

Ю. В. Ремез

# КАЧКА КОРАБЛЯ



**Р37**

**УДК 629.12.073.243.4(075.8)**

Рецензенты: кафедра теории корабля Ленинградского кораблестроительного института, канд. техн. наук **Ю. А. Нецветаев**

**Ремез Ю. В.**

**Р37 Качка корабля. Л.: Судостроение, 1983 — 328 с., ил.**

**ИСБН**

На основе методов гидромеханики и теории случайных процессов в книге изложена теория качки корабля, решена краевая задача о колебаниях контура на поверхности жидкости и вычислены присоединенные массы и коэффициенты демпфирования, содержится линейная теория качки на косом регулярном волнении, определены статистические характеристики качки на нерегулярном волнении, приведена методика гидродинамического расчета волновых нагрузок, описаны особенности нелинейной теории качки на тихой воде, регулярном и нерегулярном волнении, рассмотрены принципы стабилизации корабля. Основные теоретические результаты доведены до расчетных методик, графиков и алгоритмов.

Книга предназначена для студентов специальности «Судостроение и судоремонт», может также служить пособием для аспирантов и инженеров.

**Р 3605030000—027**  
**048(01)—83** 9—83

**39.47**

За последние десятилетия теория качки корабля благодаря использованию методов гидромеханики идеальной жидкости и теории случайных процессов получила значительное развитие. Это потребовало коренной перестройки учебного курса в направлении постепенного отказа от традиционных подходов и перехода к его построению на основе гидродинамической теории и теоретико-вероятностных методов.

Читая этот курс на протяжении многих лет в Николаевском ордена Трудового Красного Знамени кораблестроительном институте имени адмирала С. О. Макарова, автор, используя труды отечественных и зарубежных ученых, а также результаты собственных исследований, последовательно осуществлял такую перестройку. Она касалась как научного уровня и содержания, так и методики изложения курса. Обобщению накопленного при этом опыта и посвящена предлагаемая книга.

В настоящее время построение линейной гидродинамической теории качки на регулярном волнении и спектральной теории качки на нерегулярном волнении можно считать практически законченным. Разработанные на основе этих теорий алгоритмы и системы программ для ЭВМ дают возможность рассчитать статистические характеристики качки при произвольном курсе корабля на трехмерном нерегулярном волнении, а также горизонтальный и вертикальный изгиб и кручение корпуса.

Изложению линейной теории, занимающей центральное место и являющейся основным рабочим аппаратом современного учения о качке, посвящена значительная часть книги. Изложению этой теории предпослана специальная глава, в которой решается весьма важная как с научной, так и с практической точки зрения задача об определении гидродинамических характеристик качки. К сожалению, ограни-

1

ченный объем книги не позволил привести общее решение этой задачи для произвольной частоты колебаний. В связи с этим в книге рассмотрены предельные случаи очень низких и очень высоких частот, а для произвольных частот даны вычисленные на ЭВМ таблицы значений присоединенных масс и коэффициентов демпфирования шпангоутных контуров, пригодные для непосредственного использования в практике расчетов.

Не удалось уделить достаточно внимания некоторым вопросам нелинейной теории качки и стабилизации корабля, а приобретающий все большее значение вопрос о качке на мелководье вообще не рассмотрен в книге. В список литературы включены только учебники и монографии.

Отзывы на книгу просьба направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство «Судостроение».

### § 1. Общие сведения о мореходности и качке корабля

Под *мореходностью* принято понимать способность корабля безопасно плавать и выполнять все соответствующие его назначению задачи при ветре и волнении моря.

Непосредственное действие ветра может вызвать увеличение сопротивления, ухудшение управляемости, дрейф и крен корабля. Ухудшение управляемости и ветровой дрейф несколько осложняют эксплуатацию корабля, но в открытом море при отсутствии с подветренной стороны других кораблей или навигационных опасностей сами по себе безопасности плавания не угрожают. Уменьшение скорости хода корабля, вызываемое ветром, также не является опасным, хотя, естественно, ухудшает его тактико-технические или технико-экономические данные. Требования к остойчивости под действием ветра при условном учете волнения регламентируются Нормами остойчивости морских судов Регистра СССР и другими документами обязательного характера. Требования такого рода имеются и в других странах (странах—членах СЭВ, США, Японии, Югославии и др.). Подходы к нормированию остойчивости в разных странах различны, но ни один из них не учитывает и не может учесть всех особенностей действия аэро-гидродинамических сил и механизма опрокидывания корабля. Вследствие этого все нормы остойчивости содержат некоторый элемент условности. Однако, несмотря на это, их выполнение обеспечивает весьма высокую, хотя и не стопроцентную, гарантию неопрокидывания под действием ветра.

В результате воздействия волнения возникают волновой дрейф и качка корабля. Волновой дрейф, как доказано многочисленными исследованиями, весьма мал и должен учитываться лишь в задачах о позиционировании (удержании в фиксированной точке) кораблей, осуществляющих спасательные работы или бурение морского дна. В условиях свободного плавания он влияния на мореходность не оказывает. Таким образом, мореходность корабля определяется, в первую очередь, характером его качки, которая может повлечь за собой ряд неблагоприятных, а иногда и катастрофических последствий.

За счет роста сопротивления воды и ухудшения условий работы пропульсивной установки («разгон» винтов и главных двига-

телей) качающийся корабль теряет скорость. На встречном волнении это уменьшение скорости иногда бывает настолько велико, что приводит к потере управляемости — корабль перестает слушаться руля. Управляемость ухудшается и на попутном волнении, когда снижается устойчивость корабля на курсе. На попутном волнении, кроме того, падает остойчивость и иногда наблюдается опасное явление, называемое брочингом, при котором корабль захватывается волной и разворачивается лагом<sup>1</sup>.

На встречном волнении может иметь место так называемый *слеминг* — удары волн в периодически оголяющуюся носовую часть днища, а также заливание палубы накатывающейся волной, которое нередко приводит к нарушению прочности надстроек, повреждению палубных устройств, смыву за борт плохо закрепленных грузов. Корабли, имеющие значительный развал носовых шпангоутов, помимо днищевых, могут испытывать и бортовой слеминг. При значительной скорости на относительно коротких встречных волнах может появиться низкочастотная вибрация корпуса.

За счет периодического изменения величины и формы погруженной части корабля, качающегося на волнении, а также за счет скоростей и ускорений качки, на корпус действуют знакопеременные гидродинамические нагрузки, вызывающие его изгиб в вертикальной плоскости, а на косом волнении, кроме того, изгиб в горизонтальной плоскости и кручение.

Вследствие наличия ускорений на корпусные конструкции, механизмы и устройства действуют силы инерции, ухудшающие условия их работы. Нормальная работа высокооборотных механизмов затрудняется также гироскопическими силами, обусловленными угловыми скоростями качки. Наклонения вокруг продольной оси и угловые ускорения корабля могут вызвать опасное смещение насыпных грузов.

Длительное воздействие линейных ускорений на вестибулярный аппарат внутреннего уха человека является причиной болезненного состояния пассажиров и команды, называемого *укачиванием* или морской болезнью. Люди, впервые находящиеся на качающемся корабле, страдают морской болезнью примерно в 90% случаев, а имеющие некоторый «опыт» — вдвое реже, вовсе не укачиваются на море всего 6—8%. Основными симптомами морской болезни являются головокружение, холодный пот, тошнота, рвота; в легких случаях — чувство усталости и головная боль. Для профилактики укачивания применяют так называемые противогистаминные препараты (димедрол и др.), однако они не всегда оказываются эффективными. Кроме того, ряд препаратов этой

---

<sup>1</sup> *Лагом к волне* называется такое положение корабля, при котором его диаметральной плоскости, перпендикулярна направлению распространения волн. Если направление распространения волн и диаметральной плоскости параллельны, то волнение называется *продольным*.

группы вызывает общую слабость и сонливость, в связи с чем их не должны принимать члены экипажа, работа которых требует быстрой психической и двигательной реакции. Безотказно действующих фармакологических средств для борьбы с укачиванием не существует, а специальная физическая тренировка во многих случаях также не достигает цели.

Большинство перечисленных последствий качки затрудняет эксплуатацию корабля, ухудшает его обитаемость, тактико-технические данные или технико-экономическую эффективность, создает стрессовые условия работы экипажа, однако сами по себе они не являются катастрофическими. Вместе с тем иногда качка влечет за собой последствия катастрофического характера. Чрезмерно большие углы наклона, снижение остойчивости на попутном волнении, бросинг и смещение насыпных грузов могут привести к опрокидыванию корабля, а знакопеременные динамические нагрузки — к перелому корпуса. Эти аварии относятся к катастрофам самого тяжелого характера, так как происходят настолько быстро, что обычно сопровождаются гибелью почти всех находящихся на борту людей, которые не успевают воспользоваться спасательными средствами.

Характерно, что, несмотря на известные факторы научно-технического прогресса на морском флоте (увеличение размеров кораблей, их энерговооруженности и скорости, автоматизация контроля и управления режимом работы пропульсивной установки, наличие на борту факсимильной аппаратуры, принимающей карты прогнозов гидрометеорологической обстановки, автоматизация судовождения), воздействие шторма остается до настоящего времени одной из основных причин гибели судов.

Интересно отметить, что по данным ИМО<sup>1</sup> воздействие шторма приводит к авариям и таким судам, которые удовлетворяют расчетным критериям безопасности по остойчивости и прочности.

В связи с изложенным изучение качки и разработка средств и методов ее уменьшения (стабилизация корабля) является традиционной задачей теории корабля, привлекающей к себе пристальное внимание исследователей уже более ста лет. «Никакие средства не могут считаться излишними для уменьшения качки», — писал по этому поводу известный русский флотоводец и ученый адмирал С. О. Макаров.

Качка, как и любой колебательный процесс, характеризуется амплитудой, периодом или частотой и сдвигом фаз колебаний корабля по отношению к волне. Иногда вместо амплитуды используется термин «розмах качки», под которым понимается удвоенная амплитуда.

Для того чтобы корабль обладал хорошей мореходностью, его качка должна быть плавной и умеренной, т. е. иметь большие

---

<sup>1</sup> ИМО — Международная морская организация. СССР является членом ИМО.

периоды и малые амплитуды. Кроме того, на положении корабля относительно взволнованной поверхности моря, а следовательно, на заливаемости, слеминге, «разгоне» винтов и главных двигателей, существенно сказывается разность фаз колебаний той или иной точки корабля и поверхности воды. Так, например, если в момент наибольшего наклона на нос последний находится на подошве волны, а корма — на вершине, фазы будут благоприятными как для носа, так и для кормы. Если в рассматриваемый момент наибольшего наклона на нос последний находится на вершине волны, а корма — на подошве, то фазы будут для обеих оконечностей неблагоприятными (колебательные процессы происходят в противофазе). Возможны также случаи, когда фаза для одной оконечности или вообще для некоторой точки корабля благоприятна, а для другой нет.

Добиться хорошей мореходности можно, используя следующие пути: целенаправленное назначение основных элементов корабля в процессе проектирования; надлежащее распределение грузов; рациональный выбор скорости хода и курса относительно волн; применение специальных устройств, называемых успокоителями качки.

Рассматривая качающийся корабль как твердое тело с шестью степенями свободы, различают шесть видов качки: продольно-горизонтальную—поступательные колебания вдоль продольной оси; поперечно-горизонтальную—поступательные колебания вдоль поперечной оси; вертикальную—поступательные колебания вдоль вертикальной оси; бортовую—вращательные колебания вокруг продольной оси; килевую — вращательные колебания вокруг поперечной оси; рысканье — вращательные колебания вокруг вертикальной оси.

Совокупность продольно-горизонтальной, вертикальной и килевой качки принято называть продольной качкой, а совокупность рысканья, поперечно-горизонтальной и бортовой качки — боковой.

Между вертикальной, бортовой и килевой качкой, с одной стороны, и продольно-горизонтальной, поперечно-горизонтальной и рысканьем, с другой, существует принципиальное различие. Первые три вида качки, называемые иногда основными, представляют собой колебания относительно положения устойчивого равновесия, а вторые, называемые дополнительными, — относительно безразличного.

Если придать кораблю некоторое вертикальное перемещение или наклонить относительно продольной или поперечной оси, то возникнут силы, стремящиеся возвратить его в положение равновесия (восстанавливающие силы), и корабль, предоставленный самому себе, будет совершать на тихой воде<sup>1</sup> колебания, назы-

<sup>1</sup> Вода называется тихой при отсутствии на ее поверхности свободных волн, вызывающих качку. Если находящийся на этой поверхности корабль совершает то или иное движение, то на ней возникают волны, вызываемые этим движением. Такие волны называются *вынужденными*.

ваемые свободными или собственными. Если же сместить корабль на некоторое расстояние вдоль продольной или поперечной оси или повернуть вокруг вертикальной, то восстанавливающие силы не возникнут и свободных колебаний он совершать не будет.

Таким образом, на тихой воде дополнительные виды качки сами по себе существовать не могут и лишь сопровождают основные, возникая вследствие специфики формы обводов корабля. На волнении наличие дополнительных видов качки, помимо указанных причин, обуславливается знакопеременным характером действующих сил.

В линейной теории качки<sup>1</sup> действующие на корабль гидродинамические силы можно разделить на три категории: восстанавливающие, инерционно-демпфирующие и возмущающие. Возмущающие силы, в свою очередь, делятся на главную и дифракционную части. В нелинейной теории такое разделение, строго говоря, недопустимо, однако при приближенном подходе к составлению уравнений качки оно иногда используется.

Восстанавливающие силы, как уже упоминалось, возникают только при основных видах качки. Эти силы, стремящиеся вернуть корабль в положение равновесия, при вертикальной качке обусловлены плавучестью корабля, а при бортовой и килевой — его поперечной и продольной остойчивостью.

Главная часть возмущающих сил определяется полем давлений набегающих на корабль волн без учета тех искажений, которые вносятся в это поле эффектом присутствия самого корабля.

Инерционно-демпфирующие и дифракционная часть возмущающих сил возникают вследствие тех возмущений, которые вносятся кораблем в поле давлений окружающей жидкости. При этом инерционно-демпфирующие силы обусловлены возмущениями, вносимыми качкой в тихую воду, а дифракционные — искажениями в поле давлений свободно распространяющихся волн, вызываемыми присутствием корабля как препятствия на пути их распространения. Инерционная составляющая гидродинамических сил связана с механической инертностью забортной воды, а демпфирующая — с ее вязкостью и наличием свободной поверхности, на которой при качке образуются вынужденные волны. Как инерционно-демпфирующие, так и дифракционные силы выражаются через присоединенные массы и коэффициенты демпфирования корабля, которые называются гидродинамическими характеристиками качки.

---

<sup>1</sup> Теория качки называется *линейной*, если в силу принятых допущений движение корабля описывается линейными дифференциальными уравнениями, и *нелинейной*, если в ней рассматриваются нелинейные уравнения движения.

## § 2. Краткий исторический очерк и современное состояние теории качки

Начало изучению качки было положено в середине XVIII в. работами Л. Эйлера, П. Бугера, Д. Бернулли.

Приняв в качестве математической модели корабля, качающегося на тихой воде, обычный математический маятник, Эйлер и Бугер получили формулы для периодов свободных колебаний. Теория бортовой качки на волнении была впервые предложена Д. Бернулли. И хотя она основывалась на неправильном допущении о характере волнового движения жидкости, в ней был сделан весьма важный вывод о резком увеличении амплитуды качки при резонансе, т. е. при равенстве периода волны и периода свободных колебаний корабля.

Более близкой к современным воззрениям была теория бортовой качки корабля, расположенного лагом к волнам синусоидального профиля, созданная в 1861 г. В. Фрудом. В этой теории поперечные размеры корабля полагались очень малыми по сравнению с длиной и высотой волны. Из этого предположения следовало, что центр тяжести корабля движется по круговой траектории как частица жидкости, находящаяся на взволнованной поверхности.

Способы учета влияния соизмеримости поперечных размеров корабля и размеров волны разрабатывали Э. Бертен и Б. Сен-Венан. Предложенные ими поправочные коэффициенты несколько уточняли численные результаты теории Фруда, однако не приводили к ее принципиальному усовершенствованию и не давали возможности применить ее к расчету бортовой качки на косом волнении и тем более к расчету килевой качки.

Принципиально новая теория качки, свободная от допущения Фруда о малости размеров корабля, была создана в конце прошлого века А. Н. Крыловым. Основываясь на гипотезе о том, что на каждую точку смоченной поверхности корабля действует такое же давление, какое имело бы место в соответствующей точке пространства, занятого свободно распространяющимися волнами, А. Н. Крылов в 1895 г. создал линейную теорию килевой качки, а в 1897 г. обобщил ее на все шесть видов качки корабля на косом регулярном<sup>1</sup> волнении.

Теория А. Н. Крылова, получившая всеобщее признание и широкое распространение, сыграла выдающуюся роль в исследовании качки корабля. Дальнейшее развитие теории качки шло по трем основным направлениям: учет возмущений, вносимых присутствием и качкой корабля в поле давлений окружающей жидкости; учет конечности амплитуд качки и нелинейного характера зависимости демпфирующих сил от скорости колебаний; учет

---

<sup>1</sup> Волнение называется *регулярным*, если характеристики всех волн совершенно одинаковы.

нерегулярности (хаотического характера) реального морского волнения.

Первое из этих направлений привело к созданию гидродинамической, второе — нелинейной и третье — вероятностной теорий качки. Эти направления были predeterminedены самим А. Н. Крыловым, который ввел в свои дифференциальные уравнения демпфирующие силы, предложил пути учета влияния развала бортов на продольную качку и формы диаграммы статической остойчивости на бортовую, на численном примере продемонстрировал существенное влияние на характеристики качки небольшого различия в периодах следующих друг за другом волн.

Если строго следовать основной гипотезе А. Н. Крылова о независимости поля давлений окружающей жидкости от присутствия и качки корабля, то при расчете качки следует ограничиться учетом только восстанавливающих и главной части возмущающих сил. Такой подход привел бы к преувеличению амплитуд, особенно заметному в области резонанса. Для устранения этого недостатка А. Н. Крылов, несколько отступив от основной гипотезы своей теории, ввел в расчет демпфирующие силы, что было первым шагом на пути учета возмущений, вносимых в жидкость качкой корабля, и привело к лучшему согласованию теории с экспериментом.

Дальнейшим шагом на этом пути был предложенный Г. Е. Павленко метод относительных скоростей и ускорений. Согласно этому методу демпфирующие силы, действующие на шпангоут, рассчитывали не по абсолютным, а по относительным скоростям колебаний, а инерционные определяли как произведения присоединенных масс на относительные ускорения. При этом под относительной вертикальной скоростью шпангоута понималась разность его абсолютной вертикальной скорости и производной по времени от возвышения свободной поверхности жидкости, взятой в движущейся вместе с кораблем, но не качающейся системе координат. Аналогично вычисляли и относительное ускорение. Силы, действующие на весь корабль, находили суммированием сил, действующих на его шпангоуты.

Хотя метод относительных скоростей и ускорений не был теоретически обоснован, его использование приводило к значительному уточнению структуры дифференциальных уравнений качки. В частности, учет скоростей и ускорений свободной поверхности жидкости вносил существенные поправки в выражения для возмущающих сил, придавая им в случае отсутствия хода корабля структуру, аналогичную той, которая была получена впоследствии методами гидродинамической теории качки.

Вместе с тем, при наличии хода расчет качки, основанный на указанном выше способе вычисления скоростей и ускорений волнующейся жидкости (дифференцирование в подвижных координатах), приводил к физически неоправданным результатам. Предложенные П. Ф. Папковичем коррективы к расчету скоростей и ускорений волнового движения, состоящие в переходе к диффе-

ренцированию в неподвижных координатах, привели к дальнейшему уточнению формул для возмущающих сил.

Строгий учет возмущений, вносимых плавающим телом в волнующуюся жидкость предельно малой глубины, был впервые осуществлен Н. Е. Жуковским в 1907 г. Решение этой задачи, явившееся предпосылкой гидродинамической теории качки, было обобщено А. М. Басиным на случай одновременного наличия качки и дрейфа и использовано В. Н. Анфимовым для определения влияния мелководья на распределение давлений по корпусу судна.

Важные научные результаты в области теоретической и прикладной гидродинамики, полученные в работах отечественных ученых в предвоенные годы, и, в первую очередь, исследование Н. Е. Кочина по теории волн, вызываемых колебаниями тела под поверхностью жидкости, создали основу для построения теории качки, свободной от гипотезы А. Н. Крылова, т. е. теории, учитывающей гидродинамические эффекты, обусловленные качкой корабля и дифракцией набегающих волн. Такая теория, получившая название гидродинамической теории качки, была создана в середине 40-х гг. М. Д. Хаскинсом.

В первых работах по гидродинамической теории качки в качестве математической модели реального корабля использовалась известная в теории волнового сопротивления модель корабля, имеющего малое отношение ширины к длине. Эта модель, называемая тонким кораблем или кораблем типа Мичелла, дает возможность построить вполне корректную теорию продольной качки в рамках линейной теории волн, не требуя наложения ограничений на скорость хода. Позднее наряду с тонким в гидродинамической теории рассматривался так называемый удлиненный корабль, для которого нормаль к смоченной поверхности можно полагать перпендикулярной к продольной оси.

В большом цикле работ М. Д. Хаскинсом были развиты методы определения действующих на корабль сил и гидродинамических характеристик качки, исследована гидродинамика качки на тихой воде при различных видах начальных возмущений, в рамках линейной теории при косвенном учете нелинейности решена задача о волновом сопротивлении корабля на волнении, разработан способ оценки заливаемости и рассмотрен ряд других вопросов, связанных с проблемой мореходности корабля.

Из гидродинамической теории качки следует, что отказ от основной гипотезы А. Н. Крылова не отвергает построенной им теории, а требует дополнения ее учетом сил, связанных с возмущениями, которые вносятся кораблем в окружающую жидкость, т. е. инерционно-демпфирующих и дифракционных сил. В связи с этим в гидродинамической теории качки возмущающие силы делятся на две части: главную, соответствующую гипотезе А. Н. Крылова, и дифракционную, учитывающую эффект присутствия корабля как препятствия на пути распространения волн.

Определение главной части возмущающих сил не вызывает принципиальных затруднений и может производиться либо по оригинальной методике, предложенной А. Н. Крыловым, либо более простыми способами, развитыми В. Н. Анфимовым, С. Н. Благовещенским, А. В. Герасимовым, В. А. Мореншильдт, Г. Е. Павленко, Ю. В. Ремезом, Ю. К. Усачевым, Ю. И. Фаддеевым и другими авторами.

Инерционно-демпфирующие и дифракционные силы для корабля типа Мичелла определяют на основе решения трехмерной краевой задачи для потенциала скоростей возмущенного волнового движения жидкости, а для удлиненного корабля — выражают через присоединенные массы и коэффициенты демпфирования, которые, как уже упоминалось, называются гидродинамическими характеристиками качки.

Поскольку в гидродинамической теории качки забортная вода рассматривается как идеальная жидкость, этой теорией учитывается только демпфирование, обусловленное затратой качающимся кораблем энергии на образование системы расходящихся от него вынужденных волн (волновое демпфирование). Демпфирование вязкостной природы, связанное с трением и вихреобразованием, гидродинамической теорией не учитывается и строгому теоретическому расчету почти не поддается. В тех случаях, когда оно играет существенную роль, например при бортовой качке, его учет производят косвенным путем, главным образом на основе экспериментальных данных.

Определение присоединенных масс и коэффициентов демпфирования с учетом трехмерного характера обтекания корабля вызывает значительные трудности. В связи с этим, исходя из концепции удлиненного корабля, в теории качки обычно пренебрегают влиянием кривизны ватерлиний и скорости хода на гидродинамические характеристики и находят последние на основании решения плоской краевой задачи о колебаниях шпангоутных контуров на поверхности жидкости с последующим суммированием по длине корабля. Этот метод определения гидродинамических характеристик качки называется методом плоских сечений.

Плоская краевая задача о вынужденном волновом движении жидкости, вызванном колебаниями контура, пересекающего свободную поверхность, впервые была решена М. Д. Хаскинсом методом конформных отображений и Ф. Урселлом методом гидродинамических особенностей. В последнем случае потенциал скоростей вынужденного волнового движения ищут как сумму потенциалов источника или диполя и мультиполей, расположенных в точке пересечения вертикальной оси симметрии контура и ватерлинии.

Другой вариант метода гидродинамических особенностей был использован для решения рассматриваемой краевой задачи В. Франком, который строил математическую модель контура с помощью источников, распределенных по системе хорд, образующих вписанный в него многоугольник.

В отечественной практике наибольшее распространение получили методы М. Д. Хаскинда и Ф. Урселла.

А. З. Салькаев на основе теоретического решения М. Д. Хаскинда рассчитал гидродинамические характеристики качки аналитических контуров, близких по форме к корабельным шпангоутам, при различных значениях отношения ширины к осадке, коэффициента полноты и частоты колебаний. В. А. Поздеев и В. В. Дыхта, воспользовавшись методом приближенных конформных отображений, предложили достаточно простой способ расчета гидродинамических характеристик для аналитических контуров несколько иной формы.

Пользуясь методом Ф. Урселла, Я. М. Элис рассчитал гидродинамические характеристики качки для обычных и накренных контуров в жидкости конечной глубины, Ю. Н. Пашенко — для контуров, заданных теоретическим чертежом, Э. В. Коханов — для контуров, колеблющихся на поверхности двухслойной жидкости.

Определению гидродинамических характеристик контуров в неограниченно глубокой жидкости посвящены также работы Ф. Тасаи, О. Грима, Ж. Котюка и В. Мангулиса, а в жидкости конечной глубины — работы П. Г. Авраменко, Ю. М. Гулиева, Й. Ю и Ф. Урселла, С. Кима, У. Портера, Е. Такка.

Краевая задача о потенциале скоростей вынужденного волнового движения жидкости принадлежит к числу нелинейных краевых задач теории потенциала. Решая эту задачу применительно к кораблю типа Мичелла, М. Д. Хаскинд линеаризовал ее, исходя из физических соображений. Более строго к ее линеаризации подошли А. Питерс и Дж. Стокер, которые использовали для этой цели метод малого параметра.

Этот метод решения нелинейных задач, предложенный А. Пуанкаре, состоит в том, что граничные условия и все неизвестные задачи представляются в виде рядов по степеням одного или нескольких малых параметров. Таким путем нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных задач. Кроме того, с принципиальной точки зрения этот метод даёт возможность, сохраняя в разложениях члены, содержащие соответствующие степени малых параметров, получить решение с любой степенью точности.

Выбрав в качестве малого параметра задачи о корабле типа Мичелла отношение ширины к длине («параметр тонкости»), Питерс и Стокер показали, что при продольной качке тонкого корабля инерционно-демпфирующие и дифракционные силы имеют более высокий порядок малости, чем восстанавливающие и главная часть возмущающих сил.

Таким образом, из теории Питерса и Стокера следует, что в первом приближении продольная качка тонкого корабля не вносит возмущений в окружающую жидкость, в результате чего отсутствуют демпфирование и присоединенные массы и при резонансе

возможны неограниченно большие амплитуды. Иными словами, в этом приближении совершенно игнорируются гидродинамические эффекты. Более высоких приближений, учитывающих гидродинамические силы, Питерс и Стокер не вычисляют, указывая, что эта задача сопряжена со значительными трудностями. Несмотря на формальную строгость теории Питерса и Стокера, с практической точки зрения их выводы представлялись сомнительными, ибо отсутствие учета присоединенных масс и демпфирования приводит к противоречащим опыту результатам. Одну из причин этого противоречия можно искать в том, что Питерс и Стокер применяют один и тот же малый параметр для характеристики геометрии корабля и его динамики. Вместе с тем, как указал Н. Н. Моисеев, возможность характеризовать факторы различной природы одним и тем же параметром является дискуссионной.

Дж. Ньюман объясняет указанное расхождение тем, что восстанавливающие и главная часть возмущающих сил, учитываемые теорией Питерса и Стокера, играют решающую роль лишь при нерезонансных режимах качки. В области резонанса, представляющей наибольший практический интерес, эта роль переходит к силам второго порядка малости, т. е. к инерционно-демпфирующим и дифракционным силам.

Ньюманом было дано наиболее полное решение задачи о качке тонкого корабля на встречном волнении в жидкости неограниченной глубины. В этом решении получены выражения для сил первого и второго порядка малости, что позволяет применять его при всех режимах качки, в том числе и при резонансных.

Для линейризации краевой задачи об определении потенциала скоростей возмущенного движения жидкости и нахождения действующих на корабль гидродинамических сил Ньюман ввел три малых параметра: «параметр тонкости», безразмерную амплитуду качки и отношение полувысоты набегающих волн к их длине. Результаты Ньюмана, совпадая в своей основе с результатами М. Д. Хаскинда, вносят в последние ряд уточнений.

Ведущиеся работы по освоению континентального шельфа, практика работы промысловых судов, плавание по крупным водохранилищам и другие потребности флота выдвинули задачу распространения гидродинамической теории качки на случай мелководья (жидкости конечной глубины).

Методы определения гидродинамических характеристик шпангоутных контуров в жидкости конечной глубины, как уже упоминалось, разработаны рядом авторов, а особенности расчета возмущающих сил рассмотрены В. А. Степановым и Ю. В. Ремезом. Некоторые вопросы качки корабля, не имеющего хода, на мелководье были изучены М. Д. Хаскиндром. Линейризованная гидродинамическая теория качки тонкого корабля как тела с шестью степенями свободы, движущегося на косом волнении в жидкости конечной глубины, была построена Ю. В. Ремезом. В этой теории

использованы трехпараметрические разложения в форме, предложенной Ньюманом.

Гидродинамика качки тонкого корабля, движущегося на взволнованной поверхности жидкости конечной глубины по круговому пути, изучена Л. М. Дыхтой. Е. М. Коганом решена трехмерная гидродинамическая задача о качке в жидкости конечной глубины катамарана, корпуса которого рассматриваются как корабли типа Мичелла. Ю. Л. Воробьев применил к исследованию продольной качки метод сращиваемых асимптотических разложений. Последний предусматривает раздельное использование метода малого параметра в двух областях, на которые делится поток, — внешней и внутренней. Затем производится сращивание (гладкое соединение) решений, полученных для каждой из этих областей. Таким образом отыскивают приближенное решение задачи, пригодное для всего потока.

В течение последних 25—30 лет появился ряд работ, в которых развита гидродинамическая теория качки применительно к жидкости со сложными границами. Так, О. Ф. Васильев предложил метод расчета присоединенных масс при вертикальной качке корабля в камере судоходного шлюза и показал, что при этом присоединенная масса возрастает в десятки раз по сравнению со случаем качки в неограниченной жидкости и может значительно превышать действительную массу жидкости в камере. Н. Н. Моисеевым изучена качка без хода в ограниченном объеме жидкости, Э. А. Пержняно — качка в жидкости неограниченной глубины между двумя параллельными стенками, В. А. Степановым — качка над существенно неровным дном или подводным препятствием, на отмели, вблизи вертикальной стенки в жидкости конечной глубины.

В линейной теории качки удлиненного корабля в 50—60-е гг. оставался дискуссионным вопрос об учете скорости хода при определении инерционно-демпфирующих и дифракционных сил. Этот вопрос представлял большой теоретический и практический интерес, так как предложенные рядом авторов дифференциальные уравнения, отличающиеся способом учета скорости, приводили к существенным различиям в численных результатах расчета качки.

Проведенное исследование показало, что та или иная форма коэффициентов дифференциальных уравнений, зависящих от скорости хода, определяется наличием или отсутствием учета кривизны ватерлиний при определении гидродинамических сил, с одной стороны, и отнесением граничных условий обтекания к мгновенному или средним по углам килевой качки и рысканья положениям корабля, — с другой.

К настоящему времени практически установилась общая точка зрения на структуру дифференциальных уравнений как продольной, так и боковой качки удлиненного судна.

Коэффициенты уравнений продольной качки, впервые предложенные Ю. В. Ремезом в 1963 г., были впоследствии с помощью

различных методик получены точно в таком же виде Ю. А. Нецветавым, Х. Зёдингом, Ф. Тасаи и М. Такаги, Дж. Вюгтсом. Формулы для коэффициентов уравнений боковой качки были в одинаковом виде опубликованы Ю. В. Ремезом и В. А. Степановым, Ф. Тасаи, Дж. Вюгтсом. Уравнения продольной и боковой качки, опубликованные Н. Сальвесеном, Е. Такком и О. Фальтинсеном, для всех кораблей, кроме имеющих погруженную транцевую корму, полностью совпадают с уравнениями перечисленных выше авторов.

Несколько по иному осуществляется учет скорости корабля в уравнениях продольной качки, предложенных Д. М. Ростовцевым. Однако это не приводит к существенным различиям в результатах численных расчетов.

Одно из основных допущений линейной теории качки — допущение о малости амплитуд — не дает возможности применить ее к решению ряда важных задач, связанных, в первую очередь, с экстремальными условиями плавания, когда амплитуды настолько велики, что корабль находится под угрозой опрокидывания. Более того, линейная теория не всегда может быть использована и в целях расчета качки малой амплитуды, например для кораблей с весьма малой или отрицательной начальной метацентрической высотой или низкобортных кораблей, у которых уже при малых углах наклона входит в воду палуба либо оголяется днище. Определение сопротивления воды движению корабля на волнении, исследование взаимного влияния продольной и боковой качки, анализ захвата и разворота корабля попутной волной также должны производиться на основе нелинейной теории качки.

На протяжении длительного времени нелинейная теория ограничивалась рассмотрением влияния нелинейного характера восстанавливающего момента на бортовую качку на тихой воде и на регулярном волнении и лишь в последние два-три десятилетия в число объектов ее изучения вошла гидродинамическая задача о качке конечной амплитуды.

Задача об определении периода бортовой качки на тихой воде при нелинейном восстанавливающем моменте сводится к вычислению некоторого несобственного интеграла по формулам квадратур. Из многочисленных предложенных для этой цели способов наиболее точными являются способы Г. Е. Павленко и М. Г. Крейна—В. Г. Сизова, в которых для устранения особенности в подынтегральной функции используют замену переменной интегрирования. Весьма простая приближенная формула для определения периода получена Г. Е. Павленко с помощью метода коллокации. Этот метод состоит в том, что приближенное решение дифференциального или интегрального уравнения (в данном случае дифференциального уравнения качки) находится из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках.

Особенности бортовой качки корабля с заданной диаграммой остойчивости на регулярном волнении исследовали А. М. Басин, С. Н. Благовещенский, А. Н. Крылов, В. В. Луговский, В. Г. Па-

вленко, Г. Е. Павленко, Ю. И. Фаддеев, М. Д. Хаскинд, Г. М. Хорошанский, К. Вендель и другие авторы. Эти исследования показали, что учет нелинейности восстанавливающего момента существенно влияет на характер зависимости амплитуды качки от частоты возмущающей силы. В частности, обнаружилось, что определенным значениям частоты может соответствовать не одно, как в линейной теории, а три или пять значений амплитуды. При этом некоторые из них отвечают устойчивым режимам движения, наблюдаемым в опыте, а некоторые — неустойчивым, которые физически не реализуются.

Бортовая качка представляет значительную опасность для низкобортных кораблей, у которых на палубе могут скапливаться большие массы воды. В изучение проблемы обеспечения безопасности таких кораблей на волнении наиболее существенный вклад внесли В. В. Гарькавый и Н. Н. Рахманин.

Вертикальные перемещения корабля на волнении вызывают периодическое изменение важного параметра бортовой качки — восстанавливающего момента, в связи с чем при определенных условиях ее амплитуда может существенно возрасти.

Это явление, называемое параметрическим возбуждением колебаний, или параметрическим резонансом, изучалось как в рамках линейной теории качки, так и с учетом нелинейности диаграммы статической остойчивости. Его исследованию посвящены работы Г. К. Авдеева, А. М. Басина, В. В. Луговского, В. В. Семенова-Тян-Шанского, В. Г. Сизова, Л. Н. Стреляева, Х. Баумана, О. Грима, Дж. Паулинга и Р. Розенберга.

В. В. Луговским было исследовано взаимное влияние продольной и боковой качки корабля, идущего под произвольным курсовым углом по отношению к регулярным волнам малой амплитуды. Эта задача тесно связана с проблемой остойчивости корабля на попутном волнении, которая изучалась теоретическими и экспериментальными методами С. Н. Благовещенским, Е. В. Пергаевым, В. Н. Салтовской, Н. Б. Севастьяновым, В. В. Семеновым-Тян-Шанским, В. Арндтом, С. Кастнером, Дж. Паулингом, С. Роденом. Наиболее обстоятельные исследования и обобщения этой проблемы выполнены И. К. Бородаевым и Ю. И. Нечаевым.

При движении корабля на попутном волнении он иногда «захватывается» волнами. Сущность этого явления, называемого брочингом, состоит в следующем. Когда скорость корабля достигает 60—80% скорости попутной волны<sup>1</sup>, длина которой соизмерима с его длиной, дополнительная энергия, сообщаемая кораблю волнами, может оказаться достаточной для того, чтобы он начал двигаться со скоростью последних. При этом мидель располагается на переднем склоне волны, «захватившей» корабль.

---

<sup>1</sup> На глубокой воде скорость волны (в узлах) равна  $2,43\sqrt{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны (в метрах); на мелководье скорость уменьшается.

Волна может «захватить» и быстроходный корабль, скорость которого превышает скорость волн. В этом случае мидель располагается на заднем склоне волны.

В режиме захвата корабль, как правило, становится неустойчивым на курсе и входит в самопроизвольную циркуляцию, разворачиваясь лагом к волне. Во время разворота на переднем склоне волны корабль сильно накреняется как вследствие выполняемой на большой скорости крутой циркуляции, так и за счет непосредственного действия волны, гребень которой «наваливается» на корабль. Возникающая при этом интенсивная бортовая качка может привести к опрокидыванию корабля. Эта опасность является вполне реальной для кораблей небольшой длины (до 20—25 м). Исследованию условий захвата и остойчивости при бродинге посвящены труды Д. М. Ананьева, А. Ш. Афремова, Ю. В. Горшенникова, Ю. Л. Макова, В. А. Мореншильдт, О. Грима, К. Давидсона и других авторов.

Построение гидродинамической теории качки конечной амплитуды вызывает большие трудности, связанные, в первую очередь, со сложностью нелинейной краевой задачи теории вынужденных волн, вызываемых качкой конечной амплитуды и движением нетонкого корабля с конечной скоростью хода. Для приближенного решения нелинейных задач широко используют метод малого параметра, позволяющий провести их последовательную линеаризацию. С помощью этого метода В. В. Луговский исследовал гидродинамику бортовой качки конечной амплитуды. Он предложил двухпараметрические разложения в ряды всех основных неизвестных и граничных условий задачи. В качестве одного из малых параметров им была избрана безразмерная амплитуда бортовой качки, в качестве второго — безразмерная амплитуда сопровождающих ее других видов качки.

Двухпараметрические разложения В. В. Луговский использовал и для рассмотрения килевой и вертикальной качки корабля типа Мичелла на продольном волнении. В качестве малых параметров этой задачи были выбраны «параметр тонкости» и безразмерная амплитуда качки и в разложениях сохранялись члены второго порядка малости по последнему параметру. Однако при такой форме метода малого параметра для учета дифракционных эффектов требуется сохранение малых еще более высоких порядков, что связано со значительными трудностями.

Хаотический характер реального морского волнения, не подчиняющегося никаким видимым закономерностям, послужил основанием к тому, чтобы рассматривать волнение и вызываемую им качку как случайные процессы и привлечь к их изучению вероятностные методы. Эта идея была впервые высказана в 1934—1935 гг. Г. Е. Павленко и А. Н. Крыловым, по рекомендации которого Ю. А. Крутков исследовал бортовую качку корабля на нерегулярном волнении, рассматривая ее как аналогичную броуновскому движению. Однако до начала 50-х гг. попытки построить

вероятностную теорию качки не привели к ощутимым результатам. Это было связано, в первую очередь, с отсутствием в то время законченной теории случайных процессов, которая позднее нашла широкое применение в задачах радиоэлектроники, теории автоматического управления и оказалась наиболее подходящим для изучения нерегулярной качки разделом теории вероятностей.

Первые работы, посвященные исследованию нерегулярной качки методами теории случайных процессов, появились в 1953 г. одновременно в СССР (А. И. Вознесенский, А. П. Воробьев, А. А. Свешников и С. С. Ривкин, А. Н. Тупысев) и США (М. Сен-Дени и У. Пирсон).

Наиболее плодотворным оказалось предложенное в работах А. И. Вознесенского и Г. А. Фирсова, А. Н. Тупысева, Сен-Дени и Пирсона применение спектрального подхода, согласно которому нерегулярное волнение и качка как сложные колебательные движения представляются в виде суммы простых гармонических колебаний различных частот. При этом в рамках линейной теории качки корабль рассматривается как линейная динамическая система, преобразующая входной процесс волнения в выходной процесс качки.

При преобразовании случайного процесса линейными динамическими системами каждая гармоническая составляющая спектра входного процесса преобразуется в гармоническую составляющую спектра выходного процесса той же частоты, но другой амплитуды. Величина последней зависит от отношения амплитуды качки корабля на регулярном волнении к амплитуде набегающих на него волн. Таким образом, вероятностная теория качки не лишает практического смысла теорию качки на регулярном волнении, а включает ее в себя в качестве неотъемлемой части, без которой расчет качки на нерегулярном волнении невозможен.

В развитие спектральной теории качки на нерегулярном волнении и ее приложений, помимо названных выше авторов основополагающих работ, существенный вклад внесли И. К. Бородай, А. В. Герасимов, Д. В. Кондриков, В. Б. Липис, В. В. Луговский, В. А. Мореншильдт, В. А. Некрасов, Ю. А. Нецветаев, Н. Н. Рахманин, Н. Б. Севастьянов и ряд других авторов.

Вероятностные методы получили широкое распространение в строительной механике корабля (Г. В. Бойцов, В. В. Екимов, В. В. Козляков, Я. И. Короткин, А. А. Курдюмов, А. И. Максимаджи, Э. Льюис, Н. Норденстрем, Дж. Фукуда), в расчетах судовых устройств (М. Н. Александров, Б. А. Бугаенко, Ю. Д. Жуков, А. Е. Поляков) и других отраслях судостроительной науки.

Наряду с построением линейной теории нерегулярной качки, внимание исследователей привлекали также и нелинейные задачи, т. е. задачи, в которых динамические свойства корабля описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Наиболее эффективным методом решения таких задач является метод статистической линеаризации, состоящий в замене нелиней-

ных характеристик динамической системы эквивалентными им в статистическом смысле линейными. Этот метод, широко применяемый в задачах теории автоматического управления, был предложен И. Е. Казаковым и Р. Бутоном.

С помощью статистической линеаризации Г. А. Фирсов рассмотрел бортовую качку на нерегулярном волнении при нелинейном демпфировании. Аналогичная задача с разработкой схемы практических вычислений была решена Г. Д. Журавицким. М. Д. Агеев применил этот метод к расчету качки корабля с заданной диаграммой остойчивости, а В. В. Луговский использовал его для решения более сложной задачи, когда не только восстанавливающий, но и возмущающий момент является нелинейной функцией угла крена. В. П. Шестопал с помощью метода статистической линеаризации изучил качку судна с сыпучим грузом на нерегулярном волнении, рассматривая угол естественного откоса груза, которым определяется вызванная пересыпанием поправка к восстанавливающему моменту, как случайную величину.

А. В. Герасимов, предложив энергетический критерий статистической эквивалентности линейных и нелинейных систем, отличающийся от применяемых в теории автоматического управления, построил общую теорию нелинейной бортовой качки на нерегулярном волнении.

Следует, однако, отметить, что в упомянутых работах по нелинейной теории нерегулярной качки корабль рассматривался как тело с одной степенью свободы, т. е. игнорировалось влияние других видов качки на бортовую. Это обстоятельство может внести заметные погрешности в результаты расчетов.

Одновременно с развитием учения о качке велись работы по созданию средств и методов стабилизации корабля.

Для облегчения выбора курса и скорости корабля на волнении рядом авторов (С. Н. Благовещенский, В. Г. Власов, Л. М. Ногид, Ю. В. Ремез, Г. Бекер, Х. Дьюсинбер, Рок) предложены диаграммы для выбора благоприятных сочетаний курса и скорости корабля на волнении, исключающих усиленную качку.

Большое внимание в разных странах уделялось теоретическим исследованиям и разработке различных систем успокоителей качки: было предложено несколько сот разновидностей успокоителей. Однако практическое применение на кораблях получили только несколько конструкций, обеспечивающих достаточно высокую эффективность стабилизации и удовлетворяющих требованиям надежности, экономичности, простоты и удобства эксплуатации. К ним относятся скуловые кили, поворотные подводные крылья, различного рода жидкостные цистерны.

Эффективность скуловых килей была показана свыше ста лет тому назад опытами В. Фруда. Примерно столько же времени применяют и жидкостные цистерны, впервые предложенные в 1881 г. Уотсом. Идею использования для успокоения качки поворотных подводных крыльев высказал в 1894 г. С. О. Макаров.

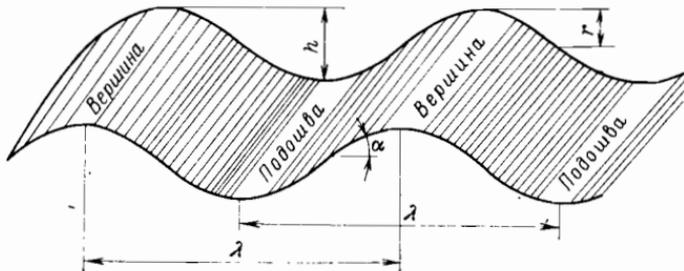
В практике такие успокоители, получившие название бортовых управляемых рулей, были впервые применены в 1923 г. по предложению С. Мотора. В настоящее время этот тип успокоителя рассматривается как наиболее перспективный.

В разработку теории успокоителей качки существенный вклад внесли А. Н. Крылов, И. Г. Бубнов, а позднее С. Н. Благовещенский, Н. А. Заботкин, М. Е. Мазор, В. А. Мореншильдт, Г. Е. Павленко, Г. А. Фирсов, А. Н. Холодилин, Г. М. Хорошанский, А. Н. Шмырев и ряд других советских и зарубежных исследователей.

ПРОГРЕССИВНЫЕ  
ВОЛНЫ

## § 3. Основные уравнения теории гравитационных волн малой амплитуды

Рассмотрим гравитационные волны на поверхности, неограниченно глубокой идеальной жидкости. Гравитационные волны возникают вследствие того, что частицы жидкости, выведенные из положения равновесия, возвращаясь под действием силы тяжести к этому положению, будут совершать колебательные движения. К гравитационным относятся ветровые волны, зыбь, волны, вызываемые движением тел в жидкости, приливные волны, возникающие вследствие притяжения жидкости Солнцем и Луной.



1.1. Элементы волны.

В гидродинамической теории волн обычно используют следующие термины и определения:

высота волны  $h$  — вертикальное расстояние между вершиной и подошвой (рис. 1.1);

амплитуда волны  $r$  — ее полувысота;

длина волны  $\lambda$  — горизонтальное расстояние между вершинами или подошвами двух смежных волн;

период волны  $\tau_0$  — интервал времени между прохождением вершин или подошв двух смежных волн через фиксированную вертикаль;

фазовая скорость волны  $c$  — скорость перемещения ее профиля в горизонтальном направлении;

уклон взволнованной поверхности  $\alpha$  — угол между горизонтальной плоскостью и касательной к волновому профилю в данной ее точке.

Волны, профиль которых перемещается в горизонтальном направлении, называются *прогрессивными*, в противном случае — *стоячими*.

Если характеристики всех волн совершенно одинаковы, волнение называется *регулярным*, в противном случае — *нерегулярным*. Регулярного волнения в природе не существует и это лишь одна из возможных математических моделей реального морского волнения. Из существующих видов волнения наиболее близка к регулярному мертвая зыбь, представляющая собой свободные колебания поверхности моря при полном безветрии. Зыбь возникает из ветровых волн при выходе последних из зоны действия ветра либо после его прекращения.

Волновое движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, которая представляет собой модель воды в теории волн и гидродинамической теории качки, суть движение *безвихревое*. Для того чтобы в этом убедиться, следует обратиться к известной в классической гидромеханике теореме Томсона. Эта теорема гласит, что *в идеальной баротропной жидкости<sup>1</sup>, находящейся под действием потенциальных массовых сил, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, состоящему из одних и тех же частиц жидкости, не зависит от времени*. Следствием этой теоремы является теорема Лагранжа, утверждающая, что *движение такой жидкости, возникающее из состояния покоя, будет безвихревым*.

Действительно, если в какой-либо момент времени в определенном объеме жидкости циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю, то, обращаясь к теореме Томсона, можно утверждать, что в этом объеме она всегда была и будет равна нулю. Когда данный объем жидкости находится в покое, то, очевидно, циркуляция скорости равна нулю. Следовательно, когда он придет в движение, циркуляция также останется равной нулю. Но в векторном анализе доказывается, что циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря этого вектора через поверхность, опирающуюся на данный контур. Это утверждение называется теоремой Стокса. Таким образом, если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, лежащему в данном объеме жидкости, равна нулю, то вихри в нем отсутствуют.

На принятую модель воды как идеальную несжимаемую тяжелую жидкость распространяются теоремы Томсона и Лагранжа, т. е. ее волновое движение, как возникающее из состояния покоя, будет безвихревым.

Безвихревое движение обладает потенциалом скоростей  $\phi$ , определение которого и представляет собой первоочередную задачу теории волн. Будем решать эту задачу в неподвижной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , плоскость  $O_1x_1y_1$ , которой совпадает с невоз-

---

<sup>1</sup> *Баротропной* называется жидкость, плотность которой зависит только от давления. Несжимаемая жидкость, плотность которой постоянна, есть частный случай баротропной жидкости.

мушенной свободной поверхностью, а положительная ось  $O_1z_1$  направлена вверх. Для простоты записи индекс 1 в обозначениях координатных осей временно отбросим.

Как известно из гидромеханики, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

где  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  — проекции скорости жидкости на соответствующие оси. В случае безвихревого движения

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, убедимся, что потенциал скоростей должен являться гармонической функцией, т. е. удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

в области, занятой жидкостью. Кроме того, потенциал должен удовлетворять кинематическим и динамическим граничным условиям.

Представим уравнение взволнованной поверхности в виде

$$z = \zeta(x, y, t).$$

Тогда кинематическое граничное условие, выражающее то обстоятельство, что свободная поверхность состоит из одних и тех же частиц жидкости, будет иметь вид

$$v_z = \frac{d\zeta}{dt} \text{ при } z = \zeta, \quad (1.1)$$

где  $v_z = \partial\Phi/\partial z$  — вертикальная скорость частиц, а  $d\zeta/dt$  — вертикальная скорость свободной поверхности. Но поскольку  $\zeta = \zeta(x, y, t)$ , имеем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Так как амплитуду волн полагаем малой, то можем пренебречь производными  $\partial\zeta/\partial x$  и  $\partial\zeta/\partial y$ , характеризующими углы наклона взволнованной поверхности к горизонту. Кроме того, это же предположение позволяет считать все граничные условия на свободной поверхности выполняющимися не при  $z = \zeta$ , а при  $z = 0$ . Тогда для кинематического условия (1.1) получим формулу

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \text{ при } z = 0. \quad (1.2)$$

Ограничиваясь случаем неограниченно глубокой жидкости, запишем условие затухания волнового движения на большой глубине в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi = 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \quad (1.3)$$

Динамическое граничное условие на свободной поверхности состоит в том, что во всех ее точках давление постоянно и равно атмосферному. Запишем интеграл Лагранжа — Коши в линеаризованной форме, пренебрегая квадратом скорости волнового движения как малой второго порядка,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz = F(t),$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости, а  $g$  — ускорение силы тяжести.

Введем новую функцию  $\varphi^{(1)}$ , определяемую равенством

$$\varphi^{(1)} = \varphi - \int_0^t F(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - F(t)$$

и интеграл Лагранжа — Коши примет вид

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + gz = 0. \quad (1.4)$$

Введем теперь функцию  $\varphi^{(2)}$ , связанную с  $\varphi^{(1)}$  соотношением

$$\varphi^{(2)} = \varphi^{(1)} + \frac{p_0}{\rho} t,$$

где  $p_0$  — давление на свободной поверхности жидкости, равное атмосферному давлению. Как легко видеть,

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t} - \frac{p_0}{\rho}.$$

Подставив это значение производной в равенство (1.4) и отбросив для простоты записи верхние индексы у функции  $\varphi$ , окончательно можем написать

$$\frac{p - p_0}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz = 0.$$

При  $z = \zeta(x, y, t)$ , т. е. на свободной поверхности, последнее условие примет вид

$$\frac{\partial \varphi(x, y, \zeta, t)}{\partial t} + g\zeta = 0.$$

Учитывая малость амплитуд волн, можно производную  $\partial\varphi/\partial t$  брать не при  $z = \zeta$ , а при  $z = 0$ . Таким образом, имеем

$$\frac{\partial\varphi(x, y, 0, t)}{\partial t} + g\zeta = 0.$$

Отсюда следует весьма важная формула для ординат профиля волны (возвышения взволнованной поверхности над плоскостью  $z = 0$ )

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Продифференцировав это выражение по времени, найдем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi(x, y, 0, t)}{\partial t^2}.$$

Если теперь подставить полученный результат в условие (1.2), то получим единое динамико-кинематическое граничное условие на свободной поверхности

$$g \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \text{ при } z = 0. \quad (1.6)$$

Это условие совместно с уравнением Лапласа и условием затухания волнового движения на неограниченно большой глубине формулирует краевую задачу теории гравитационных волн малой амплитуды или линейной теории волн. Последнее название связано с тем, что искомая функция  $\varphi$  или, точнее говоря, ее производные, входят в упомянутые соотношения линейно.

#### § 4. Плоские прогрессивные волны

Рассмотрим случай, когда характеристики регулярных волн не зависят от координаты  $y$ , т. е. во всех плоскостях, параллельных плоскости  $Oxz$ , движение одинаково. Такие волны называются плоскими.

Для отыскания потенциала плоских прогрессивных волн воспользуемся методом Фурье разделения переменных, представив функцию  $\varphi(x, z, t)$  в виде произведения

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0(t) \varphi_1(x, z).$$

Тогда условие на свободной поверхности (1.6) примет вид

$$g \varphi_0 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \ddot{\varphi}_0 \varphi_1 = 0,$$

или

$$\frac{g}{\varphi_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\ddot{\varphi}_0}{\varphi_0},$$

где точками обозначены символы дифференцирования по времени.

В последнем равенстве левая часть зависит только от координат, а правая — только от времени. Это возможно лишь в том случае, когда обе части равны постоянной, которую обозначим через  $\sigma_0^2$ . Заметим, что если в качестве постоянной выбрать отрицательную величину, то полученное решение не будет удовлетворять условиям периодичности во времени и конечности поля скоростей (при неограниченном возрастании времени функция  $\varphi$  будет стремиться к бесконечности).

Итак, имеем равенство

$$-\frac{\ddot{\varphi}_0}{\varphi_0} = \sigma_0^2,$$

которое, очевидно, представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}_0 + \sigma_0^2 \varphi_0 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_0 = A_1 e^{i\sigma_0 t} + A_2 e^{-i\sigma_0 t}, \quad (i^2 = -1).$$

Поскольку  $\varphi_0$  суть вещественная функция времени, условимся во всех выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель  $e^{i\sigma_0 t}$ , принимать во внимание только действительную часть. Тогда полученное решение для функции  $\varphi_0$  можно переписать в форме

$$\varphi_0 = A e^{i\sigma_0 t},$$

где  $A$  — комплексное число.

Таким образом, для функции  $\varphi$  будем иметь следующее выражение:

$$\varphi = A e^{i\sigma_0 t} \varphi_1(x, z). \quad (1.7)$$

При этом функция  $\varphi_1$  должна, очевидно, удовлетворять уравнению Лапласа для плоского движения

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (1.8)$$

и граничному условию на свободной поверхности. Но если функция  $\varphi$  определяется выражением (1.7), то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\sigma_0^2 \varphi$$

и условие на свободной поверхности (1.6) примет вид

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma_0^2 \varphi = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1.9)$$

Имея в виду равенство (1.7), сократим в обоих членах последней формулы величину  $Ae^{i\sigma_0 z}$ . Тогда окончательно можем написать

$$g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \sigma_0^2 \varphi_1 = 0 \text{ при } z = 0. \quad (1.10)$$

Для определения  $\varphi_1$  вновь используем метод Фурье, положив

$$\varphi_1(x, z) = X(x)Z(z).$$

Тогда из уравнения Лапласа (1.8) получим

$$X''Z + XZ'' = 0,$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z},$$

где штрихами обозначено дифференцирование по своим переменным.

Вследствие того, что в последнем равенстве левая часть есть функция только  $x$ , а правая — только  $z$ , оно может существовать лишь в том случае, когда обе части равны постоянной величине. Обозначим ее через  $-k^2$ . Если в качестве постоянной выбрать положительную величину, то полученное решение будет состоять из непериодической функции  $x$  и периодической функции  $z$ , что противоречит физической картине волнового движения. Итак, приняв

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} = -k^2,$$

получаем дифференциальные уравнения:

$$X'' + k^2 X = 0;$$

$$Z'' - k^2 Z = 0,$$

решения которых имеют вид:

$$X = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx};$$

$$Z = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}.$$

Учитывая вещественный характер функции  $X(x)$ , в полученном решении можно сохранить всего одно (любое) слагаемое. В связи с этим примем

$$X = B e^{-ikx}.$$

В решении для  $Z(z)$ , как легко убедиться, следует положить  $C_2 = 0$ . Действительно, условие затухания волнового движения с ростом глубины требует, чтобы при  $z \rightarrow -\infty$  скорость частиц стремилась к нулю. Это значит, что при  $z \rightarrow -\infty$  потенциал также должен обращаться в нуль (либо несущественную постоянную).

Если же величина  $C_2 \neq 0$ , то при  $z \rightarrow -\infty$  функция  $Z(z)$ , а вместе с нею и потенциал, будут неограниченно возрастать.

Таким образом, имеем

$$Z = Ce^{kz}$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = BCe^{kz - ikx}. \quad (1.11)$$

Заметим, что постоянная  $\sigma_0$ , называемая частотой волны, и  $k$ , называемая волновым числом, не являются независимыми. Связь между ними устанавливается из условия (1.10) для функции  $\varphi_1$  на свободной поверхности.

Подставляя в это условие следующее из формулы (1.11) значение производной  $\partial\varphi_1/\partial z = k\varphi_1$ , имеем

$$\sigma_0^2 = gk \text{ или } \sigma_0 = \sqrt{gk}.$$

Период волны  $\tau_0$  определяется по формуле

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sigma_0}.$$

Итак, используя полученные выражения для  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , можем написать

$$\varphi = ABCe^{kz + i(\sigma_0 t - kx)}.$$

Ординаты профиля волны найдем, пользуясь формулой (1.5)

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{g} ABCi \sigma_0 e^{i(\sigma_0 t - kx)}.$$

Очевидно, что выражение  $-ABCi\sigma_0/g$  представляет собой амплитуду волны  $r$ . Таким образом, профиль волны имеет вид косинусоиды

$$\zeta = r e^{i(\sigma_0 t - kx)} = r \cos(\sigma_0 t - kx).$$

Из равенства

$$-\frac{1}{g} ABCi \sigma_0 = r$$

получаем

$$ABC = i \frac{g}{\sigma_0} r$$

и, следовательно, формула для потенциала приобретает вид

$$\varphi = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz + i(\sigma_0 t - kx)}. \quad (1.12)$$

Для определения положения вершин волн следует в уравнении профиля положить  $\cos(\sigma_0 t - kx) = 1$ , т. е.

$$\sigma_0 t - kx = 2n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

или

$$x = \frac{\sigma_0}{k} t - \frac{2n\pi}{k}.$$

Отсюда видно, что вершины перемещаются вдоль положительного направления оси  $Ox$  с постоянной скоростью

$$c = \frac{\sigma_0}{k},$$

называемой фазовой скоростью волн. С такой же скоростью перемещается и весь профиль волны. Такие волны, как уже упоминалось, называются прогрессивными.

Длина волны  $\lambda$  может быть найдена как разность абсцисс двух соседних вершин

$$\lambda = x_m - x_{m+1} = \frac{2\pi}{k},$$

откуда следует соотношение

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Поскольку  $\sigma_0 = \sqrt{gk}$ , можно установить зависимость фазовой скорости от длины волны

$$c = \frac{\sigma_0}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Уклон взволнованной поверхности  $\alpha$  определяется формулой

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = kr \sin(\sigma_0 t - kx).$$

Наибольший уклон  $\alpha_0$  будет

$$\alpha_0 = kr = \frac{2\pi}{\lambda} r, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha_0}{\pi} = \frac{2r}{\lambda}.$$

Таким образом, наибольший уклон взволнованной поверхности составляет такую же долю от  $\pi$  (в градусном исчислении от  $180^\circ$ ), какую высота волны составляет от ее длины.

Подставляя в формулы для периода, частоты и фазовой скорости волн значения  $k$ ,  $g$  и  $\pi$ , получим

$$\tau_0 = 0,8 \sqrt{\lambda}; \quad \sigma_0 = \frac{7,85}{\sqrt{\lambda}}; \quad c = 1,25 \sqrt{\lambda}.$$

Значения длины волны в этих формулах выражаются в метрах, период — в секундах, а фазовая скорость — в метрах в секунду.

Важной особенностью волн малой амплитуды является независимость их фазовой скорости, периода и частоты от амплитуды.

Величина амплитуды свободно распространяющихся волн линейной теорией не определяется и в практике ее находят по различным эмпирическим формулам. Часто для этой цели используют формулу Циммермана

$$r = 0,085 \lambda^{3/4}.$$

Для определения траектории частицы запишем горизонтальную и вертикальную компоненты ее скорости в виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i(\sigma_0 t - kx)};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ik \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i(\sigma_0 t - kx)}.$$

Имея в виду малость отклонения частицы от ее положения равновесия в спокойной воде, упростим эти уравнения, заменив в правых частях  $x$  на  $x_0$  и  $z$  на  $z_0$ , где  $x_0$  и  $z_0$  — координаты частицы в спокойной воде. Тогда, проинтегрировав, получим:

$$x = -i r e^{kz_0+i(\sigma_0 t - kx_0)} + D_1;$$

$$z = r e^{kz_0+i(\sigma_0 t - kx_0)} + D_2.$$

Поскольку при отсутствии волнового движения ( $r = 0$ ) координаты частицы  $x = x_0$ ,  $z = z_0$ , очевидно, что  $D_1 = x_0$ ,  $D_2 = z_0$ . Тогда, учитывая что в выражениях, содержащих сомножитель  $e^{i\sigma_0 t}$ , принимается во внимание только действительная часть, можем написать:

$$x - x_0 = r e^{kz_0} \sin(\sigma_0 t - kx_0);$$

$$z - z_0 = r e^{kz_0} \cos(\sigma_0 t - kx_0).$$

Исключив отсюда время, получим уравнение траектории

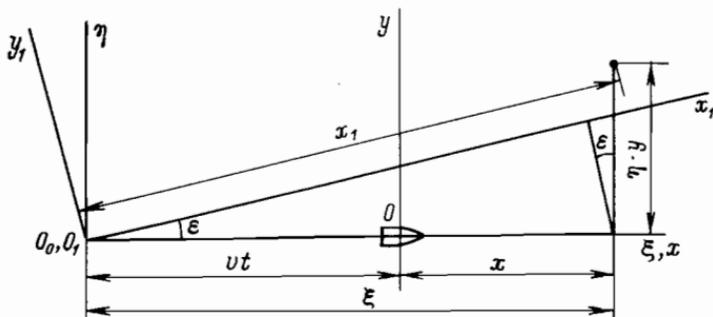
$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = (r e^{kz_0})^2.$$

Очевидно, что в рамках принятого приближения траектории частиц представляют собой окружности, радиусы которых быстро убывают с ростом глубины. Для поверхностных частиц эти радиусы равны амплитуде волны, а на глубине, равной длине волны, падают в 535 раз ( $e^{-2\pi} = 1,867 \cdot 10^{-3} = 1/535$ ).

Поскольку траектории частиц есть замкнутые кривые, перемещения массы жидкости в направлении распространения волн не происходит.

## § 5. Характеристики прогрессивных волн в подвижной системе координат

Выполним теперь некоторые преобразования, имеющие целью выразить характеристики плоских прогрессивных волн (потенциал скоростей, уравнение профиля, уклон взволнованной поверхности, граничное условие на свободной поверхности) в наиболее удобной для практических приложений в теории качки подвижной системе координат  $Oxyz$ , неизменно связанной с кораблем. Вспомним, что оси неподвижной системы, в которой выше определялось волновое движение, мы условились обозначать через  $x_1, y_1, z_1$  и индекс 1 был лишь временно отброшен для простоты записи.



