задаче (2.7.9), обеспечиваемой соглашением (2.7.7), можно говорить о поиске оптимальных маршрутов. Однако в наших условиях (см. (2.7.6), (2.7.7)) представляется естественным несколько иной взгляд на задачу: мы исходим из того, что объектами нашего выбора являются и маршруты $\alpha \in \mathbb{P}$, и трассы (2.7.5), связанные с маршрутами условием

$$(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)}. \tag{2.7.10}$$

Такой взгляд будет полезен, прежде всего, в связи с использованием МДП. Итак, выбираем далее пары

$$(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1,N}})$$

вышеупомянутого типа, удовлетворяющие связям (2.7.10). Множество всех отображений (2.7.5) условимся обозначать через X^N, что в достаточной степени традиционно. Тогда

$$\mathbf{S} \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbb{P} \times X^N \,|\, (x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)}\} \tag{2.7.11}$$

есть множество всех решений, доступных нашему выбору, $\mathbf{S} \neq \varnothing$. Более того, $\mathbf{S}$ – конечное (в нашем случае) множество, хотя и достаточно "большое". Тогда свою основную задачу мы формулируем здесь в следующем виде:

$$\Pi[(x_i)_{i \in \overline{1,N}}] \longrightarrow \min, \;\; (\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{2.7.12}$$

Несмотря на то что критерий задачи (2.7.12) не зависит явно от $\alpha \in \mathbb{P}$, мы имеем в (2.7.12) экстремальную задачу со связанными переменными, что видно из (2.7.11): выбор трассы (2.7.5) ограничивается множеством, зависящим от α. Из (2.7.4), (2.7.7) и (2.7.8) вытекает, что

$$\mathcal{V} = \min_{(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}} \Pi[(x_i)_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{2.7.13}$$

Итак, $\mathcal{V}$ есть значение (экстремум) задачи (2.7.12). Через $\mathbf{S}_0$ обозначаем множество всех ее решений:

$$\mathbf{S}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha^0, (x_i^0)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \,|\, \Pi[(x_i)_{i \in \overline{1,N}}] = \mathcal{V}\}; \tag{2.7.14}$$

поскольку $\mathbf{S}$ конечно, имеем свойство: $\mathbf{S}_0 \neq \varnothing$. Заметим, что рассматривая (2.7.12) как основную задачу, мы используем далее (2.7.4), (2.7.7) – (2.7.9) на промежуточных этапах исследования.

Рассмотрим один очень простой пример нашей “новой” задачи.

Пример. Пусть X – плоскость: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, x^0 – вектор с нулевыми компонентами, т.е. $x^0 = (0, 0)$. Рассмотрим три конечных плоских множества, два из которых будем полагать одноэлементными:

$$M_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(1;0)\}, \;\; M_2 \stackrel{\triangle}{=} \{(-1,1;0);(1,-2)\}, \;\; M_3 \stackrel{\triangle}{=} \{(0;2)\}.$$

В качестве $\mathbf{c}(x, y)$, где $x \in X$ и $y \in Y$ (x, y – плоские векторы), будем использовать евклидово расстояние между векторами x и y.

Мы сравним (для данного примера) два варианта решения: 1)“очевидный” вариант, основанный на идее метода “иди в ближайшую точку” (см. пример решения ЗК в предыдущем разделе); 2)оптимальное решение, определяемое, однако, в данном случае методом перебора (напомним о подобном примере решения ЗК в разделе 2.2). В случае 1 мы, конечно, используем небольшое видоизменение упомянутого "простейшего" метода, связанное с использованием не целевых точек, а целевых множеств (в данном случае – всего одного множества, не сводящегося к точке).

Вариант решения, отвечающий случаю 1, конструируется очень просто из геометрических соображений:

$$(0;0) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (1;-2) \longrightarrow (0;2).$$

Этот вариант (трасса) отвечает посещению множеств в следующем порядке: $M_1,\ M_2,\ M_3$ – и показан на рис. 2.7.1. Длина пути (наш критерий) в данном случае допускает оценку

$$1+2+\sqrt{17}>7.$$

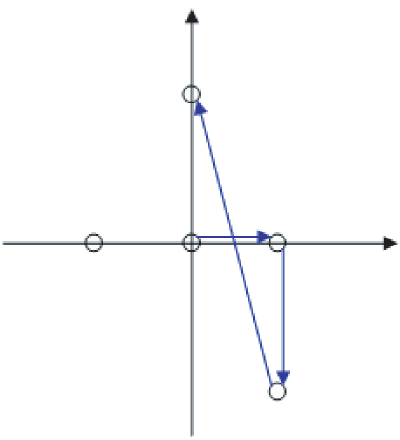

Рис. 2.7.1.

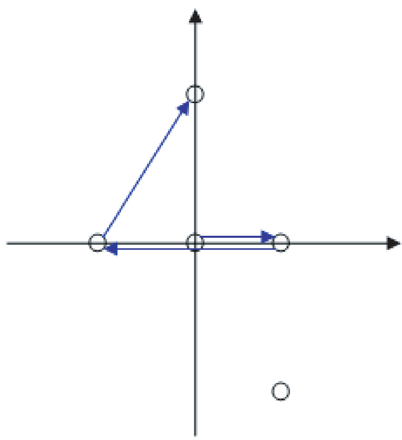

Рис. 2.7.2.

Теперь займемся отысканием действительно оптимального решения. Для этого мы прежде всего запишем всевозможные варианты нумерации целевых множеств, что соответствует биекциям (перестановкам) из множества $\mathbb{P}=(bi)[\overline{1,3}]$: таких вариантов $6=3!$. Имеем версии: 1') (1,2,3); 2') (1,3,2); 3') (2,1,3); 4') (2,3,1); 5') (3,1,2); 6') (3,2,1). Для каждой из упомянутых шести перестановок мы, в свою очередь, должны выбрать кратчайший из двух путей, поскольку только одно из посещаемых множеств не является одноточечным и состоит ровно из двух элементов.

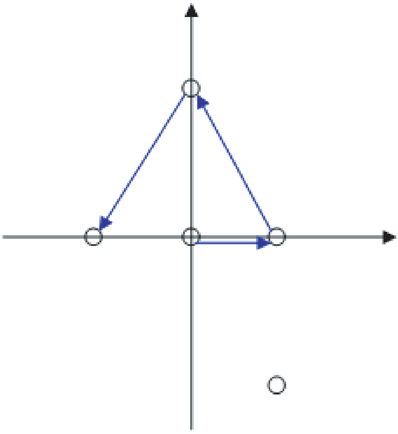

Рис. 2.7.3.

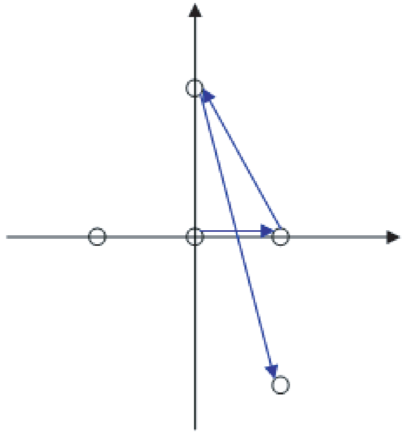

Рис. 2.7.4.

Итак, вариант 1' сводится к сравнению следующих двух путей (трасс):

$$(0;0) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (1;-2) \longrightarrow (0;2),$$

$$(0;0) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (-1,1;0) \longrightarrow (0;2), \tag{2.7.15}$$

которые показаны на рис. 2.7.1 и 2.7.2. Заметим, что последняя трасса ранее нами рассматривалась как трасса, получившаяся в результате реализации метода “иди в ближайшую точку”. Ломаная, соответствующая первой трассе, имеет длину 7,12 (с точностью до двух знаков после запятой; во всех последующих вычислениях мы ограничимся такой точностью); вторая трасса характеризуется аналогичной протяженностью 5,28.

Вариант 2' приводит к реализации одной из следующих двух трасс:

$$(0;0) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (-1,1;0),$$

$$(0;0) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (1;-2).$$

Первая из упомянутых трасс (рис. 2.7.3) имеет протяженность 5,52; протяженность второй трассы (пути) – рис. 2.7.4 – есть 7,36. Заметим, кстати, что вторая, более протяженная, трасса имеет самопересечение, если провести через вышеупомянутые точки соответствующую ломаную.

Вариант 3' соответствует реализации одной из двух следующих трасс:

$$(0;0) \longrightarrow (-1,1;0) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (0;2),$$

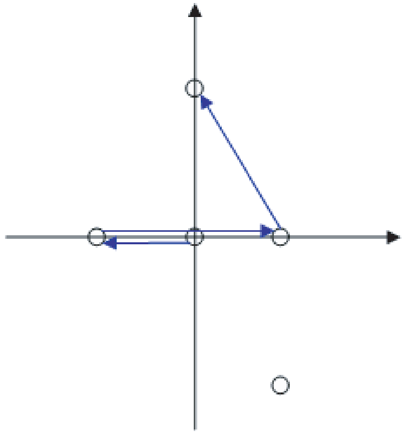

Рис. 2.7.5.

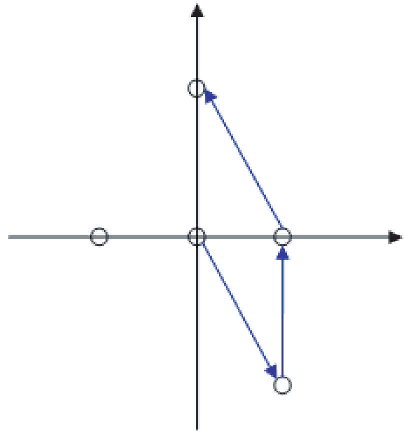

Рис. 2.7.6.

$$(0;0) \longrightarrow (1;-2) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (0;2).$$

Протяженность первой трассы, показанной на рис. 2.7.5, равна 5,44. Протяженность второй (из рассматриваемых в данном варианте) трассы, изображенной на рис. 2.7.6, есть 6,47.

Рассмотрим вариант 4', для которого имеем следующие две возможные трассы:

$$(0;0) \longrightarrow (-1,1;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (1;0),$$

$$(0;0) \longrightarrow (1;-2) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (1;0).$$

Протяженности этих двух трасс, которые показаны на рис. 2.7.7 и 2.7.8, совпадают соответственно со значениями 5,62 и 8,60.

Для варианта 5' имеем в качестве возможных трассы

$$(0;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (-1,1;0),$$

$$(0;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (1;0) \longrightarrow (1;-2).$$

Первая из этих трасс имеет протяженность 6,34, а вторая – 6,24 (рис. 2.7.9 и 2.7.10).

Вариант 6' характеризуется трассами

$$(0;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (-1,1;0) \longrightarrow (1;0),$$

$$(0;0) \longrightarrow (0;2) \longrightarrow (1;-2) \longrightarrow (1;0).$$

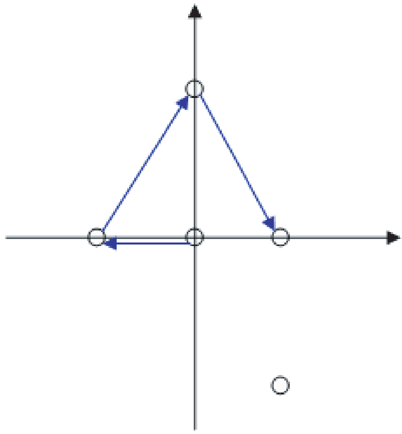

Рис. 2.7.7.

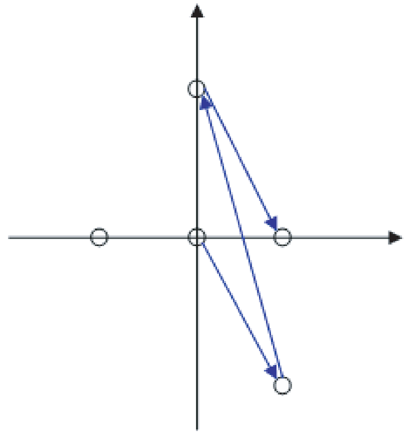

Рис. 2.7.8.

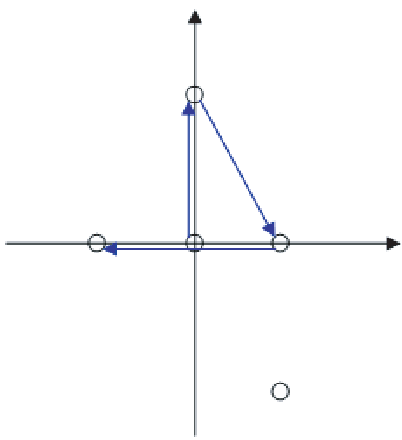

Рис. 2.7.9.

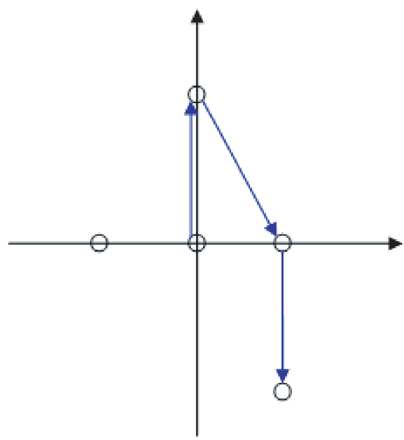

Рис. 2.7.10.

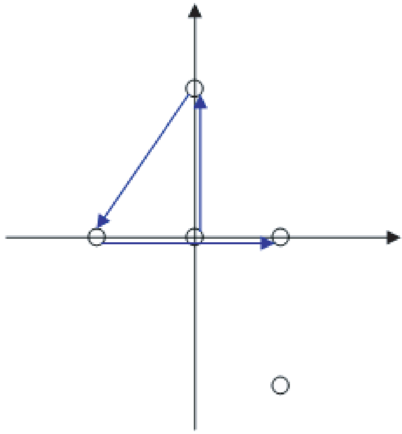

Рис. 2.7.11.

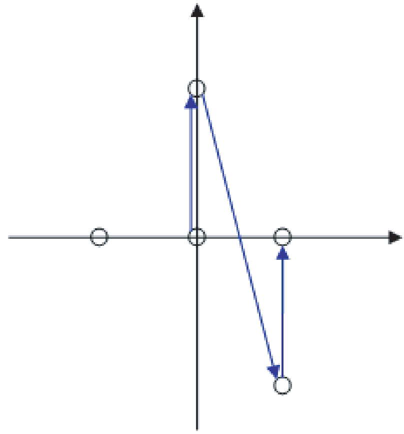

Рис. 2.7.12.

Первая из этих трасс имеет длину 6,38, а вторая – 8,12 (рис. 2.7.11 и 2.7.12). Для определения экстремума нам надлежит сравнить все двенадцать длин (протяженностей):

7,12; 5,28; 5,52; 7,36; 5,44; 6,47; 5,62; 8,60; 6,34; 6,24; 6,38; 8,12.

Мы видим, что данный экстремум есть число 5,28. Оно меньше, чем результат, полученный нами ранее при улучшении процедуры, являющейся модификацией метода "иди в ближайшую точку" (получающийся при вышеупомянутом улучшении результат равнялся 7,12).

Таким образом, уже в данном (простейшем) примере мы получаем решение, которое затруднительно определить из наглядных геометрических соображений, а некоторые "бессмысленные" на первый взгляд фрагменты решения оказываются на самом деле "жертвами" в борьбе за экстремум. Все эти рассуждения показывают, что требуется определенная проработка вышеупомянутой маршрутной задачи; эту проработку мы связываем с МДП.

2.8. Метод динамического программирования в задаче последовательного обхода множеств

В настоящем разделе рассматривается обобщение МДП разд. 3; целью данного обобщения является построение оптимального метода решения рассмотренной только что задачи обхода множеств. Упомянутое обобщение получено и подробно исследовано в [16, 17, 18, 52, 53, 61, 62, 23]. Мы рассмотрим данный метод достаточно схематично, представляя читателю самостоятельно, ориентируясь на МДП в ЗК (см. разд. 2.3 и [5, 44]), провести требуемое исследование. Заметим, что в дальнейшем будут рассматриваться еще более общие задачи маршрутизации, осложненные, возможно, ограничениями в виде т.н. условий предшествования. Отказываясь от этих условий (т.е. снимая ограничения), мы будем приходить к задаче настоящего раздела, т.е. к обобщенной задаче коммивояжера. Конструкция решения, излагаемая здесь, может быть извлечена из более общих вариантов МДП для упомянутых задач с ограничениями. Однако эта конструкция представляет самостоятельный интерес и допускает более простой способ изложения, который и реализуется ниже.

Прежде всего мы рассмотрим аналоги задачи (2.7.12), соответствующие посещению не всех, а только той или иной части целевых множеств $M_1,\ M_2,\ \ldots M_N$.

Как и прежде, через $\mathfrak{N}$ обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества $\overline{1,N}$. Кроме того напомним, что (см. главу 1) при $K \in \mathfrak{N}$ через $(bi)[K]$ обозначается множество всех биективных отображений "отрезка" $\overline{1,|K|}$, где $|K|$ – мощность K, на K. Упомянутые аналоги (2.7.12) будем именовать укороченными задачами. Их смысл состоит в следующем.

Если $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$, то требуется организовать последовательное посещение множеств $M_k,\ k \in K$, нумеруя эти множества без повторений и (в согласии с этой нумерацией) выбирая трассу посещения. Логика каждой такой задачи вполне соответствует задаче (2.7.12) в условиях замены $\overline{1,N}$ индексным множеством K. Упомянутые содержательные задачи полезно дополнить (с формальной точки зрения) "задачей", для которой $K = \varnothing$; этой фиктивной задаче будем приписывать всегда нулевые затраты, что соответствует содержательно отсутствию условия, связанного с возвращением на базу.

Заметим, что при $|K| = 1$, т.е. при $K \in \mathbb{N}_1$, какой-либо процедуры маршрутизации уже не требуется; достаточно лишь выбрать удачно точку на единственном оставшемся целевом множестве. Кроме того, полезно иметь в виду, что множества $K \in \mathbb{N}_1$ однозначно определяются индексами из $\overline{1,N}$:

$$\{1\},\ \{2\},\ \ldots,\ \{N\}.$$

Вследствие этого в случае $x \in X$ и $K \in \mathbb{N}_1$ (напомним, что $\mathbb{N}_1 = \mathfrak{N}_1$) наша простейшая укороченная задача имеет вид

$$\mathbf{c}(x,y) \longrightarrow \min, \quad y \in M_j. \tag{2.8.1}$$

Здесь $j \in \overline{1, N}$ есть такой (единственный) номер, для которого $K = \{j\}$. Этой простейшей задаче сопоставляется экстремум

$$\tilde{v}_1(x, j) \overset{\triangle}{=} \min_{y \in M_j} \mathbf{c}(x, y); \tag{2.8.2}$$

Напомним, что $x \in X$ и $j \in \overline{1, N}$. С помощью зависимости (2.8.2) мы вводим теперь функцию

$$v_1 \, : \, X \times \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.8.3}$$

по следующему правилу: если $x \in X$ и $K \in \mathbb{N}_1$, то подбираем $j \in \overline{1, N}$ так, что $K = \{j\}$, и полагаем

$$v_1(x, K) \overset{\triangle}{=} \tilde{v}_1(x, j). \tag{2.8.4}$$

Посредством (2.8.2)–(2.8.4) определен простейший слой функции Беллмана, имеющий содержательный смысл. Полезно также ввести фиктивные задачи, соответствующие случаю отсутствия каких-либо заданий. С этой целью введем функцию

$$v_0 \, : \, X \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{2.8.5}$$

для которой $v_0(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} 0 \; \forall x \in X$; напомним, что (2.3.7) $\mathbb{N}_0 = \{\varnothing\}$.

Если $|K| \geq 2$, т.е. $K \in \mathbb{N}_s$ при $s \geq 2$, то укороченная задача повторяет в логическом отношении (2.7.12) в полной мере. Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $\mathbb{S}_K$ условимся обозначать множество всех упорядоченных пар

$$(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1, |K|}}) \in (bi)[K] \times X^{|K|},$$

для каждой из которых

$$(x_i)_{i \in \overline{1, |K|}} \in \prod_{i=1}^{|K|} M_{\alpha(i)}.$$

Данное множество непусто и конечно.

Итак, если $s \in \overline{2, N}$, $x \in X$ и $K \in \mathbb{N}_s$, то в качестве требуемой версии укороченной задачи мы рассматриваем следующую:

$$\mathbf{c}(x, x_1) + \sum_{j=1}^{|K|-1} \mathbf{c}(x_j, x_{j+1}) \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1, |K|}}) \in \mathbb{S}_K. \tag{2.8.6}$$

Экстремум задачи (2.8.6) обозначаем через $v_s(x, K)$, т.е.

$$v_s(x, K) = \min_{(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1, |K|}}) \in \mathbb{S}_K} [\mathbf{c}(x, x_1) + \sum_{j=1}^{|K|-1} \mathbf{c}(x_j, x_{j+1})] \in \mathbb{R}. \tag{2.8.7}$$

Итак, в согласии с (2.8.6) и (2.8.7) мы при $s \in \overline{2, N}$ ввели фактически функцию

$$v_s \, : \, X \times \mathbb{N}_s \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{2.8.8}$$

значения которой определены в (2.8.7). Учитывая, кроме того, (2.8.3) и (2.8.5), мы получили функции (2.8.8) при любом значении $s \in \overline{0, N}$. Эти функции v_0, v_1, ..., v_N именуем слоями функции Беллмана (в сравнении с вариантом МДП разд. 2.5 мы ввели эти слои несколько избыточно, и в дальнейшем упомянутые слои будут несколько "сокращены" в смысле соответствующей области определения нужного фрагмента функции Беллмана).

Предложение 2.8.1. *Если $s \in \overline{1, N}$, $x \in X$ и $K \in \mathbb{N}_s$, то*

$$v_s(x, K) = \min_{k \in K} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + v_{s-1}(y, K \backslash \{k\})].$$

Доказательство мы предоставляем читателю в качестве упражнения (см. [16])

Заметим, однако, что функции $v_s, \;\; s \in \overline{0, N}$ вида (2.8.8) содержат избыточную, в некотором естественном смысле, информацию о поведении экстремумов и решений, их доставляющих. Дело в том, что для наших целей (как и в ЗК) достаточны на самом деле некоторые сужения этих функций. Для построения требуемых сужений мы сначала введем некоторые слои, подобные (2.3.8) – (2.3.10), в пространстве позиций $(x, K), \;\; x \in X, \;\; K \in \mathbb{N}$. С этой целью полагаем

$$\mathbf{D}_0 \stackrel{\triangle}{=} (\bigcup_{i=1}^{N} M_i) \times \mathbb{N}_0 = \{(x, \varnothing) \, : \, x \in \bigcup_{i=1}^{N} M_i\}, \tag{2.8.9}$$

$$\mathbf{D}_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathbb{N}_s} \{(x, K) \, : \, x \in \bigcup_{l \in \overline{1, N} \backslash K} M_l\} \quad \forall s \in \overline{1, N-1}, \tag{2.8.10}$$

$$\mathbf{D}_N \stackrel{\triangle}{=} \{(x^0, \overline{1, N})\}. \tag{2.8.11}$$

Полезно сравнить (2.8.9) – (2.8.11) с (2.3.8) – (2.3.10). Каждый из слоев $\mathbf{D}_s, \;\; s \in \overline{0, N}$, – непустое п/м множества $X \times \mathbb{N}$. С учетом этого мы при каждом $s \in \overline{0, N}$ вводим функцию

$$\mathbf{v}_s \, : \, \mathbf{D}_s \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.8.12}$$

по следующему естественному правилу:

$$\mathbf{v}_s(x, K) \stackrel{\triangle}{=} v_s(x, K) \quad \forall (x, K) \in \mathbf{D}_s. \tag{2.8.13}$$

В (2.8.12), (2.8.13) мы имеем корректно определенные сужения "первоначальных" функций $v_0, v_1, ..., v_N$. В связи с применением предложения 2.8.1 к построению функций (2.8.12), (2.8.13) отметим следующее очевидное

Свойство. *Если* $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in \mathbf{D}_s$, $k \in K$ *и* $y \in M_k$, *то*

$$(y, K \setminus \{k\}) \in \mathbf{D}_{s-1}. \tag{2.8.14}$$

Мы имеем в виду, что $k \in \overline{1, N} \setminus (K \setminus \{k\})$. С учетом предложения 2.8.1, (2.8.12) – (2.8.14) мы получаем следующее очевидное

Предложение 2.8.2. *Если* $s \in \overline{1, N}$ *и* $(x, K) \in \mathbf{D}_s$, *то*

$$\mathbf{v}_s(x, K) = \min_{k \in K} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathbf{v}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})].$$

Предложение 2.8.2 определяет более простой (в сравнении с предложением 2.8.1) вариант построения функции Беллмана.

Сначала определяется функция $\mathbf{v}_0 : \mathbf{D}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, тождественно равная нулю: $\mathbf{v}_0(x, K) = 0 \ \forall (x, K) \in \mathbf{D}_0$. Далее, если уже построены функции

$$\mathbf{v}_0 : \mathbf{D}_0 \longrightarrow \mathbb{R}, ..., \mathbf{v}_m : \mathbf{D}_m \longrightarrow \mathbb{R},$$

где $m \in \overline{0, N-1}$, то функция

$$\mathbf{v}_{m+1} : \mathbf{D}_{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

определяется из предложения 2.8.2 при $s = m+1$. Таким образом, уравнение Беллмана определяет в явном виде преобразование

$$\mathbf{v}_m \longrightarrow \mathbf{v}_{m+1}.$$

После исполнения конечного числа шагов мы получаем

$$\mathbf{v}_N(x^0, \overline{1, N}) = v_N(x^0, \overline{1, N}),$$

т.е. экстремум нашей основной задачи: $\mathcal{V} = v_N(x^0, \overline{1, N})$.

Нам осталось построить конкретный вариант реализации этого экстремума в виде пары "маршрут – трасса". Речь идет о построении какой-либо пары

$$(\alpha^0, (x_i^0)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathbf{S}_0. \tag{2.8.15}$$

Данное построение мы проведем схематично, имея в виду аналогию со случаем ЗК.

Итак, из предложения 2.8.2 имеем, в частности, равенство

$$\mathcal{V} = \min_{k \in \overline{1,N}} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x^0, y) + \mathbf{v}_{N-1}(y, \overline{1,N} \setminus \{k\})]. \tag{2.8.16}$$

Выбираем (см. (2.8.16)) $\eta_1 \in \overline{1,N}$ и $z_1 \in M_{\eta_1}$ так, что при этом

$$\mathcal{V} = \mathbf{c}(x^0, z_1) + \mathbf{v}_{N-1}(z_1, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}). \tag{2.8.17}$$

Далее мы перемещаемся в позицию

$$(z_1, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) \in \mathbf{D}_{n-1}$$

(см. (2.8.14)). В силу предложения 2.8.2 имеем равенство

$$\mathbf{v}_{N-1}(z_1, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \min_{k \in \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(z_1, y) +$$

$$+ \mathbf{v}_{N-2}(y, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; k\})].$$

С учетом этого равенства выбираем $\eta_2 \in \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}$ и $z_2 \in M_{\eta_2}$ так, что при этом

$$\mathbf{v}_{N-1}(z_1, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(z_1, z_2) + \mathbf{v}_{N-2}(z_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \tag{2.8.18}$$

Заметим, кстати, что из (2.8.17) и (2.8.18), в частности, следует равенство

$$\mathcal{V} = \mathbf{c}(x^0, z_1) + \mathbf{c}(z_1, z_2) + \mathbf{v}_{N-2}(z_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \tag{2.8.19}$$

В (2.8.19) два первых слагаемых характеризуют “уже случившиеся” потери на перемещения

$$x^0 \longrightarrow (z_1 \in M_{\eta_1}) \longrightarrow (z_2 \in M_{\eta_2}),$$

а третье слагаемое определяет оптимальные потери в будущем для позиции $(z_2, \overline{1,N} \setminus \{z_1; z_2\})$. Пусть теперь $r \in \overline{2,N}$ и уже построены наборы

$$(\eta_i)_{i \in \overline{1,r}} : \overline{1,r} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{2.8.20}$$

$$(z_i)_{i \in \overline{1,r}} \in \prod_{i=1}^{r} M_{\eta_i}, \tag{2.8.21}$$

обладающие следующими свойствами:

1) $\eta_i \neq \eta_j \ \forall i \in \overline{1,r} \, \forall j \in \overline{1,r} \setminus \{i\}$;

2) $\mathbf{v}_{N-k}(z_k, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,k}\}) = \mathbf{c}(z_k, z_{k+1}) +$
$+ \mathbf{v}_{N-(k+1)}(z_{k+1}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,k+1}\}) \quad \forall k \in \overline{1,r-1}$;

3) $\mathcal{V} = \mathbf{c}(x^0, z_1) + \sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{c}(z_i, z_{i+1}) +$

$$+ \mathbf{v}_{N-r}(z_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,r}\}). \tag{2.8.22}$$

Если при этом $r = N$, то по свойствам функции $\mathbf{v}_0$ можно полагать процесс построения завершенным, поскольку (см. (1.1.24)) в данном случае $(\eta_i)_{i \in \overline{1,r}} = (\eta)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}$,

$$(z_i)_{i \in \overline{1,r}} = (z_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\eta_i},$$

$$\mathcal{V} = \mathbf{c}(x^0, z_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(z_i, z_{i+1}) = \Pi[(z_i)_{i \in \overline{1,N}}]; \tag{2.8.23}$$

разумеется

$$((\eta_i)_{i \in \overline{1,r}}, (z_i)_{i \in \overline{1,r}}) = ((\eta_i)_{i \in \overline{1,N}}, (z_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}_0, \tag{2.8.24}$$

что означает оптимальность построенной пары маршрут – трасса.

Пусть теперь $r \in \overline{2, N-1}$. Тогда $N - r \in \overline{1, N-2}$ и

$$(z_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,r}\}) \in \mathbf{D}_{N-r}.$$

Поэтому $N - (r+1) \in \overline{0, N-3}$. В силу предложения 2.8.2 получаем равенство

$$\mathbf{v}_{N-r}(z_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i \ : \ i \in \overline{1,r}\}) =$$
$$= \min_{k \in \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,r}\}} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(z_r, y) +$$
$$+ \mathbf{v}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1,N} \setminus \{\eta_i \ : \ i \in \overline{1,r}\}) \setminus \{k\})].$$

С учетом данного равенства выбираем $\eta_{r+1} \in \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \in \overline{1,r}\}$ и $z_{r+1} \in M_{\eta_{r+1}}$ так, что при этом

$$\mathbf{v}_{N-r}(z_r, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i \ : \ i \in \overline{1,r}\}) =$$
$$= \mathbf{c}(z_r, z_{r+1}) + \mathbf{v}_{N-(r+1)}(z_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i \ : \ i \in \overline{1,r+1}\}). \tag{2.8.25}$$

У нас построены, стало быть, наборы

$$(\eta_i)_{i \in \overline{1,r+1}} \ : \ \overline{1, r+1} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{2.8.26}$$

$$(z_i)_{i \in \overline{1,r+1}} \in \prod_{i=1}^{r+1} M_{\eta_i}, \tag{2.8.27}$$

для которых по способу построения выполнены следующие три условия:

1′) $\eta_i \neq \eta_j \ \forall i \in \overline{1, r+1} \, \forall j \in \overline{1, r+1} \setminus \{i\}$;

2′) $\mathbf{v}_{N-k}(z_k, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,k}\}) = \mathbf{c}(z_k, z_{k+1}) +$
$+ \mathbf{v}_{N-(k+1)}(z_{k+1}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1,k+1}\}) \quad \forall k \in \overline{1,r}$;

3′) $\mathcal{V} = \mathbf{c}(x^0, z_1) + \sum_{i=1}^{r} \mathbf{c}(z_i, z_{i+1}) +$

$$+\mathbf{v}_{N-(r+1)}(z_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\eta_i : i \in \overline{1, r+1}\}). \tag{2.8.28}$$

В этой связи отметим только, что 3′) легко извлекается из 3) и (2.8.25). Итак, мы смогли продолжить набор (2.8.20) до набора (2.8.26) и набор (2.8.21) – до набора (2.8.27) с сохранением их основных свойств: 1) $\longrightarrow$ 1′), 2) $\longrightarrow$ 2′), 3) $\longrightarrow$ 3′).

После конечного числа таких (регулярных) шагов мы приходим к ситуации, обсуждаемой в (2.8.23), (2.8.24), что означает построение оптимального решения. Следовательно, у нас будут построены маршрут

$$\alpha_0 = (\eta_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P} \tag{2.8.29}$$

и трасса

$$(z_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha_0(i)}, \tag{2.8.30}$$

согласующаяся с маршрутом (2.8.29), для которых

$$\mathbf{c}(x^0, z_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(z_i, z_{i+1}) = \mathcal{V}; \tag{2.8.31}$$

равенство (2.8.31) извлекается из (2.8.28) при условии $r = N - 1$, соответствующем финалу нашей процедуры. Разумеется, из (2.8.24), (2.8.29), (2.8.30) мы имеем свойство

$$(\alpha_0, (z_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S},$$

т.е. решение (2.8.29)–(2.8.31) является допустимым, а тогда (см. (2.7.4), (2.7.6) и (2.8.31))

$$\Pi[(z_i)_{i \in \overline{1,N}}] = \mathcal{V}$$

и, как следствие, $(\alpha_0, (z_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}_0$. Наша задача (2.7.12) полностью решена.

Комментарий. Напомним, что рассматриваемая сейчас задача является развитием хорошо известной ЗК, которая обсуждалась в начале работы. Достаточно полный обзор подходов к решению ЗК можно найти в [5, 27, 44]; там же рассматриваются многочисленные задачи дискретной оптимизации, в той или иной степени близкие по постановке к ЗК (см. [25]). В настоящее время имеется очень много публикаций по методам решения ЗК, которая справедливо считается одной из наиболее трудных в вычислительном отношении задач дискретной оптимизации. Мы не имеем здесь возможности дать достаточно полный обзор публикаций в этом направлении и отсылаем заинтересованного читателя к [5, 27, 44]. Отметим только, что данной задаче был посвящен обстоятельный доклад [63] на Всемирном конгрессе математиков в Берлине (август 1998 года), где наряду с общими методами было продемонстрировано решение конкретного варианта ЗК (N=13509); позднее было получено решение задачи, когда N превосходит 20000. Напомним [12], что ЗК является одной из классических NP – полных задач; для нее не известны какие-либо полиномиальные алгоритмы решения (имеются в виду алгоритмы, допускающие полиномиальную оценку временных затрат); разумеется, здесь речь идет о точных алгоритмах. Еще более трудной представляется задача последовательного обхода множеств, рассматриваемая в двух последних разделах.

В связи с этой задачей см., в частности, [23, 61, 62], где задача, имеющая смысл задачи последовательного обхода множеств, рассматривалась на основе своеобразной "кластеризации" ЗК (отметим, что в [25] используется термин "ЗК с выбором"). К этому циклу работ примыкают объективно работы [16], [17] (в [17] исследовалась задача о посещении системы множеств несколькими участниками). Позднее рассматривались варианты МДП и другие методы решения для задачи, которая, в свою очередь, обобщает упомянутую задачу последовательного обхода множеств; эту более общую задачу, по существу, можно интерпретировать как задачу последовательного обхода сечений многозначных отображений (см., например, [52], [13, 19, 59]; см. также [56, §2.1]).

Глава 3

Метод итераций для решения задачи последовательного обхода множеств

Настоящая глава является логическим продолжением двух последних разделов предыдущей главы. В них рассматривался естественный подход к исследованию задачи, являющейся обобщением ЗК, решению которой посвящена большая часть предыдущей главы. Основная для настоящей главы задача — задача последовательного обхода множеств (ПОМ) или обобщенная ЗК — рассматривалась во многих работах, в логическом отношении связанных с исследованиями [23, 61, 62]; последние касаются своеобразной "кластеризации" ЗК (в терминологии [25] — ЗК с выбором; в связи с этой задачей см. также [26]). Из публикаций, посвященных вышеупомянутой задаче ПОМ, интерпретируемой как дискретно-непрерывная задача оптимизации с зависимыми (связанными) переменными, отметим сейчас [13, 16, 17, 18, 19, 52, 53, 58, 59]. Краткому изложению одного из методов решения задачи ПОМ (вариант МДП) посвящен разд. 7 предыдущей главы (более подробное изложение такого рода конструкций см. в [16, 17, 18, 52, 58, 59]) . Речь идет о модификации МДП, который для случая решения ЗК был предложен в [5, 44]. В настоящей главе мы не рассматриваем требуемую версию МДП специально. Она, однако, может использоваться (даже в варианте [5, 44]) на отдельных этапах итерационной процедуры решения задачи ПОМ в духе [53]. Кроме того, в упомянутой итерационной процедуре может использоваться и традиционная [6, 7] "немаршрутная" версия МДП.

Из других методов решения ЗК, имеющих отношение к нашему подходу, отметим хорошо известный метод ветвей и границ [1] (см. также [25, 26, 37] и библиографию к [25, 26, 37]), процедуры последовательного анализа вариантов с отсечениями [11].

Сущность исследуемой далее задачи состоит в следующем (см. разд. 2.7 и 2.8). Имеется конечный набор попарно непересекающихся множеств (в простейшем случае – конечных; см., например, разд. 2.7 и 2.8 предыдущей главы) и заданное начальное состояние. Требуется организовать систему перемещений(из упомянутого начального состояния) по множествам, посещая каждое ровно один раз. Перемещения сопровождаются затратами (временными, материальными, финансовыми и т.д.), которые суммируются. Требуется найти способ выбора очередности посещений (маршрут) и вариант самих посещений (трассу) по заданному маршруту так, чтобы минимизировать суммарные затраты.

Мы выделяем у получающегося "совокупного" решения дискретную и потенциально непрерывную компоненты. Первая компонента является у нас всякий раз перестановкой индексов из заданного конечного множества, в качестве которого удобно использовать конечный отрезок натурального ряда. Вторая — конечным набором точек из занумерованных (целевых) множеств. Возможности выбора упомянутого набора зависят от способа нумерации, далее именуемого маршрутом. Решение, стало быть, является парой "маршрут–трасса". Из приведенных выше рассуждений видно, что компоненты такого рода пар следует рассматривать как зависимые переменные, а сама задача минимизации суммарных затрат имеет в качестве множества допустимых решений подмножество декартова произведения, т.е. отношение.

Настоящая задача является, как уже отмечалось, многозначной версией традиционно рассматриваемой ЗК. В принципе для построения решения задачи ПОМ можно использовать вариант МДП, построенный в заключительных разделах главы 2. Возникают, однако, серьезные затруднения вычислительного характера. Так, в частности, построение пары маршрут-трасса следует осуществлять (в духе упомянутого варианта МДП) без использования декомпозиции: "выращивать" маршрут и трассу следует синхронно. Это требует предварительного насчитывания "большого" массива значений функции Беллмана, что, в свою очередь, требует соответствующих ресурсов ЭВМ. Обычная ЗК в этом смысле решается проще, хотя и она, как известно [12], является труднорешаемой. Более простой представляется задача о выборе трассы посещения занумерованных так или иначе множеств. Следовательно, соображения, связанные с вычислительной реализацией, делают целесообразным специальное изучение декомпозиции основной задачи ПОМ в совокупность двух естественных задач: ЗК и задачи о выборе трассы посещения занумерованных множеств. Последнюю экстремальную задачу также называют маршрутной (отметим в этой связи некоторые работы в области решения задач последовательного управления [8, 9, 10]); однако данная задача представляется все же более простой в сравнении с задачей

ПОМ, рассматриваемой в заключительной части предыдущей главы.

В этой связи представляется естественным подход к построению решения с использованием метода итераций, в рамках которого можно было бы реализовать элементы декомпозиций вышеупомянутого типа. Реализации этой цели посвящена большая часть настоящей главы. В свою очередь, используемый ниже метод итераций с перестраиваемой моделью ЗК предусматривает некоторые предваряющие построения, связанные с исследованием структуры задачи ПОМ, которая является оптимизационной задачей с зависимыми (связанными) переменными. В этой связи в настоящей главе осуществляется построение эквивалентной экстремальной задачи с независимыми переменными, в основе которой находится естественная задача реконструкции (ЗР): речь идет о размещении городов на целевых множествах в интересах получения наилучшего результата при последующем решении ЗК для упомянутой системы городов. Оказывается, что задача, получаемая после преобразования исходной задачи ПОМ, допускает, в частности, применение хорошо известного в теории экстремальных задач метода покоординатного спуска. Есть, однако, одна особенность: при построении метода итераций оказывается удобным работать с парой экстремальных задач (исходной и преобразованной), находящихся в естественной двойственности, а не с одной какой-либо из этих задач.

3.1. Постановка задачи

В настоящем разделе будет приведена математическая постановка задачи, которая (на содержательном уровне) обсуждалась в конце предыдущей главы. Нам потребуется для этого сводка обозначений, приведенная в первой главе. Некоторые из этих обозначений напомним.

Напомним некоторые понятия главы 1. Мы применяем, как и ранее, кванторы, связки, специальные символы def (по определению) и $\stackrel{\triangle}{=}$ (равно по определению). Если x — какой-либо объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x. Если u и v — объекты, то (см. §1.1) $\{u; v\} = \{u\} \bigcup \{v\}$ есть неупорядоченная пара объектов u, v; см. также [57, с. 11]. Отметим, что в аксиоматической теории множеств упорядоченная пара произвольных объектов μ и ν определяется в виде $(\mu, \nu) = \{\{\mu\}; \{\mu, \nu\}\}$ (см. общее построение в [22], а также [57, с. 11]). Для нас существенно основное свойство упорядоченных пар (см. (1.1.1)): если p, q, y, z — объекты, то $(p, q) = (y, z)$, если и только если $p = y$ и $q = z$; см. предложение 1.1 в [57]. В этой связи удобно использовать соглашение §1.1: если h — упорядоченная пара каких-либо объектов x и y, т.е. $h = (x, y)$, то через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаются сами эти объекты (определяемые по h единственным образом), т.е. $pr_1(h) = x$ и $pr_2(h) = y$. Здесь мы оперируем упорядоченной парой h как единым целым, рассматривая $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ как компоненты этого единого целого h. Как обычно, используем соглашение: если A и B — непустые множества,

$$f\ :\ A \times B \longrightarrow \mathbb{R},$$

$x \in A$ и $y \in B$, то $f(x, y) \stackrel{\triangle}{=} f((x, y))$.

Напомним, что, как и ранее (см. главу 1), $\mathcal{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; ...\}$ есть множество всех натуральных чисел. Если $m \in \mathcal{N}$, то

$$\overline{1, m} = \{i \in \mathcal{N} | i \leq m\}.$$

Все промежутки вещественной прямой $\mathbb{R}$ обозначаются квадратными скобками (см. [57, с. 45]). Так, например, нам потребуется

$$[0, \infty[= \{\xi \in \mathbb{R}\,|\,0 \leq \xi\}.$$

Если K — непустое конечное множество, то через $|K|$, $|K| \in \mathcal{N}$, обозначается (см. главу 1) мощность K. т.е. количество элементов этого множества; $(bi)[K]$ есть множество всех биекций "отрезка" $\overline{1, |K|}$ на K, т.е. множество всех взаимно однозначных отображений $\overline{1, |K|}$ на K; при этом, разумеется, $\forall \mathbf{b} \in (bi)[K]\ \forall k \in K\ \ \exists i \in \overline{1, |K|}\ :\ k = \mathbf{b}(i)$.

Фиксируем, как и ранее, непустое множество X произвольной природы; тогда $\mathrm{Fin}(X)$ является (см. главу 1) семейством всех непустых конечных п/м множества X. Фиксируем, как и ранее, элемент

$$x^0 \in X \tag{3.1.1}$$

(базу), рассматривая его как начальное состояние при решении всех последующих задач маршрутной оптимизации. Пусть, кроме того,

$$N \in \mathcal{N} : 2 \leq N; \tag{3.1.2}$$

N (3.1.2) определяет в дальнейшем количество целевых множеств, подлежащих посещению, реализуемому посредством выбора маршрута (перестановки чисел из $\overline{1, N}$) и трассы "путешествия" по множествам из начального состояния (3.1.1). Данные множества будем предполагать конечными, т.е. элементами семейства $\mathrm{Fin}(X)$. Итак, пусть задан кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}}\ :\ \overline{1, N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X); \tag{3.1.3}$$

иными словами, в (3.1.3) речь идет об упорядоченном наборе из N множеств, обозначенных через $M_1, ..., M_N$. Всюду в дальнейшем полагаем (как и ранее, в предыдущей главе), что

$$(x^0 \notin \bigcup_{i=1}^{N} M_i)\&(M_{i_1} \bigcap M_{i_2} = \varnothing \quad \forall i_1 \in \overline{1,N}\ i_2 \in \overline{1,N} \setminus \{i_1\}). \tag{3.1.4}$$

Итак, начальное состояние (3.1.1) не принадлежит ни одному из целевых множеств $M_1, ..., M_N$. Эти множества, кроме того, попарно не пересекаются.

Напомним также, что $\mathbb{P}$ есть множество всех перестановок чисел из $\overline{1,N}$, т.е. есть $\mathbb{P} = (bi)[\overline{1,N}]$. Наша цель связана, как уже отмечалось, с осуществлением "совместного" выбора перестановки $\beta \in \mathbb{P}$ и трассы

$$x^0 \longrightarrow (x_1 \in M_{\beta(1)}) \longrightarrow ... \longrightarrow (x_N \in M_{\beta(N)}). \tag{3.1.5}$$

Получающаяся при этом упорядоченная пара

$$(\beta,\ (x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \tag{3.1.6}$$

именуется парой маршрут-трасса. Предполагается, что нам доступен выбор любой пары (3.1.6) со свойством (3.1.5). Результаты этого выбора будем оценивать некоторым критерием, включающим две компоненты: "интегральную" и терминальную.

Фиксируем в дальнейшем следующие две функции:

$$\mathbf{c} : X \times X \longrightarrow [0, \infty[, \quad \mathbf{f} : X \longrightarrow [0, \infty[. \tag{3.1.7}$$

Разумеется, определяя эти функции на $X \times X$ и на X соответственно, мы действуем с некоторым избытком, т.е. нам достаточно оценить только перемещения вида (3.1.5). Для этого достаточно вычислить значения $\mathbf{c}(x^0, x_i)$, где $i \in \overline{1,N}$ и $x_i \in M_i$, а также $\mathbf{c}(x_p, x_q)$, где

$$p \in \overline{1,N},\ \ q \in \overline{1,N},\ \ x_p \in M_p,\ \ x_q \in M_q;$$

соответственно, вторая в (3.1.7) функция будет "всего лишь" оценивать состояния $x \in M_j$, где $j \in \overline{1,N}$, в виде чисел $\mathbf{f}(x)$. Мы, однако, сохраняем (3.1.7) в несколько избыточном варианте, чтобы не усложнять обозначений.

Замечание 3.1.1. *С точки зрения решаемой задачи можно вообще ограничиться случаем, когда*

$$X = \{x^0\} \bigcup (\bigcup_{i=1}^{N} M_i).$$

В этом случае определение (3.1.7) уже избыточным не является. Мы, однако, требуем только выполнения соотношений (3.1.3) и (3.1.4).

Введем критерий рассматриваемой далее весьма общей маршрутной задачи. Для этого нам следует прежде указать в точном виде область определения данного критерия. Если $k \in \mathcal{N}$, то через X^k обозначается (см. раздел 1.1) множество всех наборов

$$(x_i)_{i\in\overline{1,k}} : \overline{1,k} \longrightarrow X.$$

Напомним здесь же, что (см. (2.7.11))

$$\mathbf{S} \stackrel{\triangle}{=} \{(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbb{P} \times X^N \mid (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P} \times X^N) \quad (3.1.8)$$

(множество $\mathbf{S}$ непусто, т.к. $\mathbb{P} \neq \varnothing$, и множества $M_1, ..., M_N$, упомянутые в (3.1.3), также являются непустыми). Кроме того, отметим, что в силу (3.1.3) и конечности множества $\mathbb{P}$ множество (3.1.8) конечно. Итак, у нас $\mathbf{S}$ (3.1.8) — непустое конечное множество, элементами которого являются пары маршрут-трасса.

Приступим к непосредственному определению критерия в терминах отображений (3.1.7). Для этого предварительно введем отображение

$$\Pi : X^N \longrightarrow [0, \infty[\quad (3.1.9)$$

по следующему правилу: если $(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in X^N$, то (в дальнейшем)

$$\Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}(x^0, x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}) + \mathbf{f}(x_N). \quad (3.1.10)$$

С отображением (3.1.9), (3.1.10) можно связать естественное представление об оптимальности в задаче, где допустимо выбирать перестановку $\beta \in \mathbb{P}$ и трассу из непустого конечного множества

$$\prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}. \quad (3.1.11)$$

Именно, в качестве желаемого экстремума разумно принять величину

$$V \stackrel{\triangle}{=} \min_{\beta\in\mathbb{P}} \min_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in [0, \infty[. \quad (3.1.12)$$

Экстремум (3.1.12) отражает следующую естественную логику принятия решения “по частям”: сначала выбирается перестановка $\beta \in \mathbb{P}$, чем определяется запас (3.1.11) всех возможных при данном способе нумерации множеств трасс; затем осуществляется конкретный выбор трассы из множества

(3.1.11). Разумеется, и выбор перестановки, и выбор трассы следует подчинить идее минимизации значений отображения (3.1.9), (3.1.10) "в пределах возможного".

Полезно, однако, взглянуть на нашу проблему несколько иначе, имея в виду то обстоятельство, что в конце концов нам надлежит выбрать пару

$$(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}, \tag{3.1.13}$$

именуемую, как уже отмечалось, парой маршрут-трасса. Дело в том, что в рассуждении, приводящем к (3.1.11), выбор точки множества (3.1.11) (т.е. выбор трассы, допустимой в условиях нумерации множеств по принципу β) приводит объективно (см. (3.1.8)) к паре (3.1.13), которую и следует трактовать как совокупное решение. С другой стороны, если таковое решение (3.1.13) каким-то образом "случилось", то, используя (3.1.8), его можно истолковать как сформированное "по частям", когда сначала выбирался маршрут, а затем — трасса, не противоречащая этому маршруту.

С учетом этих соображений мы можем, конечно, представлять себе выбор решения как выбор точки (элемента)

$$\mathbf{s} \in \mathbf{S}. \tag{3.1.14}$$

Множество $\mathbf{S}$ является отношением (см. главу 1), т.е. множеством, составленным из упорядоченных пар, для каждой из которых ранее был указан способ расщепления на компоненты (подробнее см. [57, с. 17,18]. Этот способ позволяет придти к представлению (3.1.13). Именно, имея упорядоченную пару $\mathbf{s}$ (3.1.14), мы можем ввести ее компоненты

$$\beta = pr_1(\mathbf{s}), \quad (x_i)_{i\in\overline{1,N}} = pr_2(\mathbf{s}), \tag{3.1.15}$$

где $\beta \in \mathbb{P}$, а $(x_i)_{i\in\overline{1,N}}$ — элемент множества (3.1.11). Последнее связано с тем, что в силу (3.1.8)

$$\mathbf{S} \subset \mathbb{P} \times X^N,$$

а поэтому первая компонента $\mathbf{s}$ (3.1.14), т.е. β в (3.1.15), обязана быть перестановкой в $\overline{1,N}$, т.е. элементом $\mathbb{P}$, а вторая компонента — элементом X^N, т.е. набором N точек множества X. Представление (3.1.8) требует, однако, от второй компоненты $\mathbf{s}$ (3.1.14) большего; именно, упомянутая вторая компонента $\mathbf{s}$ (3.1.14) обязана принадлежать множеству (3.1.11). Теперь введем критерий основной задачи как отображение

$$\pi : \mathbf{S} \longrightarrow [0, \infty[, \tag{3.1.16}$$

действующее по следующему правилу: если $\mathbf{s}$ соответствует (3.1.14), а β и $(x_i)_{i\in\overline{1,N}}$ определяются (по $\mathbf{s}$ (3.1.14)) посредством (3.1.15), то (в дальнейшем)

$$\pi(\mathbf{s}) \stackrel{\triangle}{=} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.1.17}$$

Итак, каждой упорядоченной паре (3.1.14) мы сопоставляем число, зависящее только от ее второй компоненты. Из (3.1.10) и (3.1.17) следует, что фактически π может рассматриваться как сужение отображения Π; несущественные изменения в данном толковании связаны с соображениями методического характера.

Основная задача состоит в следующем:

$$\pi(\mathbf{s}) \longrightarrow \min, \qquad \mathbf{s} \in \mathbf{S}. \tag{3.1.18}$$

Этой задаче можно, конечно, придать вид, более соответствующий (3.1.12), (3.1.17). Для этого достаточно учесть хорошо известное соглашение [24, с.41], позволяющее толковать функцию двух переменных, по сути дела, как функцию одного переменного, которое, однако, является упорядоченной парой. Тогда для $\beta \in \mathbb{P}$ и $(x_i)_{i\in\overline{1,N}}$ из множества (3.1.11) мы, учитывая (3.1.13) и правило (3.1.17), имеем

$$\pi(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \pi((\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}})) = \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}), \tag{3.1.19}$$

где соглашение (3.1.15) использовано в интерпретации $\mathbf{s}$ (3.1.14) как упорядоченной пары (3.1.13). С формальной точки зрения соглашение (3.1.19) есть обычное правило экономии скобок. Указание β в левой части (3.1.19) существенно для того, чтобы знать “пределы” возможного выбора $(x_i)_{i\in\overline{1,N}}$; эти “пределы” устанавливаются в (3.1.8). Задача (3.1.18) может теперь (см. (3.1.19)) быть переписана в виде

$$\pi(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \qquad (\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{3.1.20}$$

При этом, конечно, у нас действует правило (см. (3.1.10), (3.1.17)): если β и $(x_i)_{i\in\overline{1,N}}$ “в своей совокупности” образуют упорядоченную пару (3.1.13), то

$$\pi(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathbf{c}(x^0, x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}) + \mathbf{f}(x_N). \tag{3.1.21}$$

С учетом (3.1.12) и (3.1.21) получаем следующую цепочку равенств

$$\min_{\mathbf{s}\in\mathbf{S}} \pi(\mathbf{s}) = \min_{(\beta,(x_i)_{i\in\overline{1,N}})\in\mathbf{S}} \pi(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \min_{(\beta,(x_i)_{i\in\overline{1,N}})\in\mathbf{S}} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) =$$

$$= \min_{\beta \in \mathbb{P}} \min_{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\beta(i)}} \Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}) = V. \tag{3.1.22}$$

Замечание 3.1.2. *Проверим* (3.1.22). *Если* $s_* \in \mathbf{S}$, *то в согласии с* (3.1.8) *имеем*

$$\beta_* \triangleq pr_1(s_*) \in \mathbb{P}, \ \ (x_i^*)_{i \in \overline{1,N}} \triangleq pr_2(s_*) \in X^N,$$

причем (см. (3.1.8)) справедливо включение

$$(x_i^*)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\beta_*(i)}.$$

Тогда с учетом (3.1.17) мы имеем

$$\pi(s_*) = \Pi((x_i^*)_{i \in \overline{1,N}}) \geq \min_{(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\beta(i)}} \Pi((y_i)_{i \in \overline{1,N}}) \geq V. \tag{3.1.23}$$

Поскольку выбор s_* был произвольным, из (3.1.23) имеем неравенство

$$V \leq \min_{s \in \mathbf{S}} \pi(s). \tag{3.1.24}$$

Пусть теперь $s^\natural \in \mathbf{S}$ – оптимальное решение задачи (3.1.18), т.е.

$$\pi(s^\natural) = \min_{s \in \mathbf{S}} \pi(s). \tag{3.1.25}$$

Согласно (3.1.8) имеет место

$$\beta^\natural \triangleq pr_1(s^\natural) \in \mathbb{P}, \ \ (x_i^\natural)_{i \in \overline{1,N}} \triangleq pr_2(s^\natural) \in \prod_{i=1}^N M_{\beta^\natural(i)}, \tag{3.1.26}$$

а тогда с учетом (3.1.12) имеем цепочку неравенств

$$V \leq \min_{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\beta^\natural(i)}} \Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \leq \Pi((x_i^\natural)_{i \in \overline{1,N}}). \tag{3.1.27}$$

Но в силу (3.1.26) $s^\natural = (\beta, (x_i^\natural)_{i \in \overline{1,N}})$ и согласно (3.1.17)

$$\pi(s^\natural) = \Pi((x_i^\natural)_{i \in \overline{1,N}}).$$

Тогда из (3.1.25), (3.1.27) мы имеем оценку

$$V \leq \min_{s \in \mathbf{S}} \pi(s). \tag{3.1.28}$$

Из (3.1.24) и (3.1.28) получаем (3.1.22). $\square$

3.2. Эквивалентная задача реконструкции

Как видно из (3.1.22), наша основная задача (3.1.8), (3.1.20) есть задача на экстремум с зависимыми (связанными) переменными. Это обстоятельство легко усмотреть и в (3.1.12), поскольку внутренний экстремум вычисляется по множеству, зависящему от перестановки, используемой в качестве переменной при вычислении внешнего экстремума. Такая экстремальная задача вызывает при своем решении серьезные затруднения. В этой связи представляет определенный интерес преобразование задачи (3.1.18), (3.1.20) к такой форме, в которой экстремум вычислялся бы на произведении двух множеств. Итак, мы стремимся преобразовать нашу исходную задачу к задаче на экстремум с независимыми переменными. Для этого, однако, нужен другой взгляд на исходную маршрутную задачу.

Представим себе следующую (странную, быть может, на первый взгляд) ситуацию. Именно, нам требуется выбрать на множествах $M_i,\ i \in \overline{1,N}$, систему городов (см. [56]) так, чтобы при последующем оптимальном решении ЗК с этими городами достигалось бы наилучшее качество. При этом, конечно, мы сохраняем прежними целевые функции **c** и **f**, которые были использованы при определении критерия задачи (3.1.18), (3.1.20). Итак, наша новая постановка имеет смысл задачи реконструкции (ЗР). Проще говоря, речь идет о наилучшей подготовке условий для последующего решения ЗК; более точная постановка и последующее решение содержится в [53].

Введем в рассмотрение следующее множество – декартово произведение множеств $M_1, ..., M_N$:

$$\mathfrak{M} \stackrel{\triangle}{=} \prod_{i=1}^{N} M_i \tag{3.2.1}$$

есть множество всех кортежей

$$(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} \, : \, \overline{1,N} \longrightarrow X,$$

для каждого из которых

$$x^{(j)} \in M_j \qquad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{3.2.2}$$

Компоненты каждого кортежа – элемента множества (3.2.1) – имеют смысл городов в ЗК (см. [56]), причем (см. (3.2.2)) каждый из этих городов лежит на "своем" множестве:

$$x^{(1)} \in M_1, \ ..., \ x^{(N)} \in M_N.$$

Здесь мы имеем существенное отличие от конструкции задачи (3.1.18), (3.1.20), где узлы трассы выбирались из множеств, занумерованных предварительно посредством перестановки индексов (т.е. посредством того или иного маршрута).

Предполагается, что нам дано право выбрать и зафиксировать кортеж (систему городов)

$$(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \tag{3.2.3}$$

по своему усмотрению. Кортеж городов (3.2.3) дополняется базой x^0, после чего мы приступаем к решению ЗК с матрицей затрат, получающейся путем конкретизации значений функций $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$ в соответствии с выбором (3.2.3). Здесь полезно напомнить (3.1.4); как следствие имеем свойства:

$$x^{(i)} \neq x^0 \quad \forall i \in \overline{1,N}.$$

Теперь кортеж $(x^0, x^{(1)}, ..., x^{(n)})$ определяет ЗК в обычном смысле (см. главу 2): x^0 является базой, а города $x^{(1)}, ..., x^{(N)}$ должны быть тем или иным способом занумерованы. Последнее предполагает выбор некоторого маршрута $\lambda \in \mathbb{P}$. Иными словами, каждой перестановке $\lambda \in \mathbb{P}$ сопоставляется следующее значение потерь (затрат):

$$\mathbf{c}(x^0, x^{(\lambda(1))}) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x^{(\lambda(i))}, x^{(\lambda(i+1))}) + \mathbf{f}(x^{(\lambda(N))}) \in [0, \infty[.$$

Следовательно, у нас определен критерий вспомогательной ЗК: определено отображение

$$W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}] \,:\, \mathbb{P} \longrightarrow [0, \infty[\tag{3.2.4}$$

посредством следующего правила:

$$W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}(x^0, x^{(\lambda(1))}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x^{(\lambda(i))}, x^{(\lambda(i+1))}) + \mathbf{f}(x^{(\lambda(N))}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{P}. \tag{3.2.5}$$

Соответственно, ЗК с системой городов (3.2.3) имеет следующий вид

$$W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda) \longrightarrow \min, \quad \lambda \in \mathbb{P}. \tag{3.2.6}$$

Данной задаче можно сопоставить ее значение

$$(\mathrm{val})[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \min_{\lambda\in\mathbb{P}} W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda) \tag{3.2.7}$$

и непустое множество всех ее (оптимальных) решений

$$(\mathrm{sol})[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \{\lambda_0 \in \mathbb{P} \,|\, W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda_0) = (\mathrm{val})[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}]\}. \tag{3.2.8}$$

Элементы (3.2.8) суть оптимальные маршруты в ЗК с системой городов (3.2.3), и только они. Что же касается (3.2.7), то данную величину можно теперь принять за оценку качества самой системы (3.2.3). Иными словами, уже не фиксируя (3.2.3), мы можем ввести посредством отображения

$$(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} \longmapsto (\mathrm{val})[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}] \,:\, \mathfrak{M} \longrightarrow [0,\infty[\tag{3.2.9}$$

критерий новой экстремальной задачи, а именно — критерий следующей ЗР:

$$(\mathrm{val})[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}] \longrightarrow \min,\ \ (x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}. \tag{3.2.10}$$

Напомним, что множества $M_1, ..., M_N$ конечны в силу (3.1.3), а стало быть, и $\mathfrak{M}$ конечно, а это гарантирует достижимость экстремума в (3.2.10). Данной ЗР (3.2.10) отвечает значение (экстремум)

$$\mathbb{V} \overset{\triangle}{=} \min_{(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}} (\mathrm{val})[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}] \in [0,\infty[\tag{3.2.11}$$

и непустое множество решений

$$\mathrm{SOL} \overset{\triangle}{=} \{(x^{(i)}_{opt})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \,|\, (\mathrm{val})[(x^{(i)}_{opt})_{i\in\overline{1,N}}] = \mathbb{V}\}. \tag{3.2.12}$$

В связи с (3.2.7), (3.2.11) полезно отметить, что

$$\mathbb{V} = \min_{(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}} \min_{\lambda\in\mathbb{P}} W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda). \tag{3.2.13}$$

В связи с (3.2.13) имеет смысл ввести в рассмотрение функцию двух переменных

$$w \,:\, \mathfrak{M}\times\mathbb{P} \longrightarrow [0,\infty[\tag{3.2.14}$$

по правилу: если $z \in \mathfrak{M}\times\mathbb{P}$, $(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(z)$ и $\lambda \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(z)$, то

$$w(z) \overset{\triangle}{=} W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda). \tag{3.2.15}$$

Из (3.2.13) вытекает, что справедливо равенство

$$\mathbb{V} = \min_{z\in\mathfrak{M}\times\mathbb{P}} w(z). \tag{3.2.16}$$

Отметим, что $\mathfrak{M}\times\mathbb{P}$ — конечное множество, а потому экстремум в (3.2.16) действительно достигается.

Итак, (3.2.13) есть согласно (3.2.16) значение следующей экстремальной задачи:

$$w(z) \longrightarrow \min,\ \ z \in \mathfrak{M}\times\mathbb{P}. \tag{3.2.17}$$

В (3.2.17) мы имеем дальнейшее развитие весьма общего подхода на основе ЗР.

Введем теперь в дополнение к (3.2.16) множество всех решений задачи (3.2.17)

$$\mathbb{SOL} \triangleq \{z_0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P} \,|\, w(z_0) = \mathbb{V}\} \neq \varnothing. \tag{3.2.18}$$

Ниже мы установим тесную связь задачи (3.2.17) и основной маршрутной задачи. Экстремум последней определен в (3.1.22) в виде значения V; имеется в виду значение задачи (3.1.18), (3.1.20). Полагая, кроме того, что

$$\mathcal{SOL} \triangleq \{\mathbf{s} \in \mathbf{S} \,|\, \pi(\mathbf{s}) = V\}, \tag{3.2.19}$$

получаем множество всех (оптимальных) решений задачи (3.1.18), (3.1.20); в силу конечности множества $\mathbf{S}$ имеем свойство

$$\mathcal{SOL} \neq \varnothing. \tag{3.2.20}$$

Итак, исходная маршрутная задача характеризуется парой

$$(V, \mathcal{SOL}), \tag{3.2.21}$$

а вспомогательная задача (3.2.17) — парой

$$(\mathbb{V}, \mathbb{SOL}). \tag{3.2.22}$$

Мы устанавливаем связь (3.2.21), (3.2.22), используя одно простое алгебраическое преобразование с применением обратных перестановок. Напомним (см. (1.1.19)–(1.1.21)), что при $\beta \in \mathbb{P}$ через $\overset{-1}{\beta}$ обозначается перестановка, обратная по отношению к β, $\overset{-1}{\beta} \in \mathbb{P}$ и при этом

$$\beta(\overset{-1}{\beta}(i)) = \overset{-1}{\beta}(\beta(i)) = i. \tag{3.2.23}$$

Предложение 3.2.1. *Если* $\beta \in \mathbb{P}$, $(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}$, $b \triangleq \overset{-1}{\beta}$ *и* $j \in \overline{1,N}$, *то*

$$x_{b(j)} \in M_j.$$

Доказательство. Фиксируем β, $(x_i)_{i \in \overline{1,N}}$, b и j в соответствии с условиями. Тогда $k \triangleq b(j) \in \overline{1,N}$ есть некоторый индекс и по выбору $(x_i)_{i \in \overline{1,N}}$ имеет место включение

$$x_k \in M_{\beta(k)}. \tag{3.2.24}$$

С другой стороны, из (3.2.23) получаем, что

$$\beta(k) = \beta(b(j)) = j.$$

С учетом (3.2.24) мы выводим требуемое включение, т.к. $k = b(j)$ согласно последней цепочке равенств и (3.2.23); тогда $x_{b(j)} = x_k \in M_j$. $\square$

Содержательный смысл предложения очень прост: мы по заданной трассе, согласованной с маршрутом β, пытаемся конструировать систему городов в ЗР: если $\beta \in \mathbb{P}$, $(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}$, то при $b \triangleq \overset{-1}{\beta}$

$$(x_{b(i)})_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}; \tag{3.2.25}$$

(см. (3.2.1)). Если же набор городов (3.2.25) получен, то можно говорить о соответствующей ему версии ЗК; в числе возможных маршрутов находится, в частности, β, а тогда (при $b = \overset{-1}{\beta}$)

$$((x_{b(i)})_{i \in \overline{1,N}},\ \beta) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}. \tag{3.2.26}$$

Множество в правой части (3.2.26) в точности совпадает с областью определения функции (3.2.14) и, в отличие от $\mathbf{S}$ (3.1.8), является уже декартовым произведением двух конечных множеств (см. в этой связи задачу (3.2.17)). Построения (3.2.25), (3.2.26) выполнялись для зафиксированного решения

$$s = (\beta,\ (x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \tag{3.2.27}$$

основной задачи (3.1.18). Однако такие построения можно было бы осуществить для всех решений вида (3.2.27). Тогда на основе (3.2.25), (3.2.26) можно построить два полезных оператора.

Сначала мы полагаем, что отображение

$$\mathbf{t} \,:\, \mathbf{S} \longrightarrow \mathfrak{M} \tag{3.2.28}$$

определяется (см. (3.1.8)) правилом: если $s \in \mathbf{S}$, $\beta = pr_1(s)$, $b = \overset{-1}{\beta}$ и $(x_i)_{i \in \overline{1,N}} = pr_2(s)$, то $\mathbf{t}(s)$ есть кортеж в левой части (3.2.25):

$$\mathbf{t}(s) \triangleq (x_{b(i)})_{i \in \overline{1,N}}. \tag{3.2.29}$$

Ясно, что при упомянутых условиях $\mathbf{t}(s) \,:\, \overline{1,N} \longrightarrow X$ действует по правилу

$$\mathbf{t}(s)(j) = x_{b(j)} \in M_j \qquad \forall j \in \overline{1,N}.$$

Оператор (3.2.28) является вспомогательным. На его основе конструируем с учетом (3.2.26) оператор

$$\mathbf{T} \,:\, \mathbf{S} \longrightarrow \mathfrak{M} \times \mathbb{P}, \tag{3.2.30}$$

используя следующее правило: если $s \in \mathbf{S}$, то (см. (3.2.29))

$$\mathbf{T}(s) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{t}(s), pr_1(s)). \tag{3.2.31}$$

Действуя на основе (3.2.30), (3.2.31), мы каждому решению задачи (3.1.18) сопоставляем решение задачи (3.2.17). Полезно отметить, что действуя таким образом, мы можем получить все множество $\mathfrak{M} \times \mathbb{P}$. Более того, мы обнаружим, что отображение (3.2.30) — биекция. Именно, справедливо следующее

Предложение 3.2.2. *Отображение* $\mathbf{T}$ *(3.2.30), (3.2.31) является биекцией* $\mathbf{S}$ *на* $\mathfrak{M} \times \mathbb{P} : \mathbf{T} \in (\mathrm{bi})[\mathbf{S}; \mathfrak{M} \times \mathbb{P}]$.

Доказательство. Из (3.2.30) следует, что

$$\mathbf{T}^1(\mathbf{S}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{T}(s) \,:\, s \in \mathbf{S}\} \subset \mathfrak{M} \times \mathbb{P}. \tag{3.2.32}$$

Пусть $z \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$ и при этом

$$((x^{(i)})_{i \in \overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} pr_1(z))\&(\alpha \stackrel{\triangle}{=} pr_2(z)). \tag{3.2.33}$$

Тогда по выбору z имеем из (3.2.33), что

$$((x^{(i)})_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M})\&(\alpha \in \mathbb{P}). \tag{3.2.34}$$

Первое условие в (3.2.34) означает (см. (3.2.1)), что

$$x^{(j)} \in M_j \qquad \forall j \in \overline{1,N}.$$

Как следствие, получаем, коль скоро (см. (3.2.34))

$$\alpha \,:\, \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,N},$$

следующую систему включений:

$$y_k \stackrel{\triangle}{=} x^{(\alpha(k))} \in M_{\alpha(k)} \qquad \forall k \in \overline{1,N}.$$

Тогда мы, в частности, получаем, что

$$(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)},$$

а потому (см. (3.1.8), (3.2.34)) реализуется свойство

$$h \stackrel{\triangle}{=} (\alpha,\, (y_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{3.2.35}$$

Пусть $\beta = \overset{-1}{\alpha}$. В силу (3.2.29) и (3.2.35) тогда реализуется кортеж

$$\mathbf{t}(h) = (y_{\beta(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}. \tag{3.2.36}$$

Но $y_{\beta(j)} = x^{(\alpha(\beta(j)))} = x^{(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}$; см. в этой связи (3.2.23). Поэтому в согласии с (3.2.36) мы получаем равенство

$$\mathbf{t}(h) = (x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}. \tag{3.2.37}$$

С учетом (3.2.31) и (3.2.35) мы получаем представление

$$\mathbf{T}(h) = (\mathbf{t}(h), \alpha) = ((x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha).$$

Используя теперь (3.2.33), реализуем равенство $\mathbf{T}(h) = z$, где (см. (3.2.32)) $\mathbf{T}(h) \in \mathbf{T}^1(\mathbf{S})$. В итоге $z \in \mathbf{T}^1(\mathbf{S})$. Поскольку выбор z был произвольным, установлено вложение

$$\mathfrak{M} \times \mathbb{P} \subset \mathbf{T}^1(\mathbf{S}). \tag{3.2.38}$$

Из (3.2.32) и (3.2.38) следует очевидное равенство

$$\mathbf{T}^1(\mathbf{S}) = \mathfrak{M} \times \mathbb{P}, \tag{3.2.39}$$

т.е. $\mathbf{T}$ есть сюръекция $\mathbf{S}$ на $\mathfrak{M} \times \mathbb{P}$ (т.е. отображение множества $\mathbf{S}$ на множество $\mathfrak{M} \times \mathbb{P}$; см. (1.1.11): $\mathbf{T} \in (\mathfrak{M} \times \mathbb{P})^{\mathbf{S}}_{(*)}$.

Проверим теперь свойство инъективности $\mathbf{T}$. Пусть

$$(u \in \mathbf{S})\&(v \in \mathbf{S}). \tag{3.2.40}$$

С учетом (3.1.8), (3.2.40) мы получим сразу

$$(\mu \triangleq pr_1(u) \in \mathbb{P})\&((\varphi_i)_{i\in\overline{1,N}} \triangleq pr_2(u) \in X^N)\&,$$

$$\&(\nu \triangleq pr_1(v) \in \mathbb{P})\&((\psi_i)_{i\in\overline{1,N}} \triangleq pr_2(v) \in X^N),$$

причем справедливо следующее условие:

$$((\varphi_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\mu(i)})\&((\psi_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\nu(i)}). \tag{3.2.41}$$

Разумеется, $u = (\mu, (\varphi_i)_{i\in\overline{1,N}})$ и $v = (\nu, (\psi_i)_{i\in\overline{1,N}})$. В силу (3.2.29) имеем следующие два равенства: при $\xi \triangleq \overset{-1}{\mu}$ и $\zeta \triangleq \overset{-1}{\nu}$

$$\mathbf{t}(u) = (\varphi_{\xi(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M},$$

$$\mathbf{t}(v) = (\psi_{\zeta(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}.$$

Далее, из (3.2.31) мы получаем очевидные равенства

$$(\mathbf{T}(u) = (\mathbf{t}(u), \mu))\&(\mathbf{T}(v) = (\mathbf{t}(v), \nu)). \tag{3.2.42}$$

Пусть справедливо равенство

$$\mathbf{T}(u) = \mathbf{T}(v). \tag{3.2.43}$$

Тогда в силу (3.2.42), (3.2.43) и предложения 1.1 работы [57] мы получим, что

$$(\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v))\&(\mu = \nu). \tag{3.2.44}$$

Из последнего равенства в (3.2.44) вытекает, что

$$\xi = \zeta, \tag{3.2.45}$$

а тогда с учетом соотношения (3.2.44) в целом и ранее упомянутых представлений для $\mathbf{t}(u)$ и $\mathbf{t}(v)$ получаем (как следствие (3.2.23) и (3.2.45)) при всяком $j \in \overline{1,N}$

$$\varphi_j = \varphi_{\xi(\mu(j))} = \mathbf{t}(u)(\mu(j)) = \mathbf{t}(v)(\mu(j)) =$$

$$= \mathbf{t}(v)(\nu(j)) = \psi_{\zeta(\nu(j))} = \psi_j.$$

Следовательно, $(\varphi_i)_{i\in\overline{1,N}} = (\psi_i)_{i\in\overline{1,N}}$ и, как следствие (см. (3.2.44)),

$$u = (\mu, (\varphi_i)_{i\in\overline{1,N}}) = (\nu, (\psi_i)_{i\in\overline{1,N}}) = v \tag{3.2.46}$$

(при условии (3.2.43)). Итак (см. (3.2.43),(3.2.46)), истинна импликация

$$(\mathbf{T}(u) = \mathbf{T}(v)) \Rightarrow (u = v).$$

Поскольку u и v в (3.2.40) выбирались произвольно, установлена инъективность $\mathbf{T}$, т.е. согласно (1.1.16)

$$\mathbf{T} \in (\mathrm{in})[\mathbf{S}; \mathfrak{M} \times \mathbb{P}].$$

С учетом (1.1.12) и (3.2.39) получаем (см. [57] (с.39)) свойство биективности $\mathbf{T}$. $\square$

Согласно предложению 3.2.2 корректно определяется (см. (1.1.19)) биекция $\overset{-1}{\mathbf{T}} \in (\mathrm{bi})[\mathfrak{M} \times \mathbb{P}; \mathbf{S}]$, обратная по отношению к $\mathbf{T}$. В частности,

$$\overset{-1}{\mathbf{T}} : \mathfrak{M} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbf{S}, \tag{3.2.47}$$

причем справедливы равенства

$$(\overset{-1}{\mathbf{T}}(\mathbf{T}(s)) = s \quad \forall s \in \mathbf{S})\&(\mathbf{T}(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z)) = z \quad \forall z \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}). \tag{3.2.48}$$

Отметим простые следствия последних положений:

$$\mathfrak{M} \times \mathbb{P} = \{\mathbf{T}(s) : s \in \mathbf{S}\}, \tag{3.2.49}$$

$$\mathbf{S} = \{\overset{-1}{\mathbf{T}}(z) : z \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}\}. \tag{3.2.50}$$

В (3.2.49), (3.2.50) мы получили, по сути дела, факт отождествимости множеств допустимых элементов задач (3.1.18) и (3.2.17). Из (3.2.49) и (3.2.50) следует, что во многих вопросах множества (3.2.49) и (3.2.50) можно не различать.

Предложение 3.2.3. *Отображение π является суперпозицией $\mathbf{T}$ и w:*

$$\pi = w \circ \mathbf{T}.$$

Доказательство. Будем использовать (3.1.16), (3.2.14) и (3.2.30); тогда

$$\pi : \mathbf{S} \longrightarrow [0, \infty[,\ w \circ \mathbf{T} : \mathbf{S} \longrightarrow [0, \infty[, \tag{3.2.51}$$

при этом $(w \circ \mathbf{T})(s) = w(\mathbf{T}(s))\ \forall s \in \mathbf{S}$. Фиксируем $h \in \mathbf{S}$. Тогда в силу (3.1.8) имеем

$$h \in \mathbb{P} \times X^N,$$

причем для $\alpha \triangleq pr_1(h) \in \mathbb{P}$ и $(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \triangleq pr_2(h)$ справедливо равенство $h = (\alpha, (y_i)_{i \in \overline{1,N}})$ и, кроме того,

$$(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)}. \tag{3.2.52}$$

В частности, из (3.2.52) имеем свойство $(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in X^N$ и, в силу (3.1.17), $\pi(h) = \Pi((y_i)_{i \in \overline{1,N}})$, а потому (см. (3.1.10))

$$\pi(h) = \mathbf{c}(x^0, y_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(y_i, y_{i+1}) + \mathbf{f}(y_N). \tag{3.2.53}$$

Кроме того, $(w \circ \mathbf{T})(h) = w(\mathbf{T}(h)) = w(\mathbf{t}(h), pr_1(h)) = w(\mathbf{t}(h), \alpha)$, где, при условии $\beta \triangleq \overset{-1}{\alpha}$,

$$\mathbf{t}(h) = (y_{\beta(i)})_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}. \tag{3.2.54}$$

При этом $(\mathbf{t}(h), \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$, а тогда в силу (3.2.15)

$$(w \circ \mathbf{T})(h) = w(\mathbf{t}(h), \alpha) = W[(y_{\beta(i)})_{i \in \overline{1,N}}](\alpha). \tag{3.2.55}$$

С учетом (3.2.5), (3.2.23), (3.2.54) и (3.2.55) мы получаем равенство

$$(w \circ \mathbf{T})(h) = \mathbf{c}(x^0, y_{\beta(\alpha(1))}) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(y_{\beta(\alpha(i))}, y_{\beta(\alpha(i+1))}) +$$

$$+\mathbf{f}(y_{\beta(\alpha(N))}) = \mathbf{c}(x^0, y_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(y_i, y_{i+1}) + \mathbf{f}(y_N). \tag{3.2.56}$$

Из (3.2.53) и (3.2.56) имеем совпадение $\pi(h) = (w \circ \mathbf{T})(h)$. Коль скоро выбор h был произвольным, имеем с учетом (3.2.51) требуемое равенство $\pi = w \circ \mathbf{T}$. □

С учетом предложения 3.3 имеем следующее представление задачи (3.1.18):

$$(w \circ \mathbf{T})(s) \longrightarrow \min, \quad s \in \mathbf{S}.$$

Предложение 3.2.4. *Справедливо равенство* $V = \mathbb{V}$.

Доказательство. С учетом (3.1.22), (3.2.19) и (3.2.20) выберем произвольно $s_0 \in \mathcal{SOL}$; тогда $s_0 \in \mathbf{S}$ и $\pi[s_0] = V$. С учетом предложения 3.3

$$w(\mathbf{T}(s_0)) = (w \circ \mathbf{T})(s_0) = V, \tag{3.2.57}$$

где $\mathbf{T}(s_0) = (\mathbf{t}(s_0), pr_1(s_0)) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$. Из (3.2.16) и (3.2.57) получаем, следовательно, очевидное неравенство

$$\mathbb{V} \leq V. \tag{3.2.58}$$

Пусть теперь $z_0 \in \mathbb{SOL}$, т.е. $z_0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$ и при этом

$$w(z_0) = \mathbb{V}. \tag{3.2.59}$$

Из (3.2.48) вытекает, что $z_0 = \mathbf{T}(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0))$, где $\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0) \in \mathbf{S}$ в силу (3.2.47). Следовательно (см. предложение 3.2.3),

$$w(z_0) = w(\mathbf{T}(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0))) = (w \circ \mathbf{T})(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)) = \pi(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)).$$

С учетом (3.1.22) и (3.2.59) мы получаем, что

$$V \leq \pi(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)) = \mathbb{V}. \tag{3.2.60}$$

Из (3.2.58) и (3.2.60) вытекает требуемое равенство $V = \mathbb{V}$. □

Предложение 3.2.5. *Справедливы следующие два равенства:*

$$\mathbb{SOL} = \{\mathbf{T}(s) : s \in \mathcal{SOL}\}, \tag{3.2.61}$$

$$\mathcal{SOL} = \{\overset{-1}{\mathbf{T}}(z) \,:\, z \in \mathbb{SOL}\}. \tag{3.2.62}$$

Доказательство. Для удобства в обозначениях принимаем следующие соглашения:

$$A \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{T}(s) \,:\, s \in \mathcal{SOL}\}, \tag{3.2.63}$$

$$B \overset{\triangle}{=} \{\overset{-1}{\mathbf{T}}(z) \,:\, z \in \mathbb{SOL}\}. \tag{3.2.64}$$

Покажем, что справедливо следующее равенство:

$$\mathbb{SOL} = A. \tag{3.2.65}$$

Пусть $z_0 \in \mathbb{SOL}$. Это означает, что $z_0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$ и при этом (см. предложение 3.2.4)

$$w(z_0) = \mathbb{V} = V. \tag{3.2.66}$$

С учетом (3.2.48) имеем следующее равенство:

$$z_0 = \mathbf{T}(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)), \tag{3.2.67}$$

где $\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0) \in \mathbf{S}$. Из (3.2.66), (3.2.67) и предложения 3.3 получаем цепочку равенств

$$V = w(z_0) = w(\mathbf{T}(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0))) = (w \circ \mathbf{T})(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)) = \pi(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)). \tag{3.2.68}$$

С учетом (3.2.19) и (3.2.68) реализуется включение

$$\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0) \in \mathcal{SOL}. \tag{3.2.69}$$

В свою очередь, из (3.2.63), (3.2.67) и (3.2.69) следует, что

$$z_0 = \mathbf{T}(\overset{-1}{\mathbf{T}}(z_0)) \in A. \tag{3.2.70}$$

Поскольку выбор z_0 был произвольным, имеем (см. (3.2.70)) вложение

$$\mathbb{SOL} \subset A. \tag{3.2.71}$$

Пусть $z^0 \in A$, а $s^0 \in \mathcal{SOL}$ реализует z^0 посредством равенства

$$z^0 = \mathbf{T}(s^0). \tag{3.2.72}$$

Из (3.2.19) имеем для решения $s^0 \in \mathbf{S}$ следующее равенство:

$$\pi(s^0) = V = \mathbb{V} \tag{3.2.73}$$

(см. предложение 3.2.4). С учетом предложения 3.2.3 и (3.2.72)

$$w(z^0) = w(\mathbf{T}(s^0)) = (w \circ \mathbf{T})(s^0) = \pi(s^0) = \mathbb{V}.$$

Стало быть (см. (3.2.30)), $z^0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$ обладает свойством $w(z^0) = \mathbb{V}$. С учетом (3.2.18) получаем включение $z^0 \in \mathbb{SOL}$. Коль скоро z^0 выбиралось произвольно, установлено вложение

$$A \subset \mathbb{SOL}.$$

С учетом (3.2.71) получаем равенство (3.2.65). Докажем равенство

$$\mathcal{SOL} = B. \tag{3.2.74}$$

Принимая во внимание уже установленное ранее равенство (3.2.65), имеем (см. (3.2.48), (3.2.63))

$$\{\overset{-1}{\mathbf{T}}(z) \,:\, z \in \mathbb{SOL}\} = \{\overset{-1}{\mathbf{T}}(a) \,:\, a \in A\} =$$

$$= \{\overset{-1}{\mathbf{T}}(\mathbf{T}(s)) \,:\, s \in \mathcal{SOL}\} = \mathcal{SOL}; \tag{3.2.75}$$

мы учитываем известные свойства операции взятия образа (см. главу 1). Из (3.2.64) и (3.2.75) вытекает равенство (3.2.74). Итак (см. (3.2.65), (3.2.74)),

$$(\mathbb{SOL} = A) \& (\mathcal{SOL} = B).$$

Теперь равенство (3.2.61) получаем из (3.2.63) и (3.2.65), а равенство (3.2.62) — из (3.2.64) и (3.2.74); предложение полностью доказано. $\square$

Мы установили (см. предложения 3.2.4, 3.2.5, а также соотношения (3.2.49), (3.2.50)) эквивалентность задач (3.1.18) и (3.2.17). С учетом предложений 3.2.4 и 3.2.5 мы имеем возможность эквивалентного преобразования пары (3.2.21) в пару (3.2.22) и наоборот. При этом первые компоненты этих пар совпадают (см. предложение 3.2.4), а вторые связаны операцией биективного образа (см. предложения 3.2.2 и 3.2.5).

3.3. Эквивалентное преобразование экстремальных задач и метод покоординатного спуска

Для решения задачи (3.2.17) может быть применен один из наиболее известных в теории экстремальных задач методов, а именно — метод покоординатного спуска. Дело в том, что (3.2.17) можно рассматривать как задачу минимизации функции двух переменных (имеется в виду функция w)

на декартовом произведении множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathbb{P}$. Здесь первое переменное — кортеж городов $(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$, а второе — перестановка (маршрут) $\alpha \in \mathbb{P}$; при этом $z = ((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha)$ — аргумент w.

Итак, выбираем произвольно $z_0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P},\ z_0 = (pr_1(z_0), pr_2(z_0))$. Пусть

$$(x_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \triangleq pr_1(z_0),\ \ \omega^{(0)} \triangleq pr_2(z_0).$$

Разумеется, $(x_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$ и $\omega^{(0)} \in \mathbb{P}$; в частности,

$$x_1^0 \in M_1, ..., x_N^0 \in M_N.$$

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$w(\cdot, \omega^{(0)}) = (w((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}))_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}},$$

определяемой правилом

$$(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \longmapsto \omega((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}) : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, \infty[$$

на множестве $\mathfrak{M}$, т.е. задачу

$$w((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}) \longrightarrow \min,\ \ (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}. \tag{3.3.1}$$

С учетом конечности $\mathfrak{M}$ имеем для (3.3.1) свойство: экстремум в этой задаче непременно достигается. Пусть

$$(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \tag{3.3.2}$$

удовлетворяет условию экстремума

$$w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}) = \min_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathfrak{M}} w((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}) \leq$$

$$\leq w((x_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}) = w(z_0). \tag{3.3.3}$$

Теперь мы фиксируем кортеж (3.3.2) в качестве системы городов в ЗК (3.2.6), после чего рассматриваем следующий вариант задачи (3.2.6):

$$W[(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}](\lambda) \longrightarrow \min,\ \ \lambda \in \mathbb{P}; \tag{3.3.4}$$

Обращаясь к задаче (3.3.4), мы учитываем (3.2.15): отображение (3.2.4), где $x^{(i)} = x_i^{(1)}$ при всех $i \in \overline{1, N}$, есть сечение w в “точке” $(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}$:

$$W[(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] = w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \cdot) = (w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha))_{\alpha\in\mathbb{P}}. \tag{3.3.5}$$

Итак, $W[(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]$ есть отображение

$$\alpha \longmapsto w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha) : \mathbb{P} \longrightarrow [0, \infty[.$$

Решаем задачу (3.3.4), получая маршрут $\omega^{(1)} \in \mathbb{P}$, для которого имеет место равенство

$$W[(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}](\omega^{(1)}) = (\mathrm{val})[(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]$$

(см. (3.2.7)). Иными словами (см. (3.3.5)),

$$w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(1)}) = W[(x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}](\omega^{(1)}) = \min_{\alpha\in\mathbb{P}} w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha). \qquad (3.3.6)$$

Мы получили в силу (3.3.3), (3.3.6) цепочку неравенств

$$w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(1)}) \leq w((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}) \leq w((x_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(0)}), \qquad (3.3.7)$$

чем и завершается первый шаг процедуры. Мы формируем упорядоченную пару

$$z_1 \stackrel{\triangle}{=} ((x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(1)}),$$

$pr_1(z_1) = (x_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}$ и $pr_2(z_1) = \omega^{(1)}$, после чего решаем задачу

$$w((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega^{(1)}) \longrightarrow \min,\ (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}, \qquad (3.3.8)$$

начиная тем самым второй шаг процедуры.

3.4. Метод итераций с использованием перестраиваемой модели задачи коммивояжера

В настоящем разделе излагается процедура [17], представляющая собой метод итераций, связанный в идейном отношении с процедурой предыдущего раздела. Речь идет о том, чтобы решать основную маршрутную задачу с применением декомпозиции с целью выделения задачи выбора маршрута и задачи формирования трассы (в условиях заданного маршрута). В последнем случае предполагается, что заданные целевые множества $M_1, ..., M_N$ каким-либо образом занумерованы и требуется оптимизировать критерий, используя только размещение узлов трассы на данных множествах. Эту, более простую в логическом отношении, задачу мы сейчас сформулируем более точно.

Пусть $\beta \in \mathbb{P}$ — выбранный каким-либо образом маршрут. Будем рассматривать все возможные трассы (3.1.5) при фиксированном β. Эти трассы составляют декартово произведение

$$\prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)} = \{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in X^N \mid x_j \in M_{\beta(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}\}; \tag{3.4.1}$$

в силу (3.1.3) имеем в (3.4.1) непустое конечное множество, каждый элемент которого оценивается посредством (3.1.10). В этой связи задачу

$$\Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \ \ (x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)} \tag{3.4.2}$$

будем именовать задачей оптимизации трассы перемещений по заданному маршруту β. Полагаем (при $\beta \in \mathbb{P}$), что

$$\mathcal{V}[\beta] \triangleq \min_{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}} \Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}), \tag{3.4.3}$$

$$(\mathbf{SOL})[\beta] \triangleq \{(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)} \mid \Pi((y_i)_{i \in \overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\beta]\}; \tag{3.4.4}$$

тогда $\mathcal{V}[\beta] \in [0, \infty[$ и $(\mathbf{SOL})[\beta] \neq \varnothing$. Эта задача будет использоваться на каждом шаге итерационной процедуры в условиях изменяющегося (от шага к шагу) маршрута β. Начало же упомянутой процедуры связано с решением специальной (и особой) ЗК.

Для ее формулировки введем вспомогательную матрицу затрат и вспомогательный вектор затрат. Пусть

$$M_0 \triangleq \{x^0\} \tag{3.4.5}$$

(одноэлементное множество, содержащее x^0). Согласно (1.1.20) $\overline{0,N} = \{0\} \bigcup \bigcup \overline{1,N}$; получили множество всех неотрицательных целых чисел, не превосходящих N. Имеем теперь кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X). \tag{3.4.6}$$

С учетом (3.1.7) и (3.4.6) будем полагать далее, что при $i \in \overline{0,N}$ и $j \in \overline{1,N}$

$$\mathbb{A}_{i,j} \triangleq \min_{z \in M_i \times M_j} \mathbf{c}(z) = \min_{(x,y) \in M_i \times M_j} \mathbf{c}(x,y) \tag{3.4.7}$$

(учитываем, что $M_i \times M_j$ — непустое конечное множество). Мы получили в итоге матрицу

$$\mathbb{A} \triangleq (\mathbb{A}_{i,j} : i \in \overline{0,N}, \ j \in \overline{1,N}),$$

используемую для оценивания перемещений в начальной ЗК. Кроме того, пусть при $i \in \overline{1, N}$

$$\mathbf{f}_i \stackrel{\triangle}{=} \min_{x \in M_i} \mathbf{f}(x). \tag{3.4.8}$$

В качестве начальной будем рассматривать следующую ЗК:

$$\mathbb{A}_{0,\alpha(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\alpha(i),\alpha(i+1)} + \mathbf{f}_{\alpha(N)} \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.4.9}$$

Через $\mathbf{v}$ обозначаем значение (экстремум) задачи (3.4.9), а через $\mathbf{sol}$ — непустое множество всех ее решений:

$$\mathbf{v} \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha \in \mathbb{P}} [\mathbb{A}_{0,\alpha(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\alpha(i),\alpha(i+1)} + \mathbf{f}_{\alpha(N)}], \tag{3.4.10}$$

$$\mathbf{sol} \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in \mathbb{P} \,|\, \mathbb{A}_{0,\beta(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\beta(i),\beta(i+1)} + \mathbf{f}_{\beta(N)} = \mathbf{v}\}. \tag{3.4.11}$$

Отметим в связи с (3.4.10), что величина $\mathbf{v}$ оценивает снизу искомый экстремум основной задачи, т.е. значение V.

В самом деле, пусть $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ и при этом

$$\mathbf{s} = (\beta, (x_i)_{i \in \overline{1,N}}),$$

где $\beta \in \mathbb{P}$ и $(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\beta(i)}$; $\beta = pr_1(\mathbf{s})$, $(x_i)_{i \in \overline{1,N}} = pr_2(\mathbf{s})$. Тогда справедливо (3.1.15), а потому согласно (3.1.10) и (3.1.17)

$$\pi(\mathbf{s}) = \Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}) = \mathbf{c}(x^0, x_1) + (\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1})) + \mathbf{f}(x_N). \tag{3.4.12}$$

Имеем $x_1 \in M_{\beta(1)}$ и с учетом (3.4.6) получаем неравенство (см. (3.4.5))

$$\mathbb{A}_{0,\beta(1)} \le \mathbf{c}(x^0, x_1). \tag{3.4.13}$$

Далее, при $i \in \overline{1, N-1}$ имеем включение

$$(x_i, x_{i+1}) \in M_{\beta(i)} \times M_{\beta(i+1)},$$

откуда в силу (3.4.7) вытекает неравенство

$$\mathbb{A}_{\beta(i),\beta(i+1)} \le \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}). \tag{3.4.14}$$

Наконец, $x_N \in M_{\beta(N)}$, и согласно (3.4.8) имеет место

$$\mathbf{f}_{\beta(N)} \le \mathbf{f}(x_N). \tag{3.4.15}$$

Из (3.4.12) — (3.4.15) получаем следующее неравенство:

$$\mathbb{A}_{0,\beta(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\beta(i),\beta(i+1)} + \mathbf{f}_{\beta(N)} \leq \pi(\mathbf{s}). \tag{3.4.16}$$

С другой стороны, в силу (3.4.10) имеем неравенство

$$\mathbf{v} \leq \mathbb{A}_{0,\beta(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\beta(i),\beta(i+1)} + \mathbf{f}_{\beta(N)}.$$

С учетом (3.4.16) получаем оценку $\pi(\mathbf{s})$ в терминах $\mathbf{v}$. Коль скоро выбор $\mathbf{s}$ был произвольным, имеем из (3.1.22) требуемое неравенство

$$\mathbf{v} \leq V. \tag{3.4.17}$$

Далее мы излагаем схему итерационной процедуры, подробно рассматривая два первых ее шага.

Используя непустоту множества $\mathbf{sol}$, выберем произвольно

$$\omega_0 \in \mathbf{sol}. \tag{3.4.18}$$

Тогда в силу (3.4.11) $\omega_0 \in \mathbb{P}$ и при этом

$$\mathbb{A}_{0,\omega_0(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\omega_0(i),\omega_0(i+1)} + \mathbf{f}_{\omega_0(N)} = \mathbf{v}.$$

Нумеруем целевые множества в соответствии с (3.4.18) и рассматриваем задачу (3.4.2) при $\beta = \omega_0$:

$$\Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \ \ (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_0(i)}. \tag{3.4.19}$$

Задача (3.4.19) характеризуется экстремумом

$$\mathcal{V}[\omega_0] = \min_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_0(i)}} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \tag{3.4.20}$$

и непустым множеством (оптимальных) решений

$$(\mathbf{SOL})[\omega_0] = \{(y_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_0(i)} \,|\, \Pi((y_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_0]\}. \tag{3.4.21}$$

Из (3.1.22) и (3.4.3) легко следует неравенство

$$V \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.22}$$

Из (3.4.17) и (3.4.22) получаем цепочку неравенств

$$\mathbf{v} \le V \le \mathcal{V}[\omega_0], \tag{3.4.23}$$

определяющую двустороннюю оценку V. Используя непустоту множества (3.4.21), выбираем (оптимальную) трассу

$$(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathbf{SOL})[\omega_0]. \tag{3.4.24}$$

Тогда $(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_0(i)}$, и при этом справедливо равенство

$$\mathcal{V}[\omega_0] = \Pi((y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.4.25}$$

В силу (3.1.8) имеем по выбору ω_0 и $(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}$ включение

$$\lambda_0 \stackrel{\triangle}{=} (\omega_0, (y_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{3.4.26}$$

Тогда согласно (3.2.1) и (3.2.28) имеет место свойство

$$(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{t}(\lambda_0) \in \mathfrak{M}. \tag{3.4.27}$$

Это означает, что $z_1^{(0)} \in M_1, ..., z_N^{(0)} \in M_N$. Как следствие (3.4.27), имеем из (3.2.31), что

$$\lambda^{(0)} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{T}(\lambda_0) = ((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_0) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}. \tag{3.4.28}$$

Согласно (3.1.17), (3.4.25) и (3.4.26) получаем цепочку равенств

$$\pi(\lambda_0) = \Pi((y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.29}$$

Вернемся к (3.4.27). Данное соотношение позволяет рассматривать ЗК при заданной системе городов, т.е. задачу (3.2.6) при

$$(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} = (z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}. \tag{3.4.30}$$

В этой связи учтем предложение 3.3:

$$\pi(\lambda_0) = (w \circ \mathbf{T})(\lambda_0) = w(\mathbf{T}(\lambda_0)) =$$

$$= w(\mathbf{t}(\lambda_0), pr_1(\lambda_0)) = w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_0) = w(\lambda^{(0)}). \tag{3.4.31}$$

Из (3.4.29), (3.4.31), в частности, следует, что

$$w(\lambda^{(0)}) = w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_0) = \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.32}$$

Кроме того, с учетом (3.2.15), (3.4.28) мы получаем очевидное равенство

$$w(\lambda^{(0)}) = W[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}](\omega_0). \tag{3.4.33}$$

Из (3.2.7) и (3.4.33) вытекает следующее неравенство:

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \le w(\lambda^{(0)}).$$

В свою очередь, из последнего неравенства и (3.4.32) получаем важную оценку

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \le \mathcal{V}[\omega_0]. \qquad (3.4.34)$$

Теперь учтем, что при условии (3.4.30) в (3.2.8) реализуется непустое множество:

$$(\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] = \{\alpha \in \mathbb{P} \,|\, W[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]\}. \qquad (3.4.35)$$

С учетом непустоты множества (3.4.35) выбираем произвольный элемент

$$\omega_1 \in (\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]. \qquad (3.4.36)$$

Из (3.4.35) и (3.4.36) мы получаем, что $\omega_1 \in \mathbb{P}$, и при этом

$$W[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}](\omega_1) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]. \qquad (3.4.37)$$

При этом $((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$; см. (3.4.27). С учетом (3.2.15)

$$w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1) = W[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}](\omega_1). \qquad (3.4.38)$$

Из (3.4.34), (3.4.37) и (3.4.38) вытекает следующая оценка:

$$w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \le \mathcal{V}[\omega_0]. \qquad (3.4.39)$$

С учетом (3.2.47) $\overset{-1}{\mathbf{T}}((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_1) \in \mathbf{S}$. Рассмотрим упорядоченную пару

$$\xi \triangleq (\omega_1, (z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbb{P} \times X^N. \qquad (3.4.40)$$

Из (3.4.27) вытекает, что $z_{\omega_1(i)}^{(0)} \in M_{\omega_1(i)}$ при $i \in \overline{1,N}$. Иными словами,

$$(z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_1(i)}. \qquad (3.4.41)$$

Из (3.1.8), (3.4.40) и (3.4.41) вытекает, что

$$\xi \in \mathbf{S}. \qquad (3.4.42)$$

Из (3.2.23), (3.2.29), (3.4.40) и (3.4.42) получаем, что при $\omega^{(1)} \triangleq \overset{-1}{\alpha}$, где $\alpha = \omega_1$,

$$\mathbf{t}(\xi) = (z_{\omega_1(\omega^{(1)}(i))}^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} = (z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}. \qquad (3.4.43)$$

С учетом (3.2.31), (3.4.40) и (3.4.43) имеем равенство

$$\mathbf{T}(\xi) = ((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}, \omega_1). \tag{3.4.44}$$

Следовательно, в силу (3.4.39) и (3.4.44)

$$(w \circ \mathbf{T})(\xi) = w(\mathbf{T}(\xi)) = w((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}, \omega_1). \tag{3.4.45}$$

Из (3.4.45), (3.4.42) и предложения 3.3 вытекает равенство

$$\pi(\xi) = w((z_i^0)_{i \in \overline{1,N}}, \omega_1).$$

Из (3.4.39) следует теперь, что

$$\pi(\xi) = (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.46}$$

Напомним, что $pr_1(\xi) = \omega_1$ и $pr_2(\xi) = (z^0_{\omega_1(i)})_{i \in \overline{1,N}}$. Нумеруем целевые множества в соответствии с маршрутом ω_1. Рассмотрим задачу (3.4.2) при $\beta = \omega_1$:

$$\Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \ \ (x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_1(i)}. \tag{3.4.47}$$

В результате решения задачи (3.4.47) мы получаем экстремум (значение)

$$\mathcal{V}[\omega_1] = \min_{(x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_1(i)}} \Pi((x_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in [0, \infty[\tag{3.4.48}$$

и оптимальную трассу

$$(y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}} \in (\mathbf{SOL})[\omega_1]. \tag{3.4.49}$$

Тогда в силу (3.4.4), (3.4.49) имеем, в частности, что

$$(y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_1(i)}; \tag{3.4.50}$$

кроме того, справедливо (см. (3.4.49)) следующее равенство:

$$\Pi((y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{3.4.51}$$

Поскольку $\omega_1 \in \mathbb{P}$, то из (3.1.8) и (3.4.51) легко следует, что

$$\lambda_1 \stackrel{\triangle}{=} (\omega_1, (y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{3.4.52}$$

При этом $\pi(\lambda_1) \in [0, \infty[$ определяется равенством

$$\pi(\lambda_1) = \Pi((y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}). \tag{3.4.53}$$

Мы учитываем (3.1.15), (3.1.17) и то, что

$$(pr_1(\lambda_1) = \omega_1)\&(pr_2(\lambda_1) = (y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}).$$

Заметим, кстати, что из (3.4.51), (3.4.53) вытекает равенство

$$\pi(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{3.4.54}$$

Далее, из (3.4.41) и (3.4.48) вытекает, что

$$\mathcal{V}[\omega_1] \leq \Pi((z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}). \tag{3.4.55}$$

С учетом (3.1.15) и (3.1.17) мы из (3.4.40) извлекаем равенство:

$$\pi(\xi) = \Pi((z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}). \tag{3.4.56}$$

Из (3.4.55) и (3.4.56) получаем оценку $\mathcal{V}[\omega_1] \leq \pi[\xi]$, откуда в силу (3.4.46) имеем цепочку неравенств

$$\mathcal{V}[\omega_1] \leq (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.57}$$

Из (3.1.22) и (3.4.48) вытекает оценка

$$V \leq \mathcal{V}[\omega_1].$$

С учетом (3.4.17), (3.4.57) мы получаем теперь следующую цепочку неравенств:

$$\mathbf{v} \leq V \leq \mathcal{V}[\omega_1] \leq (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.58}$$

Итак, мы уточняем здесь, вообще говоря, верхнюю оценку искомого экстремума V из (3.4.23).