1.2. К определению характеристик волнения в подвижной системе координат.

Если приписать обозначениям осей этот индекс, то формула (1.12) для потенциала скоростей примет вид

$$\varphi = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz_1 + i(\sigma_0 t - kx_1)}$$

Пусть теперь ось  $O_1 x_1$ , совпадающая с вектором фазовой скорости волн, составляет некоторый угол  $\epsilon$  с осью  $O_0 \xi$  неподвижной системы координат  $O_0 \xi \eta \zeta$  (рис. 1.2). При этом плоскость  $O_0 \xi \eta$  совпадает с плоскостью  $O_1 x_1 y_1$ , на ось  $O_0 \zeta$  — с осью  $O_1 z_1$ . Тогда, как легко видеть,

$$x_1 = \xi \cos \epsilon + \eta \sin \epsilon; \quad z_1 = \zeta,$$

и, следовательно,

$$\varphi = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{k \zeta + i[\sigma_0 t - k(\xi \cos \epsilon + \eta \sin \epsilon)]}$$

Перейдем, наконец, к системе координат  $Oxyz$ , связанной с кораблем и имеющей свое начало на ватерлинии равновесия. Предположим, что корабль движется с постоянной скоростью  $v$  вдоль положительной оси  $\xi$ , качка отсутствует и в начальный момент времени  $t = 0$  системы  $Oxyz$  и  $O_0 \xi \eta \zeta$  совпадают. Тогда, очевидно,

$$\xi = vt + x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z \quad (1.13)$$

и формула для потенциала скоростей прогрессивных волн может быть окончательно записана в виде

$$\varphi = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}, \quad (1.14)$$

где 
$$\sigma = \sigma_0 - vk \cos \varepsilon. \quad (1.15)$$

Величина  $\sigma$  называется кажущейся частотой волны и представляет собой частоту, наблюдаемую с движущегося корабля. Соответственно кажущейся частоте существует понятие кажущегося периода волны

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sigma_0 - vk \cos \varepsilon}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней формулы на волновое число  $k$  и имея в виду, что  $\sigma_0/k = c$ , можем переписать эту формулу в виде

$$\tau = \frac{\lambda}{c - v \cos \varepsilon}.$$

Из последнего выражения видно, что  $\tau$  действительно представляет собой период по отношению к движущемуся кораблю, курс которого составляет угол  $\varepsilon$  с фазовой скоростью волн.

Для того, чтобы не смешивать  $\sigma_0$  с  $\sigma$  и  $\tau_0$  с  $\tau$ , частоту  $\sigma_0$  иногда называют истинной частотой, а период  $\tau_0$  — истинным периодом волны.

При отсутствии хода корабля ( $v = 0$ ), либо при ходе лагом к волне ( $\varepsilon = 90^\circ$ ,  $\cos \varepsilon = 0$ ) кажущиеся и истинные частоты (периоды) совпадают.

В граничном условии (1.6) и уравнении свободной поверхности (1.5)

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$\partial \varphi = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{при } z = 0$$

производные по времени вычисляются в неподвижной системе координат (неподвижной точке пространства). В дальнейшем нам будет удобнее символом  $\partial/\partial t$  обозначать производную по времени, вычисленную в подвижной системе координат, т. е. в точке пространства, имеющей неизменные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по отношению к движущемуся кораблю. В связи с этим для производной по времени в неподвижной системе координат от функции, заданной в подвижной системе, введем символ  $\partial_a/\partial t$ . Тогда формулы (1.6) и (1.5) приобретут вид:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial_a^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (1.16)$$

$$\partial \varphi = -\frac{1}{g} \frac{\partial_a \varphi}{\partial t} \quad \text{при } z = 0. \quad (1.17)$$

С точностью, принятой в линейной теории качки, т. е. без учета малых высших порядков, производная  $\partial_a/\partial t$  может быть вычислена в предположении о том, что система координат  $Oxyz$ , неизменно связанная с кораблем, движется вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ , но не качается.

Если полагать, что в момент времени  $t = 0$  системы  $Oxyz$  и  $O_0\xi\eta\zeta$  совпадают, то для неподвижной в пространстве точки с абсциссой  $\xi$ , как видно из рис. 1.2 и формул (1.13), выражение для координаты  $x$  будет иметь вид

$$x = x(t) = \xi - vt. \quad (1.18)$$

Тогда производная  $\partial_a\varphi/\partial t$  определится формулой

$$\frac{\partial_a\varphi}{\partial t} = \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y, z, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Но согласно равенству (1.18),

$$\frac{dx}{dt} = -v$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial_a\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - v \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (1.19)$$

Подставляя последнее соотношение и выражение для потенциала скоростей волнового движения (1.14) в формулу (1.17), получим

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} - v \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{r}{\sigma_0} (\sigma + vk \cos \varepsilon) e^{i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}. \end{aligned}$$

Имея в виду, что согласно равенству (1.15)

$$\sigma + vk \cos \varepsilon = \sigma_0,$$

и учитывая, что в выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель  $e^{i\sigma t}$ , так же как и в выражениях, содержащих множитель  $e^{i\sigma_0 t}$ , принимается во внимание только действительная часть, получим следующую окончательную формулу для ординат прогрессивных волн в случае, когда вектор их фазовой скорости составляет угол  $\varepsilon$  с вектором скорости корабля:

$$\delta = r \cos[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]. \quad (1.20)$$

Уклон взволнованной поверхности  $\alpha$  определяется производной от  $\delta$  по аргументу  $x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon$ . Таким образом

$$\alpha = kr \sin[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)].$$

Для того, чтобы записать граничные условия на свободной поверхности с использованием подвижной системы координат,

необходимо найти вторую производную потенциала скоростей  $\partial_a^2 \varphi / \partial t^2$ . Но, как видно из формулы (1.19), оператор  $\partial_a / \partial t$  дифференцирования по времени в неподвижной системе координат функции, определенной в подвижной системе, движущейся вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ , имеет вид

$$\frac{\partial_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.21)$$

Ему соответствует следующее выражение для оператора  $\partial_a^2 / \partial t^2$ :

$$\frac{\partial_a^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (1.22)$$

Применив последний оператор к функции  $\varphi$  и подставляя полученный результат в равенство (1.16), получим окончательное выражение для граничного условия на свободной поверхности в подвижной системе координат:

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1.23)$$

Полученные выше граничные условия для потенциала скоростей волнового движения и выражения для ординат свободной поверхности жидкости применимы к любым прогрессивным гравитационным волнам малой амплитуды независимо от первопричины их возникновения. Поэтому мы будем пользоваться этими выражениями и для описания возмущенного движения жидкости, вызванного колебаниями шпангоутного контура или корабля в целом, и для набегающих на корабль свободно распространяющихся волн и для дифрагированного волнового движения.

## Глава 2

---

### ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧКИ

#### § 6. Общие формулы для присоединенных масс. Метод плоских сечений

Кажущееся изменение инерционных характеристик твердого тела при ускоренном движении в жидкости было обнаружено экспериментально еще в XVIII в.: в 1776 г. Дюбуа, исследуя малые колебания сферического маятника, наблюдал указанное явление и измерил величину присоединенной массы. Позднее Грин и Стокс дали математическое определение этого понятия и пришли к классическому результату, показав, что присоединенная масса шара

равна половине массы вытесненной им жидкости. Теория неустановившегося движения тела в идеальной жидкости, позволяющая, руководствуясь общими теоремами механики, определить главный вектор и главный момент реакций жидкости, приложенных к телу, без расчета гидродинамических давлений на его поверхности, разрабатывалась Кирхгофом, Томсоном и Тэтом.

Для применения этой теории в расчетах качки требовалось развитие способов определения присоединенных масс корабля при пространственном обтекании или, по крайней мере, — шпангоутных контуров при плоском обтекании<sup>1</sup>. В последнем случае присоединенная масса корабля определяется с помощью метода плоских сечений суммированием (интегрированием) присоединенных масс отдельных шпангоутов, которые находятся исходя из предположения о том, что шпангоут представляет собой поперечное сечение колеблющегося горизонтального цилиндра бесконечной длины. В этом случае обтекание шпангоута при всех видах качки, кроме продольно-горизонтальной, будет носить двухмерный характер и происходить в его плоскости.

Обозначим вектор и момент количества движения твердого тела через  $K$  и  $L$ , а главный вектор и главный момент внешних сил без учета реакций жидкости — через  $F_0$  и  $M_0$ . Дифференциальные уравнения движения этого тела в пустоте будут иметь вид

$$\frac{dK}{dt} = F_0, \quad \frac{dL}{dt} = M_0,$$

где  $d/dt$  — символ производной по времени в неподвижной системе координат.

Пусть теперь тело движется в безграничной несжимаемой идеальной жидкости, покоящейся на бесконечном удалении от тела. Возмущенное движение такой жидкости, как возникающее из состояния покоя (см. теорему Лагранжа § 3), будет безвихревым.

В рамках принятой модели жидкости последняя не оказывает сопротивления движению тела. Однако на него действуют пропорциональные плотности жидкости инерционные гидродинамические силы (реакции жидкости), которые сводятся к главному вектору  $F$  и главному моменту  $M$ . При этом, как известно из классической гидромеханики<sup>2</sup>:

$$F = -\frac{dN}{dt}, \quad M = -\frac{dQ}{dt}, \quad (2.1)$$

где  $N$  — вектор количества движения, а  $Q$  — вектор момента ко-

<sup>1</sup> Под *присоединенной массой шпангоутного контура* или просто шпангоута понимается присоединенная масса, приходящаяся на единицу длины корабля.

<sup>2</sup> В § 17 будет дан вывод формул для инерционно-демпфирующих сил при движении с конечной скоростью и колебаниях тела под свободной поверхностью жидкости. Приведенные здесь выражения для безграничной жидкости получаются как частный случай этих формул.

личества движения, сообщаемого телом окружающей его бесконечной массе жидкости. Векторы  $N$  и  $Q$  определяются выражениями

$$N = -\rho \iiint_S \Phi n dS, \quad Q = -\rho \iiint_S \Phi (r_S \times n) dS.$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  $\Phi$  — потенциал скоростей ее возмущенного движения,  $S$  — поверхность тела,  $n$  — орт внешней (направленной внутрь жидкости) нормали к поверхности  $S$ ,  $r_S$  — радиус-вектор элемента  $dS$ .

Таким образом, дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости будут иметь вид:

$$\frac{dK}{dt} = F_0 + F, \quad \frac{dL}{dt} = M_0 + M$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt}(K + N) = F_0, \quad \frac{d}{dt}(L + Q) = M_0.$$

Сравнивая последние уравнения с уравнениями движения тела в пустоте, заключаем, что при движении в жидкости к главному вектору количество движения тела  $K$  как бы присоединяется добавочное количество движения  $N$ , а к главному моменту количества движения тела  $L$  — добавочный момент количества движения  $Q$ . Это объясняется тем, что при движении тела в жидкости внешние силы должны изменять количество движения не только самого тела, но и количество движения окружающей его жидкости.

Примем некоторую неподвижную относительно тела точку  $O$  за полюс и совместим с ней неизменно связанной с телом системы координат  $Oxyz$ . Обозначим вектор линейной скорости точки  $O$  через  $U$ , а вектор угловой скорости вращения тела вокруг проходящей через эту точку мгновенной оси — через  $\Omega$ . Тогда можно, следуя Кирхгофу, представить потенциал скоростей возмущенного движения жидкости в виде

$$\Phi = U_x \Phi_1 + U_y \Phi_2 + U_z \Phi_3 + \Omega_x \Phi_4 + \Omega_y \Phi_5 + \Omega_z \Phi_6.$$

Проекции векторов  $U$  и  $\Omega$  на координатные оси системы  $Oxyz$  удобно обозначать одной буквой  $U$  с цифровыми индексами, придавая этим обозначениям следующий смысл:

$$U_1 = U_x; \quad U_2 = U_y; \quad U_3 = U_z; \quad U_4 = \Omega_x; \quad U_5 = \Omega_y; \quad U_6 = \Omega_z.$$

С использованием этих обозначений выражение для потенциала приобретает весьма компактную форму

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k. \quad (2.2)$$

Полагая в последнем равенстве  $U_1 = 1 \text{ мс}^{-1}$ , а  $U_2 - U_6$  равными нулю, нетрудно убедиться, что функция  $\Phi_1$  представляет собой потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным поступательным движением тела вдоль оси  $Ox$

с единичной скоростью. Функции  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  имеют аналогичный смысл при движении тела вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$ .

Положив далее  $U_4 = 1 \text{ с}^{-1}$ , а значения  $U_k$  при  $k \neq 4$  равными нулю, увидим, что функция  $\Phi_4$  есть потенциал возмущенного движения жидкости, вызванного равномерным вращением тела вокруг оси  $Ox$  с единичной угловой скоростью. Функции  $\Phi_5$  и  $\Phi_6$  имеют аналогичный смысл, причем первая из этих функций соответствует вращению вокруг оси  $Oy$ , а вторая — вокруг оси  $Oz$ . Поэтому функции  $\Phi_k$  называют в гидромеханике единичными потенциалами. Эти функции должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} = 0$$

в области, занятой жидкостью, условию затухания возмущенного движения на бесконечности и условию обтекания на поверхности тела  $S$ . Последнее условие для идеальной жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_n,$$

где  $u_n$  — нормальная составляющая скорости  $\mathbf{u}$  точки  $\mathbf{r}_S(x, y, z)$  поверхности  $S$ . Поскольку вектор  $\mathbf{u}$  определяется равенством

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_S,$$

можем написать:

$$u_x = U_x + \Omega_y z - \Omega_z y = U_1 + U_5 z - U_6 y;$$

$$u_y = U_y + \Omega_z x - \Omega_x z = U_2 + U_6 x - U_4 z;$$

$$u_z = U_z + \Omega_x y - \Omega_y x = U_3 + U_4 y - U_5 x.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_n &= u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) + u_z \cos(n, z) = \\ &= U_1 \cos(n, x) + U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) + \\ &+ U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + U_5 [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] + \\ &+ U_6 [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]. \end{aligned}$$

Учитывая, что согласно (2.2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sum_{k=1}^6 U_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial n},$$

и приравнявая коэффициенты при  $U_k$  с одинаковыми индексами  $k$  в двух последних формулах, легко убедиться, что на поверхности  $S_1^+$  функции  $\Phi_k$  должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \cos(n, x); & \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= \cos(n, y); & \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} &= \cos(n, z); \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} &= y \cos(n, z) - z \cos(n, y); \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} &= z \cos(n, x) - x \cos(n, z); \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} &= x \cos(n, y) - y \cos(n, x). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Спроектируем векторы  $N$  и  $Q$  на координатные оси, обозначив

$$N_x = N_1; N_y = N_2; N_z = N_3; Q_x = N_4; Q_y = N_5; Q_z = N_6.$$

Тогда получим

$$N_j = -\rho \sum_{k=1}^6 U_k \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (j=1, 2, \dots, 6). \quad (2.4)$$

Обозначив далее

$$-\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = M_{jk},$$

будем иметь

$$N_j = \sum_{k=1}^{6j} M_{jk} U_k. \quad (2.5)$$

В системе координат, неизменно связанной с телом, граничные условия (2.3), а следовательно, и функции  $\Phi_k$ , не зависят от времени. В связи с этим, будучи определенными в этой системе, величины  $M_{jk}$  также не зависят от времени и полностью определяются формой тела и выбором системы координат.

Они имеют размерность массы ( $j, k = 1, 2, 3$ ), статического момента массы ( $j = 1, 2, 3, k = 4, 5, 6$  или  $j = 4, 5, 6, k = 1, 2, 3$ ), момента инерции массы ( $j, k = 4, 5, 6$ ) и называются присоединенными массами или коэффициентами присоединенных масс, так как в уравнениях движения присоединяются (добавляются) к инерционным характеристикам самого тела (массе, статическим моментам, моментам инерции). Иногда, соответственно размерности, величины  $M_{jk}$  называют присоединенными массами, присоединенными статическими моментами или присоединенными моментами инерции.

Очевидно, что  $M_{jk}$  представляют собой некоторые коэффициенты, через которые выражается  $j$ -я проекция гидродинамической инерционной силы или момента при  $k$ -м виде движения тела. Если все компоненты скорости тела  $U_k$  суть малые первого порядка, то в соответствии с формулами (2.1) и (2.5) эта проекция определяется выражением

$$F_j = - \sum_{k=1}^6 M_{jk} U_k, \quad (j=1, 2, \dots, 6),$$

где точка над буквой, как обычно, представляет собой символ дифференцирования по времени.

Индексы  $j$  и  $k$  имеют, очевидно, следующий смысл:  $j = 1$  определяет проекцию силы на ось  $Ox$ ,  $j = 2$  — на ось  $Oy$ ,  $j = 3$  — на ось  $Oz$ ;  $j = 4$  — проекцию момента на ось  $Ox$ ,  $j = 5$  — на ось  $Oy$ ,  $j = 6$  — на ось  $Oz$ . Аналогично индексы  $k = 1, 2, 3$  определяют проекции линейной скорости полюса соответственно на оси  $Ox, Oy, Oz$ , а  $k = 4, 5, 6$  — проекции угловой скорости на те же оси.

Если  $\Phi_j$  и  $\Phi_k$  суть гармонические, т. е. удовлетворяющие уравнению Лапласа функции, то имеет место соотношение

$$\iint_S \left( \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - \Phi_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right) dS = 0,$$

называемое формулой Грина. Из этой формулы следует, что матрица присоединенных масс

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{vmatrix}$$

симметрична относительно главной диагонали, т. е.  $M_{kj} = M_{jk}$ . Это свойство иначе называется свойством парности присоединенных масс. Таким образом, для тела произвольной формы из 36 присоединенных масс независимых будет всего 21. Свойство парности дает возможность считать, что индекс  $k$  определяет проекцию гидродинамической силы или момента, а  $j$  — проекцию векторов линейной или угловой скорости.

Для тела с продольной плоскостью симметрии  $Oxz$  девять присоединенных масс, соответствующих различной четности индексов  $j$  и  $k$ , обращаются в нуль. Если тело имеет две плоскости симметрии (например,  $Oxz$  и  $Oxy$ ), то отличны от нуля лишь восемь присоединенных масс:  $M_{jj}$ ,  $M_{26}$  и  $M_{35}$ . Такое тело можно получить дублированием подводной части корабля относительно плоскости ватерлинии. Подобная модель используется в расчетах управляемости.

В расчетах качки, учитывая большое удлинение корабля, т. е. отношение длины к ширине, можно считать, что угол между нормалью к смоченной поверхности и осью  $Ox$  близок к  $90^\circ$ , т. е. полагать  $\cos(n, x) = 0$ . При таком выборе математической модели корабля, поскольку  $\partial \Phi_j / \partial n = \cos(n, x) = 0$ , присоединенные массы  $M_{1k} = M_{k1}$  также обращаются в нуль. Таким образом, для удлиненного корабля, симметричного относительно диаметральной плоскости, в случае отсутствия начального крена определению подлежат девять присоединенных масс:  $M_{22}$ ,  $M_{33}$ ,  $M_{44}$ ,  $M_{55}$ ,  $M_{66}$ ,  $M_{35}$ ,  $M_{24}$ ,  $M_{26}$ ,  $M_{46}$ .

Если корабль симметричен не только относительно диаметральной плоскости, но и относительно миделя, то при  $j \neq k$  отличным от нуля оказывается только  $M_{24}$ .

Трудность определения присоединенных масс корабля с учетом пространственного характера его обтекания связана с тем, что

потенциалы скоростей пространственного обтекания известны только для небольшого числа тел простейшей формы (шара, эллипсоида вращения, трехосного эллипсоида). Для плоских контуров при соединенные массы определяются значительно проще в связи с тем, что единичные потенциалы  $\Phi_k$  могут быть найдены сравнительно легко с помощью методов конформных отображений или гидродинамических особенностей.

Поскольку корабль представляет собой удлиненное вдоль оси  $Ox$  тело, интегралы по его поверхности  $S$  можно представить в виде

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int f(x, y, z) dl dx, \quad (2.6)$$

где  $L$  — длина корабля, а  $l$  — контур шпангоута. В этой и дальнейших формулах настоящей главы начало подвижной системы координат располагается в точке пересечения плоскостей миделя, диаметральной и ватерлинии; если рассматривается полностью погруженный контур, то ось  $Oy$  считается расположенной посередине его высоты, а плоскость контура обозначается через  $Oyz$ .

На основании формулы (2.6) имеем

$$M_{jk} = -\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \int_{-L/2}^{L/2} \left( -\rho \int_l \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl \right) dx. \quad (2.7)$$

Для двумерного обтекания контура, расположенного в плоскости  $Oyz$ , единичные потенциалы  $\Phi_k$  и  $\Phi_j$  имеют смысл лишь когда  $j, k = 2, 3, 4$ . При этих значениях индексов выражение, стоящее в скобках в формуле (2.7), представляет собой присоединенную массу шпангоута  $\mu_{jk}$

$$\mu_{jk} = -\rho \int_l \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl \quad (2.8)$$

и, следовательно,

$$M_{jk} = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{jk} dx \quad (j, k = 2, 3, 4). \quad (2.9)$$

Таким образом, на основе метода плоских сечений могут быть непосредственно вычислены присоединенные массы  $M_{22}$ ,  $M_{33}$ ,  $M_{24}$ ,  $M_{44}$ . Для вычисления присоединенных масс, отвечающих остальным сочетаниям индексов, воспользуемся следующими соотношениями, справедливыми для удлиненного вдоль оси  $Ox$  тела:

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = z \cos(n, x) - x \cos(n, z) \approx -x \cos(n, z) = -x \frac{\partial \Phi_3}{\partial n};$$

$$\Phi_5 = -x\Phi_3;$$

$$\frac{\partial \Phi_6}{\partial n} = x \cos(n, y) - y \cos(n, x) \approx x \cos(n, y) = x \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}; \quad \Phi_6 = x\Phi_2.$$

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned}
 M_{35} &= - \int_{-L/2}^{L/2} x \left( -\rho \int_l \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dl \right) dx = - \int_{-L/2}^{L/2} x \mu_{33} dx; \\
 M_{55} &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left( -\rho \int_l \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dl \right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mu_{33} dx; \\
 M_{26} &= \int_{-L/2}^{L/2} x \left( -\rho \int_l \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dl \right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} x \mu_{22} dx; \\
 M_{46} &= \int_{-L/2}^{L/2} x \left( -\rho \int_l \Phi_4 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dl \right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} x \mu_{24} dx; \\
 M_{66} &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left( -\rho \int_l \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dl \right) dx = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mu_{22} dx.
 \end{aligned} \right\} (2.10)$$

В случае перехода к новой системе координат, начало которой в исходной системе имеет координаты  $x_0$  и  $z_0$ , а оси остаются параллельными старым осям, формулы для присоединенных масс  $M_{22}$  и  $M_{33}$  сохраняют прежний вид, а для присоединенных статических моментов и моментов инерции — изменяются.

Приписывая величинам, вычисленным в новой системе координат, верхний индекс 0 и ограничиваясь рассмотрением удлиненного корабля, получим:

$$M_{24}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} \int_l \Phi_2 [y \cos(n, z) - (z - z_0) \cos(n, y)] dl dx = M_{24} + z_0 M_{22};$$

$$\begin{aligned}
 M_{44}^0 &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_l (\Phi_4 + z_0 \Phi_2) [y \cos(n, z) - (z - z_0) \cos(n, y)] dl dx = \\
 &= M_{44} + 2z_0 M_{24} + z_0^2 M_{22};
 \end{aligned}$$

$$M_{26}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{22} (x - x_0) dx = M_{26} - x_0 M_{22};$$

$$\begin{aligned}
 M_{46}^0 &= \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{24}^0 (x - x_0) dx = \int_{-L/2}^{L/2} (\mu_{24} + z_0 \mu_{22}) (x - x_0) dx = \\
 &= M_{46} + z_0 M_{26} - x_0 M_{24} - x_0 z_0 M_{22};
 \end{aligned}$$

$$M_{66}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{22} (x - x_0)^2 dx = M_{66} - 2x_0 M_{26} + x_0^2 M_{22};$$

$$M_{35}^0 = - \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{33} (x - x_0) dx = M_{35} + x_0 M_{33};$$

$$M_{55}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{33} (x-x_0)^2 dx = M_{55} + 2x_0 M_{35} + x_0^2 M_{33}.$$

Для учета конечности удлинения корабля, т. е. трехмерного характера обтекания, к величинам  $M_{jk}$  (или  $M_{jk}^0$ ), вычисленным по методу плоских сечений, можно ввести поправочный множитель  $\zeta_L$ , определяемый эмпирической формулой Пабста

$$\zeta_L = \frac{\frac{L}{B}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{B}\right)^2}} \left[ 1 - 0,425 \frac{\frac{L}{B}}{1 + \left(\frac{L}{B}\right)^2} \right],$$

где, очевидно,  $L$  — длина, а  $B$  — ширина корабля.

Наряду с формулой Пабста, коэффициент  $\zeta_L$  может быть вычислен по более простой формуле А. С. Повицкого

$$\xi_L = \frac{1}{1 + 0,8 \frac{B}{L}}.$$

Однако этими формулами учитывается только влияние носового и кормового заострений корабля и не принимается во внимание отклонение линий тока от плоскостей шпангоутов, связанное с наличием хода. Поэтому введение в расчет множителя  $\zeta_L$  вряд ли может существенно уточнить результаты, полученные по методу плоских сечений.

Определим в качестве простейших примеров присоединенные массы круга и эллипса, расположенных в плоскости  $Oyz$  в безграничной жидкости.

Если круг радиуса  $a$  движется вдоль оси  $Oz$  с единичной скоростью, то, как известно из гидромеханики, потенциал скоростей возмущенного движения жидкости будет иметь вид

$$\Phi_3 = -\frac{a^2 z}{y^2 + z^2}.$$

На контуре круга, т. е. при  $y^2 + z^2 = a^2$ , получим

$$\Phi_3 = -z$$

и, следовательно, учитывая выражения (2.8) и (2.3), можем написать

$$\mu_{33} = -\rho \int_l \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dl = \rho \int_l z \cos(n, z) dl.$$

Преобразуем интеграл по замкнутому контуру  $l$ , лежащему в плоскости  $Oyz$ , в интеграл по ограниченной этим контуром пло-

щадн  $\omega$ . Воспользовавшись формулой Остроградского — Гаусса для плоскости

$$\int_l f(y, z) \cos(n, q) dl = \iint_{\omega} \frac{\partial f}{\partial q} d\omega,$$

где  $f$  — непрерывная вместе со своими первыми производными функция, определенная повсюду внутри или вне (в данном случае вне) области  $\omega$ , а  $q$  — произвольное направление в рассматриваемой плоскости, найдем

$$\mu_{33} = \rho \iint_{\omega} d\omega = \rho\omega = \rho\pi a^2.$$

Очевидно, что для круга  $\mu_{22} = \mu_{33}$ , а  $\mu_{24} = \mu_{44} = 0$ .

Таким образом, вычисленные с помощью метода плоских сечений присоединенные массы кругового цилиндра достаточно большой длины  $L$ , движущегося перпендикулярно своей образующей,

$$M_{22} = M_{33} = \rho\pi a^2 L$$

равны массе вытесненной им жидкости.

Рассмотрим теперь расположенный в плоскости  $Oyz$  эллипс с горизонтальной полуосью  $b/2$  и вертикальной  $T$ . На контуре эллипса, движущегося в безграничной жидкости, справедливы следующие представления единичных потенциалов<sup>1</sup>:

$$\Phi_2 = -\frac{2T}{b} y; \quad \Phi_3 = -\frac{b}{2T} z; \quad \Phi_4 = -\frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT} yz. \quad (2.11)$$

Подстановка этих представлений и граничных условий (2.3) в равенство (2.8) и последующее применение преобразования Остроградского — Гаусса приводит к таким результатам:

$$\mu_{22} = \rho \frac{2T}{b} \int_l y \cos(n, y) dl = \rho \frac{2T}{b} \iint_{\omega} d\omega = \rho\pi T^2;$$

$$\mu_{33} = \rho \frac{b}{2T} \int_l z \cos(n, z) dl = \rho \frac{b}{2T} \iint_{\omega} d\omega = \frac{\rho\pi b^2}{4};$$

$$\mu_{24} = \rho \frac{2T}{b} \int_l y [y \cos(n, -z) - z \cos(n, y)] dl = -\rho \frac{2T}{b} \iint_{\omega} z d\omega = 0;$$

$$\mu_{44} = \rho \frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT} \int_l yz [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dl =$$

<sup>1</sup> В § 7 показано; что принятые здесь представления единичных потенциалов для эллипса могут быть получены как частный случай из представлений для так называемых контуров формы Льюиса, которые часто используются в теории корабля в качестве математической модели шпангоутов.

$$= \rho \frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT} \iint_{\omega} (y^2 - z^2) d\omega.$$

Но, как известно,

$$\iint_{\omega} y^2 d\omega = j_z = \frac{\pi b^3 T}{32}; \quad \iint_{\omega} z^2 d\omega = j_y = \frac{\pi b T^3}{8},$$

где  $j_z$  и  $j_y$  — моменты инерции площади эллипса относительно соответствующих осей. Таким образом,

$$\mu_{44} = \frac{\rho\pi}{8} \left( \frac{b^2}{4} - T^2 \right)^2.$$

Интересно отметить, что для эллипса  $\mu_{22}$  не зависит от  $b$ , а  $\mu_{33}$  — от  $T$ . Отсюда следует, что формула, определяющая  $\mu_{22}$  для эллипса, будет справедлива и для вертикальной пластинки высотой  $2T$  и длиной вдоль оси  $Ox$ , равной единице. Аналогично формула, определяющая  $\mu_{33}$  для эллипса, будет одновременно определять собой присоединенную массу горизонтальной пластинки шириной  $2b$  и длиной, равной единице.

## § 7. Присоединенные массы шангоутных контуров

Способ вычисления присоединенных масс шангоутных контуров, получивший широкое распространение в практике расчетов качки, был разработан в 1929 г. Ф. Льюисом. Им предложена следующая функция, реализующая конформное отображение внешности единичного круга в плоскости комплексного переменного  $\tau$  на внешность контуров, близких по форме к дублированным относительно ватерлинии корабельным шангоутам в плоскости  $\zeta$ :

$$\zeta = y + iz = ia_0(\tau + a_1\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}). \quad (2.12)$$

Здесь  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_3$  — действительные постоянные, причем  $a_0$  выражается через  $a_1$ ,  $a_3$  и осадку шангоута  $T$ :

$$a_0 = -\frac{T}{1 + a_1 + a_3}. \quad (2.13)$$

Таким образом, контур Льюиса определяется коэффициентами  $a_1$ ,  $a_3$ , которые должны быть выражены через параметры реального шангоута.

На контуре единичного круга имеем

$$\tau = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (2.14)$$

Подставляя это равенство в формулу (2.12) и отделяя действитель-

ную и мнимую части, получим выражения для ординат точек контура в параметрической форме

$$\begin{aligned} y &= T \frac{(1 - a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta}{1 + a_1 + a_3}; \\ z &= -T \frac{(1 + a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta}{1 + a_1 + a_3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Полагая в формуле для  $y$  угол  $\theta = \pi/2$  (этот угол отсчитывается от отрицательного направления мнимой оси), выразим полуширину шпангоута по ватерлинии  $b/2$  через постоянные  $a_1$  и  $a_3$ :

$$\frac{b}{2} = T \frac{1 - a_1 + a_3}{1 + a_1 + a_3}. \quad (2.16)$$

Таким образом, один из параметров, определяющих контур формы Льюиса, будет иметь вид

$$\frac{2T}{b} = \frac{1 + a_1 + a_3}{1 - a_1 + a_3}. \quad (2.17)$$

Чтобы выразить второй параметр — коэффициент полноты  $\beta$ , найдем сначала площадь шпангоута

$$\omega = 2 \int_{-T}^0 y dz. \quad (2.18)$$

Имея в виду, что согласно (2.15)

$$dz = T \frac{(1 + a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta}{1 + a_1 + a_3} d\theta,$$

из равенства (2.18) получим

$$\omega = \frac{2T^2}{(1 + a_1 + a_3)^2} \int_0^{\pi/2} [(1 - a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta] [(1 + a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta] d\theta.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 n\theta d\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{а} \quad \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin 3\theta d\theta = 0,$$

находим

$$\omega = \frac{\pi}{4} 2T^2 \frac{1 - a_1^2 - 3a_3^2}{(1 + a_1 + a_3)^2}$$

и, следовательно,

$$\beta = \frac{\omega}{bT} = \frac{\pi}{4} \frac{2T}{b} \frac{1 - a_1^2 - 3a_3^2}{(1 + a_1 + a_3)^2}.$$

Принимая во внимание (2.17), окончательно получим

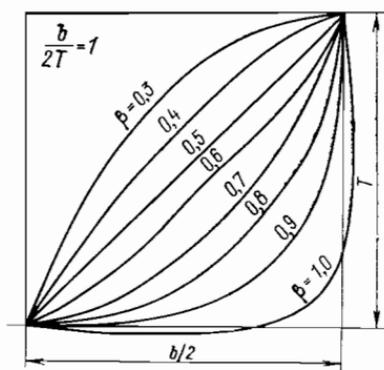
$$\beta = \frac{\pi}{4} \frac{1 - a_1^2 - 3a_3^2}{(1 + a_3)^2 - a_1^2}. \quad (2.19)$$

Таблица 1. Значения коэффициентов  $a_1$  и  $a_3$  для контуров формы Льюиса

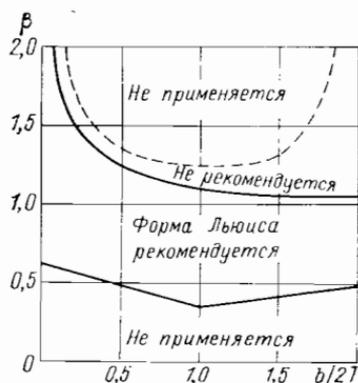
| $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |                 |                 |             |                  |                  |                  |
|----------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-------------|------------------|------------------|------------------|
|                | 0,5                         | 0,6             | 0,7             | $\pi/4$     | 0,8              | 0,9              | 1,0              |
| 0,2            | -0,735<br>0,102             | -0,711<br>0,066 | -0,687<br>0,030 | -0,667<br>0 | -0,663<br>-0,005 | -0,639<br>-0,041 | -0,616<br>-0,076 |
| 0,4            | -0,492<br>0,150             | -0,470<br>0,097 | -0,448<br>0,044 | -0,428<br>0 | -0,425<br>-0,008 | -0,402<br>-0,060 | -0,380<br>-0,113 |
| 0,6            | -0,294<br>0,174             | -0,278<br>0,112 | -0,263<br>0,051 | -0,250<br>0 | -0,248<br>-0,009 | -0,233<br>-0,069 | -0,218<br>-0,129 |
| 0,8            | -0,132<br>0,184             | -0,124<br>0,118 | -0,117<br>0,054 | -0,111<br>0 | -0,110<br>-0,009 | -0,103<br>-0,073 | -0,095<br>-0,138 |
| 1,0            | 0<br>0,186                  | 0<br>0,119      | 0<br>0,055      | 0<br>0      | 0<br>-0,009      | 0<br>-0,074      | 0<br>-0,141      |
| 1,2            | 0,108<br>0,184              | 0,102<br>0,118  | 0,096<br>0,054  | 0,091<br>0  | 0,090<br>-0,009  | 0,084<br>-0,073  | 0,078<br>-0,139  |
| 1,4            | 0,197<br>0,181              | 0,186<br>0,116  | 0,176<br>0,053  | 0,167<br>0  | 0,165<br>-0,009  | 0,155<br>-0,071  | 0,144<br>-0,136  |
| 1,6            | 0,272<br>0,176              | 0,257<br>0,113  | 0,243<br>0,052  | 0,231<br>0  | 0,229<br>-0,009  | 0,215<br>-0,069  | 0,200<br>-0,132  |
| 1,8            | 0,334<br>0,170              | 0,317<br>0,110  | 0,300<br>0,050  | 0,286<br>0  | 0,283<br>-0,009  | 0,266<br>-0,067  | 0,249<br>-0,128  |
| 2,0            | 0,388<br>0,164              | 0,369<br>0,106  | 0,345<br>0,048  | 0,333<br>0  | 0,330<br>-0,008  | 0,312<br>-0,065  | 0,292<br>-0,124  |
| 3,0            | 0,569<br>0,138              | 0,544<br>0,089  | 0,520<br>0,041  | 0,500<br>0  | 0,496<br>-0,007  | 0,472<br>-0,055  | 0,448<br>-0,104  |
| 4,0            | 0,670<br>0,118              | 0,646<br>0,076  | 0,621<br>0,035  | 0,600<br>0  | 0,596<br>-0,006  | 0,572<br>-0,047  | 0,547<br>-0,088  |
| 5,0            | 0,734<br>0,102              | 0,710<br>0,066  | 0,687<br>0,030  | 0,666<br>0  | 0,664<br>-0,005  | 0,640<br>-0,040  | 0,616<br>-0,076  |
| 6,0            | 0,778<br>0,090              | 0,756<br>0,058  | 0,734<br>0,026  | 0,714<br>0  | 0,711<br>-0,004  | 0,688<br>-0,036  | 0,666<br>-0,067  |
| 7,0            | 0,810<br>0,080              | 0,789<br>0,052  | 0,768<br>0,024  | 0,750<br>0  | 0,747<br>-0,004  | 0,726<br>-0,032  | 0,705<br>-0,060  |
| 8,0            | 0,834<br>0,072              | 0,814<br>0,046  | 0,794<br>0,022  | 0,778<br>0  | 0,775<br>-0,004  | 0,756<br>-0,028  | 0,736<br>-0,054  |
| 9,0            | 0,852<br>0,066              | 0,834<br>0,042  | 0,816<br>0,020  | 0,800<br>0  | 0,798<br>-0,003  | 0,779<br>-0,026  | 0,761<br>-0,049  |
| 10,0           | 0,868<br>0,060              | 0,850<br>0,039  | 0,833<br>0,018  | 0,818<br>0  | 0,816<br>-0,003  | 0,798<br>-0,024  | 0,781<br>-0,045  |

Соотношения (2.17) и (2.19) дают возможность выразить  $a_1$  и  $a_3$  через параметры  $2T/b$  и  $\beta$  (табл. 1).

Поскольку этими двумя параметрами полностью определяются ординаты контуров формы Льюиса (рис. 2.1), последние называются двухпараметрическими. Очевидно, что реальный шпангоут и аппроксимирующий его двухпараметрический контур имеют одинаковые коэффициенты полноты и отношения осадки к полуширине, но несколько отличаются друг от друга по форме. Однако для шпангоутов, имеющих традиционные обводы, это обстоятельство почти не сказывается на величине присоединенных масс.



2.1. Контурсы формы Льюиса.



2.2. Области применимости аппроксимации Льюиса.

На рис. 2.2 показаны области, где применение аппроксимации Льюиса рекомендуется, не рекомендуется и не допускается. В последних случаях присоединенные массы могут быть вычислены по теоретическому чертежу или может быть использована предложенная Л. Ландвебером и М. Маканьо трехпараметрическая аппроксимация, в которой аналитический и реальный шпангоуты имеют одинаковые не только  $\beta$  и  $2T/b$ , но и статические моменты относительно ватерлинии.

Определим теперь, следуя М. Д. Хаскинду, комплексные потенциалы  $W_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) возмущенного движения жидкости, вызванного колебаниями контуров формы Льюиса, присоединенные массы для этих контуров и для корабля в целом.

Как известно, комплексный потенциал (характеристическая функция) плоского течения имеет вид

$$W = \Phi + i\Psi,$$

где  $\Phi$  — потенциал скоростей движения жидкости, а  $\Psi$  — функция тока.

Потенциал скоростей  $\Phi$  и функция тока  $\Psi$  связаны соотношениями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

которые в теории функций комплексного переменного называются условиями или уравнениями Коши — Римана.

С учетом этих соотношений и формул для направляющих косинусов нормали к контуру

$$\cos(n, y) = \frac{dz}{dl}; \quad \cos(n, z) = -\frac{dy}{dl},$$

где  $dl$  — длина элемента контура, нормальную составляющую скорости жидкости можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \cos(n, z) = \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{dz}{dl} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{dy}{dl} = \frac{\partial\Psi}{\partial l}. \end{aligned}$$

Но нормальная составляющая скорости на движущемся контуре должна удовлетворять условию обтекания

$$v_n = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) + U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)],$$

где  $U_2$  и  $U_3$  — проекции линейной скорости полюса (точки  $O$  пересечения вертикальной оси симметрии контура и ватерлинии) соответственно на оси  $Oy$  и  $Oz$ , а  $U_4$  — угловая скорость вращения контура вокруг перпендикулярной его плоскости оси  $Ox$ .

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial\Psi}{\partial l} = U_2 \frac{dz}{dl} - U_3 \frac{dy}{dl} - U_4 \left( y \frac{dy}{dl} + z \frac{dz}{dl} \right),$$

или

$$d\Psi = U_2 dz - U_3 dy - U_4 (y dy + z dz).$$

Интегрируя это выражение, получаем (с точностью до несущественной аддитивной постоянной) следующую формулу для функции тока:

$$\Psi = U_2 z - U_3 y - \frac{U_4}{2} (y^2 + z^2).$$

Если теперь, аналогично потенциалу скоростей возмущенного движения жидкости, представить функцию тока в виде

$$\Psi = \sum_{k=2}^4 U_k \Psi_k$$

и приравнять в двух последних формулах коэффициенты при одинаковых компонентах скорости контура  $U_k$ , получим следующие выражения для функций  $\Psi_k$ :

$$\Psi_2 = z; \quad \Psi_3 = -y; \quad \Psi_4 = -\frac{1}{2} (y^2 + z^2).$$

Но поскольку

$$\zeta = y + iz, \quad \text{а } \Psi_k = \text{Im } W_k,$$

можем написать

$$\operatorname{Im} W_2 = \operatorname{Im} \zeta; \operatorname{Im} W_3 = \operatorname{Im} (-i\zeta); \operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left( -i \frac{\zeta \bar{\zeta}}{2} \right). \quad (2.20)$$

Здесь, как обычно,  $\operatorname{Im}$  представляет собой символ мнимой части комплексного выражения, а черта над  $\zeta$  означает переход к комплексно-сопряженной величине, т. е.

$$\bar{\zeta} = y - iz.$$

Определим теперь комплексные потенциалы  $W_2$  и  $W_3$ . Учитывая равенства (2.20) и имея в виду, что согласно (2.12) и (2.13) функция Льюиса имеет вид

$$\zeta = -\frac{iT}{1+a_1+a_3} (\tau + a_1\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}), \quad (2.21)$$

можем написать

$$\operatorname{Im} W_2 = \operatorname{Im} \left[ -\frac{iT}{1+a_1+a_3} (\tau + a_1\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}) \right]; \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Im} W_3 = \operatorname{Im} \left[ -\frac{T}{1+a_1+a_3} (\tau + a_1\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}) \right]. \quad (2.23)$$

Но на окружности единичного радиуса, уравнение которой записывается в виде (2.14), имеют место соотношения:

$$\operatorname{Re} \tau = \cos \theta = \operatorname{Re} \tau^{-1}; \operatorname{Im} \tau = \sin \theta = \operatorname{Im} (-\tau^{-1}), \quad (2.24)$$

где  $\operatorname{Re}$  — символ действительной части комплексного выражения. Как нетрудно видеть, в формуле (2.22) принимается во внимание только действительная часть трехчлена

$$\tau + a_1\tau^{-1} + a_3\tau^{-3},$$

а в формуле (2.23) — только мнимая его часть. Тогда, учитывая соотношения (2.24), получим

$$\operatorname{Im} W_2 = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{iT}{1+a_1+a_3} [(1+a_1)\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}] \right\}; \quad (2.25)$$

$$\operatorname{Im} W_3 = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{T}{1+a_1+a_3} [(a_1-1)\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}] \right\}. \quad (2.26)$$

Найдем теперь мнимую часть комплексного потенциала  $W_4$ . Подставив в формулу Льюиса (2.21) выражение

$$\tau^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad (n=1, -1, -3),$$

получим

$$\zeta = \frac{T}{1+a_1+a_3} \{ (1-a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta + i [(1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta] \}.$$

Тогда, очевидно,

$$\bar{\zeta} = \frac{T}{1+a_1+a_3} \{ (1-a_1) \sin \theta - a_3 \sin 3\theta - i [(1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta] \}$$

и

$$\frac{\zeta\bar{\zeta}}{2} = \frac{T^2}{(1+a_1+a_3)^2} \left[ \frac{1}{2} (1+a_1^2+a_3^2) + a_1(1+a_3)\cos 2\theta + a_3\cos 4\theta \right].$$

Но согласно (2.20)

$$\operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left( -i \frac{\zeta\bar{\zeta}}{2} \right).$$

Тогда, отбросив в произведении  $\zeta\bar{\zeta}$  постоянное слагаемое (напомним, что потенциал и функция тока всегда определяются с точностью до аддитивной постоянной), получим

$$\operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{iT^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3)\cos 2\theta + a_3\cos 4\theta] \right\}.$$

Поскольку на единичной окружности имеет место соотношение

$$\operatorname{Im}(i\tau^{-n}) = \operatorname{Im}[i(\cos n\theta - i\sin n\theta)] = \cos n\theta$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Im}(i\cos n\theta) = \operatorname{Im}(i\tau^{-n}),$$

выражение для мнимой части комплексного потенциала  $W_4$  можно представить в несколько ином виде

$$\operatorname{Im} W_4 = \operatorname{Im} \left\{ -\frac{iT^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3)\tau^{-2} + a_3\tau^{-4}] \right\}. \quad (2.27)$$

Итак, в точках единичной окружности мнимые части комплексных потенциалов  $W_2$ ,  $W_3$  и  $W_4$  равны соответственно мнимым частям функций, стоящих в фигурных скобках формул (2.25), (2.26) и (2.27). Кроме того, функции  $W_k$ , как известно из гидромеханики плоского безвихревого движения, являются аналитическими во всей области, занятой жидкостью. Пользуясь этим их свойством, нетрудно доказать, что действительные части соответствующих функций также оказываются равными.

В самом деле, пусть у нас есть две аналитические функции:

$$f_1 = \varphi_1 + i\psi_1;$$

$$f_2 = \varphi_2 + i\psi_2$$

комплексного переменного  $\zeta = y + iz$ . Функции  $\varphi_{1,2}$  и  $\psi_{1,2}$  должны в этом случае удовлетворять условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial\psi_2}{\partial z}; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial y}.$$

Если  $\psi_1 = \psi_2$ , то, очевидно,

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z},$$

что дает нам право написать следующие равенства, справедливые с точностью до несущественного постоянного слагаемого:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{и} \quad f_1 = f_2.$$

Итак, комплексные потенциалы  $W_2$ ,  $W_3$  и  $W_4$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= -\frac{iT}{1+a_1+a_3} [(1+a_1)\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}]; \\ W_3 &= -\frac{T}{1+a_1+a_3} [(a_1-1)\tau^{-1} + a_3\tau^{-3}]; \\ W_4 &= -\frac{iT^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3)\tau^{-2} + a_3\tau^{-4}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

При известных комплексных потенциалах нахождение присоединенных масс контура не вызывает трудностей и производится в соответствии с формулой

$$\mu_{jk} = -\rho \int_i \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl = -\rho \int_i \Phi_k d\Psi_j. \quad (2.29)$$

Для того, чтобы воспользоваться этой формулой, следует, подставив в выражения (2.28) для комплексных потенциалов уравнение единичной окружности  $\tau = e^{i\theta}$  и отделив в полученных равенствах действительные и мнимые части, найти функции  $\Phi_k$  и  $\Psi_k$ . Таким образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= -\frac{iT}{1+a_1+a_3} [(1+a_1)(\cos \theta - i \sin \theta) + a_3(\cos 3\theta - \\ &\quad - i \sin 3\theta)]; \\ \Phi_2 &= -\frac{T}{1+a_1+a_3} [(1+a_1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta]; \\ \Psi_2 &= -\frac{T}{1+a_1+a_3} [(1+a_1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta]; \\ W_3 &= -\frac{T}{1+a_1+a_3} [(a_1-1)(\cos \theta - i \sin \theta) + a_3(\cos 3\theta - \\ &\quad - i \sin 3\theta)]; \\ \Phi_3 &= -\frac{T}{1+a_1+a_3} [(a_1-1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta]; \\ \Psi_3 &= \frac{T}{1+a_1+a_3} [(a_1-1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta]; \\ W_4 &= -\frac{iT^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3)(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + \\ &\quad + a_3(\cos 4\theta - i \sin 4\theta)]; \\ \Phi_4 &= -\frac{T^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + a_3 \sin 4\theta]; \\ \Psi_4 &= -\frac{T^2}{(1+a_1+a_3)^2} [a_1(1+a_3) \cos 2\theta + a_3 \cos 4\theta]. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Докажем теперь справедливость представлений (2.11) для функций  $\Phi_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) на контуре эллипса с полуосями  $b/2$  и  $T$ . Положив в формулах (2.15) и (2.17) постоянную  $a_3 = 0$ , найдем

$$\frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{2T}{b}, \quad \text{или} \quad a_1 = \frac{\frac{2T}{b} - 1}{\frac{2T}{b} + 1}$$

и, кроме того,

$$\sin \theta = \frac{1+a_1}{1-a_1} \frac{y}{T} = \frac{2y}{b}; \quad \cos \theta = -\frac{z}{T}.$$

Воспользовавшись выражениями (2.30) при  $a_3 = 0$ , получим:

$$\Phi_2 = -T \sin \theta = -\frac{2T}{b} y;$$

$$\Phi_3 = T \frac{1-a_1}{1+a_1} \cos \theta = -\frac{b}{2T} z;$$

$$\Phi_4 = -T^2 \frac{a_1}{(1+a_1)^2} \sin 2\theta = 2 \frac{a_1}{1-a_1^2} yz = -\frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT} yz.$$

Таким образом, справедливость приведенных ранее без вывода формул (2.11) доказана.

Вернемся к определению присоединенных масс контуров формы Льюиса. Подставляя выражения для  $\Phi_k$  и  $d\Psi_j$  в формулу (2.29) и имея в виду, что точкам контура, лежащим на ватерлинии, соответствуют значения угла  $\theta$ , равные  $-\pi/2$  и  $\pi/2$  (угол  $\theta$ , как уже упоминалось, отсчитывается от отрицательного направления мнимой оси), получим

$$\mu_{22} = \frac{\rho T^2}{(1+a_1+a_3)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1+a_1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta] \times \\ \times [(1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta] d\theta;$$

$$\mu_{33} = \frac{\rho T^2}{(1+a_1+a_3)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(a_1-1) \cos \theta + a_3 \cos 3\theta] \times \\ \times [(a_1-1) \cos \theta + 3a_3 \cos 3\theta] d\theta;$$

$$\mu_{44} = \frac{2\rho T^4}{(1+a_1+a_3)^4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + a_3 \sin 4\theta] \times \\ \times [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + 2a_3 \sin 4\theta] d\theta.$$

Интегралы, входящие в эти формулы, имеют следующие значения:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 n\theta d\theta = \frac{\pi}{2}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 n\theta d\theta = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \sin 3\theta d\theta = 0; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \cos 3\theta d\theta = 0;$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2\theta \sin 4\theta d\theta = 0.$$

Таким образом, находим:

$$\left. \begin{aligned} \mu_{22} &= \frac{\rho\pi T^2}{2} \frac{(1+a_1)^2 + 3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2}; \\ \mu_{33} &= \frac{\rho\pi T^2}{2} \frac{(1-a_1)^2 + 3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2}; \\ \mu_{44} &= \rho\pi T^4 \frac{a_1^2(1+a_3)^2 + 2a_3^2}{(1+a_1+a_3)^4}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Поскольку согласно формуле (2.16)

$$\frac{T^2}{(1+a_1+a_3)^2} = \frac{b^2}{4(1-a_1+a_3)^2}, \quad (2.32)$$

присоединенную массу  $\mu_{33}$  можно представить в виде

$$\mu_{33} = \frac{\rho\pi b^2}{8} \frac{(1-a_1)^2 + 3a_3^2}{(1-a_1+a_3)^2}. \quad (2.33)$$

Это выражение для  $\mu_{33}$  удобнее предыдущего, так как для полуэллиптических шпангоутов ( $a_3 = 0$ ) непосредственно приводит к известной формуле

$$\mu_{33} = \frac{\rho\pi b^2}{8}.$$

Учитывая равенство (2.32), полученную выше формулу для  $\mu_{44}$  также можно представить в несколько иной форме:

$$\mu_{44} = \frac{\rho\pi b^4}{16} \frac{a_1^2(1+a_3)^2 + 2a_3^2}{(1-a_1+a_3)^4}.$$

В практике применяют оба выражения для  $\mu_{44}$ , так как ни одно из них не обладает каким-либо преимуществом перед другим.

Присоединенный статический момент контура может быть вычислен по формуле

$$\mu_{24} = -\rho \int \Phi_4 d\Psi_2$$

либо по формуле

$$\mu_{42} = -\rho \int \Phi_2 d\Psi_4.$$

Подставляя в эти формулы выражения для  $\Phi_2$ ,  $\Phi_4$ ,  $\Psi_2$  и  $\Psi_4$ , можем написать

$$\mu_{24} = \frac{\rho T^3}{(1+a_1+a_3)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + a_3 \sin 4\theta] \times \\ \times [(1+a_1) \sin \theta + 3a_3 \sin 3\theta] d\theta;$$

$$\mu_{42} = \frac{2\rho T^3}{(1+a_1+a_3)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1+a_1) \sin \theta + a_3 \sin 3\theta] \times \\ \times [a_1(1+a_3) \sin 2\theta + 2a_3 \sin 4\theta] d\theta. \blacksquare$$

Учитывая, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{4}{3}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \sin 4\theta d\theta = -\frac{8}{15};$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2\theta \sin 3\theta d\theta = \frac{4}{5}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 3\theta \sin 4\theta d\theta = \frac{8}{7},$$

получим

$$\mu_{24} = \frac{4\rho T^3}{(1+a_1+a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1(1+a_1)(1+a_3) - \right. \\ \left. - a_3 \left[ \frac{2}{15}(1+a_1) - \frac{3}{5} a_1(1+a_3) - \frac{6}{7} a_3 \right] \right\}; \quad (2.34)$$

$$\mu_{42} = \frac{8\rho T^3}{(1+a_1+a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1(1+a_1)(1+a_3) - \right. \\ \left. - a_3 \left[ \frac{4}{15}(1+a_1) - \frac{1}{5} a_1(1+a_3) - \frac{4}{7} a_3 \right] \right\}. \quad (2.35)$$

Таким образом,  $\mu_{42} \neq \mu_{24}$ ; в частности, для полуэллиптического шпангоута ( $a_3 = 0$ )  $\mu_{42}$  оказывается вдвое больше, чем  $\mu_{24}$ . Это противоречит выводу М. Д. Хаскинда о том, что при колебаниях дублированного относительно ватерлинии шпангоутного контура должно сохраняться свойство парности присоединенных масс, т. е. равенство  $\mu_{jh} = \mu_{hj}$ . Причина указанного противоречия состоит в том, что полученное выше выражение для  $\mu_{42}$  соответствует колебаниям с предельно малой, а для  $\mu_{24}$  — с неограниченно большой частотой. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Если гармонические колебания частично или полностью погруженного в жидкость тела сопровождаются волнообразованием,

на свободной поверхности должно выполняться граничное условие (1.9), которое можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - v\Phi = 0 \quad \text{при } z = 0.$$

Здесь  $\Phi$  — потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, а  $v$  — волновое число излучаемых волн, которое связано с частотой волны  $\sigma$ , равной частоте колебаний тела, соотношением

$$v = \frac{\sigma^2}{g}.$$

Аналогичным условиям должны удовлетворять и функции  $\Phi_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ).

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} - v\Phi_k = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (2.36)$$

В предельных случаях  $v = 0$  и  $v \rightarrow \infty$  граничные условия (2.36) упрощаются. При  $v = 0$  они сводятся к условию  $\partial \Phi_k / \partial z = 0$  при  $z = 0$ , а при  $v \rightarrow \infty$  — к условию  $\Phi_k = 0$  при  $z = 0$ .

Условие  $\partial \Phi_k / \partial z = 0$  означает, что частицы жидкости, образующие свободную поверхность, движутся только в горизонтальной плоскости и не могут перемещаться по вертикали. Таким образом, в данном случае свободная поверхность представляет собой как бы твердую стенку, или, иными словами, жидкость может рассматриваться как сверхтяжелая.

Условие  $\partial \Phi_k / \partial z = 0$  при  $z = 0$  дает возможность четного аналитического продолжения функций  $\Phi_k$  в верхнюю полуплоскость. При этом граничные условия (2.3) для этих функций на контуре шпангоута также должны быть продолжены четным образом на зеркальное отражение контура в верхней полуплоскости. Это значит, что в симметричных относительно плоскости  $z = 0$  точках контура и его зеркального отражения выполняется равенство

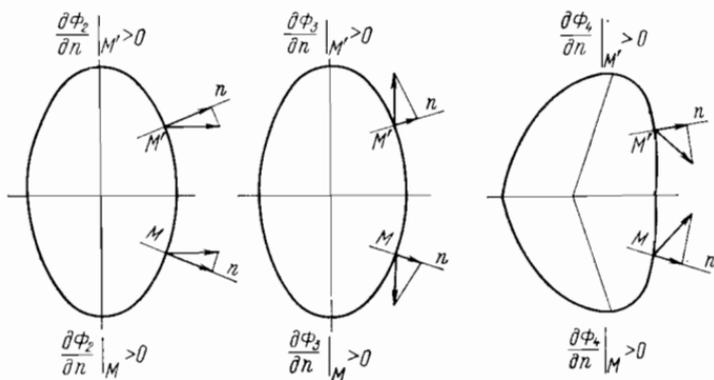
$$\left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right)_M = \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right)_{M'},$$

где  $M$  и  $M'$  — симметричные относительно плоскости  $z = 0$  точки дублированного контура.

Но, как известно из гидромеханики, производная  $\partial \Phi_k / \partial n$  представляет собой нормальную компоненту скорости жидкости, вызванной соответствующим видом движения контура с единичной линейной или угловой скоростью ( $k = 2$  — поступательное движение вдоль оси  $Oy$ ,  $k = 3$  — поступательное движение вдоль оси  $Oz$ ,  $k = 4$  — вращение вокруг оси  $Ox$ , перпендикулярной плоскости контура). Согласно же условию обтекания производная  $\partial \Phi_k / \partial n$  должна равняться нормальной компоненте вектора единичной скорости соответствующей точки контура при данном виде движения.

Таким образом, зная знаки  $\partial\Phi_k/\partial n$ , т. е. зная, по каким нормальям (внешним или внутренним) направлены нормальные компоненты векторов скорости, нетрудно установить и направление самих векторов, т. е. найти направление движения верхней и нижней половинок дублированного контура.

Как видно из рис. 2.3, в случае четного продолжения граничных условий на зеркальное отражение контура в верхней полуплоскости, при горизонтальных колебаниях контур движется как единое целое, а при вертикальных и угловых колебаниях его половинки движутся в противоположных направлениях. Таким образом, при  $v = 0$  колебаниям контура как единого целого отве-



2.3. Четное продолжение граничных условий на контуре в верхнюю полуплоскость.

чает функция  $\Phi_2$  и присоединенные массы  $\mu_{22}$  и  $\mu_{42}$ , определенные через эту функцию, отвечают колебаниям с предельно малой частотой.

В другом предельном случае ( $v \rightarrow \infty$ ,  $\Phi_k = 0$  при  $z = 0$ ) вертикальная скорость частиц  $\partial\Phi_k/\partial z$  может иметь любое значение, т. е. частицы, образующие свободную поверхность, могут беспрепятственно перемещаться в вертикальном направлении. Это значит, что при высокочастотных колебаниях ускорение силы тяжести пренебрежимо мало по сравнению с ускорением колеблющихся частиц и жидкость может рассматриваться как невесомая. Такая модель используется в теории удара тела о жидкость.

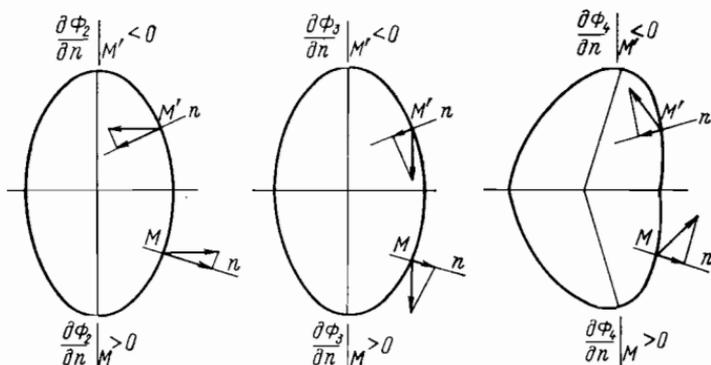
Условие  $\Phi_k = 0$  при  $z = 0$  допускает нечетное продолжение функций  $\Phi_k$  в верхнюю полуплоскость и граничных условий на контуре на его зеркальное отражение. Нечетное продолжение граничных условий означает, что в симметричных относительно

плоскости  $z = 0$  точках  $M$  и  $M'$  дублированного контура имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial n}\right)_M = -\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial n}\right)_{M'}.$$

В этом случае, как видно из рис. 2.4, при вертикальных и угловых колебаниях дублированный контур движется как единое целое, а при горизонтальных его верхняя и нижняя половинки движутся в противоположных направлениях. Колебания контура как единого целого отвечают функции  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ , с помощью которых и вычисляются присоединенные массы  $\mu_{33}$ ,  $\mu_{44}$  и  $\mu_{24}$ .

Таким образом, полученные выше формулы для  $\mu_{22}$  и  $\mu_{42}$  отвечают сверхтяжелой ( $\nu = 0$ ), а для  $\mu_{33}$ ,  $\mu_{44}$  и  $\mu_{24}$  —невесомой жидко-



2.4. Нечетное продолжение граничных условий на контуре в верхнюю полуплоскость.

сти ( $\nu \rightarrow \infty$ ). Вычисленные для этих предельных случаев присоединенные массы шпангоутного контура равны половинам присоединенных масс дублированного контура, движущегося как единое целое в безграничной жидкости.

Поскольку присоединенные массы связаны с механической инертностью жидкости, а она наиболее сильно проявляется при низких частотах колебаний, когда частицы мало подвижны, значения присоединенных масс при низких частотах оказываются больше, чем при высоких.

Если представить присоединенные массы шпангоута в виде

$$\left. \begin{aligned} \mu_{22} &= m_{22} \frac{\rho \pi T^2}{2}; & \mu_{33} &= m_{33} \frac{\rho \pi b^2}{8}; & \mu_{44} &= m_{44} \rho \pi T^4; \\ \mu_{24} &= m_{24} \rho \pi T^3; & \mu_{42} &= m_{42} \rho \pi T^3, \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

то, воспользовавшись полученными выше выражениями (2.31) и (2.33) — (2.35) для  $\mu_{jk}$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} m_{22} &= \frac{(1+a_1)^2 + 3a_3^2}{(1+a_1+a_3)^2}; & m_{33} &= \frac{(1-a_1)^2 + 3a_3^2}{(1-a_1+a_3)^2}; \\ m_{44} &= \frac{a_1^2(1+a_3)^2 + 2a_3^2}{(1+a_1+a_3)^3}; \\ m_{24} &= \frac{4}{\pi(1+a_1+a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1(1+a_1)(1+a_3) - \right. \\ &\quad \left. - a_3 \left[ \frac{2}{15}(1+a_1) - \frac{3}{5} a_1(1+a_3) - \frac{6}{7} a_3 \right] \right\}; \\ m_{42} &= \frac{8}{\pi(1+a_1+a_3)^3} \left\{ \frac{1}{3} a_1(1+a_1)(1+a_3) - \right. \\ &\quad \left. - a_3 \left[ \frac{4}{15}(1+a_1) - \frac{1}{5} a_1(1+a_3) - \frac{4}{7} a_3 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

При расчете значений присоединенных масс на основе метода плоских сечений для корабля в целом можно считать, что распределение по длине присоединенных масс  $\mu_{22}$  и  $\mu_{33}$  достаточно хорошо описывается формулами

$$\mu_{22} = \mu_{022} \left( \frac{z}{T} \right)^2; \quad \mu_{33} = \mu_{033} \left( \frac{b}{B} \right)^2, \quad (2.39)$$

где  $b$  — ширина шпангоута по ватерлинии,  $z$  — аппликата нулевого батокса в плоскости данного шпангоута, или, иначе говоря, осадка этого шпангоута с обратным знаком,  $\mu_{022}$  и  $\mu_{033}$  — присоединенные массы мидель-шпангоута.