В силу (3.2.28) и (3.4.52) реализуется новая система городов

$$(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}} \triangleq \mathbf{t}(\lambda_1) \in \mathfrak{M}. \tag{3.4.59}$$

Из (3.2.1) и (3.4.59) следует, конечно, что

$$z_1^{(1)} \in M_1, \ ..., \ z_N^{(1)} \in M_N.$$

С учетом (3.2.30), (3.2.31) и (3.4.59) имеем с очевидностью, что

$$\lambda^{(1)} \triangleq \mathbf{T}(\lambda_1) = ((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}, \omega_1). \tag{3.4.60}$$

Из (3.4.60) и предложения 3.2.3 мы получаем, что

$$\pi(\lambda_1) = (w \circ \mathbf{T})(\lambda_1) = w(\mathbf{T}(\lambda_1)) = w(\lambda^{(1)}). \tag{3.4.61}$$

Из (3.4.54) и (3.4.61) следует, в частности, равенство

$$\mathcal{V}[\omega_1] = w(\lambda^{(1)}),$$

из которого в силу (3.4.60) вытекает, что

$$\mathcal{V}[\omega_1] = w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}, \omega_1). \tag{3.4.62}$$

Теперь приступаем к решению задачи (3.2.6) в условиях, когда

$$(x^{(i)})_{i \in \overline{1,N}} = (z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}.$$

Иными словами, решаем следующую задачу:

$$W[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}](\beta) \longrightarrow \min, \quad \beta \in \mathbb{P}. \tag{3.4.63}$$

С учетом (3.2.15) задача (3.4.63) преобразуется к следующему виду:

$$w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}, \beta) \longrightarrow \min, \quad \beta \in \mathbb{P}. \tag{3.4.64}$$

В силу (3.2.7) и (3.2.15) имеем для значения задачи (3.4.64) следующую оценку:

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}, \omega_1).$$

Как следствие, из (3.4.62) вытекает неравенство

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{3.4.65}$$

Кроме того, задаче (3.4.64) соответствует непустое экстремальное множество (см. (3.2.8))

$$(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}] = \{\beta \in \mathbb{P} \,|\, W[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}](\beta) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}]\}.$$

С учетом (3.2.15) и (3.4.59) последнее выражение переписывается в следующем виде:

$$(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}] = \{\beta \in \mathbb{P} \,|\, w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}, \beta) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}]\}.$$

Используя непустоту этого множества, выберем произвольный оптимальный маршрут

$$\omega_2 \in (\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{3.4.66}$$

Тогда $\omega_2 \in \mathbb{P}$, и выполняется следующее равенство:

$$w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}, \omega_2) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{3.4.67}$$

Из (3.4.65) и (3.4.67) следует, в частности, полезное неравенство

$$w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2) \leq \mathcal{V}[\omega_1].$$

С учетом (3.4.59) имеем также очевидное включение

$$((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}.$$

Отметим, используя (3.2.47), что $\overset{-1}{\mathbf{T}}((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2) \in \mathbf{S}$. Кроме того, с учетом (3.4.59) имеем кортеж

$$(z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_2(i)}, \tag{3.4.68}$$

а тогда для упорядоченной пары

$$\kappa \triangleq (\omega_2, (z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbb{P} \times X^N \tag{3.4.69}$$

имеем в силу (3.1.8) следующее включение:

$$\kappa \in \mathbf{S}. \tag{3.4.70}$$

Из (3.2.28), (3.2.29), (3.4.69) и (3.4.70) мы получаем, в частности, цепочку равенств

$$\mathbf{t}(\kappa) = \mathbf{t}(\omega_2, (z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i\in\overline{1,N}}) = (z^{(1)}_{\omega_2(\omega^{(2)}(i))})_{i\in\overline{1,N}} = (z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}},$$

где $\omega^{(2)} \triangleq \overset{-1}{\omega_2} \in \mathbf{P}$. В силу (3.2.31) из последнего соотношения извлекается равенство

$$\mathbf{T}(\kappa) = ((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2). \tag{3.4.71}$$

Из (3.4.70), (3.4.71) и предложения 3.3 вытекает представление

$$\pi(\kappa) = (w \circ \mathbf{T})(\kappa) = w(\mathbf{T}(\kappa)) = w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \omega_2).$$

С учетом (3.4.65), (3.4.67) мы получаем теперь выражение

$$\pi(\kappa) = (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{3.4.72}$$

С учетом (3.4.69) имеем также следующее равенство:

$$\pi(\kappa) = \pi(\omega_2, (z^{(1)}_{\omega_2(i)})_{i\in\overline{1,N}}).$$

Теперь мы нумеруем целевые множества в соответствии с маршрутом ω_2. Рассмотрим задачу (3.4.2) при $\beta = \omega_2$:

$$\Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \quad (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_2(i)}. \tag{3.4.73}$$

В результате решения задачи (3.4.73) мы получаем значение (экстремум)

$$\mathcal{V}[\omega_2] = \min_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\prod_{i=1}^{N} M_{\omega_2(i)}} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in [0,\infty[, \tag{3.4.74}$$

а также непустое экстремальное множество (множество решений) $(\mathbf{SOL})[\omega_2]$. Выберем произвольный элемент этого множества (оптимальную трассу):

$$(y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathbf{SOL})[\omega_2]. \tag{3.4.75}$$

С учетом (3.4.4), (3.4.74) и (3.4.75) мы получаем для данной трассы

$$(y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_2(i)} \tag{3.4.76}$$

следующее очевидное равенство:

$$\Pi((y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_2]. \tag{3.4.77}$$

Поскольку $\omega_2 \in \mathbb{P}$, имеем из (3.1.8), (3.4.76) включение

$$\lambda_2 \triangleq (\omega_2, (y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{3.4.78}$$

С учетом (3.1.17), (3.4.77) и (3.4.78) получаем цепочку равенств:

$$\pi(\lambda_2) = \Pi((y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega_2]. \tag{3.4.79}$$

Из (3.4.68) и (3.4.74) вытекает оценка:

$$\mathcal{V}[\omega_2] \le \Pi((z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.4.80}$$

С учетом (3.1.15), (3.1.17) имеем следующую цепочку равенств:

$$\pi(\kappa) = \pi(\omega_2, (z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}) = \Pi((z_{\omega_2(i)}^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}).$$

Из (3.4.72) и (3.4.80) получаем теперь цепочку неравенств:

$$\mathcal{V}[\omega_2] \le (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \le \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{3.4.81}$$

С учетом (3.1.22) и (3.4.74) мы, однако, имеем также следующее неравенство:

$$V \leq \mathcal{V}[\omega_2].$$

С учетом (3.4.17) и (3.4.81) получаем цепочку неравенств

$$\mathbf{v} \leq V \leq \mathcal{V}[\omega_2] \leq (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_1]. \tag{3.4.82}$$

Из (3.4.58) и (3.4.82) вытекает, что

$$\mathbf{v} \leq V \leq \mathcal{V}[w_2] \leq (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq$$

$$\leq \mathcal{V}[\omega_1] \leq (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \tag{3.4.83}$$

В (3.4.83) мы фактически воспроизвели “динамику” улучшения верхних оценок. С другой стороны, в (3.4.78), (3.4.79) мы имеем конкретное решение (пару маршрут–трасса λ_2), на котором достигается уточненная верхняя оценка $\mathcal{V}[\omega_2] \, : \, \pi[\lambda_2] = \mathcal{V}[\omega_2]$.

Дальнейшее построение следует проводить по аналогичной схеме. Отметим, что рассматриваемая итерационная процедура быстро сходится, как показывает вычислительный эксперимент [17], причем итерации являются неухудшающими в смысле результата. Во всяком случае двусторонняя оценка в (3.4.83) позволяет оценить проигрыш в результате по сравнению с неизвестным глобальным экстремумом V :

$$0 \leq V - \mathbf{v} \leq \mathcal{V}[\omega_2] - \mathbf{v}.$$

Поэтому, если разность $\mathcal{V}[\omega_2] - \mathbf{v}$ "укладывается"в требуемый допуск (определяющий, сколько можно проиграть в качестве по отношению к V), то можно осуществить останов процедуры. Здесь же можно привести и оценку относительной погрешности (ограничимся случаем $\mathbf{v} > 0$) в виде цепочки неравенств

$$\frac{\mathcal{V}[\omega_2] - V}{V} \leq \frac{\mathcal{V}[\omega_2] - \mathbf{v}}{V} \leq \frac{\mathcal{V}[\omega_2] - \mathbf{v}}{\mathbf{v}}.$$

3.5. Простейшие примеры

В настоящем разделе рассматриваются некоторые примеры, характеризующие логику итерационной процедуры при решении плоской метрической задачи последовательного обхода трех множеств. Итак, пусть $N = 3$, X – конечное подмножество плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, определяемое объединением трех конечных целевых множеств и одноэлементного множества, соответствующего начальному состоянию. Мы полагаем здесь, что $x^0 = (0, 0)$, т.е. процесс посещения множеств начинается из начала координат. Введем на плоскости три двухэлементных множества M_1, M_2 и M_3 :

$$M_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(-1, 0); (0, 1)\},$$

$$M_2 \stackrel{\triangle}{=} \{(0, -1); (1, 0)\},$$

$$M_3 \stackrel{\triangle}{=} \{(-2, -2); (2, 2)\}.$$

Эти множества показаны на рис. 3.5.1.

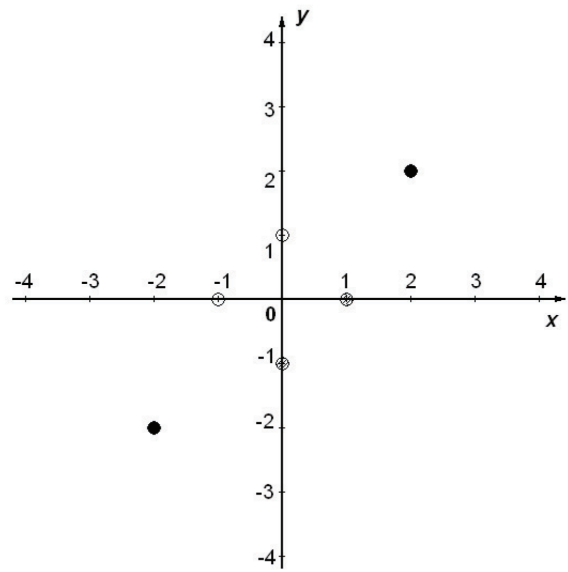

Рис. 3.5.1

Полагаем для согласования с общей схемой решения разд. 3.1–3.4, что

$$X \stackrel{\triangle}{=} \{(0, 0)\} \bigcup (\bigcup_{i=1}^{3} M_i).$$

Функцию $\mathbf{c}$ в (3.1.7) определяем посредством следующего расстояния: если $(u, v) \in X$ и $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in X$, то

$$\mathbf{c}((u, v), (\widetilde{u}, \widetilde{v})) = |u - \widetilde{u}| + |v - \widetilde{v}|. \tag{3.5.1}$$

Функцию $\mathbf{f}$ в (3.1.7) полагаем тождественно равной нулю.

Для данного конкретного примера построим две итерации, рассмотренные в предыдущем разделе. Этих двух итераций оказывается достаточно для построения решения.

Прежде всего построим матрицу $\mathbb{A}$. Напомним, что в рассматриваемом случае $M_0 = \{(0,0)\}$. Тогда (см. (3.4.7))

$$\mathbb{A}_{0,1} = 1,\ \mathbb{A}_{0,2} = 1,\ \mathbb{A}_{0,3} = 4,$$

$$\mathbb{A}_{1,1} = 0,\ \mathbb{A}_{1,2} = 2,\ \mathbb{A}_{1,3} = 3,$$

$$\mathbb{A}_{2,1} = 2,\ \mathbb{A}_{2,2} = 0,\ \mathbb{A}_{2,3} = 3,$$

$$\mathbb{A}_{3,1} = 3,\ \mathbb{A}_{3,2} = 3,\ \mathbb{A}_{3,3} = 0.$$

Для данной матрицы затрат нам требуется решить ЗК (3.4.9) при занулении $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_N = \mathbf{f}_3$. Для нахождения $\mathbf{v}$ в данном случае достаточно сравнить шесть вариантов (маршрутов) перемещений:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3, \tag{3.5.2}$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2, \tag{3.5.3}$$

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3, \tag{3.5.4}$$

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1, \tag{3.5.5}$$

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2, \tag{3.5.6}$$

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1. \tag{3.5.7}$$

Маршрут (3.5.2) оценивается следующими затратами:

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,2} + \mathbb{A}_{2,3} = 1 + 2 + 3 = 6;$$

маршрут (3.5.3) характеризуется следующими затратами:

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,3} + \mathbb{A}_{3,2} = 1 + 3 + 3 = 7;$$

маршруту (3.5.4) соответствуют следующие затраты:

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,1} + \mathbb{A}_{1,3} = 1 + 2 + 3 = 6;$$

маршрут (3.5.5) оценивается потерями:

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,3} + \mathbb{A}_{3,1} = 1 + 3 + 3 = 7;$$

маршрут (3.5.6) характеризуется затратами:

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,1} + \mathbb{A}_{1,2} = 4 + 3 + 2 = 9;$$

наконец, маршруту (3.5.7) соответствуют затраты:

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,2} + \mathbb{A}_{2,1} = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Из этих построений следует, что оптимальными в начальной ЗК являются маршруты (3.5.2) и (3.5.4). Величина $\mathbf{v}$ в нашем случае совпадает с числом 6:

$$\mathbf{v} = 6. \tag{3.5.8}$$

Множество **sol** (3.4.11) в нашем случае двухэлементно: оно содержит маршруты (3.5.2) и (3.5.4). Учитывая, что выбор (3.4.18) допускается произвольным, мы выбираем маршрут (3.5.2) в качестве ω_0; итак, ω_0 есть маршрут (3.5.2). Из (3.5.2) следует, что задача (3.4.19) вырождается в следующую:

$$\Pi((x_i)_{i\in\overline{1,3}}) \longrightarrow \min, \ \ (x_i)_{i\in\overline{1,3}} \in \prod_{i=1}^{3} M_i. \tag{3.5.9}$$

Перечислим все возможные в задаче (3.5.9) трассы:

$$(0,0) \longrightarrow (-1,0) \longrightarrow (0,-1) \longrightarrow (-2,-2), \tag{3.5.10}$$

$$(0,0) \longrightarrow (-1,0) \longrightarrow (0,-1) \longrightarrow (2,2), \tag{3.5.11}$$

$$(0,0) \longrightarrow (-1,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (-2,-2), \tag{3.5.12}$$

$$(0,0) \longrightarrow (-1,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (2,2), \tag{3.5.13}$$

$$(0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,-1) \longrightarrow (-2,-2), \tag{3.5.14}$$

$$(0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (0,-1) \longrightarrow (2,2), \tag{3.5.15}$$

$$(0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (-2,-2), \tag{3.5.16}$$

$$(0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (2,2). \tag{3.5.17}$$

Этим трассам отвечают следующие значения затрат:

1) трасса (3.5.10) характеризуется затратами

$$1 + 2 + 3 = 6;$$

2) для трассы (3.5.11) затраты будут следующими:

$$1 + 2 + 5 = 8;$$

3) трассе (3.5.12) соответствуют затраты

$$1 + 2 + 5 = 8;$$

4) вдоль трассы (3.5.13) затраты равны:

$$1 + 2 + 3 = 6;$$

5) трасса (3.5.14) характеризуется затратами

$$1 + 2 + 3 = 6;$$

6) на трассе (3.5.15) затраты равны:

$$1 + 2 + 5 = 8;$$

7) трассе (3.5.16) соответствуют затраты

$$1 + 2 + 5 = 8;$$

8) трасса (3.5.17) характеризуется затратами

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Мы видим, что трассы (3.5.10), (3.5.13), (3.5.14) и (3.5.17) оптимальны; при этом в силу (3.4.20)

$$\mathcal{V}[\omega_0] = 6.$$

С учетом (3.5.8) получаем следующую цепочку равенств:

$$V = \mathbf{v} = \mathcal{V}[w_0] = 6.$$

Стало быть, каждая из пар

$$(\omega_0, (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}),$$

где ω_0 – маршрут (3.5.2), а $(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}$ – любая из трасс (3.5.10), (3.5.13), (3.5.14), (3.5.17), является оптимальным решением нашей задачи. В данном примере наша итерационная процедура стабилизируется сразу, а именно: на этапе реализации “вилки” (3.4.23). Одна из оптимальных трасс показана на рис. 3.5.2.

Рассмотрим другой пример. Для этого изменим целевые множества, сохраняя предположение (3.5.1) относительно $\mathbf{c}$ и предположение о занулении $\mathbf{f}$. Кроме того, полагаем, как и прежде, что $x^0 = (0, 0)$, тогда $M_0 = \{(0, 0)\}$. Задаем теперь множества следующим образом

$$M_1 = \{(0, -1); (3, 0)\},$$

$$M_2 = \{(3, -1)\},$$

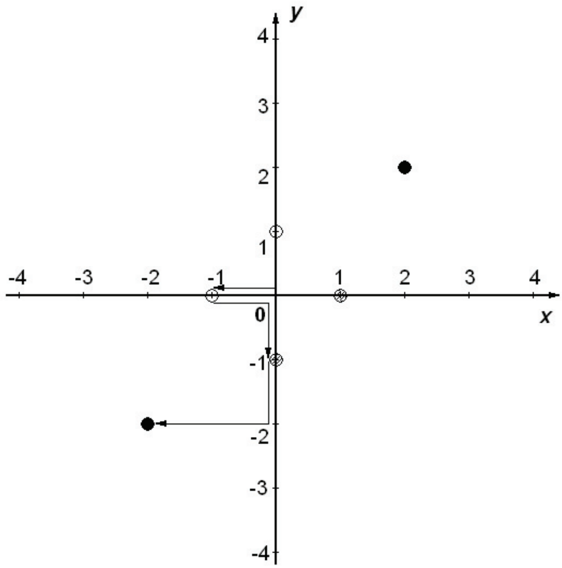

Рис. 3.5.2

$$M_3 = \{(2, -1)\}.$$

Итак, у нас множества M_2 и M_3 одноточечны. Эти множества показаны на рис. 3.5.3.

Определим матрицу затрат в начальной ЗК (речь идет о матрице $\mathbb{A}$):

$$\mathbb{A}_{0,1} = 1,\ \mathbb{A}_{0,2} = 4,\ \mathbb{A}_{0,3} = 3,$$

$$\mathbb{A}_{1,1} = 0,\ \mathbb{A}_{1,2} = 1,\ \mathbb{A}_{1,3} = 2,$$

$$\mathbb{A}_{2,1} = 1,\ \mathbb{A}_{2,2} = 0,\ \mathbb{A}_{2,3} = 1,$$

$$\mathbb{A}_{3,1} = 2,\ \mathbb{A}_{3,2} = 1,\ \mathbb{A}_{3,3} = 0.$$

Для определения $\mathbf{v}$ нам снова достаточно проанализировать маршруты (3.5.2)–(3.5.7), коль скоро количество целевых множеств у нас не изменилось.

Однако сами стоимости маршрутов (3.5.2)–(3.5.7) будут, конечно, другими. Именно, маршрут (3.5.2) оценивается затратами:

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,2} + \mathbb{A}_{2,3} = 1 + 1 + 1 = 3;$$

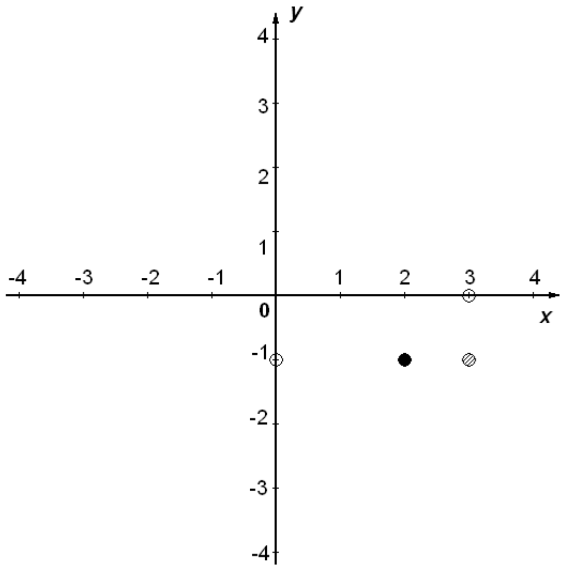

Рис. 3.5.3

маршрут (3.5.3) характеризуется следующими затратами:

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,3} + \mathbb{A}_{3,2} = 1 + 2 + 1 = 4;$$

маршруту (3.5.4) соответствуют следующие затраты:

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,1} + \mathbb{A}_{1,3} = 4 + 1 + 2 = 7;$$

маршрут (3.5.5) оценивается потерями:

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,3} + \mathbb{A}_{3,1} = 4 + 1 + 2 = 7;$$

маршрут (3.5.6) характеризуется затратами:

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,1} + \mathbb{A}_{1,2} = 3 + 2 + 1 = 6;$$

маршрут (3.5.7) оценивается затратами:

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,2} + \mathbb{A}_{2,1} = 3 + 1 + 1 = 5.$$

Получаем равенство $\mathbf{v} = 3$ (см. (3.4.10)). Кроме того, из (3.4.11) имеем по выбору ω_0 (см. (3.4.18)), что данный маршрут определяется посредством (3.5.2). Итак, ω_0 имеет вид

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3.$$

При данном значении $\beta = \omega_0$ рассматриваем задачу (3.4.19), т.е. задачу оптимизации трассы перемещений в очередности, определяемой в (3.5.2). Коль скоро, множества M_2 и M_3 одноэлементные, а множество M_1 двухэлементно, то имеется только две допустимые трассы:

$$(0,0) \longrightarrow (0,-1) \longrightarrow (3,-1) \longrightarrow (2,-1), \tag{3.5.18}$$

$$(0,0) \longrightarrow (3,0) \longrightarrow (3,-1) \longrightarrow (2,-1). \tag{3.5.19}$$

Трасса (3.5.18) характеризуется затратами

$$1 + 3 + 1 = 5.$$

Трасса (3.5.19) также характеризуется затратами

$$3 + 1 + 1 = 5. \tag{3.5.20}$$

Следовательно, трассы (3.5.18) и (3.5.19) равноценны. Выберем для определенности трассу (3.5.19). Предлагаем читателю самостоятельно тщательно проанализировать случай, когда в качестве

$$(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,N}} = (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}$$

используется трасса (3.5.18). Это будет хорошим упражнением.

Итак, полагаем далее (и ограничиваемся этим случаем), что

$$(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}$$

есть трасса (3.5.19) Именно, (3.5.19) является в соответствии с (3.4.21) трассой (3.4.24). При этом

$$y_1^{(0)} = (3,0) \in M_1,\ y_2^{(0)} = (3,-1) \in M_2,\ y_3^{(0)} = (2,-1) \in M_3.$$

Напомним, что ω_0 есть маршрут, указанный в (3.5.2), т.е. тождественное отображение $\overline{1,3}$ на себя. Тогда $\overset{-1}{\omega_0} \stackrel{\triangle}{=} \omega_0$, т.е. перестановка, обратная ω_0, совпадает с ω_0. С учетом (3.2.29) и (3.4.27) получаем, что

$$\lambda_0 = (\omega_0, (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}})$$

преобразуется в кортеж $(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,3}} = \mathbf{t}(\lambda_0)$ по следующему правилу:

$$z_j^{(0)} = y_j^{(0)} \quad \forall j \in \overline{1,3}.$$

Здесь мы учли равенство $\omega_0 = \overset{-1}{\omega_0}$. Стало быть, у нас $z_1^{(0)} = (3,0) \in M_1$, $z_2^{(0)} = (3,-1) \in M_2$, $z_3^{(0)} = (2,-1) \in M_3$. С учетом данной конструкции реализуется $\lambda^{(0)}$ (3.4.28), (3.4.32); напомним в этой связи, что в нашем случае

$$\mathcal{V}[\omega_0] = 5.$$

Определим $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,3}}]$. Имеется в виду решение конкретного варианта задачи (3.2.6). Речь идет о ЗК с городами $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, $z_3^{(0)}$, т.е. о сравнении по результату маршрутов (3.5.2)–(3.5.7). С учетом вышеупомянутой конкретизации $(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,3}}$ имеем следующие оценки этих маршрутов:

1) маршрут (3.5.2) характеризуется затратами, равными 5 (см. (3.5.19), (3.5.20));

2) для маршрута (3.5.3) затраты будут следующими:

$$3 + 2 + 1 = 6;$$

3) вдоль маршрута (3.5.4) затраты

$$4 + 1 + 2 = 7;$$

4) маршрут (3.5.5) характеризуется затратами

$$4 + 1 + 2 = 7;$$

5) маршрут (3.5.6) характеризуется затратами

$$3 + 2 + 1 = 6;$$

6) у маршрута (3.5.7) затраты будут равны

$$3 + 1 + 1 = 5.$$

Из сопоставления результатов видно, что в рассматриваемом здесь варианте задачи (3.2.6)

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,3}}] = 5,$$

а множество $(\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,3}}]$ является двухэлементным: данное множество содержит маршруты (3.5.2), т.е. ω_0, и (3.5.7). Поэтому в качестве ω_1 можно, в силу (3.4.36), выбрать либо маршрут ω_0, (3.5.2), либо маршрут (3.5.7). Рассмотрим обе эти возможности.

Пусть $\omega_1 = \omega_0$. Тогда $\omega_1(1) = 1$, $\omega_1(2) = 2$, $\omega_1(3) = 3$. Мы нумеруем множества в соответствии с ω_1 и получаем, что

$$M_{\omega_1(1)} = M_{\omega_0(1)} = M_1,\ M_{\omega_1(2)} = M_{\omega_0(2)} = M_2,\ M_{\omega_1(3)} = M_{\omega_0(3)} = M_3.$$

Поэтому задача (3.4.47) совпадает в нашем случае с задачей (3.4.19). В частности, $\mathcal{V}[\omega_1] = \mathcal{V}[\omega_0]$, а трасса (3.5.19) является элементом $(\mathbf{SOL})[\omega_0] = (\mathbf{SOL})[\omega_1]$. Наша итерационная процедура стабилизировалась с результатом

$$\mathcal{V}[\omega_0] = \mathcal{V}[\omega_1] = 5.$$

Этот результат, однако, неоптимален. В самом деле, если σ есть маршрут (3.5.3), т.е.

$$\sigma(1) = 1,\ \ \sigma(2) = 3,\ \ \sigma(3) = 2,$$

а трасса $(x_i^0)_{i\in\overline{1,3}}$ движения по данному маршруту имеет вид

$$x_1^0 = (0,-1),\ \ x_2^0 = (2,-1),\ \ x_3^0 = (3,-1),$$

то пара $(\sigma,(x_i^0)_{i\in\overline{1,3}})$ характеризуется потерями

$$1+2+1=4.$$

Стало быть, $\mathbf{V} \neq \mathcal{V}[\omega_1]$, т.к. результат, доставляемый парой $(\sigma,(x_i^0)_{i\in\overline{1,3}})$, оценивает $\mathbf{V}$ сверху.

Рассмотрим теперь случай, когда в качестве ω_1 выбирается маршрут (3.5.7), т.е. $\omega_1(1) = 3$, $\omega_1(2) = 2$, $\omega_1(3) = 1$. В согласии с этим маршрутом мы нумеруем множества следующим образом:

$$M_{\omega_1(1)} = M_3,\ \ M_{\omega_1(2)} = M_2,\ \ M_{\omega_1(3)} = M_1.$$

Рассмотрим теперь задачу (3.4.2) при данной конкретизации ω_1. Множество

$$\prod_{i=1}^{3} M_{\omega_1(i)}$$

состоит из следующих двух элементов–трасс:

$$(0,0) \longrightarrow (2,-1) \longrightarrow (3,-1) \longrightarrow (0,-1), \tag{3.5.21}$$

$$(0,0) \longrightarrow (2,-1) \longrightarrow (3,-1) \longrightarrow (3,0). \tag{3.5.22}$$

Тогда трасса (3.5.21) невыгодна, т.к. она оценивается затратами

$$3+1+3=7,$$

в то время как трасса (3.5.22) характеризуется затратами

$$3 + 1 + 1 = 5.$$

Итак, $\mathcal{V}[\omega_1] = 5$, и в данном случае $(y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,3}}$ имеет вид

$$y_1^{(1)} = (2, -1), \ y_2^{(1)} = (3, -1), \ y_3^{(1)} = (3, 0). \tag{3.5.23}$$

Снова имеем свойство $\mathbf{V} \neq \mathcal{V}[\omega_1]$. Мы располагаем парой λ_1 (3.4.52). В соответствии с (3.4.59) конструируем систему городов $(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,3}}$. Для этого прежде всего введем перестановку

$$\overset{-1}{\omega_1} = \overset{-1}{\alpha} \,|_{\alpha = \omega_1} \in \mathbb{P}.$$

С учетом выражений для $\omega_1(i), \ i \in \overline{1,3}$, имеем

$$\overset{-1}{\omega_1} (1) = 3, \ \overset{-1}{\omega_1} (2) = 2, \ \overset{-1}{\omega_1} (3) = 1;$$

легко видеть, что $\overset{-1}{\omega_1} = \omega_1$. Поэтому для λ_1 (3.4.52) в нашей конкретизации имеем

$$z_1^{(1)} = y^{(1)}_{\overset{-1}{\omega_1}(1)} = y_3^{(1)}, \ z_2^{(1)} = y^{(2)}_{\overset{-1}{\omega_1}(2)} = y_2^{(1)}, \ z_3^{(1)} = y^{(1)}_{\overset{-1}{\omega_1}(3)} = y_1^{(1)}.$$

Разумеется, $z_1^{(1)} \in M_1, \ z_2^{(1)} \in M_2, \ z_3^{(1)} \in M_3$. С учетом (3.5.23)

$$z_1^{(1)} = (3, 0), \ z_2^{(1)} = (3, -1), \ z_3^{(1)} = (2, -1).$$

Решаем далее задачу (3.4.64). В качестве допустимых имеем 6 маршрутов, указанных в (3.5.2)–(3.5.7).

Маршрут (3.5.2) характеризуется в рассматриваемом случае затратами

$$3 + 1 + 1 = 5;$$

для маршрута (3.5.3) в этом случае затраты равны

$$3 + 2 + 1 = 6;$$

маршруту (3.5.4) в рассматриваемом случае соответствуют затраты

$$4 + 1 + 2 = 7;$$

маршрут (3.5.5) характеризуется затратами

$$4 + 1 + 2 = 7;$$

для маршрута (3.5.6) затраты будут следующими:

$$3 + 2 + 1 = 6;$$

маршрут (3.5.7) оценивается затратами

$$3 + 1 + 1 = 5.$$

Мы получили два оптимальных маршрута посещения городов $z_1^{(1)},\ z_1^{(2)},\ z_1^{(3)}$. При этом согласно (3.2.5), (3.2.7), (3.4.63) и (3.4.64) имеем равенство

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,3}}] = 5;$$

$(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,1}}]$ – двухэлементное множество; точнее, элементами множества $(\mathrm{sol})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,1}}]$ являются маршруты (3.5.2) и (3.5.7). Маршрут (3.5.2) есть, как уже отмечалось, ω_0, а маршрут (3.5.7) совпадает с ω_1. В обоих случаях мы получаем последующую стабилизацию процедуры (случай, когда в качестве ω_1 был выбран маршрут ω_0, рассматривался ранее, а случай, в котором ω_1 совпадает с маршрутом (3.5.7), мы рассмотрели только что); при этом результат, доставляемый нашей процедурой, в обоих случаях совпадает с $\mathcal{V}[\omega_1] = 5$; уже отмечалось, что данный результат неоптимален, т.к. $V = 4$ (проверьте это). Вышеупомянутая итерационная процедура не доставляет, вообще говоря, глобальный экстремум, что, кстати, было отмечено и в [17]. Итак, в данном примере двусторонняя оценка экстремума имеет следующий вид:

$$\mathbf{v} = 3 < V = 4 < \mathcal{V}[\omega_1] = 5.$$

Рассмотрим третий пример, снова полагая заданными следующие три множества на плоскости:

$$M_1 \overset{\triangle}{=} \{(0, -2); (10, 0)\},$$

$$M_2 \overset{\triangle}{=} \{(10, -1)\},$$

$$M_3 \overset{\triangle}{=} \{(5, -1)\}.$$

Эти множества показаны на рис. 3.5.4.

В отношении $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$ сохраняем предложения, принятые при рассмотрении предыдущих примеров (итак, функция $\mathbf{f}$ тождественно равна нулю). Кроме того, сохраняем прежними предположения относительно x^0 и M_0. Определим матрицу затрат в начальной ЗК:

$$\mathbb{A}_{0,1} = 2,\ \mathbb{A}_{0,2} = 11,\ \mathbb{A}_{0,3} = 6,$$

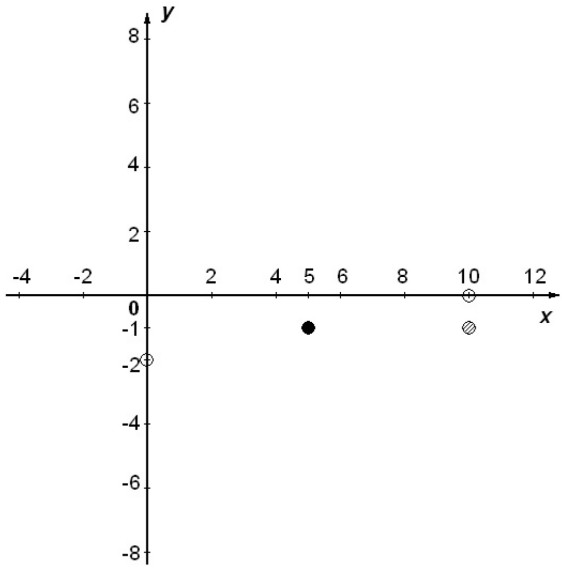

Рис. 3.5.4

$$\mathbb{A}_{1,1} = 0,\ \mathbb{A}_{1,2} = 1,\ \mathbb{A}_{1,3} = 6,$$

$$\mathbb{A}_{2,1} = 1,\ \mathbb{A}_{2,2} = 0,\ \mathbb{A}_{2,3} = 5,$$

$$\mathbb{A}_{3,1} = 6,\ \mathbb{A}_{3,2} = 5,\ \mathbb{A}_{3,3} = 0.$$

Мы по–прежнему сравниваем маршруты (3.5.2)–(3.5.7), поскольку значение N не изменялось (у нас $N = 3$).

Итак, маршрут (3.5.2) в нашем новом примере характеризуется затратами

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,2} + \mathbb{A}_{2,3} = 2 + 1 + 5 = 8;$$

маршрут (3.5.3) характеризуется затратами

$$\mathbb{A}_{0,1} + \mathbb{A}_{1,3} + \mathbb{A}_{3,2} = 2 + 6 + 5 = 13;$$

маршруту (3.5.4) соответствуют затраты

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,1} + \mathbb{A}_{1,3} = 11 + 1 + 6 = 18;$$

маршрут (3.5.5) оценивается затратами

$$\mathbb{A}_{0,2} + \mathbb{A}_{2,3} + \mathbb{A}_{3,1} = 11 + 5 + 6 = 22;$$

маршрут (3.5.6) характеризуется затратами

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,1} + \mathbb{A}_{1,2} = 6 + 6 + 1 = 13;$$

маршрут (3.5.7) оценивается затратами

$$\mathbb{A}_{0,3} + \mathbb{A}_{3,2} + \mathbb{A}_{2,1} = 6 + 5 + 1 = 12.$$

Мы видим, что оптимальным в начальной ЗК оказывается маршрут (3.5.2); при этом

$$\mathbf{v} = 8.$$

Кроме того, в силу (3.4.18) имеем в данном случае, что ω_0 снова есть маршрут (3.5.2).

Рассмотрим теперь задачу (3.4.19) при $\beta = \omega_0$. Отметим в этой связи, что

$$\prod_{i=1}^{3} M_{\omega_0(i)}$$

есть двухэлементное множество, содержащее следующие трассы:

$$(0,0) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (5,-1), \tag{3.5.24}$$

$$(0,0) \longrightarrow (10,0) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (5,-1). \tag{3.5.25}$$

Трасса (3.5.24) характеризуется затратами

$$2 + 11 + 5 = 18;$$

трасса (3.5.25) характеризуется затратами

$$10 + 1 + 5 = 16.$$

Следовательно (см. (3.4.20)), $\mathcal{V}[w_0] = 16$, а $(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}$ определяется в (3.5.25), т.е.

$$y_1^{(0)} = (10,0), \;\; y_2^{(0)} = (10,-1), \;\; y_3^{(0)} = (5,-1). \tag{3.5.26}$$

Мы располагаем теперь упорядоченной парой λ_0 (3.4.26) и можем сконструировать систему городов (3.4.27). Для этого сначала введем перестановку $\omega^0 \triangleq \omega_0^{-1}$, обратную ω_0. Поскольку ω_0 есть тождественное отображение $\overline{1,3}$ на $\overline{1,3}$, то ω^0 совпадает с $\omega_0 : \omega^0 = \omega_0$. Тогда в силу (3.2.29) и (3.4.27) имеем

$$z_1^{(0)} = y_1^{(0)}, \;\; z_2^{(0)} = y_2^{(0)}, \;\; z_3^{(0)} = y_3^{(0)}.$$

С учетом (3.5.26) получаем теперь следующие города:

$$z_1^{(0)} = (10, 0), \;\; z_2^{(0)} = (10, -1), \;\; z_3^{(0)} = (5, -1). \qquad (3.5.27)$$

Рассмотрим теперь задачу (3.2.6) в условиях, когда $N = 3$:

$$x^{(1)} = z_1^{(0)}, \; x^{(2)} = z_2^{(0)}, \; x^{(3)} = z_3^{(0)}. \qquad (3.5.28)$$

Для этого нам надлежит сравнить шесть маршрутов посещения этих городов; мы снова можем отождествлять эти маршруты с (3.5.2)–(3.5.7).

Маршрут (3.5.2) оценивается следующими затратами:

$$10 + 1 + 5 = 16;$$

маршрут (3.5.3) характеризуется затратами

$$10 + 6 + 5 = 21;$$

маршрут (3.5.4) характеризуется затратами:

$$11 + 1 + 6 = 18;$$

для маршрута (3.5.5) имеет место оценка затрат

$$11 + 5 + 6 = 22;$$

маршруту (3.5.6) соответствуют затраты

$$6 + 6 + 1 = 13;$$

для маршрута (3.5.7) справедлива оценка затрат

$$6 + 5 + 1 = 12.$$

С учетом (3.2.7) получаем экстремум (значение) задачи (3.5.7) при условии (3.5.28):

$$(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}] = 12;$$

при этом $(\mathrm{sol})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}]$ есть одноэлементное множество, содержащее маршрут (3.5.7). Итак, с учетом (3.4.36) получаем, что ω_1 есть маршрут, определяемый в (3.5.7), т.е.

$$\omega_1(1) = 3, \; \omega_1(2) = 2, \; \omega_1(3) = 1.$$

В соответствии с этим маршрутом нумеруем множества:

$$M_{\omega_1(1)} = M_3 = \{(5, -1)\},$$

$$M_{\omega_1(2)} = M_2 = \{(10, -1)\},$$
$$M_{\omega_1(3)} = M_1 = \{(0, -2); (10, 0)\}.$$

Рассмотрим теперь задачу (3.4.47) для данных целевых множеств. При этом множество
$$\prod_{i=1}^{3} M_{\omega_1(i)} = \prod_{i=1}^{N} M_{\omega_1(i)}$$
оказывается двухэлементным: оно содержит трассы

$$(0, 0) \longrightarrow (5, -1) \longrightarrow (10, -1) \longrightarrow (0, -2), \tag{3.5.29}$$

$$(0, 0) \longrightarrow (5, -1) \longrightarrow (10, -1) \longrightarrow (10, 0). \tag{3.5.30}$$

Трасса (3.5.29) оценивается затратами
$$6 + 5 + 11 = 22;$$
трасса (3.5.30) характеризуется затратами
$$6 + 5 + 1 = 12.$$
Мы получаем в согласии с (3.4.48) равенство
$$\mathcal{V}[\omega_1] = 12, \tag{3.5.31}$$
а трасса $(y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,3}}$ (3.4.49) определяется посредством (3.5.30):
$$y_1^{(1)} = (5, -1),\ y_2^{(1)} = (10, -1),\ y_3^{(1)} = (10, 0).$$
Мы располагаем теперь упорядоченной парой λ_1 (3.4.52):
$$\mathcal{V}[\omega_1] = 12 < \mathcal{V}[\omega_0] = 16.$$
Тем самым мы получили уточнение верхней оценки экстремума V. Рассмотрим (новую) систему городов (3.4.59). Для этого нам следует прежде всего найти перестановку $\omega^{(1)} \triangleq \overset{-1}{\omega_1}$. Из представления ω_1, приведенного ранее, имеем
$$\omega^{(1)}(1) = 3,\ \omega^{(1)}(2) = 2,\ \omega^{(1)}(3) = 1.$$
Снова имеем совпадение: $\omega^{(1)} = \omega_1$. Из (3.2.29), (3.4.59) и (3.5.30) получаем
$$z_1^{(1)} = y^{(1)}_{\omega^{(1)}(1)} = y_3^{(1)} = (10, 0) \in M_1,$$
$$z_2^{(1)} = y^{(1)}_{\omega^{(1)}(2)} = y_2^{(1)} = (10, -1) \in M_2,$$

$$z_3^{(1)} = y^{(1)}_{\omega^{(1)}(3)} = y_1^{(1)} = (5, -1) \in M_3.$$

Из (3.5.27) и трех последних представлений вытекает равенство

$$(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1,3}} = (z_i^{(0)})_{i \in \overline{1,3}}.$$

В связи с этим напомним о совпадении ω_1 и $\omega^{(1)}$. Это означает стабилизацию нашей процедуры. Достигаемый в ней результат есть $\mathcal{V}[\omega_1]$ (3.5.31), т.е. число 12, а конкретное решение, доставляющее этот результат, есть маршрут–трасса λ_1 (3.4.52), где ω_1 определяется посредством (3.5.7), а

$$(y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,3}} = (y_i^{(1)})_{i \in \overline{1,N}}$$

определяется посредством (3.5.30), т.е.

$$y_1^{(1)} = (5, -1) \in M_3, \; y_2^{(1)} = (10, -1) \in M_2, \; y_3^{(1)} = (10, 0) \in M_1.$$

Покажем, что найденное решение λ_1 оптимально. Для этого заметим, что каждому маршруту (3.5.2)–(3.5.7) соответствует две трассы.

Речь идет о следующем множестве

$$\prod_{i=1}^{3} M_{\alpha(i)} = \prod_{i=1}^{N} M_{\alpha(i)},$$

где α – один из маршрутов (3.5.2)–(3.5.7).

Маршруту, определяемому в (3.5.2), отвечают следующие две трассы:

$$(0,0) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (5,-1), \tag{3.5.32}$$

$$(0,0) \longrightarrow (10,0) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (5,-1). \tag{3.5.33}$$

Маршруту, определяемому в (3.5.3), соответствуют трассы

$$(0,0) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (10,-1), \tag{3.5.34}$$

$$(0,0) \longrightarrow (10,0) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (10,-1). \tag{3.5.35}$$

Маршруту, определяемому в (3.5.4), соответствуют трассы

$$(0,0) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (5,-1), \tag{3.5.36}$$

$$(0,0) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (10,0) \longrightarrow (5,-1). \tag{3.5.37}$$

Маршруту, определяемому в (3.5.5), соответствуют трассы

$$(0,0) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (0,-2), \tag{3.5.38}$$

$$(0,0) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (10,0). \qquad (3.5.39)$$

Маршруту, определяемому в (3.5.6), соответствуют трассы

$$(0,0) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (10,-1), \qquad (3.5.40)$$

$$(0,0) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (10,0) \longrightarrow (10,-1). \qquad (3.5.41)$$

Маршруту, определяемому в (3.5.7), соответствуют трассы

$$(0,0) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (0,-2), \qquad (3.5.42)$$

$$(0,0) \longrightarrow (5,-1) \longrightarrow (10,-1) \longrightarrow (10,0). \qquad (3.5.43)$$

Итак, в (3.5.2)–(3.5.7) и в (3.5.32)–(3.5.43) перечислены все возможные пары маршрут–трасса, т.е. всевозможные решения основной задачи; их — двенадцать. Определим оптимальное решение непосредственным сравнением полученных результатов.

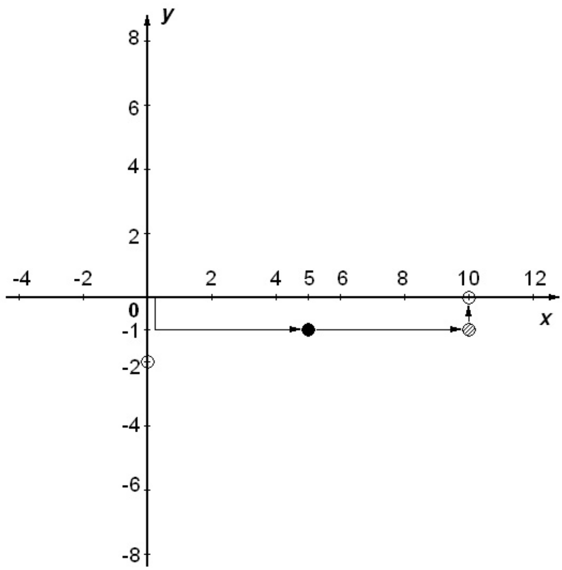

Рис. 3.5.5

При этом трасса (3.5.32) характеризуется затратами $2 + 11 + 5 = 18$; трасса (3.5.33) — затратами $10 + 1 + 5 = 16$; трасса (3.5.34) — затратами:

$2+6+5=13$; трасса (3.5.35) — затратами $10+6+5=21$; трасса (3.5.36) — затратами $11+11+6=28$; трасса (3.5.37) — затратами $11+1+6=18$; трасса (3.5.38) — затратами $11+5+6=22$; трасса (3.5.39) — затратами $11+5+6=22$; трасса (3.5.40) — затратами $6+6+11=23$; трасса (3.5.41) — затратами $6+6+1=13$; трасса (3.5.42) — затратами $6+5+11=22$; трасса (3.5.43) — затратами $6+5+1=12$. Напомним, что наш критерий явным образом зависит только от трассы. Маршрут же определяет только множество возможных трасс.

Из сравнения вышеупомянутых значений оценок трасс вытекает, что $V=12$, а оптимальное решение определяется парой маршрут–трасса, где маршрут указан в (3.5.7), а трасса – в (3.5.43). Отметим, что при решении по методу итераций была найдена пара λ_1, в точности совпадающая с оптимальной (см. (3.5.7), (3.5.30), (3.5.43)), а результат применения итерационной процедуры (см. (3.5.31)) совпадает с глобальным экстремумом. Оптимальное решение показано на рис. 3.5.5.

3.6. Более сложные варианты решения задачи о последовательном посещении множеств

В настоящем разделе приведены результаты решения более сложной задачи последовательного обхода множеств на плоскости. Речь идет сначала о посещении тридцати конечных (точнее – десятиэлементных) множеств $M_i, \ \ i \in \overline{1,30}$. Начальное состояние предполагалось “нулевым”: $x^0=(0,0)$. Функция стоимости **c** определяется посредством евклидова расстояния между плоскими векторами; функция **f** определена как евклидово расстояние до начала координат, т.е. до x^0. Итак, исследуется аналог замкнутой ЗК. Иными словами, после посещения всех тридцати целевых множеств нам следует вернуться на базу, т.е. в точку x^0. Точки самих целевых множеств предполагаются “разбросанными” на плоскости без какой-либо определенной системы. При решении данной задачи итерационным методом с использованием ЭВМ была достигнута стабилизация процедуры на третьей итерации.

В этом же разделе приведены также результаты решения задачи о последовательном посещении 50 двенадцатиэлементных плоских множеств с возвратом на базу, т.е. в точку с нулевыми координатами. Стабилизация процедуры наступила на первой же итерации (имеем здесь усложненный аналог первого примера в предыдущем разделе).

Итак, будем конкретизировать здесь общую постановку задачи разд. 3.2. Напомним, что в этом разделе предполагалось заданным множество X, которое имеет смысл полагать конечным с точки зрения вычислительной реализации. Поэтому в последующих примерах это множество X определялось как объединение всех целевых множеств (тридцати и пятидесяти соответственно) с добавлением к получившемуся множеству-объединению точки $x^0 = (0,0)$.

Пусть на плоскости задана система из 30 множеств

$$M_1 = \{(5,10);(20,30);(5,0);(30,10);(10,40);(10,5);(34,12);(11,23);(22,11);(31,5)\},\ M_2 = \{(70,11);(33,41);(24,25);(25,54);(0,36);(5,45);(10,50);(-5,47);(-10,44);(-12,43)\},\ M_3 = \{(-51,-23);(-34,-27);(-41,-22);(-39,-45);(-25,-30);(-20,-34);(-17,-46);(-26,-48);(-45,50);(-44,-29)\},\ M_4 = \{(-10,-11);(-5,-5);(-14,-21);(-5,-23);(-7,-30);(-20,-15);(-17,-34);(-22,-25);(-11,-29);(-29,-11)\},$$
$$M_5 = \{(-50,-60);(-60,-55);(-65,-67);(-61,-51);(-42,-68);(-68,-42);(-59,-47);(-47,-59);(-41,-52);(-52,-41)\},$$
$$M_6 = \{(-12,10);(-21,23);(-20,40);(-11,21);(-15,25);(-5,30);(-18,5);(-13,22);(-22,20);(-8,27)\},\ M_7 = \{(-33,41);(-30,51);(-25,44);(-45,55);(-50,39);(-41,41);(-35,49);(-39,56);(-54,48);(-51,42)\},$$
$$M_8 = \{(-70,-68);(-67,-56);(-64,-64);(-61,-70);(-57,-69);(-55,-60);(-63,-62);(-56,-69);(-59,-64);(-53,-49)\},$$
$$M_9 = \{(-70,59);(-65,58);(-61,70);(-64,65);(-58,67);(-55,69);(-49,68);(-44,62);(-45,59);(-41,67)\},\ M_{10} = \{(26,45);(33,56);(22,39);(46,58);(49,43);(38,29);(44,51);(40,61);(29,39);(31,48)\},$$
$$M_{11} = \{(70,61);(65,70);(57,68);(68,57);(48,59);(61,67);(60,65);(59,60);(55,62);(57,59)\},\ M_{12} = \{(60,23);(62,34);(59,19);(70,17);(61,22);(60,10);(67,8);(63,27);(69,33);(59,33)\},\ M_{13} = \{(0,67);(5,59);(-7,70);(-3,55);(10,59);(4,64);(-4,61);(0,49);(10,67);(-8,65)\},$$
$$M_{14} = \{(0,-70);(5,-56);(7,-67);(10,-70);(0,-48);(-7,-65);(-4,-59);(-10,-60);(-5,-49);(-11,-62)\},\ M_{15} = \{(30,-34);(20,-45);(23,-26);(21,-41);(24,-36);(20,-11);(19,-42);(27,-39);(33,-17);(15,-51)\},$$
$$M_{16} = \{(60,-11);(63,-44);(70,-17);(56,-41);(49,-2);(55,11);(41,0);(39,-5);(51,-23);(61,5)\},\ M_{17} = \{(70,-69);(58,-70);(55,-67);(67,-56);(45,-54);(61,-47);(60,-41);(69,-39);(49,-59);(53,-58)\},$$
$$M_{18} = \{(-70,5);(-61,13);(-52,-5);(-59,7);(-67,-21);(-64,-14);(-55,17);(-59,3);(-49,23);(-53,26)\},\ M_{19} = \{(20,-70);(30,-68);(32,-56);(34,-67);(21,-60);(25,-59);(18,-49);(15,-62);(11,-61);(19,-54)\},\ M_{20} = \{(-45,-70);(-31,-63);(-40,-60);(-32,-53);(-29,-51);(-21,-49);(-30,-65);(-33,-67);(-27,-61);(-22,-64)\},$$
$$M_{21} = \{(15,70);(22,65);(31,68);(27,59);(23,43);(37,69);(19,62);(28,56);$$

$(29,67);(20,70)\}$, $M_{22}=\{(13,14);(17,19);(23,20);(31,17);(15,25);$ $(11,30);(24,33);(41,28);(16,45);(22,17)\}$, $M_{23}=\{(-20,0);(-22,-5);$ $(-30,-5);(-25,5);(-30,15);(-35,11);(-35,-12);(-20,-10);(-20,10);$ $(-30,5)\}$, $M_{24}=\{(40,-30);(41,-34);(45,-35);(45,-40);(40,-40);$ $(35,-31);(37,-36);(50,-30);(50,-40);(30,-30)\}$, $M_{25}=\{(10,-20);$ $(0,-10);(0,-20);(20,-20);(10,-40);(0,-30);(18,-32);(16,-37);$ $(5,-35);(6,-15)\}$, $M_{26}=\{(-65,-50);(-68,-48);(-65,-30);(-62,-40);$ $(-55,-40);(-58,-41);(-60,-30);(-58,-25);(-51,-31);(-53,-33)\}$, $M_{27}=\{(-70,10);(-68,13);(-65,15);(-62,20);(-57,30);(-61,31);$ $(-65,34);(-67,35);(-50,29);(-60,-10)\}$, $M_{28}=\{(-55,60);(-52,62);$ $(-60,60);(-50,55);(-50,50);(-60,53);(-60,45);(-40,20);(-35,35);$ $(-30,60)\}$, $M_{29}=\{(50,50);(52,55);(60,49);(65,50);(70,45);(65,40);$ $(65,35);(50,35);(50,20);(40,35)\}$, $M_{30}=\{(40,-15);(35,-10);(55,-5);$ $(60,-3);(65,-10);(62,-25);(58,-30);(55,-35);(45,-20);(30,-22)\}$

Решается замкнутая задача обхода множеств с применением итерационного алгоритма. В настоящем и последующем примерах множество X определяется, как уже отмечалось, в виде

$$X=\{x^0\}\bigcup\Big(\bigcup_{i=1}^{N}M_i\Big). \qquad (3.6.1)$$

Для решения вспомогательной ЗК используется метод ветвей и границ (см. [1]). Функция затрат, как уже отмечалось, есть евклидово расстояние. Начальная точка x^0 совпадает с началом координат, т.е. x^0 есть вектор $(0,0)$. В дальнейшем используется термин "общие затраты"; речь идет о затратах, получаемых на каждой итерации после оптимизации трассы (см., в частности, (3.4.20), (3.4.48), (3.4.74)).

Термин "затраты в задаче коммивояжера" касается оптимума затрат в начальной ЗК и в последующих задачах оптимизации маршрута при зафиксированной системе городов: во втором случае имеются в виду варианты задачи (3.2.6) — (3.2.8) при должной конкретизации

$$(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}=(x^{(i)})_{i\in\overline{1,30}}$$

(см. (3.4.27), (3.4.59)).

На первой итерации получены следующие результаты: общие затраты равны 525.26. Затраты в начальной ЗК равны 176.11.

Маршрут и трасса получились следующими:

$$
\begin{gathered}
(0,-10) \in M_{25};\ (-5,-5) \in M_4; \\
(-20,10) \in M_{23};\ (-22,20) \in M_6; \\
(-33,41) \in M_7;\ (-45,59) \in M_9;\ (-50,50) \in M_{28};\ (-50,29) \in M_{27}; \\
(-52,-5) \in M_{18};\ (-53,-33) \in M_{26};\ (-53,-49) \in M_8;\ (-41,-52) \in M_5; \\
(-29,-51) \in M_{20};\ (-17,-46) \in M_3;\ (0,-48) \in M_{14};\ (18,-49) \in M_{19}; \\
(20,-45) \in M_{15};\ (40,-40) \in M_{24};\ (55,-35) \in M_{30};\ (60,-41) \in M_{17}; \\
(60,-11) \in M_{16};\ (60,10) \in M_{12};\ (50,50) \in M_{29};\ (48,59) \in M_{11}; \\
(46,58) \in M_{10};\ (27,59) \in M_{21};\ (10,59) \in M_{13};\ (10,50) \in M_2; \\
(11,30) \in M_{22};\ (5,10) \in M_1.
\end{gathered}
$$

Время счета — 1 секунда.

На второй итерации получены следующие результаты: общие затраты 521.65, затраты в задаче коммивояжера – 523.99. Маршрут и трасса имеют вид:

$$
\begin{gathered}
(0,-10) \in M_{25};\ (-5,-5) \in M_4;\ (-20,10) \in M_{23};\ (-22,20) \in M_6; \\
(-33,41) \in M_7;\ (-45,59) \in M_9;\ (-50,50) \in M_{28};\ (-50,29) \in M_{27}; \\
(-52,-5) \in M_{18};\ (-53,-33) \in M_{26};\ (-53,-49) \in M_8;\ (-41,-52) \in M_5; \\
(-29,-51) \in M_{20};\ (-17,-46) \in M_3;\ (0,-48) \in M_{14};\ (18,-49) \in M_{19}; \\
(20,-45) \in M_{15};\ (50,-40) \in M_{24};\ (60,-41) \in M_{17};\ (60,-3) \in M_{30}; \\
(61,5) \in M_{16};\ (60,10) \in M_{12};\ (50,50) \in M_{29};\ (48,59) \in M_{11}; \\
(46,58) \in M_{10};\ (27,59) \in M_{21};\ (10,59) \in M_{13};\ (10,50) \in M_2; \\
(11,30) \in M_{22};\ (5,10) \in M_1.
\end{gathered}
$$

На третьей итерации маршрут и трасса не изменились — наступила стабилизация результата. Время счета составило менее секунды.

Рассмотрим теперь задачу обхода 50 "окружностей", точнее равномерных "сеток", состоящих из точек на окружностях. Пусть каждая окружность представлена 12 точками, находящимися на равных угловых расстояниях друг от друга, включая точку с нулевой угловой координатой. Таким образом, каждое из множеств M_i двенадцатиэлементно и однозначно определяется центром и радиусом окружности, которые будем обозначать через Q_i и R_i соответственно, здесь $i \in \overline{1,50}$. Используем (3.6.1) при $N = 50$.

Пусть заданы следующие координаты центров окружностей:

$$
\begin{gathered}
O_1=(15,0),\ O_2=(40,0),\ O_3=(75,0),\ O_4=(110,0),\\
O_5=(0,-25),\ O_6=(0,-55),\ Q_7=(0,-80),\ O_8=(0,-110), O_9=(-20,0),\\
O_{10}=(-50,0), O_{11}=(-85,0),\ O_{12}=(-120,0),\ O_{13}=(0,20),\\
O_{14}=(0,45), O_{15}=(0,80),\ O_{16}=(0,115),\ O_{17}=(25,30),\ O_{18}=(30,60),\\
O_{19}=(55,35),\ O_{20}=(70,75),\ O_{21}=(35,100),\ O_{22}=(100,110),\\
O_{23}=(70,110),\ O_{24}=(90,40),\ O_{25}=(105,70),\ O_{26}=(115,40),\\
O_{27}=(60,-30),\ O_{28}=(35,-45),\ O_{29}=(90,-50),\ O_{30}=(110,-25),\\
O_{31}=(100,-90),\ O_{32}=(40,-80),\ O_{33}=(70,-75),\ O_{34}=(70,-110),\\
O_{35}=(35,-110),\ O_{36}=(-40,-40),\ O_{37}=(-80,-35),\ O_{38}=(-60,-80),\\
O_{39}=(-25,-90),\ O_{40}=(-80,-110),\ O_{41}=(-110,-50),\ O_{42}=(-90,-75),\\
O_{43}=(-105,-100),\ O_{44}=(-40,30),\ O_{45}=(-35,70),\ O_{46}=(-80,60),\\
O_{47}=(-100,30),\ O_{48}=(-40,105),\ O_{49}=(-80,110),\ O_{50}=(-100,85)
\end{gathered}
$$

и радиусы окружностей

$$
\begin{gathered}
R_1=R_6=R_{13}=R_{26}=R_{27}=R_{30}=R_{42}=8;\\
R_2=R_7=R_{10}=R_{14}=R_{16}=R_{17}=R_{23}=R_{25}=R_{33}=R_{35}=R_{39}=\\
=R_{43}=R_{50}=10;\\
R_{12}=R_{19}=R_{40}=R_{47}=11;\\
R_4=R_8=R_{18}=R_{21}=R_{24}=R_{32}=R_{34}=R_{37}=R_{41}=R_{44}=R_{49}=12;\\
R_5=R_9=R_{22}=R_{28}=R_{45}=13;\\
R_3=R_{11}=R_{15}=R_{20}=R_{29}=R_{31}=R_{36}=R_{38}=R_{46}=R_{48}=15.
\end{gathered}
$$

На первой итерации получены следующие результаты: общие затраты равны 1210.11. Затраты в начальной ЗК равны 532.22. Маршрут и трасса получились следующие:

$$
\begin{gathered}
(21.93,-4)\in M_1;\ (31.34,-5)\in M_2;\ (62.01,-7.50)\in M3;\\
(104,-10.39)\in M_4;\ (103.07,-21)\in M_{30};\ (82.50,-37.01)\in M_{29};\\
(64,-36.93)\in M_{27};\ (46.26,-51.50)\in M_{28};\ (50.39,-74)\in M_{32};\\
(61.34,-80)\in M_{33};\ (85,-90)\in M_{31};\ (70,-98)\in M_{34};\ (35,-100)\in M_{35};\\
(6,-99.61)\in M_8;\ (-16.34,-85)\in M_{39};\ (-8.66,-75)\in M_7;\\
(-8,-55)\in M_6;\ (-11.26,-31.50)\in M_5;\ (-20,-13)\in M_9;\\
(-40,18)\in M_{44};\ (-45,-8.66)\in M_{10};\ (-52.99,-32.50)\in M_{36};\\
(-75,-80)\in M_{38};\ (-85.50,-100.47)\in M_{40};\ (-96.34,-95)\in M_{43};\\
(-96.93,-79)\in M_{42};\ (-98,-50)\in M_{41};\ (-92,-35)\in M_{37};
\end{gathered}
$$

$$(-97.99, -7.50) \in M_{11};\ (-110.47, 5.50) \in M_{12};\ (-100, 41) \in M_{47};$$
$$(-95, 60) \in M_{46};\ (-91.34, 80) \in M_{50};\ (-74, 99.61) \in M_{49};$$
$$(-47.50, 92.01) \in M_{48};\ (-35, 83) \in M_{45};\ (-7.50, 92.99) \in M_{15};$$
$$(5, 106.34) \in M_{16};\ (45.39, 94) \in M_{21};\ (62.50, 87.99) \in M_{20};$$
$$(75, 101.34) \in M_{23};\ (93.50, 98.74) \in M_{22};\ (100, 78.66) \in M_{25};$$
$$(108.07, 44) \in M_{26};\ (78, 40) \in M_{24};\ (64.53, 40.50) \in M_{19};\ (30, 38.66) \in M_{17};$$
$$(24, 49.61) \in M_{18};\ (8.66, 40) \in M_{14};\ (4, 13.07) \in M_{13}.$$

Время счета — 17 секунд.

На второй итерации маршрут и трасса не изменились — наступила стабилизация результата. Время счета составило 33 секунды. Приведенный выше итерационный алгоритм и версия метода ветвей и границ, как его часть, были реализованы в виде программы для ПЭВМ на языке программирования C++ (в его версии Borland C++ Builder 6.0), работающей в среде Windows (не позднее Windows 95). Вычислительный эксперимент проводился на персональном компьютере с процессором Intel Pentium-4 2,26 гГц и объемом ОЗУ 512 мБ с установленной операционной системой Windows XP Professional Sp2. Вычислительная часть реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. При решении задач на плоскости программа позволяет в графическом виде отображать маршрут и трассу, имеется возможность увеличения выбранного фрагмента траектории обхода множеств.

3.7. Стабилизация итерационной процедуры

Примеры реализации итерационной процедуры, рассматриваемые ранее, сопровождались быстрой стабилизацией соответствующей последовательности. В этой связи уместно специально обсудить вопрос о решениях (пары маршрут-трасса) соответствующих вышеупомянутой стабилизации. В связи с этим вопросом полезно охарактеризовать общий шаг итерационной процедуры (начальная ЗК достаточно подробно исследовалась в (3.4.5)–(3.4.18)).

Пусть мы располагаем упорядоченной парой

$$\lambda = (\omega, (y_i)_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S} \tag{3.7.1}$$

со следующим свойством экстремальности по второй компоненте:

$$(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in (\mathbf{SOL})[\omega]. \tag{3.7.2}$$

Из (3.4.4) и (3.7.2) вытекает, что

$$(y_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\omega(i)}. \tag{3.7.3}$$

При этом справедливо следующее равенство

$$\Pi((y_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}(\omega). \tag{3.7.4}$$

Из (3.7.3) следует, что $y_j \in M_{\omega(j)}\ \ \forall j \in \overline{1,N}$. Напомним в связи с (3.7.2)–(3.7.4) соотношения (3.4.24)–(3.4.26), (3.4.49)–(3.4.51).

Введем в рассмотрение систему городов

$$(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \triangleq \mathbf{t}(\lambda) \in \mathfrak{M}, \tag{3.7.5}$$

а также следующую упорядоченную пару

$$\Lambda \triangleq \mathbf{T}(\lambda) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}. \tag{3.7.6}$$

С учетом представления (3.1.17), (3.7.1) и (3.7.4) имеем равенство

$$\pi(\lambda) = \Pi((y_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}(\omega).$$

Полагая $\Omega \triangleq \overset{-1}{\omega}$, имеем маршрут $\Omega \in \mathbb{P}$, для которого из (3.2.54) и (3.7.5) вытекает равенство

$$(z_i)_{i\in\overline{1,N}} = (y_{\Omega(i)})_{i\in\overline{1,N}},$$

т.е $z_j = y_{\Omega(j)}\ \ \forall j \in \overline{1,N}$. В свою очередь, из (3.7.6) вытекает, что

$$\Lambda = ((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega). \tag{3.7.7}$$

Располагая системой городов (3.7.5), приступаем к решению отвечающей ей ЗК (см. (3.2.6)). При этом учитываем цепочку равенств

$$\pi(\lambda) = (w \circ \mathbf{T})(\lambda) = w(\mathbf{T}(\lambda)) = w(\Lambda) = w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega). \tag{3.7.8}$$

Напомним также, что (см. (3.7.6), (3.7.8))

$$(z_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M},$$

т.е. $z_1 \in M_1, ..., z_N \in M_N$. В связи с (3.2.6) отметим, что

$$W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] : \mathbb{P} \longrightarrow [0, \infty[$$

определяется правилом: если $\alpha \in \mathbb{P}$, то

$$W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) = \mathbf{c}(x^0, z_{\alpha(1)}) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(z_{\alpha(i)}, z_{\alpha(i+1)}) + \mathbf{f}(z_{\alpha(N)})\ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.7.9}$$

В связи с (3.7.8), (3.7.9) напомним (3.2.15):

$$w(\Lambda) = W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\omega). \tag{3.7.10}$$

Сама задача (3.2.6) в нашем случае имеет вид:

$$W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) \longrightarrow \min, \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.7.11}$$

Значение (экстремум) задачи (3.7.11) есть величина

$$(\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbb{P}} W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) \tag{3.7.12}$$

и согласно (3.7.8), (3.7.10) справедливо следующее неравенство

$$(\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] \le w(\Lambda) = \pi(\lambda). \tag{3.7.13}$$

С другой стороны, согласно (3.7.9) имеем непустое множество

$$(\mathrm{sol})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \{\alpha_0 \in \mathbb{P} | W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\alpha_0) = (\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}]\}.$$

Пусть теперь $\sigma \in (\mathrm{sol})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}]$. Тогда $\sigma \in \mathbb{P}$ и при этом

$$W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\sigma) = (\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{3.7.14}$$

Отметим, в частности, что $\sigma \in \mathbb{P}$; как следствие, имеем упорядоченную пару

$$\Xi \triangleq ((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \sigma) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}, \tag{3.7.15}$$

для которой согласно (3.2.15) справедливо равенство

$$w(\Xi) = W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\sigma).$$

С учетом (3.7.14) мы получаем теперь, что

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \sigma) = w(\Xi) = (\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}];$$

используя (3.7.13), преобразуем последнее выражение к неравенству

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \sigma) = w(\Xi) \le \pi(\lambda). \tag{3.7.16}$$

С другой стороны, из (3.7.15) вытекает, что

$$\xi \triangleq \overset{-1}{T}(\Xi) \in \mathbf{S}. \tag{3.7.17}$$

Из (3.7.15) и (3.7.17) легко следует, что

$$\xi = (\sigma, (z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.18}$$

В самом деле, согласно (3.7.17) ξ есть такой единственный элемент множества $\mathbf{S}$, что $\mathbf{T}(\xi) = \Xi$. С другой стороны, из (3.7.5) вытекает, что

$$z_{\sigma(j)} \in M_{\sigma(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}.$$

Иными словами, имеем в (3.7.18) следующий кортеж:

$$(z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \prod_{i=1}^{N} M_{\sigma(i)}. \tag{3.7.19}$$

Поскольку $\sigma \in \mathbb{P}$, то согласно (3.1.8), (3.7.19)

$$\nu \triangleq (\sigma, (z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}.$$

При этом $\mathbf{T}(\nu) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$ согласно (3.2.30), причем (см. (3.2.31))

$$\mathbf{T}(\nu) = (\mathbf{t}(\nu), \sigma). \tag{3.7.20}$$

Отметим, что $\mathbf{t}(\nu) = \mathbf{t}(\sigma, (z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}})$, а тогда $\mathbf{t}(\nu) \in \mathfrak{M}$,

$$\mathbf{t}(\nu) \in \prod_{i=1}^{N} M_i,$$

поэтому $\mathbf{t}(\nu) : \overline{1,N} \longrightarrow X$ и при этом

$$\mathbf{t}(\nu)(j) \in M_j \quad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{3.7.21}$$

Согласно (3.2.29) имеем для точек (3.7.21) следующее представление:

$$\mathbf{t}(\nu)(j) = z_{\sigma(\overset{-1}{\sigma}(j))} = z_j \;\; \forall j \in \overline{1,N}.$$

Иными словами, $\mathbf{t}(\nu) = (z_i)_{i\in\overline{1,N}}$ и согласно (3.7.15) и (3.7.20)

$$\mathbf{T}(\nu) = ((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \sigma) = \Xi.$$

Стало быть, $\nu \in \mathbf{S} : \mathbf{T}(\nu) = \Xi$. Однако согласно (3.7.17) ξ есть единственный элемент $\mathbf{S}$, для которого $\mathbf{T}(\xi) = \Xi$. Поэтому $\nu = \xi$ и, следовательно, справедливо (3.7.18). При этом согласно предложению 3.3.3

$$\pi(\xi) = (w \circ \mathbf{T})(\xi) = w(\mathbf{T}(\xi)) = w(\Xi).$$

С учетом (3.7.16) получаем следующее неравенство

$$\pi(\xi) \le \pi(\lambda). \tag{3.7.22}$$

Теперь, располагая маршрутом $\sigma = pr_1(\xi)$, рассмотрим задачу (3.4.2) при $\beta = \sigma$, т.е. задачу

$$\Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \;\; (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\sigma(i)}. \tag{3.7.23}$$

Пусть $(\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathbf{SOL})[\sigma]$ (см. (3.4.4)), т.е.

$$(\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\sigma(i)} \tag{3.7.24}$$

и при этом справедливо равенство

$$\Pi((\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\sigma] = \min_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\prod_{i=1}^{N} M_{\sigma(i)}} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.25}$$

Заметим теперь, что согласно (3.1.8) и (3.7.22)

$$\eta \triangleq (\sigma, (\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}, \tag{3.7.26}$$

причем $\sigma = pr_1(\eta)$ и $(\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}} = pr_2(\eta)$. Поэтому (см. (3.1.15), (3.1.17)) для упорядоченной пары (3.7.26) имеем свойство:

$$\pi(\eta) = \Pi((\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.27}$$

С другой стороны, согласно (3.7.18) имеем равенства

$$(pr_1(\xi) = \sigma)\&(pr_2(\xi) = (z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.28}$$

Вновь используя (3.1.15), (3.1.17) при $s = \xi$, получаем, что

$$\pi(\xi) = \Pi((z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.29}$$

Напомним, что (см. (3.1.8), (3.7.15), (3.7.16)) $(z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} M_{\sigma(i)}$; см. также (3.7.17). Тогда согласно (3.7.25)

$$\Pi((\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}}) \le \Pi((z_{\sigma(i)})_{i\in\overline{1,N}}).$$

Из (3.7.27), (3.7.29) получаем очевидное неравенство

$$\pi(\eta) \le \pi(\xi),$$

из которого с учетом (3.7.22) вытекает, что

$$\pi(\eta) \le \pi(\lambda). \tag{3.7.30}$$

Здесь $\eta = (\sigma, (\mathbf{y})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}$ (см. (3.7.24)) таково, что

$$(\mathbf{y})_{i\in\overline{1,N}} \in (\mathbf{SOL})[\sigma].$$

Итак, $\eta \in \mathbf{S}$ есть пара маршрут-трасса, экстремальная по второй компоненте, для которой справедливо (3.7.28), (3.7.30), т.е. реализуется “неухудшение” результата.

Таким образом, выбрав произвольное решение $\lambda \in \mathbf{S}$, для которого

$$pr_2(\lambda) \in (\mathbf{SOL})[pr_1(\lambda)],$$

мы, последовательно применяя процедуру раздела 3.4, получили решение $\eta \in \mathbf{S}$ такое, что

$$pr_2(\eta) \in (\mathbf{SOL})[pr_1(\eta)]$$

и, кроме того, реализуется неравенство (3.7.30).

Тем самым мы охарактеризовали общий шаг (этап) итерационной процедуры раздела 3.4. Теперь имеет смысл обсудить случай стабилизации нашей процедуры, т.е. рассмотреть ситуацию (реализуемую в примерах, а также в ходе проведения более обширного вычислительного эксперимента в [53] и [56]), когда реализуется равенство

$$\lambda = \eta. \tag{3.7.31}$$

Итак, полагаем до конца настоящего раздела выполненным равенство (3.7.31). Тогда

$$(pr_1(\lambda) = pr_1(\eta))\&(pr_2(\lambda) = pr_2(\eta)),$$

т.е. справедливы следующие два равенства

$$(\omega = \sigma)\&((y_i)_{i\in\overline{1,N}} = (\mathbf{y}_i)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.32}$$

Напомним с учетом (3.7.32), что

$$w(\Lambda) = w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) = w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \sigma),$$

где $(z_i)_{i\in\overline{1,N}} = \mathbf{t}(\lambda) = \mathbf{t}(\omega, (y_i)_{i\in\overline{1,N}})$. Кроме того, из (3.7.14) и (3.7.32) вытекает, что

$$W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\omega) = (\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{3.7.33}$$

Наконец, отметим, что из (3.2.15) вытекает свойство:

$$w((x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha) = W[(x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) \ \ \forall (x^{(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.7.34}$$

С учетом (3.7.5) и (3.7.34) имеем теперь

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha) = W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.7.35}$$

Из (3.7.33), (3.7.35) вытекает, что справедлива цепочка равенств

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) = W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\omega) = (\mathrm{val})[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{3.7.36}$$

Из (3.7.12) и (3.7.36) получаем, что

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) \leq W[(z_i)_{i\in\overline{1,N}}](\alpha) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}.$$

С учетом (3.7.35) мы получаем систему неравенств

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) \leq w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.7.37}$$

Напомним, что согласно (3.7.15) и (3.7.32) справедливо равенство

$$\Xi = ((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega), \tag{3.7.38}$$

$\Xi \in \mathfrak{M} \times \mathbb{P}$. Из (3.7.25), (3.7.32) получаем, что в нашем случае

$$\Pi((y_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \mathcal{V}[\omega] = \min_{(x_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\prod_{i=1}^N M_{\omega(i)}} \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.39}$$

В силу (3.1.15), (3.1.17)

$$\pi(\alpha, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P} \ \ \forall (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\alpha(i)}. \tag{3.7.40}$$

В частности, из (3.7.40) следует система равенств

$$\pi(\omega, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \ \ \forall (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\omega(i)}. \tag{3.7.41}$$

Заметим, что согласно (3.7.1) и (3.7.41) справедлива цепочка равенств

$$\pi(\lambda) = \pi(\omega, (y_i)_{i\in\overline{1,N}}) = \Pi((y_i)_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.42}$$

Из (3.7.8) и (3.7.42) следует, в свою очередь, равенство

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) = \Pi((y_i)_{i\in\overline{1,N}}).$$

Учитывая (3.7.39) и последнее равенство, получаем неравенства

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) \leq \Pi((x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \ \ \forall (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\omega(i)}. \tag{3.7.43}$$

Выберем произвольно $(\widetilde{z}_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$. Тогда $\widetilde{z}_1 \in M_1, ..., \widetilde{z}_N \in M_N$ Поэтому $\widetilde{z}_{\omega(i)} \in M_{\omega(i)} \ \ \forall i \in \overline{1,N}$. Иными словами, справедливо включение

$$(\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\omega(i)}. \tag{3.7.44}$$

С учетом (3.7.43) получаем теперь неравенство

$$w((z_i)_{i\in\overline{1,N}}, \omega) \leq \Pi((\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i\in\overline{1,N}}). \tag{3.7.45}$$

Из (3.1.8) и (3.7.44) мы получаем, что

$$\widetilde{\lambda} \triangleq (\omega, (\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i \in \overline{1,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{3.7.46}$$

Из (3.7.41) и (3.7.46) вытекает очевидное равенство

$$\pi(\widetilde{\lambda}) = \pi(\omega, (\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i \in \overline{1,N}}) = \Pi((\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i \in \overline{1,N}})$$

и, как следствие, из (3.7.45) имеем:

$$w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \leq \pi(\widetilde{\lambda}) = \pi(\omega, (\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i \in \overline{1,N}}).$$

Используя предложение 3.3.3 и последнее неравенство, приходим к оценке

$$w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \leq w(\mathbf{T}(\widetilde{\lambda})), \tag{3.7.47}$$

где согласно (3.2.31)

$$\mathbf{T}(\widetilde{\lambda}) = (\mathbf{t}(\widetilde{\lambda}), pr_1(\widetilde{\lambda})) = (\mathbf{t}(\omega, (\widetilde{z}_{\omega(i)})_{i \in \overline{1,N}}), \omega) =$$

$$= ((\widetilde{z}_{\omega(\Omega(i))})_{i \in \overline{1,N}}, \omega) = ((\widetilde{z}_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega), \tag{3.7.48}$$

поскольку $\Omega = \overset{-1}{\omega}$ согласно определению, используемому при обосновании общего шага (этапа) процедуры. Из (3.7.47), (3.7.48) вытекает неравенство

$$w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \leq w((\widetilde{z}_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega).$$

Поскольку выбор $(\widetilde{z}_i)_{i \in \overline{1,N}}$ был произвольным, установлено, что

$$w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \leq w((x_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \;\; \forall (x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M}. \tag{3.7.49}$$

Объединяя (3.7.37) и (3.7.49), мы получим, что

$$(w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \leq w((x_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \;\; \forall (x_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathfrak{M})\&$$

$$\&(w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \omega) \leq w((z_i)_{i \in \overline{1,N}}, \alpha) \; \forall \alpha \in \mathbb{P}), \tag{3.7.50}$$

если только выполнено (3.7.31). Из (3.7.50) вытекает, что в случае (3.7.31), который отвечает содержательно стабилизации итерационной процедуры, мы получаем, что решение в виде пары маршрут-трасса (3.7.31) реализует такую пару Λ (3.7.7) (при погружении в $\mathfrak{M} \times \mathbb{P}$), что никакие изменения упорядоченной пары Λ только по первой или только по второй компонентам (упорядоченной пары Λ) не приводят к улучшению достигаемого (на значениях w) качества.

Глава 4

Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования

Настоящая глава содержит развитие подхода, изложенного в двух предыдущих главах, и касается вопросов решения задач маршрутизации, осложненных ограничениями в виде т.н. условий предшествования. Речь идет о задачах последовательного обхода множеств (будем предполагать для простоты их конечными) при некоторых ограничениях на порядок посещения, а именно: заданы некоторые адресные пары "отправитель — получатель", что предполагает более раннее посещение "отправителя" в сравнении с "получателем" (разумеется и "отправитель", и "получатель" являются некоторыми целевыми множествами). Упомянутое требование может быть связано с необходимостью обязательных перемещений грузов, корреспонденции в направлении, соответствующем каждой из адресных пар. Можно полагать, что эти адресные пары задаются на пространстве индексов, посредством которых далее нумеруются соответствующие целевые множества.

Здесь же отметим, что появление упомянутых ограничений в виде условий предшествования может быть связано с частичным упорядочением последовательности тех или иных работ. Вопросы такого рода возникают в процессе организации морских и авиационных перевозок. Можно указать и некоторые другие области применения. В частности, условия предшествования могут возникать в связи с технологическими ограничениями в задачах атомной энергетики.

В связи с постановками задач маршрутизации в условиях ограничений отметим исследования [25-27], в которых, в частности, рассматривалась так называемая задача курьера (см. [56] и библиографию [56]). Последняя является усложненным вариантом задачи коммивояжера (ЗК), решению которой была посвящена глава 2. В связи с многочисленной литературой по ЗК рекомендуем заинтересованному читателю ознакомиться с обширной библиографией [25, 26, 27], и, в частности с работами [5, 44], где рассматривалась процедура решения с использованием МДП. Отметим также работы [23, 61, 62], посвященные задаче, именуемой в [25] ЗК с выбором (речь идет о посещении кластеров в пространстве "городов"). В рамках рассматриваемого пособия осуществляется своеобразный синтез двух упомянутых усложненных аналогов ЗК. Возникающую при этом задачу последовательного обхода множеств с ограничениями в виде условий предшествования именуем далее обобщенной задачей курьера (ОЗК). Конструкции, приводимые ниже, опираются на исследования [45, 46, 47, 48, 50]. Последние, в свою очередь, используют методы [16, 17, 18, 52, 53, 19, 13, 58, 59, 49, 56].

Как и в главе 3, [16, 17, 18, 52, 53, 19, 13, 58, 59, 49, 56], решение задачи о посещении конечной системы множеств определяется, как уже отмечалось выше, в виде пары "маршрут — трасса". Маршрут определяется в виде перестановки индексов и соответствует аналогичному понятию в ЗК. Трасса, или траектория, определяется набором точек на целевых множествах, занумерованных в соответствии с маршрутом. Как и в построениях главы 3, декомпозиция исходной задачи в совокупность задач выбора маршрута и построения трассы может приводить к потере качества. Как видно из главы 3, для построения оптимального решения следует "выращивать" маршрут и трассу совместно. В задаче, рассматриваемой ниже, упомянутые "выращивания" существенно осложняются ограничениями. В этой связи потребуется некоторое преобразование исходной задачи к эквивалентной (по результату), но более простой в логическом отношении вспомогательной задаче, из решения которой и будет извлекаться оптимальная пара "маршрут — трасса". При этом преобразовании ограничения в виде условий предшествования будут трансформироваться в ограничения на текущие переходы с множества на множество. Речь идет об искусственном сокращении списка элементарных задач по мере посещения целевых множеств. Это позволяет построить нужную и весьма экономичную схему решения на основе МДП в преобразованной задаче. Мы рассматриваем далее иллюстративные примеры решения исходной задачи, исследование которых поможет читателю разобраться в существе предлагаемого метода решения. Будет приведен также пример решения ОЗК с использованием ПЭВМ: рассматривается задача о посещении 27 двенадцатиэлементных множеств при наличии 25 адресных пар "отправитель—получатель".

Будем использовать конструкции [57] в связи с общими потребностями. Отметим также исследования [49, 56] в связи с построением экономичной версии МДП на основе использования условий предшествования для целей сокращения массива насчитываемых значений функции Беллмана.

Общие вопросы, связанные с маршрутизацией заданий при наличии ограничений различных типов, рассматривались в [56]. В частности, в [56] рассматриваются несколько более общие постановки, в рамках которых допускается изменение целевых множеств в зависимости от точки, из которой осуществляется перемещение на то или иное множество.

4.1. Содержательная постановка задачи

Мы уточняем в настоящем разделе постановку ОЗК, придерживаясь, однако, содержательного способа изложения при минимуме обозначений общего характера (имеются в виду обозначения главы 1).

Полагаем в дальнейшем фиксированными непустое конечное множество X произвольной природы, точку $x^0 \in X$ (иногда именуемую базой), натуральное число N, $N \geq 2$, определяющее количество множеств, подлежащих посещению. Упомянутые множества обозначаются в дальнейшем как $M_1, M_2, ..., M_N$.

В связи с общими понятиями и обозначениями отметим, наряду с главой 1, пособие [57], основных соглашений которого мы придерживаемся в дальнейшем.

Напомним, что через $\mathbb{R}$ обозначается вещественная прямая, все промежутки которой обозначаем квадратными скобками [57, с. 54]; $\mathcal{N} = \{1; 2; ...\}$, $\mathcal{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathcal{N} = \{0; 1; 2; ...\}$, где $\{0\}$ есть одноэлементное множество, содержащее число 0. Если $p \in \mathcal{N}_0$ и $q \in \mathcal{N}_0$, то, как и ранее,

$$\overline{p, q} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathcal{N}_0 \,|\, (p \leq i)\&(i \leq q)\};$$

мы не исключаем случай $\overline{p, q} = \varnothing$ (здесь и ниже $\varnothing$ — пустое множество), возникающий при $q < p$. Если $k \in \mathcal{N}$, то, (см. (1.1.21))

$$\overline{1, k} = \{i \in \mathcal{N} \,|\, i \leq k\}.$$

Напомним, что в наших условиях семейство $\mathrm{Fin}(X)$ всех непустых конечных п/м X совпадает с семейством всех непустых п/м X (семейством называем, как и раньше, всякое множество, все элементы которого — множества). Итак, у нас фиксирован кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}} \,:\, \overline{1, N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X). \tag{4.1.1}$$

Множества M_i в (4.1.1) именуем целевыми, следуя соглашениям главы 3. Всюду в дальнейшем постулируем, что выполнены условия (3.1.4): точка

x^0 не принадлежит ни одному целевому множеству, последние попарно не пересекаются. Можно представлять себе кортеж (4.1.1) как систему “островов”, которые следует посетить из точки x^0, лежащей вне этих “островов”. Мы располагаем эти посещения в той или иной последовательности α, полагая, что α — перестановка в $\overline{1,N}$, т.е. маршрут в смысле глав 2 и 3. Сами точки посещения выбираем из занумерованных множеств

$$x_1 \in M_{\alpha(1)}, ..., x_N \in M_{\alpha(N)}. \tag{4.1.2}$$

Итак, мы организуем систему перемещений (см. (3.1.5))

$$(x_0 = x^0) \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow ... \longrightarrow (x_N \in M_{\alpha(N)}), \tag{4.1.3}$$

распоряжаясь при этом и выбором α, и выбором точек посещения (4.1.2). Такие соглашения использовались в главе 3.

Особенностью рассматриваемой здесь задачи является то, что перестановка (маршрут) α должна удовлетворять некоторым дополнительным ограничениям. Обсудим эти ограничения.

Пусть $n \in \mathcal{N}$ и заданы следующие два кортежа индексов:

$$(p_i)_{i\in\overline{1,n}} \,:\, \overline{1,n} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{4.1.4}$$

$$(q_i)_{i\in\overline{1,n}} \,:\, \overline{1,n} \longrightarrow \overline{1,N}; \tag{4.1.5}$$

рассматриваем (4.1.4) как кортеж отправителей, а (4.1.5) как кортеж получателей. Предполагается, что каждый отправитель должен посещаться ранее соответствующего получателя; если $j \in \overline{1,n}$, то в цепочке (4.1.3) индексы $\mathbf{i}_1 \in \overline{1,N}$ и $\mathbf{i}_2 \in \overline{1,N}$, для которых

$$\alpha(\mathbf{i}_1) = p_j, \;\; \alpha(\mathbf{i}_2) = q_j$$

должны быть такими, что $\mathbf{i}_1 < \mathbf{i}_2$. Для более точной формализации данного условия нам потребуется понятие перестановки, обратной по отношению к заданной (см. главу 1). В целях полноты изложения напомним соответствующие понятия.

Как и раньше, через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1,N}$: $\mathbb{P}$ есть (см. главу 1) множество всех отображений

$$\alpha \,:\, \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,N},$$

для каждого из которых выполнены следующие два условия:

1)$\forall k \in \overline{1,N} \;\exists l \in \overline{1,N} \,:\, k = \alpha(l)$;

2) $\forall j_1 \in \overline{1,N}\ \forall j_2 \in \overline{1,N}$

$$(\alpha(j_1) = \alpha(j_2)) \Longrightarrow (j_1 = j_2).$$

В связи с 1), 2) конструируем при всяком выборе $\alpha \in \mathbb{P}$ перестановку $\overset{-1}{\alpha} \in \mathbb{P}$, обратную к α:

$$\alpha(\overset{-1}{\alpha}(k)) = \overset{-1}{\alpha}(\alpha(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1,N}. \tag{4.1.6}$$

Тогда упомянутое выше требование, связанное с перемещением от каждого отправителя к соответствующему получателю, сводится к системе неравенств

$$\overset{-1}{\alpha}(p_i) < \overset{-1}{\alpha}(q_i) \quad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{4.1.7}$$

Это обстоятельство легко проверяется с учетом (4.1.6). Тогда

$$\mathbb{A} \overset{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \overset{-1}{\alpha}(p_i) < \overset{-1}{\alpha}(q_i) \quad \forall i \in \overline{1,n}\} \tag{4.1.8}$$

есть множество всех допустимых перестановок в $\overline{1,N}$, или множество всех допустимых маршрутов. Вопрос о непустоте множества $\mathbb{A}$ (4.1.8), т.е. вопрос о совместности ограничений исследуемой далее задачи, мы обсудим позже (это потребует наложения некоторых дополнительных условий).

Для целей оценивания перемещений в (4.1.3), как и раньше, используем следующие два отображения:

$$\mathbf{c} : X \times X \longrightarrow [0, \infty[\tag{4.1.9}$$

(в рассматриваемом сейчас случае конечного множества X функция (4.1.9) определяет матрицу затрат по перемещениям между точками множества X),

$$\mathbf{f} : X \longrightarrow [0, \infty[. \tag{4.1.10}$$

В (4.1.10) определена функция оценки терминальных состояний (поскольку X — конечное множество, то отображение (4.1.10) сводится к вектору). Роль (4.1.9), (4.1.10) в оценивании системы перемещений (4.1.3) сводится к формированию значения

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i) + \mathbf{f}(x_N) \tag{4.1.11}$$

совокупных затрат. Величина (4.1.11), подобная (3.1.10) может, конечно, определяться для любых перемещений

$$(x_0 \in X) \longrightarrow (x_1 \in X) \longrightarrow ... \longrightarrow (x_N \in X),$$

но для наших целей важна конкретизация (4.1.3). В этой конкретизации затраты также зависят явным образом только от точек посещения $x_0, x_1, ..., x_N$, но сама возможность выбора этих точек определяется маршрутом α, см. (4.1.3).

Таким образом, мы, распоряжаясь выбором маршрута $\alpha \in \mathbb{A}$ и трассы вида (4.1.3), стремимся минимизировать значение (4.1.11). В этом и состоит содержательная постановка ОЗК: мы рассматриваем ОЗК как задачу о последовательном посещении множеств кортежа (4.1.1) при условии, что выбор маршрута (перестановки индексов) стеснен ограничениями в виде условий предшествования.

4.2. Математическая постановка задачи; уточнение ограничений

Введем ряд обозначений, относящихся к формализации ОЗК. Прежде всего мы сопоставим каждому маршруту множество всевозможных трасс, согласованных с данным маршрутом (в содержательном отношении речь идет о переборе всех трасс вида (4.1.3)). Наши определения соответствуют [45]—[50] и отличаются только несущественными техническими деталями.

Если $k \in \mathcal{N}$, то через $\mathfrak{X}_k$ обозначаем множество всех кортежей:

$$(x_i)_{i \in \overline{0,k}} : \overline{0,k} \longrightarrow X. \tag{4.2.1}$$

Тогда при всяком выборе $\alpha \in \mathbb{P}$ через $\mathfrak{X}[\alpha]$ обозначаем множество всех кортежей $(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_N$ (см. (4.2.1)), для каждого из которых $x_0 = x^0$ и $x_j \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}$. Иными словами,

$$\mathfrak{X}[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_N \,|\, (x_0 = x^0) \& (x_j \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N})\}. \tag{4.2.2}$$

Тогда упорядоченную пару $(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}})$, где $\alpha \in \mathbb{A}$ и $(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]$, называем далее парой маршрут—трасса и рассматриваем в виде одного из решений ОЗК; допустимость такого совокупного решения связывается в существенной части с условием $\alpha \in \mathbb{A}$. Тогда

$$\mathbb{S} \stackrel{\triangle}{=} \{(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{X}_N \,|\, (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]\} \tag{4.2.3}$$

назовем множеством (всех) допустимых решений рассматриваемой ОЗК. Используем далее в качестве основной задачу

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i) + \mathbf{f}(x_N) \longrightarrow \min, \quad (\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{S}. \tag{4.2.4}$$

Критерий задачи (4.2.4) не зависит явным образом от α; однако конкретный выбор $\alpha \in \mathbb{A}$ определяет запас возможных трасс (траекторий). Таким образом, в процессе минимизации критерия (4.1.11) участвуют и маршрут, и трасса.

Через $\mathcal{K}$ условимся обозначать семейство всех непустых п/м $\overline{1,n}$.

Будем полагать в отношении кортежей (4.1.4), (4.1.5) выполненным следующее

Условие 4.2.1. $\forall K \in \mathcal{K}\, \exists i \in K\ :\ p_i \neq q_j \quad \forall j \in K.$

В качестве простейшего следствия данного условия отметим, что

$$p_j \neq q_j \quad \forall j \in \overline{1,n}. \tag{4.2.5}$$

Свойство (4.2.5) делает, кстати, содержательным само определение (4.1.8). Отметим также, что условие 3.1, постулируемое в дальнейшем, гарантирует [56], [46]—[48] совместность ограничений в задаче (4.2.4). Удобно, однако, поставить вопрос шире, привлекая так называемые укороченные задачи, т. е. задачи, являющиеся вариантами ОЗК в условиях, когда начальное состояние может отличаться от x^0, а набор множеств из кортежа (4.1.1) может быть неполным. Отметим, что упомянутые укороченные задачи обеспечивают возможность применения МДП, поскольку позволяют сформировать функцию Беллмана. Однако особенностью ОЗК являются "неудобные" ограничения (см. (4.1.8)), относящиеся к условиям на маршрут в целом. Это затрудняет непосредственное использование МДП в задаче (4.2.4). В [56], [45]—[50] предлагается по этой причине некоторое эквивалентное преобразование ограничений задачи. Речь идет о сведении условий предшествования к некоторым новым условиям на текущие переходы, т. е. к условиям, реализующимся по мере развития процесса. Рассмотрим вышеупомянутое преобразование. Нам потребуются для этого некоторые новые обозначения.

Через $\mathbf{N}$ (через $\mathfrak{N}$) обозначаем, как и ранее, семейство всех (всех непустых) п/м $\overline{1,N}$. Если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\Sigma[K] \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \overline{1,n} \,|\, (p_i \in K)\&(q_i \in K)\}. \tag{4.2.6}$$

С учетом условия 4.2.1 можно показать, что при $K \in \mathfrak{N}$

$$K \backslash \{q_j\ :\ j \in \Sigma[K]\} \neq \varnothing. \tag{4.2.7}$$

В самом деле, при $\Sigma[K] = \varnothing$ свойство (4.2.7) очевидно; если же $\Sigma[K] \neq \varnothing$, то $\Sigma[K] \in \mathcal{K}$ и для некоторого $i \in \Sigma[K]$ имеет место $p_i \in K$ и

$$p_i \neq q_j \quad \forall j \in \Sigma[K],$$

а тогда $p_i \in K \backslash \{q_j \,:\, j \in \Sigma[K]\}$. Следовательно, (4.2.7) выполняется во всех возможных случаях $K \in \mathfrak{N}$, а тогда множество в левой части (4.2.7) непременно содержится в $\mathfrak{N}$. С учетом этого свойства определяем отображение

$$\mathbf{I} \,:\, \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N} \tag{4.2.8}$$

посредством следующего условия: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$\mathbf{I}(K) \stackrel{\triangle}{=} K \backslash \{q_j \,:\, j \in \Sigma[K]\}. \tag{4.2.9}$$

Простейший пример. Пусть $N = 10, n = 2, p_1 = 3, q_1 = 2, p_2 = 7, q_2 = 9$. Если K есть множество всех четных чисел из $\overline{1, N}$ (в этом случае $K \in \mathfrak{N}$), то $\Sigma[K] = \varnothing$ и потому $\mathbf{I}(K) = K$. Если же $\mathbb{K} = \overline{1, 5}$, то $\Sigma[\mathbb{K}] = \{1\}$ и при этом $\mathbf{I}(\mathbb{K}) = \overline{1, 5} \backslash \{2\} = \{1\} \bigcup \overline{3, 5}$.

Мы будем вкладывать следующий смысл в процедуру использования $\mathbf{I}$ (4.2.8), (4.2.9): если K определяет список остающихся заданий, то наша процедура должна осуществить “вычеркивание” части этих заданий по посещению целевых множеств; в (4.2.9) как раз и указан алгоритм такого “вычеркивания”. Тогда $\mathbf{I}(K)$ определяет список оставшихся после вычеркивания заданий на соответствующем этапе построения пары маршрут-трасса. Полезно отметить, что задания с индексами из $K \backslash \mathbf{I}(K)$ “не пропадут” по мере дальнейшего развития процесса (и до них дойдут руки), но вот на ближайшем шаге (этапе) задания с такими индексами следует исключить. Для более точного представления упомянутой ситуации нам потребуется ввести частичные маршруты, согласующиеся с правилом (4.2.9)

Если $K \in \mathbf{N}$, то через $|K|$ обозначаем (см. главу 1) мощность множества K. Напомним, что

$$(|K| \in \overline{1, N} \quad \forall K \in \mathfrak{N}) \& (|\varnothing| = 0).$$

Для $K \in \mathfrak{N}$ имеем непустое множество $(bi)[K]$ всех биекций “отрезка” $\overline{1, |K|}$ на K.

Тогда $\forall K \in \mathfrak{N}$

$$(\mathbf{I} - bi)[K] \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in (bi)[K] \,|\, \alpha(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l) \,:\, l \in \overline{k, |K|}\}) \quad \forall k \in \overline{1, |K|}\}; \tag{4.2.10}$$

имеем в (4.2.10) множество всех согласующихся с $\mathbf{I}$ частичных маршрутов в задаче о посещении множеств M_i, $i \in K$. В этом определении мы ориентируемся (с формальной точки зрения) не на условия предшествования (см. (4.1.9)), а на ограничения, связанные с правилом “вычеркивания” на основе

$\mathbf{I}$ (4.2.8), (4.2.9) и имеющие смысл требований к осуществлению текущих переходов с одного целевого множества на другое.

Полагаем для краткости

$$\mathbb{P}_0(\mathbf{I}) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{I} - bi)[\overline{1, N}]. \tag{4.2.11}$$

Мы получили множество всех полных маршрутов, согласующихся с $\mathbf{I}$. Из (4.2.10), (4.2.11) вытекает (поскольку $(bi)[\overline{1, N}] = \mathbb{P}$), что справедливо равенство

$$\mathbb{P}_0(\mathbf{I}) = \{\alpha \in \mathbb{P} \,|\, \alpha(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l) \ : \ l \in \overline{k, N}\}) \quad \forall k \in \overline{1, N}\}. \tag{4.2.12}$$

Замечание 4.2.1. Пусть в пределах данного замечания $n = 1$. При этом согласно (4.2.5) $p_1 \neq q_1$. Если $\alpha \in \mathbb{P}_0(\mathbf{I})$ и рассматривается система перемещений (4.1.3), то выбор $\alpha(1) \in \overline{1, N}$ должен быть таким, что $\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$. Это означает, что из “списка” $\overline{1, N}$ следует выбросить на первом шаге индекс $q_1 = q_n$, поскольку

$$\mathbf{I}(\overline{1, N}) = \overline{1, N} \backslash \{q_j \ : \ j \in \overline{1, n}\} = \overline{1, N} \backslash \{q_1\},$$

где в силу (4.1.4), (4.1.5) и (4.2.6) $\Sigma[\overline{1, N}] = \overline{1, n} = \{1\}$. Стало быть, $\alpha(1) \neq q_1$. Если $\alpha(1) \neq p_1$, то по отношению к “списку” $\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1)\}$ упомянутая ситуация сохраняется:

$$\Sigma[\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1)\}] = \overline{1, n} = \{1\}.$$

Но $\alpha \in (bi)[\overline{1, N}]$, а тогда

$$\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1)\} = \{\alpha(l) \ : \ l \in \overline{2, N}\}.$$

Стало быть, $\Sigma[\{\alpha(l) \ : \ l \in \overline{2, N}\}] = \{1\}$ в рассматриваемом сейчас случае, а потому

$$\mathbf{I}(\{\alpha(l) \ : \ l \in \overline{2, N}\}) = (\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1)\}) \backslash \{q_1\} = \overline{1, N} \backslash \{\alpha(1); q_1\}.$$

Тогда $\alpha(2) \in \overline{1, N} \backslash \{\alpha(1); q_1\}$, т.е. $\alpha(2) \in \overline{1, N}$ и при этом

$$(\alpha(1) \neq \alpha(2)) \& (q_1 \neq \alpha(2)).$$

В этом случае $\{p_1; q_1\} \subset \overline{1, N} \backslash \{\alpha(1); \alpha(2)\}$, если $\alpha(2) \neq p_1$; при этом (рассматриваем случай $N \geq 3$)

$$\mathbf{I}(\{\alpha(l) : l \in \overline{3, N}\}) = \mathbf{I}(\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1); \alpha(2)\}) = (\overline{1, N} \backslash \{\alpha(1); \alpha(2)\}) \backslash \{q_1\},$$

(т.к. $1 \in \Sigma(\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\})))$ и, следовательно,

$$\alpha(3) \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\})\setminus\{q_1\}.$$

Если же (в рассматриваемом случае $\alpha(1) \neq p_1$) $\alpha(2) = p_1$, то

$$\mathbf{I}(\{\alpha(l) \,:\, l \in \overline{3,N}\}) = \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\}) = \overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\},$$

поскольку

$$\Sigma(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\}) = \Sigma(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);p_1\}) = \varnothing.$$

Мы ограничиваемся этим при рассмотрении варианта $\alpha(1) \neq p_1$.