Зададимся уравнениями ватерлинии равновесия и нулевого батокса в виде:

$$\begin{aligned} b &= B \left[ 1 - \left( \frac{2|x|}{L} \right)^n \right]; \\ z &= -T \left[ 1 - \left( \frac{2|x|}{L} \right)^m \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Вычисляя площадь ватерлинии  $S_0$ , которая с одной стороны равна

$$S_0 = 2 \int_0^{L/2} b dx = 2B \int_0^{L/2} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^n \right] dx = LB \frac{n}{n+1},$$

а с другой

$$S_0 = \alpha LB,$$

находим, что показатель степени  $n$  связан с коэффициентом полноты ватерлинии  $\alpha$  соотношением

$$n = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (2.41)$$

Соотношение, связывающее показатель  $m$  с коэффициентом полноты нулевого батокса  $\gamma$ , имеет аналогичный вид

$$m = \frac{\gamma}{1 - \gamma}.$$

Тогда, подставив выражения (2.39) в (2.9) и (2.10) и имея в виду уравнения (2.40), можем написать:

$$\begin{aligned} M_{22} &= 2\mu_{022} \int_0^{L/2} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^m \right]^2 dx; \\ M_{33} &= 2\mu_{033} \int_0^{L/2} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^n \right]^2 dx; \\ M_{55} &= 2\mu_{033} \int_0^{L/2} x^2 \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^n \right]^2 dx; \\ M_{66} &= 2\mu_{022} \int_0^{L/2} x^2 \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^m \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Проинтегрировав и выразив показатели степени  $m$  и  $n$  через коэффициенты полноты  $\alpha$  и  $\gamma$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} M_{22} &= \mu_{022} L \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma}; & M_{33} &= \mu_{033} L \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha}; \\ M_{55} &= \mu_{033} L^3 \frac{\alpha}{6(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)}; \\ M_{66} &= \mu_{022} L^3 \frac{\gamma^2}{6(3 - \gamma)(3 - 2\gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Вычисление присоединенных масс корабля  $M_{44}$  и  $M_{24}$  произведем в предположении, что при любой форме шпангоутов присоединенные массы  $\mu_{44}$  и  $\mu_{24}$  распределяются по длине так же, как и для корабля с полуэллиптическими шпангоутами. В последнем случае постоянная  $a_3$  в функции Льюиса оказывается равной нулю, а для постоянной  $a_1$  на основании равенства (2.16) получаем формулу

$$a_1 = \frac{\frac{2T}{b} - 1}{\frac{2T}{b} + 1}.$$

Подставляя последнее равенство в выражения (2.31) и (2.34), найдем

$$\mu_{44} = \frac{\rho \pi T^4}{16} \left[ 1 - \left( \frac{b}{2T} \right)^2 \right]^2;$$

$$\mu_{24} = \frac{\rho T^3}{3} \left[ 1 - \left( \frac{b}{2T} \right)^2 \right].$$

При определении присоединенных масс миделя  $\mu_{044}$  и  $\mu_{024}$  в последних формулах следует под  $b$  понимать ширину корабля  $B$ . Таким образом, считая для простоты нулевой батокс прямоугольником, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \mu_{44} &= \mu_{044} \frac{\left[ 1 - \left( \frac{b}{2T} \right)^2 \right]^2}{\left[ 1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \right]^2}; \\ \mu_{24} &= \mu_{024} \frac{1 - \left( \frac{b}{2T} \right)^2}{1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Воспользовавшись уравнением ватерлинии в форме (2.40), можем написать

$$M_{44} = \frac{2\mu_{044}}{\left[ 1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \right]^2} \int_0^{L/2} \left\{ 1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^n \right]^2 \right\} dx;$$

$$M_{24} = \frac{2\mu_{024}}{1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2} \int_0^{L/2} \left\{ 1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^n \right]^2 \right\} dx.$$

Проинтегрировав и выразив  $n$  через  $\alpha$  по формуле (2.41), получим

$$M_{44} = \mu_{044} L \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \right]^2} \left[ \left( \frac{B}{2T} \right)^4 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \frac{4\alpha^2}{1 + \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{24\alpha^4}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)} \right];$$

$$M_{24} = \mu_{024} L \frac{1}{1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2} \left[ 1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2 \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \right].$$

Если рассматривать погруженную часть диаметральной плоскости (нулевого батокса) как прямоугольник и подставить в полученные выше формулы для  $M_{jk}$  значения присоединенных масс

миделя, определяемые в соответствии с равенствами (2.37), получим следующие удобные для практических расчетов приближенные выражения:

$$M_{22} = m_{022} \frac{\rho \pi T^2}{2} L; \quad M_{33} = m_{033} \frac{\rho \pi B^2}{4} L \frac{\alpha^2}{1 + \alpha};$$

$$M_{55} = m_{033} \frac{\rho \pi B^2}{48} L^3 \frac{\alpha^2}{(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)}; \quad M_{66} = m_{022} \frac{\rho \pi T^2}{24} L^3;$$

$$M_{44} = m_{044} \rho \pi T^4 L \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{B}{2T}\right)^2\right]^2} \left[ \left(\frac{B}{2T}\right)^4 - \left(\frac{B}{2T}\right)^2 \frac{4\alpha^2}{1 + \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{24\alpha^4}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha)} \right];$$

$$M_{24} = m_{024} \rho \pi T^3 L \frac{1}{1 - \left(\frac{B}{2T}\right)^2} \left[ 1 - \left(\frac{B}{2T}\right)^2 \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} \right],$$

где  $m_{0jk}$  — безразмерные коэффициенты, определяемые по формулам (2.38) для миделевого сечения. Это значит, что постоянные  $a_1$  и  $a_3$  должны быть найдены, исходя из коэффициента полноты миделя и отношения удвоенной осадки к ширине корабля.

В случае, когда контур совершает гармонические колебания с частотой  $\sigma$  на свободной поверхности жидкости, в точках последней (в рамках линейной теории волн в точках плоскости  $z = 0$ ) должно выполняться граничное условие (2.36).

Кроме того, следует потребовать, чтобы волны, вызванные колебаниями контура, расходились от него в обе стороны. Это условие, называемое условием излучения, можно записать в виде

$$\zeta_k = A_k^{\pm} e^{i(\sigma t \mp \nu y)} \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty, \quad (2.44)$$

где  $\zeta_k$  — ордината волнового профиля, вызванного  $k$ -м видом колебаний контура;  $A_k^{\pm}$  — амплитуда излучаемых волн на бесконечном удалении от контура ( $A_k^+$  при  $y \rightarrow +\infty$ ,  $A_k^-$  при  $y \rightarrow -\infty$ ). Если контур симметричен относительно вертикальной оси, то  $A_k^+ = A_k^-$ . При формулировке условий излучения амплитуды колебаний контура считаются настолько малыми, что его можно полагать неподвижным. Это дает право обозначать координаты неподвижной точки пространства через  $y$  и  $z$ .

Нетрудно убедиться, что уравнение

$$\zeta_k = A_k^+ e^{i(\sigma t - \nu y)} \quad (2.45)$$

определяет собой профиль волны, распространяющейся вдоль положительного, а уравнение

$$\zeta_k = A_k^- e^{i(\sigma t + \nu y)} \quad (2.46)$$

— вдоль отрицательного направления оси  $Oy$ .

Поскольку в выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель  $e^{i\sigma t}$ , повсюду принимается во внимание только действительная часть (вследствие такого условия символ  $\text{Re}$  в этих выражениях, как обычно, опущен), последние уравнения можно переписать в виде

$$\partial_k = A_k^{\pm} \cos(\sigma t \mp \nu y).$$

Таким образом, если уравнение профиля волны имеет форму (2.45), то абсциссы вершин волн ( $\partial_k = A_k^{\pm}$ ) определяются из выражения

$$\cos(\sigma t - \nu y) = 1,$$

или

$$\sigma t - \nu y = 2n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда получаем следующую формулу для абсцисс вершин:

$$y = \frac{\sigma}{\nu} t - \frac{2n\pi}{\nu}.$$

Из этой формулы видно, что вершина волны, а с ней и весь волновой профиль, перемещается вдоль положительной оси  $Oy$  со скоростью  $\sigma/\nu$ .

Совершенно аналогично доказывается, что вершинам волн, профиль которых описывается уравнением (2.46), соответствуют абсциссы

$$y = -\frac{\sigma}{\nu} t + 2\frac{n\pi}{\nu}.$$

Это значит, что с течением времени абсцисса вершины уменьшается, т. е. волновой профиль движется вдоль отрицательной оси  $Oy$ . Но в рамках линейной теории волн функция  $\Phi_k(y, 0, t)$  — потенциал скоростей движения жидкости, вызванного  $k$ -м видом колебаний контура, определенный в точках плоскости  $z = 0$ , и ординаты волнового профиля  $\partial_k$  связаны соотношением

$$\partial_k = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_k(y, 0, t)}{\partial t}. \quad (2.47)$$

Кроме того, функции  $\Phi_k$  должны удовлетворять условию отсутствия вызванных скоростей на неограниченно большой глубине ( $z \rightarrow -\infty$ ). Это условие приводит к формуле

$$\Phi_k(y, z, t) = \Phi_k(y, 0, t) e^{\nu z}. \quad (2.48)$$

Таким образом, на основании выражений (2.47) и (2.48) можем написать

$$\Phi_k(y, z, t) = -g e^{\nu z} \int_0^t \partial_k d\tau,$$

Таблица 2. Значения коэффициента  $m_{22}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 0,25    | 0,25           | 0,722                       | 0,747 | 0,813 | 0,911 | 1,047 | 1,227 |
|         | 0,50           | 0,827                       | 0,897 | 1,017 | 1,217 | 1,523 | 1,947 |
|         | 0,75           | 0,885                       | 0,969 | 1,104 | 1,304 | 1,593 | 2,002 |
|         | 1,00           | 0,908                       | 1,014 | 1,145 | 1,334 | 1,600 | 1,982 |
|         | 1,25           | 0,906                       | 1,038 | 1,171 | 1,343 | 1,586 | 1,924 |
|         | 1,50           | 0,896                       | 1,044 | 1,186 | 1,347 | 1,567 | 1,867 |
|         | 1,75           | 0,888                       | 1,040 | 1,192 | 1,348 | 1,546 | 1,816 |
|         | 2,00           | 0,882                       | 1,032 | 1,191 | 1,348 | 1,525 | 1,757 |
|         | 2,25           | 0,878                       | 1,023 | 1,182 | 1,343 | 1,511 | 1,707 |
|         | 2,50           | 0,877                       | 1,013 | 1,170 | 1,334 | 1,501 | 1,680 |
|         | 2,75           | 0,877                       | 1,005 | 1,156 | 1,320 | 1,489 | 1,664 |
|         | 3,00           | 0,878                       | 0,998 | 1,143 | 1,305 | 1,475 | 1,654 |
|         | 3,25           | 0,880                       | 0,993 | 1,131 | 1,290 | 1,462 | 1,655 |
| 0,50    | 0,25           | 0,549                       | 0,541 | 0,549 | 0,570 | 0,602 | 0,645 |
|         | 0,50           | 0,669                       | 0,686 | 0,722 | 0,784 | 0,861 | 0,917 |
|         | 0,75           | 0,756                       | 0,789 | 0,842 | 0,909 | 0,979 | 1,024 |
|         | 1,00           | 0,810                       | 0,870 | 0,931 | 1,003 | 1,073 | 1,114 |
|         | 1,25           | 0,840                       | 0,929 | 1,000 | 1,073 | 1,145 | 1,189 |
|         | 1,50           | 0,858                       | 0,967 | 1,053 | 1,127 | 1,199 | 1,247 |
|         | 1,75           | 0,873                       | 0,992 | 1,091 | 1,170 | 1,241 | 1,294 |
|         | 2,00           | 0,886                       | 1,008 | 1,118 | 1,204 | 1,274 | 1,329 |
|         | 2,25           | 0,899                       | 1,020 | 1,136 | 1,231 | 1,303 | 1,355 |
|         | 2,50           | 0,912                       | 1,029 | 1,147 | 1,250 | 1,328 | 1,380 |
|         | 2,75           | 0,924                       | 1,037 | 1,155 | 1,263 | 1,348 | 1,406 |
|         | 3,00           | 0,936                       | 1,044 | 1,161 | 1,273 | 1,365 | 1,433 |
|         | 3,25           | 0,949                       | 1,052 | 1,167 | 1,281 | 1,382 | 1,465 |
| 0,75    | 0,25           | 0,466                       | 0,443 | 0,426 | 0,415 | 0,406 | 0,400 |
|         | 0,50           | 0,559                       | 0,541 | 0,526 | 0,513 | 0,482 | 0,412 |
|         | 0,75           | 0,612                       | 0,597 | 0,581 | 0,551 | 0,500 | 0,417 |
|         | 1,00           | 0,642                       | 0,641 | 0,623 | 0,589 | 0,528 | 0,429 |
|         | 1,25           | 0,655                       | 0,673 | 0,658 | 0,620 | 0,555 | 0,454 |
|         | 1,50           | 0,663                       | 0,693 | 0,685 | 0,647 | 0,580 | 0,476 |
|         | 1,75           | 0,671                       | 0,706 | 0,706 | 0,669 | 0,602 | 0,503 |
|         | 2,00           | 0,678                       | 0,715 | 0,720 | 0,688 | 0,623 | 0,528 |
|         | 2,25           | 0,685                       | 0,722 | 0,729 | 0,702 | 0,643 | 0,555 |
|         | 2,50           | 0,692                       | 0,726 | 0,736 | 0,713 | 0,659 | 0,578 |
|         | 2,75           | 0,697                       | 0,730 | 0,740 | 0,720 | 0,670 | 0,595 |
|         | 3,00           | 0,703                       | 0,733 | 0,743 | 0,725 | 0,678 | 0,604 |
|         | 3,25           | 0,708                       | 0,735 | 0,745 | 0,728 | 0,680 | 0,594 |
| 1,00    | 0,25           | 0,415                       | 0,384 | 0,356 | 0,330 | 0,303 | 0,276 |
|         | 0,50           | 0,499                       | 0,463 | 0,424 | 0,377 | 0,308 | 0,209 |
|         | 0,75           | 0,523                       | 0,485 | 0,436 | 0,370 | 0,287 | 0,190 |
|         | 1,00           | 0,526                       | 0,495 | 0,441 | 0,371 | 0,283 | 0,178 |
|         | 1,25           | 0,514                       | 0,497 | 0,445 | 0,373 | 0,284 | 0,180 |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,00 | 1,50           | 0,500                       | 0,491 | 0,446 | 0,375 | 0,286 | 0,182 |
|      | 1,75           | 0,488                       | 0,483 | 0,444 | 0,376 | 0,289 | 0,190 |
|      | 2,00           | 0,478                       | 0,472 | 0,439 | 0,376 | 0,294 | 0,198 |
|      | 2,25           | 0,467                       | 0,462 | 0,431 | 0,375 | 0,299 | 0,209 |
|      | 2,50           | 0,457                       | 0,451 | 0,422 | 0,370 | 0,301 | 0,219 |
|      | 2,75           | 0,447                       | 0,440 | 0,412 | 0,364 | 0,300 | 0,224 |
|      | 3,00           | 0,437                       | 0,429 | 0,402 | 0,356 | 0,294 | 0,221 |
|      | 3,25           | 0,427                       | 0,418 | 0,391 | 0,345 | 0,282 | 0,198 |
| 1,25 | 0,25           | 0,377                       | 0,342 | 0,309 | 0,275 | 0,240 | 0,204 |
|      | 0,50           | 0,463                       | 0,419 | 0,367 | 0,305 | 0,223 | 0,122 |
|      | 0,75           | 0,472                       | 0,421 | 0,358 | 0,279 | 0,192 | 0,104 |
|      | 1,00           | 0,456                       | 0,412 | 0,345 | 0,266 | 0,179 | 0,088 |
|      | 1,25           | 0,428                       | 0,397 | 0,334 | 0,257 | 0,171 | 0,084 |
|      | 1,50           | 0,400                       | 0,378 | 0,323 | 0,249 | 0,167 | 0,081 |
|      | 1,75           | 0,375                       | 0,357 | 0,311 | 0,243 | 0,164 | 0,084 |
|      | 2,00           | 0,353                       | 0,336 | 0,297 | 0,237 | 0,163 | 0,086 |
|      | 2,25           | 0,332                       | 0,317 | 0,282 | 0,229 | 0,163 | 0,090 |
|      | 2,50           | 0,313                       | 0,298 | 0,266 | 0,219 | 0,161 | 0,096 |
|      | 2,75           | 0,295                       | 0,280 | 0,250 | 0,208 | 0,155 | 0,097 |
|      | 3,00           | 0,278                       | 0,263 | 0,235 | 0,195 | 0,146 | 0,091 |
|      | 3,25           | 0,261                       | 0,247 | 0,219 | 0,180 | 0,132 | 0,069 |
| 1,50 | 0,25           | 0,342                       | 0,306 | 0,272 | 0,235 | 0,197 | 0,158 |
|      | 0,50           | 0,441                       | 0,391 | 0,332 | 0,264 | 0,180 | 0,085 |
|      | 0,75           | 0,440                       | 0,384 | 0,315 | 0,233 | 0,150 | 0,075 |
|      | 1,00           | 0,415                       | 0,365 | 0,293 | 0,214 | 0,135 | 0,060 |
|      | 1,25           | 0,377                       | 0,341 | 0,276 | 0,202 | 0,126 | 0,054 |
|      | 1,50           | 0,341                       | 0,315 | 0,261 | 0,191 | 0,120 | 0,050 |
|      | 1,75           | 0,309                       | 0,289 | 0,245 | 0,183 | 0,115 | 0,051 |
|      | 2,00           | 0,281                       | 0,263 | 0,228 | 0,175 | 0,113 | 0,050 |
|      | 2,25           | 0,256                       | 0,240 | 0,210 | 0,166 | 0,111 | 0,053 |
|      | 2,50           | 0,233                       | 0,219 | 0,192 | 0,154 | 0,108 | 0,056 |
|      | 2,75           | 0,212                       | 0,199 | 0,175 | 0,142 | 0,101 | 0,056 |
|      | 3,00           | 0,193                       | 0,161 | 0,158 | 0,128 | 0,091 | 0,050 |
|      | 3,25           | 0,175                       | 0,163 | 0,142 | 0,113 | 0,076 | 0,029 |
| 1,75 | 0,25           | 0,310                       | 0,274 | 0,241 | 0,205 | 0,165 | 0,127 |
|      | 0,50           | 0,427                       | 0,373 | 0,311 | 0,239 | 0,157 | 0,071 |
|      | 0,75           | 0,421                       | 0,361 | 0,290 | 0,210 | 0,133 | 0,071 |
|      | 1,00           | 0,389                       | 0,337 | 0,265 | 0,189 | 0,118 | 0,057 |
|      | 1,25           | 0,346                       | 0,309 | 0,246 | 0,176 | 0,109 | 0,051 |
|      | 1,50           | 0,305                       | 0,280 | 0,229 | 0,166 | 0,103 | 0,046 |
|      | 1,75           | 0,269                       | 0,251 | 0,212 | 0,157 | 0,099 | 0,046 |
|      | 2,00           | 0,238                       | 0,224 | 0,194 | 0,149 | 0,096 | 0,044 |
|      | 2,25           | 0,211                       | 0,200 | 0,175 | 0,139 | 0,094 | 0,046 |
|      | 2,50           | 0,187                       | 0,177 | 0,157 | 0,127 | 0,090 | 0,048 |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,75    | 2,75           | 0,166                       | 0,157 | 0,139 | 0,114 | 0,083 | 0,048 |
|         | 3,00           | 0,147                       | 0,138 | 0,122 | 0,100 | 0,073 | 0,041 |
|         | 3,25           | 0,129                       | 0,121 | 0,106 | 0,085 | 0,058 | 0,021 |
| 2,00    | 0,25           | 0,278                       | 0,245 | 0,216 | 0,180 | 0,142 | 0,105 |
|         | 0,50           | 0,416                       | 0,361 | 0,296 | 0,224 | 0,146 | 0,069 |
|         | 0,75           | 0,408                       | 0,347 | 0,276 | 0,198 | 0,129 | 0,078 |
|         | 1,00           | 0,373                       | 0,321 | 0,250 | 0,179 | 0,116 | 0,065 |
|         | 1,25           | 0,327                       | 0,291 | 0,230 | 0,166 | 0,107 | 0,059 |
|         | 1,50           | 0,282                       | 0,260 | 0,214 | 0,156 | 0,102 | 0,054 |
|         | 1,75           | 0,244                       | 0,230 | 0,196 | 0,148 | 0,097 | 0,054 |
|         | 2,00           | 0,212                       | 0,202 | 0,178 | 0,140 | 0,095 | 0,051 |
|         | 2,25           | 0,184                       | 0,177 | 0,159 | 0,130 | 0,093 | 0,052 |
|         | 2,50           | 0,160                       | 0,154 | 0,140 | 0,118 | 0,089 | 0,054 |
|         | 2,75           | 0,139                       | 0,134 | 0,122 | 0,104 | 0,081 | 0,053 |
|         | 3,00           | 0,120                       | 0,115 | 0,105 | 0,090 | 0,070 | 0,045 |
|         | 3,25           | 0,103                       | 0,099 | 0,089 | 0,074 | 0,054 | 0,024 |

откуда, используя выражение (2.44), найдем асимптотическое представление

$$\Phi_k^\pm = -g e^{\nu z} A_k^\pm \int_0^t e^{i(\sigma\tau + \nu y)} d\tau = i \frac{g}{\sigma} A_k^\pm e^{\nu z + i(\sigma t + \nu y)} \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty.$$

Введя обозначение

$$\frac{g}{\sigma} A_k^\pm = B_k^\pm,$$

получим условия излучения в форме М. Д. Хаскинда

$$\Phi_k^\pm = i B_k^\mp e^{\nu z + i(\sigma t + \nu y)} \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (2.49)$$

Плоская краевая задача об определении гармонических функций  $\Phi_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ), удовлетворяющих граничным условиям (2.3) на контуре, условиям (2.36) при конечных значениях  $\nu$  на невозмущенной свободной поверхности жидкости, условиям излучения (2.49) и условию отсутствия вызванных скоростей на неограниченно большой глубине, решена для контуров различной формы рядом авторов. Из этих решений следует, что для контуров формы Льюиса безразмерные коэффициенты присоединенных масс  $m_{jk}$  будут зависеть не только от отношения  $2T/b$  и коэффициента полноты  $\beta$ , но еще и от частотного параметра  $\nu T$  или  $\nu b/2$ . Значения этих безразмерных коэффициентов, вычисленные Ю. Н. Пашенко и И. М. Коганом, приведены в табл. 2—5.

Таблица 3. Значения коэффициента  $m_{33}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 0,25    | 0,25           | 0,951                       | 0,933 | 0,844 | 0,786 | 0,757 | 0,752 |
|         | 0,50           | 0,949                       | 0,869 | 0,838 | 0,835 | 0,854 | 0,905 |
|         | 0,75           | 0,939                       | 0,890 | 0,862 | 0,861 | 0,895 | 0,986 |
|         | 1,00           | 0,950                       | 0,901 | 0,877 | 0,880 | 0,933 | 1,079 |
|         | 1,25           | 0,959                       | 0,901 | 0,881 | 0,895 | 0,954 | 1,105 |
|         | 1,50           | 0,966                       | 0,894 | 0,872 | 0,905 | 0,987 | 1,146 |
|         | 1,75           | 0,972                       | 0,886 | 0,854 | 0,896 | 1,037 | 1,316 |
|         | 2,00           | 0,977                       | 0,876 | 0,831 | 0,867 | 1,023 | 1,368 |
|         | 2,25           | 0,981                       | 0,866 | 0,806 | 0,823 | 0,954 | 1,260 |
|         | 2,50           | 0,985                       | 0,856 | 0,782 | 0,778 | 0,874 | 1,117 |
|         | 2,75           | 0,987                       | 0,847 | 0,758 | 0,735 | 0,802 | 0,996 |
|         | 3,00           | 0,989                       | 0,838 | 0,736 | 0,696 | 0,739 | 0,901 |
|         | 3,25           | 0,990                       | 0,830 | 0,717 | 0,663 | 0,688 | 0,830 |
| 0,50    | 0,25           | 0,705                       | 0,715 | 0,677 | 0,653 | 0,647 | 0,657 |
|         | 0,50           | 0,742                       | 0,686 | 0,671 | 0,688 | 0,739 | 0,832 |
|         | 0,75           | 0,697                       | 0,658 | 0,645 | 0,666 | 0,738 | 0,880 |
|         | 1,00           | 0,671                       | 0,631 | 0,622 | 0,651 | 0,745 | 0,949 |
|         | 1,25           | 0,651                       | 0,603 | 0,599 | 0,640 | 0,744 | 0,955 |
|         | 1,50           | 0,636                       | 0,577 | 0,571 | 0,631 | 0,758 | 0,981 |
|         | 1,75           | 0,625                       | 0,554 | 0,541 | 0,609 | 0,790 | 1,120 |
|         | 2,00           | 0,615                       | 0,534 | 0,510 | 0,573 | 0,768 | 1,161 |
|         | 2,25           | 0,607                       | 0,516 | 0,481 | 0,528 | 0,698 | 1,049 |
|         | 2,50           | 0,601                       | 0,500 | 0,454 | 0,482 | 0,616 | 0,899 |
|         | 2,75           | 0,596                       | 0,487 | 0,429 | 0,439 | 0,541 | 0,765 |
|         | 3,00           | 0,591                       | 0,474 | 0,407 | 0,401 | 0,476 | 0,658 |
|         | 3,25           | 0,586                       | 0,464 | 0,387 | 0,368 | 0,422 | 0,574 |
| 0,75    | 0,25           | 0,581                       | 0,608 | 0,602 | 0,602 | 0,612 | 0,633 |
|         | 0,50           | 0,666                       | 0,629 | 0,631 | 0,669 | 0,751 | 0,882 |
|         | 0,75           | 0,609                       | 0,584 | 0,588 | 0,635 | 0,743 | 0,928 |
|         | 1,00           | 0,567                       | 0,540 | 0,550 | 0,608 | 0,742 | 0,997 |
|         | 1,25           | 0,533                       | 0,499 | 0,516 | 0,588 | 0,735 | 0,997 |
|         | 1,50           | 0,507                       | 0,464 | 0,480 | 0,572 | 0,744 | 1,020 |
|         | 1,75           | 0,486                       | 0,433 | 0,444 | 0,545 | 0,773 | 1,156 |
|         | 2,00           | 0,469                       | 0,408 | 0,409 | 0,506 | 0,747 | 1,195 |
|         | 2,25           | 0,455                       | 0,386 | 0,377 | 0,457 | 0,670 | 1,073 |
|         | 2,50           | 0,444                       | 0,367 | 0,348 | 0,408 | 0,580 | 0,903 |
|         | 2,75           | 0,434                       | 0,350 | 0,321 | 0,362 | 0,496 | 0,747 |
|         | 3,00           | 0,425                       | 0,336 | 0,297 | 0,320 | 0,423 | 0,622 |
|         | 3,25           | 0,417                       | 0,323 | 0,276 | 0,284 | 0,361 | 0,524 |
| 1,00    | 0,25           | 0,498                       | 0,535 | 0,552 | 0,569 | 0,592 | 0,621 |
|         | 0,50           | 0,629                       | 0,609 | 0,625 | 0,682 | 0,789 | 0,943 |
|         | 0,75           | 0,571                       | 0,557 | 0,579 | 0,649 | 0,786 | 0,997 |
|         | 1,00           | 0,520                       | 0,507 | 0,536 | 0,620 | 0,787 | 1,072 |
|         | 1,25           | 0,479                       | 0,460 | 0,498 | 0,598 | 0,779 | 1,071 |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,00 | 1,50           | 0,447                       | 0,420 | 0,459 | 0,581 | 0,788 | 1,096 |
|      | 1,75           | 0,421                       | 0,386 | 0,420 | 0,552 | 0,817 | 1,236 |
|      | 2,00           | 0,400                       | 0,358 | 0,383 | 0,510 | 0,789 | 1,277 |
|      | 2,25           | 0,383                       | 0,334 | 0,349 | 0,459 | 0,706 | 1,143 |
|      | 2,50           | 0,369                       | 0,313 | 0,318 | 0,405 | 0,606 | 0,951 |
|      | 2,75           | 0,357                       | 0,295 | 0,289 | 0,354 | 0,510 | 0,773 |
|      | 3,00           | 0,346                       | 0,279 | 0,263 | 0,308 | 0,427 | 0,628 |
|      | 3,25           | 0,336                       | 0,265 | 0,240 | 0,268 | 0,357 | 0,517 |
| 1,25 | 0,25           | 0,434                       | 0,477 | 0,511 | 0,542 | 0,575 | 0,610 |
|      | 0,50           | 0,609                       | 0,602 | 0,631 | 0,703 | 0,828 | 0,993 |
|      | 0,75           | 0,553                       | 0,551 | 0,589 | 0,678 | 0,834 | 1,056 |
|      | 1,00           | 0,498                       | 0,498 | 0,545 | 0,651 | 0,839 | 1,138 |
|      | 1,25           | 0,454                       | 0,449 | 0,506 | 0,629 | 0,833 | 1,138 |
|      | 1,50           | 0,419                       | 0,407 | 0,466 | 0,613 | 0,844 | 1,165 |
|      | 1,75           | 0,390                       | 0,372 | 0,427 | 0,584 | 0,876 | 1,309 |
|      | 2,00           | 0,368                       | 0,343 | 0,389 | 0,541 | 0,847 | 1,355 |
|      | 2,25           | 0,349                       | 0,318 | 0,353 | 0,485 | 0,757 | 1,211 |
|      | 2,50           | 0,334                       | 0,296 | 0,320 | 0,427 | 0,646 | 0,996 |
|      | 2,75           | 0,320                       | 0,277 | 0,289 | 0,372 | 0,539 | 0,793 |
| 3,00 | 0,308          | 0,260                       | 0,261 | 0,321 | 0,446 | 0,629 |       |
| 3,25 | 0,298          | 0,245                       | 0,236 | 0,276 | 0,367 | 0,508 |       |
| 1,50 | 0,25           | 0,381                       | 0,427 | 0,475 | 0,517 | 0,558 | 0,598 |
|      | 0,50           | 0,596                       | 0,600 | 0,640 | 0,725 | 0,863 | 1,030 |
|      | 0,75           | 0,545                       | 0,554 | 0,605 | 0,710 | 0,879 | 1,100 |
|      | 1,00           | 0,489                       | 0,502 | 0,564 | 0,685 | 0,887 | 1,187 |
|      | 1,25           | 0,444                       | 0,452 | 0,526 | 0,666 | 0,884 | 1,189 |
|      | 1,50           | 0,407                       | 0,410 | 0,486 | 0,651 | 0,897 | 1,220 |
|      | 1,75           | 0,378                       | 0,375 | 0,447 | 0,623 | 0,931 | 1,365 |
|      | 2,00           | 0,355                       | 0,345 | 0,408 | 0,578 | 0,902 | 1,415 |
|      | 2,25           | 0,336                       | 0,320 | 0,371 | 0,520 | 0,806 | 1,263 |
|      | 2,50           | 0,320                       | 0,297 | 0,336 | 0,458 | 0,685 | 1,022 |
|      | 2,75           | 0,306                       | 0,278 | 0,304 | 0,397 | 0,567 | 0,791 |
| 3,00 | 0,294          | 0,260                       | 0,274 | 0,341 | 0,462 | 0,609 |       |
| 3,25 | 0,283          | 0,244                       | 0,247 | 0,292 | 0,374 | 0,482 |       |
| 1,75 | 0,25           | 0,336                       | 0,386 | 0,444 | 0,495 | 0,542 | 0,585 |
|      | 0,50           | 0,586                       | 0,602 | 0,651 | 0,746 | 0,893 | 1,054 |
|      | 0,75           | 0,542                       | 0,561 | 0,623 | 0,740 | 0,916 | 1,132 |
|      | 1,00           | 0,488                       | 0,511 | 0,585 | 0,719 | 0,928 | 1,221 |
|      | 1,25           | 0,442                       | 0,463 | 0,550 | 0,702 | 0,927 | 1,225 |
|      | 1,50           | 0,406                       | 0,421 | 0,511 | 0,689 | 0,943 | 1,259 |
|      | 1,75           | 0,377                       | 0,386 | 0,472 | 0,661 | 0,979 | 1,402 |
|      | 2,00           | 0,353                       | 0,356 | 0,432 | 0,616 | 0,950 | 1,457 |
|      | 2,25           | 0,334                       | 0,331 | 0,394 | 0,555 | 0,849 | 1,296 |
|      | 2,50           | 0,319                       | 0,308 | 0,358 | 0,488 | 0,717 | 1,024 |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,75    | 2,75           | 0,305                       | 0,288 | 0,324 | 0,423 | 0,586 | 0,760 |
|         | 3,00           | 0,292                       | 0,270 | 0,292 | 0,362 | 0,470 | 0,561 |
|         | 3,25           | 0,281                       | 0,253 | 0,263 | 0,308 | 0,374 | 0,439 |
| 2,00    | 0,25           | 0,300                       | 0,352 | 0,418 | 0,476 | 0,528 | 0,573 |
|         | 0,50           | 0,579                       | 0,604 | 0,661 | 0,764 | 0,917 | 1,067 |
|         | 0,75           | 0,542                       | 0,569 | 0,642 | 0,767 | 0,946 | 1,154 |
|         | 1,00           | 0,490                       | 0,522 | 0,607 | 0,749 | 0,962 | 1,243 |
|         | 1,25           | 0,445                       | 0,476 | 0,574 | 0,734 | 0,963 | 1,248 |
|         | 1,50           | 0,410                       | 0,435 | 0,536 | 0,723 | 0,980 | 1,284 |
|         | 1,75           | 0,381                       | 0,401 | 0,497 | 0,696 | 1,019 | 1,421 |
|         | 2,00           | 0,358                       | 0,372 | 0,458 | 0,650 | 0,990 | 1,482 |
|         | 2,25           | 0,340                       | 0,346 | 0,419 | 0,586 | 0,883 | 1,310 |
|         | 2,50           | 0,324                       | 0,323 | 0,381 | 0,516 | 0,741 | 1,001 |
|         | 2,75           | 0,311                       | 0,303 | 0,345 | 0,445 | 0,596 | 0,697 |
|         | 3,00           | 0,298                       | 0,284 | 0,311 | 0,379 | 0,468 | 0,484 |
|         | 3,25           | 0,286                       | 0,266 | 0,280 | 0,320 | 0,364 | 0,380 |

Как показывают вычисления,  $M_{22}$  и  $M_{33}$  имеют тот же порядок, что и масса корабля,  $M_{55}$  и  $M_{66}$  — порядок момента инерции массы корабля относительно центральной поперечной оси. Величина  $M_{44}$  составляет обычно 25—40% от момента инерции массы корабля относительно продольной оси.

## § 8. Демпфирование

Демпфирование (сопротивление воды колебаниям) обусловлено тем, что качающийся корабль затрачивает энергию на преодоление сил трения, вихреобразование и волнообразование. Таким образом, демпфирование состоит из вязкостной составляющей, связанной с трением и вихреобразованием, и волновой составляющей.

Как уже говорилось, в гидродинамической теории качки вода рассматривается как идеальная жидкость и вследствие этого принимается во внимание только волновая составляющая демпфирования.

Демпфирующие силы волновой природы линейно зависят от скорости колебаний. Таким образом, коэффициенты демпфирования представляют собой коэффициенты пропорциональности между соответствующими силами (моментами) и первыми степенями линейных или угловых скоростей качки.

Таблица 4. Значения коэффициента  $m_{44}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 0,25    | 0,25           | 22,62                       | 24,57 | 22,75 | 20,94 | 19,19 | 17,57 |
|         | 0,50           | 1,639                       | 1,419 | 1,193 | 0,985 | 0,844 | 0,837 |
|         | 0,75           | 0,240                       | 0,175 | 0,113 | 0,068 | 0,066 | 0,175 |
|         | 1,00           | 0,053                       | 0,029 | 0,008 | 0,000 | 0,024 | 0,115 |
|         | 1,25           | 0,022                       | 0,019 | 0,013 | 0,018 | 0,046 | 0,120 |
|         | 1,50           | 0,025                       | 0,028 | 0,031 | 0,040 | 0,068 | 0,128 |
|         | 1,75           | 0,029                       | 0,037 | 0,046 | 0,059 | 0,084 | 0,135 |
|         | 2,00           | 0,033                       | 0,044 | 0,057 | 0,072 | 0,095 | 0,135 |
|         | 2,25           | 0,036                       | 0,049 | 0,064 | 0,082 | 0,103 | 0,135 |
|         | 2,50           | 0,039                       | 0,053 | 0,069 | 0,087 | 0,109 | 0,138 |
|         | 2,75           | 0,041                       | 0,055 | 0,071 | 0,091 | 0,113 | 0,140 |
|         | 3,00           | 0,043                       | 0,056 | 0,072 | 0,092 | 0,115 | 0,142 |
| 3,25    | 0,044          | 0,057                       | 0,073 | 0,093 | 0,116 | 0,143 |       |
| 0,50    | 0,25           | 16,47                       | 17,44 | 15,67 | 14,02 | 12,58 | 11,45 |
|         | 0,50           | 1,295                       | 1,070 | 0,850 | 0,674 | 0,607 | 0,705 |
|         | 0,75           | 0,210                       | 0,145 | 0,086 | 0,049 | 0,061 | 0,169 |
|         | 1,00           | 0,052                       | 0,028 | 0,007 | 0,000 | 0,021 | 0,091 |
|         | 1,25           | 0,024                       | 0,018 | 0,012 | 0,014 | 0,034 | 0,083 |
|         | 1,50           | 0,024                       | 0,026 | 0,028 | 0,033 | 0,051 | 0,088 |
|         | 1,75           | 0,027                       | 0,034 | 0,042 | 0,050 | 0,066 | 0,095 |
|         | 2,00           | 0,031                       | 0,041 | 0,052 | 0,063 | 0,077 | 0,100 |
|         | 2,25           | 0,035                       | 0,047 | 0,059 | 0,072 | 0,086 | 0,104 |
|         | 2,50           | 0,038                       | 0,050 | 0,064 | 0,079 | 0,094 | 0,109 |
|         | 2,75           | 0,041                       | 0,053 | 0,068 | 0,083 | 0,099 | 0,114 |
|         | 3,00           | 0,043                       | 0,055 | 0,070 | 0,086 | 0,102 | 0,118 |
| 3,25    | 0,045          | 0,057                       | 0,071 | 0,087 | 0,104 | 0,122 |       |
| 0,75    | 0,25           | 13,43                       | 14,03 | 12,41 | 10,99 | 9,879 | 9,154 |
|         | 0,50           | 1,028                       | 0,817 | 0,627 | 0,506 | 0,520 | 0,671 |
|         | 0,75           | 0,170                       | 0,109 | 0,060 | 0,036 | 0,060 | 0,163 |
|         | 1,00           | 0,047                       | 0,025 | 0,006 | 0,000 | 0,016 | 0,067 |
|         | 1,25           | 0,025                       | 0,018 | 0,011 | 0,009 | 0,018 | 0,046 |
|         | 1,50           | 0,020                       | 0,023 | 0,022 | 0,021 | 0,026 | 0,040 |
|         | 1,75           | 0,022                       | 0,028 | 0,031 | 0,031 | 0,034 | 0,042 |
|         | 2,00           | 0,024                       | 0,031 | 0,037 | 0,039 | 0,040 | 0,043 |
|         | 2,25           | 0,026                       | 0,034 | 0,040 | 0,044 | 0,045 | 0,045 |
|         | 2,50           | 0,027                       | 0,035 | 0,042 | 0,047 | 0,049 | 0,048 |
|         | 2,75           | 0,028                       | 0,036 | 0,043 | 0,049 | 0,052 | 0,051 |
|         | 3,00           | 0,029                       | 0,036 | 0,043 | 0,049 | 0,053 | 0,053 |
| 3,25    | 0,029          | 0,036                       | 0,043 | 0,049 | 0,052 | 0,051 |       |
| 1,00    | 0,25           | 11,65                       | 12,04 | 10,55 | 9,337 | 8,473 | 8,040 |
|         | 0,50           | 0,866                       | 0,672 | 0,513 | 0,436 | 0,501 | 0,636 |
|         | 0,75           | 0,142                       | 0,086 | 0,045 | 0,030 | 0,060 | 0,158 |
|         | 1,00           | 0,042                       | 0,022 | 0,006 | 0,000 | 0,014 | 0,057 |
|         | 1,25           | 0,025                       | 0,009 | 0,010 | 0,006 | 0,012 | 0,031 |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,00 | 1,50           | 0,018                       | 0,021 | 0,018 | 0,015 | 0,015 | 0,023 |
|      | 1,75           | 0,018                       | 0,023 | 0,024 | 0,022 | 0,020 | 0,022 |
|      | 2,00           | 0,018                       | 0,024 | 0,027 | 0,026 | 0,023 | 0,021 |
|      | 2,25           | 0,018                       | 0,024 | 0,028 | 0,029 | 0,027 | 0,022 |
|      | 2,50           | 0,018                       | 0,024 | 0,028 | 0,030 | 0,029 | 0,024 |
|      | 2,75           | 0,017                       | 0,023 | 0,027 | 0,029 | 0,029 | 0,026 |
|      | 3,00           | 0,016                       | 0,021 | 0,025 | 0,028 | 0,028 | 0,026 |
|      | 3,25           | 0,016                       | 0,020 | 0,024 | 0,026 | 0,026 | 0,023 |
| 1,25 | 0,25           | 10,39                       | 10,63 | 9,263 | 8,211 | 7,550 | 7,343 |
|      | 0,50           | 0,764                       | 0,586 | 0,451 | 0,407 | 0,504 | 0,503 |
|      | 0,75           | 0,123                       | 0,072 | 0,037 | 0,028 | 0,061 | 0,153 |
|      | 1,00           | 0,039                       | 0,020 | 0,005 | 0,000 | 0,013 | 0,052 |
|      | 1,25           | 0,025                       | 0,021 | 0,010 | 0,005 | 0,009 | 0,026 |
|      | 1,50           | 0,015                       | 0,020 | 0,017 | 0,012 | 0,012 | 0,018 |
|      | 1,75           | 0,016                       | 0,021 | 0,021 | 0,018 | 0,015 | 0,017 |
|      | 2,00           | 0,015                       | 0,020 | 0,023 | 0,022 | 0,018 | 0,016 |
|      | 2,25           | 0,014                       | 0,019 | 0,023 | 0,023 | 0,021 | 0,016 |
|      | 2,50           | 0,013                       | 0,018 | 0,021 | 0,023 | 0,022 | 0,018 |
|      | 2,75           | 0,011                       | 0,016 | 0,019 | 0,022 | 0,022 | 0,019 |
|      | 3,00           | 0,010                       | 0,014 | 0,017 | 0,019 | 0,020 | 0,018 |
| 3,25 | 0,009          | 0,012                       | 0,015 | 0,017 | 0,017 | 0,015 |       |
| 1,50 | 0,25           | 9,370                       | 9,480 | 8,225 | 7,322 | 6,835 | 6,804 |
|      | 0,50           | 0,693                       | 0,529 | 0,415 | 0,396 | 0,512 | 3,355 |
|      | 0,75           | 0,110                       | 0,063 | 0,032 | 0,028 | 0,061 | 0,150 |
|      | 1,00           | 0,037                       | 0,019 | 0,005 | 0,000 | 0,012 | 0,050 |
|      | 1,25           | 0,025                       | 0,020 | 0,010 | 0,005 | 0,008 | 0,025 |
|      | 1,50           | 0,012                       | 0,019 | 0,017 | 0,012 | 0,011 | 0,017 |
|      | 1,75           | 0,014                       | 0,019 | 0,020 | 0,017 | 0,014 | 0,016 |
|      | 2,00           | 0,012                       | 0,018 | 0,021 | 0,020 | 0,017 | 0,015 |
|      | 2,25           | 0,011                       | 0,017 | 0,021 | 0,022 | 0,019 | 0,015 |
|      | 2,50           | 0,010                       | 0,014 | 0,019 | 0,021 | 0,021 | 0,017 |
|      | 2,75           | 0,008                       | 0,012 | 0,016 | 0,019 | 0,020 | 0,018 |
|      | 3,00           | 0,007                       | 0,010 | 0,014 | 0,016 | 0,018 | 0,017 |
| 3,25 | 0,005          | 0,008                       | 0,011 | 0,014 | 0,015 | 0,013 |       |
| 1,75 | 0,25           | 8,469                       | 8,464 | 7,324 | 6,561 | 6,226 | 6,339 |
|      | 0,50           | 0,642                       | 0,490 | 0,393 | 0,393 | 0,521 | 1,029 |
|      | 0,75           | 0,101                       | 0,057 | 0,030 | 0,028 | 0,058 | 0,147 |
|      | 1,00           | 0,035                       | 0,018 | 0,004 | 0,000 | 0,011 | 0,049 |
|      | 1,25           | 0,025                       | 0,020 | 0,010 | 0,005 | 0,008 | 0,025 |
|      | 1,50           | 0,009                       | 0,018 | 0,017 | 0,012 | 0,011 | 0,017 |
|      | 1,75           | 0,012                       | 0,018 | 0,020 | 0,017 | 0,014 | 0,017 |
|      | 2,00           | 0,011                       | 0,017 | 0,021 | 0,020 | 0,017 | 0,016 |
|      | 2,25           | 0,009                       | 0,015 | 0,019 | 0,021 | 0,020 | 0,016 |
|      | 2,50           | 0,007                       | 0,012 | 0,017 | 0,020 | 0,021 | 0,019 |

| T <sub>v</sub> | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|----------------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,75           | 2,75           | 0,006                       | 0,010 | 0,014 | 0,018 | 0,020 | 0,020 |
|                | 3,00           | 0,004                       | 0,008 | 0,012 | 0,015 | 0,018 | 0,018 |
|                | 3,25           | 0,003                       | 0,006 | 0,009 | 0,012 | 0,014 | 0,013 |
| 2,00           | 0,25           | 7,646                       | 7,550 | 6,529 | 5,898 | 5,698 | 5,929 |
|                | 0,50           | 0,602                       | 0,461 | 0,379 | 0,394 | 0,530 | 0,919 |
|                | 0,75           | 0,094                       | 0,053 | 0,028 | 0,028 | 0,064 | 0,145 |
|                | 1,00           | 0,033                       | 0,017 | 0,004 | 0,000 | 0,011 | 0,048 |
|                | 1,25           | 0,024                       | 0,020 | 0,010 | 0,005 | 0,008 | 0,025 |
|                | 1,50           | 0,005                       | 0,018 | 0,017 | 0,012 | 0,011 | 0,018 |
|                | 1,75           | 0,011                       | 0,018 | 0,020 | 0,018 | 0,015 | 0,019 |
|                | 2,00           | 0,009                       | 0,016 | 0,021 | 0,021 | 0,018 | 0,017 |
|                | 2,25           | 0,007                       | 0,014 | 0,019 | 0,022 | 0,021 | 0,018 |
|                | 2,50           | 0,006                       | 0,011 | 0,016 | 0,020 | 0,022 | 0,021 |
|                | 2,75           | 0,004                       | 0,009 | 0,013 | 0,018 | 0,021 | 0,021 |
|                | 3,00           | 0,003                       | 0,006 | 0,010 | 0,015 | 0,018 | 0,019 |
| 3,25           | 0,001          | 0,004                       | 0,008 | 0,012 | 0,015 | 0,014 |       |

Обозначим коэффициенты демпфирования корабля через  $\Lambda$  и будем приписывать им те же индексы  $jk$ , что и присоединенным массам. Матрица коэффициентов демпфирования

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} & \Lambda_{15} & \Lambda_{16} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} & \Lambda_{25} & \Lambda_{26} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} & \Lambda_{35} & \Lambda_{36} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} & \Lambda_{45} & \Lambda_{46} \\ \Lambda_{51} & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & \Lambda_{54} & \Lambda_{55} & \Lambda_{56} \\ \Lambda_{61} & \Lambda_{62} & \Lambda_{63} & \Lambda_{64} & \Lambda_{65} & \Lambda_{66} \end{vmatrix}$$

так же, как и матрица присоединенных масс, симметрична относительно главной диагонали, т. е. коэффициенты  $\Lambda_{jk}$  и  $\Lambda_{kj}$  равны друг другу и независимых коэффициентов будет 21.

Для симметричных тел отличаются от нуля коэффициенты демпфирования с теми же индексами, что и присоединенные массы. При наличии симметрии относительно плоскости  $Oxy$   $\Lambda_{jk} \neq 0$ , если  $j + k = 2n$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ); таких коэффициентов будет 12. При наличии двух плоскостей симметрии  $Oxz$  и  $Oxy$  от нуля отличаются  $\Lambda_{jj}$ ,  $\Lambda_{26}$  и  $\Lambda_{35}$ . Если имеет место симметрия относительно плоскостей  $Oxz$  и  $Oyz$ , то при  $j \neq k$  отличаются от нуля только коэффициенты  $\Lambda_{13}$ ,  $\Lambda_{15}$  и  $\Lambda_{24}$ . При трех плоскостях симметрии не равны нулю только  $\Lambda_{jj}$ .

Таблица 5. Значения коэффициента  $m_{24}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |        |        |        |
|---------|----------------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|         |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 0,25    | 0,25           | -2,601                      | -2,928 | -3,099 | -3,212 | -3,229 | -3,100 |
|         | 0,50           | -0,729                      | -0,772 | -0,779 | -0,727 | -0,590 | -0,338 |
|         | 0,75           | -0,254                      | -0,260 | -0,244 | -0,194 | -0,086 | 0,107  |
|         | 1,00           | -0,073                      | -0,061 | -0,038 | 0,008  | 0,099  | 0,258  |
|         | 1,25           | 0,008                       | 0,034  | 0,061  | 0,105  | 0,183  | 0,311  |
|         | 1,50           | 0,048                       | 0,084  | 0,117  | 0,156  | 0,226  | 0,330  |
|         | 1,75           | 0,070                       | 0,110  | 0,149  | 0,190  | 0,249  | 0,339  |
|         | 2,00           | 0,083                       | 0,125  | 0,167  | 0,210  | 0,262  | 0,335  |
|         | 2,25           | 0,091                       | 0,132  | 0,176  | 0,222  | 0,271  | 0,331  |
|         | 2,50           | 0,096                       | 0,135  | 0,180  | 0,227  | 0,277  | 0,331  |
|         | 2,75           | 0,099                       | 0,137  | 0,180  | 0,228  | 0,279  | 0,331  |
|         | 3,00           | 0,100                       | 0,136  | 0,178  | 0,225  | 0,277  | 0,330  |
| 3,25    | 0,102          | 0,136                       | 0,176  | 0,221  | 0,272  | 0,327  |        |
| 0,50    | 0,25           | -1,906                      | -2,091 | -2,128 | -2,090 | -1,949 | -1,674 |
|         | 0,50           | -0,566                      | -0,580 | -0,553 | -0,465 | -0,304 | -0,075 |
|         | 0,75           | -0,210                      | -0,208 | -0,185 | -0,133 | -0,042 | 0,087  |
|         | 1,00           | -0,064                      | -0,051 | -0,031 | 0,007  | 0,070  | 0,157  |
|         | 1,25           | 0,006                       | 0,029  | 0,051  | 0,082  | 0,131  | 0,195  |
|         | 1,50           | 0,044                       | 0,075  | 0,101  | 0,130  | 0,170  | 0,219  |
|         | 1,75           | 0,066                       | 0,102  | 0,133  | 0,161  | 0,196  | 0,237  |
|         | 2,00           | 0,080                       | 0,118  | 0,154  | 0,184  | 0,214  | 0,248  |
|         | 2,25           | 0,090                       | 0,128  | 0,165  | 0,199  | 0,229  | 0,256  |
|         | 2,50           | 0,096                       | 0,134  | 0,172  | 0,208  | 0,239  | 0,265  |
|         | 2,75           | 0,101                       | 0,137  | 0,175  | 0,212  | 0,246  | 0,272  |
|         | 3,00           | 0,104                       | 0,139  | 0,176  | 0,214  | 0,249  | 0,278  |
| 3,25    | 0,106          | 0,140                       | 0,176  | 0,214  | 0,250  | 0,281  |        |
| 0,75    | 0,25           | -1,571                      | -1,697 | -1,680 | -1,590 | -1,408 | -1,115 |
|         | 0,50           | -0,444                      | -0,444 | -0,405 | -0,314 | -0,172 | -0,002 |
|         | 0,75           | -0,155                      | -0,149 | -0,126 | -0,083 | -0,021 | 0,052  |
|         | 1,00           | -0,042                      | -0,032 | -0,018 | 0,004  | 0,035  | 0,069  |
|         | 1,25           | 0,009                       | 0,026  | 0,036  | 0,048  | 0,064  | 0,078  |
|         | 1,50           | 0,037                       | 0,057  | 0,068  | 0,075  | 0,082  | 0,085  |
|         | 1,75           | 0,052                       | 0,074  | 0,088  | 0,093  | 0,095  | 0,092  |
|         | 2,00           | 0,062                       | 0,085  | 0,100  | 0,106  | 0,104  | 0,097  |
|         | 2,25           | 0,068                       | 0,090  | 0,106  | 0,114  | 0,112  | 0,103  |
|         | 2,50           | 0,072                       | 0,093  | 0,110  | 0,118  | 0,118  | 0,109  |
|         | 2,75           | 0,075                       | 0,095  | 0,111  | 0,120  | 0,121  | 0,114  |
|         | 3,00           | 0,076                       | 0,096  | 0,111  | 0,120  | 0,122  | 0,115  |
| 3,25    | 0,078          | 0,096                       | 0,110  | 0,119  | 0,120  | 0,110  |        |
| 1,00    | 0,25           | -1,384                      | -1,472 | -1,424 | -1,308 | -1,112 | -0,827 |
|         | 0,50           | -0,374                      | -0,369 | -0,329 | -0,246 | -0,127 | 0,001  |
|         | 0,75           | -0,120                      | -0,113 | -0,093 | -0,060 | -0,017 | 0,030  |
|         | 1,00           | -0,025                      | -0,017 | -0,009 | 0,002  | 0,017  | 0,033  |
|         | 1,25           | 0,014                       | 0,025  | 0,028  | 0,031  | 0,033  | 0,034  |
|         | 1,50           | 0,032                       | 0,045  | 0,049  | 0,046  | 0,042  | 0,035  |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |        |        |        |
|------|----------------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|      |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 1,00 | 1,75           | 0,041                       | 0,055  | 0,060  | 0,056  | 0,048  | 0,037  |
|      | 2,00           | 0,046                       | 0,059  | 0,065  | 0,061  | 0,052  | 0,038  |
|      | 2,25           | 0,048                       | 0,060  | 0,066  | 0,064  | 0,055  | 0,041  |
|      | 2,50           | 0,049                       | 0,060  | 0,065  | 0,064  | 0,057  | 0,044  |
|      | 2,75           | 0,048                       | 0,058  | 0,063  | 0,063  | 0,057  | 0,045  |
|      | 3,00           | 0,048                       | 0,056  | 0,061  | 0,060  | 0,055  | 0,044  |
|      | 3,25           | 0,047                       | 0,054  | 0,058  | 0,057  | 0,051  | 0,037  |
| 1,25 | 0,25           | -1,259                      | -1,315 | -1,244 | -1,112 | -0,911 | -0,637 |
|      | 0,50           | -0,331                      | -0,325 | -0,287 | -0,213 | -0,114 | -0,012 |
|      | 0,75           | -0,097                      | -0,092 | -0,075 | -0,050 | -0,019 | 0,015  |
|      | 1,00           | -0,014                      | -0,009 | -0,004 | 0,001  | 0,009  | 0,019  |
|      | 1,25           | 0,017                       | 0,026  | 0,025  | 0,023  | 0,021  | 0,019  |
|      | 1,50           | 0,030                       | 0,040  | 0,040  | 0,034  | 0,027  | 0,019  |
|      | 1,75           | 0,035                       | 0,045  | 0,047  | 0,040  | 0,030  | 0,020  |
|      | 2,00           | 0,037                       | 0,046  | 0,048  | 0,043  | 0,033  | 0,020  |
|      | 2,25           | 0,036                       | 0,045  | 0,047  | 0,044  | 0,035  | 0,022  |
|      | 2,50           | 0,035                       | 0,042  | 0,045  | 0,042  | 0,035  | 0,024  |
|      | 2,75           | 0,033                       | 0,039  | 0,041  | 0,040  | 0,034  | 0,024  |
| 3,00 | 0,031          | 0,036                       | 0,038  | 0,036  | 0,031  | 0,022  |        |
| 3,25 | 0,029          | 0,033                       | 0,034  | 0,032  | 0,027  | 0,016  |        |
| 1,50 | 0,25           | -1,160                      | -1,188 | -1,099 | -0,957 | -0,754 | -0,492 |
|      | 0,50           | -0,302                      | -0,297 | -0,262 | -0,197 | -0,113 | -0,029 |
|      | 0,75           | -0,083                      | -0,079 | -0,065 | -0,046 | -0,022 | 0,007  |
|      | 1,00           | -0,007                      | -0,003 | -0,001 | 0,000  | 0,005  | 0,013  |
|      | 1,25           | 0,020                       | 0,027  | 0,024  | 0,020  | 0,016  | 0,015  |
|      | 1,50           | 0,030                       | 0,038  | 0,037  | 0,029  | 0,022  | 0,015  |
|      | 1,75           | 0,033                       | 0,041  | 0,041  | 0,034  | 0,025  | 0,017  |
|      | 2,00           | 0,032                       | 0,040  | 0,042  | 0,037  | 0,027  | 0,016  |
|      | 2,25           | 0,030                       | 0,037  | 0,039  | 0,036  | 0,029  | 0,018  |
|      | 2,50           | 0,028                       | 0,034  | 0,036  | 0,034  | 0,029  | 0,019  |
|      | 2,75           | 0,026                       | 0,030  | 0,032  | 0,031  | 0,027  | 0,020  |
| 3,00 | 0,023          | 0,027                       | 0,028  | 0,027  | 0,024  | 0,017  |        |
| 3,25 | 0,021          | 0,023                       | 0,024  | 0,023  | 0,019  | 0,011  |        |
| 1,75 | 0,25           | -1,074                      | -1,075 | -0,974 | -0,825 | -0,622 | -0,370 |
|      | 0,50           | -0,283                      | -0,279 | -0,247 | -0,189 | -0,117 | -0,044 |
|      | 0,75           | -0,073                      | -0,071 | -0,060 | -0,045 | -0,026 | 0,001  |
|      | 1,00           | -0,002                      | 0,000  | 0,000  | 0,000  | 0,003  | 0,011  |
|      | 1,25           | 0,023                       | 0,028  | 0,024  | 0,019  | 0,015  | 0,014  |
|      | 1,50           | 0,030                       | 0,037  | 0,035  | 0,028  | 0,021  | 0,015  |
|      | 1,75           | 0,031                       | 0,039  | 0,039  | 0,033  | 0,024  | 0,018  |
|      | 2,00           | 0,030                       | 0,037  | 0,039  | 0,035  | 0,026  | 0,017  |
|      | 2,25           | 0,027                       | 0,034  | 0,036  | 0,034  | 0,028  | 0,019  |
|      | 2,50           | 0,024                       | 0,030  | 0,033  | 0,032  | 0,028  | 0,021  |
|      | 2,75           | 0,022                       | 0,026  | 0,028  | 0,029  | 0,026  | 0,021  |
|      | 3,00           | 0,019                       | 0,022  | 0,024  | 0,025  | 0,023  | 0,018  |
|      | 3,25           | 0,016                       | 0,019  | 0,020  | 0,020  | 0,018  | 0,011  |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |        |        |        |
|---------|----------------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|         |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 2,00    | 0,25           | -0,994                      | -0,974 | -0,864 | -0,711 | -0,510 | -0,268 |
|         | 0,50           | -0,268                      | -0,265 | -0,237 | -0,186 | -0,124 | -0,058 |
|         | 0,75           | -0,066                      | -0,065 | -0,057 | -0,045 | -0,028 | -0,001 |
|         | 1,00           | 0,001                       | 0,003  | 0,001  | 0,000  | 0,002  | 0,011  |
|         | 1,25           | 0,024                       | 0,029  | 0,025  | 0,019  | 0,015  | 0,016  |
|         | 1,50           | 0,031                       | 0,037  | 0,035  | 0,028  | 0,022  | 0,018  |
|         | 1,75           | 0,031                       | 0,038  | 0,039  | 0,033  | 0,025  | 0,021  |
|         | 2,00           | 0,029                       | 0,036  | 0,038  | 0,035  | 0,028  | 0,021  |
|         | 2,25           | 0,026                       | 0,032  | 0,036  | 0,035  | 0,030  | 0,022  |
|         | 2,50           | 0,022                       | 0,028  | 0,032  | 0,032  | 0,030  | 0,024  |
|         | 2,75           | 0,019                       | 0,024  | 0,027  | 0,029  | 0,028  | 0,024  |
|         | 3,00           | 0,017                       | 0,020  | 0,023  | 0,024  | 0,024  | 0,021  |
|         | 3,25           | 0,014                       | 0,017  | 0,019  | 0,020  | 0,019  | 0,014  |

Рассматривая качку удлиненного корабля, можно, как уже упоминалось, не внося в расчет существенной погрешности, положить косинус угла между нормалью к смоченной поверхности и продольной осью равным нулю. Это предположение равносильно допущению о равенстве нулю коэффициентов  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{13}$  и  $\Lambda_{15}$ . Таким образом, для корабля большого удлинения (удлиненного корабля) при расчете качки должны приниматься во внимание девять коэффициентов демпфирования:  $\Lambda_{22}$ ,  $\Lambda_{33}$ ,  $\Lambda_{44}$ ,  $\Lambda_{55}$ ,  $\Lambda_{66}$ ,  $\Lambda_{35}$ ,  $\Lambda_{24}$ ,  $\Lambda_{26}$  и  $\Lambda_{46}$ .

Сохраним для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости представление (2.2)

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k.$$

В задачах о колебаниях тела, сопровождающихся волнообразованием, функции  $\Phi_k$  называются функциями излучения, так как через них определяется потенциал скоростей волн, излучаемых телом. Эти функции должны удовлетворять уравнению Лапласа, граничным условиям (2.3) на поверхности тела и (2.36) на свободной поверхности жидкости, условию затухания волнового движения на неограниченной глубине и условиям излучения. Последние условия в пространственной задаче о колебаниях тела и плоской задаче о колебаниях контура несколько различны. В пространственном случае качка вызывает кольцевые волны, расходящиеся во все стороны от колеблющегося тела. Это условие, как указал Н. Е. Кочин, определяется предельным равенством

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial R} + i\nu \Phi_k \right) = 0,$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

В плоском случае волны, вызываемые качкой, имеют вид бесконечно длинных прямолинейных валов, параллельных образующей цилиндра, поперечным сечением которого является колеблющийся контур. Условие распространения этих волн в обе стороны от контура записывается в виде (2.44).

Если тело совершает гармонические колебания с частотой  $\sigma$  на поверхности или под поверхностью идеальной жидкости, то, как указал М. Д. Хаскинд, имеет место соотношение

$$-\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk}. \quad (2.50)$$

При очень малых и очень больших частотах колебаний коэффициенты волнового демпфирования стремятся к нулю, так как в этих случаях колебания почти не вызывают волн.

При килевой и вертикальной качке корабля, как показывают исследования ряда авторов, волновая компонента демпфирования во много раз превышает вязкостную и последнюю можно во внимание не принимать. Примерно такая же картина имеет место, и для остальных видов качки, за исключением бортовой. В последнем случае определяющая роль переходит к вязкостной компоненте.

Приведем вывод формул для инерционно-демпфирующих сил, ограничиваясь для простоты рассмотрением качки на стоянке<sup>1</sup>.

Подставляя соотношение (2.50) в равенство (2.4), найдем

$$N_j = \sum_{k=1}^6 \left( M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k. \quad (2.51)$$

При качке на стоянке все шесть значений  $U_k$  суть малые первого порядка. Представим эти значения в виде

$$U_k = u_k e^{i\sigma t}, \quad (2.52)$$

где через

$$u_k = u_{k1} + i u_{k2}$$

обозначена комплексная амплитуда соответствующего вида качки. Поскольку в выражениях, содержащих множитель  $e^{i\sigma t}$ , мы условились принимать во внимание только действительную часть, приведенное комплексно-экспоненциальное представление скоростей равносильно следующему тригонометрическому представлению:

$$U_k = u_{k1} \cos \sigma t - u_{k2} \sin \sigma t. \quad (2.53)$$

Возвращаясь к комплексно-экспоненциальному представлению, можем написать

$$\dot{U}_k = i\sigma U_k.$$

<sup>1</sup> Инерционно-демпфирующие силы, действующие на корабль, имеющий ход, будут рассмотрены в § 17.