Если же $\alpha(1) = p_1$, то

$$\Sigma[\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1)\}] = \Sigma[\{\alpha(l) \,:\, l \in \overline{2,N}\}] = \Sigma[\overline{1,N}\setminus\{p_1\}],$$

а тогда в силу (4.2.6) имеем $\Sigma[\overline{1,N}\setminus\{p_1\}] = \varnothing$, т.к. $p_1 \notin \overline{1,N}\setminus\{p_1\}$. Следовательно,

$$\Sigma[\{\alpha(l) \,:\, l \in \overline{2,N}\}] = \varnothing,$$

а $\alpha(2) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l) \,:\, l \in \overline{2,N}\})$, т.е. $\alpha(2) \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{p_1\})$, где

$$\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{p_1\}) = (\overline{1,N}\setminus\{p_1\})\setminus\{q_j \,:\, j \in \Sigma[\overline{1,N}\setminus\{p_1\}]\} = \overline{1,N}\setminus\{p_1\}.$$

Теперь $\alpha(2) \in \overline{1,N}\setminus\{p_1\}$ и, т.к. (согласно (4.2.5)) $p_1 \neq q_1$, то реализация $\alpha(2) = q_1$ возможна. Однако она не обязательна, коль скоро при построении перемещений в (4.1.3) мы стремимся минимизировать суммарные потери, а может оказаться, что перемещение вида

$$(\alpha(1) = p_1) \longrightarrow (\alpha(2) = q_1)$$

нам просто невыгодно и лучше выбирать в качестве $\alpha(2)$ какой-то другой индекс из множества

$$\mathbf{I}(\{\alpha(l) \,:\, l \in \overline{2,N}\}) = \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1)\}) = \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{p_1\}) = \overline{1,N}\setminus\{p_1\}.$$

Если при этом $\alpha(2) \neq q_1$, то $q_1 \in \overline{1,N}\setminus\{\alpha(1),\alpha(2)\}$ (напомним, что мы анализируем сейчас версию, когда $\alpha(1) = p_1$), где

$$p_1 \notin \overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\}.$$

Будем при данном рассмотрении предполагать, что $N \geq 3$, т.к. случай $N = 2$ неинтересен и, по существу, уже рассмотрен. Тогда

$$\overline{1,N}\setminus\{\alpha(1);\alpha(2)\} \in \mathfrak{N}$$

и в силу (4.2.9) справедливо равенство

$$\mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\}) =$$
$$= (\overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\})\backslash\{q_j\,:\,j\in\Sigma[\overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\}]\},$$

где $p_1 \notin \overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\}$, а потому в силу (4.2.6) имеет место равенство

$$\Sigma[\overline{1,N}\backslash\{\alpha(1),\alpha(2)\}] = \varnothing$$

(напомним, что мы ограничились случаем $n = 1$). Отсюда

$$\mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\}) = \overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\} = \{\alpha(k)\,:\,k\in\overline{3,N}\}$$

и при этом $(q_1 \neq \alpha(1))\&(q_1 \neq \alpha(2))$ (напомним, что в рассматриваемом случае $\alpha(1) = p_1$ и $\alpha(2) \neq q_1$). В итоге

$$q_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\alpha(1);\alpha(2)\}).$$

Мы можем поэтому выбирать $\alpha(3) = q_1$, если это окажется выгодным. Анализ последующих возможностей предоставляется читателю в качестве упражнения. $\square$

Возвращаясь к общей постановке, отметим, что в [56, 46, 48] установлено следующее равенство:

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}_0(\mathbf{I}); \tag{4.2.13}$$

см., например, теорему 3.1 в [46] и теорему 2.2.1 в [56]. Кроме того, из построений [46, с. 187] и предложения 2.2.2 в [56] следует, что

$$((\mathbf{I}-bi)[K] \neq \varnothing \quad \forall K \in \mathfrak{N})\&(\mathbb{P}_0(\mathbf{I}) \neq \varnothing). \tag{4.2.14}$$

Из (4.2.13), (4.2.14) вытекает, что

$$\mathbb{A} \neq \varnothing. \tag{4.2.15}$$

Можно рассматривать (4.2.15) как свойство совместности задачи (4.2.4) "по дискретной компоненте". Из (4.1.1) и (4.2.2) вытекает, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ множество $\mathfrak{X}[\alpha]$ непусто; тогда $\mathfrak{X}[\alpha]$ есть непустое конечное п/м $\mathfrak{X}_N$. Это означает (см. (4.2.3), (4.2.15)), что

$$\mathbb{S} \neq \varnothing, \tag{4.2.16}$$

т.е. ограничения задачи (4.2.4) совместны. Здесь же отметим, что $\mathbb{S}$ — конечное множество, что легко следует из (4.2.3). С учетом (4.2.3), (4.2.15), (4.2.16) определяется (конечное) значение задачи (4.2.4):

$$V \stackrel{\triangle}{=} \min_{(\alpha,(x_i)_{i\in\overline{0,N}})\in\mathbb{S}} (\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}(x_{i-1},x_i) + \mathbf{f}(x_N)) =$$

$$= \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]} (\sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i) + \mathbf{f}(x_N)) \in [0, \infty[. \qquad (4.2.17)$$

Решением задачи (4.2.4) называем всякую упорядоченную пару

$$(\alpha^0, (x_i^0)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{S},$$

для которой справедливо равенство

$$V = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{c}(x_{i-1}^0, x_i^0) + \mathbf{f}(x_N^0); \qquad (4.2.18)$$

разумеется, при этом непременно

$$(x_i^0)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha^0]$$

(см. (4.2.3)). В (4.2.17), (4.2.18) рассматривались значение и решения основной задачи. Их поиск далее осуществляется посредством МДП, что, в свою очередь, требует построения функции Беллмана, значения которой определяются традиционно как экстремум вспомогательных задач, подобных (4.2.4), но не предусматривающих, вообще говоря, посещение всех множеств кортежа (4.1.1). Упомянутые вспомогательные задачи именуем укороченными, действуя в соответствии с [56].

Если $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем в дальнейшем

$$\mathcal{X}_K \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{X}_{|K|}.$$

Кроме того, при $x \in X$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$ полагаем, что

$$\mathcal{X}[x; K; \alpha] \stackrel{\triangle}{=} \{(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}_K | (x_0 = x) \& (x_j \in M_{\alpha(j)} \, \forall j \in \overline{1, |K|})\}, \quad (4.2.19)$$

получая всякий раз непустое конечное п/м $\mathcal{X}_K$. В частности, (4.2.19) определено при $\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]$, которое также не пусто и конечно. Полагаем теперь

$$v(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{X}[x;K;\alpha]} [\sum_{i=1}^{|K|} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i) +$$
$$+ \mathbf{f}(x_{|K|})] \quad \forall x \in X \; \forall K \in \mathfrak{N}. \qquad (4.2.20)$$

Мы рассматриваем (4.2.20) как экстремум задачи о последовательном посещении множеств M_i, $i \in K$, из начального состояния x при ограничениях на текущие переходы с множества на множество, соответствующих логике, используемой в (4.2.10): если мы посетили множества M_i, $i \in K'$, где

$K' \subset K$ и $K \backslash K' \neq \varnothing$, то при выборе очередного индекса наши возможности ограничены множеством $\mathbf{I}(K \backslash K')$, для которого $\mathbf{I}(K \backslash K') \subset K \backslash K'$ и при этом $\mathbf{I}(K \backslash K') \neq \varnothing$.

Из определения множеств $\mathfrak{X}_N$ и $\mathcal{X}_{\overline{1,N}}$ имеем равенство

$$\mathfrak{X}_N = \mathcal{X}_{\overline{1,N}}.$$

Поэтому согласно (4.2.2), (4.2.19) $\forall \alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{X}[\alpha] = \mathcal{X}[x^0; \overline{1,N}; \alpha] \tag{4.2.21}$$

(мы учитываем здесь равенство $\mathbb{P} = (bi)[\overline{1,N}]$). В частности, (4.2.21) выполняется при $\alpha \in \mathbb{A}$. С учетом (4.2.11), (4.2.13), (4.2.17) и (4.2.20) имеем равенство

$$V = v(x^0, \overline{1,N}). \tag{4.2.22}$$

Итак, основная задача (4.2.4) может рассматриваться как один из вариантов укороченной задачи. С этой точки зрения серия укороченных задач, для которых определены экстремумы (4.2.20), может рассматриваться как естественное расширение задачи (4.2.4). Кроме того, условимся о следующем соглашении

$$v(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X. \tag{4.2.23}$$

Таким образом, посредством (4.2.20) и (4.2.23) определена следующая функция:

$$(x, K) \longrightarrow v(x, K) \,:\, X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[. \tag{4.2.24}$$

Эта функция (4.2.26) может рассматриваться как функция Беллмана, отвечающая задаче (4.2.4). Справедливо следующее

Предложение 4.2.1. Если $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$, то

$$v(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + v(y, K \backslash \{k\})]. \tag{4.2.25}$$

Подробное доказательство предложения 4.2.1 приведено в [46, 48, 50] (см. также более общее предложение 3.2 в [56]). По этой причине ограничимся обсуждением. Речь идет о случае, когда, находясь в состоянии $x \in X$, мы должны организовать последовательное посещение множеств M_i, $i \in K$; в процессе этого посещения следует соблюдать ограничения на текущие переходы с множества на множество. В (4.2.25) содержится, по сути дела, логика одного шага (этапа) оптимальной процедуры.

В самом деле, если мы, находясь в позиции (x, K), совершаем только одно перемещение, выбирая очередное множество M_k, где $k \in \mathbf{I}(K)$, и точку $y \in M_k$, то по окончании этого перемещения мы попадаем в позицию

$(y, K\backslash\{k\})$ (из имеющегося "списка" K следует вычеркнуть задание с номером k). Поэтому в новой позиции мы располагаем экстремумом $v(y, K\backslash\{k\})$ соответствующей укороченной задачи; случай $K\backslash\{k\} = \varnothing$ не исключается, но приводит к весьма очевидной ситуации (см. (4.2.23)). Исходная же позиция характеризовалась экстремумом $v(x, K)$ "более длинной" укороченной задачи. Наше перемещение имеет стоимость $\mathbf{c}(x, y) \in [0, \infty[$, которая даже при наилучшем "разыгрывании" процесса из позиции $(y, K\backslash\{k\})$ будет аддитивно включаться в совокупные затраты. Поэтому экстремумы в (4.2.25) объективно имеют целью уменьшить, насколько это возможно, упомянутую часть совокупных затрат, но сделать это следует в режиме увязки с будущими экстремальными затратами. Все это как раз и реализуется в (4.2.25). Особенностью является лишь то, что внешний экстремум вычисляется не по всему "списку" K, а только по его части $\mathbf{I}(K)$,

$$\mathbf{I}(K) \subset K.$$

Содержательный смысл вычеркивания индексов $j \in K\backslash\mathbf{I}(K)$ состоит всего лишь в следующем: на нашем первом шаге (этапе) следует исключить нарушение ограничения в виде условий предшествования. В самом деле, если мы рассмотрим произвольный индекс $s \in \Sigma[K]$, см. (4.2.6), то, в частности, $s \in \overline{1, n}$ и при этом

$$(p_s \in K) \& (q_s \in K).$$

Переход из x в точку множества M_{q_s} недопустим с точки зрения условия (4.1.7) потому, что мы никогда в будущем уже не сможем реализовать перемещение от M_{p_s} к M_{q_s}, т.к. индекс p_s в нашем списке остается после вычеркивания q_s, поскольку согласно (4.2.5) $p_s \neq q_s$. Стало быть, переход от x на M_{q_s} следует запретить. Как это сделать? Очень просто: q_s надо вычеркнуть из списка индексов целевых множеств, на которые возможен непосредственный переход из x. Однако именно эту процедуру и реализует оператор (4.2.8), поскольку процедура (4.2.9) как раз и означает вычеркивание всех таких индексов q_s. Мы можем переходить, следовательно, из x на множества M_k, для которых либо

$$(k \neq p_i) \& (k \neq q_i)$$

для всевозможных $i \in \Sigma[K]$, либо $k = p_j$ для некоторого $j \in \Sigma[K]$; напомним, кстати, что (в последнем случае) в силу (4.2.5) для таких индексов j непременно $p_j \neq q_j$, а, стало быть, снова исключается недопустимый (в смысле условий предшествования) переход. Итак, в (4.2.25) действительно достигается увязывание принципа оптимальности с логикой соблюдения ограничений вида (4.1.7).

Теперь мы применим предложение 4.2.1 для целей построения “полной” функции Беллмана. Это весьма громоздкое построение, представляющее, как правило, только теоретический интерес, мы осуществляем слоями, определяя фрагменты функции Беллмана на множествах

$$X \times \mathbf{N}_0,\ X \times \mathbf{N}_1,\ ...\ X \times \mathbf{N}_N,$$

где $\mathbf{N}_j \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathbf{N} \,|\, |K| = j\} \quad \forall j \in \overline{0, N}$. Следовательно, мы конструируем функции

$$\mathcal{V}_0 \,:\, X \times \mathbf{N}_0 \longrightarrow [0, \infty[,\ \mathcal{V}_1 \,:\, X \times \mathbf{N}_1 \longrightarrow [0, \infty[, ...,$$

$$\mathcal{V}_N \,:\, X \times \mathbf{N}_N \longrightarrow [0, \infty[, \tag{4.2.26}$$

значения которых определяются на основе (4.2.20), (4.2.23). Именно, $\forall j \in \overline{0, N}$ $\forall x \in X$ $\forall K \in \mathbf{N}_j$

$$\mathcal{V}_j(x, K) \overset{\triangle}{=} v(x, K). \tag{4.2.27}$$

Отметим, что кортеж множеств $(X \times \mathbf{N}_i)_{i \in \overline{0,N}}$ составляет разбиение полного пространства позиций $X \times \mathbf{N}$, коль скоро кортеж множеств $(\mathbf{N}_i)_{i \in \overline{0,N}}$ — суть разбиение $\mathbf{N}$. Это свойство делает корректным определение (4.2.26), (4.2.27): области определения функций $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_N$ попарно не пересекаются.

Полезно ввести также индексные множества

$$\mathfrak{N}_s \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \,|\, |K| = s\} \quad \forall s \in \overline{1, N}. \tag{4.2.28}$$

Тогда $(\mathfrak{N}_i)_{i \in \overline{1,N}}$ — суть разбиение $\mathfrak{N}$, а $(X \times \mathfrak{N}_i)_{i \in \overline{1,N}}$ — разбиение $X \times \mathfrak{N}$. Из (4.2.28) и определений семейств $\mathfrak{N}$ и $\mathbf{N}$ вытекает, что

$$\mathbf{N}_s = \mathfrak{N}_s \quad \forall s \in \overline{1, N}. \tag{4.2.29}$$

Следовательно, имеем из (4.2.29) следующие совпадения слоев пространства позиций:

$$X \times \mathbf{N}_s = X \times \mathfrak{N}_s \quad \forall s \in \overline{1, N}.$$

Из (4.2.23) и (4.2.27) вытекает, что справедливы свойства: $\mathbf{N}_0 = \{\varnothing\}$, а функция

$$\mathcal{V}_0 \,:\, X \times \mathbf{N}_0 \longrightarrow [0, \infty[\tag{4.2.30}$$

определяется следующим условием:

$$\mathcal{V}_0(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X. \tag{4.2.31}$$

Пусть теперь $m \in \overline{0,N}$ и уже построен кортеж $(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,m}}$ функций $\mathcal{V}_0, ..., \mathcal{V}_m$. В частности, мы располагаем функцией

$$\mathcal{V}_m : X \times \mathbf{N}_m \longrightarrow [0, \infty[. \tag{4.2.32}$$

Иными словами, уже имеется массив значений

$$\mathcal{V}_m(x, K),\ x \in X,\ K \in \mathbf{N}_m.$$

Если $m = N$, то построение "полного" кортежа

$$(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,N}} \tag{4.2.33}$$

сужений функции Беллмана завершено. Если же $m \neq N$, т.е. $m \in \overline{0, N-1}$, то определяем

$$\mathcal{V}_{m+1} : X \times \mathbf{N}_{m+1} \longrightarrow [0, \infty[,$$

где $\mathbf{N}_{m+1} = \mathfrak{N}_{m+1}$, посредством следующего правила, вытекающего из предложения 3.1: $\forall x \in X\ \forall K \in \mathfrak{N}_{m+1}$,

$$\mathcal{V}_{m+1}(x, K) = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_m(y, K\backslash\{k\})]. \tag{4.2.34}$$

Итак, посредством (4.2.34) определено преобразование

$$\mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{V}_{m+1}.$$

После исполнения конечного числа таких преобразований требуемый кортеж (4.2.33) будет построен. В частности, будет определено значение

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = v(x^0, \overline{1, N}) = V \tag{4.2.35}$$

глобального экстремума нашей основной задачи.

Заметим, что предложенная выше процедура отличается большой трудоемкостью в смысле вычислительной реализации. Ее можно рассматривать как своеобразную логическую конструкцию на основе предложения 4.2.1. Следует, однако, отметить, что имеются определенные "резервы" в осуществлении процесса вычислений: можно, оказывается, ограничиться "частью" массива значений функции (4.2.24) и, следовательно, сократить массивы значений функций (4.2.26). Наиболее эффективное сокращение требуемого (для построения оптимального решения) пространства позиций удается как раз за счет рационального учета ограничений в виде условий предшествования. Мы, однако, откладываем рассмотрение этой процедуры и обращаемся в следующем разделе к иллюстративным примерам.

4.3. Задача о посещении трех множеств: иллюстративные примеры

Будем полагать в пределах настоящего раздела, что $X \subset \mathbb{R}\times\ \times\mathbb{R}$, т.е. X есть некоторое множество плоских векторов. Далее, всюду в данном разделе предполагается, что

$$N = 3, \quad n = 1. \tag{4.3.1}$$

Наконец, пусть в настоящем разделе $x^0 = (0,0)$, а множество Xтаково, что

$$X = \{x^0\}\bigcup(\bigcup_{i=1}^{N} M_i) = \{(0,0)\}\bigcup(\bigcup_{i=1}^{3} M_i). \tag{4.3.2}$$

Условия (4.1.1), (3.1.4) полагаем при этом выполненными. Попарно непересекающиеся множества

$$M_1,\ M_2,\ M_3$$

(на плоскости) полагаем заданными априори; $x^0 \notin M_j \ \ \forall j \in \overline{1,3}$. Для определенности будем предполагать, что

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 2. \tag{4.3.3}$$

При условиях (4.3.1) — (4.3.3) мы повторим общую процедуру построения функции Беллмана, не беспокоясь о вычислительной реализации, коль скоро фактическая размерность нашей задачи будет очень малой.

Для упрощения последующих рассуждений будем предполагать, что функция $\mathbf{f}$ (4.1.10) тождественно равна нулю. Итак (по смыслу), в данном примере не требуется осуществлять возврат на базу x^0 после посещения всех множеств. Функцию (4.1.10) определяем здесь следующим условием: если $x' = (x'_1, x'_2) \in X$ и $x'' = (x''_1, x''_2) \in X$, то

$$\mathbf{c}(x', x'') = \max(\{|x'_1 - x''_1|;\ |x'_2 - x''_2|\}). \tag{4.3.4}$$

Напомним, что в нашем случае

$$\mathbf{N}_0 = \{\varnothing\},\ \mathbf{N}_1 = \mathfrak{N}_1 = \{\{1\};\{2\};\{3\}\},$$

$$\mathbf{N}_2 = \mathfrak{N}_2 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\},\ \mathbf{N}_3 = \mathfrak{N}_3 = \{\overline{1,3}\}.$$

В силу (4.2.31) функция $\mathcal{V}_0$ в настоящем примере тождественно равна нулю. Нам следует теперь построить функции

$$\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \mathcal{V}_3.$$

Впрочем, вся функция $\mathcal{V}_N = \mathcal{V}_3$ нам не потребуется, и мы ограничимся расчетом нужного в дальнейшем значения

$$\mathcal{V}_3(\overline{1,3}) = \mathcal{V}_N(\overline{1,N}) = V.$$

Тогда схема построения слоев функции Беллмана реализуется в нашем случае следующим образом.

Функция $\mathcal{V}_1$ определяется согласно (4.2.34) расстоянием $\mathbf{c}$. Здесь следует только иметь в виду, что в силу (4.2.8) при $m \in \overline{1,3}$

$$\mathbf{I}(\{m\}) = \{m\}; \tag{4.3.5}$$

учитываем тот факт, что $\mathbf{I}(K) \neq \varnothing$ при $K \in \mathfrak{N}$. Тогда согласно (4.2.34)

$$\mathcal{V}_1(x, \{m\}) = \min_{y \in M_m} \mathbf{c}(x, y) \ \forall x \in X, \tag{4.3.6}$$

т.к. $\mathcal{V}_0$ — "нулевая" функция. Поскольку

$$\mathbf{N}_1 = \mathfrak{N}_1 = \{\{m\} \, : \, m \in \overline{1,3}\},$$

то в (4.3.6) определены все значения функции $\mathcal{V}_1$ в виде $\mathbf{c}$–расстояний от точек X до множеств $M_i, \ i \in \overline{1,3}$.

Рассмотрим конкретизацию функции $\mathcal{V}_2$. Для этого воспользуемся (4.2.34) при условии $m = 1$ (при этом $\mathfrak{N}_{m+1} = \mathbf{N}_{m+1} = \mathfrak{N}_2$ есть семейство всех двухэлементных индексных множеств): если $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}_2$, то

$$\mathcal{V}_2(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_1(y, K \setminus \{k\})]. \tag{4.3.7}$$

При этом значения $\mathcal{V}_1$, используемые в (4.3.7), определяются в виде расстояний от точки до множества, т.е. в виде (4.3.6).

Всюду в пределах настоящего раздела будем полагать, как уже отмечалось, что

$$(p_1 = 1) \& (q_1 = 2). \tag{4.3.8}$$

Условие 4.2.1 очевидным образом выполняется в данном случае, поскольку $p_1 \neq q_1$ (учитываем, что в рассматриваемом сейчас случае $n = 1$ семейство $\mathcal{K}$ одноэлементно и содержит единственное множество $\{1\}$). Из (4.1.8) вытекает,

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{P} \,|\, \alpha^{-1}(1) < \alpha^{-1}(2)\} = \{\alpha_i \, : \, i \in \overline{1,3}\},$$

где $\alpha_1 \ : \ \overline{1,3} \longrightarrow \overline{1,3}, \ \ \alpha_2 \ : \ \overline{1,3} \longrightarrow \overline{1,3}, \ \ \alpha_3 \ : \ \overline{1,3} \longrightarrow \overline{1,3}$ определяются условиями:

1) $\alpha_1(1) \stackrel{\triangle}{=} 1, \ \alpha_1(2) \stackrel{\triangle}{=} 2, \ \alpha_1(3) \stackrel{\triangle}{=} 3;$

2) $\alpha_2(1) \triangleq 1,\ \alpha_2(2) \triangleq 3,\ \alpha_2(3) \triangleq 2;$

3) $\alpha_3(1) \triangleq 3,\ \alpha_3(2) \triangleq 1,\ \alpha_3(3) \triangleq 2.$

Итак, мы имеем в данном примере только три допустимых маршрута.

Рассмотрим следующий вариант системы целевых множеств:

$$M_1 \triangleq \{(2,4)\},\ M_2 \triangleq \{(1,0)\},\ M_3 \triangleq \{(0,-2);(0,4)\}. \tag{4.3.9}$$

Итак, у нас два целевых множества одноэлементны (это множества M_1 и M_2), а множество M_3 двухэлементно.

Теперь, используя (4.3.9), мы просчитаем все возможные варианты движений. Сначала рассмотрим случай, когда выбран и зафиксирован маршрут α_1 т.е.

1). В этом случае имеем следующее две возможные трассы:

$$(0,0) \longrightarrow (2,4) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,-2); \tag{4.3.10}$$

$$(0,0) \longrightarrow (2,4) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (0,4). \tag{4.3.11}$$

В рассматриваемом случае трасса (4.3.10) оценивается (см. (4.1.11)) затратами

$$4+4+2=10.$$

Трасса (4.3.11) характеризуется затратами

$$4+4+4=12.$$

Цена маршрута α_1 определяется, как мы видим, числом 10.

Рассмотрим теперь маршрут α_2 т.е.

2). В данном случае возможна одна из следующих двух трасс:

$$(0,0) \longrightarrow (2,4) \longrightarrow (0,4) \longrightarrow (1,0); \tag{4.3.12}$$

$$(0,0) \longrightarrow (2,4) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (1,0). \tag{4.3.13}$$

Затраты, связанные с трассой (4.3.12), таковы:

$$4+2+4=10.$$

Затраты, связанные с реализацией трассы (4.3.13), равны

$$4+6+2=12.$$

Цена маршрута α_2 равна 10.

3). Наконец, рассмотрим маршрут α_3, при котором возможны следующие две трассы

$$(0,0) \longrightarrow (0,-2) \longrightarrow (2,4) \longrightarrow (1,0); \tag{4.3.14}$$

$$(0,0) \longrightarrow (0,4) \longrightarrow (2,4) \longrightarrow (1,0). \tag{4.3.15}$$

Трасса (4.3.14) характеризуется затратами

$$2+6+4=12.$$

Трассе (4.3.15) соответствуют следующие затраты:

$$4+2+4=10.$$

Следовательно, цена маршрута α_3 совпадает с 10.

Мы получили, что в рассматриваемой задаче все три маршрута оптимальны. Значение задачи V равно 10, т.е.

$$V=10,$$

а оптимальные решения, т.е. пары маршрут—трасса, имеют вид

$$(\alpha_1,(4.3.10)),(\alpha_2,(4.3.12)),(\alpha_3,(4.3.15)).$$

Рассмотрим для данного "многоэкстремального" примера реализацию процедуры на основе МДП. Напомним, что

$$\mathcal{V}_0(x,\varnothing)=0, \quad \forall x \in X.$$

С учетом (4.3.6) построим функцию $\mathcal{V}_1$. Здесь и ниже учитываем, что в силу (4.3.2) X есть пятиэлементное множество:

$$X=\{(0,0);(2,4);(1,0);(0,-2);(0,4)\}. \tag{4.3.16}$$

Тогда в силу (4.3.6) нам следует каждой точке $x=(x_1,x_2)\in X$ сопоставить три значения

$$\mathcal{V}_1(x,\{1\})=\min_{y\in M_1}\mathbf{c}(x,y)=\mathbf{c}(x,(2,4))=$$
$$=\mathbf{c}((x_1,x_2),(2,4))=\max(\{|x_1-2|;|x_2-4|\}), \tag{4.3.17}$$
$$\mathcal{V}_1(x,\{2\})=\min_{y\in M_2}\mathbf{c}(x,y)=\mathbf{c}(x,(1,0))=$$
$$=\mathbf{c}((x_1,x_2),(1,0))=\max(\{|x_1-1|;|x_2|\}), \tag{4.3.18}$$
$$\mathcal{V}_1(x,\{3\})=\min_{y\in M_3}\mathbf{c}(x,y)=\min(\{\mathbf{c}(x,(0,-2));\mathbf{c}(x,(0,4))\})=$$
$$=\min(\{\max(\{|x_1|;|x_2+2|\});\max(\{|x_1|;|x_2-4|\}). \tag{4.3.19}$$

Из (4.3.16) — (4.3.19) получаем следующие конкретные значения:

$$\mathcal{V}_1((0,0),\{1\}) = 4;\ \mathcal{V}_1((0,0),\{2\}) = 1;\ \mathcal{V}_1((0,0),\{3\}) = 2; \tag{4.3.20}$$

$$\mathcal{V}_1((2,4),\{1\}) = 0;\ \mathcal{V}_1((2,4),\{2\}) = \max(\{1;4\}) = 4;$$
$$\mathcal{V}_1((2,4),\{3\}) = \min(\{\max(\{2;6\}); \max(\{2;0\})\}) = \min(\{6;2\}) = 2; \tag{4.3.21}$$

$$\mathcal{V}_1((1,0),\{1\}) = \max(\{1;4\}) = 4;\ \mathcal{V}_1((1,0),\{2\}) = 0;$$
$$\mathcal{V}_1((1,0),\{3\}) = \min(\{\max(\{1;2\}); \max(\{1;4\})\}) = \min(\{2;4\}) = 2; \tag{4.3.22}$$

$$\mathcal{V}_1((0,-2),\{1\}) = \max(\{2,6\}) = 6;\ \mathcal{V}_1((0,-2),\{2\}) =$$
$$= \max(\{1;2\}) = 2;\ \mathcal{V}_1((0,-2),\{3\}) = 0; \tag{4.3.23}$$

$$\mathcal{V}_1((0,4),\{1\}) = \max(\{2;0\}) = 2;\ \mathcal{V}_1((0,4),\{2\}) =$$
$$= \max(\{1;4\}) = 4;\ \mathcal{V}_1((0,4),\{3\}) = 0. \tag{4.3.24}$$

Рассмотрим теперь построение функции

$$\mathcal{V}_2 : X \times \mathbf{N}_2 \longrightarrow [0, \infty[.$$

Для этого используем (4.2.34). Тогда $\forall\ x \in X\ \forall\ K \in \mathfrak{N}_2$

$$\mathcal{V}_2(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_1(y, K \backslash \{k\})]. \tag{4.3.25}$$

Напомним, что $\mathfrak{N}_2 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\}$. Для множеств $\{1;2\}$, $\{1;3\}$ и $\{2;3\}$ определим соответствующие значения оператора $\mathbf{I}$ (напомним, что $n = 1,\ p_1 = 1,\ q_1 = 2$). Для этого сначала определим множества

$$\Sigma[\{1;2\}],\ \Sigma[\{1;3\}],\ \Sigma[\{2;3\}].$$

С учетом (4.2.6) и (4.3.3) имеем $\Sigma[\{1;2\}] = \{1\}$, $\Sigma[\{1;3\}] = \varnothing$, $\Sigma[\{2;3\}] = \varnothing$. Как следствие, имеем из (4.2.9) следующие равенства:

$$\mathbf{I}[\{1;2\}] = \{1\},\ \mathbf{I}[\{1;3\}] = \{1;3\},\ \mathbf{I}[\{2;3\}] = \{2;3\}.$$

Теперь воспользуемся (4.3.25), учитывая (4.3.16). Тогда (см. (4.3.9), (4.3.21)) с учетом одноэлементности множеств M_1 и M_2 имеем следующие соотношения:

$$\mathcal{V}_2((0,0),\{1;2\}) = \min_{y \in M_1} [\mathbf{c}((0,0), y) + \mathcal{V}_1(y, \{2\})] =$$
$$= \mathbf{c}((0,0),(2,4)) + \mathcal{V}_1((2,4),\{2\}) = \mathbf{c}((0,0),(2,4)) + 4 = 8;$$
$$\mathcal{V}_2((0,0),\{1;3\}) = \min(\{\min_{y \in M_1} [\mathbf{c}((0,0), y) + \mathcal{V}_1(y, \{3\})];$$

$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((0,0),y)+\mathcal{V}_1(y,\{1\})]\}) = \min(\{\mathbf{c}((0,0),(2,4))+\mathcal{V}_1((2,4),\{3\})];$$

$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((0,0),y)+\mathcal{V}_1(y,\{1\})]\}) =$$

$$= \min(\{6;\ \min(\{\mathbf{c}((0,0),(0,-2))+\mathcal{V}_1((0,-2),\{1\});$$

$$\mathbf{c}((0,0),(0,4))+\mathcal{V}_1((0,4),\{1\})\})\}) = \min(\{6;\min(\{2+6;4+2\})) = 6;$$

$$\mathcal{V}_2((0,0),\{2;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_2}[\mathbf{c}((0,0),y)+\mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$

$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((0,0),y)+\mathcal{V}_1(y,\{2\})]\}) = \min(\{\mathbf{c}((0,0),(1,0))+\mathcal{V}_1((1,0),\{3\})];$$

$$\min(\{\mathbf{c}((0,0),(0,-2))+\mathcal{V}_1((0,-2),\{2\});\mathbf{c}((0,0),(0,4))+$$

$$+\mathcal{V}_1((0,4),\{2\})\})\}) = \min(\{1+2;\ \min(\{2+2;4+4\})\}) =$$

$$= \min(\{3;\min(\{4;8\})\}) = 3.$$

Отметим, что значения $\mathcal{V}_2((0,0),K)$, $K \in \mathfrak{N}_2$ ниже использоваться не будут и мы их привели только для полноты изложения. С учетом (4.3.9), (4.3.25) и одноэлементности M_1 и M_2

$$\mathcal{V}_2((2,4),\{1;2\}) = \min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((2,4),y)+\mathcal{V}_1(y,\{2\})] =$$

$$= \mathbf{c}((2,4),(2,4))+\mathcal{V}_1((2,4),\{2\}) = 0+4 = 4;$$

$$\mathcal{V}_2((2,4),\{1;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((2,4),y)+\mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$

$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((2,4),y)+\mathcal{V}_1(y,\{1\})]\}) = \min(\{0+\mathcal{V}_1((2,4),\{3\})];$$

$$\min(\{\mathbf{c}((2,4),(0,-2))+\mathcal{V}_1((0,-2),\{1\});$$

$$\mathbf{c}((2,4),(0,4))+\mathcal{V}_1((0,4),\{1\})\}) =$$

$$= \min(\{2;\min\{6+6;2+2\}) = 2;$$

$$\mathcal{V}_2((2,4),\{2;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_2}[\mathbf{c}((2,4),y)+\mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$

$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((2,4),y)+\mathcal{V}_1(y,\{2\})]\}) = \min(\{\mathbf{c}((2,4),(1,0))+$$

$$+\mathcal{V}_1((1,0),\{3\});\min(\{\mathbf{c}((2,4),(0,-2))+$$

$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{2\});\mathbf{c}((2,4),(0,4))+\mathcal{V}_1((0,4),\{2\})\})\}) =$$

$$= \min(\{4+2;\min(\{6+2;2+4\})\}) = 6; \qquad (4.3.26)$$

$$\mathcal{V}_2((1,0),\{1;2\}) = \min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((1,0),y)+\mathcal{V}_1(y,\{2\})] =$$

$$= \mathbf{c}((1,0),(2,4))+\mathcal{V}_1((2,4),\{2\}) = 4+4 = 8; \qquad (4.3.27)$$

$$\mathcal{V}_2((1,0),\{1;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((1,0),y) + \mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$
$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((1,0),y) + \mathcal{V}_1(y,\{1\})]\}) =$$
$$= \min(\{\mathbf{c}((1,0),(2,4)) + \mathcal{V}_1((2,4),\{3\}); \min(\{\mathbf{c}((1,0),(0,-2))+$$
$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{1\}); \mathbf{c}((1,0),(0,4)) + \mathcal{V}_1((0,4),\{1\})\})\}) =$$
$$= \min(\{4+2; \min(\{2+6; 4+2\})\}) = \min(\{6;6\}) = 6; \tag{4.3.28}$$
$$\mathcal{V}_2((1,0),\{2;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_2}[\mathbf{c}((1,0),y) + \mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$
$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((1,0),y) + \mathcal{V}_1(y,\{2\})]\}) =$$
$$= \min(\{\mathbf{c}((1,0),(1,0)) + \mathcal{V}_1((1,0),\{3\}); \min(\{\mathbf{c}((1,0),(0,-2))+$$
$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{2\}); \mathbf{c}((1,0),(0,4)) + \mathcal{V}_1((0,4),\{2\})\})\}) =$$
$$= \min(\{0+2; \min(\{2+2; 4+4\})\}) = \min(\{2;4\}) = 2; \tag{4.3.29}$$
$$\mathcal{V}_2((0,-2),\{1;2\}) = \min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((0,-2),y) + \mathcal{V}_1(y,\{2\})] =$$
$$= \mathbf{c}((0,-2),(2,4)) + \mathcal{V}_1((2,4),\{2\}) = 6+4 = 10; \tag{4.3.30}$$
$$\mathcal{V}_2((0,-2),\{1;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((0,-2),y) + \mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$
$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((0,-2),y) + \mathcal{V}_1(y,\{1\})]\}) =$$
$$= \min(\{\mathbf{c}((0,-2),(2,4)) + \mathcal{V}_1((2,4),\{3\}); \min(\{\mathbf{c}((0,-2),(0,-2))+$$
$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{1\}); \mathbf{c}((0,-2),(0,4)) + \mathcal{V}_1((0,4),\{1\})\})\}) =$$
$$= \min(\{6+2; \min(\{0+6; 6+2\})\}) = \min(\{8;6\}) = 6; \tag{4.3.31}$$
$$\mathcal{V}_2((0,-2),\{2;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_2}[\mathbf{c}((0,-2),y) + \mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$
$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((0,-2),y) + \mathcal{V}_1(y,\{2\})]\}) =$$
$$= \min(\{\mathbf{c}((0,-2),(1,0)) + \mathcal{V}_1((1,0),\{3\}); \min(\{\mathbf{c}((0,-2),(0,-2))+$$
$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{2\}); \mathbf{c}((0,-2),(0,4)) + \mathcal{V}_1((0,4),\{2\})\})\}) =$$
$$= \min(\{2+2; \min(\{0+2; 6+4\})\}) = \min(\{4;2\}) = 2; \tag{4.3.32}$$
$$\mathcal{V}_2((0,4),\{1;2\}) = \min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((0,4),y) + \mathcal{V}_1(y,\{2\})] =$$
$$= \mathbf{c}((0,4),(2,4)) + \mathcal{V}_1((2,4),\{2\}) = 2+4 = 6; \tag{4.3.33}$$
$$\mathcal{V}_2((0,4),\{1;3\}) = \min(\{\min_{y\in M_1}[\mathbf{c}((0,4),y) + \mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$
$$\min_{y\in M_3}[\mathbf{c}((0,4),y) + \mathcal{V}_1(y,\{1\})]\}) =$$

$$= \min(\{\mathbf{c}((0,4),(2,4)) + \mathcal{V}_1((2,4),\{3\}; \min(\{\mathbf{c}((0,4),(0,-2))+$$

$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{1\}); \mathbf{c}((0,4),(0,4)) + \mathcal{V}_1((0,4),\{1\})\})\}) =$$

$$= \min(\{2+2; \min(\{6+6; 0+2\})\}) = \min(\{4;2\}) = 2; \qquad (4.3.34)$$

$$\mathcal{V}_2((0,4),\{2;3\}) = \min(\{\min_{y \in M_2}[\mathbf{c}((0,4),y) + \mathcal{V}_1(y,\{3\})];$$

$$\min_{y \in M_3}[\mathbf{c}((0,4),y) + \mathcal{V}_1(y,\{2\})]\}) =$$

$$= \min(\{\mathbf{c}((0,4),(1,0)) + \mathcal{V}_1((1,0),\{3\}; \min(\{\mathbf{c}((0,4),(0,-2))+$$

$$+\mathcal{V}_1((0,-2),\{2\}); \mathbf{c}((0,4),(0,4)) + \mathcal{V}_1((0,4),\{2\})\})\}) =$$

$$= \min(\{4+2; \min(\{6+2; 0+4\})\}) = \min(\{6;4\}) = 4. \qquad (4.3.35)$$

Теперь нам осталось построить значение $\mathcal{V}_3(x,\overline{1,3}),\ x \in X$, где X определено в (4.3.16). Однако, как видно по смыслу задачи, нам на самом деле потребуется $\mathcal{V}_3((0,0),\overline{1,3})$. При этом в силу (4.2.9) и (4.3.3)

$$\mathbf{I}(\overline{1,3}) = \{1;3\}. \qquad (4.3.36)$$

В самом деле, $\Sigma[\overline{1,3}] = \{1\}$ согласно (4.2.6), а тогда в силу (4.2.9)

$$\mathbf{I}(\overline{1,3}) = \overline{1,3} \setminus \{q_1\},$$

где $q_1 = 2$. Итак, (4.3.36) установлено. Согласно (4.2.34), (4.3.36)

$$\mathcal{V}_3((0,0),\overline{1,3}) = \min(\{\min_{y \in M_1}[\mathbf{c}((0,0),y) + \mathcal{V}_2(y,\{2;3\})];$$

$$\min_{y \in M_3}[\mathbf{c}((0,0),y) + \mathcal{V}_2(y,\{1;2\})]\}) =$$

$$= \min(\{\mathbf{c}((0,0),(2,4)) + \mathcal{V}_2((2,4),\{2;3\}); \min(\{\mathbf{c}((0,0),(0,-2))+$$

$$+\mathcal{V}_2((0,-2),\{1;2\}); \mathbf{c}((0,0),(0,4)) + \mathcal{V}_2((0,4),\{1;2\})\})\}) =$$

$$= \min(\{4+6; \min(\{2+10; 4+6\})\}) = \min(\{10;10\}) = 10. \qquad (4.3.37)$$

С учетом (4.2.22) и (4.2.35) имеем из (4.3.37) равенство $V = 10$, что совпадает с экстремумом, полученным в результате непосредственного перебора. Построение оптимальных маршрутов для данного примера отложим, имея в виду общий вариант алгоритма на функциональном уровне. В связи с упомянутой после полного перебора многоэкстремальностью в исходной задаче отметим, что и в соотношениях, имеющих смысл уравнения Беллмана, многоэкстремальность также имеет место (см. например, (4.3.26), (4.3.37)).

4.4. Алгоритм на функциональном уровне

В настоящем разделе рассматривается "экономичный" вариант решения основной задачи по МДП; см. [56, 49]. В его основе находится специальная конструкция учета ограничений в виде условий предшествования для целей сокращения массива насчитываемых значений функции Беллмана. Речь идет о частичном построении этой функции, а точнее, о построении некоторого ее сужения на "меньшее" множество. Заметим, в этой связи, что в примере предыдущего раздела использовались не все значения функции Беллмана. Нам не требуются, в частности, значения $\mathcal{V}_s(x, K)$ при $s \in \overline{1,3}$ и $x \in M_k$, где $k \in K$. Это будет видно из следующего построения. Подробное изложение предлагаемой далее конструкции см. в [56, §4.9].

Сейчас мы сосредоточимся (сначала) на использовании условий предшествования для сокращения списков заданий. Имеется в виду "выбрасывание" части этих списков. Сами списки отождествляем с непустыми п/м $\overline{1,N}$. То или иное множество списков является для нас, следовательно, семейством непустых п/м $\overline{1,N}$. С учетом (4.1.4) и (4.1.5) мы в согласии с [49, с.142] введем семейство множеств

$$\mathfrak{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall i \in \overline{1,n} \;\; (p_i \notin K) \vee (q_i \in K)\} =$$

$$= \{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall i \in \overline{1,n} \;\; ((p_i \in K) \Rightarrow (q_i \in K))\}. \qquad (4.4.1)$$

Иными словами, в семействе $\mathfrak{G}$ содержатся те и только те непустые множества $K, K \subset \overline{1,N}$, для каждого из которых при всяком выборе $i \in \overline{1,n}$ либо $p_i \notin K$, либо

$$(p_i \in K) \& (q_i \in K).$$

Заметим, что множества – элементы семейства $\mathfrak{G}$ – имеют различную мощность (количество элементов). Важным, однако, является следующая возможность последовательного продвижения по множествам из семейства $\mathfrak{G}$ (см. предложение 3.2 работы [49]): если $K \in \mathfrak{G}$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и при этом $K \setminus \{k\} \in \mathfrak{N}$,то непременно

$$K \setminus \{k\} \in \mathfrak{G}. \qquad (4.4.2)$$

Имея в виду упомянутую в (4.4.2) возможность продвижения по спискам заданий, определяемым в (4.4.1), введем разбиение семейства $\mathfrak{G}$ в сумму N подсемейств, упорядоченных по мощности множеств, составляющих соответствующие подсемейства: полагаем, что

$$\mathfrak{G}_k \triangleq \mathfrak{G} \bigcap \mathfrak{N}_k \;\; \forall k \in \overline{1.N}. \qquad (4.4.3)$$

Тогда (см.(4.4.2), (4.4.3)) мы располагаем возможностью продвижения по семействам (4.4.3) посредством выполнения очередных заданий, определяемых в терминах $\mathbf{I}$:

$$\mathfrak{G}_N \to \mathfrak{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathfrak{G}_1 \qquad (4.4.4)$$

(здесь имеется в виду случай $N > 3$). Возвращаясь к (4.4.3) в общем случае, имеем с учетом (4.4.1), что

$$\mathfrak{G}_k = \{K \in \mathfrak{N}_k \,|\, \forall i \in \overline{1,n} \;\; (p_i \notin K) \vee (q_i \in K)\} =$$
$$= \{K \in \mathfrak{N}_k | \forall i \in \overline{1,n} \;\; ((p_i \in K) \Rightarrow (q_i \in K))\}. \qquad (4.4.5)$$

В связи с описанием процедуры выполнения последнего задания, согласующегося с (4.4.4), введем сначала одно вспомогательное п/м X:

$$\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \{p_i : i \in \overline{1,n}\}} M_i. \qquad (4.4.6)$$

Множество (4.4.6) используется для формирования финального слоя пространства позиций – слоя с отсутствием каких-либо заданий: полагаем [49, (3.16)], что

$$D_0 \triangleq \{(x, \varnothing) : x \in \mathbf{M}\}, \qquad (4.4.7)$$

т.е. D_0 есть множество всех упорядоченных пар $(x, \varnothing)$, где x пробегает $\mathbf{M}$. Последнее оказывается существенным с точки зрения соблюдения ограничений в виде условий предшествования: в самом деле, если наше финальное состояние (состояние в "момент" N) находится на множестве M_{p_i}, где $i \in \overline{1,n}$, то уже нет никакой возможности для последующего посещения M_{q_i}, и, следовательно, условие того, что M_{p_i} должно посещаться ранее M_{q_i}, не может быть выполнено. Действительно, для решения $(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}})$ в (4.1.2), (4.1.3) непременно $x_N \in M_{\alpha(N)}$. Условие $x_N \in M_{p_i}$, где $i \in \overline{1,n}$, означает согласно (3.1.4), что $\alpha(N) = p_i$. При этом $\alpha \in \mathbb{P}$, а потому для некоторого $j \in \overline{1,N} \;\; \alpha(j) = q_i$, причем $p_i \neq q_i$; см. (4.2.5). Поэтому (при $x_N \in M_{p_i}$) $j \neq N$ и, более того,

$$j = \overset{-1}{\alpha}(q_i) < \overset{-1}{\alpha}(p_i),$$

что означает справедливость свойства: $\alpha \notin \mathbb{A}$. Итак, в этом случае α — недопустимый маршрут. Исключая случай $x_N \in M_{p_i}$ посредством введения $\mathbf{M}$ в качестве своеобразного терминального слоя, мы на самом деле действуем в духе основного условия в (4.1.9).

Очевидным образом (с точки зрения экономии вычислений) определяется начальный слой пространства позиций:

$$D_N = \{(x^0, \overline{1,N})\}. \qquad (4.4.8)$$

Иными словами, D_N есть множество, содержащее только одну позицию $(x^0, \overline{1,N})$, являющуюся начальной в основной задаче. Слои D_0 и D_N являются "крайними" и по этой причине особыми. Для построения же системы промежуточных (регулярных) слоев будем использовать уже некоторое универсальное правило (имеются в виду построения множеств $D_1, \ldots, D_{N-1}$). Введем сначала специальную систему индексных множеств: если $k \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathfrak{G}_k$, то

$$\mathcal{J}_k(K) \triangleq \{i \in \overline{1,N} \backslash K \mid \{i\} \cup K \in \mathfrak{G}_{k+1}\}; \qquad (4.4.9)$$

при этом $k + 1 \leq N$. По смыслу (4.4.9) определяет естественную процедуру построения списков заданий, согласующихся с множествами из $\mathfrak{G}$ (если (4.4.4) – "прямой" процесс эволюции в пространствах упомянутых списков, то в (4.4.9) определяются направления попятного "движения" с соблюдением основного условия, определяющего семейство (4.4.1)). С учетом (4.4.9) полагаем теперь, что $\forall k \in \overline{1, N-1}$

$$D_k \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{G}_k} \{(x, K) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_k(K)} M_i\}. \qquad (4.4.10)$$

Смысл построения в (4.4.10) состоит в следующем. Располагая тем или иным множеством $K \in \mathfrak{G}_k$, где $k \in \overline{1, N-1}$, мы объединяем всевозможные позиции (x, K), где $x \in M_j$ для некоторого $j \in J_k(K)$, что соответствует ситуации $\{j\} \bigcup K \in \mathfrak{G}_{k+1}$, которая отвечает удержанию нового списка $\{j\} \bigcup K$ в числе допустимых с точки зрения (4.4.1). На основе (4.4.7), (4.4.8) и (4.4.10) мы получаем кортеж

$$(D_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathcal{P}(X \times \mathbf{N}), \qquad (4.4.11)$$

где (см. главу 1) $\mathcal{P}(X \times \mathbf{N})$ – семейство всех п/м X × **N**. Итак, при всяком выборе индекса $s \in \overline{0,N}$ в виде D_s мы имеем некоторое множество в пространстве позиций, т.е. слой пространства позиций. Отметим, что каждое из множеств кортежа (4.4.11) является непустым. Данное свойство очевидно для D_N (см. (4.4.8)). Мы не будем рассматривать проверку упомянутого свойства непустоты D_s при $s \in \overline{1, N-1}$, адресуя читателя к [49, с.144, 145], [56, §4.9].

Обсудим сейчас только обоснование свойства $D_0 \neq \varnothing$. С учетом (4.2.15) выберем произвольно $\alpha \in \mathbb{A}$, после чего рассмотрим индекс $\mathbf{n} \triangleq \alpha(N) \in \overline{1,N}$. Покажем, что

$$\mathbf{n} \notin \{p_i : i \in \overline{1,n}\}. \qquad (4.4.12)$$

В самом деле, пусть $l \in \overline{1,n}$. Тогда согласно (4.1.8) имеем по выбору α неравенство

$$\overset{-1}{\alpha}(p_l) < \overset{-1}{\alpha}(q_l) \leq N.$$

В частности, $\overset{-1}{\alpha}(p_l) \neq N$. Тогда в силу инъективности α имеем (см.(4.1.6))

$$p_l = \alpha(\overset{-1}{\alpha}(p_l)) \neq \alpha(N) = \mathbf{n}.$$

Поскольку выбор l был произвольным, $\mathbf{n} \neq p_i \quad \forall i \in \overline{1,n}$. Последнее означает справедливость (4.4.12), а тогда

$$\mathbf{n} \in \overline{1,N} \backslash \{p_i : i \in \overline{1,n}\}.$$

Поэтому согласно (4.4.6) $M_{\mathbf{n}} \subset \mathbf{M}$, причем $M_{\mathbf{n}} \in \mathrm{Fin}(X)$ и, в частности, $M_{\mathbf{n}} \neq \varnothing$. Тогда $\mathbf{M} \neq \varnothing$, и согласно (4.4.7) $D_0 \neq \varnothing$. С учетом построений [49, с.144, 145], имеем свойство: каждое из множеств

$$D_0, D_1, \ldots, D_N$$

есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}$. На самом деле данное суждение можно несколько уточнить.

Напомним, что $\mathbf{N}_0 = \{\varnothing\}$. Тогда в силу (4.4.7) имеем свойство: D_0 есть непустое подмножество $X \times \mathbf{N}_0$. Кроме того, в силу (4.4.8) имеем с очевидностью: D_N есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}_N$. С учетом (4.2.29) и (4.4.5) имеем вложения

$$\mathfrak{G}_k \subset \mathbf{N}_k \quad \forall k \in \overline{1,N}.$$

С учетом (4.4.10) получаем, что

$$D_k \subset X \times \mathbf{N}_k \quad \forall k \in \overline{1,N-1}.$$

Стало быть, D_s есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}_s \quad \forall s \in \overline{1,N-1}$. Объединяя все вышеупомянутые случаи, получаем, что при всяком $s \in \overline{0,N}$ множество D_s есть непустое подмножество $X \times \mathbf{N}_s$. С учетом (4.2.26) полагаем теперь, что для каждого $s \in \overline{0,N}$ функция

$$\mathbb{V}_s : D_s \to [0, \infty] \tag{4.4.13}$$

определяется посредством сужения $\mathcal{V}_s$ на (непустое) множество D_s:

$$\mathbb{V}_s(x,K) \triangleq \mathcal{V}_s(x,K) \quad \forall (x,K) \in D_s; \tag{4.4.14}$$

в традиционных обозначениях [57, с.26, 46] (см. также главу 1)

$$\mathbb{V}_s = (\mathcal{V}_s | D_s) = (\mathcal{V}_s(x,K))_{(x,K)\in D_s} = (v(x,K))_{(x,K)\in D_s}.$$

Следовательно (см.(4.4.14)), при всяком $s \in \overline{0,N}$ функция $\mathbb{V}_s$ (4.4.13) такова, что

$$\mathbb{V}_s(x,K) = v(x,K) \quad \forall (x,K) \in D_s. \tag{4.4.15}$$

Итак, мы ввели следующие функции, определенные на слоях (4.4.7), (4.4.8), (4.4.10):

$$\mathbb{V}_0 : D_0 \to [0, \infty[, \mathbb{V}_1 : D_1 \to [0, \infty[, \ldots, \mathbb{V}_N : D_N \to [0, \infty[. \qquad (4.4.16)$$

В связи с обоснованием возможности продвижения по слоям $D_0, D_1, \ldots, D_N$ и, как следствие, возможности ограничиться использованием функций (4.4.16) в процедуре на основе МДП отметим следующее положение [49, с.146], [56, §4.9].

Если $s \in \overline{1, N}, (x, K) \in D_s,\ k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$, то

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}; \qquad (4.4.17)$$

доказательство (4.4.17) предлагается читателю в качестве упражнения (см. также [56, с.178-179]). Свойство (4.4.17) играет в последующем построении важную роль. По сути дела, именно это свойство позволяет вообще не насчитывать заранее значения слоев функции Беллмана вне множеств $D_i,\ i \in \overline{0, N}$. Это позволяет достичь существенной экономии памяти ЭВМ и в конечном итоге решать задачи большей размерности (см. [49, §5]). В этой связи отметим, что согласно (4.4.13), (4.4.15) и (4.4.17) при $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s,\ k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$ определено значение

$$\mathbb{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[,$$

для которого справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathbb{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) = \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) = v(y, K \setminus \{k\}). \qquad (4.4.18)$$

В свою очередь, последнее свойство позволяет вычислить при $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$ экстремальное значение

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathbb{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})]$$

на основании информации только о функции $\mathbb{V}_{s-1}$, и не используя, следовательно, какой-либо информации о значениях

$$v(z, \mathbb{K}), (z, \mathbb{K}) \in (X \times \mathbf{N}_{s-1}) \setminus D_{s-1}. \qquad (4.4.19)$$

Эти значения (см.(4.4.19)) мы можем поэтому не насчитывать. С другой стороны, из (4.4.18) следует, что при $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$ справедлива цепочка равенств

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathbb{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})] = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) +$$

$$+\mathcal{V}_{s-1}(y, K\setminus\{k\})] = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(x,y) + v(y, K\setminus\{k\})].$$

Теперь уже с учетом (4.2.34) и (4.4.14) мы получаем, что при всяком выборе $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$ имеет место равенство

$$\mathbb{V}_s(x,K) = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(x,y) + \mathbb{V}_{s-1}(y, K\setminus\{k\})]. \tag{4.4.20}$$

Данное свойство (4.4.20) определяет принципиальную возможность последовательного вычисления значений функций

$$\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_N$$

без использования какой-либо “посторонней” информации.

В самом деле, мы располагаем функцией $\mathbb{V}_0$ (см.(4.2.31), (4.4.14)):

$$\mathbb{V}_0 : D_0 \to [0, \infty]$$

и при этом (см.(4.4.7)) справедливо равенство

$$\mathbb{V}_0(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathbf{M}. \tag{4.4.21}$$

Пусть $m \in \overline{0,N}$ и функции

$$\mathbb{V}_0 : D_0 \to [0,\infty[, \dots, \mathbb{V}_m : D_m \to [0,\infty[$$

нам уже известны. Если $m = N$, то наше построение завершено.

Пусть $m < N$, т.е. $m \in \overline{0, N-1}$; мы располагаем при этом функцией

$$\mathbb{V}_m : D_m \to [0, \infty[,$$

причем $m+1 \in \overline{1,N}$. Мы полагаем в (4.4.20) $s = m+1$ и получаем, что

$$\mathbb{V}_{m+1}(x,K) = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(x,y) + \mathbb{V}_m(y, K\setminus\{k\})] \quad \forall (x,K) \in D_{m+1}. \tag{4.4.22}$$

Тем самым определяется функция

$$\mathbb{V}_{m+1} : D_{m+1} \to [0, \infty[.$$

После выполнения конечного числа таких (регулярных) шагов все функции $\mathbb{V}_i, i \in \overline{0,N}$, будут построены и, в частности, будет определено значение

$$V = \mathbb{V}_N(x^0, \overline{1,N}) \tag{4.4.23}$$

(см.(4.2.35), (4.4.8), (4.4.14)). Число V (4.4.23) является глобальным экстремумом основной задачи; оно определяет потенциально достижимое качество решения и представляет самостоятельный интерес (в частности, оно может использоваться для целей коррекции начального состояния x^0 в интересах достижения лучшего качества).

Рассмотрим теперь построение оптимальной пары маршрут—трасса на основе информации о функциях $\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1, \ldots, \mathbb{V}_N$. В основе нашего построения находится равенство (4.4.20), реализуемое последовательно "по слоям" пространства позиций. Подчеркнем, что значениями (4.4.19) мы не располагаем и ни в коей мере их не используем.

Условимся о следующем соглашении:

$$\mathbf{x}_0 \triangleq x^0, \tag{4.4.24}$$

которое будет выдерживаться до конца настоящего раздела. С учетом (4.2.35), (4.4.15) и (4.4.23) имеем, что (см.(4.4.24))

$$V = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x_0, y) + \mathbb{V}_{N-1}(y, \overline{1,N} \setminus \{k\})], \tag{4.4.25}$$

где, согласно (4.4.17), справедливо свойство

$$(y, \overline{1,N} \setminus \{k\}) \in D_{N-1} \quad \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1,N}) \quad \forall y \in M_k. \tag{4.4.26}$$

Именно это свойство позволяет "обойтись" в (4.4.25) значениями функции $\mathbb{V}_{N-1} : D_{N-1} \longrightarrow [0, \infty[$, которая нам (на этом этапе) известна. С учетом (4.4.25) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}) \tag{4.4.27}$$

и точку $\mathbf{x}_1$ на множестве $M_{\mathbf{i}_1}$, т.е.

$$\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}, \tag{4.4.28}$$

для которых справедливо равенство

$$V = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}). \tag{4.4.29}$$

Из (4.4.26) – (4.4.28) следует, конечно, включение

$$(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}, \tag{4.4.30}$$

что учтено в (4.4.29). В силу (4.4.17) и (4.4.30) имеем свойство

$$(y, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; k\}) \in D_{N-2} \quad \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \quad \forall y \in M_k; \tag{4.4.31}$$

разумеется, в (4.4.31) мы учитываем очевидные равенства

$$\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; j\} = (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \setminus \{j\} \quad \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}).$$

Из (4.4.20) и (4.4.30) мы (с учетом (4.4.31)) получаем, что

$$\mathbb{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) =$$

$$= \min_{k\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})} \min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, y) + \mathbb{V}_{N-2}(y, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1; k\})]. \quad (4.4.32)$$

С учетом (4.4.32) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}), \quad (4.4.33)$$

а также точку $\mathbf{x}_2$ на множестве $M_{\mathbf{i}_2}$, т.е.

$$\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}, \quad (4.4.34)$$

удовлетворяющие следующему равенству:

$$\mathbb{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) =$$

$$= \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}). \quad (4.4.35)$$

Согласно (4.4.31), (4.4.33) и (4.4.34)

$$(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \in D_{N-2}.$$

Из (4.4.29) и (4.4.35) вытекает полезное равенство

$$V = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}). \quad (4.4.36)$$

Замечание. В связи с (4.4.36) имеет смысл отдельно разобрать простейший случай $N = 2$, имея в виду соображения методического характера. Итак, пусть в пределах настоящего замечания $N = 2$. В силу (4.4.33) имеем, в частности, включение

$$\mathbf{i}_2 \in \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}, \quad (4.4.37)$$

т.е. $\mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2$. Поэтому $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,2}} = (\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} \in \mathbb{P}$. Отметим, что

$$\mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}) = \mathbf{I}(\overline{1,2}) = \mathbf{I}(\overline{1,N}), \quad (4.4.38)$$

$$\mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{2,2}\}) = \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_2\}). \quad (4.4.39)$$

Из (4.4.27) и (4.4.38) получаем с очевидностью включения

$$\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}). \quad (4.4.40)$$

В силу (4.4.33) имеем в рассматриваемом случае, что

$$\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,2} \backslash \{\mathbf{i}_1\}), \tag{4.4.41}$$

где $\overline{1,2} \backslash \{\mathbf{i}_1\} = \{\mathbf{i}_2\}$. Из (4.4.37), (4.4.39) и (4.4.41) имеем теперь следующее включение:

$$\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_2\}). \tag{4.4.42}$$

Из (4.4.40), (4.4.42) вытекает система включений

$$\mathbf{i}_k \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{k,2}\}) \quad \forall k \in \overline{1,2}.$$

Иными словами, в рассматриваемом сейчас случае $N = 2$

$$\mathbf{i}_k \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{k,N}\}) \quad \forall k \in \overline{1,N}.$$

С учетом (4.2.12) имеем включение $(\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,2}} \in \mathbb{P}_0(\mathbf{I})$, откуда согласно (4.2.13) следует

$$(\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,N}} = (\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,2}} \in \mathbb{A}. \tag{4.4.43}$$

В рассматриваемом случае $N = 2$ согласно (4.2.2) и (4.4.43)

$$\mathfrak{X}[(\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,2}}] = \{(x_i)_{i \in \overline{0,2}} \in \mathfrak{X}_2 | (x_0 = x^0) \& (x_1 \in M_{\mathbf{i}_1}) \& (x_2 \in M_{\mathbf{i}_2})\}. \tag{4.4.44}$$

Для кортежа $(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,2}} : \overline{0,2} \to X$ имеем

$$(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,2}} \in \mathfrak{X}_2$$

и, кроме того, согласно (4.4.24), (4.4.28) и (4.4.34)

$$(\mathbf{x}_0 = x^0) \& (\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}) \& (\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}).$$

С учетом (4.4.44) получаем следующее включение:

$$(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,2}} \in \mathfrak{X}[(\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,2}}],$$

т.е. $(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[(\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,N}}]$. С учетом (4.2.3) имеем

$$((\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,2}}, (\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,2}}) = ((\mathbf{i}_k)_{k \in \overline{1,N}}, (\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{S}. \tag{4.4.45}$$

Из (4.4.21), (4.4.36) получаем в силу равенства $N = 2$ цепочку равенств

$$V = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathbb{V}_0(\mathbf{x}_2, \varnothing) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_N). \tag{4.4.46}$$

Из (4.2.17), (4.4.45) и (4.4.46) следует, что оптимальное решение задачи (4.2.4) уже построено. Таким решением в нашем простейшем случае является пара маршрут—трасса, упомянутая в (4.4.45). $\square$

Вернемся к общему случаю. Пусть $r \in \overline{2, N}$ и уже построены два кортежа

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r}} : \overline{1, r} \to \overline{1, N}, \tag{4.4.47}$$

$$(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,r}} : \overline{0, r} \to X, \tag{4.4.48}$$

для которых выполняются следующие условия:

1') $(\mathbf{x}_0 = x^0)\&(\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1, r})$;

2') $\forall k \in \overline{1, r}\ \forall l \in \overline{1, r}\backslash\{k\} \quad \mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$;

3') $(\mathbf{x}_k, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, r}$;

4') $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1, r}$;

5') $\mathbb{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j)+$
$+\mathbb{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\}) \quad \forall j \in \overline{1, r}$;

6') $V = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathbb{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\})$.

Замечание. Отметим, что в случае $r = 2$ условия $1') - 6')$ непременно выполнены. В предыдущем замечании рассматривался случай $N = 2$; сейчас мы отказываемся от этого предположения, но используем построения на основе (4.4.24) - (4.4.36).

Итак, обсудим случай $r = 2$ (относительно N предполагается только, что $2 \leq N$). Прежде всего заметим, что посредством (4.4.24), (4.4.28) и (4.4.34) определен кортеж

$$(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,r}} = (\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,2}},$$

а посредством (4.4.27), (4.4.33) определяется кортеж

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r}} = (\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,2}}.$$

Стало быть, кортежи (4.4.47), (4.4.48) в нашем случае уже построены.

Из (4.4.24), (4.4.28) и (4.4.34) вытекает, что

$$(\mathbf{x}_0 = x^0)\&((\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{1,2}} \in \prod_{j=1}^{2} M_{\mathbf{i}_j}); \tag{4.4.49}$$

из (4.4.49) вытекает $1')$ (для случая $r = 2$). Из (4.4.33), в частности, следует, что

$$\mathbf{i}_2 \in \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_1\},$$

а тогда $\mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2$. Следовательно, $2')$ в нашем случае выполнено. Из (4.4.30), (4.4.31), (4.4.33) и (4.4.34) вытекает, что

$$((\mathbf{x}_1, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1})\&((\mathbf{x}_2, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \in D_{N-2}).$$

Это означает (коль скоро $r = 2$), что

$$(\mathbf{x}_k, \overline{1, N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, r};$$

свойство 3$'$) установлено. Заметим, что справедливо очевидное равенство

$$\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,0}\} = \overline{1,N},$$

а потому из (4.4.27) следует, что

$$\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,0}\}). \tag{4.4.50}$$

Из (4.4.33) вытекает, что $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,1}\})$. С учетом (4.4.50) получаем в рассматриваемом случае, что

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r}. \tag{4.4.51}$$

Из (4.4.51) следует (при $r = 2$) свойство 4$'$). Для проверки 5$'$) используем (4.4.29) и (4.4.35). В самом деле, из (4.4.23), (4.4.24) и (4.4.29) следует, что

$$\mathbb{V}_N(\mathbf{x}_0, \overline{1,N}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}). \tag{4.4.52}$$

Из (4.4.35) и (4.4.52) вытекает, что

$$\mathbb{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) =$$

$$= \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathbb{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\backslash\{i_k : k \in \overline{1,j}\}) \quad \forall j \in \overline{1,2},$$

где $\overline{1,2} = \overline{1,r}$. В результате мы получили нужный вариант свойства 5$'$).

Наконец, из (4.4.36) непосредственно следует 6$'$) в рассматриваемом сейчас случае $r = 2$. □

Возвращаясь к общему случаю (имеется в виду случай, когда $N \geq 2$ и $r \geq 2$) кортежей (4.4.47), (4.4.48), отметим прежде всего, что из 3$'$) вытекает, в частности, включение

$$(\mathbf{x}_r, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\}) \in D_{N-r}. \tag{4.4.53}$$

Отметим, что у нас возможен один из следующих двух случаев:

$$(r = N) \vee (r < N).$$

Оба эти случая мы рассматриваем отдельно.

а) Пусть $r = N$, что отвечает ситуации (см.(4.4.47), (4.4.48)), когда уже построены следующие два кортежа:

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \overline{1,N}, \tag{4.4.54}$$

$$(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to X. \tag{4.4.55}$$

Покажем, что (4.4.54), (4.4.55) определяют на самом деле оптимальную пару маршрут—трасса в нашей основной задаче.

В самом деле, из $2'$) вытекает, что справедливо

$$\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l \quad \forall k \in \overline{1,N} \quad \forall l \in \overline{1,N} \setminus \{k\}.$$

Тогда кортеж (4.4.54) инъективен и, следовательно, биективен [57, с.73], т.е. согласно (1.1.24)

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}. \tag{4.4.56}$$

Кроме того, из (4.2.2), $1'$) и (4.4.56) вытекает включение

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,N}}]. \tag{4.4.57}$$

В силу (4.4.56) имеем из $4'$) систему включений

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j,N}\}) \quad \forall j \in \overline{1,N}.$$

С учетом (4.2.12) и (4.4.56) получаем теперь следующее включение:

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbb{P}_0(\mathbf{I}).$$

С учетом (4.2.13) имеем, как следствие, важное свойство допустимости маршрута (4.4.56):

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,N}} \in \mathbb{A}.$$

Итак, мы уже располагаем допустимым маршрутом, а также (см. (4.4.57)) допустимой трассой; иными словами, имеем пару маршрут-трасса

$$((\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,N}}, (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{S}. \tag{4.4.58}$$

Из 3') следует в рассматриваемом сейчас случае, что $(\mathbf{x}_N, \varnothing) \in D_0$, а тогда согласно (4.4.7)

$$\mathbf{x}_N \in \mathbf{M}.$$

При этом в силу $6'$) имеем в рассматриваемом сейчас случае следующее равенство:

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathbb{V}_0(\mathbf{x}_N, \varnothing),$$

поскольку $\{i_k : k \in \overline{1,N}\} = \{i_k : k \in \overline{1,r}\} = \overline{1,N}$ в силу (4.4.56). С учетом (4.4.21) имеем равенство $\mathbb{V}_0(\mathbf{x}_N, \varnothing) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_N)$, а потому

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) = V.$$

Из (4.2.17) имеем теперь свойство оптимальности решения (4.4.58). Итак, в случае а) мы в виде пары (4.4.58) имеем оптимальное решение нашей основной задачи.

б) Пусть $r < N$, т.е.

$$r \in \overline{2, N-1}.$$

Как следствие, имеем: $r+1 \in \overline{3, N}$. Тогда $N-(r+1) \in \overline{0, N-3}$. Напомним, что из $3'$) вытекает, в частности, включение

$$(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \in D_{N-r}. \tag{4.4.59}$$

Потому определено значение

$$\mathbb{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) = \mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) =$$

$$= v(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}).$$

Кроме того, из включений (4.4.17) и (4.4.59) вытекает, что $\quad \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \quad \forall y \in M_k$

$$(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\}) \in D_{N-(r+1)}. \tag{4.4.60}$$

Это позволяет определить значения

$$\mathbb{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$$

$$\forall k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \quad \forall y \in M_k.$$

Следовательно, определена следующая величина

$$\min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, y) +$$

$$+ \mathbb{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\})] \in [0, \infty[.$$

Более того, согласно (4.4.20) и (4.4.59) справедливо равенство

$$\mathbb{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, y) +$$

$$+ \mathbb{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\})]. \tag{4.4.61}$$

С учетом (4.4.61) выберем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}), \tag{4.4.62}$$

а также точку

$$\mathbf{x}_{r+1} \in M_{\mathbf{i}_{r+1}}, \tag{4.4.63}$$

для которых справедливо следующее равенство:

$$\mathbb{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\}) =$$

$$= \mathbf{c}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}) + \mathbb{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\}). \qquad (4.4.64)$$

Тогда с учетом $1'$) и (4.4.63) имеем, в частности, что

1") $(\mathbf{x}_0 = x^0)\&(\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1,r+1})$.

По выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ имеем очевидное включение

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\}.$$

С учетом $2'$) получаем теперь, что

2") $\forall k \in \overline{1,r+1}\} \quad \forall l \in \overline{1,r+1}\setminus\{k\}$

$$\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l.$$

С учетом (4.4.60), (4.4.62) и (4.4.63) имеем по выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ и $\mathbf{x}_{r+1}$ свойство

$$(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\}) \in D_{N-(r+1)}.$$

С учетом $3'$) и последнего включения получаем свойство

3") $(\mathbf{x}_k, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1,r+1}$.

Из $4'$) и (4.4.62) вытекает следующая система включений:

4") $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r+1}$.

Из $5'$) и (4.4.64) следует, в свою очередь, что

5") $\mathbb{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) +$
$+\mathbb{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r+1}$.

Наконец, из $6'$) и (4.4.64) вытекает следующее равенство:

6") $V = \sum_{k=0}^{r} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathbb{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\})$.

Таким образом, в случае б) мы смогли продолжить каждый из кортежей (4.4.47), (4.4.48) на один шаг, получая, следовательно,

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,r+1}} : \overline{1,r+1} \to \overline{1,N}$$

и

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0,r+1}} : \overline{0,r+1} \to X.$$

Для этих "продолженных" кортежей сохраняются все основные свойства исходных кортежей (4.4.47), (4.4.48): свойства 1') - 6') переходят в 1") - 6").

Разумеется, после исполнения конечного числа (регулярных) шагов, отвечающих случаю б), мы придем к ситуации, соответствующей рассмотренному ранее случаю а), т.е. к оптимальному решению основной задачи.

4.5. Простейший пример решения маршрутной задачи с ограничениями по методу динамического программирования

В настоящем разделе мы рассмотрим применение процедуры на основе МДП в той версии этого метода, которая приведена в предыдущем разделе. Мы рассмотрим вариант примера разд. 4.3. Изменим, однако, функцию стоимости. Именно, в качестве последней будем рассматривать несколько иную метрику.

Итак, полагаем выполненными (4.3.1)–(4.3.3), (4.3.9); кроме того, как и в разд. 4, полагаем, что $x^0 = (0,0)$. Функцию $\mathbf{c}$, определенную на $X \times X$ (см. (4.3.2)) и принимающую неотрицательные значения, полагаем в настоящем разделе такой, что при всяком выборе

$$x' = (x'_1, x'_2) \in X, \ \ x'' = (x''_1, x''_2) \in X$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{c}(x', x'') = |x'_1 - x''_1| + |x'_2 - x''_2|. \tag{4.5.1}$$

Полагаем функцию $\mathbf{f}$ тождественно равной нулю. Заметим, что множество $\mathbb{A}$ не зависит от выбора функции стоимости (см. (4.3.3), (4.5.1)) и определяется ограничениями в виде условий предшествования. Поэтому, как и в разд. 4.3, множество $\mathbb{A}$ трехэлементно:

$$\mathbb{A} = \{\alpha_i \, : \, i \in \overline{1,3}\},$$

где α_1, α_2 и α_3 определены в п. 1), 2), 3) разд. 4.3.

В этих условиях допустимые маршруты характеризуются следующими показателями качества:

1) маршрут α_1 характеризуется трассами (4.3.10), (4.3.11), первая из которых имеет стоимость

$$6 + 5 + 3 = 14,$$

а вторая — стоимость

$$6 + 5 + 5 = 16.$$

Следовательно, цена маршрута есть число 14;

2) маршрут α_2 характеризуется трассами (4.3.12), (4.3.13). Трасса (4.3.12) определяется следующим значением затрат:

$$6 + 2 + 5 = 13,$$

а трасса (4.3.13) характеризуется значением (затрат)

$$6 + 8 + 3 = 17.$$

Стало быть, цена маршрута α_2 есть число 13; маршрут α_2 является более предпочтительным в сравнении с α_1.

3) Маршрут α_3 характеризуется трассами (4.3.14), (4.3.15). Трассе (4.3.14) соответствует следующая величина затрат:

$$2 + 8 + 5 = 15,$$

а трассе (4.3.15) отвечают затраты

$$4 + 2 + 5 = 11;$$

следовательно, цена маршрута α_3 есть число 11. Этот маршрут и является оптимальным.

Рассмотрим реализацию процедуры на основе "экономичной" версии МДП. С этой целью мы сначала построим систему слоев пространства позиций вида (x, K), где $x \in X$ (см.(4.3.2)) и $K \in \mathbf{N}$. В свою очередь, это потребует построения множеств $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$. С этой целью будем использовать (4.3.3). Итак (см.(4.3.3), (4.4.5)),

$$\mathfrak{G}_1 = \{K \in \mathfrak{N}_1 \,|\, (1 \in K) \Rightarrow (2 \in K)\} = \{\{2\}; \{3\}\}, \qquad (4.5.2)$$

$$\mathfrak{G}_2 = \{K \in \mathfrak{N}_2 \,|\, (1 \in K) \Rightarrow (2 \in K)\} = \{\{1; 2\}; \{2; 3\}\}, \qquad (4.5.3)$$

$$\mathfrak{G}_3 = \{K \in \mathfrak{N}_3 \,|\, (1 \in K) \Rightarrow (2 \in K)\} = \{\overline{1, 3}\}. \qquad (4.5.4)$$

В связи с этими соотношениями напомним (4.3.8).

Приступим к построению слоев $D_0, D_1, ..., D_N$. Сначала рассмотрим построение D_0; см. (4.3.1), (4.4.6), (4.4.7). Заметим, что в нашем случае

$$\overline{1, N} \setminus \{p_i \,:\, i \in \overline{1, n}\} = \overline{1, 3} \setminus \{p_1\} = \overline{1, 3} \setminus \{1\} = \{2; 3\} = \overline{2, 3}.$$

С учетом (4.4.6) имеем следующее равенство:

$$\mathbf{M} = M_2 \bigcup M_3 = \{(1, 0); (0, -2); (0, 4))\}. \qquad (4.5.5)$$

Здесь, т.е. в (4.5.5), указано трехэлементное множество, а, точнее, множество, содержащее упорядоченные пары

$$(1, 0), \ (0, -2), \ (0, 4)$$

и не содержащее никаких других элементов. Подобные соглашения, касающиеся трехэлементных множеств, четырехэлементных (и т.д.) множеств используем ниже без дополнительных пояснений. Тогда в согласии с (4.4.7) имеем D_0 в виде

$$D_0 = \mathbf{M} \times \{\varnothing\} = \{((1,0),\varnothing);((0,-2),\varnothing);((0,4),\varnothing)\}. \qquad (4.5.6)$$

В силу (4.4.8) имеем в рассматриваемом случае равенство

$$D_N = D_3 = \{((0,0),\overline{1,3})\}. \qquad (4.5.7)$$

Нам следует теперь построить множества D_1 и D_2. Для этого следует прежде всего конкретизировать (4.4.9). Нам потребуются следующие множества (см. (4.5.2), (4.5.3)):

$$\mathcal{J}_1(\{2\}),\ \mathcal{J}_1(\{3\}),\ \mathcal{J}_2(\{1;2\}),\ \mathcal{J}_2(\{2;3\}).$$

С учетом (4.4.9) мы получаем, что

$$\mathcal{J}_1(\{2\}) = \{i \in \overline{1,3}\backslash\{2\} | \{i\} \bigcup \{2\} \in \mathfrak{G}_2\} =$$

$$= \{i \in \{1;3\} | \{i\} \bigcup \{2\} \in \mathfrak{G}_2\} = \{1;3\};$$

$$\mathcal{J}_1(\{3\}) = \{i \in \overline{1,3}\backslash\{3\} | \{i\} \bigcup \{3\} \in \mathfrak{G}_2\} =$$

$$= \{i \in \{1;2\} | \{i\} \bigcup \{3\} \in \mathfrak{G}_2\} = \{2\};$$

$$\mathcal{J}_2(\{1;2\}) = \mathcal{J}_2(\overline{1,2}) = \{i \in \overline{1,3}\backslash\overline{1,2}\,|\,\{i\} \bigcup \{1;2\} \in \mathfrak{G}_3\} = \{3\};$$

$$\mathcal{J}_2(\{2;3\}) = \mathcal{J}_2(\overline{2,3}) = \{i \in \overline{1,3}\backslash\overline{2,3}\,|\,\{i\} \bigcup \overline{2,3} \in \mathfrak{G}_3\} = \{1\}.$$

Из (4.3.9), (4.4.10) и (4.5.2) получаем теперь цепочку равенств

$$D_1 = \{(x,\{2\}) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_1(\{2\})} M_i\} \bigcup \{(x,\{3\}) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_1(\{3\})} M_i\} =$$

$$= \{(x,\{2\})\ :\ x \in M_1 \bigcup M_3\} \bigcup \{(x,\{3\})\ :\ x \in M_2\} =$$

$$= \{((2,4),\{2\});((0,-2),\{2\});((0,4),\{2\})\} \bigcup \{((1,0),\{3\})\} =$$

$$= \{((2,4),\{2\});((0,-2),\{2\});((0,4),\{2\});((1,0),\{3\})\}. \qquad (4.5.8)$$

Итак, согласно (4.5.8), D_1 есть следующее четырехэлементное множество

$$D_1 = \{((2,4),\{2\});((0,-2),\{2\});((0,4),\{2\});((1,0),\{3\})\}. \qquad (4.5.9)$$

Из (4.3.9), (4.4.10) и (4.5.3) вытекает, что

$$D_2 = \{(x,\{1;2\}) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_2(\{1;2\})} M_i\} \bigcup \{(x,\{2;3\}) : x \in$$

$$\in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_2(\{2;3\})} M_i\} = \{(x, \{1;2\}) : x \in M_3\} \bigcup \{(x, \{2;3\}) : x \in M_1\} =$$

$$= \{((0,-2), \{1;2\}); ((0,4), \{1;2\})\} \bigcup \{((2,4), \{2;3\})\} =$$

$$= \{((0,-2), \{1;2\}); ((0,4), \{1;2\}); ((2,4), \{2;3\})\} =$$

$$= \{((0,-2), \overline{1,2}); ((0,4), \overline{1,2}); ((2,4), \overline{2,3})\}.$$

Итак, множество D_2 трехэлементно и определяется выражением:

$$D_2 = \{((0,-2), \overline{1,2}); ((0,4), \overline{1,2}); ((2,4), \overline{2,3})\}. \qquad (4.5.10)$$

Таким образом, искомые слои в пространстве позиций имеют следующий вид (см. (4.5.6), (4.5.9), (4.5.10)):

$$D_0 = \{((1,0), \varnothing); ((0,-2), \varnothing); ((0,4), \varnothing)\},$$

$$D_1 = \{((2,4), \{2\}); ((0,-2), \{2\}); ((0,4), \{2\}); ((1,0), \{3\})\},$$

$$D_2 = \{((0,-2), \overline{1,2}); ((0,4), \overline{1,2}); ((2,4), \overline{2,3})\},$$

$$D_3 = \{((0,0), \overline{1,3})\}.$$

Напомним, что $\mathbb{V}_0 : D_0 \longrightarrow [0, \infty[$ определяется в рассматриваемом случае условием

$$\mathbb{V}_0(x, K) = 0 \quad \forall (x, K) \in D_0, \qquad (4.5.11)$$

что доставляет в силу (4.5.5), (4.5.6) следующую систему равенств:

$$\mathbb{V}_0((1,0), \varnothing) = \mathbb{V}_0((0,-2), \varnothing) = \mathbb{V}_0((0,4), \varnothing) = 0. \qquad (4.5.12)$$

Для построения $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_1 : D_1 \longrightarrow [0, \infty[$, используем (4.4.22), (4.5.12). При этом согласно (4.4.17) при $(x, K) \in D_1$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$

$$(y, K \backslash \{k\}) \in D_0. \qquad (4.5.13)$$

Здесь следует, строго говоря, использовать (4.2.6), (4.2.9). Нам следует вычислить значения

$$\mathbb{V}_1((2,4), \{2\}),\ \mathbb{V}_1((0,-2), \{2\}),\ \mathbb{V}_1((0,4), \{2\}),\ \mathbb{V}_1((1,0), \{3\}).$$

Теперь отметим, что при всяком выборе $(x, K) \in D_1$ множество K одноэлементно:

$$(K = \{2\}) \vee (K = \{3\}). \qquad (4.5.14)$$

Поскольку $p_1 \neq q_1$, то в силу (4.2.6) и (4.5.14):

$$\Sigma[K] = \varnothing \quad \forall (x, K) \in D_1.$$

Поэтому согласно (4.2.9) $\mathbf{I}(K) = K \ \ \forall (x, K) \in D_1$. Таким образом, согласно (4.4.22) и (4.5.11) при $(x, K) \in D_1$

$$\mathbb{V}_1(x, K) = \min_{k \in K} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathbb{V}_0(y, K \setminus \{k\})] = \min_{k \in K} \min_{y \in M_k} \mathbf{c}(x, y).$$

Поэтому получаем (см. (4.3.9), (4.5.1)) следующие четыре значения:

$$\mathbb{V}_1((2,4), \{2\}) = \min_{y \in M_2} \mathbf{c}((2,4), y) = \mathbf{c}((2,4), (1,0)) = 5,$$

$$\mathbb{V}_1((0,-2), \{2\}) = \min_{y \in M_2} \mathbf{c}((0,-2), y) = \mathbf{c}((0,-2), (1,0)) = 3,$$

$$\mathbb{V}_1((0,4), \{2\}) = \min_{y \in M_2} \mathbf{c}((0,4), y) = \mathbf{c}((0,4), (1,0)) = 5,$$

$$\mathbb{V}_1((1,0), \{3\}) = \min_{y \in M_3} \mathbf{c}((1,0), y) =$$

$$= \min(\{\mathbf{c}((1,0), (0,-2));\ \mathbf{c}((1,0), (0,4))\}) = \min(\{3; 5\}) = 3.$$

Рассмотрим теперь построение функции $\mathbb{V}_2 : D_2 \longrightarrow [0, \infty[$. Для этого используем (4.4.22) при $m = 1$. Нам следует определить значения

$$\mathbb{V}_2((0,-2), \overline{1,2}), \ \ \mathbb{V}_2((0,4), \overline{1,2}), \ \ \mathbb{V}_2((2,4), \overline{2,3}).$$

Заметим, что согласно (4.3.3) и (4.2.6) справедливы равенства

$$\Sigma[\overline{1,2}] = \{1\}, \ \ \Sigma[\overline{2,3}] = \varnothing.$$

В этом случае

$$\mathbf{I}(\overline{1,2}) = \overline{1,2} \setminus \{q_1\} = \overline{1,2} \setminus \{2\} = \{1\},$$

$$\mathbf{I}(\overline{2,3}) = \overline{2,3} \setminus \{q_j : j \in \Sigma[\overline{2,3}]\} = \overline{2,3}.$$

С учетом (4.4.22) мы получаем при $m = 1$ следующие представления:

$$\mathbb{V}_2((0,-2), \overline{1,2}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,2})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}((0,-2), y) + \mathbb{V}_1(y, \overline{1,2} \setminus \{k\})] =$$

$$= \min_{y \in M_1} [\mathbf{c}((0,-2), y) + \mathbb{V}_1(y, \{2\})] =$$

$$= \mathbf{c}((0,-2), (2,4)) + \mathbb{V}_1((2,4), \{2\}) = 8 + 5 = 13,$$

$$\mathbb{V}_2((0,4), \overline{1,2}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,2})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}((0,4), y) + \mathbb{V}_1(y, \overline{1,2} \setminus \{k\})] =$$

$$= \min_{y \in M_1} [\mathbf{c}((0,4), y) + \mathbb{V}_1(y, \overline{1,2} \setminus \{1\})] =$$

$$= \mathbf{c}((0,4), (2,4)) + \mathbb{V}_1((2,4), \{2\}) = 2 + 5 = 7,$$

$$\mathbb{V}_2((2,4), \overline{2,3}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{2,3})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}((2,4), y) + \mathbb{V}_1(y, \overline{2,3} \setminus \{k\})] =$$

$$= \min_{k\in\overline{2,3}} \min_{y\in M_k} [\mathbf{c}((2,4),y) + \mathbb{V}_1(y, \overline{2,3}\backslash\{k\})] =$$

$$= \min(\{\min_{y\in M_2} [\mathbf{c}((2,4),y) + \mathbb{V}_1(y,\{3\})];$$

$$\min_{y\in M_3} [\mathbf{c}((2,4),y) + \mathbb{V}_1(y,\{2\})]\}) =$$

$$= \min(\{\mathbf{c}((2,4),(1,0)) + \mathbb{V}_1((1,0),\{3\}); \min(\{\mathbf{c}((2,4),(0,-2))+$$

$$+\mathbb{V}_1((0,-2),\{2\}); \mathbf{c}((2,4),(0,4)) + \mathbb{V}_1((0,4),\{2\})\})\}) =$$

$$= \min(\{5+3; \min(\{8+3; 2+5\})\}) = \min(\{8;7\}) = 7.$$

Теперь мы должны определить $\mathbb{V}_3$, что сводится к нахождению глобального экстремума (см. (4.4.23)). Здесь можно использовать конкретизированный вариант соотношения (4.4.25). В этой связи отметим, что $\Sigma[\overline{1,3}] = \{1\}$. Поэтому согласно (4.2.9)

$$\mathbf{I}(\overline{1,3}) = \mathbf{I}(\overline{1,N}) = \overline{1,N}\backslash\{q_1\} = \overline{1,3}\backslash\{q_1\} = \overline{1,3}\backslash\{2\} = \{1;3\}.$$

Тогда в силу (4.4.25) получаем следующее выражение для экстремума V нашей основной задачи:

$$V = \min(\{\min_{y\in M_1} [\mathbf{c}((0,0),y) + \mathbb{V}_2(y,\overline{2,3})]; \min_{y\in M_3} [\mathbf{c}((0,0),y)+$$

$$+\mathbb{V}_2(y,\overline{1,2})]\}) = \min(\{\mathbf{c}((0,0),(2,4)) + \mathbb{V}_2((2,4),\overline{2,3})];$$

$$\min(\{\mathbf{c}((0,0),(0,-2)) + \mathbb{V}_2((0,-2),\overline{1,2});$$

$$\mathbf{c}((0,0),(0,4)) + \mathbb{V}_2((0,4),\overline{1,2})\})\}) =$$

$$= \min(\{6+7; \min(\{2+13; 4+7\})\}) = \min(\{13;11\}) = 11.$$

Мы получили найденное ранее оптимальное значение, которое (как отмечалось ранее) достигается при выборе маршрута α_3 и трассы (4.3.15). Сейчас мы построим оптимальное решение в виде пары маршрут—трасса посредством общей процедуры на основе МДП. Напомним, что (см. (4.4.24)).

$$\mathbf{x}_0 = (0,0).$$

Пара $(\mathbf{i}_1, \mathbf{x}_1)$ определяется из (4.4.25) — (4.4.29). Это означает, в частности, что

$$(\mathbf{i}_1 = 1) \vee (\mathbf{i}_1 = 3)$$

(см. конкретизацию $\mathbf{I}(\overline{1,N}) = \mathbf{I}(\overline{1,3})$, используемую при построении функции Беллмана), $\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$ и при этом (см. (4.4.29))

$$11 = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_2(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}) =$$

$$= \mathbf{c}((0,0),\mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_2(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}). \tag{4.5.15}$$

Если $\mathbf{i}_1 = 1$, то справедливо равенство

$$\mathbf{c}((0,0),\mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_2(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}) =$$

$$= \mathbf{c}((0,0),(2,4)) + \mathbb{V}_2((2,4), \overline{2,3}) = 6 + 7 = 13. \tag{4.5.16}$$

Здесь мы использовали найденное ранее значение $\mathbb{V}_2((2,4), \overline{2,3})$. Следовательно (см. (4.5.15), (4.5.16)), $\mathbf{i}_1 \neq 1$, т. к. иначе возникает противоречие с (4.5.15). Итак,

$$\mathbf{i}_1 = 3, \tag{4.5.17}$$

$$11 = \mathbf{c}((0,0),\mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_2(\mathbf{x}_1, \overline{1,2}) \tag{4.5.18}$$

(см. (4.5.15), (4.5.17)). В последнем соотношении имеем согласно (4.3.9)

$$(\mathbf{x}_1 = (0,-2)) \vee (\mathbf{x}_1 = (0,4)).$$

Допустим, что $\mathbf{x}_1 = (0,-2)$. Тогда

$$\mathbf{c}((0,0),\mathbf{x}_1) + \mathbb{V}_2(\mathbf{x}_1, \overline{1,2}) = \mathbf{c}((0,0),(0,-2)) + \mathbb{V}_2((0,-2), \overline{1,2}) =$$

$$= 2 + 13 = 15.$$

Получили противоречие с (4.5.18), которое показывает, что на самом деле

$$\mathbf{x}_1 = (0,4). \tag{4.5.19}$$

При этом $\mathbf{c}((0,0),(0,4)) + \mathbb{V}_2((0,4), \overline{1,2}) = 4 + 7 = 11$. Теперь мы располагаем позицией

$$(\mathbf{x}_1, \overline{1,2}) = ((0,4), \overline{1,2}).$$

При этом в нашем случае

$$\overline{1,2} = \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}.$$

Воспользуемся (4.4.35). Итак (см.(4.4.33), (4.4.34)),

$$\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,2}) \tag{4.5.20}$$

и $\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}$ обладают свойством (см. (4.5.19))

$$7 = \mathbb{V}_2((0,4), \overline{1,2}) = \mathbb{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}) =$$

$$= \mathbf{c}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}) =$$

$$= \mathbf{c}((0,4),\mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\backslash\{3; \mathbf{i}_2\}). \tag{4.5.21}$$

Ранее было показано, что $\mathbf{I}(\overline{1,2}) = \{1\}$. Поэтому в силу (4.5.20) $\mathbf{i}_2 = 1$. Тогда (4.5.21) преобразуется к виду

$$\mathbf{c}((0,4),\mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N}\setminus\{1;3\}) =$$

$$= \mathbf{c}((0,4),\mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_1(\mathbf{x}_2, \overline{1,3}\setminus\{1;3\}) = \mathbf{c}((0,4)),\mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_1(\mathbf{x}_2, \{2\}) = 7, \quad (4.5.22)$$

где $\mathbf{x}_2 \in M_1$. Поскольку M_1 есть одноэлементное множество, то $\mathbf{x}_2 = (2,4)$. Тем самым построение пары маршрут—трасса фактически завершено. Тем не менее проведем проверку (4.5.22):

$$\mathbf{c}((0,4)),\mathbf{x}_2) + \mathbb{V}_1(\mathbf{x}_2, \{2\}) = \mathbf{c}((0,4)),(2,4)) + \mathbb{V}_1((2,4), \{2\}) = 7.$$

Как отмечалось ранее, $\mathbf{V}_1((2,4),\{2\}) = 5$; $\mathbf{c}((0,4),(2,4)) = 2$. Нам осталось сделать один регулярный шаг процедуры; см. случай в) предыдущего раздела при $r = 2$. Этот шаг легко реализуется непосредственно исключением из $\overline{1,3}$ двухэлементного множества $\{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\} = \{1;3\}$. Но мы все же выполним формальное условие. При этом согласно общей процедуре выбора $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_{r+1}$ и $\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_3$ имеем включение:

$$(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\}) = (\mathbf{x}_3, \overline{1,3}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,3}\}) \in D_0.$$

Тогда согласно (4.4.7) $\mathbf{x}_3 \in \mathbf{M}$ и $\overline{1,3}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,3}\} = \varnothing$. Поэтому $\mathbb{V}_0(\mathbf{x}_3, \overline{1,3}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,3}\}) = \mathbb{V}_0(\mathbf{x_3}, \varnothing) = 0$. Согласно (4.4.64)

$$\mathbb{V}_1(\mathbf{x}_2, \{2\}) = \mathbb{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}) +$$

$$+ \mathbb{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r+1}\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) +$$
$$+ \mathbb{V}_0(\mathbf{x}_3, \overline{1,3}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,3}\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$$

для $\mathbf{i}_3 \in \mathbf{I}(\overline{1,3}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\})$ и $\mathbf{x}_3 \in M_{\mathbf{i}_3}$; см. (4.4.63), (4.4.64). Из этих соотношений имеем, в частности, что $\mathbf{i}_3 \in \mathbf{I}(\overline{1,3}\setminus\{1;3\})$, т.е. $\mathbf{i}_3 \in \mathbf{I}(\{2\})$. При этом $p_1 \neq q_1$, а тогда

$$\Sigma[\{2\}] = \{i \in \overline{1,1} \,|\, (p_i \in \{2\}) \& (q_{\mathbf{i}} \in \{2\})\} = \varnothing,$$

$\mathbf{I}(\{2\}) = \{2\}$ в силу (4.2.9), а потому $\mathbf{i}_3 = 2$. Тогда, $\mathbf{x}_3 \in M_2$ и (см. (4.3.9)) $\mathbf{x}_3 = (1,0)$. Следовательно, имеем цепочку равенств

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \mathbf{c}((2,4),(1,0)) = 5 = \mathbb{V}_1((2,4),\{2\}) = \mathbb{V}_1(\mathbf{x}_2, \{2\}).$$

Теперь мы имеем маршрут

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,3}} : \overline{1,3} \longrightarrow \overline{1,3},$$

для которого $\mathbf{i}_1 = 3,\ \mathbf{i}_2 = 1,\ \mathbf{i}_3 = 2$. Сопоставляя этот маршрут с определениями разд. 4.3, видим, что

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,3}} = \alpha_3 \tag{4.5.23}$$

(мы отмечали уже после прямого перебора, что α_3 — оптимальный маршрут). Трасса, складывающаяся при движении вдоль маршрута (4.5.23), есть кортеж

$$(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,3}} : \overline{0,3} \longrightarrow X,$$

для которого

$$\mathbf{x}_0 = x^0 = (0,0),\ \mathbf{x}_1 = (0,4),\ \mathbf{x}_2 = (2,4),\ \mathbf{x}_3 = (1,0).$$

Итак, мы получили (оптимальную) трассу (4.3.15). Следовательно, оптимальное решение, найденное простым перебором, реализовано посредством процедуры на основе экономичного варианта МДП.

В связи с данным примером можно поставить следующий вопрос: не следует ли и в общем случае применять перебор для отбраковки вариантов путем проверки на допустимость в смысле соблюдения условий предшествования с последующим поиском среди оставшихся вариантов решения? В нашем примере общее число маршрутов, подлежащих проверке, равно 6. Поэтому проверить каждый их них на допустимость труда не составляет. Если же иметь в виду обычную задачу курьера, то число проверяемых маршрутов равно $N!$. В этом случае прямой перебор становится крайне затруднительным при больших N (к этому в рассматриваемом у нас случае следует добавить перебор трасс). Процедура на основе МДП с построением слоев по методике [49, 56], рассмотренная в разд. 4.4, представляется все же более приемлемой с точки зрения вычислений (см. в этой связи [56, §4.9]).

4.6. Вычислительный эксперимент

Приведенный выше алгоритм был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++ (Borland C++ Builder 6.0), работающей в операционной системе Windows, не старше Windows 95. Вычислительная часть реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения по множествам, а также увеличения отдельных ее участков. Вычислительный эксперимент проводился на компьютере Notebook с процессором Intel Core2 Duo T7700 с частотой 2.4 ГГц, объемом ОЗУ 3 ГБ с установленной операционной системой Windows Vista.

На плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ задана система из 27 множеств, каждое из которых представлено 12 точками на окружности, включая точку с нулевой угловой координатой, расположенными на равных угловых расстояниях друг от друга. Таким образом, каждое множество M_i, $\quad i \in \overline{1,27}$, однозначно представляется координатами центра O_i и радиусом R_i окружности.

Итак, пусть заданы следующие координаты центров окружностей:

$$O_1 = (15,0),\ O_2 = (45,0),\ O_3 = (80,0),\ O_4 = (0,-20),\ O_5 = (0,-50),$$
$$O_6 = (0,-85),\ O_7 = (-25,0),\ O_8 = (-55,0),\ O_9 = (-82,0),$$
$$O_{10} = (0,22),\ O_{11} = (0,48),\ O_{12} = (0,82),\ O_{13} = (30,35),\ O_{14} = (50,80),$$
$$O_{15} = (70,40),\ O_{16} = (30,-50),\ O_{17} = (65,-35),\ O_{18} = (80,-80),$$
$$O_{19} = (40,-85),\ O_{20} = (-40,-50),\ O_{21} = (-70,-75),\ O_{22} = (-80,-35),$$
$$O_{23} = (-70,-80),\ O_{24} = (-60,35),\ O_{25} = (-30,55);$$
$$O_{26} = (-40,-85),\ O_{27} = (-30,85),$$

а также радиусы окружностей:

$$R_4 = R_6 = R_8 = R_{10} = R_{27} = 8;$$
$$R_1 = R_9 = R_{11} = R_{13} = R_{16} = R_{19} = R_{24} = R_{26} = 10;$$
$$R_3 = R_{18} = R_{21} = 11;$$
$$R_2 = R_5 = R_{15} = R_{17} = R_{22} = R_{25} = 12;$$
$$R_7 = R_{12} = R_{14} = R_{20} = R_{23} = 15.$$

Пусть $N = 27$, а начальная точка совпадает с началом координат, т.е. $x^0 = (0,0)$.

Ограничения на порядок посещения множеств (условия предшествования) заданы следующими парами индексов:

$$p_1 = 1, q_1 = 10;\ p_2 = 12, q_2 = 2;\ p_3 = 2, q_3 = 13;\ p_4 = 13, q_4 = 15;$$
$$p_5 = 6, q_5 = 16;\ p_6 = 15, q_6 = 16;\ p_7 = 18, q_7 = 27;\ p_8 = 9, q_8 = 27;$$
$$p_9 = 10, q_9 = 9;\ p_{10} = 11, q_{10} = 19;\ p_{11} = 20, q_{11} = 19;\ p_{12} = 25, q_{12} = 26;$$
$$p_{13} = 23, q_{13} = 22;\ p_{14} = 21, q_{14} = 20;\ p_{15} = 24, q_{15} = 22;\ p_{16} = 14, q_{16} = 16;$$
$$p_{17} = 7, q_{17} = 10;\ p_{18} = 8, q_{18} = 2;\ p_{19} = 1, q_{19} = 9;\ p_{20} = 14, q_{20} = 26;$$
$$p_{21} = 2, q_{21} = 27;\ p_{22} = 3, q_{22} = 6;\ p_{23} = 3, q_{23} = 19;\ p_{24} = 18, q_{24} = 17;$$
$$p_{25} = 14, q_{25} = 25.$$

Итак, $n = 25$. Пусть функция затрат задана в виде расстояния, определяемого как максимум из модулей разности координат, т.е. расстояние от точки $x = (x_1, x_2)$ до точки $\quad y = \ (y_1, y_2)$ равно (в отличие от примера раздела 4.5 используемое расстояние соответствует (4.3.4)) $\mathbf{c}(x,y) = \max\Big(\Big\{|y_2 - y_1|;\ |x_2 - x_1|\Big\}\Big)$; $\quad \mathbf{f}(z) = \max\Big(\Big\{|z_1|;\ |z_2|\Big\}\Big)$ для $z = (z_1, z_2)$.

Последнее определение (функция $\mathbf{f}$) отличается от используемого в примере предыдущего раздела и соответствует содержательно требованию о возвращении на базу, т.е. в точку x^0.

В этом и последующих примерах полагаем, что $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и при этом

$$X = \{x^0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{27} M_i\Big).$$

Получены следующие результаты.

Величина совокупных затрат: 857.37.

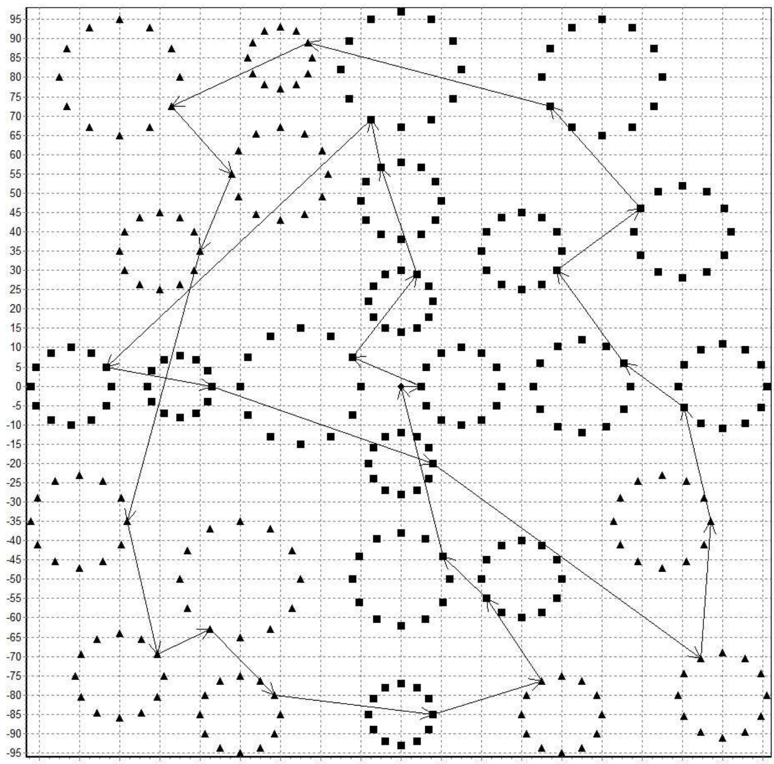

Рис. 4.5.1. Маршрут и трасса обхода множеств (расстояние — максимум модулей разности координат).