Напомним, что согласно принятому условию проекции главного вектора и главного момента инерционно-демпфирующих сил обозначаются одной буквой  $F_j$ , где значения  $j = 1, 2, 3$  приписываются проекциям главного вектора соответственно на оси  $Ox, Oy, Oz$ , а  $j = 4, 5, 6$  — проекциям главного момента на те же оси. Тогда на основании формул (2.1) и (2.51) получим

$$\begin{aligned} F_j &= -\frac{dN_j}{dt} = -\sum_{k=1}^6 \left( M_{jk} \dot{U}_k - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \dot{U}_k \right) = \\ &= -\sum_{k=1}^6 (M_{jk} \dot{U}_k + \Lambda_{jk} U_k). \end{aligned}$$

Коэффициенты волнового демпфирования  $\Lambda_{jk}$  для корабля в целом определяются через коэффициенты демпфирования  $\lambda_{jk}$  шпангоутных контуров по методу плоских сечений. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше при применении метода плоских сечений к расчету присоединенных масс, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{jk} &= \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{jk} dx, \quad (j, k = 2, 3, 4); \\ \Lambda_{35} &= -\int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{33} dx; \quad \Lambda_{55} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda_{33} dx; \\ \Lambda_{26} &= \int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{22} dx; \quad \Lambda_{46} = \int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{24} dx; \\ \Lambda_{66} &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda_{22} dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Для определения коэффициентов волнового демпфирования следует приравнять работу демпфирующих сил за период качки  $\tau = 2\pi/\sigma$  энергии, уносимой за тот же промежуток времени излучаемыми волнами.

Демпфирующие силы, действующие на качающийся контур, определяются формулами:

$$\begin{aligned} f_2^d &= -\lambda_{22} U_2 - \lambda_{24} U_4; \\ f_3^d &= -\lambda_{33} U_3; \\ f_4^d &= -\lambda_{24} U_2 - \lambda_{44} U_4. \end{aligned}$$

Вследствие принципа равенства действия и противодействия, силы, приложенные контуром к жидкости, будут иметь знаки, обратные демпфирующим силам, действующим на контур.

Для работы сил, приложенных к жидкости, за время  $dt$  легко получить формулу

$$\begin{aligned} dA &= -(f_2^d U_2 + f_3^d U_3 + f_4^d U_4) dt = \\ &= (\lambda_{22} U_2^2 + \lambda_{33} U_3^2 + \lambda_{44} U_4^2 + 2\lambda_{24} U_2 U_4) dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что работа этих сил за период качки  $\tau$  будет определяться интегралом

$$A = \int_0^{\tau} (\lambda_{22} U_2^2 + \lambda_{33} U_3^2 + \lambda_{44} U_4^2 + 2\lambda_{24} U_2 U_4) dt.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$A = \tau P_{\text{ср}},$$

где

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (\lambda_{22} U_2^2 + \lambda_{33} U_3^2 + \lambda_{44} U_4^2 + 2\lambda_{24} U_2 U_4) dt. \quad (2.55)$$

Нетрудно видеть, что  $P_{\text{ср}}$  представляет собой среднюю за период качки возможность демпфирующих сил. Чтобы вычислить ее, выведем формулу для определения среднего значения произведения двух величин  $U$  и  $V$ , изменяющихся во времени по гармоническому закону

$$U = ue^{i\sigma t}; \quad V = ve^{i\sigma t},$$

где  $u = u_1 + iu_2$  и  $v = v_1 + iv_2$  — комплексные амплитуды. Поскольку в выражениях для  $U$  и  $V$  принимаются во внимание только действительные части, их можно представить в виде:

$$U = \frac{1}{2} (ue^{i\sigma t} + \bar{u}e^{-i\sigma t});$$

$$V = \frac{1}{2} (ve^{i\sigma t} + \bar{v}e^{-i\sigma t}),$$

где черта над буквой означает переход к комплексно-сопряженной величине. Покажем справедливость принятых представлений. В самом деле

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (ue^{i\sigma t} + \bar{u}e^{-i\sigma t}) = \\ &= \frac{1}{2} [(u_1 + iu_2)(\cos \sigma t + i \sin \sigma t) + (u_1 - iu_2)(\cos \sigma t - i \sin \sigma t)] = \\ &= u_1 \cos \sigma t - u_2 \sin \sigma t, \end{aligned}$$

а последняя величина, как видно из формулы (2.53), равна  $U$ . Таким образом, имеем

$$UV = \frac{1}{4} (uve^{2i\sigma t} + \bar{u}\bar{v}e^{-2i\sigma t} + u\bar{v} + \bar{u}v).$$

Среднее за период значение этого произведения определяется выражением

$$(UV)_{\text{ср}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} UV dt = \frac{1}{4} (u\bar{v} + \bar{u}v).$$

Последнее равенство можно записать в более простой форме. Для этого найдем сумму

$$\bar{u}v + u\bar{v} = (u_1 + iu_2)(v_1 - iv_2) + (u_1 - iu_2)(v_1 + iv_2) = 2(u_1v_1 + u_2v_2)$$

и выпишем произведение

$$U\bar{V} = (u_1 + iu_2)e^{i\sigma t}(v_1 - iv_2)e^{-i\sigma t} = u_1v_1 + u_2v_2 + i(u_2v_1 - u_1v_2).$$

Таким образом,

$$u\bar{v} + \bar{u}v = 2 \operatorname{Re}(U\bar{V}) = 2 \operatorname{Re}(u\bar{v})$$

и, следовательно,

$$(UV)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U\bar{V}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(u\bar{v}). \quad (2.56)$$

В частности, можем написать

$$U_{\text{cp}}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U\bar{U}) = \frac{1}{2} |U|^2 = \frac{1}{2} |u|^2. \quad (2.57)$$

Вернемся теперь к формуле (2.55) для средней возможности демпфирующих сил. Воспользовавшись для осреднения значений  $U_2U_4$  и  $U_k^2$  равенствами (2.56) и (2.57), получим

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \lambda_{22} |u_2|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{33} |u_3|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{44} |u_4|^2 + \lambda_{24} \operatorname{Re}(u_2\bar{u}_4), \quad (2.58)$$

где  $|u_k|$  означает модуль комплексной амплитуды скорости, равной амплитуде скорости в обычном понимании этого термина, т. е. наибольшему значению  $u_{0k}$  линейной ( $k = 2, 3$ ) или угловой ( $k = 4$ ) скорости гармонических колебаний. Действительно,

$$|u_k| = \sqrt{u_{k1}^2 + u_{k2}^2} = u_{0k}.$$

Перейдем к определению энергии, уносимой расходящимися от контура волнами. Для этого вычислим энергию, переносимую через расположенные по обе стороны от контура полубесконечные вертикальные полосы, перпендикулярные оси  $Oy$  и простирающиеся вдоль оси  $Oz$  от  $-\infty$  до нуля. Поскольку рассматривается плоская задача, протяженность этих полос вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной плоскости контура, принимаем равной единице.

Обозначив амплитуду волн, распространяющихся вдоль положительной оси  $Oy$ , через  $A^+$ , а вдоль отрицательной — через  $A^-$ , волновое число через  $\nu$  и частоту через  $\sigma$ , на основании формулы (1.12) можем написать следующее выражение для потенциала скоростей расходящихся волн:

$$\Phi = i \frac{g}{\sigma} A^{\pm} e^{\nu z + i(\sigma t \mp \nu y)}. \quad (2.59)$$

Здесь, очевидно, верхние знаки относятся к волнам, распространяющимся вдоль положительного, а нижние — вдоль отрицательного направления оси  $Oy$ . Далее ограничимся рассмотре-

нием волн, отходящих от контура в направлении положительной оси, так как для волн, отходящих в противоположную сторону, выкладки будут такими же.

Давление волн  $p^+$  найдем с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа — Коши (1.4), заменив функцию  $\varphi^{(1)}$  на  $\Phi$ . Тогда получим

$$p^+ = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) = -\rho_* (i\sigma\Phi + gz) = \rho g (A^+ e^{vz} + i(\sigma t - vy) - z).$$

Возьмем теперь элемент  $dz$  рассматриваемой полосы и вычислим работу сил давления, приложенных к этому элементу, за время  $dt$ . Так как сила равна  $p^+ dz$ , а проекция скорости частиц жидкости, участвующих в волновом движении, на направление силы есть  $v_y^+$ , работа, очевидно, будет равна  $p^+ v_y^+ dz dt$ , где

$$v_y^+ = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -iv\Phi = A^+ \sigma e^{vz} + i(\sigma t - vy).$$

Поскольку в равенствах, содержащих множитель  $e^{i\sigma t}$ , принимаются во внимание только действительные части, можем переписать последние формулы в виде:

$$p^+ = \rho g [A^+ e^{vz} \cos(\sigma t - vy) - z];$$

$$v_y^+ = A^+ \sigma e^{vz} \cos(\sigma t - vy).$$

Таким образом, для работы сил давления за период  $\tau = 2\pi/\sigma$ , приходящейся на элемент  $dz$ , или равной ей энергии  $dE$ , переносимой волнами через этот элемент за тот же промежуток времени, получим выражение

$$dE^+ = \int_0^{\tau} p^+ v_y^+ dt dz = \rho g A^+ \sigma e^{vz} \times$$

$$\times \left[ A^+ e^{vz} \int_0^{2\pi/\sigma} \cos^2(\sigma t - vy) dt - z \int_0^{2\pi/\sigma} \cos(\sigma t - vy) dt \right].$$

Ввиду того, что

$$\int_0^{2\pi/\sigma} \cos^2(\sigma t - vy) dt = \frac{\pi}{\sigma}; \quad \int_0^{2\pi/\sigma} \cos(\sigma t - vy) dt = 0,$$

имеем

$$dE^+ = \pi \rho g |A^+|^2 e^{2vz} dz. \quad (2.60)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если под  $A^+$  понимать просто амплитуду (полувысоту) волн, то знак модуля в последней формуле можно не писать. Однако под  $A^+$  можно понимать и комплексную амплитуду волн

$$A^+ = A_1^+ + iA_2^+.$$

Тогда, записав давление и скорость в виде:

$$\begin{aligned} p^+ &= \rho g e^{\nu z} [A_1^+ \cos(\sigma t - \nu y) - A_2^+ \sin(\sigma t - \nu y)]; \\ v_y^+ &= \sigma e^{\nu z} [A_1^+ \cos(\sigma t - \nu y) - A_2^+ \sin(\sigma t - \nu y)], \end{aligned}$$

после выкладок, аналогичных проделанным выше, придем к формуле (2.60), в которой комплексная амплитуда должна браться по модулю.

Для того чтобы вычислить энергию, переносимую волнами через всю полубесконечную полосу, необходимо проинтегрировать выражение (2.60) для  $dE^+$  по переменной  $z$ . Таким образом, найдем

$$E^+ = \pi \rho g |A^+|^2 \int_{-\infty}^0 e^{2\nu z} dz = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 |A^+|^2,$$

где через

$$c = \frac{\sigma}{\nu} = \frac{g}{\sigma}$$

обозначена фазовая скорость волн.

Формула для энергии  $E^-$ , переносимой волнами в сторону отрицательной оси  $Oy$ , будет иметь аналогичный вид

$$E^- = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 |A^-|^2,$$

где  $A^-$  — амплитуда волн, распространяющихся вдоль отрицательного направления оси  $Oy$ .

Энергия, уносимая волнами в обе стороны от контура, будет

$$E = E^+ + E^- = \frac{1}{2} \pi \rho c^2 (|A^+|^2 + |A^-|^2). \quad (2.61)$$

Вводя обозначение

$$cA^\pm = \frac{g}{\sigma} A^\pm = B^\pm, \quad (2.62)$$

равенство (2.61) можно переписать в виде

$$E = \frac{1}{2} \pi \rho (|B^+|^2 + |B^-|^2). \quad (2.63)$$

Если теперь приравнять работу демпфирующих сил  $A = \tau P_{\text{ср}}$  энергии, уносимой расходящимися волнами, то, воспользовавшись формулами (2.58) и (2.63), найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{22} |u_2|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{33} |u_3|^2 + \frac{1}{2} \lambda_{44} |u_4|^2 + \lambda_{24} \operatorname{Re}(u_2 \bar{u}_4) = \\ = \frac{1}{4} \rho \sigma (|B^+|^2 + |B^-|^2). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного гармоническими колебаниями контура в плоскости  $Oyz$ , на основании равенств (2.2) и (2.52) можно записать в форме

$$\Phi = \sum_{k=2}^4 u_k \Phi_k e^{i\sigma t} \quad (2.65)$$

Но в рассматриваемом случае возмущенное движение жидкости будет состоять только из расходящихся волн, потенциал которых определяется формулой (2.59). С учетом соотношения (2.62) перепишем эту формулу в таком виде

$$\Phi = iB^{\pm} e^{vz + i(\sigma t \mp vy)} \quad (2.66)$$

Приравнявая (2.65) и (2.66), получим

$$iB^{\pm} e^{vz \mp ivy} = u_2 \Phi_2 + u_3 \Phi_3 + u_4 \Phi_4.$$

Из последнего равенства можно заключить, что  $B^{\pm}$  линейно зависит от  $u_2$ ,  $u_3$  и  $u_4$ , т. е. допускает следующее представление

$$\bar{B}^{\pm} = u_2 \bar{B}_2^{\pm} + u_3 \bar{B}_3^{\pm} + u_4 \bar{B}_4^{\pm}, \quad (2.67)$$

Рассмотрим чисто вертикальные колебания контура в отсутствие поперечно-горизонтальной и бортовой качки. Тогда, положив в формулах (2.64) и (2.67)  $u_2 = u_4 = 0$ , получим

$$\lambda_{33} = \frac{1}{2} \rho \sigma (|B_3^+|^2 + |B_3^-|^2). \quad (2.68)$$

Теперь будем считать, что контур совершает поперечно-горизонтальную и бортовую качку в отсутствие вертикальных колебаний ( $u_3 = 0$ ). В этом случае, как видно из равенства (2.67),

$$B^{\pm} = u_2 B_2^{\pm} + u_4 B_4^{\pm}$$

и, следовательно,

$$\bar{B}^{\pm} = \bar{u}_2 \bar{B}_2^{\pm} + \bar{u}_4 \bar{B}_4^{\pm}.$$

Воспользовавшись соотношением (2.57), представим  $|B^{\pm}|^2$  в виде

$$|B^{\pm}|^2 = \text{Re}(B^{\pm} \bar{B}^{\pm}) = \text{Re}[(u_2 B_2^{\pm} + u_4 B_4^{\pm})(\bar{u}_2 \bar{B}_2^{\pm} + \bar{u}_4 \bar{B}_4^{\pm})],$$

где, напомним,

$$u_2 = u_{21} + iu_{22}; \quad u_4 = u_{41} + iu_{42}.$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\text{Re}(u_2 \bar{u}_4) = u_{21} u_{41} + u_{22} u_{42} = \text{Re}(\bar{u}_2 u_4).$$

С учетом последнего равенства можем написать

$$|B^{\pm}|^2 = \text{Re}(u_2 \bar{u}_2 B_2^{\pm} \bar{B}_2^{\pm} + u_4 \bar{u}_4 B_4^{\pm} \bar{B}_4^{\pm} + 2u_2 \bar{u}_4 B_2^{\pm} \bar{B}_4^{\pm}).$$

Подставляя это значение  $|B^\pm|^2$  в формулу (2.64) и учитывая, что  $u_3 = 0$ , а  $|u_k|^2 = \text{Re}(u_k u_k^*)$ , получим общую формулу

$$\lambda_{jk} = \frac{1}{2} \rho \sigma \text{Re}(B_j^+ \bar{B}_k^+ + B_j^- \bar{B}_k^-), \quad (jk = 22, 44, 24). \quad (2.69)$$

Для  $\lambda_{22}$  и  $\lambda_{44}$  ( $j = k$ ) эта формула приобретает такой же вид, как и формула (2.68) для  $\lambda_{33}$ . Таким образом, имеем

$$\lambda_{kk} = \frac{1}{2} \rho \sigma (|\bar{B}_k^+|^2 + |B_k^-|^2), \quad (k = 2, 3, 4). \quad (2.70)$$

При известных коэффициентах демпфирования шпангоутов коэффициенты демпфирования корабля в целом  $\Lambda_{jk}$  могут быть найдены в соответствии с равенствами (2.54) с помощью квадратурных формул. Вместе с тем целесообразно получать пусть менее точные, но простые выражения для  $\Lambda_{jk}$ . С этой целью, следуя М. Д. Хаскинду, представим коэффициенты демпфирования шпангоутов  $\lambda_{jk}$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{22} &= \lambda_{022} \left(\frac{z}{T}\right)^2; & \lambda_{33} &= \lambda_{033} \left(\frac{b}{B}\right)^2; \\ \lambda_{44} &= \lambda_{044} \left(\frac{b}{B}\right)^6; & \lambda_{24} &= \lambda_{024} \frac{z}{T} \left(\frac{b}{B}\right)^3, \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

где  $\lambda_{0jk}$  — коэффициенты демпфирования миделя. Если теперь задать уравнения ватерлинии равновесия и нулевого батокса в виде (2.40), то интегралы в формулах (2.54) легко берутся аналитически. В результате интегрирования получаем:

$$\Lambda_{22} = \lambda_{022} L \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma}; \quad \Lambda_{33} = \lambda_{033} L \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha};$$

$$\Lambda_{55} = \lambda_{033} L^3 \frac{\alpha^2}{6(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)};$$

$$\Lambda_{66} = \lambda_{022} L^3 \frac{\gamma^2}{6(3 - \gamma)(3 - 2\gamma)};$$

$$\Lambda_{44} = \lambda_{044} L \int_0^1 (1 - x^n)^6 dx;$$

$$\Lambda_{24} = \lambda_{024} L \int_0^1 (1 - x^m) (1 - x^n)^3 dx.$$

Для того чтобы определить функции  $B_k^\pm$ , необходимо предварительно найти асимптотические значения функции Грина при  $y \rightarrow \pm \infty$ .

Функция Грина  $G$  рассматриваемой краевой задачи представляет собой амплитудную (не зависящую от времени) часть потенциала скоростей плоского источника, интенсивность которого изменяется во времени по гармоническому закону. Такой источ-

ник называется пульсирующим. Если он располагается в точке с координатами  $\eta$ ,  $\zeta$ , то функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \delta(y - \eta) \delta(z - \zeta), \quad (2.72)$$

где  $\delta(y - \eta)$  и  $\delta(z - \zeta)$  представляют собой дельта-функции Дирака. Дельта-функция имеет следующий смысл:

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = \xi; \\ 0 & \text{при } x \neq \xi. \end{cases}$$

В случае, когда  $y = \eta$ , а  $z \neq \zeta$  или  $y \neq \eta$ , а  $z = \zeta$ , произведение дельта-функций  $\delta(y - \eta) \delta(z - \zeta)$  считается равным нулю. Таким образом, функция Грина является гармонической во всей нижней полуплоскости, за исключением особой точки  $(\eta, \zeta)$ , где она обращается в бесконечность.

Помимо уравнения (2.72), функция Грина должна удовлетворять тем же граничным условиям, что и потенциал скоростей волнового движения жидкости, на свободной поверхности и на неограниченной глубине, а также условию излучения. Граничным условиям на контуре функция Грина сама по себе не удовлетворяет. Для того чтобы потенциал скоростей удовлетворял этим условиям, его амплитудную (не зависящую от времени) часть  $\varphi$  следует найти из интегрального уравнения, получаемого с помощью формулы Грина

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_l \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dl. \quad (2.73)$$

Как показано М. Д. Хаскиндом, на большом удалении от контура справедливы следующие асимптотические представления функции Грина:

$$G = -2\pi i e^{-iv(y + iz - \eta + i\zeta)} + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad \text{при } y \rightarrow +\infty;$$

$$G = -2\pi i e^{iv(y - iz - \eta - i\zeta)} + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad \text{при } y \rightarrow -\infty,$$

где  $O(1/y^2)$  — функция, которая при  $y \rightarrow \pm\infty$  стремится к нулю не медленнее, чем  $1/y^2$ .

Иногда эти выражения записываются в виде так называемых асимптотических равенств:

$$G \sim -2\pi i e^{-iv(y + iz - \eta + i\zeta)} \quad \text{при } y \rightarrow +\infty;$$

$$G \sim -2\pi i e^{iv(y - iz - \eta - i\zeta)} \quad \text{при } y \rightarrow -\infty,$$

где  $\sim$  носит название знака эквивалентности.

Подставляя последние равенства в формулу Грина (2.73) и учитывая, что на контуре шпангоута

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \eta} \cos(n, \eta) + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \cos(n, \zeta),$$

получаем следующее асимптотическое представление функции  $\varphi$ :

$$\varphi = i e^{\mp i\nu(y \pm iz)} \int_l e^{\pm i\nu(\eta - i\zeta)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \nu \varphi [\pm i \cos(n, \eta) + \cos(n, \zeta)] \right\} dl \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (2.74)$$

С другой стороны, руководствуясь формулой (2.66), можем написать

$$\varphi = \Phi e^{-i\delta t} = i B^{\pm} e^{\nu(z \mp iy)}.$$

Тогда, очевидно,  $B^{\pm}$  будет равно контурному интегралу в равенстве (2.74). Учитывая далее, что согласно выражениям (2.65) и (2.67)

$$\varphi = \sum_{k=2}^4 u_k \Phi_k; \quad B^{\pm} = \sum_{k=2}^4 u_k B_k^{\pm}$$

и заменяя для удобства в контурном интеграле  $\eta$  на  $y$  и  $\zeta$  на  $z$  (допустимость такой замены обозначений координат точек контура, по которому производится интегрирование, очевидна), получим

$$B_k^{\pm} = \int_l e^{\nu(z \pm iy)} \left\{ \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - \nu \Phi_k [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)] \right\} dl \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (2.75)$$

Для приближенного расчета коэффициентов демпфирования при любых значениях частотного параметра  $\nu$  заменим в последнем равенстве функции  $\Phi_k$ , соответствующие колебаниям шпангоутного контура на свободной поверхности, функциями, соответствующими тем же видам колебаний эллипса в безграничной жидкости. Тогда, пользуясь формулами (2.11), можем написать

$$\Phi_2 = -c_2 y; \quad \Phi_3 = -c_3 z; \quad \Phi_4 = -c_4 yz,$$

где

$$c_2 = \frac{2T}{b}; \quad c_3 = \frac{b}{2T}; \quad c_4 = \frac{\frac{b^2}{4} - T^2}{bT}.$$

Подставляя эти значения функций  $\Phi_k$  и значения их нормальных производных, определяемые выражениями (2.3), в равенство (2.75), получим

$$B_2^{\pm} = \int_l e^{\nu(z \pm iy)} \{ \cos(n, y) + \nu c_2 y [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)] \} dl;$$

$$B_3^{\pm} = \int_l e^{\nu(z \pm iy)} \{ \cos(n, z) + \nu c_3 z [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)] \} dl;$$

$$B_4^\pm = \int_l e^{\nu(z \pm iy)} \{y \cos(n, z) - z \cos(n, y) + \\ + \nu c_4 y z [\pm i \cos(n, y) + \cos(n, z)]\} dl.$$

Для вычисления  $B_k^\pm$  преобразуем по формуле Остроградского — Гаусса контурные интегралы в интегралы по площади шпангоута  $\omega$ . Напомним, что эта формула имеет вид

$$\int_l f(y, z) \cos(n, q) dl = \int_\omega \int \frac{\partial f}{\partial q} d\omega,$$

где  $l$  — замкнутый контур. Смоченная же часть контура шпангоута, принимаемая в расчет при вычислении гидродинамических сил, представляет собой разомкнутую кривую. Чтобы воспользоваться формулой Остроградского — Гаусса, эту кривую следует предварительно замкнуть, дополнив ее отрезком  $-b/2 \leq y \leq b/2, z = 0$ , где  $b$  — ширина шпангоута по ватерлинии. Затем интеграл по разомкнутому контуру  $l$  можно вычислить как разность двойного интеграла и интеграла по упомянутому отрезку:

$$\int_l f(y, z) \cos(n, q) dl = \int_\omega \int \frac{\partial f}{\partial q} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} f(y, 0) \cos(n, q) dy.$$

Поскольку рассматриваемый отрезок суть горизонтальный, очевидно, что угол между внешней нормалью к нему и положительной осью  $Oz$  равен нулю, а угол между внешней нормалью и положительной осью  $Oy$  равен  $90^\circ$ . Таким образом,

$$\int_l f(y, z) \cos(n, z) dl = \int_\omega \int \frac{\partial f}{\partial z} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} f(y, 0) dy; \\ \int_l f(y, z) \cos(n, y) dl = \int_\omega \int \frac{\partial f}{\partial y} d\omega.$$

Для интегралов по площади шпангоута удобно пользоваться следующим представлением:

$$\int_\omega \int f(y, z) d\omega = \int_{-T}^0 \int_{-y}^y f(\eta, z) d\eta dz, \quad (2.76)$$

где  $y = y(z)$  — ордината контура:

Итак, имеем

$$B_2^\pm = \pm i\nu(1 + c_2) \int_{-T}^0 e^{\nu z} \int_{-y}^y e^{\pm i\nu\eta} d\eta dz; \\ B_3^\pm = \nu(1 + c_3) \int_{-T}^0 e^{\nu z} \int_{-y}^y e^{\pm i\nu\eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} e^{\pm i\nu\eta} d\eta;$$

$$B_4^\pm = v(1+c_4) \int_{-T}^0 e^{vz} \int_{-y}^y \eta e^{\pm i v \eta} d\eta dz \mp i v (1-c_4) \times \\ \times \int_{-T}^0 z e^{vz} \int_{-y}^y e^{\pm i v \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{\pm i v \eta} d\eta.$$

Как нетрудно показать,

$$\int_{-y}^y e^{\pm i v \eta} d\eta = \mp \frac{i}{v} e^{\pm i v \eta} \Big|_{-y}^y = \mp \frac{i}{v} (\cos v\eta \pm i \sin v\eta) \Big|_{-y}^y = \\ = \frac{2}{v} \sin v y; \quad (2.77)$$

$$\int_{-y}^y \eta e^{\pm i v \eta} d\eta = \frac{1}{i(\pm i v)^2} e^{\pm i v \eta} (\pm i v \eta - 1) \Big|_{-y}^y = -\frac{1}{v^2} (\cos v\eta \pm i \sin v\eta) \times \\ \times (\pm i v \eta - 1) \Big|_{-y}^y = \pm \frac{2i}{v^2} (\sin v y - v y \cos v y) \quad (2.78)$$

и, следовательно,

$$B_2^\pm = \pm 2i(1+c_2) \int_{-T}^0 e^{vz} \sin v y dz; \\ B_3^\pm = 2(1+c_3) \int_{-T}^0 e^{vz} \sin v y dz - \frac{2}{v} \sin \frac{v b}{2}; \\ B_4^\pm = \pm \frac{2i}{v} \left[ (1+c_4) \int_{-T}^0 e^{vz} (\sin v y - v y \cos v y) dz - \right. \\ \left. - v(1-c_4) \int_{-T}^0 z e^{vz} \sin v y dz + \frac{1}{v} \left( \sin \frac{v b}{2} - \frac{v b}{2} \cos \frac{v b}{2} \right) \right].$$

Введем следующие безразмерные коэффициенты:

$$\kappa_2 = \frac{2}{v\omega} \int_{-T}^0 e^{vz} \sin v y dz; \quad \kappa_{42} = \frac{2}{v\omega z_\omega} \int_{-T}^0 z e^{vz} \sin v y dz; \\ \kappa_5 = \frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 y e^{vz} \cos v y dz,$$

где  $z_\omega$  — аппликата центра тяжести площади шпангоута.

В эти коэффициенты введены нормирующие множители  $1/\omega$ ,  $1/v\omega$ ,  $1/v\omega z_\omega$ , за счет которых при предельно малых частотах колебаний коэффициенты превращаются в единицу. При конечных частотах или, точнее говоря, при конечных значениях безразмерных параметров  $vT$  и  $vb$ , значения этих коэффициентов оказываются меньше единицы и, таким образом, они играют роль редуцированных коэффициентов.

Поскольку волновое число излучаемых волн  $v$  связано с их длиной  $\lambda$  соотношением  $v = 2\pi/\lambda$ , параметры  $vT\pi = 2\pi T/\lambda$  и  $vb =$

$= 2\pi b/\lambda$  заметно отличаются от нуля при соизмеримости  $T$  и  $b$ , с одной стороны, и  $\lambda$  — с другой. Следовательно, коэффициентами  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{42}$  и  $\kappa_5$  учитывается конечность соотношений между поперечными размерами контура и длиной излучаемых волн.

Эти коэффициенты отвечают случаю, когда вектор скорости волн составляет угол  $\varepsilon = 90^\circ$  с перпендикулярной плоскости контура осью  $Ox$ . Они представляют собой частные значения полученных в § 19 и 20 редуцированных коэффициентов возмущающих сил, справедливых при любой величине угла  $\varepsilon$ . Графики этих редуцированных коэффициентов для полуэллиптических шпангоутов приведены на рис. 4.4, 4.6 и 4.10.

При пользовании этими графиками следует под  $k$  понимать волновое число излучаемых волн  $\nu$ , а под  $H_\varepsilon$  — отношение  $b/2T$ .

С использованием коэффициентов  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{42}$  и  $\kappa_5$  окончательные выражения для функций  $B_k^\pm$  можно написать в виде

$$B_2^\pm = \pm i\nu(1 + c_2)\kappa_2\omega;$$

$$B_3^\pm = \nu(1 + c_3)\kappa_2\omega - \frac{2}{\nu} \sin \frac{\nu b}{2};$$

$$B_4^\pm = \pm i \left\{ [(1 + c_4)(\kappa_2 - \kappa_5) - \nu(1 - c_4)\kappa_{42}z_\omega] \omega + \right. \\ \left. + \frac{2}{\nu^2} \left( \sin \frac{\nu b}{2} - \frac{\nu b}{2} \cos \frac{\nu b}{2} \right) \right\}.$$

При известных значениях  $B_k^\pm$  коэффициенты волнового демпфирования контура вычисляются по формуле (2.69) или (2.70)

Кроме приведенных выше приближенных способов определения присоединенных масс и коэффициентов демпфирования, М. Д. Хаскинд построил в рамках линейной теории волн точное решение плоской задачи о колебаниях контура, плавающего на поверхности тяжелой идеальной жидкости, и дал законченный метод расчета гидродинамических характеристик контуров формы Льюиса при любой частоте. Подобная задача успешно решалась также другими отечественными и зарубежными исследователями.

Если представить функции  $\lambda_{jk}$  в виде

$$\lambda_{22} = l_{22}\rho\sigma T^2; \quad \lambda_{24} = l_{24}\rho\sigma T^3;$$

$$\lambda_{33} = l_{33}\rho\sigma b^2; \quad \lambda_{44} = l_{44}\rho\sigma T^4,$$

где, напомним,  $\sigma$  — частота колебаний, то для контуров формы Льюиса безразмерные коэффициенты  $l_{jk}$  будут зависеть от отношения  $2T/b$ , коэффициента полноты  $\beta$  и частотного параметра  $\nu T$  или  $\nu b/2$ . Значения этих безразмерных коэффициентов, рассчитанные на ЭВМ Ю. Н. Пашенко и И. М. Коганом, приведены в табл. 6—9.

При бортовой качке для учета вязкостной составляющей демпфирования целесообразно обрабатывать экспериментальные дан-

Таблица 6. Значения коэффициента для контуров формы Льюиса

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 0,25 | 0,25           | 0,336                       | 0,454 | 0,646 | 0,895 | 1,217 | 1,629 |
|      | 0,50           | 0,314                       | 0,433 | 0,603 | 0,860 | 1,258 | 1,870 |
|      | 0,75           | 0,281                       | 0,377 | 0,516 | 0,719 | 1,026 | 1,510 |
|      | 1,00           | 0,252                       | 0,338 | 0,450 | 0,614 | 0,859 | 1,251 |
|      | 1,25           | 0,227                       | 0,308 | 0,406 | 0,541 | 0,742 | 1,052 |
|      | 1,50           | 0,208                       | 0,284 | 0,374 | 0,489 | 0,658 | 0,911 |
|      | 1,75           | 0,193                       | 0,263 | 0,349 | 0,452 | 0,594 | 0,806 |
|      | 2,00           | 0,183                       | 0,246 | 0,327 | 0,423 | 0,544 | 0,716 |
|      | 2,25           | 0,175                       | 0,232 | 0,308 | 0,399 | 0,508 | 0,647 |
|      | 2,50           | 0,169                       | 0,221 | 0,291 | 0,377 | 0,480 | 0,602 |
|      | 2,75           | 0,164                       | 0,211 | 0,276 | 0,357 | 0,455 | 0,569 |
|      | 3,00           | 0,161                       | 0,203 | 0,263 | 0,339 | 0,432 | 0,544 |
|      | 3,25           | 0,158                       | 0,197 | 0,252 | 0,323 | 0,413 | 0,527 |
| 0,50 | 0,25           | 0,284                       | 0,416 | 0,636 | 0,911 | 1,248 | 1,655 |
|      | 0,50           | 0,461                       | 0,640 | 0,888 | 1,247 | 1,764 | 2,467 |
|      | 0,75           | 0,548                       | 0,733 | 0,995 | 1,356 | 1,849 | 2,506 |
|      | 1,00           | 0,594                       | 0,790 | 1,044 | 1,393 | 1,865 | 2,506 |
|      | 1,25           | 0,614                       | 0,822 | 1,072 | 1,400 | 1,849 | 2,444 |
|      | 1,50           | 0,622                       | 0,837 | 1,087 | 1,399 | 1,820 | 2,375 |
|      | 1,75           | 0,627                       | 0,840 | 1,094 | 1,393 | 1,783 | 2,298 |
|      | 2,00           | 0,632                       | 0,838 | 1,093 | 1,386 | 1,743 | 2,206 |
|      | 2,25           | 0,638                       | 0,834 | 1,084 | 1,376 | 1,712 | 2,117 |
|      | 2,50           | 0,645                       | 0,830 | 1,073 | 1,362 | 1,690 | 2,062 |
|      | 2,75           | 0,653                       | 0,827 | 1,060 | 1,346 | 1,671 | 2,032 |
|      | 3,00           | 0,662                       | 0,826 | 1,049 | 1,329 | 1,655 | 2,028 |
|      | 3,25           | 0,672                       | 0,827 | 1,041 | 1,316 | 1,651 | 2,077 |
| 0,75 | 0,25           | 0,180                       | 0,311 | 0,527 | 0,786 | 1,091 | 1,444 |
|      | 0,50           | 0,429                       | 0,602 | 0,830 | 1,139 | 1,549 | 2,046 |
|      | 0,75           | 0,577                       | 0,758 | 1,000 | 1,305 | 1,672 | 2,092 |
|      | 1,00           | 0,681                       | 0,878 | 1,116 | 1,411 | 1,754 | 2,145 |
|      | 1,25           | 0,756                       | 0,970 | 1,207 | 1,484 | 1,809 | 2,165 |
|      | 1,50           | 0,814                       | 1,039 | 1,278 | 1,543 | 1,846 | 2,176 |
|      | 1,75           | 0,864                       | 1,091 | 1,334 | 1,588 | 1,872 | 2,179 |
|      | 2,00           | 0,908                       | 1,132 | 1,378 | 1,628 | 1,890 | 2,171 |
|      | 2,25           | 0,949                       | 1,166 | 1,412 | 1,661 | 1,908 | 2,159 |
|      | 2,50           | 0,989                       | 1,197 | 1,439 | 1,688 | 1,929 | 2,161 |
|      | 2,75           | 1,028                       | 1,226 | 1,462 | 1,710 | 1,951 | 2,178 |
|      | 3,00           | 1,065                       | 1,254 | 1,484 | 1,731 | 1,977 | 2,216 |
|      | 3,25           | 1,102                       | 1,283 | 1,507 | 1,756 | 2,015 | 2,301 |
| 1,00 | 0,25           | 0,094                       | 0,223 | 0,434 | 0,677 | 0,954 | 1,264 |
|      | 0,50           | 0,369                       | 0,528 | 0,726 | 0,981 | 1,295 | 1,646 |
|      | 0,75           | 0,527                       | 0,685 | 0,883 | 1,114 | 1,368 | 1,636 |
|      | 1,00           | 0,641                       | 0,806 | 0,993 | 1,205 | 1,430 | 1,662 |
|      | 1,25           | 0,729                       | 0,901 | 1,079 | 1,271 | 1,473 | 1,675 |
|      | 1,50           | 0,800                       | 0,976 | 1,148 | 1,323 | 1,504 | 1,684 |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,00 | 1,75           | 0,861                       | 1,035 | 1,204 | 1,365 | 1,528 | 1,689 |
|      | 2,00           | 0,915                       | 1,083 | 1,250 | 1,402 | 1,547 | 1,691 |
|      | 2,25           | 0,965                       | 1,124 | 1,286 | 1,434 | 1,567 | 1,691 |
|      | 2,50           | 1,010                       | 1,160 | 1,317 | 1,461 | 1,588 | 1,700 |
|      | 2,75           | 1,052                       | 1,193 | 1,343 | 1,486 | 1,610 | 1,719 |
|      | 3,00           | 1,091                       | 1,223 | 1,368 | 1,508 | 1,635 | 1,752 |
|      | 3,25           | 1,128                       | 1,253 | 1,393 | 1,533 | 1,668 | 1,816 |
| 1,25 | 0,25           | 0,027                       | 0,157 | 0,361 | 0,591 | 0,846 | 1,121 |
|      | 0,50           | 0,313                       | 0,459 | 0,633 | 0,845 | 1,089 | 1,347 |
|      | 0,75           | 0,466                       | 0,602 | 0,763 | 0,938 | 1,118 | 1,297 |
|      | 1,00           | 0,574                       | 0,708 | 0,852 | 1,006 | 1,158 | 1,306 |
|      | 1,25           | 0,656                       | 0,790 | 0,921 | 1,053 | 1,185 | 1,311 |
|      | 1,50           | 0,723                       | 0,854 | 0,975 | 1,091 | 1,204 | 1,313 |
|      | 1,75           | 0,779                       | 0,904 | 1,018 | 1,120 | 1,219 | 1,313 |
|      | 2,00           | 0,827                       | 0,944 | 1,053 | 1,146 | 1,231 | 1,313 |
|      | 2,25           | 0,869                       | 0,978 | 1,081 | 1,169 | 1,244 | 1,313 |
|      | 2,50           | 0,907                       | 1,007 | 1,105 | 1,190 | 1,260 | 1,320 |
|      | 2,75           | 0,939                       | 1,032 | 1,125 | 1,208 | 1,277 | 1,337 |
|      | 3,00           | 0,968                       | 1,055 | 1,144 | 1,225 | 1,296 | 1,365 |
| 3,25 | 0,995          | 1,076                       | 1,162 | 1,244 | 1,323 | 1,422 |       |
| 1,50 | 0,25           | -0,023                      | 0,107 | 0,307 | 0,525 | 0,760 | 1,008 |
|      | 0,50           | 0,266                       | 0,401 | 0,555 | 0,734 | 0,928 | 1,124 |
|      | 0,75           | 0,412                       | 0,530 | 0,661 | 0,795 | 0,925 | 1,050 |
|      | 1,00           | 0,509                       | 0,619 | 0,730 | 0,844 | 0,950 | 1,050 |
|      | 1,25           | 0,582                       | 0,687 | 0,783 | 0,878 | 0,967 | 1,051 |
|      | 1,50           | 0,641                       | 0,739 | 0,824 | 0,904 | 0,979 | 1,050 |
|      | 1,75           | 0,689                       | 0,779 | 0,857 | 0,924 | 0,988 | 1,048 |
|      | 2,00           | 0,730                       | 0,812 | 0,884 | 0,942 | 0,995 | 1,047 |
|      | 2,25           | 0,764                       | 0,838 | 0,905 | 0,959 | 1,003 | 1,045 |
|      | 2,50           | 0,793                       | 0,861 | 0,923 | 0,975 | 1,015 | 1,051 |
|      | 2,75           | 0,817                       | 0,880 | 0,939 | 0,990 | 1,030 | 1,067 |
|      | 3,00           | 0,838                       | 0,896 | 0,953 | 1,004 | 1,048 | 1,096 |
| 3,25 | 0,856          | 0,911                       | 0,966 | 1,020 | 1,073 | 1,155 |       |
| 1,75 | 0,25           | -0,058                      | 0,074 | 0,267 | 0,473 | 0,691 | 0,915 |
|      | 0,50           | 0,227                       | 0,354 | 0,492 | 0,645 | 0,802 | 0,954 |
|      | 0,75           | 0,365                       | 0,469 | 0,578 | 0,681 | 0,775 | 0,866 |
|      | 1,00           | 0,453                       | 0,544 | 0,631 | 0,716 | 0,792 | 0,861 |
|      | 1,25           | 0,517                       | 0,599 | 0,672 | 0,740 | 0,803 | 0,860 |
|      | 1,50           | 0,569                       | 0,642 | 0,703 | 0,758 | 0,810 | 0,858 |
|      | 1,75           | 0,610                       | 0,675 | 0,728 | 0,773 | 0,815 | 0,855 |
|      | 2,00           | 0,644                       | 0,702 | 0,749 | 0,786 | 0,819 | 0,855 |
|      | 2,25           | 0,672                       | 0,723 | 0,767 | 0,799 | 0,825 | 0,853 |
|      | 2,50           | 0,695                       | 0,741 | 0,782 | 0,812 | 0,836 | 0,858 |
|      | 2,75           | 0,715                       | 0,757 | 0,795 | 0,826 | 0,849 | 0,873 |
|      | 3,00           | 0,730                       | 0,769 | 0,807 | 0,839 | 0,867 | 0,904 |
| 3,25 | 0,743          | 0,781                       | 0,818 | 0,854 | 0,894 | 0,970 |       |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 2,00    | 0,25           | -0,078                      | 0,056 | 0,241 | 0,434 | 0,635 | 0,837 |
|         | 0,50           | 0,194                       | 0,314 | 0,440 | 0,573 | 0,701 | 0,822 |
|         | 0,75           | 0,326                       | 0,418 | 0,509 | 0,589 | 0,658 | 0,724 |
|         | 1,00           | 0,406                       | 0,481 | 0,550 | 0,614 | 0,669 | 0,718 |
|         | 1,25           | 0,462                       | 0,527 | 0,581 | 0,631 | 0,676 | 0,716 |
|         | 1,50           | 0,508                       | 0,562 | 0,605 | 0,644 | 0,680 | 0,714 |
|         | 1,75           | 0,544                       | 0,590 | 0,625 | 0,655 | 0,683 | 0,710 |
|         | 2,00           | 0,574                       | 0,613 | 0,643 | 0,665 | 0,686 | 0,711 |
|         | 2,25           | 0,598                       | 0,632 | 0,658 | 0,676 | 0,690 | 0,709 |
|         | 2,50           | 0,617                       | 0,647 | 0,672 | 0,688 | 0,700 | 0,713 |
|         | 2,75           | 0,633                       | 0,660 | 0,684 | 0,701 | 0,714 | 0,729 |
|         | 3,00           | 0,645                       | 0,671 | 0,695 | 0,715 | 0,732 | 0,763 |
|         | 3,25           | 0,656                       | 0,681 | 0,706 | 0,731 | 0,762 | 0,837 |

ные в предположении о квадратичной зависимости демпфирующего момента от угловой скорости качки  $\theta$ . Эта зависимость имеет вид

$$F_4^d = -K\dot{\theta}^2 \text{sign } \theta, \quad (2.79)$$

где

$$\text{sign } \theta = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta > 0, \\ -1 & \text{при } \theta < 0, \end{cases}$$

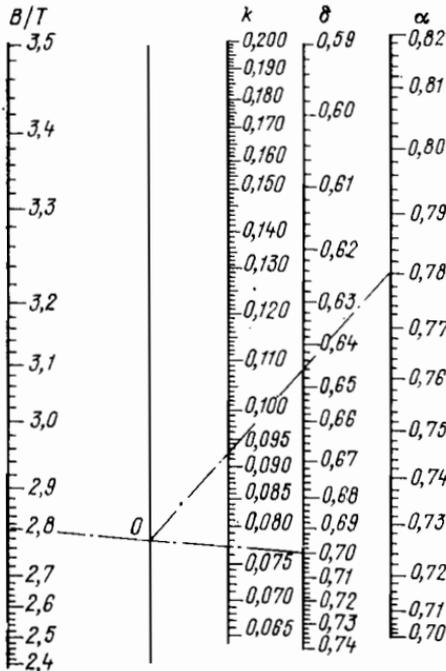
Знаком «минус» здесь учитывается то обстоятельство, что демпфирующий момент противоположен по направлению угловой скорости качки.

Следуя В. В. Луговскому и Ю. И. Фаддееву, используем следующие представления:

$$K = K_0(I_x + M_{44});$$

$$K_0 = k_0 \sqrt[4]{\frac{\rho x}{h}},$$

где  $\rho_x^2 = (I_x + M_{44})/m_x^2$  — квадрат условного радиуса инерции массы корабля, а  $h$  — начальная метацентрическая высота. Значения  $k_0$  определяются по предположенной упомянутыми авто-



2.5. Номограмма В. В. Луговского и Ю. И. Фаддеева.

Таблица 7. Значения коэффициента  $l_{33}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полиоты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 0,25    | 0,25           | 0,945                       | 1,035 | 1,088 | 1,111 | 1,114 | 1,104 |
|         | 0,50           | 1,731                       | 1,700 | 1,658 | 1,587 | 1,482 | 1,351 |
|         | 0,75           | 2,004                       | 1,959 | 1,888 | 1,795 | 1,674 | 1,529 |
|         | 1,00           | 2,163                       | 2,113 | 2,041 | 1,939 | 1,806 | 1,657 |
|         | 1,25           | 2,266                       | 2,209 | 2,143 | 2,043 | 1,892 | 1,723 |
|         | 1,50           | 2,339                       | 2,267 | 2,201 | 2,118 | 1,972 | 1,782 |
|         | 1,75           | 2,394                       | 2,302 | 2,226 | 2,154 | 2,060 | 1,981 |
|         | 2,00           | 2,436                       | 2,322 | 2,228 | 2,149 | 2,072 | 2,041 |
|         | 2,25           | 2,468                       | 2,332 | 2,216 | 2,113 | 2,020 | 1,968 |
|         | 2,50           | 2,493                       | 2,334 | 2,196 | 2,072 | 1,957 | 1,890 |
|         | 2,75           | 2,513                       | 2,332 | 2,171 | 2,029 | 1,909 | 1,857 |
|         | 3,00           | 2,528                       | 2,328 | 2,146 | 1,989 | 1,866 | 1,846 |
| 3,25    | 2,540          | 2,321                       | 2,121 | 1,953 | 1,839 | 1,858 |       |
| 0,50    | 0,25           | 0,392                       | 0,472 | 0,557 | 0,601 | 0,612 | 0,599 |
|         | 0,50           | 1,177                       | 1,163 | 1,106 | 1,003 | 0,853 | 0,677 |
|         | 0,75           | 1,457                       | 1,390 | 1,283 | 1,145 | 0,975 | 0,782 |
|         | 1,00           | 1,607                       | 1,521 | 1,404 | 1,252 | 1,064 | 0,852 |
|         | 1,25           | 1,702                       | 1,604 | 1,486 | 1,330 | 1,126 | 0,902 |
|         | 1,50           | 1,770                       | 1,657 | 1,536 | 1,387 | 1,182 | 0,942 |
|         | 1,75           | 1,822                       | 1,691 | 1,561 | 1,417 | 1,240 | 1,057 |
|         | 2,00           | 1,862                       | 1,713 | 1,570 | 1,421 | 1,255 | 1,095 |
|         | 2,25           | 1,893                       | 1,727 | 1,568 | 1,405 | 1,234 | 1,072 |
|         | 2,50           | 1,918                       | 1,735 | 1,560 | 1,387 | 1,210 | 1,057 |
|         | 2,75           | 1,939                       | 1,739 | 1,549 | 1,368 | 1,197 | 1,073 |
|         | 3,00           | 1,955                       | 1,740 | 1,537 | 1,351 | 1,187 | 1,102 |
| 3,25    | 1,969          | 1,740                       | 1,526 | 1,336 | 1,188 | 1,147 |       |
| 0,75    | 0,25           | 0,143                       | 0,208 | 0,299 | 0,347 | 0,361 | 0,350 |
|         | 0,50           | 0,880                       | 0,873 | 0,809 | 0,692 | 0,530 | 0,357 |
|         | 0,75           | 1,147                       | 1,067 | 0,939 | 0,779 | 0,597 | 0,412 |
|         | 1,00           | 1,280                       | 1,170 | 1,027 | 0,853 | 0,653 | 0,445 |
|         | 1,25           | 1,361                       | 1,236 | 1,088 | 0,908 | 0,693 | 0,478 |
|         | 1,50           | 1,416                       | 1,278 | 1,126 | 0,947 | 0,729 | 0,502 |
|         | 1,75           | 1,458                       | 1,305 | 1,146 | 0,969 | 0,765 | 0,565 |
|         | 2,00           | 1,491                       | 1,323 | 1,154 | 0,975 | 0,777 | 0,587 |
|         | 2,25           | 1,517                       | 1,334 | 1,155 | 0,967 | 0,772 | 0,586 |
|         | 2,50           | 1,537                       | 1,342 | 1,151 | 0,961 | 0,768 | 0,601 |
|         | 2,75           | 1,554                       | 1,346 | 1,146 | 0,954 | 0,775 | 0,642 |
|         | 3,00           | 1,568                       | 1,348 | 1,141 | 0,949 | 0,782 | 0,691 |
| 3,25    | 1,580          | 1,350                       | 1,136 | 0,947 | 0,799 | 0,754 |       |
| 1,00    | 0,25           | 0,005                       | 0,059 | 0,147 | 0,195 | 0,210 | 0,201 |
|         | 0,50           | 0,689                       | 0,687 | 0,622 | 0,502 | 0,345 | 0,194 |
|         | 0,75           | 0,941                       | 0,852 | 0,714 | 0,549 | 0,376 | 0,223 |
|         | 1,00           | 1,057                       | 0,933 | 0,776 | 0,597 | 0,409 | 0,235 |
|         | 1,25           | 1,123                       | 0,982 | 0,819 | 0,635 | 0,434 | 0,255 |
|         | 1,50           | 1,167                       | 1,014 | 0,847 | 0,661 | 0,456 | 0,268 |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,00 | 1,75           | 1,199                       | 1,033  | 0,861  | 0,676 | 0,477 | 0,303 |
|      | 2,00           | 1,225                       | 1,046  | 0,868  | 0,681 | 0,486 | 0,312 |
|      | 2,25           | 1,244                       | 1,055  | 0,869  | 0,679 | 0,489 | 0,320 |
|      | 2,50           | 1,259                       | 1,061  | 0,868  | 0,680 | 0,497 | 0,350 |
|      | 2,75           | 1,272                       | 1,064  | 0,867  | 0,681 | 0,514 | 0,404 |
|      | 3,00           | 1,283                       | 1,067  | 0,865  | 0,683 | 0,533 | 0,465 |
|      | 3,25           | 1,292                       | 1,069  | 0,865  | 0,688 | 0,559 | 0,538 |
| 1,25 | 0,25           | -0,074                      | -0,028 | 0,052  | 0,097 | 0,112 | 0,106 |
|      | 0,50           | 0,554                       | 0,556  | 0,493  | 0,377 | 0,233 | 0,110 |
|      | 0,75           | 0,791                       | 0,700  | 0,559  | 0,397 | 0,243 | 0,125 |
|      | 1,00           | 0,894                       | 0,761  | 0,600  | 0,428 | 0,261 | 0,127 |
|      | 1,25           | 0,947                       | 0,797  | 0,629  | 0,452 | 0,276 | 0,138 |
|      | 1,50           | 0,980                       | 0,819  | 0,648  | 0,469 | 0,289 | 0,145 |
|      | 1,75           | 1,004                       | 0,833  | 0,659  | 0,479 | 0,301 | 0,165 |
|      | 2,00           | 1,022                       | 0,841  | 0,663  | 0,484 | 0,307 | 0,167 |
|      | 2,25           | 1,036                       | 0,847  | 0,665  | 0,485 | 0,314 | 0,177 |
|      | 2,50           | 1,047                       | 0,851  | 0,666  | 0,489 | 0,329 | 0,215 |
|      | 2,75           | 1,056                       | 0,854  | 0,666  | 0,495 | 0,353 | 0,276 |
|      | 3,00           | 1,064                       | 0,856  | 0,667  | 0,503 | 0,379 | 0,346 |
| 3,25 | 1,071          | 0,859                       | 0,670  | 0,513  | 0,411 | 0,426 |       |
| 1,50 | 0,25           | -0,117                      | -0,076 | -0,004 | 0,036 | 0,050 | 0,044 |
|      | 0,50           | 0,453                       | 0,459  | 0,400  | 0,291 | 0,162 | 0,065 |
|      | 0,75           | 0,678                       | 0,586  | 0,446  | 0,293 | 0,161 | 0,073 |
|      | 1,00           | 0,768                       | 0,632  | 0,472  | 0,312 | 0,170 | 0,071 |
|      | 1,25           | 0,811                       | 0,656  | 0,491  | 0,328 | 0,179 | 0,078 |
|      | 1,50           | 0,835                       | 0,671  | 0,504  | 0,338 | 0,186 | 0,080 |
|      | 1,75           | 0,851                       | 0,680  | 0,511  | 0,345 | 0,192 | 0,094 |
|      | 2,00           | 0,864                       | 0,685  | 0,514  | 0,348 | 0,196 | 0,091 |
|      | 2,25           | 0,873                       | 0,689  | 0,516  | 0,351 | 0,205 | 0,102 |
|      | 2,50           | 0,880                       | 0,692  | 0,518  | 0,358 | 0,224 | 0,144 |
|      | 2,75           | 0,886                       | 0,694  | 0,520  | 0,368 | 0,252 | 0,214 |
|      | 3,00           | 0,891                       | 0,696  | 0,523  | 0,380 | 0,283 | 0,292 |
| 3,25 | 0,897          | 0,698                       | 0,527  | 0,394  | 0,320 | 0,376 |       |
| 1,75 | 0,25           | -0,133                      | -0,095 | -0,033 | 0,002 | 0,013 | 0,007 |
|      | 0,50           | 0,374                       | 0,384  | 0,330  | 0,230 | 0,116 | 0,040 |
|      | 0,75           | 0,589                       | 0,499  | 0,363  | 0,221 | 0,109 | 0,045 |
|      | 1,00           | 0,670                       | 0,533  | 0,377  | 0,231 | 0,113 | 0,043 |
|      | 1,25           | 0,703                       | 0,548  | 0,389  | 0,241 | 0,117 | 0,046 |
|      | 1,50           | 0,719                       | 0,557  | 0,397  | 0,247 | 0,121 | 0,047 |
|      | 1,75           | 0,730                       | 0,561  | 0,401  | 0,251 | 0,124 | 0,058 |
|      | 2,00           | 0,737                       | 0,564  | 0,403  | 0,255 | 0,127 | 0,052 |
|      | 2,25           | 0,742                       | 0,566  | 0,405  | 0,259 | 0,137 | 0,063 |
|      | 2,50           | 0,746                       | 0,568  | 0,408  | 0,268 | 0,158 | 0,110 |
|      | 2,75           | 0,750                       | 0,569  | 0,411  | 0,280 | 0,190 | 0,189 |
|      | 3,00           | 0,753                       | 0,571  | 0,416  | 0,294 | 0,226 | 0,277 |
| 3,25 | 0,757          | 0,574                       | 0,422  | 0,311  | 0,266 | 0,363 |       |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |        |        |        |
|---------|----------------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|         |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 2,00    | 0,25           | -0,127                      | -0,091 | -0,040 | -0,011 | -0,004 | -0,010 |
|         | 0,50           | 0,310                       | 0,325  | 0,276  | 0,185  | 0,085  | 0,026  |
|         | 0,75           | 0,517                       | 0,430  | 0,299  | 0,169  | 0,075  | 0,030  |
|         | 1,00           | 0,590                       | 0,454  | 0,306  | 0,174  | 0,076  | 0,028  |
|         | 1,25           | 0,615                       | 0,463  | 0,311  | 0,180  | 0,079  | 0,030  |
|         | 1,50           | 0,625                       | 0,467  | 0,316  | 0,184  | 0,080  | 0,030  |
|         | 1,75           | 0,631                       | 0,468  | 0,319  | 0,186  | 0,082  | 0,041  |
|         | 2,00           | 0,634                       | 0,469  | 0,320  | 0,189  | 0,083  | 0,033  |
|         | 2,25           | 0,636                       | 0,470  | 0,322  | 0,194  | 0,094  | 0,044  |
|         | 2,50           | 0,638                       | 0,471  | 0,325  | 0,204  | 0,117  | 0,097  |
|         | 2,75           | 0,639                       | 0,472  | 0,330  | 0,218  | 0,152  | 0,190  |
|         | 3,00           | 0,641                       | 0,474  | 0,336  | 0,235  | 0,192  | 0,288  |
|         | 3,25           | 0,644                       | 0,477  | 0,343  | 0,254  | 0,235  | 0,371  |

рами номограмме, построенной на основе серийных модельных испытаний (рис. 2.5)

Пример определения  $k_0$  для корабля, имеющего отношение ширины к осадке  $B/T = 2,8$ , коэффициент полноты ватерлинии  $\alpha_2 = 0,78$  и коэффициент общей полноты  $\delta = 0,70$ , приведен на номограмме. Прежде всего проводится прямая через соответствующие отметки шкал  $B/T$  и  $\delta$ . Точка пересечения этой прямой и немой шкалы обозначается через  $O$ . Затем проводится вторая прямая, соединяющая точку  $O$  с соответствующей отметкой шкалы  $\alpha$ . Точка пересечения этой второй прямой со шкалой  $k_0$  и определяет собой значение последнего, которое в данном случае равно 0,093.

Для использования в линейной теории качки зависимость (2.79) линеаризуют, исходя из энергетических соображений.

Предположим, что качка носит простой гармонический характер с амплитудой  $\theta_0$  и частотой  $\omega = 2\pi/\tau$ , где  $\tau$  — период. Тогда можем написать

$$\theta = \theta_0 \sin \sigma t; \quad \dot{\theta} = \theta_0 \sigma \cos \sigma t.$$

Работа  $A_2$  демпфирующего момента, определяемого формулой (2.79), при наклонении от  $\theta = 0$  до  $\theta = \theta_0$  будет [выражаться интегралом

$$A_2 = K \int_0^{\theta_0} \dot{\theta} d\theta.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных, перейдя к интегрированию по времени. Тогда

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} dt = \dot{\theta} dt.$$

Таблица 8. Значения коэффициента  $l_{44}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 0,25    | 0,25           | 28,62                       | 33,52  | 33,40 | 32,73 | 31,46 | 29,53 |
|         | 0,50           | 1,472                       | 1,457  | 1,374 | 1,184 | 0,862 | 0,467 |
|         | 0,75           | 0,151                       | 0,134  | 0,104 | 0,062 | 0,016 | 0,011 |
|         | 1,00           | 0,016                       | 0,009  | 0,003 | 0,000 | 0,012 | 0,072 |
|         | 1,25           | 0,002                       | 0,001  | 0,004 | 0,013 | 0,039 | 0,104 |
|         | 1,50           | 0,004                       | 0,007  | 0,013 | 0,027 | 0,055 | 0,114 |
|         | 1,75           | 0,007                       | 0,012  | 0,021 | 0,065 | 0,062 | 0,113 |
|         | 2,00           | 0,010                       | 0,016  | 0,026 | 0,041 | 0,065 | 0,107 |
|         | 2,25           | 0,013                       | 0,019  | 0,029 | 0,044 | 0,066 | 0,101 |
|         | 2,50           | 0,014                       | 0,021  | 0,031 | 0,046 | 0,066 | 0,096 |
|         | 2,75           | 0,015                       | 0,022  | 0,032 | 0,046 | 0,066 | 0,093 |
|         | 3,00           | 0,016                       | 0,023  | 0,032 | 0,046 | 0,065 | 0,091 |
| 3,25    | 0,017          | 0,023                       | 0,032  | 0,046 | 0,064 | 0,089 |       |
| 0,50    | 0,25           | 28,59                       | 32,35  | 31,51 | 29,88 | 27,50 | 24,49 |
|         | 0,50           | 2,308                       | 2,220  | 1,987 | 1,557 | 0,940 | 0,355 |
|         | 0,75           | 0,322                       | 0,277  | 0,201 | 0,104 | 0,017 | 0,035 |
|         | 1,00           | 0,043                       | 0,025  | 0,008 | 0,000 | 0,030 | 0,163 |
|         | 1,25           | 0,005                       | 0,001  | 0,008 | 0,031 | 0,095 | 0,245 |
|         | 1,50           | 0,010                       | 0,017  | 0,034 | 0,070 | 0,144 | 0,289 |
|         | 1,75           | 0,022                       | 0,036  | 0,060 | 0,101 | 0,176 | 0,309 |
|         | 2,00           | 0,034                       | 0,052  | 0,080 | 0,124 | 0,195 | 0,313 |
|         | 2,25           | 0,044                       | 0,064  | 0,096 | 0,141 | 0,208 | 0,310 |
|         | 2,50           | 0,052                       | 0,074  | 0,107 | 0,154 | 0,219 | 0,310 |
|         | 2,75           | 0,059                       | 0,082  | 0,116 | 0,163 | 0,227 | 0,312 |
|         | 3,00           | 0,066                       | 0,089  | 0,122 | 0,170 | 0,233 | 0,318 |
| 3,25    | 0,071          | 0,094                       | 0,128  | 0,175 | 0,240 | 0,333 |       |
| 0,75    | 0,25           | 23,15                       | 25,72  | 24,65 | 22,77 | 20,16 | 17,10 |
|         | 0,50           | 2,283                       | 2,138  | 1,823 | 1,303 | 0,654 | 0,182 |
|         | 0,75           | 0,364                       | 0,301  | 0,202 | 0,089 | 0,008 | 0,046 |
|         | 1,00           | 0,057                       | 0,032  | 0,009 | 0,000 | 0,031 | 0,151 |
|         | 1,25           | 0,008                       | 0,001  | 0,007 | 0,031 | 0,091 | 0,217 |
|         | 1,50           | 0,010                       | 0,018  | 0,035 | 0,072 | 0,139 | 0,257 |
|         | 1,75           | 0,027                       | 0,042  | 0,066 | 0,106 | 0,174 | 0,279 |
|         | 2,00           | 0,044                       | 0,064  | 0,093 | 0,135 | 0,197 | 0,291 |
|         | 2,25           | 0,059                       | 0,083  | 0,115 | 0,158 | 0,216 | 0,296 |
|         | 2,50           | 0,072                       | 0,098  | 0,133 | 0,177 | 0,233 | 0,303 |
|         | 2,75           | 0,084                       | 0,111  | 0,147 | 0,192 | 0,247 | 0,312 |
|         | 3,00           | 0,095                       | 0,123  | 0,159 | 0,205 | 0,260 | 0,325 |
| 3,25    | 0,104          | 0,132                       | 0,169  | 0,216 | 0,273 | 0,348 |       |
| 1,00    | 0,25           | 18,16                       | 19,92  | 18,88 | 17,01 | 14,47 | 11,61 |
|         | 0,50           | 2,075                       | 1,907  | 1,564 | 1,036 | 0,440 | 0,112 |
|         | 0,75           | 0,355                       | 0,283  | 0,177 | 0,069 | 0,003 | 0,050 |
|         | 1,00           | 0,060                       | 0,033  | 0,009 | 0,000 | 0,027 | 0,123 |
|         | 1,25           | 0,010                       | —0,019 | 0,005 | 0,025 | 0,073 | 0,166 |
|         | 1,50           | 0,008                       | 0,015  | 0,028 | 0,057 | 0,108 | 0,192 |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 1,00    | 1,75           | 0,024                       | 0,036 | 0,055 | 0,085 | 0,133 | 0,205 |
|         | 2,00           | 0,040                       | 0,057 | 0,078 | 0,108 | 0,151 | 0,214 |
|         | 2,25           | 0,055                       | 0,074 | 0,097 | 0,127 | 0,165 | 0,217 |
|         | 2,50           | 0,068                       | 0,089 | 0,113 | 0,143 | 0,179 | 0,223 |
|         | 2,75           | 0,078                       | 0,101 | 0,126 | 0,156 | 0,190 | 0,230 |
|         | 3,00           | 0,087                       | 0,110 | 0,137 | 0,167 | 0,202 | 0,242 |
|         | 3,25           | 0,095                       | 0,118 | 0,145 | 0,177 | 0,213 | 0,261 |
| 1,25    | 0,25           | 14,04                       | 15,26 | 14,36 | 12,62 | 10,24 | 7,657 |
|         | 0,50           | 1,854                       | 1,681 | 1,336 | 0,829 | 0,302 | 0,137 |
|         | 0,75           | 0,332                       | 0,257 | 0,152 | 0,052 | 0,001 | 0,050 |
|         | 1,00           | 0,060                       | 0,032 | 0,009 | 0,000 | 0,023 | 0,100 |
|         | 1,25           | 0,011                       | 0,001 | 0,003 | 0,019 | 0,057 | 0,127 |
|         | 1,50           | 0,004                       | 0,012 | 0,022 | 0,043 | 0,082 | 0,144 |
|         | 1,75           | 0,020                       | 0,030 | 0,042 | 0,064 | 0,100 | 0,151 |
|         | 2,00           | 0,034                       | 0,047 | 0,061 | 0,082 | 0,112 | 0,156 |
|         | 2,25           | 0,047                       | 0,062 | 0,077 | 0,097 | 0,122 | 0,158 |
|         | 2,50           | 0,057                       | 0,074 | 0,090 | 0,109 | 0,132 | 0,161 |
|         | 2,75           | 0,066                       | 0,083 | 0,101 | 0,120 | 0,142 | 0,167 |
|         | 3,00           | 0,073                       | 0,091 | 0,109 | 0,129 | 0,151 | 0,178 |
| 3,25    | 0,078          | 0,097                       | 0,116 | 0,137 | 0,161 | 0,196 |       |
| 1,50    | 0,25           | 10,68                       | 11,59 | 10,89 | 9,322 | 7,141 | 4,801 |
|         | 0,50           | 1,654                       | 1,486 | 1,149 | 0,672 | 0,212 | 3,333 |
|         | 0,75           | 0,308                       | 0,233 | 0,131 | 0,040 | 0,000 | 0,048 |
|         | 1,00           | 0,058                       | 0,030 | 0,008 | 0,000 | 0,019 | 0,082 |
|         | 1,25           | 0,011                       | 0,002 | 0,002 | 0,015 | 0,044 | 0,100 |
|         | 1,50           | 0,000                       | 0,010 | 0,016 | 0,033 | 0,063 | 0,110 |
|         | 1,75           | 0,017                       | 0,025 | 0,033 | 0,049 | 0,076 | 0,114 |
|         | 2,00           | 0,030                       | 0,039 | 0,048 | 0,062 | 0,085 | 0,117 |
|         | 2,25           | 0,040                       | 0,051 | 0,062 | 0,074 | 0,092 | 0,118 |
|         | 2,50           | 0,049                       | 0,061 | 0,073 | 0,084 | 0,099 | 0,120 |
|         | 2,75           | 0,056                       | 0,069 | 0,081 | 0,094 | 0,107 | 0,125 |
|         | 3,00           | 0,061                       | 0,075 | 0,088 | 0,101 | 0,116 | 0,135 |
| 3,25    | 0,065          | 0,080                       | 0,094 | 0,108 | 0,126 | 0,155 |       |
| 1,75    | 0,25           | 8,031                       | 8,815 | 8,324 | 6,930 | 4,935 | 2,813 |
|         | 0,50           | 1,478                       | 1,319 | 0,997 | 0,554 | 0,152 | 0,001 |
|         | 0,75           | 0,285                       | 0,211 | 0,113 | 0,032 | 0,000 | 0,046 |
|         | 1,00           | 0,055                       | 0,028 | 0,007 | 0,000 | 0,016 | 0,068 |
|         | 1,25           | 0,012                       | 0,002 | 0,002 | 0,012 | 0,035 | 0,079 |
|         | 1,50           | —0,005                      | 0,008 | 0,013 | 0,026 | 0,049 | 0,086 |
|         | 1,75           | 0,015                       | 0,021 | 0,026 | 0,038 | 0,059 | 0,087 |
|         | 2,00           | 0,026                       | 0,033 | 0,039 | 0,048 | 0,065 | 0,090 |
|         | 2,25           | 0,035                       | 0,044 | 0,050 | 0,058 | 0,070 | 0,090 |
|         | 2,50           | 0,043                       | 0,052 | 0,060 | 0,067 | 0,076 | 0,091 |
|         | 2,75           | 0,048                       | 0,059 | 0,068 | 0,075 | 0,083 | 0,096 |
|         | 3,00           | 0,053                       | 0,064 | 0,074 | 0,082 | 0,092 | 0,106 |
| 3,25    | 0,056          | 0,068                       | 0,078 | 0,089 | 0,102 | 0,127 |       |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |       |       |       |       |       |
|---------|----------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|         |                | 0,5                         | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 2,00    | 0,25           | 6,027                       | 6,856 | 6,560 | 5,324 | 3,491 | 1,546 |
|         | 0,50           | 1,324                       | 1,178 | 0,872 | 0,462 | 0,112 | 0,004 |
|         | 0,75           | 0,264                       | 0,192 | 0,099 | 0,025 | 0,000 | 0,043 |
|         | 1,00           | 0,053                       | 0,027 | 0,007 | 0,000 | 0,014 | 0,057 |
|         | 1,25           | 0,013                       | 0,003 | 0,001 | 0,009 | 0,029 | 0,064 |
|         | 1,50           | -0,014                      | 0,007 | 0,010 | 0,020 | 0,039 | 0,069 |
|         | 1,75           | 0,012                       | 0,018 | 0,021 | 0,030 | 0,046 | 0,068 |
|         | 2,00           | 0,023                       | 0,029 | 0,032 | 0,038 | 0,051 | 0,071 |
|         | 2,25           | 0,031                       | 0,039 | 0,042 | 0,046 | 0,054 | 0,070 |
|         | 2,50           | 0,038                       | 0,046 | 0,051 | 0,054 | 0,060 | 0,071 |
|         | 2,75           | 0,043                       | 0,052 | 0,058 | 0,062 | 0,067 | 0,075 |
|         | 3,00           | 0,047                       | 0,056 | 0,063 | 0,069 | 0,075 | 0,085 |
|         | 3,25           | 0,050                       | 0,059 | 0,068 | 0,075 | 0,085 | 0,108 |

Нижний предел интеграла при этой замене останется нулевым, а верхний будет равняться  $\tau/4$ . Таким образом, можем написать

$$A_2 = K \int_0^{\tau/4} \dot{\theta}^3 = dt = K\theta_0^3 \sigma^3 \int_0^{\tau/4} \cos^3 \sigma t dt.$$

Последний интеграл — табличный<sup>1</sup>

$$\int \cos^3 \sigma t dt = \frac{1}{\sigma} \sin \sigma t - \frac{1}{3\sigma} \sin^3 \sigma t.$$

Итак, имея в виду, что  $\tau = 2\pi/\sigma$ , получим

$$\begin{aligned} A_2 &= K\theta_0^3 \sigma^3 \left[ \frac{1}{\sigma} \sin \sigma t - \frac{1}{3\sigma} \sin^3 \sigma t \right] \Big|_0^{\pi/2\sigma} = \\ &= K\theta_0^3 \sigma^3 \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{3\sigma} \right) = \frac{2}{3} K\theta_0^3 \sigma^2. \end{aligned}$$

Вычислим теперь работу  $A_1$  демпфирующего момента в случае линейной его зависимости от угловой скорости:

$$A_1 = \Lambda_{44} \int_0^{\theta_0} \dot{\theta} d\theta.$$

Выполняя преобразования, аналогичные приведенным выше, найдем

$$A_1 = \Lambda_{44} \int_0^{\tau/4} \dot{\theta}^2 dt = \Lambda_{44} \theta_0^2 \sigma^2 \int_0^{\tau/4} \cos^2 \sigma t dt.$$

<sup>1</sup> Произвольные постоянные в формулах для неопределенных интегралов опускаются.