Маршрут и трасса:

$$
\begin{gathered}
x^0 = (0,0) \to (5,0) \in M_1 \to (-12.01, 7.50) \in M_7 \to (4, 28.93) \in M_{10} \to \\
\to (-5, 56.66) \in M_{11} \to (-7.50, 69.01) \in M_{12} \to (-73.34, 5) \in M_9 \to \\
\to (-47, 0) \in M_8 \to (8, -20) \in M_4 \to (74.50, -70.47) \in M_{18} \to \\
\to (77, -35) \in M_{17} \to (70.47, -5.50) \in M_3 \to (55.39, 6) \in M_2 \to \\
\to (38.66, 30) \in M_{13} \to (59.61, 46) \in M_{15} \to (37.01, 72.50) \in M14 \to \\
\to (-23.07, 89) \in M_{27} \to (-57.01, 72.50) \in M_{23} \to (-42, 55) \in M_{25} \to \\
\to (-50, 35) \in M_{24} \to (-68, -35) \in M_{22} \to (-60.47, -69.50) \in M_{21} \to \\
\to (-47.50, -62.99) \in M_{20} \to (-31.34, -80) \in M_{26} \to (8, -85) \in M_6 \to \\
\to (35, -76.34) \in M_{19} \to (21.34, -55) \in M_{16} \to (10.39, -44) \in M_5 \to \\
\to x^0 = (0,0).
\end{gathered}
$$

Время счета составило 25 мин 40 с.

График маршрута и трассы приведен на рис. 4.5.1.

Пусть функция затрат, являющаяся расстоянием, задана (как и в примере раздела 4.5, см. (4.5.1)) как сумма модулей разностей координат, т.е. расстояние от точки $x = (x_1, x_2)$ до $y = (y_1, y_2)$ равно $\mathbf{c}(x, y) = |y_2 - y_1| + |x_2 - x_1|$. Кроме того, полагаем, что $\mathbf{f}(z) = |z_1| + |z_2|$ для $z = (z_1, z_2)$.

Получены следующие результаты.

Величина совокупных затрат: 1070.41.

Маршрут и трасса:

$$
\begin{gathered}
x^0 = (0,0) \to (5,0) \in M_1 \to (-10, 0) \in M_7 \to (-8, 22) \in M_{10} \to \\
\to (-8.66, 53) \in M_{11} \to (-7.50, 69.01) \in M_{12} \to (-62.50, 67.01) \in M_{23} \to \\
\to (-65, 43.66) \in M_{24} \to (-63, 0) \in M_8 \to (-72, 0) \in M_9 \to \\
\to (-69.61, -29) \in M_{22} \to (-70, -64) \in M_{21} \to (-40, -65) \in M_{20} \to \\
\to (74.50, -70.47) \in M_{18} \to (71, -24.61) \in M_{17} \to (70.47, 5.50) \in M_3 \to \\
\to (51, 10.39) \in M_2 \to (40, 35) \in M_{13} \to (58, 40) \in M_{15} \to \\
\to (37.01, 72.50) \in M_{14} \to (-30, 77) \in M_{27} \to (-30, 67) \in M_{25} \to \\
\to (-31.34, -80) \in M_{26} \to (6.93, -81) \in M_6 \to (31.34, -80) \in M_{19} \to \\
\to (30, -40) \in M_{16} \to (6, -39.61) \in M_5 \to (4, -13.07) \in M_4 \to x^0 = (0,0).
\end{gathered}
$$

Время счета составило: 25 мин 47 с.

График маршрута и трассы приведен на рис. 4.5.2.

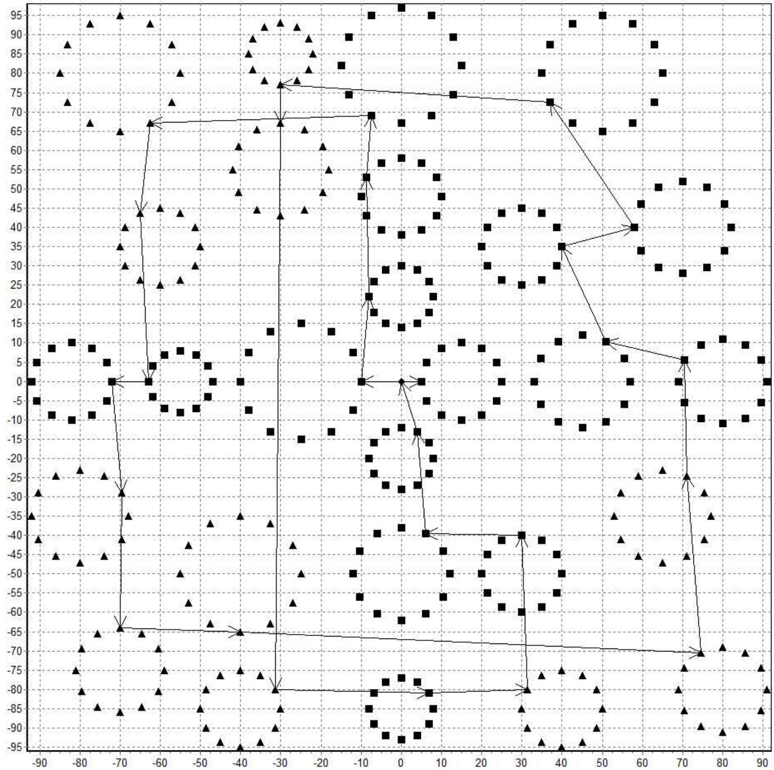

Рис. 4.5.2. Маршрут и трасса обхода множеств (расстояние — сумма модулей разностей координат).

Из сравнения рисунков 4.5.1 и 4.5.2 видно, что конкретный выбор расстояния (в качестве функции затрат) оказывает влияние на структуру оптимального решения, на величину оптимального результата.

Глава 5

Усложненный вариант обобщенной задачи курьера (случай, когда стоимость перемещений зависит от списка заданий)

В настоящей главе рассматривается постановка обобщенной задачи курьера, ориентированная принципиально на приложения в атомной энергетике. Имеется в виду содержательная задача о демонтаже энергоблока АЭС, снятого с эксплуатации. Речь идет о последовательном обходе элементов энергоблока с выполнением на них работ по демонтажу.

5.1. Содержательная постановка и обсуждение задачи

В настоящей главе обозначения $X, N, x^0, (M_i)_{i\in\overline{1,N}}, n, (p_i)_{i\in\overline{1,n}}$, $(q_i)_{i\in\overline{1,N}}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{A}$, $\mathbf{f}$ понимаются в соответствии с разделом 4.1. Мы снова рассматриваем задачу об организации перемещений (4.1.2), (4.1.3). Особенностью рассматриваемой далее постановки является более сложный вариант отображения $\mathbf{c}$ в сравнении с (4.1.11): используемый далее вариант функции затрат, также обозначаемой ниже через $\mathbf{c}$, допускает явную зависимость от списка оставшихся заданий (наряду с зависимостью от пары точек множества X, для которых оценивается соответствующее перемещение). В содержательном отношении (см. (4.1.3)) перемещение из точки $x_i = x^0$ или из точки $x_i \in M_i$ в точку $x_j \in M_j$ оценивается потерями

$$\mathbf{c}(x_i, x_j, K) \in [0, \infty[, \tag{5.1.1}$$

где K, $K \subset \overline{1,N}$ — суть множество индексов заданий, не выполненных на момент пребывания в точке x_i, т.е. на множестве M_i; при этом $j \in K$. Если же $K = \varnothing$, т.е все задания выполнены, и мы находимся в состоянии

$x_N \in M_{\alpha(N)}$ (обсуждаем перемещение в смысле (4.1.3)), то оценивание x_N сводится к вычислению $\mathbf{f}(x_N)$.

Возвращаясь к (5.1.1), отметим интерпретацию, соответствующую (4.1.3). Начальное звено $x_0 = x^0 \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)})$ оценивается потерями

$$\mathbf{c}(x_0, x_1, \overline{1,N}) = \mathbf{c}(x^0, x_1, \overline{1,N}).$$

Звено (4.1.3), соответствующее перемещению

$$(x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow (x_2 \in M_{\alpha(2)}),$$

оценивается уже следующими потерями

$$\mathbf{c}(x_1, x_2, \overline{1,N} \setminus \{\alpha(1)\});$$

это связано с тем, что при посещении $M_{\alpha(1)}$ произведено "выключение" источника вредного воздействия, локализованного на множестве $M_{\alpha(1)}$, где $\alpha(1) \in \overline{1,N}$. То обстоятельство, что и прибытие на $M_{\alpha(1)}$ и покидание $M_{\alpha(1)}$ связаны с одной точкой x_1, можно объяснить тем, что исполнитель пользуется транспортным средством, оставляемым при посещении $M_{\alpha(1)}$ в точке прибытия. На этом транспортном средстве далее (в направлении $M_{\alpha(2)}$) могут перемещаться какие-либо детали и грузы, связанные с работой на $M_{\alpha(1)}$.

Замечание. В принципе возможны другие варианты перемещений. Так, в частности, по прибытии на $M_{\alpha(1)}$ в точку x_1 (точка входа) исполнитель приступает к работам (назовем их внутренними), после выполнения которых покидает $M_{\alpha(1)}$ из какой-то другой точки $x_1' \in M_{\alpha(1)}$. Эта операция влияет, конечно, на осуществление последующей маршрутизации. Вопросы такого рода рассматривались (правда, не в связи с задачей о демонтаже энергоблока АЭС) в работах [55, 56]. Здесь мы ограничиваемся моделью, организующей перемещение (4.1.3).

Локальную цепочку перемещений

$$(x_0 = x^0) \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow (x_2 \in M_{\alpha(2)})$$

оцениваем затратами

$$\mathbf{c}(x_0, x_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(x_1, x_2, \overline{1,N} \setminus \{\alpha(1)\}). \tag{5.1.2}$$

Дальнейшее суммирование затрат осуществляется по аналогии с (5.1.2). Сейчас мы ограничиваемся рассмотрением еще одного этапа процедуры, следующего за (5.1.2).

Итак, по прибытии на $M_{\alpha(2)}$ выполняются работы по демонтажу и проводится “выключение” источника вредного воздействия, локализованного на $M_{\alpha(2)}$. После этого (при $N \geq 3$) перемещение

$$(x_2 \in M_{\alpha(2)}) \longrightarrow (x_3 \in M_{\alpha(3)}) \tag{5.1.3}$$

оценивается потерями

$$\mathbf{c}(x_2, x_3, \overline{1, N} \setminus \{\alpha(1); \alpha(2)\}).$$

Согласно (5.1.3) мы отправляемся от $M_{\alpha(2)}$ к $M_{\alpha(3)}$ из точки прибытия на $M_{\alpha(2)}$, что соответствует расположению транспортного средства в момент прибытия на $M_{\alpha(2)}$; речь идет о перемещении из точки x_2. Теперь цепочка перемещений

$$(x_0 = x^0) \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow (x_2 \in M_{\alpha(2)}) \longrightarrow (x_3 \in M_{\alpha(3)})$$

характеризуется затратами (потерями)

$$\mathbf{c}(x_0, x_1, \overline{1, N}) + \mathbf{c}(x_1, x_2, \overline{1, N} \setminus \{\alpha(1)\}) + \mathbf{c}(x_1, x_2, \overline{1, N} \setminus \{\alpha(1); \alpha(2)\}). \tag{5.1.4}$$

Последующие этапы процедуры сейчас не рассматриваем.

Обсудим сейчас на содержательном уровне один из вопросов, связанных с детализацией значений $\mathbf{c}$ (5.1.1). Разумеется, для того, чтобы эти значения можно было бы использовать в соотношениях, подобных (5.1.2) и (5.1.4), мы должны располагать некоторой зависимостью $\mathbf{c}$, т.е. функцией, определенной, по крайней мере, для всех триплетов (x, y, K), где $x \in M_i$ при некотором $i \in \overline{1, N}$, $y \in M_j$ при некотором $j \in \overline{1, N} \setminus \{i\}$ и K – непустое подмножество $\overline{1, N}$, для которого $i \notin K$ и $j \in K$. В каждой такой ситуации

$$(x, y, K, i, j) \tag{5.1.5}$$

значение $\mathbf{c}(x, y, K)$ может включать затраты на выполнение работ на множестве M_j (с обязательным возвращением в точку y; имеется в виду цикл

$$(y \in M_j) \longrightarrow (\text{работа на} M_j) \longrightarrow (y \in M_j),$$

характеризующий в нашей модели работу по демонтажу элементов системы, локализованных на M_j), а также затраты на перемещение из x в y после “выключения” источника вредного воздействия, локализованного на M_i:

$$\mathbf{c}(x, y, K) = \Pi_j(y, K) + \pi(x, y, K). \tag{5.1.6}$$

В (5.1.6) первое слагаемое соответствует потерям при работе "внутри" M_j, а второе отвечает потерям на этапе перемещения из x в y после "выключения" i-того источника. В правой части упомянуто значение j; однако согласно (3.1.4) это значение j однозначно восстанавливается по y: j есть такой единственный индекс $l \in \overline{1,N}$, для которого $y \in M_l$. Иными словами, $j = \mathbf{j}(y)$, где $\mathbf{j}$ есть отображение

$$\mathbf{j} : \bigcup_{t=1}^{N} M_t \longrightarrow \overline{1,N},$$

для которого $\mathbf{j}(z) = s$, если $z \in M_s$. Следовательно, (5.1.6) можно свести к выражению

$$\mathbf{c}(x,y,K) = \Pi_{\mathbf{j}(y)}(y,K) + \pi(x,y,K). \tag{5.1.7}$$

Правило (5.1.7) можно использовать для конкретизации последующих общих конструкций, хотя не исключаются и другие (возможно неаддитивные в части, касающейся (5.1.6), (5.1.7)) способы агрегирования. Наряду с ситуациями (5.1.5) мы полагаем, что определены значения $\pi(x^0, y, \overline{1,N})$, где $y \in M_j$ при некотором $j \in \overline{1,N}$.

Отметим, наконец, что с точки зрения последующего изложения удобно доопределить зависимость, характеризуемую значениями $\mathbf{c}(x,y,K)$ в ситуациях (5.1.5) и при $x = x^0,\ y \in M_j$ для некоторого $j \in \overline{1,N}$, до зависимости на $X \times X \times \mathfrak{N}$. Это можно сделать, полагая например, что для "бессодержательных" триплетов $(x,y,K) \in X \times X \times \mathfrak{N}$ $\mathbf{c}(x,y,K) = 0$; "бессодержательными" здесь именуются, в частности, триплеты $(x,y,K),\ x \neq x^0$, не отвечающие ни одной из ситуаций (5.1.5). В дальнейшем мы следуем этому соглашению, сразу определяя $\mathbf{c}$, как неотрицательную вещественнозначную функцию на $X \times X \times \mathfrak{N}$. Кроме того, полагаем, что функция $\mathbf{f}$ определена в (4.1.10); здесь мы также полагаем что существенный фрагмент этой функции, связанный с оцениванием состояний на множествах $M_1, ..., M_N$, доопределяется до отображения на всем множестве X "нулем". Впрочем упомянутые способы доопределения, используемые для построения $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$, могут быть и другими, что несущественно для последующих построений.

5.2. Метод динамического программирования

Полагаем в дальнейшем, что $X, N, (M_i)_{i \in \overline{1,N}}, x^0$ и $\mathbb{P}$ соответствует разделу 3.1. Кроме того, пусть $n, (p_i)_{i \in \overline{1,n}}, (q_i)_{i \in \overline{1,n}}$ и $\mathbb{A}$ соответствуют разделу 4.1. Полагаем также, что

$$\mathbb{K} \triangleq \{(p_i, q_i) : i \in \overline{1,n}\}. \tag{5.2.1}$$

В терминах (5.2.1) получаем для $\mathbb{A}$ следующее представление:

$$\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha(pr_1(z)) < \alpha(pr_2(z)) \quad \forall z \in \mathbb{K}\} \tag{5.2.2}$$

(здесь учитывается тот факт, что $\mathbb{K} \in \mathcal{P}'(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$). Всюду в дальнейшем полагаем выполненным условие 4.2.1. Иными словами (см.(5.2.1)),

$$\forall K \in \mathcal{P}'(\mathbb{K}) \exists y \in K : pr_1(y) \neq pr_2(z) \quad \forall z \in K \tag{5.2.3}$$

(разумеется, (5.2.3) является очевидной переформулировкой условия 4.2.1). Следуем далее соглашениям (4.2.2), (4.2.3). Фиксируем следующие два отображения

$$\mathbf{c} : X \times X \times \mathfrak{N} \longrightarrow [0, \infty[, \;\; \mathbf{f} : X \longrightarrow [0, \infty[\tag{5.2.4}$$

(соображения, касающиеся конкретного построения функций $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$, приведены в предыдущем разделе). С помощью отображений (5.2.4) реализуется оценивание кортежей в множестве X; среди последних естественным образом выделяются трассы. Напомним, что при $k \in \mathcal{N} \quad \mathfrak{X}_k$ есть множество всех кортежей (4.2.1). Тогда полагаем, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ отображение

$$\mathfrak{C}_\alpha : \mathfrak{X}_N \longrightarrow [0, \infty[\tag{5.2.5}$$

определяется следующим правилом:

$$\mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}, \{\alpha(j) : j \in \overline{i+1, N}\}) + \mathbf{f}(x_N). \tag{5.2.6}$$

Предполагается, что в (5.2.5) и (5.2.6) маршрут α каким-то образом выбран и зафиксирован. Среди аргументов отображения (5.2.5) имеются, в частности, согласованные с маршрутом α; речь идет о кортежах из множества (4.2.2). Напомним в этой связи, что (см. (4.2.11), (4.2.13) – (4.2.15))

$$((\mathbf{I} - bi)[K] \neq \oslash \quad \forall K \in \mathfrak{N}) \& (\mathbb{A} = (\mathbf{I} - bi)[\overline{1,N}] \neq \varnothing); \tag{5.2.7}$$

отметим, что (наряду с (5.2.7)) множества $\mathfrak{X}[\alpha]$ (4.2.2) являются непустыми (каждое из них конечно). С учетом этого полагаем всюду в дальнейшем, что

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0,N}}), \tag{5.2.8}$$

$V \in [0, \infty[$. Значение (5.2.8) можно рассматривать как экстремум (значение) естественной экстремальной задачи маршрутизации, пространство решений которой есть отношение (см. главу 1)

$$\mathbf{S} \triangleq \{z \in \mathbb{A} \times \mathfrak{X}_N | pr_2(z) \in \mathfrak{X}[pr_1(z)]\} =$$

$$= \{(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{X}_N | (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]\} \qquad (5.2.9)$$

($\mathbf{S}$ — непустое конечное множество). С (5.2.9) связывается экстремальная задача:

$$\mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \longrightarrow \min, (\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{S}, \qquad (5.2.10)$$

значение которой совпадает с V (5.2.8):

$$V = \min_{(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{S}} \mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0,N}}) = \min_{z \in \mathbf{S}} \mathfrak{C}_{pr_1(z)}(pr_2(z)). \qquad (5.2.11)$$

Заметим, что V (5.2.8), (5.2.11) естественным образом включается в число экстремумов укороченных задач маршрутизации, к обсуждению которых мы сейчас и переходим.

Если $x \in X, K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$, то полагаем, что $\mathbb{X}[x; K; \alpha]$ есть def множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} : \overline{0, |K|} \longrightarrow X,$$

для каждого из которых

$$(x_0 = x) \& (x_j \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1, |K|}).$$

Иными словами, у нас $\forall x \in X \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \forall \alpha \in (bi)[K]$

$$\mathbb{X}[x; K; \alpha] \triangleq \{(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}_{|K|} | (x_0 = x) \& (x_j \in M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1, |K|})\}. \quad (5.2.12)$$

В (5.2.12) имеем всякий раз непустое конечное множество, элементы которого будем называть (укороченными) трассами. Легко видеть (см. (4.2.2), (5.2.12)), что

$$\mathfrak{X}[\alpha] = \mathbb{X}[x^0; \overline{1, N}; \alpha] \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \qquad (5.2.13)$$

Для оценивания кортежей-элементов множества (5.2.12) конструируем естественный аналог критерия (5.2.5), (5.2.6): если $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (bi)[K]$, то отображение

$$\mathfrak{C}^0_\alpha[K] : \mathfrak{X}_{|K|} \longrightarrow [0, \infty[\qquad (5.2.14)$$

определяется следующим правилом:

$$\mathfrak{C}^0_\alpha[K]((x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}) \triangleq \sum_{i=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}, \{\alpha(j) : j \in \overline{i+1, |K|}\}) + \mathbf{f}(x_{|K|}). \quad (5.2.15)$$

В качестве $(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}$ можно использовать в (5.2.15) произвольную трассу из множества (5.2.12). Именно этот случай для нас является существенным. Мы полагаем всюду в дальнейшем при всяком выборе $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]} \ \min_{(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathbb{X}[x; K; \alpha]} \mathfrak{C}^0_\alpha[K]((x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}). \qquad (5.2.16)$$

Кроме того, условимся, что $v(x, \varnothing) \triangleq \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X$. Тем самым введена функция $\mathcal{V}$
$$(x, K) \longrightarrow v(x, K) : X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[; \tag{5.2.17}$$
иными словами, в дальнейшем предполагается, что $\mathcal{V} : X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[$ есть такая функция, что $\forall x \in X \ \forall K \in \mathbf{N}$
$$\mathcal{V}(x, K) = v(x, K). \tag{5.2.18}$$
Тогда, в частности,
$$\mathcal{V}(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X. \tag{5.2.19}$$
Заметим, кроме того, что согласно (4.2.11) – (4.2.13) $\mathbb{A} = (\mathbf{I} - bi)[\overline{1, N}]$ и справедливо (5.2.13). Кроме того, из (5.2.6), (5.2.13) и (5.2.15) имеем, коль скоро
$$|\overline{1, N}| = N$$
и $\mathbb{P} = \Pi_N = (bi)[\overline{1, N}]$, следующее положение: при $\alpha \in \mathbb{P}$ определено отображение
$$\mathfrak{C}^0_\alpha[\overline{1, N}] : \mathfrak{X}_N \longrightarrow [0, \infty[,$$
для которого согласно (5.2.6) и (5.2.15)
$$\mathfrak{C}^0_\alpha[\overline{1, N}]((x_i)_{i \in \overline{0, N}}) = \mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0, N}}). \tag{5.2.20}$$
Из (5.2.8), (5.2.16), (5.2.18) и (5.2.20) вытекает цепочка равенств
$$v(x^0, \overline{1, N}) = \mathcal{V}(x^0, \overline{1, N}) =$$
$$= \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[\overline{1, N}]} \ \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbb{X}[x^0; \overline{1, N}; \alpha]} \mathfrak{C}^0_\alpha[\overline{1, N}]((x_i)_{i \in \overline{0, N}}) =$$
$$= \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \ \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0, N}}) = V. \tag{5.2.21}$$
Таким образом (см. (5.2.8)), наша основная задача (5.2.10) встраивается в набор укороченных задач
$$\mathfrak{C}^0_\alpha[K]((x_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \longrightarrow \min, \alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K], (x_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathbb{X}[x; K; \alpha], \tag{5.2.22}$$
где $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$. Точнее, (5.2.10) есть вариант задачи (5.2.22) при условии $x = x^0$ и $K = \overline{1, N}$ (в этом рассуждении следует, конечно, учитывать (5.2.9) и (5.2.13)).

Заметим,что при $x \in X, K \in \mathfrak{N}, k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$ имеет место $y \in X$ и $K \setminus \{k\} \in \mathbf{N}$, а потому определенно значение
$$v(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[.$$

Следовательно (см. также (5.2.4)), при $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$ определена величина

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \backslash \{k\})] \in [0, \infty[.$$

Более того, справедлива следующая

Теорема 5.2.1. Если $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$, то

$$v(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \backslash \{k\})]. \qquad (5.2.23)$$

Доказательство. Пусть $s \triangleq |K|$. Тогда $s \in \overline{1, N}$. Имеет смысл рассмотреть отдельно два возможных случая: 1)$s = 1$; 2)$s \in \overline{2, N}$.

1)Пусть $s = 1$; это означает, что $K = \{r\}$ для некоторого $r \in \overline{1, N}$, т.к. $|K| = 1$. При этом $(bi)[K] = (bi)[\{r\}]$ есть одноэлементное множество, содержащее биекцию

$$\alpha_0 : \overline{1, 1} \longrightarrow r,$$

для которой $\alpha_0(1) = r; (bi)[K] = \{\alpha_0\}$. С учетом (5.2.1) и условия 4.2.1 получаем, что (см. (4.2.6))

$$\Sigma[K] = \Sigma[\{r\}] = \varnothing$$

(учитываем, что при $i \in \overline{1, n}$ непременно $p_i \neq q_i$ согласно условию 4.2.1; при этом для $j \in \Sigma[\{r\}]$

$$p_j = r = q_j,$$

что как уже отмечалось невозможно, т.к. $j \in \overline{1, n}$). Тогда согласно (4.2.9)

$$\mathbf{I}(K) = \mathbf{I}(\{r\}) = K = \{r\}.$$

Поэтому выражение в правой части (5.2.23) имеет вид

$$\min_{y \in M_r} [\mathbf{c}(x, y, \{r\}) + v(y, \varnothing)] = \min_{y \in M_r} [\mathbf{c}(x, y, \{r\}) + \mathbf{f}(y)]. \qquad (5.2.24)$$

С другой стороны, согласно (4.2.14) $(\mathbf{I} - bi)[K] = (\mathbf{I} - bi)[\{r\}] \neq \varnothing$ и $(\mathbf{I} - bi)[K] \subset (bi)[K]$. С учетом первого свойства (непустоты) выберем $\alpha^0 \in (\mathbf{I} - bi)[K]$, получая, в частности, включение $\alpha^0 \in (bi)[K]$, т.е. $\alpha^0 \in \{\alpha_0\}$ и поэтому $\alpha_0 = \alpha^0 \in (\mathbf{I} - bi)[K]$ и, стало быть,

$$\{\alpha_0\} \subset (\mathbf{I} - bi)[K] \subset (bi)[K] = \{\alpha_0\}.$$

Следовательно, $(\mathbf{I} - bi)[K] = (bi)[K] = \{\alpha_0\}$. С учетом (5.2.16) имеем теперь равенство

$$v(x, K) = \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, s}} \in \mathbb{X}[x; K; \alpha_0]} \mathfrak{C}^0_{\alpha_0}[K]((x_i)_{i \in \overline{0, s}}) =$$

$$= \min_{(x_i)_{i\in\overline{0,1}}\in\mathbb{X}[x;K;\alpha_0]} \mathfrak{C}^0_{\alpha_0}[K]((x_i)_{i\in\overline{0,1}}). \tag{5.2.25}$$

Из (5.2.12) следует, что $\mathbb{X}[x;K;\alpha_0]$ есть множество всех кортежей $(x_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \mathfrak{X}[1]$, для каждого из которых $x_0 = x$ и $x_1 \in M_{\alpha_0(1)}$; учитываем, что $\overline{0,1} = \{0;1\}$. По выбору α_0 имеем (в рассматриваемом случае $s = 1$) равенство

$$\mathbb{X}[x;K;\alpha_0] = \{(x_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \mathfrak{X}_1 \,|\, (x_0 = x)\&(x_1 \in M_r)\}. \tag{5.2.26}$$

Кроме того, напомним, что при $(x_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \mathbb{X}[x;K;\alpha_0]$ согласно (5.2.15)

$$\mathfrak{C}^0_{\alpha_0}[K]((x_i)_{i\in\overline{0,1}}) = \mathfrak{C}^0_{\alpha_0}[\{r\}]((x_i)_{i\in\overline{0,1}}) =$$

$$= \mathbf{c}(x_0,x_1,\{\alpha_0(1)\}) + \mathbf{f}(x_1) = \mathbf{c}(x_0,x_1,\{r\}) + \mathbf{f}(x_1) = \mathbf{c}(x,x_1,K) + \mathbf{f}(x_1). \tag{5.2.27}$$

В частности, при $(x_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \mathbb{X}[x;K;\alpha_0]$ имеем в силу (5.2.26), что $x_1 \in M_r$ и (см. (5.2.19))

$$\mathfrak{C}^0_{\alpha_0}[K]((x_i)_{i\in\overline{0,1}}) = \mathbf{c}(x,x_1,\{r\}) + \mathbf{f}(x_1) \geq$$

$$\geq \min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\}) + \mathbf{f}(y)] = \min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\}) + v(y,\varnothing)].$$

С учетом (5.2.25) получаем очевидное неравенство

$$\min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\}) + v(y,\varnothing)] \leq v(x,K). \tag{5.2.28}$$

Выберем теперь точку $y^0 \in M_r$, для которой достигается минимум выражения в левой части (5.2.28)

$$\mathbf{c}(x,y^0,\{r\}) + \mathbf{f}(y^0) = \min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\}) + \mathbf{f}(y)] =$$

$$= \min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\}) + v(y,\varnothing)]. \tag{5.2.29}$$

После этого введем кортеж $(x^0_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \mathfrak{X}_1$ по правилам: $(x^0_0 \triangleq x)\&(x^0_1 \triangleq y^0)$. Тогда в силу (5.2.26)

$$(x^0_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \mathbb{X}[x;K;\alpha_0],$$

а потому согласно (5.2.25), (5.2.27) имеет место неравенство

$$v(x,K) \leq \mathfrak{C}^0_{\alpha_0}[K]((x^0_i)_{i\in\overline{0,1}}) = \mathbf{c}(x,y^0,\{r\}) + \mathbf{f}(y^0),$$

из которого в силу (5.2.29) следует оценка

$$v(x,K) \leq \min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\}) + v(y,\varnothing)].$$

С учетом (5.2.28) имеем равенство

$$v(x,K)=\min_{y\in M_r}[\mathbf{c}(x,y,\{r\})+v(y,\varnothing)]. \tag{5.2.30}$$

Напомним, что (5.2.24) совпадает в рассматриваемом случае с выражением в правой части (5.2.23), а тогда в силу совпадения (5.2.24) и (5.2.30)

$$v(x,K)=\min_{k\in\mathbf{I}(K)}\min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(x,y,K)+v(y,K\setminus\{k\})]$$

при $s=1$. Итак, установлена импликация

$$(s=1)\Rightarrow(v(x,K)=\min_{k\in\mathbf{I}(K)}\min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(x,y,K)+v(y,K\setminus\{k\})]). \tag{5.2.31}$$

2) Пусть $s\in\overline{2,N}$. Тогда $s-1\in\overline{1,N-1}$, $K\setminus\{k\}\in\mathfrak{N}$ и

$$|K\setminus\{k\}|=s-1.$$

С учетом (5.2.16) выберем $\alpha_*\in(\mathbf{I}-bi)[K]$ и $(x_i^*)_{i\in\overline{0,s}}\in\mathbb{X}[x;K;\alpha_*]$, для которых справедливо равенство

$$v(x,K)=\mathfrak{C}^0_{\alpha_*}[K]((x_i^*)_{i\in\overline{0,s}}). \tag{5.2.32}$$

При этом $(x_i^*)_{i\in\overline{0,s}}\in\mathfrak{X}_s;\quad x_0^*=x$ и кроме того

$$x_j^*\in M_{\alpha_*(j)}\quad\forall j\in\overline{1,s}. \tag{5.2.33}$$

Это означает, в частности, что

$$(x_i^*)_{i\in\overline{0,s}}\,:\,\overline{0,s}\longrightarrow X.$$

В частности, имеем из (5.2.33), что справедливо свойство

$$\alpha_*(1)\in\mathbf{I}(K)\,:\,x_1^*\in M_{\alpha_*(1)}. \tag{5.2.34}$$

С учетом (5.2.15) и (5.2.32) получаем следующее равенство (учитываем, что $s\geq 2$)

$$v(x,K)=\sum_{i=0}^{s-1}\mathbf{c}(x_i^*,x_{i+1}^*,\{\alpha_*(j)\,:\,j\in\overline{i+1,s}\})+\mathbf{f}(x_s^*)=$$

$$=\mathbf{c}(x_0^*,x_1^*,\{\alpha_*(j)\,:\,j\in\overline{1,s}\})+\sum_{i=1}^{s-1}\mathbf{c}(x_i^*,x_{i+1}^*,\{\alpha_*(j)\,:\,j\in\overline{i+1,s}\})+\mathbf{f}(x_s^*). \tag{5.2.35}$$

Напомним, что $\alpha_* \in (bi)[K]$, а потому, в частности,

$$\alpha_* : \overline{1,s} \longrightarrow K$$

(напомним здесь также, что $s = |K|$); при этом $\{\alpha_*(j) : j \in \overline{1,s}\} = K$, а потому из (5.2.35) вытекает равенство

$$v(x,K) = \mathbf{c}(x,x_1^*,K) + \sum_{i=1}^{s-1} \mathbf{c}(x_i^*, x_{i+1}^*, \{\alpha_*(j) : j \in \overline{i+1,s}\}) + \mathbf{f}(x_s^*). \quad (5.2.36)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $K \backslash \{\alpha_*(1)\} \in \mathfrak{N}$ и

$$|K \backslash \{\alpha_*(1)\}| = s - 1. \quad (5.2.37)$$

Рассмотрим позицию $(x_1^*, K \backslash \{\alpha_*(1)\}) \in X \times \mathfrak{N}$. При этом

$$\alpha_*(l+1) \in K \quad \forall l \in \overline{1,s-1}.$$

С учетом этого свойства введем отображение

$$\alpha^* \overset{\triangle}{=} (\alpha_*(l+1))_{l \in \overline{1,s-1}},$$

$\alpha^* : \overline{1,s-1} \longrightarrow K$. При этом

$$\alpha^*(l) = \alpha_*(l+1) \quad \forall l \in \overline{1,s-1}. \quad (5.2.38)$$

При $l \in \overline{1,s-1}$ непременно $l+1 \neq 1$, а тогда в силу инъективности α_* имеем:

$$\alpha^*(l) = \alpha_*(l+1) \neq \alpha_*(1);$$

поэтому $\alpha^*(l) \in K \backslash \{\alpha_*(1)\}$. Поскольку выбор l был произвольным, то с учетом инъективности α_* и определения α^* имеем, что

$$\alpha^* : \overline{1,s-1} \longrightarrow K \backslash \{\alpha_*(1)\}. \quad (5.2.39)$$

В силу инъективности α_* имеем из (5.2.38), что $\forall l_1 \in \overline{1,s-1} \quad \forall l_2 \in \overline{1,s-1} \backslash \{l_1\}$

$$\alpha^*(l_1) \neq \alpha^*(l_2). \quad (5.2.40)$$

Следовательно, α^* инъективно. Пусть $k^* \in K \backslash \{\alpha_*(1)\}$ т.е. $k^* \in K$ и $k^* \neq \alpha_*(1)$. Тогда в силу сюръективности α_* для некоторого $j^* \in \overline{1,s}$ справедливо равенство $k^* = \alpha_*(j^*)$, причем

$$(j^* = 1) \Rightarrow (k^* = \alpha_*(1)). \quad (5.2.41)$$

Поскольку k^* и $\alpha_*(1)$ различны, что уже отмечалось, из (5.2.41) вытекает, что $j^* \neq 1$, а тогда $j^* \in \overline{2,s}$ и $j^* - 1 \in \overline{1,s-1}$; при этом (см. (5.2.38))

$$\alpha^*(j^* - 1) = \alpha_*(j^*) = k^*.$$

Поэтому $\exists l \in \overline{1,s-1} \,:\, k^* = \alpha^*(l)$. Поскольку выбор k^* был произвольным, то установлено следующее свойство:

$$\forall k \in K \backslash \{\alpha_*(1)\} \;\exists l \in \overline{1,s-1} \,:\, k = \alpha^*(l);$$

имеем с учетом (5.2.39) свойство сюръективности α^*, откуда (см. (5.2.40)) следует, что

$$\alpha^* \in (bi)[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]. \tag{5.2.42}$$

Выберем произвольно $t \in \overline{1,s-1}$. Тогда $\overline{t,s-1} \neq \varnothing$ и $\{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{t,s-1}\} \in \mathfrak{N}$. Последнее позволяет определить $\mathbf{I}(\{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{t,s-1}\}) \in \mathfrak{N}$. Покажем, что

$$\alpha^*(t) \in \mathbf{I}(\{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{t,s-1}\}). \tag{5.2.43}$$

При этом $\overline{t,s-1} \subset \overline{1,s-1}$, а потому из (5.2.38) следует, что

$$\alpha^*(j) = \alpha_*(j+1) \quad \forall j \in \overline{t,s-1}. \tag{5.2.44}$$

Кроме того, отметим, что $j+1 \in \overline{t+1,s}\;\; \forall j \in \overline{t,s-1}$. Из (5.2.44) следует, что

$$\{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{t,s-1}\} = \{\alpha_*(j+1) : j \in \overline{t,s-1}\} = \{\alpha_*(j) \,:\, j \in \overline{t+1,s}\}; \tag{5.2.45}$$

при этом $\alpha^*(t) = \alpha_*(t+1)$, где $t+1 \in \overline{2,s}$. Поскольку $\alpha_* \in (\mathbf{I} - bi)[K]$ и $|K| = s$, то (см. (4.2.10)) $\alpha_*(t+1) \in \mathbf{I}(\{\alpha_*(j) \,:\, j \in \overline{t+1,s}\})$. С учетом (5.2.45) имеем из последнего включения, что

$$\alpha^*(t) \in \mathbf{I}(\{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{t,s-1}\})$$

(дело в том, что при $j \in \overline{t+1,s}$ справедливо $j-1 \in \overline{t,s-1}$ и $\alpha^*(j-1) = \alpha_*(j)$; если же $j \in \overline{t,s-1}$, то $j+1 \in \overline{t+1,s}$ и $\alpha^*(j) = \alpha_*(j+1)$). Поскольку выбор t был произвольным, установлено, что

$$\alpha^*(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha^*(l) \,:\, l \in \overline{k,s-1}\}) \quad \forall k \in \overline{1,s-1}. \tag{5.2.46}$$

С учетом (5.2.37), (5.2.42) и (5.2.46) получаем (см. (4.2.10)) свойство

$$\alpha^* \in (\mathbf{I} - bi)[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]. \tag{5.2.47}$$

Следовательно, $x_1^* \in X$, $K \backslash \{\alpha_*(1)\} \in \mathfrak{N}$ и $\alpha^* \in (\mathbf{I} - bi)[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]$ (см. (4.2.10)). Тогда согласно (5.2.12)

$$\mathbb{X}[x_1^*; K \backslash \{\alpha_*(1)\}; \alpha^*] =$$

$$= \{(x_i)_{i \in \overline{0,s-1}} \in \mathfrak{X}_{s-1} \,|\, (x_0 = x_1^*) \& (x_j \in M_{\alpha^*(j)} \quad \forall j \in \overline{1, s-1})\}. \qquad (5.2.48)$$

По выбору $(x_i^*)_{i \in \overline{0,s}}$ имеем, что $x_j^{**} \triangleq x_{j+1}^* \in X \quad \forall j \in \overline{0, s-1}$. Поэтому

$$(x_i^{**})_{i \in \overline{0,s-1}} = (x_{i+1}^*)_{i \in \overline{0,s-1}} \in \mathfrak{X}_{s-1}. \qquad (5.2.49)$$

Из (5.2.49) имеем по выбору $(x_i^*)_{i \in \overline{0,s}}$ свойство

$$x_0^{**} = x_1^*. \qquad (5.2.50)$$

Далее, из (5.2.33) получаем, что

$$x_j^{**} = x_{j+1}^* \in M_{\alpha_*(j+1)} \quad \forall j \in \overline{0, s-1}. \qquad (5.2.51)$$

Из (5.2.38) и (5.2.51) следует, в частности, что

$$x_j^{**} \in M_{\alpha^*(j)} \quad \forall j \in \overline{1, s-1}. \qquad (5.2.52)$$

Из (5.2.48), (5.2.49), (5.2.50) и (5.2.52) вытекает включение

$$(x_i^{**})_{i \in \overline{0,s-1}} \in \mathbb{X}[x_1^*; K \backslash \{\alpha_*(1)\}; \alpha^*]. \qquad (5.2.53)$$

Из (5.2.47), (5.2.53) следует в итоге свойство:

$$\alpha^* \in (\mathbf{I} - bi)[K \backslash \{\alpha_*(1)\}] \,:\, (x_i^{**})_{i \in \overline{0,s-1}} \in \mathbb{X}[x_1^*; K \backslash \{\alpha_*(1)\}; \alpha^*]. \qquad (5.2.54)$$

С другой стороны, из (5.2.16) следует (см. (5.2.34), (5.2.37)), что

$$v(x_1^*, K \backslash \{\alpha_*(1)\}) =$$

$$= \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]} \; \min_{(x_i)_{i \in \overline{0,s-1}} \in \mathbb{X}[x_1^*, K \backslash \{\alpha_*(1)\}, \alpha]} \mathfrak{C}_\alpha^0[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]((x_i)_{i \in \overline{0,s-1}}).$$

С учетом (5.2.54) получаем следующее неравенство

$$v(x_1^*, K \backslash \{\alpha_*(1)\}) \leq \mathfrak{C}_{\alpha^*}^0[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]((x_i^{**})_{i \in \overline{0,s-1}}). \qquad (5.2.55)$$

С другой стороны, из (5.2.15), (5.2.42) и (5.2.49) следует, что

$$\mathfrak{C}_{\alpha^*}^0[K \backslash \{\alpha_*(1)\}]((x_i^{**})_{i \in \overline{0,s-1}}) = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbf{c}(x_i^{**}, x_{i+1}^{**}, \{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{i+1, s-1}\}) +$$

$$+\mathbf{f}(x^{**}_{s-1}) = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbf{c}(x^*_{i+1}, x^*_{i+2}, \{\alpha^*(j) \,:\, j \in \overline{i+1, s-1}\}) + \mathbf{f}(x^*_s). \qquad (5.2.56)$$

С учетом (5.2.38) и (5.2.56) имеем, однако, что

$$\mathfrak{C}^0_{\alpha^*}[K \setminus \{\alpha_*(1)\}]((x^{**}_i)_{i \in \overline{0, s-1}}) = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbf{c}(x^*_{i+1}, x^*_{i+2}, \{\alpha_*(j+1) \,:\, j \in \overline{i+1, s-1}\}) +$$

$$+\mathbf{f}(x^*_s) = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbf{c}(x^*_{i+1}, x^*_{i+2}, \{\alpha_*(l) \,:\, l \in \overline{i+2, s}\}) + \mathbf{f}(x^*_s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s-1} \mathbf{c}(x^*_i, x^*_{i+1}, \{\alpha_*(j) \,:\, j \in \overline{i+1, s}\}) + \mathbf{f}(x^*_s). \qquad (5.2.57)$$

Из (5.2.36) и (5.2.57) вытекает, что справедливо равенство

$$v(x, K) = \mathbf{c}(x, x^*_1, K) + \mathfrak{C}^0_{\alpha^*}[K \setminus \{\alpha_*(1)\}]((x^{**}_i)_{i \in \overline{0, s-1}}).$$

С учетом (5.2.55) получаем очевидное неравенство

$$\mathbf{c}(x, x^*_1, K) + v(x^*_1, K \setminus \{\alpha_*(1)\}) \le v(x, K). \qquad (5.2.58)$$

Из (5.2.34), (5.2.58) следует, что

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \setminus \{k\})] \le \mathbf{c}(x, x^*_1, K) + v(x^*_1, K \setminus \{\alpha_*(1)\}) \le v(x, K).$$

Как следствие, получаем неравенство

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \setminus \{k\})] \le v(x, K). \qquad (5.2.59)$$

Выберем теперь $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{z} \in M_q$ так, что при этом

$$\mathbf{c}(x, \mathbf{z}, K) + v(\mathbf{z}, K \setminus \{q\}) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \setminus \{k\})]. \qquad (5.2.60)$$

Коль скоро $|K| = s \ge 2$ и $q \in K$, имеем свойство

$$K \setminus \{q\} \in \mathfrak{N} \qquad (5.2.61)$$

и, кроме того, справедливо очевидное равенство

$$|K \setminus \{q\}| = s - 1. \qquad (5.2.62)$$

Отметим, в частности, что $\mathbf{z} \in X$. Поэтому определено (см. (5.2.61), (5.2.62), (5.2.16)) значение

$$v(\mathbf{z}, K\setminus\{q\}) = \min_{\alpha\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K\setminus\{q\}]} \min_{(x_i)_{i\in\overline{0,s-1}}\in\mathbb{X}[\mathbf{z},K\setminus\{q\},\alpha]} \mathfrak{C}^0_\alpha[K\setminus\{q\}]((x_i)_{i\in\overline{0,s-1}}). \tag{5.2.63}$$

С учетом (5.2.63) выберем и зафиксируем биекцию

$$\beta \in (\mathbf{I} - bi)[K\setminus\{q\}] \tag{5.2.64}$$

и кортеж

$$(x_i^\natural)_{i\in\overline{0,s-1}} \in \mathbb{X}[\mathbf{z}, K\setminus\{q\}, \beta] \tag{5.2.65}$$

так, что при этом справедливо равенство

$$v(\mathbf{z}, K\setminus\{q\}) = \mathfrak{C}^0_\beta[K\setminus\{q\}]((x_i^\natural)_{i\in\overline{0,s-1}}). \tag{5.2.66}$$

Тогда, в частности, $(x_i^\natural)_{i\in\overline{0,s-1}} \in \mathfrak{X}_{s-1}$, т.е. $(x_i^\natural)_{i\in\overline{0,s-1}} : \overline{0, s-1} \longrightarrow X$. Из (5.2.64) следует, в частности, включение

$$\beta \in (bi)[K\setminus\{q\}]. \tag{5.2.67}$$

С учетом (5.2.62) имеем из (5.2.67), что

$$\beta : \overline{1, s-1} \longrightarrow K\setminus\{q\}. \tag{5.2.68}$$

Тогда при $j \in \overline{1, s-1}$ имеем $\beta(j) \in K$, причем

$$\beta(j) \neq q. \tag{5.2.69}$$

Из (5.2.12), (5.2.67) и (5.2.65) следует, что

$$(x_0^\natural = \mathbf{z})\&(x_j^\natural \in M_{\beta(j)} \quad \forall j \in \overline{1, s-1}). \tag{5.2.70}$$

Согласно (5.2.15), (5.2.66) имеем в терминах β (5.2.64) и $(x_i^\natural)_{i\in\overline{0,s-1}}$ (5.2.65) равенство

$$v(\mathbf{z}, K\setminus\{q\}) = \sum_{i=0}^{s-2} \mathbf{c}(x_i^\natural, x_{i+1}^\natural, \{\beta(j) : j \in \overline{i+1, s-1}\}) + \mathbf{f}(x_{s-1}^\natural). \tag{5.2.71}$$

Введем в рассмотрение следующее отображение

$$\widehat{\beta} : \overline{1, s} \longrightarrow K;. \tag{5.2.72}$$

именно, полагаем, что

$$(\widehat{\beta}(1) \triangleq q)\&(\widehat{\beta}(j) \triangleq \beta(j-1) \quad \forall j \in \overline{2, s}). \tag{5.2.73}$$

Если $l_* \in K$, то истинна импликация

$$(l_* = q) \Rightarrow (l_* = \widehat{\beta}(1)). \qquad (5.2.74)$$

Если же $l_* \in K \backslash \{q\}$, то для некоторого $j_* \in \overline{1, s-1}$ имеем (см. (5.2.67)) равенство

$$l_* = \beta(j_*),$$

а тогда $j_* + 1 \in \overline{2, s}$ обладает в силу (5.2.73) представлением

$$\widehat{\beta}(j_* + 1) = \beta(j_*) = l_*.$$

Итак, во всех возможных случаях $\exists j \in \overline{1, s} \,:\, l_* = \widehat{\beta}(j)$. Поскольку выбор l_* был произвольным, установлено, что

$$\forall l \in K \ \exists j \in \overline{1, s} \,:\, l = \widehat{\beta}(j). \qquad (5.2.75)$$

Из (5.2.72), (5.2.75) вытекает, что $\widehat{\beta}$ есть сюръекция $\overline{1, s}$ на K. В части проверки инъективности $\widehat{\beta}$ отметим, что при $j \in \overline{2, s}$ выполняется $j - 1 \in \overline{1, s-1}$, а тогда $\widehat{\beta}(j) = \beta(j-1) \in K \backslash \{q\}$ и, как следствие,

$$\widehat{\beta}(1) \neq \widehat{\beta}(j).$$

Таким образом, установлено, что

$$\widehat{\beta}(1) \neq \widehat{\beta}(i) \quad \forall i \in \overline{2, s}. \qquad (5.2.76)$$

Пусть вообще выбраны произвольно $\nu_1 \in \overline{1, s}$ и $\nu_2 \in \overline{1, s} \backslash \{\nu_1\}$. Возможен один из следующих двух случаев

$$(\nu_1 = 1) \vee (\nu_1 \in \overline{2, s}). \qquad (5.2.77)$$

Если $\nu_1 = 1$, то $\nu_2 \in \overline{2, s}$ и согласно (5.2.76)

$$\widehat{\beta}(\nu_1) = \widehat{\beta}(1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2).$$

Итак, установлена следующая импликация

$$(\nu_1 = 1) \Rightarrow (\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)). \qquad (5.2.78)$$

Пусть $\nu_1 \in \overline{2, s}$. В этих условиях рассмотрим следующие две возможности для $\nu_2 \in \overline{1, s}$

$$(\nu_2 = 1) \vee (\nu_2 \in \overline{2, s}). \qquad (5.2.79)$$

Поскольку согласно (5.2.76)

$$\widehat{\beta}(1) \neq \widehat{\beta}(\nu_1),$$

то истинна импликация

$$(\nu_2 = 1) \Rightarrow (\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)). \tag{5.2.80}$$

Допустим, что $\nu_2 \in \overline{2, s}$. Тогда

$$(\nu_1 \in \overline{2, s})\&(\nu_2 \in \overline{2, s}). \tag{5.2.81}$$

Поэтому $\nu_1 - 1 \in \overline{1, s-1}$, $\nu_2 - 1 \in \overline{1, s-1}$, $\nu_1 - 1 \neq \nu_2 - 1$ (т.к. $\nu_1 \neq \nu_2$), а потому согласно (5.2.67), (5.2.68)

$$\beta(\nu_1 - 1) \neq \beta(\nu_2 - 1). \tag{5.2.82}$$

С учетом (5.2.73) и (5.2.81) получаем два равенства:

$$\widehat{\beta}(\nu_1) = \beta(\nu_1 - 1), \ \widehat{\beta}(\nu_2) = \beta(\nu_2 - 1).$$

Поэтому из (5.2.82) вытекает свойство

$$\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)$$

и в случае $\nu_2 \in \overline{2, s}$, а тогда в рассматриваемом сейчас случае $\nu_1 \in \overline{2, s}$ истинна следующая импликация

$$(\nu_2 \in \overline{2, s}) \Rightarrow (\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)). \tag{5.2.83}$$

Из (5.2.79), (5.2.80) и (5.2.83) следует при $\nu_1 \in \overline{2, s}$, что во всех возможных случаях $\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)$. Итак,

$$(\nu_1 \in \overline{2, s}) \Rightarrow (\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)). \tag{5.2.84}$$

Из (5.2.77), (5.2.78) и (5.2.84) имеем окончательно, что $\widehat{\beta}(\nu_1) \neq \widehat{\beta}(\nu_2)$. Поскольку выбор ν_1 и ν_2 был произвольным, установлено, что

$$\widehat{\beta}(i_1) \neq \widehat{\beta}(i_2) \quad \forall i_1 \in \overline{1, s} \ \forall i_2 \in \overline{1, s} \setminus \{i_1\}.$$

С учетом равенства $s = |K|$ и ранее установленной сюръективности $\widehat{\beta}$ (см. (5.2.75)) получаем, что

$$\widehat{\beta} \in (bi)[K]. \tag{5.2.85}$$

Из (5.2.85), в частности, следует, что

$$K = \{\widehat{\beta}(i) \, : \, i \in \overline{1, s}\}. \tag{5.2.86}$$

Поэтому имеем по выбору q свойство

$$q \in \mathbf{I}(\{\widehat{\beta}(i) \, : \, i \in \overline{1, s}\}).$$

С учетом (5.2.73) имеем включение

$$\widehat{\beta}(1) \in \mathbf{I}(\{\widehat{\beta}(i) \,:\, i \in \overline{1,s}\}). \tag{5.2.87}$$