Таблица 9. Значения коэффициента  $I_{24}$  для контуров формы Льюиса

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |        |        |        |
|---------|----------------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|         |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 0,25    | 0,25           | -3,354                      | -3,990 | -4,555 | -5,212 | -5,922 | -6,621 |
|         | 0,50           | -0,689                      | -0,794 | -0,906 | -1,003 | -1,040 | -0,924 |
|         | 0,75           | -0,206                      | -0,224 | -0,231 | -0,210 | -0,128 | 0,077  |
|         | 1,00           | -0,062                      | -0,054 | -0,035 | 0,008  | 0,101  | 0,294  |
|         | 1,25           | -0,007                      | 0,010  | 0,038  | 0,084  | 0,169  | 0,328  |
|         | 1,50           | 0,015                       | 0,039  | 0,069  | 0,114  | 0,189  | 0,319  |
|         | 1,75           | 0,026                       | 0,051  | 0,084  | 0,126  | 0,192  | 0,301  |
|         | 2,00           | 0,031                       | 0,056  | 0,089  | 0,131  | 0,188  | 0,275  |
|         | 2,25           | 0,034                       | 0,058  | 0,090  | 0,131  | 0,183  | 0,253  |
|         | 2,50           | 0,036                       | 0,058  | 0,088  | 0,128  | 0,178  | 0,240  |
|         | 2,75           | 0,036                       | 0,057  | 0,085  | 0,123  | 0,171  | 0,229  |
|         | 3,00           | 0,036                       | 0,056  | 0,082  | 0,118  | 0,164  | 0,219  |
| 3,25    | 0,036          | 0,054                       | 0,079  | 0,112  | 0,156  | 0,211  |        |
| 0,50    | 0,25           | -3,417                      | -3,869 | -4,278 | -4,729 | -5,146 | -5,444 |
|         | 0,50           | -1,060                      | -1,191 | -1,314 | -1,377 | -1,284 | -0,902 |
|         | 0,75           | -0,422                      | -0,449 | -0,446 | -0,375 | -0,175 | 0,234  |
|         | 1,00           | -0,160                      | -0,139 | -0,089 | 0,020  | 0,235  | 0,626  |
|         | 1,25           | -0,031                      | 0,017  | 0,089  | 0,209  | 0,420  | 0,767  |
|         | 1,50           | 0,037                       | 0,104  | 0,190  | 0,313  | 0,513  | 0,821  |
|         | 1,75           | 0,077                       | 0,153  | 0,250  | 0,374  | 0,561  | 0,839  |
|         | 2,00           | 0,102                       | 0,182  | 0,286  | 0,413  | 0,582  | 0,825  |
|         | 2,25           | 0,118                       | 0,199  | 0,305  | 0,436  | 0,597  | 0,804  |
|         | 2,50           | 0,130                       | 0,208  | 0,314  | 0,446  | 0,606  | 0,795  |
|         | 2,75           | 0,138                       | 0,214  | 0,317  | 0,449  | 0,608  | 0,790  |
|         | 3,00           | 0,144                       | 0,217  | 0,316  | 0,446  | 0,605  | 0,790  |
| 3,25    | 0,149          | 0,219                       | 0,314  | 0,441  | 0,601  | 0,804  |        |
| 0,75    | 0,25           | -2,811                      | -3,086 | -3,336 | -3,593 | -3,773 | -3,807 |
|         | 0,50           | -1,030                      | -1,132 | -1,209 | -1,196 | -1,001 | -0,545 |
|         | 0,75           | -0,462                      | -0,475 | -0,447 | -0,342 | -0,116 | 0,262  |
|         | 1,00           | -0,197                      | -0,166 | -0,102 | 0,021  | 0,233  | 0,557  |
|         | 1,25           | -0,050                      | 0,008  | 0,089  | 0,214  | 0,407  | 0,679  |
|         | 1,50           | 0,038                       | 0,117  | 0,210  | 0,332  | 0,508  | 0,741  |
|         | 1,75           | 0,096                       | 0,187  | 0,290  | 0,410  | 0,571  | 0,776  |
|         | 2,00           | 0,137                       | 0,233  | 0,345  | 0,466  | 0,611  | 0,789  |
|         | 2,25           | 0,167                       | 0,265  | 0,381  | 0,506  | 0,642  | 0,794  |
|         | 2,50           | 0,190                       | 0,288  | 0,405  | 0,533  | 0,668  | 0,805  |
|         | 2,75           | 0,208                       | 0,305  | 0,420  | 0,550  | 0,685  | 0,817  |
|         | 3,00           | 0,223                       | 0,317  | 0,431  | 0,560  | 0,697  | 0,833  |
| 3,25    | 0,235          | 0,327                       | 0,439  | 0,568  | 0,708  | 0,859  |        |
| 1,00    | 0,25           | -2,245                      | -2,399 | -2,546 | -2,679 | -2,717 | -2,607 |
|         | 0,50           | -0,921                      | -0,999 | -1,040 | -0,981 | -0,749 | -0,310 |
|         | 0,75           | -0,436                      | -0,437 | -0,393 | -0,277 | -0,065 | 0,245  |
|         | 1,00           | -0,197                      | -0,162 | -0,095 | 0,019  | 0,196  | 0,442  |
|         | 1,25           | -0,058                      | -0,001 | 0,071  | 0,176  | 0,327  | 0,522  |
|         | 1,50           | 0,028                       | 0,099  | 0,178  | 0,274  | 0,403  | 0,562  |
|         | 1,75           | 0,087                       | 0,166  | 0,249  | 0,339  | 0,452  | 0,586  |
|         | 2,00           | 0,129                       | 0,212  | 0,299  | 0,386  | 0,484  | 0,596  |

| $\nu T$ | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |        |        |        |
|---------|----------------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|         |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 1,00    | 2,25           | 0,161                       | 0,244  | 0,333  | 0,421  | 0,509  | 0,601  |
|         | 2,50           | 0,185                       | 0,268  | 0,356  | 0,444  | 0,530  | 0,611  |
|         | 2,75           | 0,204                       | 0,285  | 0,372  | 0,460  | 0,545  | 0,622  |
|         | 3,00           | 0,219                       | 0,298  | 0,383  | 0,470  | 0,556  | 0,635  |
|         | 3,25           | 0,232                       | 0,308  | 0,391  | 0,478  | 0,565  | 0,653  |
| 1,25    | 0,25           | -1,771                      | -1,844 | -1,930 | -1,987 | -1,939 | -1,753 |
|         | 0,50           | -0,812                      | -0,872 | -0,891 | -0,807 | -0,567 | -0,170 |
|         | 0,75           | -0,398                      | -0,390 | -0,338 | -0,222 | -0,033 | 0,219  |
|         | 1,00           | -0,185                      | -0,149 | -0,085 | 0,016  | 0,163  | 0,351  |
|         | 1,25           | -0,060                      | -0,009 | 0,054  | 0,141  | 0,259  | 0,403  |
|         | 1,50           | 0,018                       | 0,078  | 0,142  | 0,217  | 0,314  | 0,428  |
|         | 1,75           | 0,071                       | 0,136  | 0,201  | 0,268  | 0,350  | 0,442  |
|         | 2,00           | 0,109                       | 0,176  | 0,241  | 0,304  | 0,372  | 0,448  |
|         | 2,25           | 0,137                       | 0,203  | 0,268  | 0,330  | 0,390  | 0,451  |
|         | 2,50           | 0,158                       | 0,223  | 0,287  | 0,348  | 0,405  | 0,458  |
|         | 2,75           | 0,175                       | 0,237  | 0,300  | 0,360  | 0,416  | 0,466  |
|         | 3,00           | 0,187                       | 0,247  | 0,308  | 0,368  | 0,425  | 0,476  |
| 3,25    | 0,197          | 0,255                       | 0,314  | 0,374  | 0,432  | 0,492  |        |
| 1,50    | 0,25           | -1,377                      | -1,405 | -1,460 | -1,471 | -1,372 | -1,144 |
|         | 0,50           | -0,716                      | -0,764 | -0,768 | -0,672 | -0,438 | -0,086 |
|         | 0,75           | -0,360                      | -0,347 | -0,291 | -0,179 | -0,014 | 0,191  |
|         | 1,00           | -0,171                      | -0,135 | -0,076 | 0,014  | 0,136  | 0,283  |
|         | 1,25           | -0,060                      | -0,014 | 0,041  | 0,113  | 0,207  | 0,318  |
|         | 1,50           | 0,009                       | 0,061  | 0,113  | 0,173  | 0,248  | 0,334  |
|         | 1,75           | 0,057                       | 0,110  | 0,161  | 0,212  | 0,274  | 0,342  |
|         | 2,00           | 0,090                       | 0,143  | 0,193  | 0,240  | 0,290  | 0,346  |
|         | 2,25           | 0,114                       | 0,166  | 0,215  | 0,260  | 0,303  | 0,346  |
|         | 2,50           | 0,132                       | 0,183  | 0,230  | 0,274  | 0,315  | 0,351  |
|         | 2,75           | 0,146                       | 0,194  | 0,241  | 0,284  | 0,323  | 0,358  |
|         | 3,00           | 0,155                       | 0,202  | 0,247  | 0,290  | 0,331  | 0,368  |
| 3,25    | 0,163          | 0,208                       | 0,252  | 0,295  | 0,337  | 0,385  |        |
| 1,75    | 0,25           | -1,056                      | -1,069 | -1,114 | -1,102 | -0,975 | -0,725 |
|         | 0,50           | -0,633                      | -0,673 | -0,668 | -0,567 | -0,345 | -0,035 |
|         | 0,75           | -0,326                      | -0,310 | -0,252 | -0,147 | -0,002 | 0,166  |
|         | 1,00           | -0,158                      | -0,123 | -0,067 | 0,012  | 0,114  | 0,231  |
|         | 1,25           | -0,059                      | -0,017 | 0,031  | 0,092  | 0,169  | 0,255  |
|         | 1,50           | 0,003                       | 0,047  | 0,091  | 0,140  | 0,200  | 0,265  |
|         | 1,75           | 0,045                       | 0,089  | 0,130  | 0,171  | 0,219  | 0,270  |
|         | 2,00           | 0,074                       | 0,118  | 0,157  | 0,192  | 0,230  | 0,272  |
|         | 2,25           | 0,095                       | 0,137  | 0,175  | 0,209  | 0,240  | 0,272  |
|         | 2,50           | 0,111                       | 0,151  | 0,187  | 0,220  | 0,249  | 0,276  |
|         | 2,75           | 0,122                       | 0,160  | 0,196  | 0,228  | 0,257  | 0,281  |
|         | 3,00           | 0,130                       | 0,167  | 0,202  | 0,234  | 0,263  | 0,292  |
| 3,25    | 0,136          | 0,172                       | 0,206  | 0,238  | 0,271  | 0,311  |        |
| 2,00    | 0,25           | -0,803                      | -0,829 | -0,879 | -0,859 | -0,718 | -0,460 |
|         | 0,50           | -0,562                      | -0,597 | -0,586 | -0,483 | -0,275 | -0,004 |
|         | 0,75           | 0,297                       | -0,279 | -0,220 | -0,121 | 0,005  | 0,143  |

| vT   | $\frac{2T}{b}$ | Коэффициент полноты $\beta$ |        |        |       |       |       |
|------|----------------|-----------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|
|      |                | 0,5                         | 0,6    | 0,7    | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
| 2,00 | 1,00           | -0,146                      | 0,112  | -0,060 | 0,010 | 0,097 | 0,191 |
|      | 1,25           | -0,057                      | -0,019 | 0,024  | 0,076 | 0,139 | 0,207 |
|      | 1,50           | -0,001                      | 0,037  | 0,074  | 0,115 | 0,163 | 0,214 |
|      | 1,75           | 0,036                       | 0,073  | 0,107  | 0,139 | 0,177 | 0,217 |
|      | 2,00           | 0,062                       | 0,098  | 0,129  | 0,156 | 0,186 | 0,218 |
|      | 2,25           | 0,080                       | 0,115  | 0,144  | 0,170 | 0,194 | 0,218 |
|      | 2,50           | 0,094                       | 0,126  | 0,155  | 0,179 | 0,201 | 0,220 |
|      | 2,75           | 0,104                       | 0,135  | 0,162  | 0,186 | 0,207 | 0,226 |
|      | 3,00           | 0,111                       | 0,140  | 0,167  | 0,192 | 0,214 | 0,237 |
|      | 3,25           | 0,116                       | 0,144  | 0,171  | 0,196 | 0,222 | 0,258 |

Поскольку

$$\int \cos^2 \sigma t = \frac{t}{2} - \frac{1}{4\sigma} \sin 2\sigma t,$$

будем иметь

$$A_1 = \Lambda_{44} \theta_0^2 \sigma^2 \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{4\sigma} \sin 2\sigma t \right] \Big|_0^{\pi/2\sigma} = \Lambda_{44} \theta_0^2 \sigma \frac{\pi}{4}.$$

Приравнявая работы  $A_1$  и  $A_2$ , получим следующую формулу для определения линейного коэффициента демпфирования через квадратичный:

$$\Lambda_{44} = \frac{8}{3\pi} K \theta_0 \sigma. \quad (2.80)$$

Несколько забегая вперед, заметим, что при расчетах качки на волнении для использования этой формулы требуется применять метод последовательных приближений. Это вызвано тем обстоятельством, что коэффициент демпфирования  $\Lambda_{44}$  выражается через амплитуду качки  $\theta_0$ , которая, в свою очередь, зависит от  $\Lambda_{44}$ .

Рассмотренный метод линеаризации демпфирования предложен А. П. Фан-дер-Флитом.

Для свободных вертикальных или килевых колебаний  $\Phi$ . Тасаи рекомендует следующие эмпирические формулы:

$$\Lambda_{33} = c_\zeta m \sqrt{\frac{g}{L}}; \quad \Lambda_{55} = c_\psi mL \sqrt{gL},$$

где

$$c_\zeta = 5,4 \frac{\alpha}{\varphi} H_0 - 4,7 \quad c_\psi = 0,08 H_0.$$

Здесь  $H_0 = B/2T$ ,  $\alpha$  — коэффициент полноты площади ватерлинии,  $\varphi$  — коэффициент продольной полноты,  $m$  — масса корабля,  $L$ ,  $B$ ,  $T$  — его главные размеры.

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ  
КАЧКИ  
НА ТИХОЙ ВОДЕ

§ 9. Системы координат. Уравнения движения корабля

Как известно из теоретической механики, любое движение твердого тела можно представить как состоящее из поступательного движения связанного с ним полюса и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс. При этом дифференциальные уравнения движения приобретают наиболее простой вид в случае, когда в качестве осей подвижной системы координат, неизменно связанной с телом, принимаются главные центральные оси инерции его массы.

Для определения положения главных осей по отношению к кораблю, прежде всего, будем считать его симметричным относительно диаметральной плоскости как в смысле формы обводов, так и распределения масс. Из этого предположения следует, что две главные оси инерции лежат в диаметральной плоскости, а третья (поперечная) — перпендикулярна ей, т. е. в случае отсутствия крена горизонтальна.

Далее, учитывая большое значение отношения длины к высоте борта и полагая, что в положении равновесия корабль сядет на ровный киль (без статического дифферента), а распределение масс по высоте в носовой и кормовой половинах корпуса более или менее однородно, можно считать, что угол, составленный главной продольной осью инерции и основной плоскостью, весьма мал. Это позволяет ввести допущение о том, что в положении равновесия главная продольная ось инерции горизонтальна. Тогда вторая главная ось, лежащая в диаметральной плоскости, будет вертикальной.

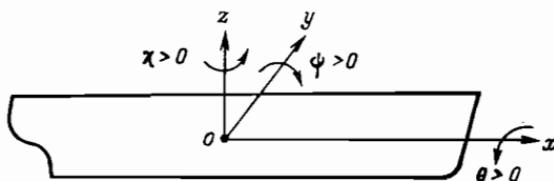
При выборе систем координат, в которых изучается качка, следует стремиться не к внешней простоте получающихся в той или иной системе формул, а к удобству численной реализации.

Расположим начало подвижной системы координат *Oxyz*, неизменно связанной с кораблем, в точке пересечения плоскостей миделя, ватерлинии равновесия и диаметральной. Плоскость *Oxy* совместим с ватерлинией, направив ось *Ox* в нос по линии пересечения ватерлинии с диаметральной плоскостью. Ось *Oy* направим на левый борт, ось *Oz* — вверх (рис. 3.1). В силу приведенных выше соображений эти оси можно считать главными осями инерции массы корабля.

Неподвижную систему координат  $O_0\xi\eta\zeta$  выберем так, чтобы при положении корабля в покое на тихой воде она совпадала с подвижной.

Смещения точки  $O$  при продольно-горизонтальной, поперечно-горизонтальной и вертикальной качке обозначим соответственно через  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ ; углы бортовой качки, килевой качки и рысканья — через  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\chi$ . Будем считать эти углы положительными, когда ось  $Ox$  поворачивается к  $Oy$ , ось  $Oy$  — к  $Oz$ , ось  $Oz$  — к  $Ox$ . Таким образом, в принятой нами правой системе координат положительным считается вращение против часовой стрелки, если смотреть с концов осей, вокруг которых корабль поворачивается. Иными словами, угол бортовой качки будет положительным при наклоне на правый борт, килевой качки — на нос, рысканья — носом влево.

3.1. Неизменно связанная с кораблем система координат.



Аналогичное правило знаков введем и для моментов сил, т. е. будем считать их положительными, если они стремятся совместить ось  $Ox$  с  $Oy$ , ось  $Oy$  — с  $Oz$ , ось  $Oz$  — с  $Ox$ .

При изучении качки на тихой воде будем для простоты полагать, что центр масс корабля совпадает с началом подвижной системы координат. Тогда оси этой системы будут главными центральными осями инерции.

Напомним известное положение теоретической механики о том, что система координат, по отношению к которой движется тело, и система, в которой записываются уравнения движения, могут быть различными. Таким образом, уравнения движения полюса, перемещающегося относительно неподвижной в пространстве системы координат, можно записать в подвижной системе, неизменно связанной с телом. В теории качки следует использовать именно такую запись уравнений движения, так как гидродинамические характеристики качки, входящие в эти уравнения в качестве коэффициентов при подлежащих определению кинематических характеристиках, не зависят от времени только в неизменно связанной с кораблем системе координат. Детальный вывод уравнений движения в такой системе приведен в гл. 4. Из этого вывода следует, что при расположении начала подвижной системы координат и центра масс в одной точке и совпадении координатных осей с главными центральными осями инерции дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= R_x; \\ m\ddot{\eta} &= R_y; \\ m\ddot{\zeta} &= R_z; \\ I_x\ddot{\theta} &= \mathfrak{M}_x; \\ I_y\ddot{\psi} &= \mathfrak{M}_y; \\ I_z\ddot{\chi} &= \mathfrak{M}_z, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где  $m$  — масса корабля;  $I_x, I_y, I_z$  — моменты инерции массы относительно соответствующих подвижных осей;  $\xi, \eta, \zeta$  — проекции вектора линейного ускорения точки  $O$  на неподвижные оси  $O_0\xi, O_0\eta$  и  $O_0\zeta$ ;  $\theta, \psi, \chi$  — проекции вектора углового ускорения на подвижные оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$ ;  $R_x, R_y, R_z$  — проекции главного вектора гидродинамических сил<sup>1</sup> на соответствующие подвижные оси;  $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$  — проекции главного момента гидродинамических сил на эти же оси.

В дифференциальных уравнениях (3.1) и дальнейших формулах линейной теории качки смещения, скорости и ускорения рассматриваются как малые первого порядка, малые высших порядков отбрасываются.

Аналогично тому, как это часто делается в гидромеханике, будем обозначать проекции главного вектора и главного момента гидродинамических сил на подвижные оси одной буквой  $R$  с цифровым индексом, придавая этому обозначению следующий смысл:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_x; & R_2 &= R_y; & R_3 &= R_z; \\ R_4 &= \mathfrak{M}_x; & R_5 &= \mathfrak{M}_y; & R_6 &= \mathfrak{M}_z. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения (3.1) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= R_1; \\ m\ddot{\eta} &= R_2; \\ m\ddot{\zeta} &= R_3; \\ I_x\ddot{\theta} &= R_4; \\ I_y\ddot{\psi} &= R_5; \\ I_z\ddot{\chi} &= R_6; \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> В гидродинамические силы не включают среднее сопротивление воды движению корабля по курсу, так как эта сила уравновешивается полезной тягой гребных винтов.

Третье, четвертое и пятое уравнения движения описывают соответственно вертикальную, бортовую и килевую качку. Эти виды качки, называемые основными, представляют собой колебания корабля относительно положения устойчивого равновесия. Первое, второе и шестое уравнения описывают соответственно продольно-горизонтальную качку, поперечно-горизонтальную качку и рысканье. Эти виды качки называются дополнительными. Они представляют собой колебания относительно положения безразличного равновесия.

На первый взгляд дифференциальные уравнения (3.2), описывающие различные виды качки, представляются изолированными. Если бы это действительно было так, то каждый вид качки мог бы существовать самостоятельно, т. е. независимо от других. Однако на самом деле этого не происходит. В силу того, что проекции гидродинамических сил, входящие в правые части уравнений (3.2), зависят от кинематических характеристик (смещений, скоростей, ускорений) не только «своего», но и других видов качки; эти уравнения изолированными не являются. Даже в рамках линейной теории качки они образуют две системы, в каждую из которых входит по три уравнения. Первая система описывает так называемую продольную качку, которая состоит из продольно-горизонтальной, вертикальной и килевой. Вторая описывает качку, называемую боковой. Этим названием охватываются совместные рысканье, бортовая и поперечно-горизонтальная качка.

Если опустить из рассмотрения продольно-горизонтальную качку, которая не оказывает особо существенного влияния на вертикальную и килевую и сама не особенно сильно зависит от них, то эти виды качки могут существовать независимо друг от друга. Например, они независимы для симметричного относительно мидель-шпангоута корабля, сидящего в положении равновесия прямо и на ровный киль (без статического крена и дифферента), при отсутствии хода. При этих же условиях рысканье будет существовать независимо от поперечно-горизонтальной и бортовой качки и, наоборот, два последних вида качки — независимо от рысканья.

Поперечно-горизонтальная и бортовая качка могут существовать независимо друг от друга только для глубоко погруженного тела, симметричного относительно горизонтальной плоскости, при расположении центра масс на этой плоскости. Для корабля поперечно-горизонтальная и бортовая качка всегда протекают совместно и влияют друг на друга.

## § 10. Изолированные дифференциальные уравнения основных видов качки

Как уже упоминалось выше, линейной теорией качки называется такая теория, в которой колебания корабля описываются линейными дифференциальными уравнениями. Это возможно в том

случае, когда амплитуды качки малы и демпфирующие силы линейно зависят от соответствующих скоростей.

Действительно, если амплитуды малы, то можно считать, во-первых, восстанавливающие силы линейно зависящими от смещений корабля и, во-вторых, величину или форму подводной его части изменяющимися настолько мало, что присоединенные массы и коэффициенты демпфирования остаются постоянными, т. е. не зависят от амплитуд. Таким образом, допущения о малости амплитуд и линейном характере демпфирования являются необходимыми и достаточными для построения линейной теории качки на тихой воде.

Введем предположение о том, что вертикальная, бортовая и килевая качка могут существовать независимо друг от друга и от дополнительных видов качки. Для этого требуется, чтобы корабль был симметричен относительно плоскости миделя, центр масс лежал в этой плоскости симметрии, скорость хода равнялась нулю и удлинение было настолько большим, чтобы можно было полагать  $M_{13} = M_{15} = \Lambda_{13} = \Lambda_{15} = 0$ . Эти условия достаточны для того, чтобы основные виды качки не зависели друг от друга, а килевые и вертикальные колебания, кроме того, не зависели от дополнительных видов качки (продольно-горизонтальной, поперечно-горизонтальной и рысканья). Вместе с тем даже при этих условиях бортовая качка будет сопровождаться поперечно-горизонтальной, так как для корабля  $M_{24}$  и  $\Lambda_{24}$  равняться нулю не могут. Однако с целью выяснения некоторых характеристик бортовой качки условимся временно пренебрегать величинами  $M_{24}$  и  $\Lambda_{24}$ .

При качке на тихой воде в отсутствие каких-либо периодических возмущений действующие на корабль гидродинамические силы будут состоять из инерционно-демпфирующих  $F$  и восстанавливающих  $F^r$ . Таким образом  $j$ -я проекция главного вектора  $R$  и главного момента  $\mathfrak{M}$  действующих сил будет определяться формулой

$$R_j = F_j + F_j^r,$$

где, напомним,  $j = 3$  приписывается проекции силы на вертикальную ось неизменно связанной с кораблем системы координат,  $j = 4$  — проекции момента на продольную, а  $j = 5$  — проекции момента на поперечную ось той же системы.

Если основные виды качки протекают независимо друг от друга и не сопровождаются дополнительными видами, то полученная в гл. 2 формула для проекций инерционно-демпфирующих сил

$$F_j = - \sum_{k=1}^6 (M_{jk} \dot{U}_k + \Lambda_{jk} U_k) \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

примет вид

$$F_j = - (M_{jj} \dot{U}_j + \Lambda_{jj} U_j),$$

где  $U_3 = \dot{\zeta}$ ,  $U_4 = \dot{\theta}$ ,  $U_5 = \dot{\psi}$ .

Таким образом, можем написать:

$$F_3 = -M_{33}\ddot{\zeta} - \Lambda_{33}\dot{\zeta};$$

$$F_4 = -M_{44}\ddot{\theta} - \Lambda_{44}\dot{\theta};$$

$$F_5 = -M_{55}\ddot{\psi} - \Lambda_{55}\dot{\psi}.$$

Восстанавливающая сила при вертикальной качке будет представлять собой разность мгновенной силы поддержания и веса корабля. Если в районе изменения ватерлинии полагать борта вертикальными, то эта сила может быть определена как произведение объема цилиндра, основанием которого является площадь ватерлинии  $S_0$ , а высотой смещение корабля  $\zeta$ , на плотность забортной воды  $\rho$  и ускорение силы тяжести  $g$ . Учитывая, что эта сила по направлению всегда противоположна  $\zeta$ , имеем:

$$F_3^r = -\rho g S_0 \zeta.$$

Восстанавливающие моменты при бортовой и килевой качке определяются по известным из теории остойчивости линеаризованным метацентрическим формулам для крена и дифферента

$$F_4^r = -mgh\theta; \quad F_5^r = -mgH\psi,$$

где  $h$  и  $H$  — начальные поперечная и продольная метацентрические высоты. Знаки «минус» в этих формулах учитывают противоположность направлений восстанавливающих моментов и углов наклона, как это всегда имеет место у корабля с положительной остойчивостью.

Итак, складывая соответствующие проекции инерционно-демпфирующих и восстанавливающих сил, получим выражения для гидродинамических сил, действующих на корабль при вертикальной, бортовой и килевой качке на тихой воде:

$$R_3 = -M_{33}\ddot{\zeta} - \Lambda_{33}\dot{\zeta} - \rho g S_0 \zeta;$$

$$R_4 = -M_{44}\ddot{\theta} - \Lambda_{44}\dot{\theta} - mgh\theta;$$

$$R_5 = -M_{55}\ddot{\psi} - \Lambda_{55}\dot{\psi} - mgH\psi.$$

Подставляя эти выражения в уравнения

$$m\ddot{\zeta} = R_3; \quad I_x\ddot{\theta} = R_4; \quad I_y\ddot{\psi} = R_5,$$

получим изолированные дифференциальные уравнения основных видов качки на тихой воде в следующем виде:

$$(m + M_{33})\ddot{\zeta} + \Lambda_{33}\dot{\zeta} + \rho g S_0 \zeta = 0;$$

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + mgh\theta = 0;$$

$$(I_y + M_{55})\ddot{\psi} + \Lambda_{55}\dot{\psi} + mgH\psi = 0.$$

Первое из полученных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

описывает вертикальную качку, второе — бортовую и третье — килевую.

Разделив эти уравнения на коэффициенты при вторых производных, можем написать

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + 2\nu_3\dot{\zeta} + \omega_3^2\zeta &= 0; \\ \ddot{\theta} + 2\nu_4\dot{\theta} + \omega_4^2\theta &= 0; \\ \ddot{\psi} + 2\nu_5\dot{\psi} + \omega_5^2\psi &= 0;\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}\nu_3 &= \frac{\Lambda_{33}}{2(m + M_{33})}; & \omega_3 &= \sqrt{\frac{\rho g S_0}{m + M_{33}}}; \\ \nu_4 &= \frac{\Lambda_{44}}{2(I_x + M_{44})}; & \omega_4 &= \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44}}}; \\ \nu_5 &= \frac{\Lambda_{55}}{2(I_y + M_{55})}; & \omega_5 &= \sqrt{\frac{mgH}{I_y + M_{55}}}.\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

Обозначив  $\zeta = Y_3$ ,  $\theta = Y_4$ ,  $\psi = Y_5$ , перепишем последние дифференциальные уравнения в виде

$$\ddot{Y}_j + 2\nu_j\dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = 0, \quad (j = 3, 4, 5).$$

В дальнейшем для простоты записи будем индексы  $j$  там, где в них нет необходимости, опускать.

Рассмотрим вначале чисто гипотетический случай отсутствия демпфирования ( $\nu = 0$ ). Тогда получим

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = 0. \quad (3.4)$$

Решение этого уравнения можно записать в самой различной форме. Например,

$$\left. \begin{aligned}Y &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}; \\ Y &= \operatorname{Re} [(C_3 + iC_4) e^{i\omega t}]; \\ Y &= C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t; \\ Y &= C_7 \cos (\omega t - C_8),\end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

где  $\operatorname{Re}$  — символ действительной части комплексного числа, а  $C_1 - C_8$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

В том, что любое из этих выражений удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.4), можно убедиться непосредственной подстановкой. Кроме того, их эквивалентность нетрудно доказать, определив постоянные интегрирования.

Для этой цели выпишем сначала выражения для смещения  $Y$  и скорости  $\dot{Y}$  корабля в тригонометрической форме, воспользовав-

шись формулой Эйлера

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x.$$

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} Y &= C_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t) = \\ &= (C_1 + C_2) \cos \omega t + i (C_1 - C_2) \sin \omega t; \\ \dot{Y} &= -(C_1 + C_2) \omega \sin \omega t + i (C_1 - C_2) \omega \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= \operatorname{Re} [(C_3 + iC_4) (\cos \omega t + i \sin \omega t)] = C_3 \cos^2 \omega t - C_4 \sin \omega t; \\ \dot{Y} &= -C_3 \omega \sin^2 \omega t - C_4 \omega \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t; \\ \dot{Y} &= -C_5 \omega \sin \omega t + C_6 \omega \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= C_7 (\cos \omega t \cos C_8 + \sin \omega t \sin C_8); \\ \dot{Y} &= C_7 (-\omega \sin \omega t \cos C_8 + \omega \cos \omega t \sin C_8). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Зададим начальные условия в виде:  $Y = Y_0$ ,  $\dot{Y} = \dot{Y}_0$  при  $t = 0$ , т. е. будем полагать, что в момент времени, избранный в качестве начального, корабль отклонен от положения равновесия на величину  $Y_0$  и имеет скорость  $\dot{Y}_0$ . Заметим, что обозначение начальной скорости следует читать как «игрек с точкой нулевое», а не «игрек нулевое с точкой», так как  $Y_0$  не является функцией времени и «игрек нулевое с точкой» тождественно равен нулю.

Подставляя в системы (3.6) — (3.9) начальные условия, получим

$$Y = Y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{Y}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (3.10)$$

Таким образом, мы убедились, что любая из рассмотренных форм записи решения дифференциального уравнения (3.4) может быть сведена к виду (3.10).

Решению этого уравнения можно придать еще ряд внешне различных форм, однако все они в итоге окажутся эквивалентными.

Заменяя в (3.5) для удобства обозначения  $C_7$  и  $C_8$  на  $B$  и  $\beta$ , окончательно запишем решение уравнения (3.4) в виде

$$Y_j = B_j \cos(\omega_j t - \beta_j).$$

Здесь  $B_j$  представляет собой амплитуду соответствующего вида качки;  $\omega_j$  — его круговую частоту (количество полных колебаний<sup>1</sup> за  $2\pi$  секунд);  $\omega_j t - \beta_j$  — фазу колебаний;  $\beta_j$  — начальную фазу.

Из полученного решения видно, что при отсутствии демпфи-

<sup>1</sup> Под полным колебанием понимается смещение (наклонение) корабля из одного крайнего положения в другое и затем возвращение в исходное состояние.

вания корабль, отклоненный от положения равновесия и отпущенный с начальной скоростью или без нее, либо корабль, которому в положении равновесия была придана начальная скорость, совершал бы на тихой воде незатухающие свободные гармонические колебания. Их периоды  $T_j = 2\pi/\omega_j$  для вертикальной ( $j = 3$ ), бортовой ( $j = 4$ ) и килевой ( $j = 5$ ) качки будут определяться формулами:

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m + M_{33}}{\rho g S_0}}; \quad T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{I_x + M_{44}}{mgh}};$$

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{I_y + M_{55}}{mgH}}. \quad (3.11)$$

Из этих формул видно, что с ростом поперечной остойчивости корабля период его свободной бортовой качки на тихой воде уменьшается, т. е. угловые скорости качки увеличиваются и она становится более порывистой, более стремительной. Вместе с тем, как известно из теории качки на нерегулярном волнении и практики мореплавания, в реальных морских условиях средний фактический период бортовых колебаний с более или менее значительной амплитудой равен периоду свободных колебаний на тихой воде. Поскольку для обеспечения хорошей мореходности и обитаемости корабля его качка должна быть не стремительной, а плавной, значения поперечной метацентрической высоты не должны быть слишком большими.

Рассмотрим теперь колебания на тихой воде при наличии демпфирования ( $\nu \neq 0$ ). В этом случае уравнение качки будет иметь вид

$$\ddot{Y} + 2\nu\dot{Y} + \omega^2 Y = 0, \quad (3.12)$$

а его решение

$$Y = Be^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta), \quad (3.13)$$

где  $\omega'$  — частота свободных колебаний с учетом демпфирования, определяемая формулой

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}.$$

Поскольку для кораблей величина  $\nu$  не превышает 10—20% от  $\omega$ , очевидно, что демпфирование оказывает весьма малое влияние на частоту и, следовательно, при определении частот (периодов) его можно не принимать во внимание.

Наличие в решении дифференциального уравнения качки множителя  $e^{-\nu t}$  показывает, что свободные колебания будут носить затухающий характер, т. е. их амплитуды будут с течением времени убывать. Постоянные интегрирования  $B$  и  $\beta$ , как и в случае незатухающих колебаний, определяются начальными условиями (начальным отклонением от положения равновесия  $Y_0$  и началь-

ной скоростью  $\dot{Y}_0$ ). Продифференцировав выражение (3.13) по времени, получим

$$\dot{Y} = -\nu B e^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta) - \omega' B e^{-\nu t} \sin(\omega' t - \beta). \quad (3.14)$$

Полагая в формулах (3.13) и (3.14)  $t = 0$ , можем написать

$$Y_0 = B \cos \beta;$$

$$\dot{Y}_0 = -\nu B \cos \beta + \omega' B \sin \beta.$$

Отсюда имеем

$$\cos \beta = \frac{Y_0}{B}; \quad \dot{Y}_0 = -\nu Y_0 + \omega' Y_0 \operatorname{tg} \beta;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{Y}_0 + \nu Y_0}{\omega' Y_0}; \quad \cos \beta = \frac{\omega' Y_0}{\sqrt{\omega'^2 Y_0^2 + (\dot{Y}_0 + \nu Y_0)^2}};$$

$$B = \frac{1}{\omega'} \sqrt{\omega'^2 Y_0^2 + (\dot{Y}_0 + \nu Y_0)^2}.$$

Интересно отметить, что затухающие свободные колебания, как и незатухающие, обладают свойством изохронности, т. е. независимости периода от амплитуды. Это свойство справедливо лишь в той мере, в которой действительная физическая картина качки описывается линейными дифференциальными уравнениями. Если, например, отказаться от предположения о малости амплитуд бортовой качки и определять восстанавливающий момент не по линейризованной метацентрической формуле, а по диаграмме остойчивости, то изохронности уже наблюдаться не будет, а, наоборот, проявится существенная зависимость периода от амплитуды.

Решение дифференциального уравнения (3.12) имеет вид (3.13) только в случае, когда  $\nu < \omega$ .

Если  $\nu = \omega$ , то решение этого уравнения будет иметь вид

$$Y = e^{-\nu t} (B_1 t + B_2),$$

если  $\nu > \omega$ , — вид

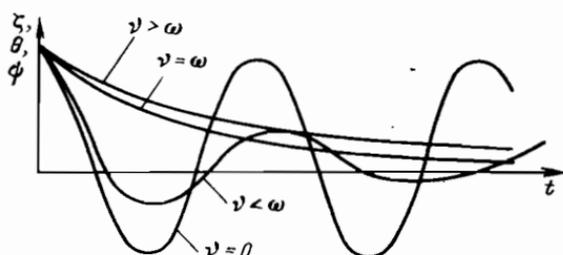
$$Y = B_1 e^{(-\nu + \sqrt{\nu^2 - \omega^2}) t} + B_2 e^{(-\nu - \sqrt{\nu^2 - \omega^2}) t}.$$

Последние выражения определяют не колебательное, а так называемое аperiодическое или, точнее говоря, лимитационное движение. В этих случаях ( $\nu \geq \omega$ ) тело, отклоненное от положения равновесия, будет, не совершая колебаний, возвращаться в это положение и вернется в него при  $t \rightarrow \infty$ .

Наименьшее значение  $\nu$ , при котором движение теряет колебательный характер ( $\nu = \omega$ ), называется в теории колебаний аperiодическим или критическим сопротивлением.

С точки зрения изучения качки случаи  $\nu \geq \omega$  не представляют практического интереса, ибо, как уже говорилось, для реальных кораблей всегда имеет место неравенство  $\nu \ll \omega$ .

На рис. 3.2 показан характер наклонов корабля на тихой воде при различных значениях коэффициента затухания  $\nu$ . Кривая  $\nu = 0$  представляет незатухающие колебания,  $\nu < \omega$  — затухающие колебания (единственно реальный характер движения); кривые  $\nu = \omega$  и  $\nu > \omega$  соответствуют аperiодическому (лимитационному) движению.



3.2. Характер движения при различных значениях коэффициента затухания.

## § 11. Логарифмический декремент.

### Экспериментальное определение коэффициента затухания

В случае учета демпфирования затухающие колебания корабля описываются равенством (3.13)

$$Y = Be^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta).$$

Для того чтобы определить моменты времени, отвечающие максимальным (амплитудным) значениям  $Y$ , найдем производную  $\dot{Y}$  и приравняем ее нулю:

$$-\nu Be^{-\nu t} \cos(\omega' t - \beta) - \omega' Be^{-\nu t} \sin(\omega' t - \beta) = 0.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{tg}(\omega' t - \beta) = -\frac{\nu}{\omega'}; \quad \cos(\omega' t - \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\omega'}\right)^2}}.$$

Учитывая, что безразмерный коэффициент затухания  $\nu/\omega'$  мал по сравнению с единицей, приближенно можно считать, что смещение корабля достигает амплитудных значений, когда  $\cos(\omega' t - \beta) = 1$ . Соответствующим выбором начала отсчета времени можно сделать начальную фазу  $\beta$  равной нулю. Тогда получим

$$\cos \omega' t = 1; \quad \omega' t = 2k\pi; \quad t = \frac{2k\pi}{\omega'} = kT',$$

где  $T' = 2\pi/\omega'$  — период затухающих свободных колебаний.

Придавая  $k$  значения  $0, 1, 2, \dots$ , получим, следующую последовательность амплитуд  $A_k = Be^{-vkT'}$ :

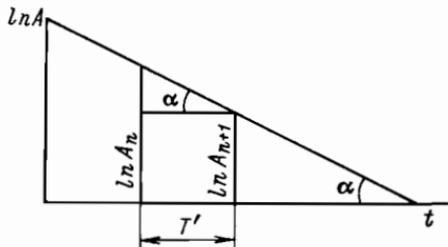
$$A_0 = B; \quad A_1 = Be^{-vT'}; \quad A_2 = Be^{-2vT'}; \quad A_3 = Be^{-3vT'} \text{ и т. д.}$$

Эта последовательность представляет собой геометрическую прогрессию, знаменатель которой (отношение произвольно взятой амплитуды  $A_n$  к предыдущей  $A_{n-1}$ ) равен  $e^{-vT'}$ . Натуральный логарифм обратного отношения, т. е. отношения произвольно взятой амплитуды  $A_n$  к непосредственно за ней следующей  $A_{n+1}$ , называется логарифмическим декрементом колебаний. Таким образом, логарифмический декремент равен

$$\ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln e^{vT'} = vT'.$$

Понятие о логарифмическом декременте удобно для определения коэффициента затухания  $\nu$  из опыта.

Кораблю или его модели придается начальное отклонение и записывается кривая затухающих колебаний. Затем, как показано на рис. 3.3, вверх от некоторой горизонтальной прямой откладываются логарифмы амплитуд и концы отрезков соединяются линией, которая при линейной зависимости демпфирования от скорости будет прямой.



3.3. Логарифмы амплитуд затухающих колебаний.

Тангенс угла наклона этой прямой к горизонтальной оси и будет равен коэффициенту затухания. Действительно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{T'} (\ln A_n - \ln A_{n+1}) = \frac{1}{T'} \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{1}{T'} vT' = \nu.$$

Существуют способы определения коэффициента затухания непосредственно по записи колебаний без вычисления логарифмов амплитуд.

Так, С. Н. Благовещенский на основе энергетических соображений получил следующую формулу для безразмерного коэффициента затухания:

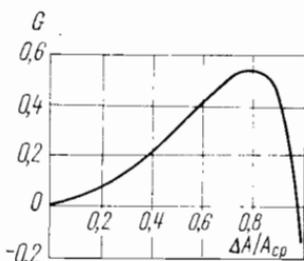
$$\nu_0 = \frac{\nu}{\omega'} = \frac{2}{\pi} \frac{A_{\text{ср}} \Delta A}{A_n^2 + A_{n+1/2}^2},$$

где  $A_n$  и  $A_{n+1/2}$  — амплитуды в начале и в конце полупериода,  $\Delta A = A_n - A_{n+1/2}$  — уменьшение амплитуды за полупериод,  $2A_{\text{ср}} = A_n + A_{n+1/2}$ . Таким образом,  $A_{\text{ср}}$  можно понимать как некоторую среднюю для данного полупериода амплитуду.

Формулу С. Н. Благовещенского можно переписать в более удобном для практических расчетов виде:

$$v_0 = \frac{1}{\pi} \frac{A_n^2 - A_{n+1/2}^2}{A_n^2 + A_{n+1/2}^2}$$

Как указывалось в § 8, при бортовой качке вследствие существенной роли вязкостной составляющей демпфирования следует считать, что демпфирующий момент есть квадратичная функция угловой скорости, определяемая равенством (2.79). Для того, чтобы по кривой затухающих колебаний найти безразмерный коэффициент квадратичного демпфирования  $K_0 = K/(I_x + M_{44})$ , можно воспользоваться формулой Ю. И. Фаддеева:



$$K_0 = \frac{3\Delta A (1 + G)}{4A_{\text{сп}}^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\Delta A}{A_{\text{сп}}} \right)^2 \right]}$$

3.4. Функция  $G$  для определения коэффициента демпфирования.

где  $G$  — функция, определяемая по графику, приведенному на рис. 3.4. При малых значениях отношения  $\Delta A/A_{\text{сп}}$  эту формулу можно упростить, пренебрегая функцией  $G$  и величиной  $(\Delta A/A_{\text{сп}})^2$ . Тогда получим

$$K_0 = \frac{3}{4} \frac{\Delta A}{A_{\text{сп}}^2}$$

## § 12. Совместная поперечно-горизонтальная и бортовая качка

Бортовая качка не будет вызывать поперечных гидродинамических сил только при движении так называемой дублированной модели корабля в безграничной жидкости. Такую модель можно получить, считая свободную поверхность жидкости твердой стенкой и зеркально отражая подводную часть корабля в верхнее полупространство. Подобная модель, соответствующая нулевой частоте колебаний, т. е. движению в сверхтяжелой жидкости, используется в теории управляемости и находит себе применение при приближенном определении некоторых присоединенных масс. Для исследования качки такая модель непригодна и бортовая качка, строго говоря, всегда должна рассматриваться совместно с поперечно-горизонтальной.

Учет демпфирующих сил при совместной поперечно-горизонтальной и бортовой качке, не вызывая никаких принципиальных трудностей, приводит к чрезвычайно громоздким выкладкам и кроме тривиального вывода о затухающем характере свободных колебаний не дает никакой существенно новой информации по

сравнению со случаем отсутствия демпфирования. В связи с этим ограничимся рассмотрением совместной поперечно-горизонтальной и бортовой качки без демпфирования. Формула для гидродинамических инерционных сил

$$F_j = - \sum_{k=1}^6 M_{jk} \dot{U}_k$$

в этом случае примет вид

$$F_j = - \sum_{k=2, 4} M_{jk} U_k, \quad (j=2, 4),$$

где  $U_2 = \dot{\eta}$ ,  $U_4 = \dot{\theta}$ .

Таким образом, имеем

$$F_2 = -M_{22} \ddot{\eta} - M_{24} \ddot{\theta};$$

$$F_4 = -M_{24} \ddot{\eta} - M_{44} \ddot{\theta}.$$

При поперечно-горизонтальной качке восстанавливающие силы не возникают, поэтому проекция  $R_2$  главного вектора гидродинамических сил на поперечную ось будет равна  $F_2$ . При определении же проекции  $R_4$  главного момента гидродинамических сил на продольную ось следует, помимо  $F_4$ , учесть восстанавливающий момент  $F'_4$ , определяемый линеаризованной метацентрической формулой остойчивости

$$F'_4 = -mgh\theta.$$

Итак, подставляя в уравнения

$$m\ddot{\eta} = R_2; \quad I_x \ddot{\theta} = R_4$$

значения

$$R_2 = F_2 = -M_{22} \ddot{\eta} - M_{24} \ddot{\theta};$$

$$R_4 = F_4 + F'_4 = -M_{24} \ddot{\eta} - M_{44} \ddot{\theta} - mgh\theta,$$

получим следующую систему двух линейных дифференциальных уравнений, описывающих совместную поперечно-горизонтальную и бортовую качку на тихой воде без демпфирования:

$$(m + M_{22}) \ddot{\eta} + M_{24} \ddot{\theta} = 0;$$

$$M_{24} \ddot{\eta} + (I_x + M_{44}) \ddot{\theta} + mgh\theta = 0. \quad (3.15)$$

Эту систему легко свести к одному уравнению относительно  $\theta$ , определив из первого уравнения значение  $\ddot{\eta}$  и подставив его во второе:

$$\ddot{\eta} = - \frac{M_{24}}{m + M_{22}} \ddot{\theta};$$

$$\left( I_x + M_{44} - \frac{M_{24}^2}{m + M_{22}} \right) \ddot{\theta} + mgh\theta = 0. \quad (3.16)$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_{42}^2 \theta = 0, \quad (3.17)$$

где через

$$\omega_{42} = \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44} - \frac{M_{24}^2}{m + M_{22}}}}$$

обозначена собственная частота бортовой качки с учетом поперечно-горизонтальной. Этой частоте приписан индекс 42, чтобы отличать ее от частоты гипотетической изолированной бортовой качки  $\omega_4$ .

Как легко видеть  $\omega_{42} > \omega_4$ , т. е. за счет влияния поперечно-горизонтальной качки собственная частота бортовой качки увеличивается, а следовательно, ее период уменьшается.

Общее решение уравнения (3.17) можно записать в виде

$$\theta = C_1 \cos \omega_{42} t + C_2 \sin \omega_{42} t, \quad (3.18)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Выписав угловую скорость бортовой качки

$$\dot{\theta} = \omega_{42} (-C_1 \sin \omega_{42} t + C_2 \cos \omega_{42} t) \quad (3.19)$$

и полагая, что в момент времени  $t = 0$  корабль отклонен от положения равновесия на угол  $\theta_0$  и имеет начальную угловую скорость  $\dot{\theta}_0$ , из равенств (3.18) и (3.19) получим:

$$C_1 = \theta_0; \quad C_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}}.$$

Таким образом, свободная бортовая качка, сопровождающаяся поперечно-горизонтальной, будет в случае отсутствия демпфирования описываться выражением

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_{42} t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42} t.$$

Это выражение по своей структуре совершенно аналогично полученному в § 10 выражению (3.10), описывающему изолированную бортовую качку на тихой воде без демпфирования. Поперечно-горизонтальная качка, не изменяя незатухающего гармонического характера свободных бортовых колебаний, приводит лишь к изменению их частоты  $\omega_4$  на более высокую  $\omega_{42}$ .

Рассмотрим теперь характер самой поперечно-горизонтальной качки. Дважды дифференцируя по времени выражение (3.18) для угла бортовой качки, найдем

$$\ddot{\theta} = -\omega_{42}^2 \left( \theta_0 \cos \omega_{42} t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42} t \right).$$

Подставляя это выражение углового ускорения в полученную ранее формулу для линейного ускорения поперечно-горизонтальной качки

$$\ddot{\eta} = -\frac{M_{24}}{m + M_{22}} \ddot{\theta},$$

будем иметь

$$\ddot{\eta} = \frac{M_{24}\omega_{42}^2}{m + M_{22}} \left( \theta_0 \cos \omega_{42}t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42}t \right).$$

Последовательно интегрируя последнее выражение, получим скорости и смещения корабля в поперечном направлении:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{M_{24}\omega_{42}}{m + M_{22}} \left( \theta_0 \sin \omega_{42}t - \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \cos \omega_{42}t \right) + C_3; \\ \eta &= -\frac{M_{24}}{m + M_{22}} \left( \theta_0 \cos \omega_{42}t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42}t \right) + C_3t + C_4, \end{aligned} \right\} (3.20)$$

где постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  определяются из начальных условий.

Не нарушая общности, можно положить, что при  $t = 0$  поперечное смещение корабля  $\eta_0 = 0$ , так как это смещение представляет собой отклонение от положения безразличного равновесия. Начальную поперечную скорость положим отличной от нуля и равной  $\dot{\eta}_0$ . Тогда из равенств (3.20) получим

$$C_3 = \dot{\eta}_0 + \frac{M_{24}}{m + M_{22}} \dot{\theta}_0; \quad C_4 = \frac{M_{24}}{m + M_{22}} \theta_0$$

и выражение для поперечно-горизонтального смещения центра масс корабля приобретает следующий окончательный вид:

$$\eta = -\frac{M_{24}}{m + M_{22}} \left( \theta_0 \cos \omega_{42}t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \sin \omega_{42}t - \dot{\theta}_0 t - \theta_0 \right) + \dot{\eta}_0 t.$$

Из последнего выражения следует, во-первых, что при совместной бортовой и поперечно-горизонтальной качке оба вида колебаний будут иметь одинаковую частоту и, во-вторых, что при наличии начальной поперечной или угловой скорости среднее положение, относительно которого происходят поперечно-горизонтальные колебания, смещается в поперечном направлении с постоянной скоростью, равной

$$\dot{\eta}_0 + \frac{M_{24}}{m + M_{22}} \dot{\theta}_0.$$

В случае, если начальные скорости поперечно-горизонтальной и бортовой качки равны нулю, бокового смещения среднего положения наблюдаться не будет.

Отметим, что вывод о незатухающем характере колебаний и непрерывном боковом смещении среднего положения корабля является следствием отсутствия учета демпфирующих сил. Если эти силы учитывать, то наряду с затуханием поперечно-горизонтальных и бортовых колебаний боковое смещение быстро прекратится.

С формальной точки зрения коэффициент при второй производной в уравнении (3.16) может стать отрицательным. В этом случае уравнение бортовых наклонов с учетом поперечно-горизонтальной качки приобретает вид

$$\ddot{\theta} - \omega_{42}^2 \theta = 0, \quad (3.21)$$

где

$$\omega_{42} = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{M_{24}^2}{m + M_{22}} - (I_x + M_{44})}}. \quad (3.22)$$

Запишем решение дифференциального уравнения (3.21) в следующей форме:

$$\theta = C_5 e^{\omega_{42} t} + C_6 e^{-\omega_{42} t}. \quad (3.23)$$

Движение, определяемое последней формулой, не носит колебательного характера и если постоянная  $C_5$  отличается от нуля, то наклонение корабля с течением времени должно неограниченно монотонно возрастать.

Выписав производную

$$\dot{\theta} = \omega_{42} (C_5 e^{\omega_{42} t} - C_6 e^{-\omega_{42} t}) \quad (3.24)$$

и положив, что при  $t = 0$  отклонение от положения равновесия и угловая скорость корабля равны соответственно  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$ , из формул (3.23) и (3.24) найдем:

$$\theta_0 = C_5 + C_6;$$

$$\dot{\theta}_0 = \omega_{42} (C_5 - C_6),$$

откуда

$$C_5 = \frac{1}{2} \left( \theta_0 + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_{42}} \right).$$

Имея выражения для  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$  через постоянные интегрирования, не составляет никакого труда найти и постоянную  $C_6$ , однако это не представляет интереса, так как за счет отрицательного показателя степени второй член формулы (3.23) с течением времени стремится к нулю.

Поскольку постоянная  $C_5$  не равна нулю и при этом, как показывает опыт, движение носит колебательный характер, а непрерывного монотонного нарастания крена не наблюдается, следует прийти к выводу, что коэффициент при второй производной в диф-

дифференциальном уравнении (3.16) не может стать отрицательным, а уравнение движения не может иметь вида (3.21).

Положение не изменяется, если даже ввести в уравнение бортовых наклонов демпфирующие силы. В этом случае, добавив во второе уравнение системы (3.15) эти силы, получим<sup>1</sup> :

$$(m + M_{22})\ddot{\eta} + M_{24}\ddot{\theta} = 0;$$

$$M_{24}\ddot{\eta} + (I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + mgh\theta = 0.$$

Последнюю систему легко свести к уравнению

$$\ddot{\theta} - 2v_{42}\dot{\theta} - \omega_{42}^2\theta = 0, \quad (3.25)$$

где

$$v_{42} = \frac{\Lambda_{44}}{2 \left[ \frac{M_{24}^2}{m + M_{22}} - (I_x + M_{44}) \right]},$$

а  $\omega_{42}$  определяется, как и ранее, формулой (3.22).

Составив характеристическое уравнение

$$r^2 - 2v_{42}r - \omega_{42}^2 = 0,$$

находим его корни

$$r_{1, 2} = v_{42} \pm \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}$$

и интеграл дифференциального уравнения (3.25)

$$\theta = C_7 e^{(v_{42} + \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2})t} + C_8 e^{(v_{42} - \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2})t}. \quad (3.26)$$

Выпишем выражение для угловой скорости

$$\dot{\theta} = (v_{42} + \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}) C_7 e^{(v_{42} + \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2})t} +$$

$$+ (v_{42} - \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}) C_8 e^{(v_{42} - \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2})t}$$

и положим, как обычно, что в начальный момент времени  $t = 0$  отклонение корабля от положения равновесия и угловая скорость равны  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$ . Тогда из системы уравнений

$$\theta_0 = C_7 + C_8;$$

$$\dot{\theta}_0 = (v_{42} + \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}) C_7 + (v_{42} - \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}) C_8$$

получим

$$C_7 = \frac{1}{2\sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}} \left[ \dot{\theta}_0 - \theta_0 (v_{42} - \sqrt{v_{42}^2 + \omega_{42}^2}) \right]. \quad (3.27)$$

<sup>1</sup> Учет демпфирующих сил, связанных с поперечно-горизонтальной качкой и ее влиянием на бортовую, не меняя качественной картины явления, приводит к очень громоздким выкладкам. Поэтому эти силы в уравнениях опущены.

Определение постоянной  $C_8$  не вызывает никаких трудностей, однако оно не представляет интереса, так как за счет отрицательного показателя степени второй член формулы (3.26), так же как и второй член формулы (3.23), с течением времени асимптотически стремится к нулю.

Из выражения (3.27) видно, что при отличных от нуля значениях начального отклонения и начальной скорости (либо одного из этих видов начальных возмущений) постоянная  $C_7$  не обращается в нуль. Это значит, что при отрицательных значениях старшего коэффициента в уравнении (3.16) угол наклона корабля должен с течением времени монотонно увеличиваться и в случае наличия демпфирования. Поскольку в действительности этого не происходит и на тихой воде движение корабля, отклоненного от положения устойчивого равновесия и затем предоставленного самому себе, носит характер затухающих колебаний, очевидно, что коэффициент при угловом ускорении в дифференциальном уравнении (3.16) всегда остается положительным.

Как показывает численный анализ, для корабля с полуэллиптическими шпангоутами третья слагаемое этого коэффициента составляет примерно 15% от суммы первых двух. Таким образом, различие между частотой свободной бортовой качки, вычисленной на основе изолированного дифференциального уравнения, и действительной частотой, определенной с учетом поперечно-горизонтальных колебаний, составляет 7—8%.

### § 13. Совместная вертикальная и килевая качка

Рассмотрим совместную вертикальную и килевую качку корабля, не имеющего хода, на тихой воде без учета демпфирующих сил. В этом случае действующие на корабль гидродинамические силы будут включать только восстанавливающие и инерционные составляющие.

Проекцию на ось  $Oz$  инерционной составляющей гидродинамической силы, действующей на шпангоут с абсциссой  $x$ , можно записать в виде

$$f_3 = -\mu_{33} (\ddot{\xi} - x\ddot{\psi}), \quad (3.28)$$

где  $\ddot{\xi} - x\ddot{\psi}$  — вертикальное ускорение шпангоута при совместной вертикальной и килевой качке.