Выберем произвольно $\theta \in \overline{2,s}$. Тогда $\theta - 1 \in \overline{1,s-1}$. Согласно (5.2.62), (5.2.64) и (4.2.12) имеем, что

$$\beta(\theta - 1) \in \mathbf{I}(\{\beta(l) \,:\, l \in \overline{\theta - 1, s-1}\}). \tag{5.2.88}$$

При этом согласно (5.2.73) справедливо равенство

$$\widehat{\beta}(\theta) = \beta(\theta - 1),$$

а потому из (5.2.88) следует, что

$$\widehat{\beta}(\theta) \in \mathbf{I}(\{\beta(l) \,:\, l \in \overline{\theta - 1, s-1}\}). \tag{5.2.89}$$

С другой стороны, из (5.2.73) имеем по выбору θ, что $\overline{\theta, s} \subset \overline{2,s}$ и при этом

$$\widehat{\beta}(j) = \beta(j-1) \quad \forall j \in \overline{\theta, s}.$$

Но в этом случае у нас

$$\{\widehat{\beta}(j) \,:\, j \in \overline{\theta, s}\} = \{\beta(j-1) \,:\, j \in \overline{\theta, s}\} = \{\beta(l) \,:\, l \in \overline{\theta - 1, s-1}\},$$

а поэтому из (5.2.89) вытекает, что

$$\widehat{\beta}(\theta) \in \mathbf{I}(\{\widehat{\beta}(j) \,:\, j \in \overline{\theta, s}\}).$$

Поскольку выбор θ был произвольным, установлено, что

$$\widehat{\beta}(k) \in \mathbf{I}(\{\widehat{\beta}(j) \,:\, j \in \overline{k, s}\}) \quad \forall k \in \overline{2,s}.$$

С учетом (5.2.87) получаем теперь, что

$$\widehat{\beta}(k) \in \mathbf{I}(\{\widehat{\beta}(j) \,:\, j \in \overline{k, s}\}) \quad \forall k \in \overline{1,s}.$$

Используя (5.2.85), получаем, что

$$\widehat{\beta} \in (\mathbf{I} - bi)[K]. \tag{5.2.90}$$

Таким образом, $K \in \mathfrak{N}$, $|K| = s$ и $\widehat{\beta} \in (\mathbf{I} - bi)[K]$. Тогда согласно (5.2.12)

$$\mathbb{X}[x; K; \widehat{\beta}] = \{(x_i)_{i \in \overline{0,s}} \in \mathfrak{X}_s \,|\, (x_0 = x) \& (x_j \in M_{\widehat{\beta}(j)} \quad \forall j \in \overline{1,s})\}. \tag{5.2.91}$$

Напомним, что $x \in X$, $x_0^{\natural} = \mathbf{z} \in X$ и согласно (5.2.70) $x_j^{\natural} \in X \ \forall j \in \overline{1, s-1}$. При этом $\forall k \in \overline{1,s}$

$$k - 1 \in \overline{0, s-1}.$$

С учетом этого полагаем, что

$$(\widehat{x}_i^\natural)_{i\in\overline{0,s}} \in \mathfrak{X}_s \tag{5.2.92}$$

определяется следующим правилом:

$$(\widehat{x}_0^\natural \triangleq x)\&(\widehat{x}_j^\natural \triangleq x_{j-1}^\natural \quad \forall j \in \overline{1,s}). \tag{5.2.93}$$

Тогда в силу (5.2.70) имеем, в частности, что

$$\widehat{x}_1^\natural = \mathbf{z}. \tag{5.2.94}$$

Из (5.2.94) получаем по выбору $\mathbf{z}$ включение

$$\widehat{x}_1^\natural \in M_q. \tag{5.2.95}$$

Из (5.2.73), (5.2.95) вытекает, что справедливо включение

$$\widehat{x}_1^\natural \in M_{\widehat{\beta}(1)}. \tag{5.2.96}$$

Далее, если $k \in \overline{2,s}$, то $k-1 \in \overline{1,s-1}$ и (см. (5.2.68)) $\beta(k-1) \in K\backslash\{q\}$, причем согласно (5.2.70)

$$x_{k-1}^\natural \in M_{\beta(k-1)}; \tag{5.2.97}$$

при этом согласно (5.2.73) $\widehat{\beta}(k) = \beta(k-1)$ и согласно (5.2.93) $\widehat{x}_k^\natural = \widehat{x}_{k-1}^\natural$, откуда с учетом (5.2.97) имеем:

$$\widehat{x}_k^\natural \in M_{\widehat{\beta}(k)}.$$

Поскольку выбор k был произвольным, теперь установлено, что

$$\widehat{x}_j^\natural \in M_{\widehat{\beta}(j)} \quad \forall j \in \overline{2,s}.$$

С учетом (5.2.96) получаем теперь

$$\widehat{x}_j^\natural \in M_{\widehat{\beta}(j)} \quad \forall j \in \overline{1,s}. \tag{5.2.98}$$

Из (5.2.93) и (5.2.98) следует, что

$$(\widehat{x}_0^\natural = x)\&(\widehat{x}_j^\natural \in M_{\widehat{\beta}(j)} \quad \forall j \in \overline{1,s}). \tag{5.2.99}$$

Поэтому согласно (5.2.12), (5.2.91), (5.2.92) и (5.2.99)

$$(\widehat{x}_i^\natural)_{i\in\overline{0,s}} \in \mathbb{X}[x;K;\widehat{\beta}]. \tag{5.2.100}$$

С учетом (5.2.90) и (5.2.100) получаем, что

$$\widehat{\beta} \in (\mathbf{I}-bi)[K] \,:\, (\widehat{x}_i^\natural)_{i\in\overline{0,s}} \in \mathbb{X}[x;K;\widehat{\beta}].$$

С учетом (5.2.16) получаем теперь неравенство

$$v(x,K) \le \mathfrak{C}^0_{\widehat{\beta}}[K]((\widehat{x}^\natural_i)_{i\in\overline{0,s}}), \tag{5.2.101}$$

где согласно (5.2.15) выполняется равенство

$$\mathfrak{C}^0_{\widehat{\beta}}[K]((\widehat{x}^\natural_i)_{i\in\overline{0,s}}) = \sum_{i=0}^{s-1} \mathbf{c}(\widehat{x}^\natural_i, \widehat{x}^\natural_{i+1}, \{\widehat{\beta}(j) : j \in \overline{i+1,s}\}) + \mathbf{f}(\widehat{x}^\natural_s) =$$

$$= \mathbf{c}(\widehat{x}^\natural_0, \widehat{x}^\natural_1, \{\widehat{\beta}(j) : j \in \overline{1,s}\}) + \sum_{i=1}^{s-1} \mathbf{c}(\widehat{x}^\natural_i, \widehat{x}^\natural_{i+1}, \{\widehat{\beta}(j) : j \in \overline{i+1,s}\}) + \mathbf{f}(\widehat{x}^\natural_s) =$$

$$= \mathbf{c}(x,\mathbf{z},K) + \sum_{i=1}^{s-1} \mathbf{c}(\widehat{x}^\natural_i, \widehat{x}^\natural_{i+1}, \{\widehat{\beta}(j) : j \in \overline{i+1,s}\}) + \mathbf{f}(\widehat{x}^\natural_s); \tag{5.2.102}$$

мы учли (5.2.93), (5.2.94) и (5.2.86). Отметим, что согласно (5.2.93)

$$\mathbf{f}(\widehat{x}^\natural_s) = \mathbf{f}(x^\natural_{s-1}). \tag{5.2.103}$$

Далее, согласно (5.2.73) справедлива при $i \in \overline{1,s-1}$ цепочка равенств

$$\{\widehat{\beta}(j) : j \in \overline{i+1,s}\} = \{\beta(j-1) : j \in \overline{i+1,s}\} = \{\beta(k) : k \in \overline{i,s-1}\}. \tag{5.2.104}$$

Из (5.2.102) – (5.2.104) вытекает, что справедливо равенство

$$\mathfrak{C}^0_{\widehat{\beta}}[K]((\widehat{x}^\natural_i)_{i\in\overline{0,s}}) = \mathbf{c}(x,\mathbf{z},K) + \sum_{i=1}^{s-1} \mathbf{c}(\widehat{x}^\natural_i, \widehat{x}^\natural_{i+1}, \{\beta(k) : k \in \overline{i,s-1}\}) + \mathbf{f}(x^\natural_{s-1}). \tag{5.2.105}$$

Из (5.2.93), (5.2.105) следует, что справедливо равенство

$$\mathfrak{C}^0_{\widehat{\beta}}[K]((\widehat{x}^\natural_i)_{i\in\overline{0,s}}) = \mathbf{c}(x,\mathbf{z},K) + \sum_{i=1}^{s-1} \mathbf{c}(x^\natural_{i-1}, x^\natural_i, \{\beta(j) : j \in \overline{i,s-1}\}) +$$

$$+ \mathbf{f}(x^\natural_{s-1}) = \mathbf{c}(x,\mathbf{z},K) + \sum_{i=0}^{s-2} \mathbf{c}(x^\natural_i, x^\natural_{i+1}, \{\beta(j) : j \in \overline{i+1,s-1}\}) + \mathbf{f}(x^\natural_{s-1}).$$

С учетом (5.2.71) имеем равенство

$$\mathfrak{C}^0_{\widehat{\beta}}[K]((\widehat{x}^\natural_i)_{i\in\overline{0,s}}) = \mathbf{c}(x,\mathbf{z},K) + v(\mathbf{z}, K\setminus\{q\}). \tag{5.2.106}$$

Из (5.2.101) и (5.2.106) вытекает неравенство

$$v(x,K) \le \mathbf{c}(x,\mathbf{z},K) + v(\mathbf{z}, K\setminus\{q\}).$$

С учетом (5.2.60) получаем оценку

$$v(x,K) \le \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K) + v(y, K \setminus \{k\})],$$

откуда с использованием (5.2.59) получаем равенство

$$v(x,K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K) + v(y, K \setminus \{k\})] \tag{5.2.107}$$

и в случае 2), т.е. при $s \in \overline{2,N}$. Итак (см. (5.2.107)), установлена импликация

$$(s \in \overline{2,N}) \Rightarrow (v(x,K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K) + v(y, K \setminus \{k\})]). \tag{5.2.108}$$

Из (5.2.31) и (5.2.108) следует окончательно, что во всех возможных случаях

$$v(x,K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K) + v(y, K \setminus \{k\})],$$

т.е. справедливо (5.2.23). $\square$

Из (5.2.21) и теоремы 5.2.1 вытекает, что

$$V = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x,y,\overline{1,N}) + v(y, \overline{1,N} \setminus \{k\})]. \tag{5.2.109}$$

Сейчас мы рассмотрим конструкцию построения сужений функции Беллмана, определяемой в (5.2.16), (5.2.17), на основе слоев пространства позиций, рассматриваемых в разделе 4.4. В этой связи отметим, что число N, кортеж (4.1.1) и наборы (4.1.4), (4.1.5), используемые в основной задаче данной главы, являются теми же, что и в разделе 4.1. Следует отметить только, что в силу (5.2.1) множество (5.2.2) совпадает с (4.1.8).

В силу упомянутых причин мы можем использовать непустые (см. раздел 4.4) множества

$$D_0, D_1, ..., D_N$$

раздела 4.4 для построения требуемых сужений функции Беллмана $\mathcal{V}$ (5.2.16), (5.2.17). Итак, полагаем, что

$$\mathcal{V}_s \triangleq (\mathcal{V}|D_s) = (\mathcal{V}(z))_{z \in D_s} \quad \forall s \in \overline{0,N}. \tag{5.2.110}$$

Иными словами, при $s \in \overline{0,N}$ и $(x,K) \in D_s$

$$\mathcal{V}_s(x,K) = \mathcal{V}(x,K) = v(x,K). \tag{5.2.111}$$

Тем самым, как и в разделе 4.4, у нас реализуется усеченный массив значений функции Беллмана. Функции $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_N$ конструируются подобно разделу 4.4. При этом важно учитывать свойство (4.4.17). С учетом этого свойства при всяком выборе $s \in \overline{1,N}, (x,K) \in D_s, k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$ определенно соответствующее значение $\mathcal{V}_{s-1}$:

$$\mathcal{V}_{s-1}(y, K\backslash\{k\}) \in [0, \infty[.$$

Как следствие получаем возможность определять при $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$ величину

$$\min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K) + \mathcal{V}_{s-1}(y, K\backslash\{k\})] \in [0, \infty[,$$

используя только информацию о значениях функции $\mathcal{V}_{s-1}$; однако тогда (см. (4.4.17)) с учетом теоремы 5.2.1 и (5.2.111)

$$\min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K)+\mathcal{V}_{s-1}(y, K\backslash\{k\})] = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K)+v(y, K\backslash\{k\})].$$

Вновь используя (5.2.111) в сочетании с последним свойством и теоремой 5.2.1, получаем $\forall s \in \overline{1,N}\ \ \forall (x,K) \in D_s$

$$\mathcal{V}_s(x,K) = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k} [\mathbf{c}(x,y,K) + \mathcal{V}_{s-1}(y, K\backslash\{k\})]. \tag{5.2.112}$$

В частности, из (4.4.8) и (5.2.111) вытекает (см. (5.2.21)) равенство

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}) = \mathcal{V}(x^0, \overline{1,N}) = v(x^0, \overline{1,N}) = V. \tag{5.2.113}$$

Переходя к описанию процедуры построения функций $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_N$, т.е. слоев функции Беллмана, отметим, что согласно (5.2.111)

$$\mathcal{V}_0(x,K) = v(x,K) \quad \forall (x,K) \in D_0.$$

С учетом (4.4.7) и последнего соотношения получаем по определению функции (5.2.17), что

$$\mathcal{V}_0(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathbf{M}. \tag{5.2.114}$$

Посредством (5.2.114) явным образом определена функция $\mathcal{V}_0$.

Пусть $m \in \overline{0,N}$ и уже построены функции $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_m$, т.е. определен кортеж

$$(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,m}}. \tag{5.2.115}$$

Если $m = N$, то процедура построения нужных слоев функции Беллмана завершена. Пусть $m \neq N$, т.е. $m \in \overline{0, N-1}$. Тогда используем (5.2.112) при $s = m+1$, где $m+1 \in \overline{1,N}$. Учитываем то, что при $(x,K) \in D_{m+1}, k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$ имеет место

$$(y, K\backslash\{k\}) \in D_m,$$

что позволяет использовать значения $\mathcal{V}_m(y, K\setminus\{k\})$ для вычисления функции $\mathcal{V}_{m+1}(x, K)$. Именно, вычисляем значения

$$\mathcal{V}_{m+1}(x, K) = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(x, y, K) + \mathcal{V}_m(y, K\setminus\{k\})] \quad \forall(x, K) \in D_m. \tag{5.2.116}$$

Тем самым исходный кортеж (5.2.115) продолжается до

$$(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{0,m+1}}.$$

Ясно, что после конечного числа (регулярных) шагов на основе соотношений, подобных (5.2.116), весь кортеж $(\mathcal{V}_i)_{\overline{0,N}}$ будет построен, т.е. будут определены все функции

$$\mathcal{V}_s : D_s \longrightarrow [0, \infty[,$$

где $s \in \overline{0, N}$. В частности, согласно (5.2.113) будет найден глобальный экстремум V. Далее, по аналогии с разделом 4.4. конструируется оптимальное решение в виде пары маршрут-трасса (см. следующий раздел).

5.3. Построение оптимального решения

Предполагаем построенными все функции $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, ..., $\mathcal{V}_N$. В частности, известно значение V, т.е. глобальный экстремум основной задачи. Рассмотрим построение оптимальной пары маршрут-трасса только на основании информации о значениях функций $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, ..., $\mathcal{V}_N$. Пусть $u_0 \triangleq x^0$. Полагаем (см. (5.2.109), (5.2.112), (5.2.113)), что $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $u_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$ таковы, что

$$V = \mathbf{c}(u_0, u_1, \overline{1, N}) + \mathcal{V}_{N-1}(u_1, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}), \tag{5.3.1}$$

при этом $(u_0, \overline{1, N}) = (x^0, \overline{1, N}) \in D_N$. Тогда в силу (4.4.8)

$$(u_1, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}. \tag{5.3.2}$$

Из (5.3.2) и (5.2.112) вытекает следующее равенство

$$\mathcal{V}_{N-1}(u_1, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) = \min_{k\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{i_1\})} \min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(u_1, y, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})+$$

$$+\mathcal{V}_{N-2}(y, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1; k\})]. \tag{5.3.3}$$

С учетом (5.3.3) выбираем $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})$ и $u_2 \in M_{\mathbf{i}_2}$ так, что при этом

$$\mathcal{V}_{N-1}(u_1, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(u_1, u_2, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1\}) + \mathcal{V}_{N-2}(u_2, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}). \tag{5.3.4}$$

Тогда в силу (4.4.8) и (5.3.2) получаем включение

$$(u_2, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_2\}) = (u_2, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,2}\}) \in D_{N-2}. \tag{5.3.5}$$

Мы располагаем парой кортежей

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,2}} :\in \overline{1,2} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{5.3.6}$$

$$(u_j)_{j\in\overline{0,2}} :\in \overline{0,2} \longrightarrow X, \tag{5.3.7}$$

где $u_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$ и $u_2 \in M_{\mathbf{i}_2}$. В отношении (5.3.6) заметим, что $\mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2$. Наконец, из (5.3.1) и (5.3.4) вытекает равенство

$$V = \mathbf{c}(u_0, u_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(u_1, u_2, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\}) + \mathcal{V}_{N-2}(u_2, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1;\mathbf{i}_2\}). \tag{5.3.8}$$

Пусть $r \in \overline{2,N}$ и уже построены кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r}} : \overline{1,r} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{5.3.9}$$

$$(u_j)_{j\in\overline{0,r}} : \overline{0,r} \longrightarrow X, \tag{5.3.10}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1') $u_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1,r}$;

2') $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l \quad \forall k \in \overline{1,r}\ \forall l \in \overline{1,r}\backslash\{k\}$;

3') $(u_j, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}) \in D_{N-j} \quad \forall j \in \overline{1,r}$;

4') $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r}$;

5') $\mathcal{V}_{N-j+1}(u_{j-1}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) = \mathbf{c}(u_{j-1}, u_j, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \in \overline{1,j-1}\}) + \mathcal{V}_{N-j}(u_j, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r}$;

6') $V = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_s : s \in \overline{1,k}\}) + \mathcal{V}_{N-r}(u_r, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \in \overline{1,r}\})$.

Замечание. Покажем, что вышеупомянутые свойства имеют место при $r = 2$. Итак, пусть выполнено последнее равенство. Тогда кортежи (5.3.9) и (5.3.6) совпадают. Кроме того, кортежи (5.3.10) и (5.3.7) также совпадают. Свойство 1') выполняется по выбору u_1 и u_2. Свойство 2') следует из условия $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\})$; 3') вытекает из (5.3.2), (5.3.5). Свойство 4') следует из того, что $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\})$, т.к. $\overline{1,N} = \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,0}\}$ и $\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_1\} = \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r-1}\}$. Следовательно 5') следует из (5.2.113), (5.3.1), (5.3.4). Наконец, из (5.3.8) вытекает 6'). $\square$

Для общего случая (5.3.9), (5.3.10) (см. 1') – 6')) отметим, что:

$$(r = N) \vee (r < N). \tag{5.3.11}$$

1) Пусть $r = N$. тогда в силу (5.3.9) и (5.3.10) имеем полные кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{5.3.12}$$

$$(u_j)_{j\in\overline{0,N}}:\overline{0,N}\longrightarrow X, \tag{5.3.13}$$

При этом согласно 1') имеем в рассматриваемом случае включения

$$u_j\in M_{\mathbf{i}_j}\quad\forall j\in\overline{1,N}. \tag{5.3.14}$$

Кроме того, $u_0=x^0$. Стало быть (см. (5.3.14)),

$$(u_0=x^0)\&((u_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\prod_{j=1}^{N}M_{\mathbf{i}_j}). \tag{5.3.15}$$

Из 2') имеем в рассматриваемом сейчас случае, что

$$\mathbf{i}_k\neq\mathbf{i}_l\quad\forall k\in\overline{1,N}\ \ \forall l\in\overline{1,N}\setminus\{k\}. \tag{5.3.16}$$

Тогда отображение (5.3.12) есть в силу (5.3.16) инъекция $\overline{1,N}$ на себя. Тогда согласно (1.1.24) кортеж (5.3.12) есть перестановка в $\overline{1,N}$, т.е.

$$\eta\triangleq(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\mathbb{P}. \tag{5.3.17}$$

Из 4') вытекает, что

$$\mathbf{i}_j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,j-1}\})\quad\forall j\in\overline{1,N}. \tag{5.3.18}$$

В силу (5.3.17) $\overline{1,N}=\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,N}\}$. Из 2') имеем свойство: если $s\in\overline{1,N}$, то

$$\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,s-1}\}\bigcap\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{s,N}\}=\varnothing;$$

с учетом сюръективности (5.3.12) получаем равенство

$$\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,s-1}\}=\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{s,N}\}. \tag{5.3.19}$$

Поскольку выбор s был произвольным, имеем из (5.3.18) и (5.3.19), что

$$\mathbf{i}_j\in\mathbf{I}(\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{j,N}\})\quad\forall j\in\overline{1,N}. \tag{5.3.20}$$

Из (4.2.9), (4.2.10) и (5.3.20) следует, что $\eta\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, откуда в силу (4.2.11) и (4.2.13) вытекает включение:

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}\in\mathbb{A}. \tag{5.3.21}$$

Согласно (5.2.12), (5.2.13) и (5.2.21) имеем равенство

$$\mathfrak{X}[\eta]=\{(x_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}_N|(x_0=x^0)\&(x_j\in M_{\mathbf{i}_j}\ \ \forall j\in\overline{1,N})\}. \tag{5.3.22}$$

Тогда из (5.3.14), (5.3.15) и (5.3.22) вытекает, что

$$(u_j)_{j\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{X}[\eta]. \tag{5.3.23}$$

Из (5.2.9), (5.3.21), (5.3.23) следует, что

$$(\eta, (u_j)_{j\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{5.3.24}$$

Согласно 3') $(u_r, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,r}\}) \in D_{N-r}$, где $N - r = 0$, а потому $(u_N, \varnothing) \in D_0$ в силу сюръективности (5.3.12); согласно (4.4.7)

$$u_N \in \mathbf{M}. \tag{5.3.25}$$

Имеем $\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\} = \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,N}\} = \varnothing$, а тогда

$$\mathcal{V}_{N-r}(u_r, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,r}\}) = \mathcal{V}_0(u_N, \varnothing) = \mathbf{f}(u_N)$$

согласно (5.3.25) и определению $\mathcal{V}_0$ (см. (5.2.114)). Из 6') имеем

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_s\ :\ s \in \overline{1,k}\}) + \mathbf{f}(u_N). \tag{5.3.26}$$

Учтем (5.3.19). Тогда (см. (5.3.19), (5.3.26))

$$\mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_s\ :\ s \in \overline{1,k}\}) = \mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \{\mathbf{i}_l\ :\ l \in \overline{k+1,N}\}) \tag{5.3.27}$$

при $k \in \overline{1, N-1}$ (для получения (5.3.27) следует полагать в (5.3.19) $s = k+1$, где $s \in \overline{1,N}$ по условиям выбора k). Из (5.3.26), (5.3.27) вытекает, что

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \{\mathbf{i}_s\ :\ s \in \overline{k+1,N}\}) + \mathbf{f}(u_N). \tag{5.3.28}$$

С учетом (5.2.6) имеем из (5.3.28) следующее равенство

$$\mathfrak{C}_\eta((u_k)_{k\in\overline{0,N}}) = \mathfrak{C}^0_\eta[\overline{1,N}]((u_k)_{k\in\overline{0,N}}) = V. \tag{5.3.29}$$

Из (5.3.29) вытекает, что (5.3.24) — оптимальное решение задачи (5.2.10):

$$(\eta, (u_j)_{j\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S} : \mathfrak{C}_\eta((u_j)_{j\in\overline{0,N}}) = V.$$

2) Пусть $r < N$, т.е. $r \in \overline{2, N-1}$. Тогда $r + 1 \in \overline{3,N}$. Из 3') следует, в частности, что

$$(u_r, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,r}\}) \in D_{N-r}, \tag{5.3.30}$$

где $N-r \in \overline{1, N-2}$. Поскольку, в частности, $N-r \in \overline{1,N}$, имеем из (5.3.30) и (4.4.17) систему включений

$$(y, (\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l : l \in \overline{1,r}\})\setminus\{k\}) \in D_{N-(r+1)} \quad \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l : l \in \overline{1,r}\}) \quad \forall y \in M_k. \tag{5.3.31}$$

Поэтому (см. (5.3.30), (5.3.31), (5.2.112)) определено значение

$$\min_{k\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l:l\in\overline{1,r}\})}\min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(u_r,y,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})+$$

$$+\mathcal{V}_{N-(r+1)}(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})\setminus\{k\})]\in[0,\infty[.$$

Более того, из (5.3.30) и (5.2.112) вытекает, что

$$\mathcal{V}_{N-r}(u_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})=\min_{k\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l:l\in\overline{1,r}\})}\min_{y\in M_k}[\mathbf{c}(u_r,y,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})+$$

$$+\mathcal{V}_{N-(r+1)}(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})\setminus\{k\})]. \tag{5.3.32}$$

С учетом (5.3.31) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1}\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l:l\in\overline{1,r}\}) \tag{5.3.33}$$

и точку

$$u_{r+1}\in M_{\mathbf{i}_{r+1}}, \tag{5.3.34}$$

для которых реализуется равенство

$$\mathcal{V}_{N-r}(u_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})=\mathbf{c}(u_r,u_{r+1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r}\})+$$

$$+\mathcal{V}_{N-(r+1)}(u_{r+1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l\,:\,l\in\overline{1,r+1}\}). \tag{5.3.35}$$

Тем самым построены следующие два кортежа:

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r+1}}:\overline{1,r+1}\longrightarrow\overline{1,N}, \tag{5.3.36}$$

$$(u_j)_{j\in\overline{0,r+1}}:\overline{0,r+1}\longrightarrow X. \tag{5.3.37}$$

Из 1') и (5.3.34) вытекает, что

1") $u_j\in M_{\mathbf{i}_j}\quad\forall j\in\overline{1,r+1}$.

Далее, по выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ имеем с учетом 2') свойство

2") $\mathbf{i}_k\neq\mathbf{i}_l\quad\forall k\in\overline{1,r+1}\ \forall l\in\overline{1,r+1}\setminus\{k\}$.

Напомним, что $\mathbf{i}_{r+1}\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l:l\in\overline{1,r}\})$ и $u_{r+1}\in M_{\mathbf{i}_{r+1}}$ (см. (5.3.33), (5.3.34)). Тогда согласно (5.3.31)

$$(u_{r+1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_l:l\in\overline{1,r+1}\})\in D_{N-(r+1)}. \tag{5.3.38}$$

Из 3') и (5.3.38) вытекает, что справедливо свойство

3") $(u_j,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,j}\})\in D_{N-j}\quad\forall j\in\overline{1,r+1}$.

Из 4') и (5.3.33) вытекает, что

4") $\mathbf{i}_j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,j-1}\})\quad\forall j\in\overline{1,r+1}$.

Из 5') и (5.3.35) вытекает, что

5") $\mathcal{V}_{N-j+1}(u_{j-1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) =$
$= \mathbf{c}(u_{j-1}, u_j, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) + \mathcal{V}_{N-j}(u_j, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\})$
$\forall j \in \overline{1, r+1}$.

Наконец, из 6') и (5.3.35) следует, что справедливо

6") $V = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_s : s \in \overline{1,k}\}) +$
$+ \mathbf{c}(u_r, u_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_l : l \in \overline{1,r}\}) + \mathcal{V}_{N-(r+1)}(u_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\}) =$
$= \sum_{k=0}^{r} \mathbf{c}(u_k, u_{k+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_s : s \in \overline{1,k}\}) + \mathcal{V}_{N-(r+1)}(u_{r+1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\})$.

Итак, в случае 2) каждый из кортежей (5.3.9), (5.3.10) продолжен (см. (5.3.36), (5.3.37)) с сохранением всех основных свойств: 1') – 6') преобразуются в 1") – 6"). После выполнения конечного числа регулярных шагов вида 2) мы получим ситуацию 1), т.е. придем к оптимальному решению основной задачи.

5.4 Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе рассматривается пример решения задачи (5.2.10). Итак, полагаем, что $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (задача на плоскости), $x^0 = (0,0)$; $M_1, ..., M_N$ — конечные плоские п/м X, которые попарно не пересекаются и не содержат x^0. Полагаем, что при $j \in \overline{1,N}$ множество M_j реализуется в виде равномерной сетки на окружности, являющейся границей заданного круга Y_j (последний характеризуется центром O_j и радиусом R_j). Мы постулируем далее следующее (усиливающее (3.1.4)) условие

$$Y_i \bigcap Y_j = \varnothing \quad \forall i \in \overline{1,N} \ \forall j \in \overline{1,N} \setminus \{i\}.$$

Пусть $\mathbf{f}(x) \equiv 0$, функция $\mathbf{c}$ (5.2.4) определяется выражением: при $x' \in X$, $x'' \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbf{c}(x', x'', K) = \gamma \rho(x', x'')|K| + T(y) \sum_{i \in K} h_i, \qquad (5.4.1)$$

где $\gamma \in]0, \infty[$, $\rho(x', x'')$ есть евклидово расстояние между точками x' и x'', значения $h_i \in]0, \infty[$ определены при всех $i \in \overline{1,N}$; пусть функция T определена на X условиями: при $j \in \overline{1,N}$ и $y \in M_j$ число $T(y)$ есть площадь круга Y_j, соответствующего множеству M_j (индекс j определяется по y единственным образом); за пределами множеств $M_1, ..., M_N$ значения функции T нулевые.

Рассматриваем основную задачу в конкретизации (5.4.1) с целью иллюстрации возможностей метода. Что же касается содержательной стороны дела, то ее можно прояснить посредством следующих рассуждений.

Исполнитель, имеющий транспортное средство (ТС), стартует из состояния $x_0 = x^0$ и перемещается в точку $x_1 \in M_{\alpha(1)}$, где α — выбранный маршрут, т.е. перестановка индексов из $\overline{1,N}$. По достижении x_1 исполнитель оставляет в этой точке ТС и выполняет работу на $M_{\alpha(1)}$, связанную с демонтажом фрагментов системы, находящихся на $M_{\alpha(1)}$ или вблизи $M_{\alpha(1)}$. В процессе этой работы он подвергается вредному (возможно, радиационному) воздействию со стороны фрагментов системы, расположенных на множествах $M_1, ..., M_N$ (или вблизи их). По завершении работ на $M_{\alpha(1)}$ упомянутое воздействие оказывают уже только компоненты множеств $M_i,\ i \neq \alpha(1)$. Исполнитель располагает некоторые из элементов системы, находившихся на $M_{\alpha(1)}$, на ТС, после чего перемещается в $x_2 \in M_{\alpha(2)}$, где вновь приступает к демонтажу фрагментов системы (подчеркнем, что до окончания погрузки на первом этапе, связанном с посещением $M_{\alpha(1)}$, ТС находится в точке x_1, куда затем и возвращается исполнитель для дальнейшего перемещения на ТС). Из (5.4.1) имеем детализацию вредного воздействия, связанного с работой на $M_{\alpha(1)}$ в виде величины $\mathbf{c}(x_0, x_1, \overline{1,N})$ (заметим, что по x_1 однозначно восстанавливается $\alpha(1)$). Аналогичные работы на $M_{\alpha(2)}$, включая перемещения из x_1, приводят к оценке $\mathbf{c}(x_1, x_2, \overline{1,N} \setminus \{\alpha(1)\})$; здесь $\alpha(1) \neq \alpha(2)$. К моменту окончания работ на $M_{\alpha(2)}$ исполнитель "получит" суммарное воздействие $\mathbf{c}(x_0, x_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(x_1, x_2, \overline{1,N} \setminus \{\alpha(1)\})$. Дальнейшие рассуждения аналогичны и по этой причине опущены.

Приведенный выше алгоритм реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке C++ (Borland C++ Builder 6.0), работающей в 32-битной операционной системе Windows, начиная с Windows 95. Вычислительная часть реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая задачи на плоскости имеется возможность графического представления результатов решения, отдельные участки графика можно увеличивать. Вычисления проводились на компьютере Notebook с процессором Intel Core2Duo T7700 (тактовая частота 2.4 гГц), объемом ОЗУ 3 гб с установленной операционной системой Windows Vista Business Sp1.

Напомним, что $x^0 = (0,0)$, т.е. совпадает с началом координат, а каждое множество $M_i,\ i \in \overline{1,27}$, имеет вид "сетки", получаемой посредством размещения на окружности 24 точек на равных угловых расстояниях друг от друга, включая точку с нулевой угловой координатой. Каждое множество однозначно представляется центром O_i и радиусом R_i окружности; $i \in \overline{1,27}$.

Итак, пусть заданы следующие координаты центров

$$O_1 = (20, 0);\ O_2 = (50, 0);\ O_3 = (85, 0)\ O_4 = (0, -25);\ O_5 = (0, -60);$$
$$O_6 = (0, -85);\ O_7 = (-15, 0);\ O_8 = (-40, 0);\ O_9 = (-75, 0);\ O_{10} = (0, 22);$$
$$O_{11} = (0, 50);\ O_{12} = (0, 80);\ O_{13} = (30, 40);\ O_{14} = (30, 80);\ O_{15} = (80, 80);$$
$$O_{16} = (70, 40);\ O_{17} = (50, -40);\ O_{18} = (30, -60);\ O_{19} = (80, -40);$$
$$O_{20} = (65, -80);\ O_{21} = (-30, -25);\ O_{22} = (-35, -70);\ O_{23} = (-70, -40);$$
$$O_{24} = (-70, -80);\ O_{25} = (-30, 40);\ O_{26} = (-75, 50);\ O_{27} = (-50, 75)$$

и радиусы окружностей:

$$R_1 = R_6 = R_7 = R_{10} = R_{21} = 8;$$
$$R_3 = R_{12} = R_{14} = R_{17} = R_{24} = R_{26} = 10;$$
$$R_5 = R_8 = R_{11} = R_{15} = R_{18} = R_{19} = R_{23} = R_{27} = 12;$$
$$R_2 = R_4 = R_9 = R_{13} = R_{16} = R_{20} = R_{22} = R_{25} = 15.$$

Пусть условия предшествования заданы в виде 25 пар $(p_i, q_i),\ i \in \overline{1, 25}$. При $i \in \overline{1, 25}$ множество с индексом p_i должно посещаться раньше множества с индексом q_i. Итак, пусть вышеумомянутые пары имеют вид:

$$p_1 = 1, q_1 = 10;\ p_2 = 12, q_2 = 2;\ p_3 = 2, q_3 = 13;\ p_4 = 13, q_4 = 15;$$
$$p_5 = 6, q_5 = 16;\ p_6 = 15, q_6 = 16;\ p_7 = 18, q_7 = 27;\ p_8 = 9, q_8 = 27;$$
$$p_9 = 10, q_9 = 9;\ p_{10} = 11, q_{10} = 19;\ p_{11} = 20, q_{11} = 19;\ p_{12} = 25, q_{12} = 26;$$
$$p_{13} = 23, q_{13} = 22;\ p_{14} = 21, q_{14} = 20;\ p_{15} = 24, q_{15} = 22;$$
$$p_{16} = 14, q_{16} = 16;\ p_{17} = 7, q_{17} = 10;\ p_{18} = 8, q_{18} = 2;\ p_{19} = 1, q_{19} = 9;$$
$$p_{20} = 14, q_{20} = 26;\ p_{21} = 2, q_{21} = 27;\ p_{22} = 3, q_{22} = 6;\ p_{23} = 3, q_{23} = 19;$$
$$p_{24} = 18, q_{24} = 17;\ p_{25} = 14, q_{25} = 25.$$

Пусть $\gamma = 1,3$, а $h_i,\ i \in \overline{1, 27}$, имеют следующие значения:

$$h_1 = 3.6,\ h_2 = 4.1,\ h_3 = 5.2,\ h_4 = 5.5,\ h_5 = 3.9,\ h_6 = 4.5,\ h_7 = 3.8,$$
$$h_8 = 3.1,\ h_9 = 4.2,\ h_{10} = 4.9,\ h_{11} = 5.5,\ h_{12} = 5.8,\ h_{13} = 4.7,\ h_{14} = 3.3,$$
$$h_{15} = 4.2,\ h_{16} = 4.8,\ h_{17} = 3.6,\ h_{18} = 3.7,\ h_{19} = 4.1, h_{20} = 3.9,$$
$$h_{21} = 3.3,\ h_{22} = 5.2,\ h_{23} = 4.3,\ h_{24} = 4.9,\ h_{25} = 3.8;\ h_{26} = 5.4,\ h_{27} = 4.4.$$

Получены следующие результаты: наименьшая величина полученного вредного воздействия: $V_N(x^0, \overline{1,N}) = 630468.06$. Маршрут и трасса:

$$x^0 = (0,0) \to (-7,0) \in M_7 \to (13.07,4) \in M_1 \to (5.66,16.34) \in M_{10} \to (75.34,-2.59) \in M_3 \to (-2.07,-77.27) \in M_6 \to (-61.34,-75) \in M_{24} \to (-37.73,-27.07) \in M_{21} \to (0,70) \in M_{12} \to (3.11,61.59) \in M_{11} \to (21.34,75) \in M_{14} \to (-30,55) \in M_{25} \to (-66.34,45) \in M_{26} \to (-61.51, -31.51) \in M_{23} \to (26.89,-48.41) \in M_{18} \to (40.34,-42.59) \in M_{17} \to (6,-49.61) \in M_5 \to (-3.88,-39.49) \in M_4 \to (-31.12,-55.51) \in M_{22} \to (-48.49,-8.49) \in M_8 \to (-60.51,-3.88) \in M_9 \to (35.51,3.88) \in M_2 \to (-39.61,69) \in M_{27} \to (22.50,52.99) \in M_{13} \to (71.51,71.51) \in M_{15} \to (70,55) \in M_{16} \to (68.88,-65.51) \in M_{20} \to (74,-50.39) \in M_{19}.$$

Время счета — 32 мин. 34 сек. График маршрута и трассы приведен на рис. 5.4.1.

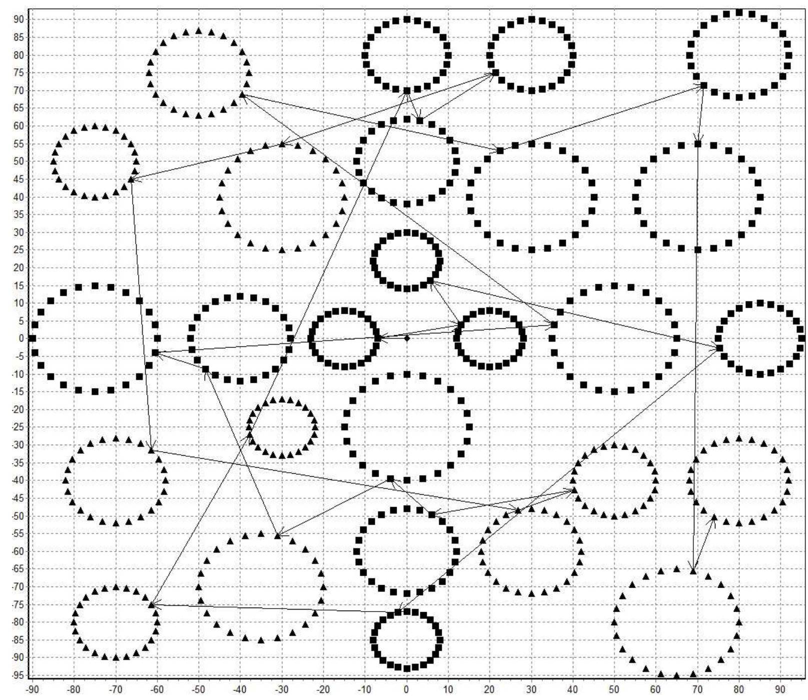

Рис. 5.4.1. Маршрут и трасса обхода множеств.

Заключение

В предлагаемом пособии рассмотрены различные задачи маршрутизации перемещений по конечной системе множеств, начиная с простейшей в идейном (но не в вычислительном) отношении ЗК, где осуществляются перемещения по одноэлементным множествам, и кончая достаточно сложными маршрутными задачами, моделирующими процессы демонтажа энергоблоков АЭС, выведенных из эксплуатации. В последнем случае мы, кроме того, допускали наличие ограничений в виде условий предшествования, которые имеют технологический характер. Моментом, объединяющим процедуры решения всех рассматриваемых в пособии содержательных задач, является использование МДП, реализуемого на основе принципа оптимальности Р. Беллмана. При этом, однако, ограничения в виде условий предшествования потребовали некоторой модификации конструкции на основе МДП. Эта модификация была связана с редукцией исходной задачи, в процессе которой условия предшествования были сведены к другим, более простым в логическом отношении ограничениям типа условий на текущие переходы от решения одной элементарной задачи к решению другой. Данная редукция позволила осуществить расширение исходной постановки до системы укороченных маршрутных задач. Этому расширению было сопоставлено модифицированное уравнение Беллмана. В случае содержательной задачи последней главы это уравнение было в некоторой степени преобразовано с тем, чтобы учесть влияние списка невыполненных заданий на величину затрат при осуществлении элементарного перемещения.

С учетом соображений вычислительной реализации наиболее трудоемкое построение массива значений функции Беллмана осуществлялось не на всем пространстве позиций, а только на специальной системе слоев. При построении последних активно использовались условия предшествования.

В пособии отражены также некоторые вопросы построения решений задач маршрутизации с использованием метода итераций, на этапах реализации которого допускались элементы декомпозиции совокупной задачи с выделением этапов построения маршрутов и трасс. Представляется, что данный подход может служить некоторым ориентиром при построении приближенных методов.

Литература

[1] Алгоритм для решения задачи о коммивояжере / **Дж. Литл** [и др.] // Экономика и математические методы. 1965. №1. С. 94–107.

[2] **Александрян Р.А.** Общая топология /Р.А. Александрян, Э.А. Мирзаханян. М.: Высшая школа. 1979, 336 с.

[3] **Балушкин Ф.А.** Об одном варианте задачи коммивояжера / Ф.А. Балушкин, А.Н. Сесекин, Ю.А. Фрейберг, А.Г. Ченцов // Вестник компьютерных и информационных технологий. № 12, 2009, С. 45–50.

[4] **Балушкин Ф.А.** Использование метода динамического программирования для оптимизации демонтажа оборудования энергоблоков АЭС, выводимых из эксплуатации, с целью минимизации облучения / Ф.А. Балушкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, И.Б. Чеблоков, А.Г. Ченцов // Известия ВУЗов. Ядерная энергетика. № 4. 2009. С. 169-176.

[5] **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере /Р. Беллман // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т.9. С. 219–228.

[6] **Беллман Р.** Динамическое программирование. / Р. Беллман. М.: Мир, 1960. 200 с.

[7] **Беллман Р.** Динамическое программирование и основы современной теории управления. / Р. Беллман, Р. Калаба. М.: Наука, 1969. 118 с.

[8] **Бердышев Ю.И.** Об одной нелинейной задаче последовательного управления с параметром / Ю.И. Бердышев // Изв. РАН Теория и системы управления.2008. Вып. 3. С. 38-43.

[9] **Бердышев Ю.И.** О некоторых задачах последовательной оптимизации управляемых систем / Ю.И. Бердышев, А.Г. Ченцов. Свердловск, 1983. – 98 с. Деп. в ВИНИТИ 05.01.83 №109-83 Деп.

[10] **Бердышев Ю.И.** Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления / Ю.И. Бердышев, А.Г. Ченцов // Кибернетика, 1986. №1. С. 59-64.

[11] **Буслаева Л.Т.** К вопросу декомпозиции процесса последовательного выбора вариантов / Л.Т. Буслаева, А.Г. Ченцов // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, №4. С. 103–113.

[12] **Гэри М.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. М.: Мир, 1982. 416 с.

[13] **Зобнин Б.Б.** Об одной задаче маршрутной оптимизации и ее приложениях / Б.Б. Зобнин, Л.Н. Коротаева, А.Г. Ченцов // Проблемы передачи информации. 1997. Т. 33, №4. С. 1–18.

[14] **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1968. 496 с.

[15] **Кормен Т.** Алгоритмы: построение и анализ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. М.: МЦНМО, 2002. 960 с.

[16] **Коротаева Л.Н.** Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения / Л.Н. Коротаева, А.Н. Сесекин, А.Г. Ченцов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т. 29, №8. С. 1107–1113.

[17] **Коротаева Л.Н.** Об одной задаче о назначениях / Л.Н. Коротаева Э.М. Назаров, А.Г. Ченцов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, №4. С. 483–494.

[18] **Коротаева Л.Н.** Об одном обобщении задачи коммивояжера "на узкие места"/ Л.Н. Коротаева, А.Г. Ченцов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1995. Т. 35, №7. С. 1067–1076.

[19] **Коротаева Л.Н.** К вопросу о маршрутизации соединений / Л.Н. Коротаева, М.П. Трухин, А.Г. Ченцов // Автоматика и телемеханика. 1997. №12. С. 175–192.

[20] **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений / Н.Н. Красовский. М.: Наука, 1970. 420 с.

[21] **Красовский Н.Н.** Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. М.: Наука, 1974. 456 с.

[22] **Куратовский К.** Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. М.: Мир. 1970. 416 с.

[23] **Лейтен А.К.** Некоторые модификации задачи коммивояжера / А.К. Лейтен // Тр. ВЦ Тарт. ун-та, 1973. Вып. 28. С. 44–58.

[24] **Маркелова Е.Ю.** Задача маршрутизации конечного числа переходов системы с абстрактной функцией агрегирования затрат. / Е.Ю. Маркелова, В.Е. Рольщиков, А.Г. Ченцов. Деп. в ВИНИТИ №1577-В98, 25.05.98. Челябинский госуниверситет, Челябинск, 1998.

[25] **Меламед И.И.** Задача коммивояжера. Вопросы теории / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С. 3–34.

[26] **Меламед И.И.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал// Автоматика и телемеханика. 1989. №10. С.3–29.

[27] **Меламед И.И.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. 1989. №11. С. 3–26.

[28] **Мину М.** Математическое программирование / М. Мину. М.: Наука, 1990. 486 с.

[29] **Нефедов В.Н.** Курс дискретной математики / Н.В. Нефедов, В.А. Осипова. М.: Изд-во МАИ, 1992. 264 с.

[30] **Сергеев С.И.** Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера / С.И. Сергеев // Автоматика и телемеханика. 2008. №1. С. 45-54.

[31] **Сесекин А.Н.** Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения / А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, М.Ю. Куклин, А.Г. Ченцов, А.А. Кадников // Известия ВУЗов. Ядерная энергетика. 2006. №2. 41-48.

[32] **Сесекин А.Н.** Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий / А.Н. Сесекин А.Н., А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №2. С. 68–77.

[33] **Сесекин А.Н.** Об одной задаче маршрутизации на “на узкие места” / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2010. Т. 16, №1. С. 152–170.

[34] **Сесекин А.Н.** Метод динамического программирования в задаче коммивояжера / А.Н. Сесекин, А.Г. Ченцов. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. 60 с.

[35] **Сесекин А.Н.** Задача последовательного обхода множеств / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов. Екатеринбург. УГТУ-УПИ, 2007. 92 с.

[36] **Сесекин А.Н.** Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов. Екатеринбург. УГТУ-УПИ, 2009. 66 с.

[37] **Сигал И.Х.** Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. / И.Х. Сигал, А.П. Иванова. М.: Наука, 2007. 304 с.

[38] **Сихарулидзе Г.Г.** Об одном обобщении задачи коммивояжера / Г.Г. Сихарулидзе // Автоматика и телемеханика. 1971. №8. С. 116–123.

[39] **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / А.И. Субботин. Ижевск. “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.

[40] Об алгоритмизации задачи оценки дозовых нагрузок при планировании ремонтного обслуживания АЭС /**О.Л. Ташлыков** [и др.] // Сборник трудов седьмой научно-практической конференции, посвященной 40-летию работы Белоярской АЭС. – Заречный, 2004. Т. 3. С. 161–166.

[41] **Ташлыков О.Л.** Организация и технология ядерной энергетики / О.Л. Ташлыков Екатеринбург. УГТУ-УПИ. 2005. 148 с.

[42] **Ташлыков О.Л.** Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов // Известия ВУЗов. Ядерная энергетика. № 2. 2009. С. 115–120.

[43] **Ташлыков О.Л.** Возможности математических методов моделирования в решении проблемы снижения облучаемости персонала / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, Ф.А. Балушкин, А.Г. Ченцов, А.П. Хомяков // Вопросы радиационной безопасности. № 4, 2009. С. 39–49.

[44] **Хелд М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочивания / М. Хелд, Р.М. Карп. // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.

[45] **Ченцов А.Г.** Метод динамического программирования в некоторых версиях задачи коммивояжера с ограничениями / А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов //Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. Вып. 7. С. 217–234.

[46] **Ченцов А.А.** Об одном обобщении задачи курьера / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов //Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. Вып. 8. С. 178–235.

[47] **Ченцов А.Г.** Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования / А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Вестник УГТУ-УПИ. 2004. №15(45) С. 148–151.

[48] **Ченцов А.А.** Обобщенная версия задачи курьера / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Математический и прикладной анализ: сборник научных трудов, Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2005. Вып. 2. С. 238–280.

[49] **Ченцов А.А.** О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2007. Т. 13, №3. С. 136–160.

[50] **Ченцов А.Г.** О структуре одной экстремальной задачи маршрутизации / А.Г. Ченцов // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. №1. С. 127–150.

[51] **Ченцов А.Г.** Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений / А.Г. Ченцов // ДАН. 2008, Т. 423, № 3. С. 303–307.

[52] **Ченцов А.А.** О решении задачи маршрутной оптимизации методом динамического программирования / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Автоматика и телемеханика. 1998. №9. С. 117–129.

[53] **Ченцов А.А.** К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием "незамкнутой" задачи коммивояжера / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Автоматика и телемеханика, №11, 2002. С. 151–166.

[54] **Ченцов А.А.** Экстремальная задача маршрутизации "на узкие места" с ограничениями в виде условий предшествования / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т. 14. №2. С.129–142.

[55] **Ченцов А.А.** Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, №3. С. 183–201.

[56] **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. Москва – Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.

[57] **Ченцов А.Г.** Множества, события, вероятность (основные структуры). / А.Г. Ченцов. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. 200 с.

[58] **Chentsov A.G.** Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem. / A.G. Chentsov, L.N. Korotayeva // Mathematical and computer modelling. 1997. Vol. 25. №1. P. 93–105.

[59] **Chentsov A.A.** Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem: the influence of inexact calculations / A.A. Chentsov, A.G. Chentsov // Mathematical and computer modelling. 2001. Vol. 33. P. 801–819.

[60] **Flood M.M.** The Travelling Salesman Problem / M.M.Flood // Opns. Res. 1956. Vol,4. P. 61–75.

[61] **Henry-Labordere A.L.** The record-balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized travelling salesman problems / A.L. Henry-Labordere // R.I.R.O. 1969. Vol. 3, №2. P. 43–49.

[62] **Laporte G.** Generalized travelling salesman problems through n-sets of nodes: an integer programming approach / G. Laporte, Y. Nobert // INFOR. 1983. Vol. 21, №1. P. 61–75.

[63] On the solution of travelling salesman problems / **D. Applegete** [et al.] // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 3: Invited Lectures. Berlin, 1998, August, P. 645–656.

Александр Николаевич СЕСЕКИН
Алексей Александрович ЧЕНЦОВ
Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Учебное пособие

Зав. редакцией
физико-математической литературы *А. П. Погода*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 10.02.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,00.