Момент этой силы относительно оси  $Oy$  будет определяться формулой

$$f_5 = -xf_3. \quad (3.29)$$

Знак минус перед правой частью равенства (3.28) учитывает противоположность направлений инерционной гидродинамической силы и ускорения шпангоута. В равенстве (3.29) этот знак необходим в связи с тем, что положительная (направленная вверх)

сила, действующая на положительном плече, дает отрицательный (дифференцирующий на корму) момент.

Руководствуясь методом плоских сечений, силу и момент для всего корабля получим, интегрируя по длине выражения для силы  $f_3$  и момента  $f_5$ , действующих на шпангоут:

$$F_3 = - (M_{33}\ddot{\zeta} + M_{35}\ddot{\psi});$$

$$F_5 = - (M_{35}\ddot{\zeta} + M_{55}\ddot{\psi}),$$

где

$$M_{33} = \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{33} dx; \quad M_{35} = - \int_{-L/2}^{L/2} x \mu_{33} dx;$$

$$M_{55} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mu_{33} dx.$$

Обозначив ширину шпангоута по ватерлинии через  $b$ , можно написать следующее очевидное выражение для дополнительной по отношению к действующей в положении равновесия силы плавучести, приложенной к этому шпангоуту:

$$f_3^r = -\rho g b (\zeta - x\psi),$$

где  $\zeta - x\psi$  — вертикальное смещение шпангоута с абсциссой  $x$  при совместной вертикальной и килевой качке.

Знак минус перед правой частью последнего равенства связан с противоположностью направлений силы  $f_3^r$  и смещения шпангоута  $\zeta - x\psi$ .

Проинтегрировав это равенство, получим формулу для восстанавливающей силы, действующей на весь корабль:

$$F_3^r = -\rho g S_0 (\zeta - x_f \psi),$$

где

$$S_0 = \int_{-L/2}^{L/2} b dx; \quad S_0 x_f = \int_{-L/2}^{L/2} x b dx.$$

Очевидно, что  $S_0$  представляет собой площадь ватерлинии, а  $x_f$  — абсциссу ее центра тяжести.

Умножив выражение для  $f_3^r$  на плечо  $x$ , приписав их произведению знак минус и проинтегрировав по длине корабля, получим следующую формулу для момента дополнительной силы плавучести, который, строго говоря, несколько отличается от восстанавливающего момента:

$$F_5^r = \rho g (S_0 x_f \zeta - J_y \psi), \quad (3.30)$$

где через

$$J_y = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 b dx = J_f + S_0 x_f^2$$

обозначен момент инерции площади ватерлинии относительно оси,

от которой отсчитывается абсцисса  $x_f$  ее центра тяжести, а через  $J_f$  — ее момент инерции относительно центральной поперечной оси.

Как известно из статики корабля,  $J_f = VR_0$ , где  $V$  — объемное водоизмещение, а  $R_0$  — продольный метацентрический радиус. В связи с этим момент инерции  $J_y$  можно представить в виде

$$J_y = VR_g,$$

где  $R_g$  имеет смысл продольного метацентрического радиуса, исправленного на положение оси вращения корабля, которая в нашем случае не проходит через центр тяжести ватерлинии, как это принято в статике. Таким образом, величина

$$\rho g J_y \psi = \rho g V R_g \psi$$

представляет собой аналог момента остойчивости формы  $\rho g V R_0 \psi$ . Правая часть выражения (3.30) представляет собой также аналог момента остойчивости формы, вычисленный с учетом не только изменения положения оси вращения, но и вертикального смещения центра тяжести площади ватерлинии. Восстанавливающий момент определяется как разность моментов формы и веса, причем последний момент равен  $\rho g V a \psi$ , где  $a$  — возвышение центра масс корабля над центром величины. Обозначив

$$R_g - a = H_g,$$

можем написать вместо (3.30) следующее более точное выражение для восстанавливающего момента:

$$F'_5 = \rho g (S_0 x_f \zeta - V H_g \psi), \quad (3.31)$$

где  $H_g$  имеет смысл продольной метацентрической высоты, исправленной на изменение положения оси вращения.

Однако поскольку аналог продольной метацентрической высоты  $H_g$  очень мало отличается от аналога продольного метацентрического радиуса  $R_g$  (величина  $a$  меньше, чем  $R_g$  примерно на два порядка), значения момента, определяемые формулами (3.30) и (3.31), практически совпадают.

Подставив полученные выше выражения для сил и моментов в уравнения:

$$m \ddot{\zeta} = R_3 = F_3 + F'_3;$$

$$I_y \ddot{\psi} = R_5 = F_5 + F'_5$$

и учитывая, что произведение плотности забортной воды  $\rho$  на объемное водоизмещение корабля  $V$  представляет собой его массу  $m$ , получим следующую систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений, описывающих совместную вертикальную и килевую качку на тихой воде:

$$(m + M_{33}) \ddot{\zeta} + \rho g S_0 \zeta + M_{35} \ddot{\psi} - \rho g S_0 x_f \psi = 0; \quad (3.32)$$

$$M_{35} \ddot{\zeta} - \rho g S_0 x_f \zeta + (I_y + M_{55}) \ddot{\psi} + m g H_g \psi = 0.$$

Эта система может быть сведена к одному линейному уравнению четвертого порядка и проинтегрирована точно, но это связано с чрезвычайно громоздкими выкладками. С целью получения приближенного решения предварительно упростим систему, полагая  $M_{35}$  равным нулю. Ранее указывалось, что такое равенство выполняется для симметричного относительно миделя корабля, не имеющего статического дифферента. Однако это условие, будучи достаточным, не является необходимым. Равенство  $M_{35} = 0$  может выполняться и для корабля, не обладающего симметрией формы и нагрузки относительно миделя. В практике значение  $M_{35}$  обычно настолько мало, что введение предположения о равенстве его нулю не может привести к сколь-нибудь заметным погрешностям.

Таким образом, система (3.32) приобретает вид:

$$\begin{aligned} (m + M_{33})\ddot{\zeta} + \rho g S_0 \zeta - \rho g S_0 x_f \psi &= 0; \\ -\rho g S_0 x_f \zeta + (I_y + M_{55})\ddot{\psi} + mgH_g \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Разделим первое уравнение системы (3.33) на  $m + M_{33}$ , а второе — на  $I_y + M_{55}$ , предварительно умножив и разделив первый член этого уравнения на  $m + M_{33}$  и введя обозначение

$$\frac{m + M_{33}}{I_y + M_{55}} = \frac{1}{\rho_y^2}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + \omega_3^2 \zeta - \omega_3^2 x_f \psi &= 0; \\ -\omega_3^2 \frac{x_f}{\rho_y^2} \zeta + \ddot{\psi} + \omega_{5g}^2 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где, очевидно,

$$\omega_3^2 = \frac{\rho g S_0}{m + M_{33}}; \quad \omega_{5g}^2 = \frac{mgH_g}{I_y + M_{55}}.$$

Сравнивая последние формулы с формулами (3.3), легко убедиться, что  $\omega_3$  представляет собой не что иное, как частоту изолированной вертикальной качки, а  $\omega_{5g}$  — величину, весьма близкую к частоте изолированной килевой качки.

Перепишем систему (3.34) в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + c_{33}\zeta + c_{35}\psi &= 0; \\ c_{53}\zeta + \ddot{\psi} + c_{55}\psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\begin{aligned} c_{33} &= \omega_3^2; \quad c_{35} = -\omega_3^2 x_f; \\ c_{53} &= -\omega_3^2 \frac{x_f}{\rho_y^2}; \quad c_{55} = \omega_{5g}^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Индексы  $jk$  при коэффициентах  $c$  строятся по следующему принципу: через  $j$  обозначается номер проекции силы или момента

( $j = 3$  соответствует проекции силы на ось  $Oz$ , а  $j = 5$  — проекции момента на ось  $Oy$ ), а через  $k$  — номер неизвестного ( $k = 3$  соответствует ординате вертикальной качки  $\zeta$ , а  $k = 5$  — углу килевой качки  $\psi$ ).

Для интегрирования системы (3.35) введем вспомогательную функцию  $U(t)$ , связанную с неизвестными  $\zeta$  и  $\psi$  следующими соотношениями:

$$\zeta = -c_{35}U; \quad \psi = (D^2 + c_{33})U, \quad (3.37)$$

где  $D = d/dt$  — символический оператор дифференцирования по времени. Таким образом,

$$D^2U = \frac{d^2U}{dt^2}.$$

Подставляя выражения (3.37) в систему дифференциальных уравнений (3.35), увидим, что первое из уравнений удовлетворяется при любом выборе функции  $U$ . Поэтому указанная функция должна быть выбрана так, чтобы она удовлетворяла второму уравнению. Подстановка выражений (3.37) в это уравнение приводит к дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$[(D^2 + c_{33})(D^2 + c_{55}) - c_{35}c_{53}]U = 0$$

или в обычной записи

$$\frac{d^4U}{dt^4} + (c_{33} + c_{55})\frac{d^2U}{dt^2} + (c_{33}c_{55} - c_{35}c_{53})U = 0. \quad (3.38)$$

Характеристическое уравнение в этом случае будет иметь вид

$$r^4 + a_1r^2 + a_2 = 0,$$

где

$$a_1 = c_{33} + c_{55}; \quad a_2 = c_{33}c_{55} - c_{35}c_{53}.$$

Его корни определяются формулой

$$r = \pm \sqrt{-\frac{c_{33} + c_{55}}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_{33} - c_{55})^2}{4} + c_{35}c_{53}}}. \quad (3.39)$$

Нетрудно убедиться, что эти корни будут мнимыми. Как будет показано в § 14, значения  $\omega_3$  и  $\omega_5$  очень близки друг к другу;  $\omega_{5g}$  почти не отличается от  $\omega_5$  и, следовательно,

$$(c_{33} - c_{55})^2 = (\omega_3^2 - \omega_{5g}^2)^2 \approx 0.$$

Таким образом, внутренний радикал в формуле (3.39) приближенно равен

$$\sqrt{c_{35}c_{53}} = \omega_3^2 \frac{x_f}{\rho_y}.$$

Абсцисса  $x_f$  центра тяжести площади ватерлинии не превышает 2—3% длины корабля. Величина  $\rho_y$ , играющая роль радиуса инерции системы, включающей массу корабля и присоединенную массу,

составляет 20—30% длины. Таким образом, отношение  $x_f/\rho_y$  обычно не превосходит 0,1—0,15 и внутренний радикал оказывается на порядок меньше, чем

$$\frac{c_{33} + c_{55}}{2} \approx \omega_3^2.$$

Отсюда следует, что оба значения выражения, стоящего под внешним радикалом в формуле (3.39), будут отрицательными и все четыре корня характеристического уравнения действительно окажутся мнимыми:

$$r_{1,2} = \pm i\omega_{35}; \quad r_{3,4} = \pm i\omega_{53}.$$

Этим значениям корней соответствует следующее выражение общего интеграла уравнения (3.38):

$$U = C_1 \cos \omega_{35}t + C_2 \sin \omega_{35}t + C_3 \cos \omega_{53}t + C_4 \sin \omega_{53}t.$$

Подставляя это выражение в формулы (3.37) и имея в виду, что согласно (3.36)

$$c_{33} = \omega_3^2; \quad c_{35} = -\omega_3^2 x_f,$$

получим

$$\zeta = \omega_3^2 x_f (C_1 \cos \omega_{35}t + C_2 \sin \omega_{35}t + C_3 \cos \omega_{53}t + C_4 \sin \omega_{53}t); \quad (3.40)$$

$$\psi = (\omega_3^2 - \omega_{35}^2) (C_1 \cos \omega_{35}t + C_2 \sin \omega_{35}t) + (\omega_3^2 - \omega_{53}^2) (C_3 \cos \omega_{53}t + C_4 \sin \omega_{53}t).$$

Скорости вертикальной и килевой качки будут:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta} &= \omega_3^2 x_f [\omega_{35} (-C_1 \sin \omega_{35}t + C_2 \cos \omega_{35}t) + \omega_{53} (-C_3 \sin \omega_{53}t + C_4 \cos \omega_{53}t)]; \\ \dot{\psi} &= (\omega_3^2 - \omega_{35}^2) \omega_{35} (-C_1 \sin \omega_{35}t + C_2 \cos \omega_{35}t) + (\omega_3^2 - \omega_{53}^2) \omega_{53} (-C_3 \sin \omega_{53}t + C_4 \cos \omega_{53}t). \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Задав начальные условия в обычном виде при  $t=0$   $\zeta = \zeta_0$ ;  $\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_0$ ;  $\psi = \psi_0$ ;  $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ , из формул (3.40) и (3.41) получим следующие системы алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования  $C_1 - C_4$ :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \omega_3^2 x_f (C_1 + C_3); \\ \psi_0 &= (\omega_3^2 - \omega_{35}^2) C_1 + (\omega_3^2 - \omega_{53}^2) C_3; \\ \dot{\zeta}_0 &= \omega_3^2 x_f (\omega_{35} C_2 + \omega_{53} C_4); \\ \dot{\psi}_0 &= (\omega_3^2 - \omega_{35}^2) \omega_{35} C_2 + (\omega_3^2 - \omega_{53}^2) \omega_{53} C_4. \end{aligned} \right\}$$

Из выражений (3.40) видно, что в случае, когда центр тяжести площади ватерлинии не лежит на одной вертикали с центром масс корабля, как вертикальная, так и килевая качка представляют собой суперпозицию гармонических колебаний двух различных частот  $\omega_{35}$  и  $\omega_{53}$ . Эти частоты несколько отличаются от частот  $\omega_3$  и  $\omega_5$  ветрикальной и килевой качки, протекающих независимо друг от друга. Амплитуды и начальные фазы совместной качки определяются начальными условиями, как это всегда имеет место для свободных колебаний.

#### § 14. Приближенные формулы для моментов инерции массы корабля и периодов качки.

##### Оперативный контроль остойчивости корабля в море

Для расчета качки необходимо знать моменты инерции массы корабля:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm; \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

где  $dm$  — элементарная масса,  $x, y, z$  — координаты ее центра. Учитывая большое удлинение корабля, можно в подынтегральных выражениях пренебречь  $y^2$  и  $z^2$  по сравнению с  $x^2$ , т. е. считать  $I_y$  и  $I_z$  равными и определять их как момент инерции относительно поперечной плоскости, содержащей начало координат

$$I_y = I_z = \int_m x^2 dm.$$

Существуют различные схемы приближенного вычисления момента  $I_x$  с использованием конструктивных чертежей и данных по распределению масс, однако они чрезвычайно трудоемки и обладают невысокой точностью, так как вычислить, например, момент инерции наружной обшивки, набора или какого-либо механизма, имеющего сложную конфигурацию, очень тяжело. Поэтому в практике для определения  $I_x$  пользуются приближенными формулами. Чаще всего используют формулу Дуайра, полученную для прямоугольного параллелепипеда шириной  $B$  и высотой  $2z_{g0}$ , где  $z_{g0}$  — возвышение центра масс над основной плоскостью,

$$I_x = \frac{m}{12} (B^2 + 4z_{g0}^2)$$

или формула Ю. А. Шиманского, полученная для сплошного параболического цилиндра,

$$I_x = m \left( \frac{\alpha^2 B^2}{11,4\delta} + \frac{H_S}{12} \right),$$

где  $\alpha$  — коэффициент полноты ватерлинии;  $B$  — ширина корабля;  $H_S$  — высота борта;  $\delta$  — коэффициент общей полноты.

Если представить  $I_x$  как произведение квадрата радиуса инерции  $\rho_{ox}$  на массу корабля  $m$ , а радиус инерции в виде  $\rho_{ox} = c_0 B/2$ , то значения  $c_0$  оказываются близкими к 0,7, т. е.

$$I_x \approx 0,125mB^2.$$

Центральный момент инерции массы  $I_{gy}$  может быть вычислен с использованием необходимых для расчета общей прочности корабля данных о распределении масс по длине (табл. 10). Кроме того, значения  $I_y$  с достаточной для практики точностью можно определить по приближенной формуле Г. Е. Павленко

$$I_y = 0,065\alpha mL^2 \quad (3.42)$$

Таблица 10. Вычисление продольного момента инерции массы корабля

| № теоретического шпангоута                               | Масса, приходящаяся на шпангоут | Множители плеч | Произведение (2) (3) | Произведение (3) (4) |
|--|---------------------------------|----------------|----------------------|----------------------|
| (1)  | (2)                             | (3)            | (4)                  | (5)                  |
| 0—1  |                                 | 9,5            |                      |                      |
| 1—2  |                                 | 8,5            |                      |                      |
| 2—3  |                                 | 7,5            |                      |                      |
| .  |                                 | .              |                      |                      |
| .  |                                 | .              |                      |                      |
| 8—9  |                                 | 1,5            |                      |                      |
| 9—10   |                                 | 0,5            |                      |                      |
| 10—11  |                                 | -0,5           |                      |                      |
| 11—12  |                                 | -1,5           |                      |                      |
| .  |                                 | .              |                      |                      |
| .  |                                 | .              |                      |                      |
| 17—18  |                                 | -7,5           |                      |                      |
| 18—19  |                                 | -8,5           |                      |                      |
| 19—20  |                                 | -9,5           |                      |                      |
| Суммы  | $\Sigma_1$                      |                | $\Sigma_2$           | $\Sigma_3$           |
| $I_{gy} = (L/20)^2 / (\Sigma_3 - \Sigma_2^2 / \Sigma_1)$ |                                 |                |                      |                      |

или еще более простой формуле, соответствующей предположению о том, что продольный радиус инерции равен четверти длины корабля:

$$I_y = \left(\frac{L}{4}\right)^2 m = 0,0625mL^2.$$

Переходя к определению периодов свободных колебаний, заметим, что эта задача оказывается не столь простой, как кажется

на первый взгляд, в связи с тем, что периоды зависят от присоединенных масс, а последние, в свою очередь, зависят от периодов<sup>1</sup>. Таким образом, для точного решения задачи должен быть использован метод последовательных приближений (для вертикальной и килевой качки можно также воспользоваться изложенным ниже графоаналитическим способом, предложенным Ф. Тасаи).

Вместе с тем для практики необходимы пусть менее точные, но простые и удобные формулы, позволяющие быстро определить периоды свободных колебаний. Выведем такие приближенные формулы.

Период свободной вертикальной качки  $T_3$  определяется согласно (3.11) равенством

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m + M_{33}}{\rho g S_0}}.$$

Подставляя сюда очевидные выражения

$$m = \rho \delta L B T; \quad S_0 = \alpha L B,$$

представив присоединенную массу в виде  $M_{33} = q_3 m$  и имея в виду, что  $\sqrt{g}$  численно примерно равен  $\pi$ , получим

$$T_3 = 2 \sqrt{(1 + q_3) \chi T},$$

где  $\chi = \delta/\alpha$  — коэффициент вертикальной полноты корабля. Значения линейных размеров здесь и в последующем должны выражаться в метрах, тогда периоды получаются в секундах. Это связано с тем, что при получении приближенных формул мы сокращаем безразмерную величину  $\pi$  и размерную  $\sqrt{g}$ .

Для наиболее грубых оценочных расчетов можно, полагая  $q_3 = 1$ , а  $\chi = 0,8$ , получить формулу

$$T_3 = 2,5 \sqrt{T}. \quad (3.43)$$

Для определения  $q_3$  можно также воспользоваться эмпирической формулой

$$q_3 = 0,4\alpha \frac{B}{T}.$$

Если представить формулу для периода свободной вертикальной качки в виде

$$T_3 = k_{\zeta} \sqrt{T},$$

то, пользуясь для определения присоединенной массы выражением

$$M_{33} = m_{033} \frac{\rho \pi B^2}{4} L \frac{\alpha^2}{1 + \alpha}$$

<sup>1</sup> Влияние демпфирования на периоды свободных колебаний весьма мало и поэтому не учитывается.

Таблица 11. Значения коэффициента  $k_{\Sigma}$ 

| $\frac{B}{T}$ | $\alpha$ | Коэффициент общей полноты $\delta$ |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
|               |          | 0,50                               | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 |
| 2,0           | 0,65     | 2,26                               | 2,32 | 2,39 | 2,45 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,23                               | 2,29 | 2,35 | 2,41 | 2,47 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,20                               | 2,26 | 2,32 | 2,38 | 2,43 | 2,49 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,18                               | 2,24 | 2,29 | 2,35 | 2,40 | 2,45 | 2,50 | —    |
|               | 0,85     | 2,17                               | 2,22 | 2,27 | 2,32 | 2,37 | 2,42 | 2,47 | 2,52 |
|               | 0,90     | 2,15                               | 2,20 | 2,25 | 2,30 | 2,35 | 2,40 | 2,44 | 2,49 |
|               | 0,95     | 2,14                               | 2,19 | 2,24 | 2,28 | 2,33 | 2,37 | 2,42 | 2,46 |
| 2,5           | 0,65     | 2,36                               | 2,43 | 2,49 | 2,55 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,34                               | 2,40 | 2,46 | 2,52 | 2,57 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,32                               | 2,38 | 2,43 | 2,49 | 2,54 | 2,59 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,31                               | 2,36 | 2,41 | 2,47 | 2,52 | 2,57 | 2,61 | —    |
|               | 0,85     | 2,30                               | 2,35 | 2,40 | 2,45 | 2,49 | 2,54 | 2,59 | 2,63 |
|               | 0,90     | 2,29                               | 2,34 | 2,38 | 2,43 | 2,47 | 2,52 | 2,56 | 2,61 |
|               | 0,95     | 2,28                               | 2,33 | 2,37 | 2,41 | 2,46 | 2,50 | 2,54 | 2,58 |
| 3,0           | 0,65     | 2,47                               | 2,53 | 2,59 | 2,65 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,45                               | 2,51 | 2,56 | 2,62 | 2,67 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,44                               | 2,49 | 2,54 | 2,60 | 2,65 | 2,70 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,43                               | 2,48 | 2,53 | 2,58 | 2,63 | 2,67 | 2,72 | —    |
|               | 0,85     | 2,42                               | 2,47 | 2,51 | 2,56 | 2,61 | 2,65 | 2,70 | 2,74 |
|               | 0,90     | 2,41                               | 2,46 | 2,50 | 2,55 | 2,59 | 2,64 | 2,68 | 2,72 |
|               | 0,95     | 2,41                               | 2,45 | 2,49 | 2,54 | 2,58 | 2,62 | 2,66 | 2,70 |
| 3,5           | 0,65     | 2,57                               | 2,62 | 2,68 | 2,74 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,55                               | 2,61 | 2,66 | 2,72 | 2,77 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,54                               | 2,60 | 2,65 | 2,70 | 2,75 | 2,80 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,54                               | 2,59 | 2,64 | 2,68 | 2,73 | 2,78 | 2,82 | —    |
|               | 0,85     | 2,54                               | 2,58 | 2,63 | 2,67 | 2,72 | 2,76 | 2,80 | 2,84 |
|               | 0,90     | 2,54                               | 2,58 | 2,62 | 2,66 | 2,71 | 2,75 | 2,79 | 2,83 |
|               | 0,95     | 2,54                               | 2,58 | 2,62 | 2,66 | 2,70 | 2,74 | 2,77 | 2,81 |
| 4,0           | 0,65     | 2,66                               | 2,72 | 2,77 | 2,83 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,65                               | 2,71 | 2,76 | 2,81 | 2,86 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,65                               | 2,70 | 2,75 | 2,80 | 2,84 | 2,89 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,65                               | 2,69 | 2,74 | 2,79 | 2,83 | 2,88 | 2,92 | —    |
|               | 0,85     | 2,65                               | 2,69 | 2,74 | 2,78 | 2,82 | 2,86 | 2,90 | 2,94 |
|               | 0,90     | 2,65                               | 2,69 | 2,73 | 2,77 | 2,81 | 2,85 | 2,89 | 2,93 |
|               | 0,95     | 2,65                               | 2,69 | 2,73 | 2,77 | 2,81 | 2,85 | 2,88 | 2,92 |
| 4,5           | 0,65     | 2,75                               | 2,81 | 2,86 | 2,92 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,75                               | 2,80 | 2,85 | 2,90 | 2,95 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,75                               | 2,80 | 2,85 | 2,89 | 2,94 | 2,98 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,75                               | 2,80 | 2,84 | 2,89 | 2,93 | 2,97 | 3,01 | —    |
|               | 0,85     | 2,76                               | 2,80 | 2,84 | 2,88 | 2,92 | 2,96 | 3,00 | 3,04 |
|               | 0,90     | 2,76                               | 2,80 | 2,84 | 2,88 | 2,92 | 2,96 | 2,99 | 3,03 |
|               | 0,95     | 2,77                               | 2,81 | 2,84 | 2,88 | 2,92 | 2,95 | 2,99 | 3,02 |

| $\frac{B}{T}$ | $\alpha$ | Коэффициент общей полноты $\delta$ |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
|               |          | 0,50                               | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 |
| 5,0           | 0,65     | 2,84                               | 2,90 | 2,95 | 3,00 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,84                               | 2,89 | 2,94 | 2,99 | 3,04 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,85                               | 2,89 | 2,94 | 2,98 | 3,03 | 3,07 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,85                               | 2,90 | 2,94 | 2,98 | 3,02 | 3,06 | 3,11 | —    |
|               | 0,85     | 2,86                               | 2,90 | 2,94 | 2,98 | 3,02 | 3,06 | 3,10 | 3,14 |
|               | 0,90     | 2,87                               | 2,91 | 2,94 | 2,98 | 3,02 | 3,06 | 3,09 | 3,13 |
|               | 0,95     | 2,88                               | 2,91 | 2,95 | 2,99 | 3,02 | 3,06 | 3,09 | 3,12 |
| 5,5           | 0,65     | 2,93                               | 2,98 | 3,03 | 3,08 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,93                               | 2,98 | 3,03 | 3,08 | 3,12 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,94                               | 2,99 | 3,03 | 3,07 | 3,12 | 3,16 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,95                               | 2,99 | 3,03 | 3,07 | 3,11 | 3,15 | 3,19 | —    |
|               | 0,85     | 2,96                               | 3,00 | 3,04 | 3,08 | 3,12 | 3,15 | 3,19 | 3,23 |
|               | 0,90     | 2,97                               | 3,01 | 3,04 | 3,08 | 3,12 | 3,16 | 3,19 | 3,22 |
|               | 0,95     | 2,98                               | 3,02 | 3,05 | 3,10 | 3,13 | 3,17 | 3,20 | 3,23 |

и считая  $m_{033} = 0,8$ , получим

$$k_{\zeta} = \sqrt{4,02 \frac{\delta}{\alpha} + 2,53 \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{B}{T}}.$$

Вычисленные согласно последней формуле значения  $k_{\zeta}$  приведены в табл. 11.

Период свободной килевой качки, как видно из (3.11), определяется выражением

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{I_y + M_{55}}{mgH}}.$$

Пренебрегая крайне незначительной разницей между продольной метацентрической высотой  $H$  и продольным метацентрическим радиусом  $R_0$  и учитывая, что

$$R_0 = \frac{\rho J_f}{m},$$

где  $J_f$  — продольный момент инерции площади ватерлинии, формулу для  $T_5$  можно переписать в виде

$$T_5 = 2\pi \sqrt{\frac{I_y + M_{55}}{\rho g J_f}}. \quad (3.44)$$

Обозначив  $M_{55} = q_5 I_y$  и сократив  $\pi$  и  $\sqrt{g}$ , получим

$$T_5 = 2 \sqrt{\frac{(1 + q_5) I_y}{\rho J_f}}.$$

Таблица 12. Значения коэффициента  $k_{\phi}$ 

| $\frac{B}{T}$ | $\alpha$ | Коэффициент общей полноты $\delta$ |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
|               |          | 0,50                               | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 |
| 2,0           | 0,65     | 2,02                               | 2,08 | 2,14 | 2,21 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,01                               | 2,07 | 2,13 | 2,19 | 2,25 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,01                               | 2,07 | 2,12 | 2,18 | 2,23 | 2,28 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,01                               | 2,06 | 2,12 | 2,17 | 2,22 | 2,27 | 2,32 | —    |
|               | 0,85     | 2,01                               | 2,06 | 2,11 | 2,16 | 2,20 | 2,25 | 2,30 | 2,34 |
|               | 0,90     | 2,01                               | 2,06 | 2,10 | 2,15 | 2,19 | 2,23 | 2,28 | 2,32 |
|               | 0,95     | 2,02                               | 2,06 | 2,10 | 2,14 | 2,18 | 2,22 | 2,26 | 2,30 |
| 2,5           | 0,65     | 2,10                               | 2,17 | 2,22 | 2,29 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,10                               | 2,16 | 2,22 | 2,28 | 2,33 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,11                               | 2,17 | 2,22 | 2,27 | 2,33 | 2,37 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,11                               | 2,17 | 2,22 | 2,27 | 2,32 | 2,37 | 2,41 | —    |
|               | 0,85     | 2,13                               | 2,18 | 2,22 | 2,27 | 2,32 | 2,36 | 2,40 | 2,44 |
|               | 0,90     | 2,14                               | 2,19 | 2,23 | 2,27 | 2,31 | 2,35 | 2,39 | 2,43 |
|               | 0,95     | 2,16                               | 2,20 | 2,24 | 2,28 | 2,31 | 2,35 | 2,39 | 2,42 |
| 3,0           | 0,65     | 2,18                               | 2,24 | 2,30 | 2,36 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,20                               | 2,25 | 2,31 | 2,36 | 2,41 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,21                               | 2,26 | 2,32 | 2,36 | 2,41 | 2,46 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,23                               | 2,28 | 2,32 | 2,37 | 2,42 | 2,46 | 2,51 | —    |
|               | 0,85     | 2,24                               | 2,29 | 2,33 | 2,38 | 2,42 | 2,46 | 2,50 | 2,54 |
|               | 0,90     | 2,26                               | 2,31 | 2,35 | 2,39 | 2,43 | 2,46 | 2,50 | 2,54 |
|               | 0,95     | 2,29                               | 2,33 | 2,36 | 2,40 | 2,44 | 2,47 | 2,51 | 2,53 |
| 3,5           | 0,65     | 2,26                               | 2,32 | 2,38 | 2,44 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,28                               | 2,33 | 2,39 | 2,44 | 2,49 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,30                               | 2,35 | 2,40 | 2,45 | 2,50 | 2,55 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,33                               | 2,37 | 2,42 | 2,47 | 2,51 | 2,55 | 2,60 | —    |
|               | 0,85     | 2,35                               | 2,40 | 2,44 | 2,48 | 2,52 | 2,56 | 2,60 | 2,64 |
|               | 0,90     | 2,38                               | 2,42 | 2,46 | 2,50 | 2,54 | 2,57 | 2,61 | 2,64 |
|               | 0,95     | 2,41                               | 2,45 | 2,48 | 2,52 | 2,55 | 2,59 | 2,62 | 2,65 |
| 4,0           | 0,65     | 2,34                               | 2,40 | 2,45 | 2,51 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,36                               | 2,42 | 2,47 | 2,52 | 2,57 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,39                               | 2,44 | 2,49 | 2,54 | 2,58 | 2,63 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,42                               | 2,47 | 2,51 | 2,56 | 2,60 | 2,64 | 2,68 | —    |
|               | 0,85     | 2,46                               | 2,50 | 2,54 | 2,58 | 2,62 | 2,66 | 2,70 | 2,73 |
|               | 0,90     | 2,49                               | 2,53 | 2,57 | 2,60 | 2,64 | 2,68 | 2,71 | 2,74 |
|               | 0,95     | 2,53                               | 2,57 | 2,60 | 2,63 | 2,67 | 2,70 | 2,73 | 2,76 |
| 4,5           | 0,65     | 2,41                               | 2,47 | 2,52 | 2,57 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,45                               | 2,49 | 2,54 | 2,59 | 2,64 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,48                               | 2,53 | 2,57 | 2,62 | 2,66 | 2,71 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,52                               | 2,56 | 2,60 | 2,65 | 2,69 | 2,73 | 2,77 | —    |
|               | 0,85     | 2,56                               | 2,60 | 2,64 | 2,67 | 2,71 | 2,75 | 2,79 | 2,82 |
|               | 0,90     | 2,60                               | 2,64 | 2,67 | 2,71 | 2,74 | 2,77 | 2,81 | 2,84 |
|               | 0,95     | 2,65                               | 2,68 | 2,71 | 2,74 | 2,77 | 2,80 | 2,83 | 2,86 |

| $\frac{B}{T}$ | $\alpha$ | Коэффициент общей полноты $\delta$ |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|----------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
|               |          | 0,50                               | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 |
| 5,0           | 0,65     | 2,48                               | 2,54 | 2,59 | 2,64 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,52                               | 2,57 | 2,62 | 2,67 | 2,71 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,56                               | 2,61 | 2,65 | 2,70 | 2,74 | 2,78 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,61                               | 2,65 | 2,69 | 2,73 | 2,77 | 2,81 | 2,85 | —    |
|               | 0,85     | 2,65                               | 2,69 | 2,73 | 2,77 | 2,80 | 2,84 | 2,88 | 2,91 |
|               | 0,90     | 2,70                               | 2,74 | 2,77 | 2,81 | 2,84 | 2,87 | 2,90 | 2,94 |
|               | 0,95     | 2,75                               | 2,79 | 2,82 | 2,85 | 2,88 | 2,91 | 2,94 | 2,96 |
| 5,5           | 0,65     | 2,55                               | 2,61 | 2,66 | 2,71 | —    | —    | —    | —    |
|               | 0,70     | 2,60                               | 2,64 | 2,69 | 2,74 | 2,78 | —    | —    | —    |
|               | 0,75     | 2,64                               | 2,69 | 2,73 | 2,77 | 2,82 | 2,86 | —    | —    |
|               | 0,80     | 2,69                               | 2,73 | 2,77 | 2,81 | 2,85 | 2,89 | 2,93 | —    |
|               | 0,85     | 2,75                               | 2,78 | 2,82 | 2,85 | 2,89 | 2,93 | 2,96 | 2,99 |
|               | 0,90     | 2,80                               | 2,83 | 2,87 | 2,90 | 2,93 | 2,96 | 2,99 | 3,03 |
|               | 0,95     | 2,86                               | 2,89 | 2,92 | 2,95 | 2,98 | 3,00 | 3,03 | 3,06 |

Воспользуемся для определения  $I_y$  приближенной формулой

$$I_y = \left(\frac{L}{4}\right)^2 m = \left(\frac{L}{4}\right)^2 \rho \delta L B T$$

и положим продольный радиус инерции площади ватерлинии также равным  $L/4$ . Тогда

$$J_f = \left(\frac{L}{4}\right)^2 S_0 = \left(\frac{L}{4}\right)^2 \alpha L B$$

и

$$T_5 = 2 \sqrt{(1 + q_5) \chi T}.$$

Полагая для грубых оценок  $q_5 = 1$ ;  $\chi = 0,8$ , получим

$$T_5 = 2,5 \sqrt{T}.$$

Сопоставляя последнюю формулу с формулой (3.43), видим, что в первом приближении периоды свободной вертикальной и килевой качки оказываются одинаковыми.

Несколько меньшие значения  $T_5$  получаются при использовании эмпирической формулы

$$q_5 = 0,42 \varphi^2 \frac{B}{T},$$

где  $\varphi$  — коэффициент продольной полноты корабля.

Более точные результаты можно получить, аппроксимируя ватерлинию уравнением (2.40). В этом случае продольный момент

инерции ее площади и присоединенный момент инерции будут определяться формулами

$$J_I = 2 \int_0^{L/2} x^2 b dx = \frac{L^3 B}{12} \frac{\alpha}{3 - 2\alpha};$$

$$M_{55} = m_{033} \frac{\rho \pi B^2}{48} L^3 \frac{\alpha^2}{(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)}.$$

Если, по-прежнему, считать  $m_{033} = 0,8$  и находить момент инерции массы корабля по выражению (3.42), то, представив равенство (3.44) в виде

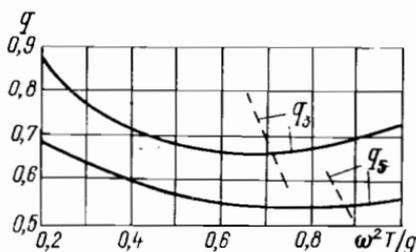
$$T_5 = k_\psi \sqrt{T},$$

получим следующую формулу для определения коэффициента  $k_\psi$ :

$$k_\psi = \sqrt{3,148(3 - 2\alpha) + 2,53 \frac{\alpha}{3 - \alpha} \frac{B}{T}}.$$

Значения этого коэффициента, вычисленные по последней формуле, приведены в табл. 12.

Для определения частот свободной вертикальной и килевой качки с учетом зависимости присоединенной массы от частоты можно, как указано выше, наряду с методом последовательных приближений, применить графоаналитический метод, предложенный Ф. Тасаи. Согласно последнему методу задача решается в следующем порядке.



3.5. Определение частот свободных колебаний по способу Тасаи.

По способу плоских сечений находят присоединенная масса корабля  $M_{33}$  и присоединенный момент инерции  $M_{55}$  для различных частот и затем строятся кривые коэффициентов:

$$q_3 = \frac{M_{33}}{m}; \quad q_5 = \frac{M_{55}}{I_y} \quad (3.45)$$

в зависимости от безразмерной частоты  $\omega^2 T/g$ , где  $T$  — осадка (рис. 3.5, сплошные линии).

На основании получающихся из выражений (3.11) и (3.44) формул для безразмерных частот:

$$\frac{\omega_3^2 T}{g} = \frac{\rho g S_0 T}{(m + M_{33}) g} = \frac{\rho \alpha L B T}{\rho \delta L B T (1 + q_3)} = \frac{1}{\chi (1 + q_3)}; \quad (3.46)$$

$$\frac{\omega_5^2 T}{g} = \frac{\rho g J_I T}{(I_y + M_{55}) g} = \frac{\rho \alpha L B j_I^2 T}{\rho \delta L B T \rho_{0y}^2 (1 + q_5)} = \frac{j_I^2}{\rho_{0y}^2 \chi (1 + q_5)},$$

где

$$j\ddot{f} = \frac{J_f}{S_0}; \quad \rho_{0y}^2 = \frac{I_y}{m},$$

вычисляют коэффициенты  $q_3$  и  $q_5$  как функции  $\omega^2 T/g$  и на том же рисунке строят соответствующие кривые (пунктир).

Безразмерную частоту вертикальной качки  $\omega_3^2 T/g$  находят по графику как абсциссу точки пересечения кривых  $q_3$ , построенных по формулам (3.45) и (3.46), безразмерную частоту килевой качки  $\omega_5^2 T/g$  — аналогичным способом.

Перейдем теперь к получению имеющей важное значение приближенной формулы для периода свободной бортовой качки  $T_4$ . С этой целью представим сумму  $I_x + M_{44}$  как произведение массы корабля на квадрат линейного размера  $\rho_x$ :

$$I_x + M_{44} = m\rho_x^2. \quad (3.47)$$

Величина  $\rho_x$  представляет собой некоторый аналог поперечного радиуса инерции массы, однако в полном смысле радиусом инерции не является, так как в левой части последнего равенства стоит сумма момента инерции массы корабля и присоединенного момента инерции, а в правой — только масса самого корабля.

Подставив равенство (3.47) в формулу для периода бортовой качки (3.11)

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{I_x + M_{44}}{mgh}}$$

и считая  $\sqrt{g}$  численно равным  $\pi$ , после соответствующих сокращений получим

$$T_4 = 2 \frac{\rho_x}{\sqrt{h}}.$$

Представляя величину  $\rho_x$  как некоторую долю полуширины корабля

$$\rho_x = k_\theta \frac{B}{2},$$

будем иметь

$$T_4 = \frac{k_\theta B}{\sqrt{h}}.$$

Аналогично изложенному выше, из-за сокращения безразмерной величины  $\pi$  и размерной  $\sqrt{g}$  линейные размеры в эту формулу следует подставлять в метрах, тогда период получается в секундах. Таким образом, коэффициент  $k_\theta$ , так же как  $k_z$  и  $k_\psi$ , имеет размерность  $m^{-0.5}$  с.

Международная морская организация (ИМО) рекомендует принимать следующие приближенные значения коэффициента  $k_\theta$  для каботажных и промысловых судов:

|   |      |
|---|------|
| Суда каботажного плавания (кроме танкеров):                               |      |
| а) порожнем или в балласте . . . . .                                      | 0,88 |
| б) в грузу с запасом жидких грузов в цистернах в % от<br>веса всего груза |      |
| 20 . . . . .  | 0,78 |
| 10 . . . . .  | 0,75 |
| 5 . . . . .   | 0,73 |
| Промысловые суда с полными запасами                                       |      |
| а) открытого моря . . . . .   | 0,80 |
| б) креветочные прибрежного лова . . . . .                                 | 0,95 |
| в) с живорыбными танками . . . . .  | 0,60 |

В одном из основных руководящих документов Минморфлота СССР по безопасности мореплавания<sup>1</sup> предлагается для пассажирских судов принимать  $k_{\theta} = 0,71 - 0,75 \text{ м}^{-0,5} \text{ с}$ , а для грузовых  $k_{\theta} = 0,81 \text{ м}^{-0,5} \text{ с}$ . Несколько точнее значения коэффициента  $k_{\theta}$  для морских транспортных судов (кроме танкеров и газовозов) могут быть определены в зависимости от безразмерных отношений  $H_S/B$  и  $\delta/\alpha^2$ , где  $H_S$  — высота борта<sup>2</sup>. Эти значения приведены в табл. 13.

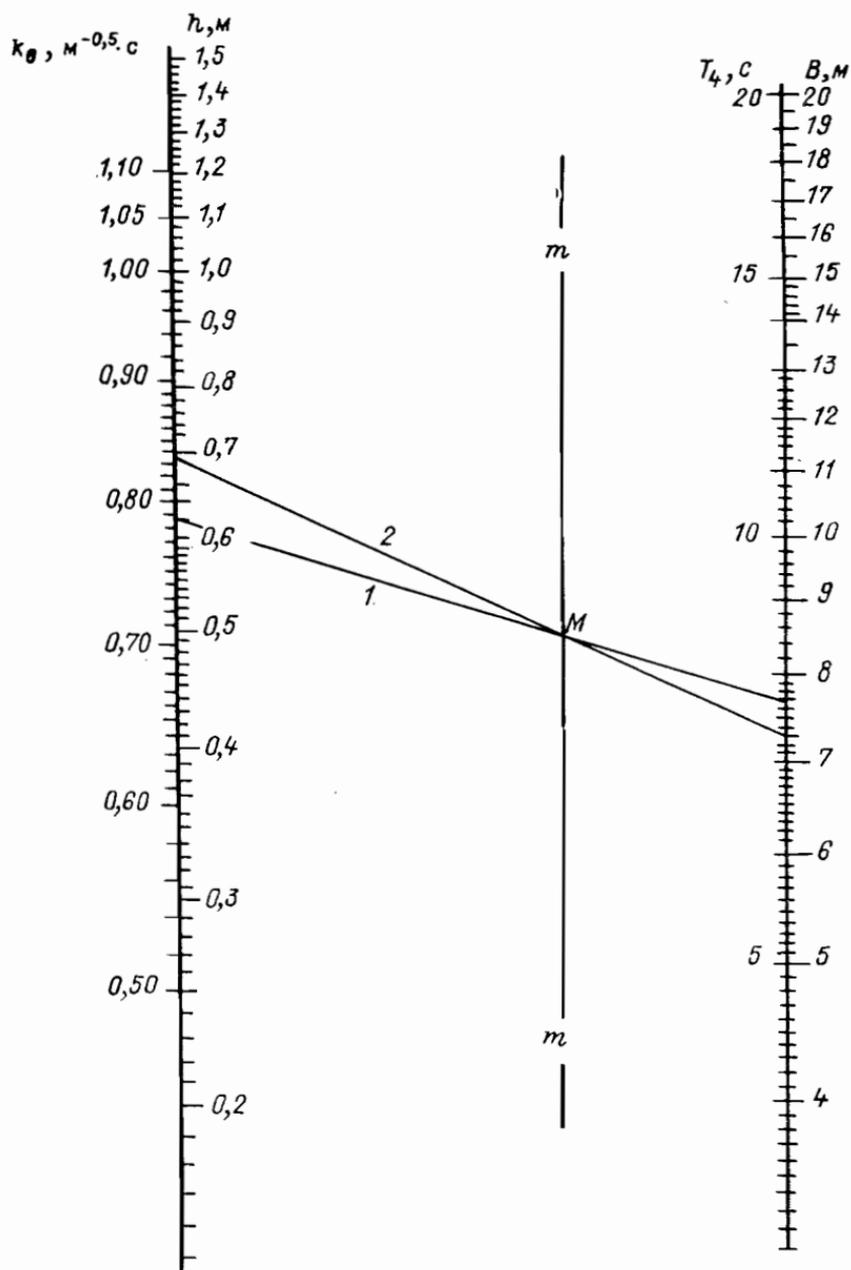
Таблица 13. Значения коэффициента  $k_{\theta}$

| $\frac{\delta}{\alpha^2}$ | Отношение $H_S/B$ высоты борта к ширине корабля |      |      |      |      |      |
|---------------------------|---|------|------|------|------|------|
|                           | 0,3   | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  | 0,8  |
| 0,9                       | 0,62  | 0,64 | 0,66 | 0,69 | 0,73 | 0,76 |
| 1,0                       | 0,65  | 0,67 | 0,69 | 0,72 | 0,76 | 0,79 |
| 1,1                       | 0,68  | 0,70 | 0,72 | 0,75 | 0,78 | 0,82 |
| 1,2                       | 0,71  | 0,73 | 0,75 | 0,78 | 0,81 | 0,84 |
| 1,3                       | 0,74  | 0,76 | 0,78 | 0,80 | 0,83 | 0,86 |
| 1,4                       | 0,76  | 0,78 | 0,80 | 0,82 | 0,85 | 0,88 |
| 1,5                       | 0,78  | 0,80 | 0,82 | 0,84 | 0,87 | 0,90 |
| 1,6                       | 0,81  | 0,82 | 0,84 | 0,87 | 0,89 | 0,92 |
| 1,7                       | 0,83  | 0,85 | 0,87 | 0,89 | 0,92 | 0,94 |
| 1,8                       | 0,85  | 0,87 | 0,89 | 0,92 | 0,94 | 0,96 |
| 1,9                       | 0,88  | 0,90 | 0,92 | 0,94 | 0,96 | 0,98 |
| 2,0                       | 0,90  | 0,92 | 0,94 | 0,96 | 0,98 | 1,00 |

Знание коэффициента  $k_{\theta}$  позволяет решить важную с точки зрения обеспечения безопасности плавания обратную задачу — определить остойчивость корабля в море по известному периоду собственных колебаний. Для этого измеряют средний фактичес-

<sup>1</sup> Рекомендации по обеспечению безопасности плавания судов в осенне-зимний период и в штормовых условиях (РОБПС-77). М., Рекламинформбюро ММФ, 1977.

<sup>2</sup> Управление судном и его техническая эксплуатация. Под общ. ред. А. И. Щетининой. М., Транспорт, 1975.



3.6. Номограмма ИМО.

кий период бортовой качки на волнении, который при более или менее значительной амплитуде приближенно равен периоду собственных колебаний  $T_4$ , а затем по формуле

$$h = \left( \frac{k_0 B}{T_4} \right)^2$$

вычисляют метацентрическую высоту. Для определения  $h$  можно вместо последней формулы пользоваться номограммой, рекомендованной ИМО для оперативного контроля остойчивости судов длиной до 70 с (рис. 3.6).

Для этого на номограмме, проводят прямую 1, соединяющую точку правой шкалы, отвечающую данной ширине судна  $B$ , с точкой левой шкалы для соответствующего значения коэффициента  $k_0$  и находят точку  $M$  пересечения этой прямой с «немой» шкалой  $mt$ . Затем проводят прямую 2 через точку  $M$  и точку правой шкалы, отвечающую значению  $T_4$  для данного судна. Точка пересечения прямой 2 со шкалой  $h$  и определяет собой значение метацентрической высоты.

Эту же номограмму можно использовать для определения периода  $T_4$ , если известна величина  $h$ . Линию 1 при этом проводят так же, как и в предыдущем случае, а линию 2 — через точку  $M$  и точку левой шкалы, отвечающую данному значению  $h$ . Точка пересечения линии 2 с правой шкалой и определяет значение  $T_4$ .

## Глава 4

---

### ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ НА РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНЕНИИ

#### § 15. Основные гипотезы и общая постановка задачи гидродинамической теории качки

Спектральная теория качки корабля на нерегулярном морском волнении включает в себя в качестве неотъемлемой и, по-видимому, наиболее сложной части определение амплитуд качки в условиях регулярного волнения. Решение последней задачи производится методами линейной гидродинамической теории качки, созданной в середине 40-х гг. М. Д. Хаскиндоном. В ней используются следующие основные гипотезы:

1. Воду рассматривают как идеальную несжимаемую тяжелую жидкость. Таким образом, исходя из теоремы Лагранжа, ее возмущенное движение, которое включает волны, вызываемые качкой

корабля, набегающие на него свободно распространяющиеся и дифрагированные волны, обусловленные эффектом присутствия корабля как препятствия на пути распространения набегающих волн, будет безвихревым.

2. Набегающие на корабль свободные волны имеют малую амплитуду. Амплитуды качки, вызываемой такими волнами, также малы, и их квадратами и произведениями можно пренебречь.

3. Удлинение корабля предполагается настолько большим, что амплитуды волн, вызванных его ходом с конечной скоростью, можно рассматривать как малые. Поскольку качка малой амплитуды также вызывает волны малой амплитуды, то возмущенное движение жидкости можно рассматривать в рамках линейной теории волн. Иными словами, в рассматриваемом случае можно пренебречь квадратичными членами в интеграле Лагранжа-Коши и граничные условия на свободной поверхности жидкости записывать в линейной форме, относя их к плоскости, представляющей собой невозмущенную свободную поверхность.

4. Кривизна ватерлиний и скорость хода корабля не оказывают существенного влияния на гидродинамические характеристики качки (присоединенные массы и коэффициенты демпфирования), и последние определяются, главным образом, формой шпангоутов. Таким образом, для определения указанных характеристик может быть использован метод плоских сечений.

Следует напомнить, что вследствие предположения об идеальности жидкости, гидродинамической теорией качки учитывается демпфирование только волновой природы, т. е. демпфирование, обусловленное затратой качающимся кораблем энергии на образование и поддержание системы расходящихся волн. Демпфирование вязкостной природы, которое играет существенную роль при бортовой качке, должно определяться косвенным путем и добавляться к волновому демпфированию, найденному на основе гидродинамической теории.

Полное демпфирование при бортовой качке, включающее как вязкостную, так и волновую составляющие, можно определить на основе экспериментальных данных, полученных В. В. Луговским и Ю. И. Фаддеевым с помощью систематических испытаний моделей. Построенная этими авторами номограмма приведена в § 8.

Рассмотрим теперь общую постановку задач гидродинамической теории качки. Поскольку возмущенное движение жидкости рассматривается как безвихревое, прежде всего требуется определить потенциал скоростей этого движения, т. е. сформулировать и решить соответствующую краевую задачу. Затем, зная потенциал, необходимо определить действующие на корабль гидродинамические силы и рассчитать кинематические характеристики его качки.

Сформулируем краевую задачу в системе координат  $Oxyz$ , неизменно связанной с кораблем и имеющей свое начало в точке пере-

сечения плоскостей ватерлинии равновесия, мидель-шпангоута и диаметральной.

Уравнение неразрывности в случае безвихревого движения несжимаемой жидкости сводится к уравнению Лапласа относительно потенциала скоростей. Таким образом, если обозначить потенциал скоростей возмущенного движения через  $\Phi^e(x, y, z, t)$ , то эта функция должна быть гармонической, т. е. удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

в области, занятой жидкостью, и граничным условиям на свободной поверхности жидкости, на смоченной поверхности корабля и на бесконечности. Рассмотрим эти условия.

1. На свободной поверхности жидкости функция  $\Phi^e$  должна удовлетворять единому динамико-кинематическому граничному условию. Динамическая часть этого условия заключается в том, что давление во всех точках свободной поверхности одинаково и равно атмосферному, а кинематическая — в том, что эта поверхность все время состоит из одних и тех же частиц жидкости. В рамках линейной теории волн указанное условие записывается в виде, аналогичном (1.16), т. е.

$$g \frac{\partial \Phi^e}{\partial z} + \frac{\partial_a^2 \Phi^e}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (4.2)$$

где, напомним, символом  $\partial_a/\partial t$  обозначена производная по времени в неподвижной системе координат, а применявшееся в гл. 1 обозначение потенциала  $\phi$  заменено на  $\Phi^e$ . С точностью, принятой в линейной теории качки, т. е. без учета малых второго порядка, производная  $\partial_a/\partial t$  может быть вычислена в предположении о том, что система координат  $Oxyz$ , связанная с кораблем, движется вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ , но не качается.

В этой системе граничное условие (4.2) принимает вид, аналогичный (1.23)

$$g \frac{\partial \Phi^e}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (4.3)$$

Напомним вывод этой важной формулы. Если в момент времени  $t = 0$  системы  $Oxyz$  и  $O_0\xi\eta\zeta$  совпадают, то для неподвижной в пространстве точки с абсциссой  $\xi$  можем написать

$$x = x(t) = \xi - vt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a \Phi^e}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \Phi^e(x(t), y, z, t) = \frac{\partial \Phi^e}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \\ &= \frac{\partial \Phi^e}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^e}{\partial x}. \end{aligned}$$

Таким образом, операторы  $\partial_a/\partial t$  и  $\partial_a^2/\partial t^2$  приобретают вид:

$$\frac{\partial_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x};$$

$$\frac{\partial_a^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Применение последнего оператора к функции  $\Phi^e$  в формуле (4.2) и приводит к условию (4.3).

2. На смоченной поверхности корабля  $S$  должно выполняться условие обтекания, которое для идеальной жидкости заключается в том, что нормальная по отношению к кораблю компонента скорости частицы, совпадающей с некоторой точкой  $M$  поверхности  $S$ , должна быть равна нормальной компоненте  $u_n$  скорости соответствующей точки этой поверхности. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial n} = u_n \text{ на } S, \quad (4.4)$$

где  $n$  — орт внешней (направленной внутрь жидкости) нормали к смоченной поверхности.

Найдем теперь величину  $u_n$ . Выберем в качестве полюса начало подвижной системы координат — точку  $O$  и обозначим ее скорость через  $U$ . Вектор угловой скорости вращения корабля вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, обозначим через  $\Omega$ , а радиус — вектор точки  $M$  поверхности  $S$  относительно полюса — через  $r_S$ . Тогда вектор скорости  $u$  точки  $M$  будет определяться формулой

$$u = U + \Omega r_S,$$

а его нормальная компонента  $u_n$  — формулой

$$\begin{aligned} u_n &= u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) + u_z \cos(n, z) = \\ &= (U_x + \Omega_y z - \Omega_z y) \cos(n, x) + (U_y + \Omega_z x - \Omega_x z) \cos(n, y) + \\ &\quad + (U_z + \Omega_x y - \Omega_y x) \cos(n, z). \end{aligned}$$

Используя введенные в § 6 обозначения для проекций векторов  $U$  и  $\Omega$ :

$$U_1 = U_x; \quad U_2 = U_y; \quad U_3 = U_z; \quad U_4 = \Omega_x; \quad U_5 = \Omega_y; \quad U_6 = \Omega_z,$$

можем переписать граничное условие для функции  $\Phi^e$  на смоченной поверхности  $S$  в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^e}{\partial n} &= u_n = U_1 \cos(n, x) + U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) + \\ &+ U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + U_5 [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] + \\ &\quad + U_6 [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

3. Граничное условие на бесконечности состоит, во-первых, в том, что при  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  возмущения, вносимые в окружающую

жую жидкость присутствием и качкой корабля, должны затухать, т. е. функция  $\Phi^e$  должна переходить в потенциал свободно распространяющихся волн  $\Phi^*$ ; во-вторых, на бесконечно большой глубине жидкость должна находиться в покое, иначе говоря, при  $z \rightarrow -\infty$   $\text{grad } \Phi^e$  должен обращаться в нуль.

Линейность уравнения Лапласа и граничных условий дает право использовать принцип суперпозиции (наложения) и представить функцию  $\Phi^e$  в виде следующей суммы:

$$\Phi^e = \Phi + \Phi^* + \Phi^0, \quad (4.6)$$

где  $\Phi^*$  — потенциал скоростей набегающих на корабль свободно распространяющихся волн. В этом случае сумма  $\Phi + \Phi^0$  будет представлять собой потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, обусловленного, с одной стороны, ходом и качкой корабля, а с другой — эффектом его присутствия как препятствия на пути распространения набегающих волн, т. е. дифракцией.

Пусть каждая из трех функций, входящих в правую часть равенства (4.6), порознь удовлетворяет уравнению Лапласа, граничным условиям на свободной поверхности и на неограниченно большой глубине, а условию обтекания на смоченной поверхности корабля и условию затухания вынужденных волн при  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  удовлетворяет сумма этих функций. Последнее условие, очевидно, заключается в требовании, чтобы сумма  $\Phi + \Phi^0$  при  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  стремилась к нулю.

Рассмотрим более детально условие на смоченной поверхности  $S$ . Условимся потенциал скоростей дифрагированного волнового движения обозначать через  $\Phi^0$ . Тогда  $\Phi$  будет представлять собой потенциал скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного ходом и качкой корабля на тихой воде. В самом деле, пусть волны на корабль не набегают, т. е.  $\Phi^* = 0$ . В этом случае не будет, очевидно, и дифракции или, иначе говоря, функция  $\Phi^0$  также обратится в нуль. При этом возмущенное движение жидкости, определяемое потенциалом  $\Phi^e$ , может возникнуть только за счет хода и качки корабля на тихой воде. Но при  $\Phi^* = \Phi^0 = 0$  функция  $\Phi^e$  равна  $\Phi$ . Следовательно, функция  $\Phi$  действительно будет потенциалом скоростей указанного возмущенного движения.

В случае отсутствия набегающих и дифрагированных волн функция  $\Phi$  должна сама по себе удовлетворять всем граничным условиям задачи, в том числе и условию обтекания на смоченной поверхности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_n \quad \text{на } S.$$

Но, как видно из формул (4.4) и (4.6),

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = u_n \quad \text{на } S.$$

Сопоставление двух последних равенств показывает, что на смоченной поверхности  $S$  функции  $\Phi^*$  и  $\Phi^0$  должны удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} + \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = 0$$

или

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = - \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}. \quad (4.7)$$

Последнее условие позволяет, как будет показано ниже, избежать определения функции  $\Phi^0$ . Функция  $\Phi^*$  также не подлежит определению, так как она известна из теории волн. Таким образом, краевая задача должна решаться только для функции  $\Phi$ .

## § 16. Категории гидродинамических сил

Гидродинамические силы, действующие на корабль при качке, определяют интегрированием давлений по его смоченной поверхности. Для определения давлений при известном потенциале скоростей возмущенного движения жидкости применяют интеграл Лагранжа—Коши, который в линеаризованной форме, т. е. без учета квадратов скоростей возмущенного движения, для тяжелой жидкости имеет вид

$$p_1 = p^e + p^u = -\rho \frac{\partial_a \Phi^e}{\partial t} - \rho g(z + \zeta - x\psi + y\theta).$$

Здесь через

$$p^e = -\rho \frac{\partial_a \Phi^e}{\partial t} = -\rho \left( \frac{\partial \Phi^e}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right) \quad (4.8)$$

обозначено избыточное давление, обусловленное возмущенным движением жидкости, а через

$$p^u = -\rho g(z + \zeta - x\psi + y\theta) \quad (4.9)$$

избыточное гидростатическое давление, вычисленное с учетом изменения глубины погружения точки  $x, y, z$  смоченной поверхности корабля за счет вертикальной, бортовой и килевой качки.

С точностью, соответствующей требованиям линейной теории качки, интегрирование давления производится по неизменной смоченной поверхности  $S$ , отвечающей равновесному положению корабля на тихой воде. Интегралы

$$F^u = -\iint_S p^u n dS \quad \text{и} \quad M^u = -\iint_S p^u (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS \quad (4.10)$$

определяют собой мгновенную силу плавучести и ее момент, которые вместе с весом корабля дают восстанавливающую силу  $F^r$  и восстанавливающий момент  $M^r$ . Как уже упоминалось, последние

отличаются от нуля только при основных видах качки. Таким образом, проекции вектора  $F^r$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  и вектора  $M^r$  на ось  $Oz$  равны нулю.

Силы, обусловленные возмущенным движением жидкости, определяются интегралами

$$F^e = -\iint_S p^e n dS \quad \text{и} \quad M^e = -\iint_S p^e (r_S \times n) dS.$$

Используя формулы (4.6) и (4.8), можем представить векторы  $F^e$  и  $M^e$  в следующем виде:

$$F^e = F + F^* + F^0; \quad M^e = M + M^* + M^0, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} F &= \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) n dS; \\ M &= \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) (r_S \times n) dS; \\ F^* &= \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right) n dS; \\ M^* &= \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right) (r_S \times n) dS; \\ F^0 &= \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right) n dS; \\ M^0 &= \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right) (r_S \times n) dS. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Легко видеть, что векторы  $F$  и  $M$  представляют собой силы, обусловленные давлением волн, вызванных ходом и качкой корабля на тихой воде. Эти силы, связанные со скоростями и ускорениями качающегося корабля, называются инерционно-демпфирующими силами.

Векторы  $F^*$  и  $M^*$  определяют собой часть возмущающих сил, обусловленную давлением набегающих, а  $F^0$  и  $M^0$  — давлением дифрагированных волн. Часть возмущающих сил, обусловленную давлением набегающих волн, вычисляют с использованием известной гипотезы А. Н. Крылова о независимости поля давлений этих волн от присутствия корабля как препятствия на пути их распространения. В соответствии с установившейся терминологией эту часть в отечественной литературе принято называть главной, а в зарубежной — силами Фруда—Крылова. Часть возмущающих сил, обусловленная давлением дифрагированных волн, называется *дифракционной*.

Итак, в рамках линейной гидродинамической теории качки гидродинамические силы, действующие на корабль, разделяют на инерционно-демпфирующие, восстанавливающие и возмущающие. Последние, в свою очередь, состоят из главной и дифракционной частей.

## § 17. Инерционно-демпфирующие силы

Будем рассматривать корабль как тело с шестью степенями свободы, плавающее в идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Пусть корабль движется по курсу с конечной средней скоростью  $v$  и совершает продольно-горизонтальную, поперечно-горизонтальную, вертикальную, бортовую, килевую качку и рысканье. Все виды качки носят гармонический характер и совершаются с одинаковой круговой частотой  $\sigma$ , а их амплитуды представляют собой величины первого порядка малости. Поскольку частота качки конечна, очевидно, что амплитуды скоростей и ускорений также будут малыми первого порядка. Малые высших порядков, как это принято в линейной теории качки, будем отбрасывать.

Представим потенциал скоростей движения жидкости, вызванного ходом и качкой корабля, в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k, \quad (4.13)$$

где  $U_1 = U_x$ ;  $U_2 = U_y$ ;  $U_3 = U_z$ ;  $U_4 = \Omega_x$ ;  $U_5 = \Omega_y$ ;  $U_6 = \Omega_z$  — проекции вектора  $U$  линейной скорости полюса и вектора  $\Omega$  угловой скорости вращения корабля вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, а  $\Phi_k$  — удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} = 0$$

функции координат. Эти функции, как показано в § 6, представляют собой потенциалы скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного  $k$ -м видом движения тела с единичной линейной, ( $k = 1, 2, 3$ ) или угловой скоростью ( $k = 4, 5, 6$ ). При колебаниях тела на поверхности или под поверхностью тяжелой жидкости эти функции являются потенциалами скоростей расходящихся волн, излучаемых соответствующим видом колебаний, поэтому в гидродинамической теории качки их принято называть функциями излучения.

Функции излучения должны удовлетворять условию затухания возмущенного движения на бесконечно большом удалении от корабля

$$\text{grad } \Phi_k = 0 \quad \text{при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty,$$

условию покоя жидкости на неограниченной глубине

$$\text{grad } \Phi_k = 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,$$

условиям на свободной поверхности жидкости и на смоченной поверхности корабля.

На свободной поверхности потенциал скоростей возмущенного движения  $\Phi^e$ , представляющий собой сумму потенциала  $\Phi$  скоростей волн, вызванных ходом и качкой корабля на тихой воде, потенциала скоростей набегающих волн  $\Phi^*$  и потенциала скоростей дифрагированных волн  $\Phi^0$ , должен удовлетворять граничному условию (4.3). Поскольку мы рассматриваем теперь только возмущения, вносимые кораблем в тихую воду, в отсутствие набегающих, а следовательно, и дифрагированных волн, то, очевидно,  $\Phi^e = \Phi$  и условие (4.3) примет вид

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = 0.$$

Используя представление потенциала в форме (4.13) и имея в виду, что функции излучения  $\Phi_k$  не зависят от времени, а компоненты линейной и угловой скоростей  $U_k$  — от координат, можем переписать граничное условие на свободной поверхности следующим образом:

$$\sum_{k=1}^6 \left( g U_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} + \frac{d^2 U_k}{dt^2} \Phi_k - 2v \frac{dU_k}{dt} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + v^2 U_k \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} \right) = 0$$

при  $z = 0$ . (4.14)

Пренебрегая продольно-горизонтальной качкой, будем считать проекцию скорости  $U_1$  на ось  $Ox$  неизменно связанной с кораблем системы координат не зависящей от времени. Остальные проекции представим в форме

$$U_k = u_k e^{i\sigma t}, \quad (k = 2, 3, \dots, 6),$$

где  $u_k = u_{k1} + i u_{k2}$  — комплексная амплитуда скорости. Тогда очевидно,

$$\frac{dU_k}{dt} = i\sigma U_k; \quad \frac{d^2 U_k}{dt^2} = -\sigma^2 U_k.$$

Подставив последние выражения в равенство (4.14), получим

$$U_1 \left( g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + v_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \right) + \sum_{k=2}^6 U_k \left( g \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} - \sigma^2 \Phi_k - 2vi\sigma \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + v^2 \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{при } z = 0.$$

Отсюда следует, что граничные условия, которым должны удовлетворять функции излучения  $\Phi_k$  на плоскости  $z = 0$ , имеют сле-

дующий вид:

$$g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + v^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 0;$$

$$g \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} + \left( i\sigma - v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi_k = 0, \quad (k=2, 3, \dots, 6).$$

Перейдем теперь к рассмотрению граничных условий, которым должны удовлетворять эти функции на смоченной поверхности корабля  $S$ . Как указывалось в § 15, в случае отсутствия набегающих и дифрагированных волн функция  $\Phi$  должна сама по себе удовлетворять всем граничным условиям рассматриваемой краевой задачи, в том числе и условию обтекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_n \quad \text{на } S.$$

Согласно формулам (4.13) и (4.5) имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + U_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} + U_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} + U_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} +$$

$$+ U_5 \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} + U_6 \frac{\partial \Phi_6}{\partial n};$$

$$u_n = U_1 \cos(n, x) + U_2 \cos(n, y) + U_3 \cos(n, z) +$$

$$+ U_4 [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + U_5 [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] +$$

$$+ U_6 [x \cos(n, y) - y \cos(n, x)].$$

Приравнивая коэффициенты при компонентах скорости с одинаковыми индексами в двух последних выражениях, получим следующие граничные условия для функций излучения  $\Phi_k$  на смоченной поверхности  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \cos(n, x); & \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} &= \cos(n, y); & \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} &= \cos(n, z); \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} &= y \cos(n, z) - z \cos(n, y); \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} &= z \cos(n, x) - x \cos(n, z); \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} &= x \cos(n, y) - y \cos(n, x). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Эти условия совпадают с граничными условиями (2.3) для единичных потенциалов при произвольном движении тела в безграничной жидкости.

Будучи определенными в неизменно связанной с телом системе координат, функции  $\Phi_k$  зависят от выбора этой системы и формы

тела, но не от времени. Независимость этих функций от времени обусловлена тем, что время ни явно ни неявно не входит в граничные условия для них. Вместе с тем потенциал скоростей  $\Phi$  от времени зависит, так как при неравномерном движении тела компоненты скорости последнего  $U_k$  являются функциями времени.

Решение сформулированных пространственных краевых задач для функций излучения  $\Phi_k$  связано со значительными трудностями. Поэтому для расчета гидродинамических характеристик качки, определяемых этими функциями, обычно ограничиваются решением плоских краевых задач для шпангоутных контуров и затем вычисляют гидродинамические характеристики для всего корабля методом плоских сечений.

Получим теперь общие формулы для инерционно-демпфирующих сил, считая известными функции излучения, а следовательно, и потенциал скоростей возмущенного движения жидкости. Один из путей вычисления этих сил состоит в непосредственном интегрировании давлений по смоченной поверхности корабля в соответствии с формулами (4.12). Такой путь дает возможность определить не только интегральные характеристики инерционно-демпфирующих сил, т. е. их главный вектор и главный момент для корабля в целом, но и силы и моменты, действующие на произвольную часть его длины. В связи с этим такой путь незаменим при динамическом расчете вертикального и горизонтального изгиба и кручения корабля на волнении.

В том случае, когда требуется вычислить только главный вектор и главный момент сил, действующих на весь корабль, а для расчета качки этого вполне достаточно, можно использовать законы количества движения и моментов количества движения. Такой подход, применяемый в теоретической гидромеханике для определения гидродинамических реакций, действующих на тело в общем случае его движения в безграничной идеальной несжимаемой жидкости, обладает меньшей громоздкостью, чем подход, основанный на интегрировании давлений, и для удлиненного тела (корабля) приводит точно к таким же результатам. В связи с этим будем определять главный вектор и главный момент инерционно-демпфирующих сил на основе законов количества движения и моментов количества движения.

Рассмотрим движение некоторого твердого тела под поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины  $H$ . Обозначим поверхность тела через  $S$  и окружим его неподвижной контрольной поверхностью  $S'$ , представляющей собой вертикальный цилиндр, простирающийся от невозмущенной свободной поверхности жидкости до дна. Объем, заключенный между поверхностями  $S$  и  $S'$ , обозначим через  $\tau$ . Вектор количества движения жидкости, заключенной в этом объеме, будет определяться формулой

$$K_{\tau} = \iiint_{\tau} \rho \text{grad } \Phi \, d\tau.$$

где, очевидно,  $\text{grad } \Phi$  — вектор скорости жидкости. Применим к этому интегралу преобразование Остроградского-Гаусса, имея в виду, что внешняя нормаль к поверхности  $S$  направлена внутрь объема  $\tau$  и, следовательно, интеграл по этой поверхности должен быть взят с отрицательным знаком. Таким образом,

$$K_{\tau} = \iint_{S'} \rho \Phi n dS - \iint_S \rho \Phi n dS.$$

Согласно закону количества движения, называемому иначе теоремой импульсов, изменение за промежуток времени  $dt$  количества движения частиц жидкости, заключенных в некотором объеме  $\tau$ , равно импульсу массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем за тот же промежуток времени. Обозначим через  $G$  главный вектор массовых сил, которые для тяжелой жидкости сводятся только к ее весу. Главный вектор поверхностных сил (сил гидродинамических давлений), приложенных со стороны жидкости к поверхности тела  $S$ , обозначим через  $F$ . Тогда на основании принципа равенства действия и противодействия к поверхности  $S$  жидкости со стороны тела будет приложена сила —  $F$ . Если главный вектор сил давлений, приложенных извне к поверхности  $S'$ , обозначить  $F'$ , то выражение для импульса внешних сил, приложенных к объему  $\tau$ , можно написать в виде

$$(G + F' - F) dt.$$

Изменение количества движения частиц жидкости, заключенных в объеме  $\tau$ , будет происходить как за счет изменения их скоростей, так за счет того, что количество движения частиц, вошедших и вышедших за время  $dt$  через поверхность  $S'$ , будет различным. Однако учет последнего обстоятельства приводит к слагаемому более высокого порядка малости, чем те, которые связаны с изменением скоростей частиц. Отбрасывая это слагаемое, получим следующую формулу для изменения количества движения:

$$dK_{\tau} = d \iint_{S'} \rho \Phi n dS - d \iint_S \rho \Phi n dS.$$

Приравнивая два последних выражения, будем иметь

$$G + F' - F = \frac{d}{dt} \iint_{S'} \rho \Phi n dS - \frac{d}{dt} \iint_S \rho \Phi n dS. \quad (4.16)$$

Для определения силы  $F'$  воспользуемся линеаризованным интегралом Лагранжа—Коши. Поскольку поверхность  $S'$  неподвижна в пространстве, можно, считая в данный момент времени подвижную и неподвижную системы координат совпадающими, пользоваться для решения задачи координатами той или другой системы. Мы будем пользоваться координатами подвижной системы *Охуз*.

Если полагать, что в рассматриваемый момент времени положительная ось *Oz* направлена вертикально вверх, можем, как по-

казано в гл. 1, написать линейризованный интеграл Лагранжа—Коши для тяжелой жидкости в виде

$$\rho = \rho_0 - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g z.$$

Тогда

$$F' = - \iint_{S'} \rho n dS = - \iint_{S'} \rho_0 n dS + \iint_{S'} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} n dS + \iint_{S'} \rho g z n dS, \quad (4.17)$$

но

$$\iint_{S'} \rho_0 n dS = \rho_0 \iint_{S'} n dS.$$

Входящий в правую часть последнего равенства интеграл, называемый вектором поверхности, как доказывается в векторной алгебре, для любых замкнутых поверхностей обращается в нуль. Таким образом,

$$\iint_{S'} \rho_0 n dS = 0. \quad (4.18)$$

Далее, благодаря тому, что поверхность  $S'$  неподвижна в пространстве, орт  $\mathbf{n}$  внешней нормали к ней от времени не зависит. Поэтому можем написать

$$\iint_{S'} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} n dS = \frac{d}{dt} \iint_{S'} \rho \Phi n dS. \quad (4.19)$$

Для того, чтобы рассмотреть последний интеграл, входящий в равенство (4.17), получим предварительно одну модификацию формулы Остроградского—Гаусса. Пусть некоторый объем  $D$  ограничен снаружи поверхностью  $\Sigma$ ,  $f(x, y, z)$  — заданная в этом объеме непрерывная вместе со своими первыми производными функция координат, а  $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ . Тогда, очевидно,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \cos(n, x) dS = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial x} d\tau;$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \cos(n, y) dS = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial y} d\tau;$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \cos(n, z) dS = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial z} d\tau.$$

Умножим первое из этих равенств на  $\mathbf{i}$ , второе — на  $\mathbf{j}$  и третье — на  $\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — орты координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Тогда мо-

жем написать

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) [\mathbf{i} \cos(n, x) + \mathbf{j} \cos(n, y) + \mathbf{k} \cos(n, z)] dS = \\ = \iiint_D \left( \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) d\tau$$

или

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathbf{n} dS = \iiint_D \text{grad } f d\tau.$$

Вектор  $\text{grad } f$  можно представить как произведение векторного дифференциального оператора

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

называемого оператором Гамильтона, на скаляр  $f$ . Это дает возможность переписать предыдущую формулу в виде

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} f(x, y, z) dS = \iiint_D \nabla f d\tau,$$

пользуясь простым и удобным мнемоническим правилом «орту внешней нормали  $\mathbf{n}$  в поверхностном интеграле соответствует дифференциальный оператор  $\nabla$  в объемном».

Применим теперь полученную модификацию преобразования Остроградского—Гаусса к последнему слагаемому формулы (4.17), помня, что объем  $\tau$  ограничен не только поверхностью  $S'$ , но и поверхностью  $S$ , внешняя нормаль к которой направлена внутрь объема  $\tau$ . Таким образом,

$$\iint_{S'} \mathbf{n} z dS = \iiint_{\tau} \nabla z d\tau + \iint_S \mathbf{n} z dS.$$

Преобразовав в последней формуле интеграл по поверхности тела  $S$  в интеграл по его объему  $V$ , получим

$$\iint_{S'} \mathbf{n} z dS = \iiint_V \nabla z d\tau.$$

Но, как легко видеть,  $\nabla z = \mathbf{k}$  и, следовательно,

$$\iint_{S'} \mathbf{n} z dS = \mathbf{k}(\tau + V). \quad (4.20)$$

Подставляя равенства (4.18), (4.19) и (4.20) в выражение (4.17), будем иметь

$$\mathbf{F}' = \frac{d}{dt} \iint_{S'} \rho \Phi \mathbf{n} dS + \mathbf{k} \rho g (\tau + V).$$

Помня, что положительная ось  $Oz$  направлена вверх, можем написать следующее выражение для силы тяжести, действующей на объем  $\tau$ :

$$\mathbf{G} = -\mathbf{k} \rho g \tau.$$

Если теперь подставить последние формулы для  $F'$  и  $G$  в соотношение (4.16) получим следующее выражение для силы воздействия жидкости на тело:

$$F = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \Phi n dS + k \rho g V.$$

Первый член этого выражения определяет собой главный вектор инерционно-демпфирующих сил, обусловленных возмущенным движением жидкости, вызванным движущимся в ней телом, а второй — главный вектор гидростатических сил (архимедову силу плавучести). Сила плавучести уравнивается весом плавающего тела, и поэтому обе эти силы можно одновременно отбросить. В этом случае, сохранив для главного вектора инерционно-демпфирующих сил обозначение  $F$  (это не вызовет путаницы), будем иметь

$$F = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \Phi n dS.$$

Аналогичным путем можно получить формулу для главного момента этих сил

$$M = \frac{d}{dt} \iint_S \rho \Phi (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS.$$

Введем следующие обозначения:

$$N = -\rho \iint_S \Phi n dS; \quad Q = -\rho \iint_S \Phi (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS. \quad (4.21)$$

Тогда формулы для главного вектора и главного момента инерционно-демпфирующих сил примут вид:

$$F = -\frac{dN}{dt}; \quad M = -\frac{dQ}{dt}. \quad (4.22)$$

При вычислении  $F$  и  $M$  следует иметь в виду, что  $dN/dt$  и  $dQ/dt$  представляют собой абсолютные производные, определяющие скорость изменения векторов  $N$  и  $Q$  по отношению к неподвижной системе координат, тогда как сами эти векторы вычислены в подвижной системе, неизменно связанной с телом. Обозначим производные от этих векторов по отношению к подвижной системе, называемые относительными производными, через  $\partial N/\partial t$  и  $\partial Q/\partial t$ .

Будем рассматривать конец вектора  $N$  как движущуюся точку. Тогда, очевидно,  $\partial N/\partial t$  будет представлять собой относительную, а  $dN/dt$  — абсолютную скорость этой точки. Но абсолютная скорость точки равна сумме относительной и переносной скоростей. Если считать, что начала подвижной и неподвижной систем координат совпадают, а оси подвижной системы вращаются с мгновенной угловой скоростью  $\Omega$ , то переносная скорость рассматриваемой

точки будет определяться векторным произведением  $\Omega \times N$ . Следовательно,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \Omega \times N. \quad (4.23)$$

Из последней формулы видно, что абсолютная производная вектора равна геометрической сумме относительной производной и векторного произведения угловой скорости вращения подвижной системы координат на дифференцируемый вектор.

Из формул (4.22) и (4.23) легко получить окончательное выражение для главного вектора инерционно-демпфирующих сил:

$$F = - \frac{\partial N}{\partial t} - \Omega \times N. \quad (4.24)$$

При вычислении главного момента этих сил следует, помимо угловой скорости вращения подвижной системы координат, принимать во внимание поступательную скорость  $U$  ее начала — точки  $O$ . Обозначим момент количества движения жидкости относительно точки  $O_0$  через  $Q_0$ , момент инерционно-демпфирующих сил относительно той же точки — через  $M_0$ , а радиус-вектор, проведенный из точки  $O_0$  в точку  $O$ , — через  $r$ . Тогда, учитывая, что момент некоторого вектора относительно точки  $O_0$  равен моменту относительно точки  $O$  плюс момент этого же вектора, приложенного в точке  $O$ , относительно  $O_0$ , можем написать:

$$Q_0 = Q + r \times N; \quad (4.25)$$

$$M_0 = M + r \times F. \quad (4.26)$$

Поскольку согласно (4.22)

$$F = - \frac{dN}{dt},$$

формула (4.26) примет вид

$$M_0 = M - r \times \frac{dN}{dt}. \quad (4.27)$$

Но с другой стороны по аналогии с (4.22) будем иметь

$$M_0 = - \frac{dQ_0}{dt}.$$

Используя представление  $Q_0$  в форме (4.25) и руководствуясь сформулированным выше правилом вычисления абсолютной производной вектора, перепишем последнее равенство следующим образом:

$$M_0 = - \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \Omega \times Q + \frac{dr}{dt} \times N + r \times \frac{dN}{dt} \right). \quad (4.28)$$

Приравняв выражения (4.27) и (4.28), получим окончательную

формулу для главного момента инерционно-демпфирующих сил:

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} - \mathbf{U} \times \mathbf{N}, \quad (4.29)$$

где, очевидно,

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Из равенств (4.22) и (4.29) видно, что между абсолютной и относительной производной вектора момента  $\mathbf{Q}$  существует такое соотношение

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} + \mathbf{U} \times \mathbf{N}. \quad (4.30)$$

Перейдем теперь к построению формул для непосредственного вычисления инерционно-демпфирующих сил при различных видах качки.

Подставив в равенства

$$\mathbf{N} = -\rho \iint_S \Phi \mathbf{n} dS; \quad \mathbf{Q} = -\rho \iint_S \Phi (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS$$

потенциал скоростей возмущенного движения жидкости в форме

$$\Phi = \sum_{k=1}^6 U_k \Phi_k,$$

получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_{k=1}^6 \left( -\rho \iint_S \Phi_k \mathbf{n} dS \right) U_k; \\ \mathbf{Q} &= \sum_{k=1}^6 \left[ -\rho \iint_S \Phi_k (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS \right] U_k. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Для того, чтобы найти проекции векторов  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{Q}$  на оси подвижной системы координат, предварительно выпишем следующие очевидные выражения:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(n, x); & n_y &= \cos(n, y); & n_z &= \cos(n, z); \\ (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n})_x &= y \cos(n, z) - z \cos(n, y); \\ (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n})_y &= z \cos(n, x) - x \cos(n, z); \\ (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n})_z &= x \cos(n, y) - y \cos(n, x). \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения с формулами (4.15), получаем соотношения:

$$n_x = \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}; \quad n_y = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}; \quad n_z = \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}; \quad (4.32)$$

$$(\mathbf{r}_S \times \mathbf{n})_x = \frac{\partial \Phi_4}{\partial n}; \quad (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n})_y = \frac{\partial \Phi_5}{\partial n}; \quad (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n})_z = \frac{\partial \Phi_6}{\partial n}.$$

Тогда, введя для проекции векторов  $N$  и  $Q$  обозначения:

$N_x = N_1$ ;  $N_y = N_2$ ;  $N_z = N_3$ ;  $Q_x = N_4$ ;  $Q_y = N_5$ ;  $Q_z = N_6$ ,  
на основании равенств (4.31) можем написать

$$N_j = \sum_{k=1}^6 \left( -\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \right) U_k, \quad (j=1, 2, \dots, 6).$$

Но при гармонических колебаниях тела, сопровождающихся волнообразованием,

$$-\rho \iint_S \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk},$$

где  $M_{jk}$  — присоединенная масса;  $\Lambda_{jk}$  — коэффициент демпфирования;  $\sigma$  — частота колебаний. В предельных случаях  $\sigma = 0$  и  $\sigma \rightarrow \infty$  коэффициенты демпфирования равны нулю, так как при таких частотах тело не образует волн.

С использованием последнего равенства выражение для  $N_j$  принимает вид

$$N_j = \sum_{k=1}^6 \left( M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k, \quad (j=1, 2, \dots, 6). \quad (4.33)$$

Будем в дальнейшем считать удлинение корабля настолько большим, что на его смоченной поверхности можно без существенной погрешности полагать  $\cos(n, x) = 0$ . Это значит, что  $M_{1k} = M_{k1}$ ,  $\Lambda_{1k} = \Lambda_{k1}$  и  $N_1$  также окажутся равными нулю. Таким образом, мы считаем, что продольно-горизонтальная качка удлиненного корабля не вносит возмущений в окружающую жидкость и не оказывает влияния на инерционно-демпфирующие силы при других видах качки. Для такого корабля формула (4.33) принимает вид

$$N_j = \sum_{k=2}^6 \left( M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k, \quad (j=2, 3, \dots, 6).$$

Вследствие симметрии корабля относительно диаметральной плоскости присоединенные массы  $M_{jk}$  и коэффициенты демпфирования  $\Lambda_{jk}$  в тех случаях, когда один из индексов четный, а другой нечетный, равны нулю. По этой причине последняя формула распадается на две:

$$\left. \begin{aligned} N_j &= \sum_{k=3,5} \left( M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k & (j=3, 5); \\ N_j &= \sum_{k=2,4,6} \left( M_{jk} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jk} \right) U_k & (j=2, 4, 6). \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Спроектируем теперь векторы  $F$  и  $M$ , определяемые формулами (4.24) и (4.29), на подвижные оси:

$$F_x = - \frac{\partial N_x}{\partial t} - (\Omega_y N_z - \Omega_z N_y);$$

$$F_y = - \frac{\partial N_y}{\partial t} - (\Omega_z N_x - \Omega_x N_z);$$

$$F_z = - \frac{\partial N_z}{\partial t} - (\Omega_x N_y - \Omega_y N_x);$$

$$M_x = - \frac{\partial Q_x}{\partial t} - (\Omega_y Q_z - \Omega_z Q_y) - (U_y N_z - U_z N_y);$$

$$M_y = - \frac{\partial Q_y}{\partial t} - (\Omega_z Q_x - \Omega_x Q_z) - (U_z N_x - U_x N_z);$$

$$M_z = - \frac{\partial Q_z}{\partial t} - (\Omega_x Q_y - \Omega_y Q_x) - (U_x N_y - U_y N_x).$$

Обозначив  $F_x = F_1$ ;  $F_y = F_2$ ;  $F_z = F_3$ ;  $M_x = F_4$ ;  $M_y = F_5$ ;  $M_z = F_6$  и используя введенные выше обозначения  $U_1 \div U_6$  для проекций векторов  $U$  и  $\Omega$  и обозначения  $N_1 \div N_6$  для проекций векторов  $N$  и  $Q$ , можем переписать последние формулы в виде:

$$F_1 = - \frac{\partial N_1}{\partial t} - (U_5 N_3 - U_6 N_2);$$

$$F_2 = - \frac{\partial N_2}{\partial t} - (U_6 N_1 - U_4 N_3);$$

$$F_3 = - \frac{\partial N_3}{\partial t} - (U_4 N_2 - U_5 N_1);$$

$$F_4 = - \frac{\partial N_4}{\partial t} - (U_5 N_6 - U_6 N_5) - (U_2 N_4 - U_3 N_2);$$

$$F_5 = - \frac{\partial N_5}{\partial t} - (U_6 N_4 - U_4 N_6) - (U_3 N_1 - U_1 N_3);$$

$$F_6 = - \frac{\partial N_6}{\partial t} - (U_4 N_5 - U_5 N_4) - (U_1 N_2 - U_2 N_1).$$

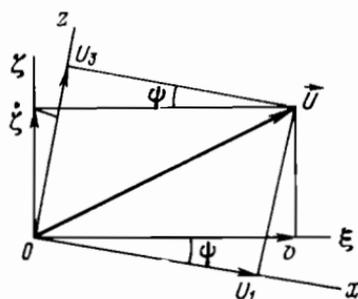
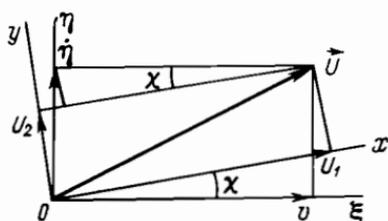
Напомним, что в линейной теории качки единственной конечной компонентой скорости является  $U_1$ , приближенно равная скорости хода корабля  $v$ . Компоненты  $U_2 - U_6$  представляют собой малые первого порядка. Таким образом, для корабля большого удлинения величины  $N_2 \div N_6$  также будут малыми первого порядка, а  $N_1$ , как установлено выше, обращается в нуль. Отбрасывая в формулах

для  $F_j$  малые высших порядков, получим:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0; & F_j &= -\frac{\partial N_j}{\partial t}, & (j=2, 3, 4); \\ F_5 &= -\frac{\partial N_5}{\partial t} + U_1 N_3; \\ F_6 &= -\frac{\partial N_6}{\partial t} - U_1 N_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Определим теперь проекции  $U_k$  вектора  $U$  на оси подвижной системы координат (рис. 4.1). Проекции этого вектора на оси неподвижной системы будут:  $U_\xi = v$ ;  $U_\eta = \dot{\eta}$ ;  $U_\zeta = \dot{\zeta}$ . Тогда, заменяя, ввиду малости углов рысканья и килевой качки, их синусы самими углами, а косинусы — единицами, найдем:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_x = v; & U_2 &= U_y = \dot{\eta} - v\chi; & U_3 &= U_z = \dot{\zeta} + v\psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$



4.1. К определению проекций вектора  $U$ .

Проекции вектора  $\Omega$ , учитывая принятые выше обозначения для углов бортовой и килевой качки и рысканья, определяются формулами:

$$U_4 = \Omega_x = \dot{\theta}; \quad U_5 = \Omega_y = \dot{\psi}; \quad U_6 = \Omega_z = \dot{\chi}. \quad (4.37)$$

Иначе, имея в виду, что для величины  $U_k$ , изменяющейся по гармоническому закону  $U_k = u_k e^{i\sigma t}$ , очевидны соотношения:

$$\dot{U}_k = i\sigma U_k; \quad U_k = -\frac{i}{\sigma} \dot{U}_k,$$

можем написать:

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= i\left(\sigma\eta + \frac{v}{\sigma}\dot{\chi}\right); & U_3 &= i\left(\sigma\zeta - \frac{v}{\sigma}\dot{\psi}\right); \\ U_4 &= i\sigma\theta; & U_5 &= i\sigma\psi; & U_6 &= i\sigma\chi. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Выведем окончательные формулы для инерционно-демпфирующей силы  $F_3$  и момента  $F_5$ . Пользуясь выражениями (4.34) и (4.35) и учитывая что  $U_1 = v$ , получим:

$$F_3 = - \frac{\partial N_3}{\partial t} = - \left[ \left( M_{33} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{33} \right) \dot{U}_3 + \left( M_{35} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{35} \right) \dot{U}_5 \right];$$

$$F_5 = - \frac{\partial N_5}{\partial t} + v N_3 = - \left\{ \left( M_{35} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{35} \right) \dot{U}_3 + \left( M_{55} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{55} \right) \dot{U}_5 - \right.$$

$$\left. - v \left[ \left( M_{33} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{33} \right) U_3 + \left( M_{35} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{35} \right) U_5 \right] \right\}.$$

Для того, чтобы избавиться от комплексной записи, будем в качестве множителей при  $M_{jk}$  представлять  $\dot{U}_3$  и  $\dot{U}_5$  в виде

$$\dot{U}_3 = \ddot{\zeta} + v\dot{\psi}; \quad \dot{U}_5 = \ddot{\psi},$$

а в качестве множителей при  $\Lambda_{jk}$  — в виде

$$\dot{U}_3 = i\sigma(\zeta + v\psi); \quad \dot{U}_5 = i\sigma\psi.$$

Сами функции  $U_3$  и  $U_5$  как множители при  $M_{jk}$  будем записывать в виде (4.36) и (4.37), а как множители при коэффициентах демпфирования  $\Lambda_{jk}$  — в виде (4.38). Тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} F_3 &= - \left[ M_{33}\ddot{\zeta} + \Lambda_{33}\dot{\zeta} + M_{35}\ddot{\psi} + (\Lambda_{35} + vM_{33})\dot{\psi} + v\Lambda_{33}\psi \right]; \\ F_5 &= - \left[ M_{35}\ddot{\zeta} + (\Lambda_{35} - vM_{33})\dot{\zeta} - v\Lambda_{33}\dot{\zeta} + M_{55}\ddot{\psi} + \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda_{55} + v^2\sigma^{-2}\Lambda_{33})\dot{\psi} - v^2M_{33}\psi \right]. \end{aligned} \right\} (4.39)$$

С помощью аналогичных выкладок можно получить окончательные выражения для инерционно-демпфирующих сил при боковой качке:

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= - \left[ M_{22}\ddot{\eta} + \Lambda_{22}\dot{\eta} + M_{24}\ddot{\theta} + \Lambda_{24}\dot{\theta} + M_{26}\ddot{\chi} + \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda_{26} - vM_{22})\dot{\chi} - v\Lambda_{22}\chi \right]; \\ F_4 &= - \left[ M_{24}\ddot{\eta} + \Lambda_{24}\dot{\eta} + M_{44}\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + M_{46}\ddot{\chi} + \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda_{46} - vM_{24})\dot{\chi} - v\Lambda_{24}\chi \right]; \\ F_6 &= - \left[ M_{26}\ddot{\eta} + (\Lambda_{26} + vM_{22})\dot{\eta} + v\Lambda_{22}\eta + M_{46}\ddot{\theta} + \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda_{46} + vM_{24})\dot{\theta} + v\Lambda_{24}\theta + M_{66}\ddot{\chi} + \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda_{66} + v^2\sigma^{-2}\Lambda_{22})\dot{\chi} - v^2M_{22}\chi \right]. \end{aligned} \right\} (4.40)$$

## § 18. Восстанавливающие силы

Для определения восстанавливающих сил при вертикальной, бортовой и килевой качке найдем соответствующие проекции векторов

$$F^H = - \iint_S p^H n dS \quad \text{и} \quad M^H = - \iint_S p^H (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS,$$

где  $p^H$  — избыточное гидростатическое давление на площадку  $dS$  смоченной поверхности корабля.

Обозначив  $F_z^H = F_3^H$ ,  $M_x^H = F_4^H$  и  $M_y^H = F_5^H$ , можем написать:

$$F_3^H = - \iint_S p^H \cos(n, z) dS;$$

$$F_4^H = - \iint_S p^H [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dS;$$

$$F_5^H = - \iint_S p^H [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] dS. \quad \text{!}$$

Преобразуем эти интегралы в интегралы по погруженному в равновесном положении корабля объему  $V$ . При этом следует иметь в виду, что смоченная поверхность  $S$  суть незамкнутая поверхность и для применения преобразования Остроградского—Гаусса ее следует предварительно замкнуть ватерлинией равновесия  $S_0$ .

На ватерлинии имеют место следующие очевидные равенства:  $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$ ,  $\cos(n, z) = 1$ . С учетом этих равенств получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_3^H &= - \iiint_V \frac{\partial p^H}{\partial z} d\tau + \iint_{S_0} p_0^H dS; \\ F_4^H &= - \iiint_V \left( y \frac{\partial p^H}{\partial z} - z \frac{\partial p^H}{\partial y} \right) d\tau + \iint_{S_0} p_0^H y dS; \\ F_5^H &= - \iiint_V \left( z \frac{\partial p^H}{\partial x} - x \frac{\partial p^H}{\partial z} \right) d\tau - \iint_{S_0} p_0^H x dS, \end{aligned} \right\} (4.41)$$

где  $p_0^H$  — избыточное гидростатическое давление на плоскости  $z = 0$ , возникающее за счет вертикальной, бортовой и килевой качки. Согласно формуле (4.9)

$$p^H = -\rho g (z + \zeta - x\psi + y\theta)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial p^H}{\partial x} = \rho g \psi; \quad \frac{\partial p^H}{\partial y} = -\rho g \theta; \quad \frac{\partial p^H}{\partial z} = -\rho g.$$

Подставляя выражения для функции  $p^u$  и ее производных в равенства (4.41), найдем:

$$\left. \begin{aligned} F_3^u &= \rho g \iiint_V d\tau - \rho g \iint_{S_0} (\zeta - x\psi + y\theta) dS; \\ F_4^u &= -\rho g \iiint_V (z\theta - y) d\tau - \rho g \iint_{S_0} (\zeta - x\psi + y\theta) y dS; \\ F_5^u &= -\rho g \iiint_V (z\psi + x) d\tau + \rho g \iint_{S_0} (\zeta - x\psi + y\theta) x dS. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \iiint_V x d\tau &= Vx_c; & \iiint_V y d\tau &= Vy_c; & \iiint_V z d\tau &= Vz_c; \\ \iint_{S_0} x dS &= S_0x_f; & \iint_{S_0} y dS &= S_0y_f; \\ \iint_{S_0} x^2 dS &= J_y; & \iint_{S_0} y^2 dS &= J_x; & \iint_{S_0} xy dS &= J_{xy}. \end{aligned}$$

Как легко видеть,  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z_c$  представляют собой координаты центра величины корабля в положении равновесия,  $x_f$  и  $y_f$  — координаты центра тяжести площади равновесной ватерлинии,  $J_x$  и  $J_y$  — осевые, а  $J_{xy}$  — центробежный момент инерции этой площади относительно соответствующих осей. Вследствие симметрии корабля относительно диаметральной плоскости координаты  $y_c$  и  $y_f$  равны нулю. Кроме того, поскольку ось  $Ox$  является осью симметрии ватерлинии, эта ось и перпендикулярная ей ось  $Oy$  будут главными осями инерции площади  $S_0$ , а это значит, что центробежный момент инерции  $J_{xy}$  также равен нулю. Таким образом, формулы (4.42) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_3^u &= \rho g [V - S_0(\zeta - x_f\psi)]; \\ F_4^u &= -\rho g (Vz_c + J_x)\theta; \\ F_5^u &= -\rho g [V(x_c + z_c\psi) - S_0x_f\zeta + J_y\psi]. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Добавляя к  $F_3^u$  силу тяжести корабля, равную по величине и противоположную по знаку силе плавучести в положении равновесия, получим окончательное выражение для вертикальной восстанавливающей силы:

$$F_3^r = -\rho g S_0'(\zeta - x_f\psi). \quad (4.44)$$

Эта сила представляет собой разность силы тяжести и мгновенной силы плавучести и определяется входящим или выходящим из воды объемом. Его можно рассматривать как цилиндр, основанием которого является ватерлиния  $S_0$ , а высотой — вертикальное смещение  $\zeta - x_f\psi$  ее центра тяжести, обусловленное совместной вертикальной и килевой качкой.

Перейдем к рассмотрению восстанавливающего момента при бортовой качке. Обозначая через  $r_0$  поперечный метацентрический радиус и учитывая, что  $J_x = Vr_0$ , формулу для момента  $F_4^H$  силы плавучести можно переписать в виде

$$F_4^H = -\rho g V (z_c + r_0) \theta = -\rho g V z_m \theta,$$

где, очевидно,  $z_m$  — аппликата поперечного метацентра  $m_0$ , которая, напомним, измеряется от ватерлинии равновесия (рис. 4.2). Отрицательный знак в этой формуле связан с тем, что момент силы плавучести относительно оси  $Ox$  противоположен по направлению углу наклона корабля. Момент веса относительно той же оси

$$F_4^W = mgz_g \theta$$

берется с положительным знаком, так как направления этого момента и угла наклона одинаковы. Иными словами, момент силы плавучести стремится уменьшить, а момент веса — увеличить угол наклона.

Складывая моменты  $F_4^H$  и  $F_4^W$  и имея в виду, что  $\rho g V = mg$ , получим восстанавливающий момент при бортовой качке в виде линеаризованной метацентрической формулы остойчивости:

$$F_4' = -mgh\theta, \quad (4.45)$$

где  $h$  — поперечная метацентрическая высота.

Обратимся теперь к определению восстанавливающего момента, обусловленного совместной вертикальной и килевой качкой.

Момент инерции площади ватерлинии относительно оси  $Oy$ , определяется выражением

$$J_y = J_f + S_0 x_f^2, \quad (4.46)$$

где  $J_f$  — момент инерции этой площади относительно центральной поперечной оси. Последний можно представить в виде

$$J_f = VR_0, \quad (4.47)$$

где  $R_0$  — продольный метацентрический радиус.

Подставляя эти равенства в (4.43), получим

$$\begin{aligned} F_5^H &= -\rho g \{V [x_c + (z_c + R_0) \psi] - S_0 x_f (\zeta - x_f \psi)\} = \\ &= -\rho g [V (x_c - z_M \psi) - S_0 x_f (\zeta - x_f \psi)], \end{aligned}$$

где  $z_M$  — возвышение продольного метацентра  $M_0$  над ватерлинией. В последнем выражении член, пропорциональный водоизмещению корабля  $V$ , представляет собой момент силы плавучести, обуслов-

ленный чисто килевой качкой, а член, пропорциональный площади ватерлинии  $S_0$ , — момент добавочной силы плавучести, которая возникает за счет сопровождающей килевую вертикальной качки.

В рамках линейной теории качки, т. е. в предположении о том, что  $\cos \psi = 1$ , а  $\sin \psi = \psi$ , момент веса корабля относительно оси  $Oy$  будет определяться формулой

$$F_5^W = mg(x_g + z_g\psi).$$

Складывая теперь моменты веса и силы плавучести и имея в виду, что при равновесии корабля  $x_c = x_g$ , получим следующее выражение для восстанавливающего момента при совместной килевой и вертикальной качке:

$$F_5^r = -\rho g V H \psi + \rho g S_0 x_f (\zeta - x_f \psi),$$

где  $H = z_M - z_g = z_c + R_0 - z_g$  — продольная метацентрическая высота (рис. 4.3).

Но продольный метацентрический радиус примерно на два порядка превышает разность  $z_c - z_g$ . Поэтому последней можно пренебречь и считать  $H = R_0$ . Тогда, учитывая соотношения (4.46) и (4.47), можем переписать выражение для восстанавливающего момента в более простом виде:

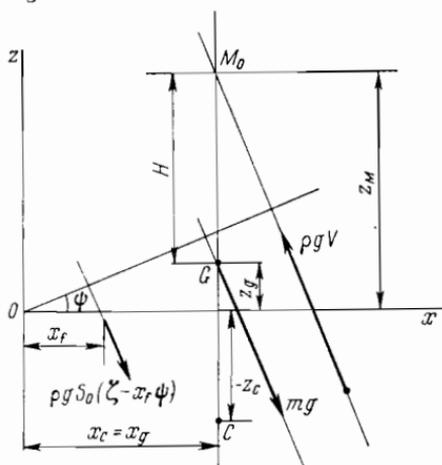
$$F_5^r = \rho g (S_0 x_f \zeta - J_y \psi). \quad (4.48)$$

Площадь ватерлинии, ее статический момент относительно оси  $Oy$  и момент инерции относительно той же оси вычисляют по формулам:

$$S_0 = \int_{-L/2}^{L/2} b dx; \quad S_0 x_f = \int_{-L/2}^{L/2} x b dx;$$

$$J_y = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 b dx,$$

где, очевидно,  $b$  — ширина ватерлинии на шпангоуте с абсциссой  $x$ .



4.3. Восстанавливающий момент при продольной качке.

## § 19. Главная часть возмущающих сил

В пределах точности, соответствующей требованиям линейной теории качки, при определении возмущающих сил учитывается скорость хода корабля и не учитывается его качка и изменение смоченной поверхности за счет качки и волнения. Иными словами, интегралы гидродинамических давлений берут по погруженной части

поверхности корабля, соответствующей его равновесному положению на тихой воде.

Для главной части возмущающих сил, определяемой с использованием гипотезы А. Н. Крылова о независимости поля давлений свободно распространяющихся волн от присутствия корабля как препятствия на их пути справедливы, очевидно, следующие представления:

$$F^* = - \int_S p^* n dS; \quad M^* = - \int_S p^* (r_S \times n) dS,$$

где  $p^*$  — давление набегающих на корабль волн. Это давление вычисляется без учета гидростатической составляющей, которая вместе с весом корабля определяет собой восстанавливающие силы.

Если, как обычно, скорость хода корабля обозначить через  $v$ , то давление можно определить с помощью линейризованного интеграла Лагранжа—Коши

$$p^* = -\rho \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \right),$$

где  $\Phi^*$  — потенциал скоростей набегающих волн, вычисленный в движущейся вдоль оси  $Ox$ , но не качающейся системе координат.

В случае неограниченно глубокой жидкости функция  $\Phi^*$  определяется формулой (1.14)

$$\Phi^* = i \frac{g}{\sigma_0} r e^{kz+i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}$$

Здесь  $r$  — амплитуда (полувысота) волны;  $k$  — волновое число;  $\sigma_0$  — истинная частота;  $\sigma$  — кажущаяся частота;  $\varepsilon$  — угол между осью  $Ox$  и фазовой скоростью волн. При этом

$$\sigma_0 = \sqrt{gk}; \quad \sigma = \sigma_0 - kv \cos \varepsilon; \quad k = 2\pi/\lambda,$$

где  $\lambda$  — длина волны.

Легко видеть, что производные функции  $\Phi^*$  будут:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = i\sigma \Phi^*; \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = -ik \Phi^* \cos \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = i(\sigma - kv \cos \varepsilon) \Phi^* = i\sigma_0 \Phi^*.$$

Таким образом, получаем

$$p^* = \rho g r e^{kz+i[\sigma t - k(x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon)]}$$

Введя для краткости письма обозначения

$$k_1 = k \cos \varepsilon; \quad k_2 = k \sin \varepsilon,$$

последнюю формулу можно переписать в виде

$$p^* = \rho g r e^{kz+i(\sigma t - k_1 x - k_2 y)}. \quad (4.49)$$

Спроектируем векторы  $F^*$  и  $M^*$  на координатные оси, обозначив, как это мы уже неоднократно делали, проекции обоих векторов через  $F_j^*$ , где, напомним, индексы 1, 2, 3 приписываются проекциям силы, а 4, 5, 6 — проекциям момента соответственно на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Учитывая, что проекции на эти оси векторов  $n$  и  $r_S \times n$  выражаются через нормальные производные функций излучения равенствами (4.32), получим

$$F_j^* = - \int_S \int p^* \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} ds, \quad (j=1, 2, \dots, 6),$$

или

$$F_j^* = - \rho g r e^{i\sigma t} \int_S \int e^{kz-i(k_x x+k_y y)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS. \quad (4.50)$$

Для корабля большого удлинения интегралы по поверхности  $S$  допускают следующее представление:

$$\int_S \int f(x, y, z) dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int f(x, y, z) dl dx,$$

где  $l$  — смоченная часть контура шпангоута.

Тогда формулу для  $F_j^*$  можно переписать в виде

$$F_j^* = - \rho g r e^{i\sigma t} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_x x} \int_l e^{kz-ik_y y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl dx,$$

или, введя обозначение

$$h_j = \int_l e^{kz-ik_y y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl \quad (4.51)$$

в виде

$$F_j^* = - \rho g r e^{i\sigma t} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_x x} h_j dx. \quad (4.52)$$

Полагая, что на поверхности корабля большого удлинения имеет место равенство  $\cos(n, x) = 0$ , из формул (4.15) легко получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} &= \cos(n, x) = 0; \\ \frac{\partial \Phi_5}{\partial n} &= z \cos(n, x) - x \cos(n, z) = -x \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}, \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} &= x \cos(n, y) - y \cos(n, x) = x \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что для такого корабля определению подлежат лишь функции  $h_2$ ,  $h_3$  и  $h_4$ , так как

$$h_1 = 0; \quad h_5 = -xh_3; \quad h_6 = xh_2. \quad (4.53)$$

Еще раз обратим внимание на то, что смоченная часть контура шпангоута  $l$  есть кривая незамкнутая. Поэтому, преобразуя интегралы по кривой  $l$  в интегралы по площади шпангоута  $\omega$ , следует предварительно замкнуть эту кривую прямолинейным отрезком  $b/2 \leq y \leq b/2, z = 0$ . После преобразования интеграл по кривой  $l$  находится как разность интегралов по площади шпангоута и по замыкающему отрезку. Учитывая, что на этом отрезке

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \cos(n, y) = 0; \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} = \cos(n, z) = 1;$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial n} = y \cos(n, z) - z \cos(n, y) = y,$$

можем, используя формулу Остроградского—Гаусса для плоскости, переписать равенство (4.51) в виде:

$$h_2 = \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial y} e^{kz - ik_2 y} d\omega; \quad (4.54)$$

$$h_3 = \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial z} e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_2 y} dy; \quad (4.55)$$

$$h_4 = \iint_{\omega} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} ye^{-ik_2 y} dy. \quad (4.56)$$

Для вычисления интегралов по площади шпангоута будем пользоваться следующим представлением:

$$\iint_{\omega} f(y, z) d\omega = \int_{-T}^0 \int_{-y}^y f(\eta, z) d\eta dz. \quad (4.57)$$

Перейдем теперь к определению главной части возмущающих сил при различных видах качки.

**Поперечно-горизонтальная качка и рысканье.** Пользуясь формулами (4.54) и (4.57), найдем

$$h_2 = \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial y} e^{kz - ik_2 y} d\omega = -ik_2 \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz. \quad (4.58)$$

Подставляя сюда значение внутреннего интеграла

$$\int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2}{k_2} \sin k_2 y, \quad (4.59)$$

получим

$$h_2 = -2i \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz. \quad (4.60)$$

Напомним, что волновое число  $k$  связано с длиной волны  $\lambda$  соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

и, следовательно,

$$kz = \frac{2\pi z}{\lambda}; \quad k_2 y = \frac{2\pi}{\lambda} y \sin \varepsilon,$$

где  $|z| \leq T$ , а  $|y \sin \varepsilon| \leq b/2$ .

Таким образом, если размеры контура  $b$  и  $T$  пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны  $\lambda$ , то  $kz$  и  $k_2 y$  стремятся к нулю.

Найдем предел, к которому в этом случае стремится интеграл, входящий в формулу для  $h_2$ :

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz = k_2 \int_{-T}^0 y dz = k_2 \frac{\omega}{2}.$$

Представим теперь  $h_2$  в виде

$$h_2 = -ik_2 \omega \kappa_2, \quad (4.61)$$

где  $\kappa_2$  представляет собой редуцированный коэффициент к главной части возмущающей силы при поперечных колебаниях контура, учитывающий соизмеримость размеров последнего с длиной волны. Как видно из сопоставления формул (4.60) и (4.61), этот коэффициент определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{2}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz. \quad (4.62)$$

Обозначив

$$\omega \kappa_2 = a_2, \quad (4.63)$$

на основании формул (4.61) и (4.53) можем написать

$$h_2 = -ik_2 a_2; \quad h_6 = -ik_2 \alpha a_2. \quad (4.64)$$

Подставляя последние соотношения в равенство (4.52), получим формулы для главной части возмущающей силы при поперечно-горизонтальной качке и рысканье:

$$F_2^* = ik_2 \rho g r e^{i\sigma t} \int_{-L/2}^{L/2} a_2 (\cos k_1 x - i \sin k_1 x) dx; \quad (4.65)$$

$$F_6^* = ik_2 \rho g r e^{i\sigma t} \int_{-L/2}^{L/2} a_2 x (\cos k_1 x - i \sin k_1 x) dx.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{matrix} A_j^s \\ A_j^c \end{matrix} \right\} = \int_{-L/2}^{L/2} a_j \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \quad (4.66)$$

$$\left. \begin{matrix} A_j^{xs} \\ A_j^{xc} \end{matrix} \right\} = \int_{-L/2}^{L/2} a_j x \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx.$$

Заметим, что, несмотря на некоторую громоздкость, обозначения  $A_j^s$ ,  $A_j^c$ ,  $A_j^{xs}$ ,  $A_j^{xc}$  очень удобны. Они построены по следующему принципу: если в подынтегральную функцию входит  $a_j$ , то интеграл обозначается через  $A_j$ ; наличие в подынтегральной функции сомножителя  $\sin k_1 x$  или  $\cos k_1 x$  отмечается соответственно первыми буквами  $s$  или  $c$  названий этих функций в верхнем индексе при  $A_j$ ; если подынтегральная функция содержит сомножитель  $x$ , то последний также выносится в верхний индекс. Таким образом, само обозначение несет полную информацию об обозначаемой величине. По этому же принципу строим в дальнейшем обозначения интегралов, входящих в формулы для дифракционной части возмущающих сил.

Используя введенные обозначения и принимая во внимание, что  $k_2 = k \sin \epsilon$ , а  $kr = \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — наибольший уклон взволнованной поверхности, формулам (4.65) для  $F_2^*$  и  $F_6^*$  можно придать простой вид:

$$F_2^* = \rho g \alpha_0 \sin \epsilon (A_2^s + i A_2^c) e^{i\sigma t}; \quad (4.67)$$

$$F_6^* = \rho g \alpha_0 \sin \epsilon (A_2^{xs} + i A_2^{xc}) e^{i\sigma t}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении редуцированного коэффициента  $\kappa_2$ . Представим уравнение положительной ветви шпангоута в форме

$$y(z) = \frac{b}{2} Z(z), \quad (4.68)$$

где  $Z(z)$  — уравнение ветви шпангоута, ширина которого по ватерлинии равновесия равна единице. Тогда можно записать

$$k_2 y = \frac{1}{2} kb \sin \epsilon Z(z) = k T H_\epsilon Z(z),$$

где

$$H_\epsilon = \frac{b}{2T} \sin \epsilon.$$

Если теперь ввести в формуле (4.62) новую переменную интегрирования  $\zeta$ , связанную с переменной  $z$  соотношением  $z = -T\zeta$ , то эта формула примет вид

$$\kappa_2 = \frac{1}{\beta k T H_\varepsilon} \int_0^1 e^{-kT\zeta} \sin [kTH_\varepsilon Z(\zeta)] d\zeta.$$

Для точного расчета коэффициента  $\kappa_2$  функция  $Z(\zeta)$  должна определяться по теоретическому чертежу как отношение ординаты шпангоута при  $0 < \zeta \leq 1$  к его ординате при  $\zeta = 0$ , т. е. к полуширине по ватерлинии равновесия. Однако такой путь является нерациональным. Дело в том, что коэффициент  $\kappa_2$  определяется не локальными значениями функции  $Z(\zeta)$ , а интегралом от нее. Поэтому местные особенности формы шпангоута не могут существенно отразиться на величине этого коэффициента и при его вычислении контур можно аппроксимировать аналитической кривой. Анализ вычислений, проведенных на основе аппроксимации Льюиса, параболической аппроксимации и по теоретическому чертежу, показал, что их результаты практически совпадают.

Если аппроксимировать контур параболической кривой вида

$$Z(z) = 1 - \left(-\frac{z}{T}\right)^m,$$

или

$$Z(\zeta) = 1 - \zeta^m \left(m = \frac{\beta}{1-\beta}\right),$$

то, очевидно, функция  $Z(\zeta)$  будет зависеть только от коэффициента полноты шпангоута  $\beta$ . Следовательно, редуцированный коэффициент будет зависеть от трех безразмерных параметров:  $\beta$ ,  $kT$  и  $H_\varepsilon$ .

Для полуэллиптического шпангоута, уравнение которого

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{T^2} = 1,$$

функция  $Z(\zeta)$  определяется равенством

$$Z(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

и коэффициент  $\kappa_2$  зависит от двух параметров:  $kT$  и  $H_\varepsilon$ . Этот результат является вполне естественным, так как при любом соотношении полуосей эллипс имеет один и тот же коэффициент полноты  $\beta = \pi/4$ . График значений  $\kappa_2$  для полуэллиптических шпангоутов приведен на рис. 4.4.

Рассмотрим теперь частные случаи расположения корабля лагом к волне ( $\varepsilon = \pi/2$ ) и на продольном волнении ( $\varepsilon = 0$  или  $\varepsilon = \pi$ ).

В последнем случае  $\sin \epsilon = 0$  и, как видно из формул (4.67),  $F_2^* = F_6^* = 0$ . При расположении лагом к волне

$$k_1 = k \cos \epsilon = 0, \quad \sin k_1 x = 0, \quad \cos k_1 x = 1$$

и, следовательно,

$$A_2^s = A_2^{xs} = 0; \quad A_2^c = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_2 \omega dx; \quad A_2^{xc} = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_2 \omega x dx. \quad (4.69)$$

Для оценочных расчетов можно осреднить значение  $\kappa_2$  по длине корабля. При этом имеет смысл использовать наиболее простую эллиптическую аппроксимацию шанпоутов, а под средним значением их ширины по ватерлинии понимать величину  $\alpha B$ , где  $\alpha$  — коэффициент полноты ватерлинии, а  $B$  — ширина корабля по миделю. Таким образом, среднее значение редуccionного коэффициента, будет, помимо  $kT$ , зависеть от параметра

$$H_\epsilon = \frac{\alpha B}{2T}. \quad (4.70)$$

Сохранив за средним значением редуccionного коэффициента  $\kappa_2$  то же обозначение (это не приведет к недоразумениям) и вынося

его в формулах (4.69) из-под знаков интеграла, можем написать

$$A_2^c = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \omega dx = \kappa_2 V; \quad A_2^{xc} = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \omega x dx = \kappa_2 V x_c,$$

где  $V$  — объемное водоизмещение корабля, а  $x_c$  — абсцисса центра величины. Подставляя значения  $A_2^c$  и  $A_2^{xc}$ , определяемые последними формулами, в равенства (4.67) и помня, что в рассматриваемом случае расположения корабля лагом к волне  $A_2^s = A_2^{xs} = 0$ , получим

$$F_2^* = i\rho g \alpha_0 \kappa_2 V e^{i\sigma t}; \quad F_6^* = i\rho g \alpha_0 \kappa_2 V x_c e^{i\sigma t}. \quad (4.71)$$

Приведенные выше общие соображения, касающиеся характера зависимости коэффициента  $\kappa_2$  от различных параметров и вычисления его среднего значения, в полной мере относятся и к введенным ниже редуccionным коэффициентам, учитывающим влияние соизмеримости поперечных размеров корабля с длиной волны на остальные виды качки.

**Вертикальная и килевая качка.** Для того чтобы определить главную часть возмущающей силы при вертикальной и килевой

качке, требуется найти функцию  $h_3$ . На основании (4.55) и (4.57) эта функция может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} h_3 &= \int_{\omega} \int \frac{\partial}{\partial z} e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_2 y} dy = \\ &= k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_2 \eta} d\eta. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем для единообразия записи переменная интегрирования  $y$  в интеграле по отрезку  $-b/2 \leq y \leq b/2$  заменена на  $\eta$ .

Но согласно формуле (2.77)

$$\int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2}{k_2} \sin k_2 y$$

и, следовательно,

$$h_3 = 2 \frac{k}{k_2} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz - \frac{2}{k_2} \sin \frac{k_2 b}{2}.$$

Возьмем входящий в последнее равенство интеграл по частям, полагая

$$\sin k_2 y = u; \quad e^{kz} dz = dv.$$

В этом случае

$$k_2 \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz = du; \quad \frac{1}{k} e^{kz} = v.$$

В дальнейшем будем исходить из предположения о том, что при  $z = -T$  ордината  $y = 0$ , т. е. что днищевая ветвь контура шпангоута не имеет в районе диаметральной плоскости горизонтального участка. Тогда, учитывая, что при  $z = 0$  ордината  $y = b/2$ , получим

$$\frac{2k}{k_2} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz = \frac{2}{k_2} \sin \frac{k_2 b}{2} - 2 \int_{-T}^0 e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz$$

и, следовательно,

$$h_3 = -2 \int_{-T}^0 e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz.$$

Представив в соответствии с уравнением шпангоута (4.68) производную  $dy/dz$  в виде

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2} b \frac{dZ(z)}{dz},$$

можем написать

$$h_3 = -b\kappa_3,$$

где

$$\kappa_3 = \int_{-T}^0 e^{kz} \cos k_2 y dZ(z).$$

В случае, когда размеры шпангоута  $b$  и  $T$  пренебрежимо малы по сравнению с длиной набегающей волны, предельное значение  $\kappa_3$  определится равенством

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 e^{kz} \cos k_2 y dZ(z) = \int_{-T}^0 dZ(z) = Z(z)|_{-T}^0 = 1.$$

Таким образом,  $\kappa_3$  представляет собой редуционный коэффициент к главной части возмущающей силы при вертикальных колебаниях шпангоутного контура, учитывающий соизмеримость размеров последнего с длиной волны. График значений этого коэффициента для шпангоутов полуэллиптической формы приведен на рис. 4.5.

Обозначим

$$b\kappa_3 = a_3, \quad (4.72)$$

тогда

$$h_3 = -a_3; \quad h_5 = -\chi h_3 = \chi a_3. \quad (4.73)$$

4.5. Редуционный коэффициент  $\kappa_3$ .

Подставив теперь значения  $h_3$  и  $h_5$  в формулу (4.52), получим общие выражения для главной части возмущающей силы при вертикальной и килевой качке:

$$\left. \begin{aligned} F_3^* &= \rho g r (A_3^c - iA_3^s) e^{i\sigma t}; \\ F_5^* &= -\rho g r (A_3^{xc} - iA_3^{xs}) e^{i\sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

В этих выражениях использованы обозначения, определяемые равенствами (4.66).

В частном случае расположения корабля лагом к волне ( $\varepsilon = \pi/2$ ,  $k_1 = k \cos \varepsilon = 0$ ) можем написать

$$A_3^s = A_3^{xs} = 0; \quad A_3^c = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_3 b dx; \quad A_3^{xc} = \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_3 b x dx.$$

Считая  $\kappa_3$  средним редуционным коэффициентом, получим следующие весьма простые формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_3^c &= \kappa_3 \int_{-L/2}^{L/2} b dx = \kappa_3 S_0; & A_3^{xc} &= \kappa_3 \int_{-L/2}^{L/2} b x dx = \kappa_3 S_0 x_f; \\ F_3^* &= \rho g r \kappa_3 S_0 e^{i\sigma t}; \\ F_5^* &= -\rho g r \kappa_3 S_0 x_f e^{i\sigma t}, \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

где, очевидно,  $S_0$  представляет собой площадь ватерлинии равновесия, а  $x_f$  — абсциссу ее центра тяжести.

В случае чисто встречного ( $\varepsilon = \pi$ ) или чисто попутного волнения ( $\varepsilon = 0$ )  $k_2 = k \sin \varepsilon = 0$ ,  $\cos k_2 y = 1$  и коэффициент  $\kappa_3$  приобретает вид

$$\kappa_3 = \int_{-T}^0 e^{kz} dZ(\bar{z}). \quad (4.76)$$

Используем параболическую аппроксимацию шпангоутного контура, которой соответствует следующее выражение для функции  $Z(z)$ :

$$Z(z) = 1 - \left( -\frac{z}{T} \right)^m, \quad (4.77)$$

где, напомним, показатель степени  $m$  связан с коэффициентом полноты  $\beta$  соотношением

$$m = \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Тогда

$$dZ(z) = \frac{m}{T^m} (-z)^{m-1} dz.$$

Если ввести новую переменную  $\zeta = -kz$ , получим

$$dZ(\zeta) = -\frac{m}{(kT)^m} \zeta^{m-1} d\zeta.$$

Изменив в формуле (4.76) соответствующим образом пределы интегрирования, можем написать

$$\kappa_3 = \frac{m}{(kT)^m} \int_0^{kT} e^{-\zeta} \zeta^{m-1} d\zeta = \frac{m}{(kT)^m} \gamma(m, kT),$$

где через  $\gamma(m, kT)$  обозначена неполная гамма-функция, определяемая интегралом

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (4.78)$$

Эта функция табулирована,<sup>1</sup> что дает возможность в случае продольного волнения легко вычислить значения коэффициента  $\chi_3$ .

**Бортовая качка.** Определение главной части возмущающей силы при бортовой качке начнем с нахождения функции  $h_4$ , аналогично тому, как мы делали выше для поперечно-горизонтальной качки, рысканья, килевой и вертикальной качки. Руководствуясь равенствами (4.56) и (4.57), можем написать:

$$h_4 = \iint_{\omega} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{kz - ik_2 y} d\omega - \int_{-b/2}^{b/2} y e^{-ik_2 y} dy =$$

$$= k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz + ik_2 \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta.$$

Обозначим

$$h_4 = h_{41} + ik_2 h_{42}, \quad (4.79)$$

где

$$h_{41} = k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta; \quad (4.80)$$

$$h_{42} = \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz. \quad (4.81)$$

Имея в виду, что согласно (2.78)

$$\int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2i}{k_2^2} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y),$$

получим

$$h_{41} = \frac{2ik}{k_2^2} \int_{-T}^0 e^{kz} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y) dz -$$

$$- \frac{2i}{k_2^2} \left( \frac{k_2 b}{2} \cos \frac{k_2 b}{2} - \sin \frac{k_2 b}{2} \right).$$

Возьмем интеграл, входящий в последнюю формулу по частям, полагая

$$k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y = u; \quad e^{kz} dz = dv$$

и, следовательно,

$$-k_2^2 y \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz = du; \quad \frac{1}{k} e^{kz} = v.$$

<sup>1</sup> Слущик Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности  $\chi^2$ . М. — Л. Изд. АН СССР, 1950; Пагурова В. И. Таблицы неполной гамма-функции. М.: ВЦ АН СССР, 1963.

Тогда будем иметь

$$h_{41} = 2i \int_{-T}^0 e^{kz} y \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz. \quad (4.82)$$

Найдем теперь предельное значение

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 e^{kz} y \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz = k_2 \int_{-T}^0 y^2 \frac{dy}{dz} dz = \frac{k_2}{3} \int_0^{b/2} dy^3 = \frac{k_2 b^3}{24}.$$

При переходе от интегрирования по переменной  $z$  к интегрированию по  $y$  учтено, что при  $z = -T$   $y = 0$ , а при  $z = 0$   $y = b/2$ .

Таким образом, функцию  $h_{41}$  можно представить в форме

$$h_{41} = \frac{ik_2 b^3}{12} \kappa_{41}, \quad (4.83)$$

где, как видно из сопоставления с (4.82),

$$\kappa_{41} = \frac{24}{k_2 b^3} \int_{-T}^0 e^{kz} y \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz. \quad (4.84)$$

Но согласно равенству (4.68)

$$y = \frac{b}{2} Z(z)$$

и, следовательно,

$$y \frac{dy}{dz} dz = \frac{b^2}{4} Z(z); \quad \frac{dZ(z)}{dz} dz = \frac{b^2}{8} dZ^2(z).$$

Воспользовавшись этим соотношением, можно привести формулу (4.84) к более удобному виду

$$\kappa_{41} = \frac{3}{k_2 b} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dZ^2(z). \quad (4.85)$$

Перейдем теперь к определению функции  $h_{42}$ . Подставляя в равенство (4.81) значение внутреннего интеграла

$$\int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta = \frac{2}{k_2} \sin k_2 y,$$

получим

$$h_{42} = \frac{2}{k_2} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz. \quad (4.86)$$

Найдя предел

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz = k_2 \int_{-T}^0 z y dz = k_2 \omega z_\omega,$$

где  $z_\omega$  — аппликата центра тяжести погруженной площади шпангоута, перепишем формулу (4.86) следующим образом:

$$h_{42} = \omega z_\omega \kappa_{42}, \quad (4.87)$$

где, очевидно,

$$\kappa_{42} = \frac{2}{k_2 \omega z \omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz. \quad (4.88)$$

Если теперь подставить значения  $h_{41}$  и  $h_{42}$ , определяемые равенствами (4.83) и (4.87), в формулу (4.79), последняя примет вид

$$h_4 = h_{41} + ik_2 h_{42} = ik_2 \left( \frac{b^3}{12} \kappa_{41} + \omega z \omega \kappa_{42} \right).$$

Обозначив

$$a_4 = \frac{b^3}{12} \kappa_{41} + \omega z \omega \kappa_{42}, \quad (4.89)$$

можем написать

$$h_4 = ik_2 a_4. \quad (4.90)$$

Подставляя последнее выражение в равенство (4.52) и пользуясь обозначениями (4.66), получим окончательную формулу для главной части возмущающей силы при бортовой качке

$$F_4^* = -\rho g \alpha_0 \sin \varepsilon (A_4^s + i A_4^f) e^{i\sigma t}. \quad (4.91)$$

#### 4.6. Редукционный коэффициент $\kappa_4$ .

Для полуэллиптического шпангоута статический момент погруженной площади относительно ватерлинии определяется равенством

$$\omega z \omega = -\frac{b T^2}{3}$$

и формула (4.88) принимает вид

$$\kappa_{42} = -\frac{6}{k_2 b T^2} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz.$$

Функция  $Z(z)$  для такого шпангоута будет

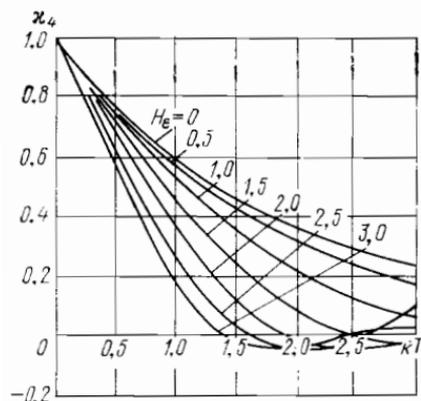
$$Z(z) = \sqrt{1 - \frac{z^2}{T^2}}$$

и, следовательно,

$$dZ^2(z) = -2 \frac{z}{T^2} dz.$$

Подставив это значение дифференциала в соотношение (4.85), получим

$$\kappa_{41} = -\frac{6}{k_2 b T^2} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz.$$



Таким образом, для полуэллиптического шпангоута редуционные коэффициенты  $\kappa_{41}$  и  $\kappa_{42}$  одинаковы и поэтому для них можно применять общее обозначение  $\kappa_4$ . График значений  $\kappa_4$  приведен на рис. 4.6.

В случае продольного волнения  $\sin \varepsilon = 0$  и, как видно из формулы (4.91),  $F_4^*$  также обращается в нуль. При расположении корабля лагом к волне  $k_1 = k \cos \varepsilon = 0$  и в нуль обращается интеграл  $A_4^s$ , так как его подынтегральная функция включает множитель  $\sin k_1 x$ .

Если для приближенных расчетов принять эллиптическую аппроксимацию шпангоутов и вынести  $\kappa_4$  за знак интеграла, то для положения лагом

$$A_4^c = \kappa_4 \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{b^3}{12} + \omega z_\omega \right) dx,$$

или иначе

$$A_4^c = \kappa_4 (J_x + Vz_c),$$

где  $J_x$  — поперечный момент инерции площади ватерлинии равновесия, а  $z_c$  — аппликата центра величины корабля. Последнее равенство можно переписать в виде

$$A_4^c = \kappa_4 V (r_0 + z_c) = \kappa_4 Vz_m,$$

где  $r_0$  — метацентрический радиус, а  $z_m$  — аппликата поперечного метacentра, которая, напомним, измеряется от ватерлинии равновесия. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$F_4^* = -i \rho g \alpha_0 \kappa_4 Vz_m e^{i\omega t}. \quad (4.92)$$

Закончив на этом вывод формул для главной части возмущающих сил при различных видах качки, рассмотрим вопрос о численной реализации полученных результатов.

Аргумент  $k_2 y = ky \sin \varepsilon$  тригонометрических функций, входящих под интегралы по осадке в выражениях для редуционных коэффициентов  $\kappa_j$ , если только длина набегающих волн не меньше ширины корабля, не превосходит  $\pi$ . Таким образом, подынтегральные функции здесь не осциллируют и вычисление  $\kappa_j$  легко производится даже на простейших ЭВМ.

С интегралами  $A_j^s$ ,  $A_j^c$ ,  $A_j^{xs}$ ,  $A_j^{xc}$  дело обстоит значительно сложнее, так как при длине волны, меньшей, чем полудлина корабля, аргумент  $k_1 x = kx \cos \varepsilon$  подынтегральных тригонометрических функций может превышать  $2\pi$ . В этом случае функции окажутся осциллирующими.

Как известно, вычисление интегралов от осциллирующих функций с помощью квадратурных формул весьма громоздко. Поэтому представим рассматриваемые интегралы в виде рядов, вычисление которых на ЭВМ трудностей не представляет.

Будем считать корабль симметричным относительно миделя. Тогда  $A_j^s$  и  $A_j^{xc}$ , как интегралы от нечетных функций, обратятся в нуль. Подынтегральные функции в формулах для  $A_j^c$  и  $A_j^{xs}$  будут четными, в связи с чем здесь вместо интегралов в пределах от  $-L/2$  до  $L/2$  можно брать удвоенные интегралы в пределах от нуля до  $L/2$ . Тогда, учитывая, что согласно равенствам (4.63), (4.72) и (4.89):

$$a_2 = \omega \kappa_2; \quad a_3 = b \kappa_3;$$

$$a_4 = \frac{b^3}{12} \kappa_{41} + \omega z_\omega \kappa_{42},$$

и вынося осредненные значения редуционных коэффициентов из-под знаков интеграла, можем написать:

$$\left. \begin{aligned} A_2^c &= 2\kappa_2 \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx; \\ A_2^{xs} &= 2\kappa_2 \int_0^{L/2} \omega x \sin k_1 x dx; \\ A_3^c &= 2\kappa_3 \int_0^{L/2} b \cos k_1 x dx; \\ A_3^{xs} &= 2\kappa_3 \int_0^{L/2} b x \sin k_1 x dx; \\ A_4^c &= \frac{\kappa_{41}}{6} \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx + 2\kappa_{42} \int_0^{L/2} \omega z_\omega \cos k_1 x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

Представим уравнение смоченной поверхности корабля в виде

$$y(x, z) = \frac{B}{2} X(x) Z(z), \quad (4.94)$$

где

$$X(x) = 1 - \left( \frac{2|x|}{L} \right)^n;$$

$$Z(z) = 1 - \left( -\frac{z}{T} \right)^m.$$

Показатели степени  $n$  и  $m$ , как уже упоминалось, связаны с коэффициентами полноты  $\alpha$  и  $\beta$  соотношениями:

$$n = \frac{\alpha}{1-\alpha}; \quad m = \frac{\beta}{1-\beta}. \quad (4.95)$$

Учитывая, что при таком представлении смоченной поверхности

$$\int_{-T}^0 Z(z) dz = \beta T; \quad \int_0^{L/2} X(x) dx = \alpha \frac{L}{2},$$

легко получить следующие выражения для площади шпангоута с абсциссой  $x$ , площади ватерлинии с аппликатой  $z$  и объемного водоизмещения:

$$\omega = 2 \int_{-T}^0 y dz = \beta B T X(x) = \omega_0 X(x);$$

$$S_z = 4 \int_0^{L/2} y dx = \alpha L B Z(z) = S_0 Z(z);$$

$$V = 2 \int_0^{L/2} \omega dx = \int_{-T}^0 S_z dz = \alpha \beta L B T,$$

где  $\omega_0$  — площадь миделя, а  $S_0$  — площадь ватерлинии равновесия.

С другой стороны, объемное водоизмещение определяется формулой

$$V = \delta L B T,$$

где  $\delta$  — коэффициент общей полноты.

Таким образом, для корабля, обводы которого описываются уравнением (4.94), имеем  $\delta = \alpha \beta$ , или

$$\alpha = \frac{\delta}{\beta}; \quad \beta = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Но для любого корабля справедливы соотношения

$$\frac{\delta}{\beta} = \varphi; \quad \frac{\delta}{\alpha} = \chi,$$

где  $\varphi$  и  $\chi$  — коэффициенты продольной и вертикальной полноты.

Из изложенного следует, что уравнением (4.94) описываются обводы корабля, у которого все ватерлинии имеют одинаковый коэффициент полноты, равный коэффициенту продольной полноты, и все шпангоуты также имеют одинаковый коэффициент полноты, равный коэффициенту вертикальной полноты. Корабль с такими обводами называют биподобным. Все шпангоуты такого корабля имеют одинаковые аппликаты центров тяжести

$$z_\omega = \frac{b}{\omega} \int_{-T}^0 Z(z) z dz = -\frac{T}{2(2-\beta)} = -\frac{T}{2(2-\chi)},$$

и таким образом во втором члене формулы для  $A_4^c$  значение  $z_\omega$  может быть вынесено из-под знака интеграла.

Введем теперь в равенствах (4.93) новую переменную интегрирования  $x_1 = 2x/L$ . Тогда, обозначив аргумент тригонометрических функций через  $ax_1$ , где  $a = (kL/2) \cos \epsilon$ , и опуская для простоты

записи индекс у переменной  $x_1$ , представим эти равенства в следующем виде:

$$A_2^c = \kappa_2 \omega_0 L \int_0^1 (1-x^n) \cos ax dx;$$

$$A_2^{xs} = \frac{1}{2} \kappa_2 \omega_0 L^2 \int_0^1 (1-x^n) x \sin ax dx;$$

$$A_3^c = \kappa_3 BL \int_0^1 (1-x^n) \cos ax dx;$$

$$A_3^{xs} = \frac{1}{2} \kappa_3 BL^2 \int_0^1 (1-x^n) x \sin ax dx;$$

$$A_4^c = \frac{1}{12} \kappa_{41} B^3 L \int_0^1 (1-x^n)^3 \cos ax dx - \kappa_{42} \frac{T \omega_0 L}{2(2-\chi)} \int_0^1 (1-x^n) \cos ax dx.$$

Таким образом, нахождение главной части возмущающей силы при всех видах качки сводится к вычислению интегралов типа

$$\int_0^1 x^p \sin ax dx \text{ и } \int_0^1 x^p \cos ax dx.$$

Здесь  $p$  может принимать значения  $0, 1, n, n+1, 2n, 3n$  где  $n$ , вообще говоря, нецелое положительное число, определяемое формулой (4.95).

Интегралы подобного типа могут быть выражены следующим образом<sup>1</sup>:

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} \sin ax dx = -\frac{i}{2\gamma} [{}_1F_1(\gamma, \gamma+1, ia) - {}_1F_1(\gamma, \gamma+1, -ia)];$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} \cos ax dx = \frac{1}{2\gamma} [{}_1F_1(\gamma, \gamma+1, ia) + {}_1F_1(\gamma, \gamma+1, -ia)],$$

где  ${}_1F_1(u, v, z)$  — функция,<sup>2</sup> которая представляется таким рядом:

$${}_1F_1(u, v, z) = 1 + \frac{u}{v} \frac{z}{1!} + \frac{u(u+1)}{v(v+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{u(u+1)(u+2)}{v(v+1)(v+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Подставляя сюда  $u = \gamma, v = \gamma + 1$ , получим

$${}_1F_1(\gamma, \gamma+1, z) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{z}{1!} + \frac{\gamma}{\gamma+2} \frac{z^2}{2!} + \frac{\gamma}{\gamma+3} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Найдем теперь разность и сумму

$$(ia)^s \mp (-ia)^s = a^s [i^s \mp (-i)^s], \quad (s=1, 2, 3, \dots).$$

<sup>1</sup> Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, с. 434, 435.

<sup>2</sup> Эта функция называется вырожденной или конфлюэнтной гипергеометрической функцией.

Поскольку

$$i^s = e^{i \frac{s\pi}{2}} = \cos \frac{s\pi}{2} + i \sin \frac{s\pi}{2};$$

$$-i^s = e^{-i \frac{s\pi}{2}} = \cos \frac{s\pi}{2} - i \sin \frac{s\pi}{2},$$

будем иметь:

$$(ia)^s - (-ia)^s = 2ia^s \sin \frac{s\pi}{2};$$

$$(ia)^s + (-ia)^s = 2a^s \cos \frac{s\pi}{2}.$$

Далее, учитывая, что

$$\sin \frac{s\pi}{2} = 0 \text{ при } s = 2r,$$

$$\cos \frac{s\pi}{2} = 0 \text{ при } s = 2r + 1, (r = 0, 1, 2, \dots),$$

можем написать:

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} \sin ax dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^{2r+1}}{(\gamma + 2r + 1)(2r + 1)!} \sin \frac{(2r + 1)\pi}{2};$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1} \cos ax dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^{2r}}{(\gamma + 2r)(2r)!} \cos r\pi.$$

Но

$$\cos r\pi = (-1)^r,$$

$$\sin \frac{(2r + 1)\pi}{2} = \sin r\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos r\pi \sin \frac{\pi}{2} = \cos r\pi = (-1)^r$$

и формулы для вычисления интегралов приобретают следующий окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 x^{\gamma-1} \sin ax dx &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a^{2r+1}}{(\gamma + 2r + 1)(2r + 1)!}; \\ \int_0^1 x^{\gamma-1} \cos ax dx &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a^{2r}}{(\gamma + 2r)(2r)!}. \end{aligned} \right\} \quad (4.96)$$

Численная реализация этих формул на ЭВМ не вызывает затруднений.

Для экспресс-расчетов, выполняемых без применения ЭВМ, целесообразно использовать другой прием. Прежде всего, найдем пределы:

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx = \frac{1}{2} V;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} \omega x \sin k_1 x dx = \frac{1}{2} k_1 J_V;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b \cos k_1 x dx = \frac{1}{2} S_0;$$

$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b x \sin k_1 x dx = \frac{1}{2} k_1 J_y;$$

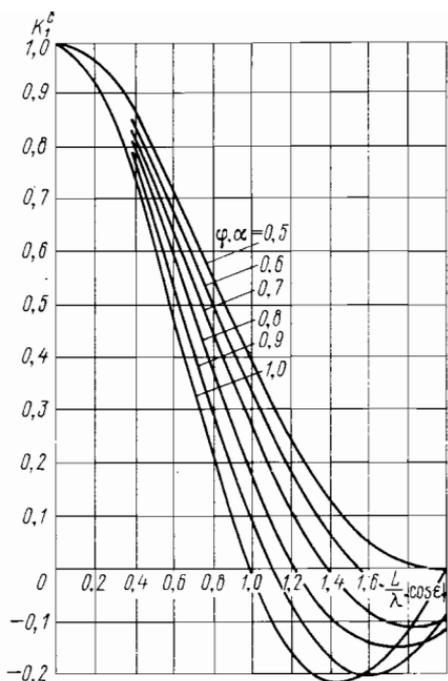
$$\lim_{k_1 x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx = 6J_x,$$

где  $J_V$  — момент инерции погруженного объема корабля относительно миделевого сечения, а  $J_x$  и  $J_y$  — моменты инерции площади ватерлинии равновесия относительно соответствующих осей.

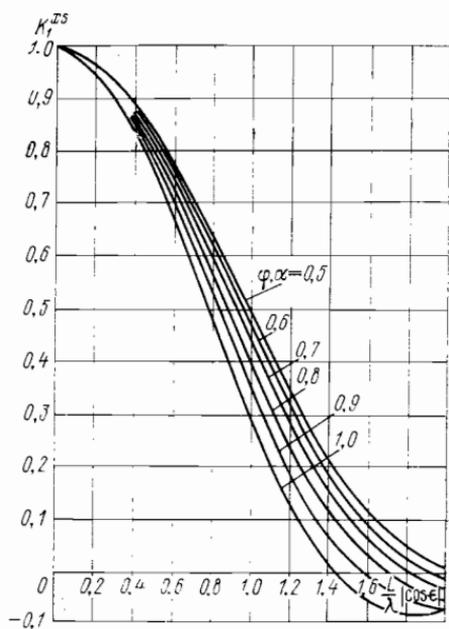
Введем теперь следующие коэффициенты<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} K_1^c(\varphi) &= \frac{2}{V} \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx; & K_1^{xs}(\varphi) &= \frac{2}{k_1 J_V} \int_0^{L/2} \omega x \sin k_1 x dx; \\ K_1^c(\alpha) &= \frac{2}{S_0} \int_0^{L/2} b \cos k_1 x dx; & K_1^{xs}(\alpha) &= \frac{2}{k_1 J_y} \int_0^{L/2} b x \sin k_1 x dx; \\ K_3^c &= \frac{1}{6J_x} \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx. \end{aligned} \right\} (4.97)$$

<sup>1</sup> Коэффициенты  $K_1^c(\alpha)$  и  $K_1^{xs}(\alpha)$  были впервые предложены Г. Е. Павленко.

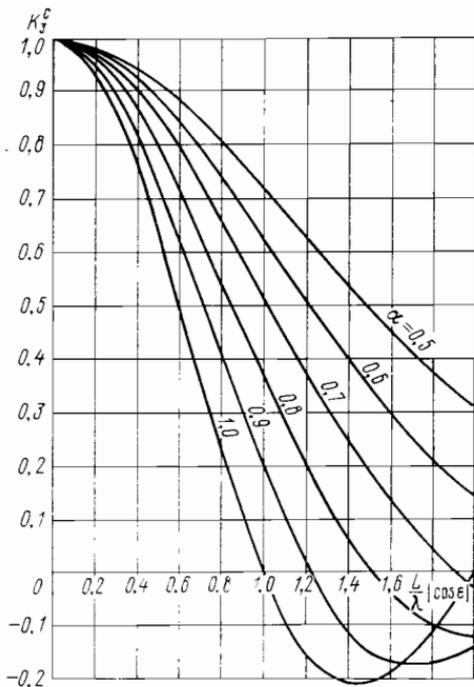


4.7. Редукционный коэффициент  $K_1^c$ .



4.8. Редукционный коэффициент  $K_1^{xs}$ .

Очевидно, что для корабля, длина которого пренебрежимо мала по сравнению с длиной волны, эти коэффициенты оказываются равными единице. Таким образом, они играют роль редукционных коэффициентов, учитывающих влияние конечности длины корабля на амплитуду главной части возмущающей силы при соответствующих видах качки.



4.9. Редукционный коэффициент  $K_3^c$ .

Для корабля, смоченная поверхность которого описывается уравнением (4.94), легко получить следующие формулы:

$$J_v = 2 \int_0^{L/2} \omega x^2 dx = \frac{L^3 \omega_0}{12} \frac{\varphi}{3 - 2\varphi};$$

$$J_y = 2 \int_0^{L/2} b x^2 dx = \frac{L^3 B}{12} \frac{\alpha}{3 - 2\alpha};$$

$$J_x = \frac{1}{6} \int_0^{L/2} b^3 dx = \frac{L B^3}{12} \frac{\alpha^3}{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)}.$$

У такого корабля коэффициент продольной полноты  $\varphi$  и коэффициент полноты ватерлинии  $\alpha$  одинаковы. Поэтому для него справедливы равенства  $K_1^c(\varphi) = K_1^c(\alpha)$  и  $K_1^{xs}(\varphi) = K_1^{xs}(\alpha)$ . Графики редуцированных коэффициентов  $K_1^c = K_1^c(\varphi) = K_1^c(\alpha)$ ;  $K_1^{xs} = K_1^{xs}(\varphi) = K_1^{xs}(\alpha)$  и  $K_3^c$  приведены на рис. 4.7—4.9.

Обозначения этих коэффициентов, как и введенных в § 20 редуцированных коэффициентов для дифракционной части возмущающих сил, строят по следующему весьма удобному принципу. Нижний индекс при  $K$  соответствует степени  $b$  (или  $\omega$  для  $K_1$ ) в подынтегральной функции; наличие в этой функции сомножителя  $\cos k_1 x$  отмечают буквой  $c$ , а сомножителя  $x \sin k_1 x$  — буквами  $xs$  в верхнем индексе.

Теперь, воспользовавшись соотношениями (4.97), можем переписать формулы (4.93) в простом и удобном для практических расчетов виде:

$$\left. \begin{aligned} A_2^c &= \kappa_2 K_1^c V; & A_2^{xs} &= \kappa_2 K_1^{xs} k_1 J_v; \\ A_3^c &= \kappa_3 K_1^c S_0; & A_3^{xs} &= \kappa_3 K_1^{xs} k_1 J_y; \\ A_4^c &= \kappa_{41} K_3^c J_x + \kappa_{42} K_1^c V z_c, \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

где

$$z_c = -\frac{T}{2(2 - \chi)}$$

При известных значениях  $A_j^c$  и  $A_j^{xs}$  (напомним, что для корабля, симметричного относительно миделя,  $A_j^s$  и  $A_j^{xc}$ , как интегралы от нечетных функций, обращаются в нуль) главная часть возмущающих сил для поперечно-горизонтальной качки и рысканья определяется по формулам (4.67), для вертикальной и килевой качки — по формулам (4.74) и для бортовой — по формуле (4.91).

## § 20. Дифракционная часть возмущающих сил

*Дифракцией волн* называется нарушение прямолинейности их распространения при прохождении мимо края препятствия. В рамках линейной теории, где применим принцип суперпозиции, можно считать, что эффект взаимодействия волн с препятствием приводит к возникновению вторичного волнового движения, потенциал скоростей которого суммируется с потенциалом скоростей свободно распространяющихся волн. Это вторичное волновое движение в гидродинамической теории качки называют *дифрагированным*, а обусловленную им часть возмущающих сил — *дифракционной частью* или *дифракционными силами*.

Если обозначить давление дифрагированных волн через  $p^0$ , то, очевидно, главный вектор и главный момент дифракционных сил будут определяться выражениями

$$\mathbf{F}^0 = - \int_S p^0 \mathbf{n} dS; \quad \mathbf{M}^0 = - \int_S p^0 (\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}) dS.$$

Проекции векторов  $\mathbf{F}^0$  и  $\mathbf{M}^0$  на координатные оси обозначим одним символом  $F_j^0$ , где, как обычно, индексы 1, 2, 3 означают проекции силы, а 4, 5, 6 — проекции момента соответственно на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Выразив в соответствии с формулами (4.32) компоненты векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{r}_S \times \mathbf{n}$  через нормальные производные функций излучения, будем иметь

$$F_j^0 = - \iint_S p^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (j = 1, 2, \dots, 6).$$

Если давление дифрагированных волн выразить с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа—Коши через их потенциал  $\Phi^0$ , получим

$$p^0 = -\rho \left( \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right)$$

и

$$F_j^0 = \rho \iint_S \left( \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS.$$

Набегающие на корабль и дифрагированные волны имеют одинаковую частоту. Поэтому потенциал скоростей дифрагированного волнового движения можно представить в виде

$$\Phi^0(x, y, z, t) = \Phi^0(x, y, z) e^{i\sigma t}. \quad (4.99)$$

В этом случае

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial t} = i\sigma \Phi^0 e^{i\sigma t}; \quad \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} e^{i\sigma t}$$

и, следовательно,

$$F_j^0 = \rho (i\sigma Q_j - \nu R_j) e^{i\sigma t}, \quad (4.100)$$

где

$$Q_j = \iint_S \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS; \quad R_j = \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS.$$

Для определения функции  $R_j$  воспользуемся теоремой Стокса о связи линейного интеграла с поверхностным. Согласно этой теореме линейный интеграл от вектора по замкнутому контуру (циркуляция вектора) равен потоку вихря этого вектора через поверхность, опирающуюся на данный контур. Смоченная поверхность корабля  $S$  опирается на контур ватерлинии равновесия  $C$ . Поэтому можем написать

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{C} = \iint_S \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где  $\mathbf{a}$  — непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка векторная функция координат.

Запишем формулу Стокса через проекции:

$$\begin{aligned} \int_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS. \end{aligned}$$

Поскольку контур ватерлинии лежит в плоскости  $Oxy$ , очевидно, что на этом контуре  $dz = 0$ . Сохраним предположение о большом удлинении корабля, т. е. о том, что на смоченной поверхности  $S$ , включая ограничивающий ее контур ватерлинии,  $\cos(n, x) = 0$ . Тогда  $dy = \cos(n, x) dC = 0$ . Далее, полагая  $a_x = 0$ , будем иметь

$$\iint_S \left[ -\frac{\partial a_z}{\partial x} \cos(n, y) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cos(n, z) \right] dS = 0. \quad (4.101)$$

Рассмотрим теперь, пользуясь последней формулой, выражения для  $R_j$  при  $j = 2, 3, \dots, 6$  (очевидно, что  $R_1$  так же, как и  $Q_1$ , при  $\cos(n, x) = 0$  обращается в нуль). Пусть  $a_z = \varphi^0$ ,  $a_y = 0$ . В этом случае формула приобретает вид

$$\iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \cos(n, y) dS = 0.$$

Но согласно (4.15)  $\cos(n, y) = \partial \Phi_2 / \partial n$  и, следовательно,

$$R_2 = \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = 0.$$

Аналогичным путем, полагая в формуле (4.101)  $a_y = \varphi^0$ ;  $a_z = 0$ , получим

$$\iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \cos(n, z) dS = 0.$$

Вследствие того, что  $\cos(n, z) = \partial \Phi_3 / \partial n$ , можем написать

$$R_3 = \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = 0.$$

Если, наконец, в формуле (4.101) принять  $a_y = \varphi^0 y$ ,  $a_z = \varphi^0 z$ , то это, как нетрудно видеть, приведет к равенству

$$\iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dS = 0.$$

Но выражение в квадратных скобках, входящее сомножителем в подынтегральную функцию, равно  $\partial \Phi_4 / \partial n$ , а это значит, что

$$R_4 = \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} dS = 0.$$

Напомним, что для корабля большого удлинения имеют место равенства

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = -x \cos(n, z); \quad \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} = x \cos(n, y)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} R_5 &= - \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} x \cos(n, z) dS; \\ R_6 &= \iint_S \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} x \cos(n, y) dS. \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

Воспользовавшись далее основанным на правиле дифференцирования произведения соотношением

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial x} x = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) - \varphi^0,$$

перепишем равенства (4.102) в виде:

$$R_5 = - \iint_S \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) \cos(n, z) dS + \iint_S \varphi^0 \cos(n, z) dS;$$

$$R_6 = \iint_S \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) \cos(n, y) dS - \iint_S \varphi^0 \cos(n, y) dS.$$

Покажем, что первые члены в правых частях этих равенств обра-

щаются в нуль. Действительно, полагая в формуле (4.101)  $a_y = \varphi^0 x$ ,  $a_z = 0$ , убедимся, что

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) \cos(n, z) dS = 0.$$

Если же в упомянутой формуле положить  $a_z = \varphi^0 x$ ,  $a_y = 0$ , будем иметь

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial x} (\varphi^0 x) \cos(n, y) dS = 0.$$

Таким образом, можем написать:

$$R_5 = Q_3; R_6 = -Q_2.$$

С учетом полученных значений  $R_j$  формула (4.100) для проекций дифракционной части возмущающей силы примет следующий окончательный вид:

$$\left. \begin{aligned} F_j^0 &= i\rho\sigma Q_j e^{i\sigma t}, \quad (j=2, 3, 4); \\ F_5^0 &= \rho(i\sigma Q_5 - \nu Q_3) e^{i\sigma t} = i(\rho\sigma Q_5 e^{i\sigma t} + \nu\sigma^{-1} F_3^0); \\ F_6^0 &= \rho(i\sigma Q_6 + \nu Q_2) e^{i\sigma t} = i(\rho\sigma Q_6 e^{i\sigma t} - \nu\sigma^{-1} F_2^0). \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

Для вычисления функций  $Q_j$  необходимо знать амплитудную часть  $\varphi^0$  потенциала скоростей дифрагированного волнового движения, определение которой связано со значительными трудностями. Вместе с тем, значения нормальной производной этого потенциала на поверхности  $S$  легко определяются через известный потенциал скоростей набегающих волн. По этой причине, воспользовавшись формулой

$$\iint_S \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \iint_S \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS, \quad (4.104)$$

справедливой для двух гармонических функций  $\Phi_j$  и  $\varphi^0$ , представим  $Q_j$  в виде

$$Q_j = \iint_S \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS. \quad (4.105)$$

Определим теперь нормальную производную функции  $\varphi^0$  на смоченной поверхности  $S$ . Согласно равенствам (4.7) и (4.99)

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial n}; \quad \Phi^0 = \varphi^0 e^{i\sigma t}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} e^{-i\sigma t}. \quad (4.106)$$

Далее, полагая  $\cos(n, x) = 0$ , можем написать

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \cos(n, z).$$

Воспользовавшись выражением (1.14) для  $\Phi^*$  и имея в виду, что волновое число  $k$  и истинная частота волны  $\sigma_0$  связаны соотношением  $k = \sigma_0^2/g$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} &= -ik_2 \Phi^* \cos(n, y) + k \Phi^* \cos(n, z) = \\ &= r\sigma_0 e^{kz+i(\sigma t - kx - k_2 y)} [\sin \epsilon \cos(n, y) + i \cos(n, z)]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

На основании равенств (4.106) и (4.107) придем к следующей окончательной формуле для  $\partial \Phi^0 / \partial n$ :

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = -r\sigma_0 e^{-ik_2 x} f^0, \quad (4.108)$$

где обозначено

$$f^0 = e^{kz - ik_2 y} [\sin \epsilon \cos(n, y) + i \cos(n, z)]. \quad (4.109)$$

Подставив теперь выражение (4.108) в (4.105), получим

$$Q_j = -r\sigma_0 \iint_S \Phi_j e^{-ik_2 x} f^0 dS.$$

Переходя на основании формулы (2.6) к методу плоских сечений, можем написать:

$$\left. \begin{aligned} Q_j &= -r\sigma_0 \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_2 x} q_j dx, \quad (j=2, 3, 4); \\ Q_5 &= r\sigma_0 \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_2 x} q_5 x dx; \quad Q_6 = -r\sigma_0 \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_2 x} q_2 x dx, \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

где

$$q_j = \int_l \Phi_j f^0 dl. \quad (4.111)$$

Выражения для  $Q_5$  и  $Q_6$  здесь получены на основании справедливых для корабля большого удлинения равенств

$$\Phi_5 = -x\Phi_3; \quad \Phi_6 = x\Phi_2.$$

С целью приближенного определения функций излучения,  $\Phi_2 \div \Phi_4$  представим их в виде

$$\Phi_2 = -c_2 y; \quad \Phi_3 = -c_3 z; \quad \Phi_4 = -c_4 yz, \quad (4.112)$$

аналогичном представлению (2.11), справедливому для эллипса, движущегося в безграничной жидкости. Отметим, однако, сразу существенное отличие функций излучения от единичных потенциалов скоростей возмущенного движения безграничной жидкости.

При колебаниях контура на свободной поверхности коэффициенты  $c_2$  —  $c_4$  являются комплексными величинами и выражаются через его присоединенные массы  $\mu_{jk}$  и коэффициенты демпфирования  $\lambda_{jk}$ , в случае безграничной жидкости — действительными и выражаются только через геометрические характеристики контура, или иначе через его присоединенные массы.

Действительно, подставив выражения (4.112) в формулу

$$-\rho \int_l \Phi_j \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} dl = \mu_{jk} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jk}$$

и учитывая равенства (4.15), получим:

$$\rho c_2 \int_l y \cos(n, y) dl = \mu_{22} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{22};$$

$$\rho c_3 \int_l z \cos(n, z) dl = \mu_{33} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{33}.$$

Поскольку интегралы по отрезку ватерлинии, замыкающему контур, в данном случае равны нулю, можем написать

$$\int_l y \cos(n, y) dl = \int_l z \cos(n, z) dl = \int_l \int_l d\omega = \omega$$

и, следовательно,

$$c_2 = \frac{1}{\rho\omega} \left( \mu_{22} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{22} \right); \quad c_3 = \frac{1}{\rho\omega} \left( \mu_{33} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{33} \right). \quad (4.113)$$

Наконец, используя представление (4.112) для функции  $\Phi_4$  будем иметь

$$\rho c_4 \int_l yz \cos(n, y) dl = \mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24},$$

но этот интеграл по отрезку, замыкающему контур  $l$ , также равен нулю. Таким образом,

$$\int_l yz \cos(n, y) dl = \int_l \int_l z d\omega = \omega z_\omega$$

и

$$c_4 = \frac{1}{\rho\omega z_\omega} \left( \mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24} \right), \quad (4.114)$$

где  $\omega z_\omega$  — статический момент погруженной площади шпангоута относительно ватерлинии.

Если в формулах (4.113) и (4.114) положить  $\lambda_{jk} = 0$ , получим выражения, справедливые для движения контура в безграничной жидкости или для колебаний на свободной поверхности с очень малой либо очень большой частотой, когда волнообразование практически отсутствует.

Численный эксперимент, при котором сопоставлялись значения дифракционных сил, определенные с использованием функций излучения в форме Урселла и в принятой выше форме, показал, что последняя дает вполне приемлемую для практических расчетов точность.

Подставим теперь выражения (4.109) для  $f^0$  и (4.112) для  $\Phi_j$  в формулу (4.111). Тогда получим:

$$q_2 = -c_2 \int y e^{kz - ik_2 y} [\sin \varepsilon \cos(n, y) + i \cos(n, z)] dl;$$

$$q_3 = -c_3 \int z e^{kz - ik_2 y} [\sin \varepsilon \cos(n, y) + i \cos(n, z)] dl;$$

$$q_4 = -c_4 \int y z e^{kz - ik_2 y} [\sin \varepsilon \cos(n, y) + i \cos(n, z)] dl.$$

Преобразуем контурные интегралы, входящие в последние равенства, в интегралы по погруженной площади шпангоута  $\omega$ , предварительно замкнув, как мы это уже неоднократно делали, контур отрезком  $-b/2 \leq y \leq b/2$ ,  $z = 0$  и имея в виду, что на этом отрезке  $\cos(n, y) = 0$ , а  $\cos(n, z) = 1$ . Тогда, воспользовавшись формулой Остроградского—Гаусса для плоскости, можем написать:

$$q_2 = -c_2 \iint_{\omega} \left( \sin \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) y e^{kz - ik_2 y} d\omega + ic_2 \int_{-b/2}^{b/2} y e^{-ik_2 y} dy; \quad (4.115)$$

$$q_3 = -c_3 \iint_{\omega} \left( \sin \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) z e^{kz - ik_2 y} d\omega; \quad (4.116)$$

$$q_4 = -c_4 \iint_{\omega} \left( \sin \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) y z e^{kz - ik_2 y} d\omega. \quad (4.117)$$

Закончив на этом вывод общих выражений для дифракционных сил, перейдем к определению этих сил при различных видах качки.

**Поперечно-горизонтальная качка и рысканье.** На основании формул (4.115) и (4.57) будем иметь следующее выражение для функции  $q_2$ :

$$q_2 = -c_2 \sin \varepsilon \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y (1 - ik_2 \eta) e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \\ - ic_2 \left( k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b}^{b/2} \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta \right).$$

Представим это выражение в форме

$$q_2 = -c_2 (q_{21} \sin \varepsilon + iq_{22}), \quad (4.118)$$

где, очевидно,

$$q_{21} = \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y (1 - ik_2 \eta) e^{-ik_2 \eta} d\eta dz; \quad (4.119)$$

$$q_{22} = k \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \int_{-b/2}^{b/2} \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta. \quad (4.120)$$

Для определения функции  $q_{21}$  воспользуемся формулами (2.77) и (2.78), согласно которым

$$\int_{-y}^y e^{-ik_2\eta} d\eta = \frac{2}{k_2} \sin k_2 y;$$

$$\int_{-y}^y \eta e^{-ik_2\eta} d\eta = \frac{2i}{k_2^2} (k_2 y \cos k_2 y - \sin k_2 y).$$

Таким образом

$$\int_{-y}^y (1 - ik_2\eta) e^{-ik_2\eta} d\eta = 2y \cos k_2 y \quad (4.121)$$

и

$$q_{21} = 2 \int_{-T}^0 e^{kz} y \cos k_2 y dz.$$

Нетрудно показать, что в случае, когда размеры шпангоута пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны, предельным значением функции  $q_{21}$  будет погруженная площадь шпангоута  $\omega$ . Действительно,

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} 2 \int_{-T}^0 e^{kz} y \cos k_2 y dz = 2 \int_{-T}^0 y dz = \omega.$$

4.10. Редукционный коэффициент  $\kappa_5$ .

В связи с этим при произвольном соотношении размеров шпангоута и длины волны представим функцию  $q_{21}$  в виде

$$q_{21} = \omega \kappa_5, \quad (4.122)$$

где  $\kappa_5$  — редукционный коэффициент, определяемый формулой

$$\kappa_5 = \frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 e^{kz} y \cos k_2 y dz. \quad (4.123)$$

График значений этого коэффициента для шпангоутов полуэллиптической формы приведен на рис. 4.10.

Функция  $q_{22}$ , как видно из равенств (4.120) и (4.80), полностью совпадает с определенной ранее функцией  $h_{41}$ . Поэтому, руководствуясь формулой (4.83), можем написать

$$q_{22} = \frac{ik_2 b^3}{12} \kappa_{41}. \quad (4.124)$$

Подставляя выражения (4.122) и (4.124) в равенство (4.118), получим

$$q_2 = -c_2 \omega \left( \kappa_5 - \frac{kb^3}{12\omega} \kappa_{41} \right) \sin \varepsilon = -c_2 \omega \kappa_2^0 \sin \varepsilon, \quad (4.125)$$

где для удобства введено обозначение

$$\kappa_2^0 = \kappa_5 - \frac{kb^3}{12\omega} \kappa_{41}. \quad (4.126)$$

Коэффициент  $\kappa_2^0$  и введенные ниже коэффициенты  $\kappa_3^0$  и  $\kappa_4^0$  не являются редуцированными коэффициентами, так как значения последних, всегда должны быть меньше единицы. Иными словами, в теории качки редуцированными принято называть коэффициенты, учитывающие уменьшение амплитуды возмущающей силы, действующей на контур сравнимых с длиной волны размеров, по отношению к амплитуде силы, действующей на контур пренебрежимо малых размеров. Что же касается коэффициентов  $\kappa_k^0$ , то, обращаясь в единицу для контура пренебрежимо малых размеров, они могут быть как меньше, так и больше единицы для контура, соизмеримого с длиной волны. Поэтому коэффициенты  $\kappa_k^0$  следует называть не редуцированными, а просто поправочными коэффициентами, учитывающими влияние конечности размеров контура на амплитуду дифракционной части возмущающей силы при соответствующем виде качки ( $k = 2$  при поперечно-горизонтальной и рысканьи,  $k = 3$  при вертикальной и килевой,  $k = 4$  при бортовой).

Возвратимся теперь к рассмотрению поперечно-горизонтальной качки и рысканья. Подставляя значение  $c_2$ , определяемое равенством (4.113), в (4.125), получим

$$q_2 = -\frac{\kappa_2^0}{\rho} \left( \mu_{22} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{22} \right) \sin \varepsilon. \quad (4.127)$$

Далее на основании (4.110) найдем произведение  $\rho \sigma Q_2$ :

$$\begin{aligned} \rho \sigma Q_2 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_2^0 e^{-ik_1 x} (\sigma \mu_{22} - i \lambda_{22}) dx = \\ &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_2^0 [\sigma \mu_{22} \cos k_1 x - \lambda_{22} \sin k_1 x - \\ &\quad - i (\sigma \mu_{22} \sin k_1 x + \lambda_{22} \cos k_1 x)] dx. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Произведение  $\rho \sigma Q_2$  будет отличаться от  $\rho \sigma Q_2$  лишь наличием множителя  $x$  в подынтегральной функции.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 M_{jk}^s \} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \mu_{jk} \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \\
 M_{jk}^c \} \\
 \Lambda_{jk}^s \} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \lambda_{jk} \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \\
 \Lambda_{jk}^c \}
 \end{aligned} \right\} (jk = 22, 33, 24) \\
 \\
 \left. \begin{aligned}
 M_{jk}^{xs} \} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \mu_{jk} x \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \\
 M_{jk}^{xc} \} \\
 \Lambda_{jk}^{xs} \} &= \int_{-L/2}^{L/2} \kappa_k^0 \lambda_{jk} x \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx. \\
 \Lambda_{jk}^{xc} \}
 \end{aligned} \right\} (jk = 22, 33)
 \end{aligned} \right\} (4.129)$$

Принцип построения этих обозначений аналогичен принятому ранее при определении главной части возмущающих сил. Если в подынтегральную функцию входит  $\mu_{jk}$  или  $\lambda_{jk}$ , то интеграл обозначается через  $M_{jk}$  или  $\Lambda_{jk}$ . Наличие в подынтегральной функции множителя  $\sin k_1 x$  или  $\cos k_1 x$  отмечается буквами  $s$  или  $c$  в верхнем индексе; если под интегралом имеется множитель  $x$ , то он тоже выносится в верхний индекс. Кроме того, подынтегральные функции всегда содержат множитель  $\kappa_k^0$ . Таким образом, вводимые здесь обозначения несут еще более обширную информацию об обозначаемой величине, чем введенные ранее обозначения  $A_j^s$ ,  $A_j^c$ ,  $A_j^{xs}$ ,  $A_j^{xc}$ . Дело в том, что для полной расшифровки последних необходимо знать, что понимается под коэффициентом  $a_j$  при тригонометрических функциях, тогда как все множители, входящие под интегралы, обозначаемые через  $M_{jk}$  и  $\Lambda_{jk}$  с соответствующими верхними индексами, очевидны из самих обозначений.

С использованием этих обозначений формула (4.128) приобретает вид

$$\rho\sigma Q_2 = r\sigma_0 \sin \varepsilon [M_{22}^c \sigma - \Lambda_{22}^s - i (M_{22}^s \sigma + \Lambda_{22}^c)],$$

а формула для  $\rho\sigma Q_6$  будет отличаться от последней только наличием символа  $x$  в верхних индексах.

Подставив эти значения  $\rho\sigma Q_2$  и  $\rho\sigma Q_6$  в равенства (4.103), получим следующие окончательные выражения для дифракционной части возмущающей силы при поперечно-горизонтальной качке и рысканьи:

$$F_2^0 = r\sigma_0 \sin \varepsilon [M_{22}^s \sigma + \Lambda_{22}^c + i (M_{22}^c \sigma - \Lambda_{22}^s)] e^{i\sigma t}; \quad (4.130)$$

$$F_6^0 = r\sigma_0 \sin \varepsilon [M_{22}^{xs} \sigma + \Lambda_{22}^{xc} + i (M_{22}^{xc} \sigma - \Lambda_{22}^{xs})] e^{i\sigma t} - i\sigma^{-1} F_2^0.$$

В случае продольного волнения  $\sin \varepsilon = 0$  и, следовательно,  $F_2^0 = F_6^0 = 0$ . При положении корабля лагом к волне, когда  $\varepsilon = 90^\circ$ , т. е.  $\sin k_1 x = \sin (kx \cos \varepsilon) = 0$  и  $\cos k_1 x = (kx \cos \varepsilon) = 1$ , имеем

$$M_{jk}^s = M_{jk}^{xs} = \Lambda_{jk}^s = \Lambda_{jk}^{xs} = 0.$$

Если аналогично тому, как это сделано при определении главной части возмущающих сил, сохранить за средними по длине корабля значениями поправочных коэффициентов обозначение  $\kappa_k^0$ , то для корабля, расположенного лагом к волне, можем написать

$$M_{22}^c = \kappa_2^0 \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{22} dx = \kappa_2^0 M_{22};$$

$$\Lambda_{22}^c = \kappa_2^0 \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{22} dx = \kappa_2^0 \Lambda_{22};$$

$$M_{22}^{xc} = \kappa_2^0 \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{22} x dx = \kappa_2^0 M_{26};$$

$$\Lambda_{22}^{xc} = \kappa_2^0 \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{22} x dx = \kappa_2^0 \Lambda_{26}.$$

Тогда выражения (4.130) примут вид:

$$F_2^0 = r\sigma_0 \kappa_2^0 (\Lambda_{22} + iM_{22}\sigma) e^{i\sigma t};$$

$$F_6^0 = r\sigma_0 \kappa_2^0 (\Lambda_{26} + iM_{26}\sigma) e^{i\sigma t} - i\nu\sigma^{-1} F_2^0.$$

**Вертикальная и килевая качка.** Для определения функции  $q_3$  воспользуемся равенствами (4.116) и (4.57). Получим

$$\begin{aligned} q_3 &= -c_3 \iint_{\omega} \left( \sin \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) z e^{kz - ik_2 y} d\omega = \\ &= -c_3 \left( -ik_2 \sin \varepsilon \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz \right) - \\ &\quad - ic_3 \int_{-T}^0 (1 + kz) e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz. \end{aligned}$$

Запишем последнее выражение в виде

$$q_3 = -ic_3 (-q_{31} k \sin^2 \varepsilon + q_{32}),$$

где

$$q_{31} = \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz;$$

$$\begin{aligned} q_{32} &= \int_{-T}^0 (1 + kz) e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz = \\ &= \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz + kq_{31}. \end{aligned}$$

Интеграл  $q_{31}$ , как видно из формулы (4.81), в точности совпадает с рассмотренным при расчете главной части возмущающей силы для бортовой качки интегралом  $h_{42}$ . Таким образом, руководствуясь равенством (4.87), можем написать

$$q_{31} = \omega z_{\omega} \kappa_{42}.$$

Воспользовавшись полученными ранее результатами, нетрудно получить простое выражение и для функции  $q_{32}$ . Действительно, принимая во внимание равенства (4.58) и (4.61), найдем

$$\int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2 \eta} d\eta dz = \frac{i}{k_2} h_2 = \omega \kappa_2.$$

Тогда

$$q_{32} = \omega \kappa_2 + k q_{31} = \omega (\kappa_2 + k z_{\omega} \kappa_{42})$$

и

$$q_3 = -i c_3 \omega (\kappa_2 + k z_{\omega} \kappa_{42} \cos^2 \varepsilon) = -i c_3 \omega \kappa_3^0, \quad (4.131)$$

где, очевидно,

$$\kappa_3^0 = \kappa_2 + k z_{\omega} \kappa_{42} \cos^2 \varepsilon. \quad (4.132)$$

Хотя последнее выражение вполне пригодно для использования в расчетах, его целесообразно преобразовать к несколько иному виду, более удобному для практических вычислений, особенно при расположении корабля лагом к волне и на продольном волнении. Как видно из формулы (4.88),

$$k z_{\omega} \kappa_{42} = \frac{2k}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dz.$$

Возьмем этот интеграл по частям, полагая

$$z \sin k_2 y = u; \quad e^{kz} dz = dv. \quad |$$

Тогда, очевидно,

$$\left( \sin k_2 y + k_2 z \cos k_2 y \frac{dy}{dz} \right) dz = du, \quad \frac{1}{k} e^{kz} = v.$$

Учитывая, что в данном случае произведение  $uv$  равно нулю как при верхнем, так и при нижнем пределе интегрирования, получим

$$\begin{aligned} k z_{\omega} \kappa_{42} &= -\frac{2}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz - \\ &= -\frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz = -\kappa_2 + \kappa_0, \end{aligned} \quad (4.133)$$

где  $\kappa_2$  определяется равенством (4.62), а

$$\kappa_0 = -\frac{2}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz = -\frac{b}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y dZ(z). \quad (4.134)$$

Но, как легко видеть,

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 z e^{kz} \cos k_2 y \frac{dy}{dz} dz = \int_0^{b/2} z dy = -\frac{\omega}{2}$$

и, следовательно, для контура пренебрежимо малых по сравнению с длиной волны размеров  $\kappa_6 = 1$ . Выражение (4.133) дает возможность переписать формулу (4.132) в более удобном виде

$$\kappa_3^0 = \kappa_2 \sin^2 \varepsilon + \kappa_6 \cos^2 \varepsilon. \quad (4.135)$$

Значения  $\kappa_6$  для полуэллиптических шпангоутов приведены на рис. 4.11.

Подставив выражение (4.113) для  $c_3$  в равенство (4.131), получим

$$q_3 = -i \frac{\kappa_3^0}{\rho} \left( \mu_{33} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{33} \right).$$

Если теперь подставить последнее равенство в формулы (4.110) и воспользоваться обозначениями (4.129), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \rho \sigma Q_3 &= r \sigma_0 [M_{33}^s \sigma + \Lambda_{33}^c + \\ &+ i (M_{33}^c \sigma - \Lambda_{33}^s)]; \\ \rho \sigma Q_5 &= -r \sigma_0 [M_{33}^{xs} \sigma + \\ &+ \Lambda_{33}^{xc} + i (M_{33}^{xc} \sigma - \Lambda_{33}^{xs})]. \end{aligned} \right\} \quad (4.136)$$

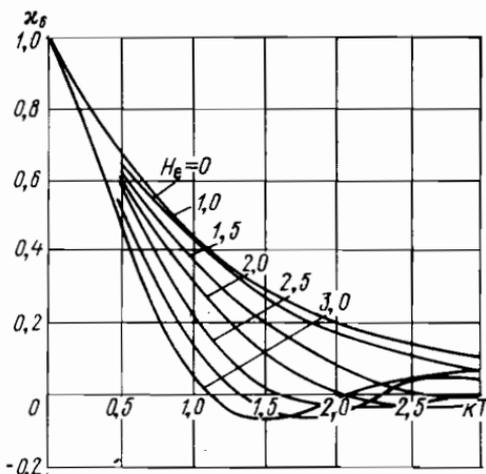
Если значения  $Q_3$  и  $Q_5$  известны, не составляет труда на основании формул (4.103)

получить окончательные выражения для дифракционной части возмущающей силы при вертикальной и килевой качке:

$$\left. \begin{aligned} F_3^0 &= -r \sigma_0 [M_{33}^c \sigma - \Lambda_{33}^s - i (M_{33}^s \sigma + \Lambda_{33}^c)] e^{i\sigma t}; \\ F_5^0 &= r \sigma_0 [M_{33}^{xc} \sigma - \Lambda_{33}^{xs} - i (M_{33}^{xs} \sigma + \Lambda_{33}^{xc})] e^{i\sigma t} + i \nu \sigma^{-1} F_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.137)$$

Рассмотрим теперь частные случаи расположения корабля лагом к волне и на продольном волнении. Во-первых, в этих случаях упрощается определение поправочного коэффициента  $\kappa_3^0$ . Действительно, как видно из (4.135), при расположении корабля лагом  $\kappa_3^0 = \kappa_2$ , а на продольном волнении  $\kappa_3^0 = \kappa_6$ . Кроме того, вынося в равенствах (4.129) осредненное значение редуционного коэффициента  $\kappa_2$  из-под знаков интеграла и учитывая, что для корабля, расположенного лагом,  $\cos k_1 x = 1$ , а  $\sin k_1 x = 0$ , получим:

$$M_{33}^c = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{33} dx = \kappa_2 M_{33};$$



4.11. Редуционный коэффициент  $\kappa_6$

$$\Lambda_{33}^c = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{33} dx = \kappa_2 \Lambda_{33};$$

$$M_{33}^{xc} = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} x \mu_{33} dx = -\kappa_2 M_{35};$$

$$\Lambda_{33}^{xc} = \kappa_2 \int_{-L/2}^{L/2} x \lambda_{33} dx = -\kappa_2 \Lambda_{35};$$

$$M_{33}^s = \Lambda_{33}^s = M_{33}^{xs} = \Lambda_{33}^{xs} = 0.$$

В этом случае выражения (4.137) для  $F_3^0$  и  $F_5^0$  приводятся к более простому виду:

$$\left. \begin{aligned} F_3^0 &= -r \sigma_0 \kappa_2 (M_{33} \sigma - i \Lambda_{33}) e^{i \sigma t}; \\ F_5^0 &= -r \sigma_0 \kappa_2 (M_{35} \sigma - i \Lambda_{35}) e^{i \sigma t} - i v \sigma^{-1} F_3^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

При ходе корабля на продольном волнении формулы для  $F_3^0$  и  $F_5^0$  сохраняют вид (4.137), однако имеется возможность уточнить значения редуцированного коэффициента  $\kappa_3^0 = \kappa_8$  за счет перехода от эллиптической аппроксимации шпангоутов к параболической, позволяющей учесть их истинные коэффициенты полноты. В самом деле, при  $k_2 = k \sin \varepsilon = 0$  согласно выражению (4.134) имеем

$$\kappa_8 = -\frac{b}{\omega} \int_{-T}^0 z e^{kz} dZ(z).$$

Если функцию  $Z(z)$ , характеризующую форму шпангоута, представить в виде (4.77), то нетрудно получить выражение

$$z dZ(z) = z \frac{m}{T^m} (-z)^{m-1} dz.$$

Вводя новую переменную интегрирования  $\zeta = -kz$ , можем написать

$$z dZ(z) = \frac{m \zeta^m}{k^{m+1} T^m} d\zeta.$$

Учитывая далее, что

$$\frac{b}{\omega} = \frac{1}{\beta T} = \frac{m+1}{mT},$$

окончательно получим

$$\kappa_8 = \frac{m+1}{(kT)^{m+1}} \int_0^{kT} e^{-\zeta} \zeta^m d\zeta = \frac{m+1}{(kT)^{m+1}} \gamma_1^*(m+1, kT),$$

где  $\gamma(m+1, kT)$  — неполная гамма-функция, значения которой определяются равенством (4.78).

**Бортовая качка.** Для нахождения дифракционной части возмущающей силы при бортовой качке в первую очередь требуется определить функцию  $q_4$ , которую, пользуясь равенствами (4.117) и (4.57), можно представить выражением

$$\begin{aligned} q_4 &= -c_4 \int_{\omega} \left( \sin \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial z} \right) y z e^{kz - ik_2 y} d\omega = \\ &= -c_4 \sin \varepsilon \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y (1 - ik_2 \eta) e^{-ik_2 \eta} d\eta dz - \\ &\quad - ic_4 \int_{-T}^0 (1 + kz) e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz \end{aligned}$$

Запишем это выражение в виде

$$q_4 = -c_4 (q_{41} \sin \varepsilon + i q_{42}), \quad (4.139)$$

где

$$q_{41} = \int_{-T}^0 z e^{kz} \int_{-y}^y (1 - ik_2 \eta) e^{-ik_2 \eta} d\eta dz; \quad (4.140)$$

$$q_{42} = \int_{-T}^0 (1 + kz) e^{kz} \int_{-y}^y \eta e^{-ik_2 \eta} d\eta dz. \quad (4.141)$$

Но согласно (4.121)

$$\int_{-y}^y (1 - ik_2 \eta) e^{-ik_2 \eta} d\eta = 2y \cos k_2 y$$

и, следовательно,

$$q_{41} = 2 \int_{-T}^0 y z e^{kz} \cos k_2 y dz,$$

или

$$q_{41} = \omega z_{\omega} \kappa_7 \quad (4.142)$$

где

$$\kappa_7 = \frac{2}{\omega z_{\omega}} \int_{-T}^0 y z e^{kz} \cos k_2 y dz. \quad (4.143)$$

Как нетрудно видеть,

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2 y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 y z e^{kz} \cos k_2 y dz = \frac{\omega z_{\omega}}{2}$$

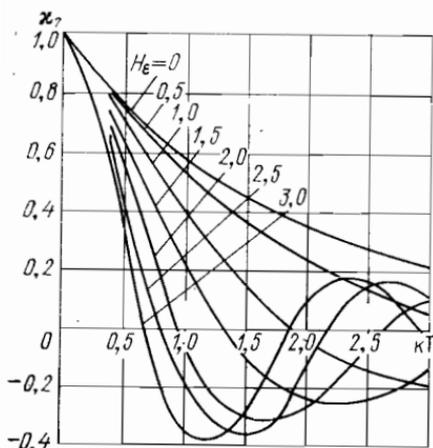
и, следовательно, в случае, когда ширина и осадка контура пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны, коэффициент  $\kappa_7$ , как и все остальные редуцированные коэффициенты, превращается в единицу. График зависимости этого коэффициента от параметров  $kT$  и  $H_{\varepsilon}$  приведен на рис. 4.12. Этот график относится к полуэллиптическим шпангоутам.

Перейдем теперь к определению функции  $q_{42}$ . Согласно формуле (2.78) имеем

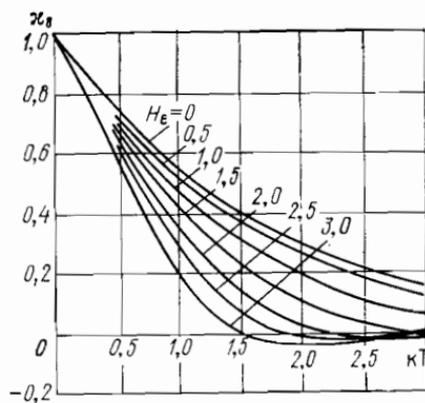
$$\int_{-y}^y \eta e^{-ik_2\eta} d\eta = \frac{2i}{k_2^2} (k_2y \cos k_2y - \sin k_2y).$$

Подставив это значение интеграла в формулу (4.141), получим

$$q_{42} = \frac{2i}{k_2^2} \int_{-T}^0 (1+kz) e^{kz} (k_2y \cos k_2y - \sin k_2y) dz.$$



4.12. Редукционный коэффициент  $x_7$ .



4.13. Редукционный коэффициент  $x_8$ .

Возьмем последний интеграл по частям, полагая

$$k_2y \cos k_2y - \sin k_2y = u; \quad (1+kz) e^{kz} dz = dv.$$

Тогда, очевидно,

$$-k_2^2y \sin k_2y \frac{dy}{dz} dz = du; \quad ze^{kz} = v.$$

Поскольку при нижнем пределе интегрирования обращается в нуль  $u$ , а при верхнем  $v$ , будем иметь

$$q_{42} = 2i \int_{-T}^0 yze^{kz} \sin k_2y \frac{dy}{dz} dz. \quad (4.144)$$

Найдем предел, к которому стремится интеграл в этой формуле при неограниченном убывании размеров шпангоута:

$$\lim_{\substack{kz \rightarrow 0 \\ k_2y \rightarrow 0}} \int_{-T}^0 yze^{kz} \sin k_2y \frac{dy}{dz} dz = k_2 \int_{-T}^0 y^2z \frac{dy}{dz} dz.$$

Вновь применим правило интегрирования по частям, обозначив

$$z = u; \quad y^2 \frac{dy}{dz} dz = dv.$$

В этом случае

$$dz = du; \quad \frac{y^3}{3} = v.$$

Принимая во внимание, что произведение  $uv$  обращается в нуль при верхнем и нижнем пределах интегрирования, получим

$$\int_{-T}^0 y^2 z \frac{dy}{dz} dz = -\frac{1}{3} \int_{-T}^0 y^3 dz = -\frac{j_z}{2},$$

где  $j_z$  — момент инерции площади шпангоута относительно вертикальной оси симметрии.

Введем еще один редуцированный коэффициент  $\kappa_8$ , определяя его формулой

$$\begin{aligned} \kappa_8 &= -\frac{2}{k_2 j_z} \int_{-T}^0 y z e^{kz} \sin k_2 y \frac{dy}{dz} dz = \\ &= -\frac{b^2}{2k_2 j_z} \int_{-T}^0 z e^{kz} \sin k_2 y dZ^2(z). \end{aligned} \quad (4.145)$$

График этого коэффициента для полуэллиптических шпангоутов приведен на рис. 4.13.

С использованием коэффициента  $\kappa_8$  равенство (4.144) можно записать в виде

$$q_{42} = -ik_2 j_z \kappa_8. \quad (4.146)$$

Если теперь подставить значения функций  $q_{41}$  и  $q_{42}$ , определяемые равенствами (4.142) и (4.146), в формулу (4.139), получим

$$q_4 = -c_4 (\omega z_\omega \kappa_7 \sin \varepsilon + k_2 j_z \kappa_8);$$

Введя обозначение

$$\kappa_4^0 = \kappa_7 + \frac{k j_z}{\omega z_\omega} \kappa_8, \quad (4.147)$$

перепишем выражение для  $q_4$  в более компактном виде

$$q_4 = -c_4 \omega z_\omega \kappa_4^0 \sin \varepsilon.$$

Для полуэллипса имеют место следующие соотношения:

$$j_z = \frac{\pi b^3 T}{64}; \quad \omega z_\omega = -\frac{b T^2}{3}; \quad \frac{j_z}{\omega z_\omega} = \frac{3}{64} \frac{\pi b^2}{T}.$$

Воспользовавшись равенством (4.114), можно выразить  $c_4$  через присоединенную массу и коэффициент демпфирования шпангоута

Тогда получим

$$q_4 = - \frac{\kappa_4^0}{\rho} \left( \mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24} \right) \sin \varepsilon.$$

Подставим теперь это выражение для  $q_4$  в равенство (4.110). Применяя обозначения (4.129), будем иметь

$$\rho \sigma Q_4 = r \sigma_0 \sin \varepsilon [M_{24}^c \sigma - \Lambda_{24}^s - i (M_{24}^s \sigma + \Lambda_{24}^c)].$$

Далее на основании (4.103) получим окончательную формулу для дифракционной части возмущающей силы при бортовой качке

$$F_4^0 = r \sigma_0 \sin \varepsilon [M_{24}^s \sigma + \Lambda_{24}^c + i (M_{24}^c \sigma - \Lambda_{24}^s)] e^{i \sigma t}. \quad (4.148)$$

Переходя к рассмотрению частных случаев расположения корабля на продольном волнении ( $\sin \varepsilon = 0$ ) и лагом к волне ( $\sin \varepsilon = 1$ ), сразу видим, что в первом случае  $F_4^0 = 0$ . Во втором случае, поскольку  $k_1 x = kx \cos \varepsilon = 0$ , имеем  $M_{24}^s = \Lambda_{24}^s = 0$ . Кроме того, вынося для простоты поправочный коэффициент  $\kappa_4^0$  из-под знаков интеграла, т. е. считая его для всех шпангоутов одинаковым, можем написать

$$M_{24}^c = \kappa_4^0 \int_{-L/2}^{L/2} \mu_{24} dx = \kappa_4^0 M_{24};$$

$$\Lambda_{24}^c = \kappa_4^0 \int_{-L/2}^{L/2} \lambda_{24} dx = \kappa_4^0 \Lambda_{24}.$$

Таким образом, для случая расположения корабля лагом формула (4.148) принимает следующий весьма простой вид:

$$F_4^0 = r \sigma_0 \kappa_4^0 (\Lambda_{24} + i M_{24} \sigma) e^{i \sigma t}.$$

Отметим, что между коэффициентами  $\kappa_2 \div \kappa_8$  имеется ряд зависимостей, которые можно установить, применяя правило интегрирования по частям. Например,

$$k_2 \omega \kappa_2 = \frac{2}{k} \sin \frac{k_2 b}{2} - \kappa_3 b \sin \varepsilon;$$

$$k \omega \kappa_5 = b \left( \cos \frac{k_2 b}{2} - \kappa_3 + \frac{k_2^2 b^2}{12} \kappa_{41} \right);$$

$$k z_\omega \kappa_7 = \kappa_8 - \kappa_5 - \frac{k_2^2 j z}{\omega} \kappa_8.$$

Поэтому выражения для  $h_j$  и  $q_j$  могут быть представлены в различной форме. Однако приведенная форма наиболее компактна и удобна для практических расчетов.

Рассмотрим теперь способы реализации решений для дифракционной части возмущающих сил. Как уже указывалось, вычисленные интегралов по осадке, входящих в редуцированные коэффици-

енты  $\kappa_k$ , через которые выражаются функции  $\kappa_k^0$ , затруднений не вызывает. Поэтому в дальнейшем речь пойдет только об интегралах по длине.

Будем по-прежнему полагать корабль симметричным относительно миделя. Для такого корабля интегралы  $M_{jk}^s$ ,  $\Lambda_{jk}^s$  при  $jk = 22, 33, 24$ , а также  $M_{jk}^{xc}$  и  $\Lambda_{jk}^{xc}$  при  $jk = 22, 33$  обращаются в нуль как интегралы от нечетных функций. Таким образом, вычислению подлежат только  $M_{jk}^c$  и  $\Lambda_{jk}^c$  при  $jk = 22, 33, 24$  и  $M_{jk}^{xs}$  и  $\Lambda_{jk}^{xs}$  при  $jk = 22, 33$ , являющиеся интегралами от четных функций.

В целях упрощения расчета будем полагать, что диаметрально сечение корабля имеет прямоугольную форму. Тогда, руководствуясь формулами (2.42) и (2.43), можем написать приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} \mu_{22} &= \mu_{022}; & \mu_{33} &= \mu_{033} \left( \frac{b}{B} \right)^2; \\ \mu_{24} &= \mu_{024} \frac{1 - \left( \frac{b}{2T} \right)^2}{1 - \left( \frac{B}{2T} \right)^2}, \end{aligned}$$

где  $\mu_{0jk}$  — присоединенная масса миделя. Формулы (2.71) для корабля с прямоугольной формой диаметрального сечения примут вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{22} &= \lambda_{022}; & \lambda_{33} &= \lambda_{033} \left( \frac{b}{B} \right)^2; \\ \lambda_{24} &= \lambda_{024} \left( \frac{b}{B} \right)^2, \end{aligned}$$

где, очевидно  $\lambda_{0jk}$  — коэффициент демпфирования миделя.

Рассмотрим далее поправочные коэффициенты  $\kappa_k^0$ . Согласно (4.126), (4.135) и (4.147) имеем:

$$\begin{aligned} \kappa_2^0 &= \kappa_5 - \frac{kb^2}{12\beta T} \kappa_{41}; \\ \kappa_3^0 &= \kappa_2 \sin^2 \varepsilon + \kappa_6 \cos^2 \varepsilon; \\ \kappa_4^0 &= \kappa_7 - \frac{3}{64} \frac{k\pi}{T} b^2 \kappa_8. \end{aligned}$$

При вычислении интегралов (4.129) будем учитывать лишь явную зависимость  $\kappa_k^0$  от ширины шпангоута по ватерлинии, полагая, как и ранее, что редуциционные коэффициенты  $\kappa_k$  ( $k = 2, 5, 6, 7, 8$ ) и  $\kappa_{41}$  могут быть осреднены и вынесены из-под знаков интеграла.

Полагая корабль симметричным относительно миделя, получим:

$$M_{22}^c = \mu_{022} \left( 2\kappa_5 \int_0^{L/2} \cos k_1 x dx - \frac{k\kappa_{41}}{6\beta T} \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx \right);$$

$$M_{22}^{xs} = \mu_{022} \left( 2\kappa_5 \int_0^{L/2} x \sin k_1 x dx - \frac{k\kappa_{41}}{6\beta T} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx \right);$$

$$M_{33}^c = 2\mu_{033} \frac{\kappa_3^0}{B^2} \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx;$$
(4.149)

$$M_{33}^{xs} = 2\mu_{033} \frac{\kappa_3^0}{B^2} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx;$$

$$M_{24}^c = \frac{\mu_{024}}{1 - \left(\frac{B}{2T}\right)^2} \left[ 2\kappa_7 \int_0^{L/2} \cos k_1 x dx - \left( \frac{\kappa_7}{2T^2} + \frac{3}{32} \frac{k\pi}{T} \kappa_8 \right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx + \frac{3}{128} \frac{k\pi}{T^3} \kappa_8 \int_0^{L/2} b^4 \cos k_1 x dx \right].$$

Формулы для  $\Lambda_{jj}^c$  и  $\Lambda_{jj}^{xs}$  ( $j = 2, 3$ ) легко получить, заменяя в формулах для  $M_{jj}$  с соответствующими верхними индексами  $\mu_{0jj}$  на  $\lambda_{0jj}$ . Выражение для  $\Lambda_{24}^c$  будет иметь вид

$$\Lambda_{24}^c = \frac{\lambda_{024}}{B^3} \left( 2\kappa_7 \int_0^{L/2} b^3 \cos k_1 x dx - \frac{3k\pi}{32T} \kappa_8 \int_0^{L/2} b^5 \cos k_1 x dx \right).$$

Если теперь воспользоваться уравнением ватерлинии в форме

$$b = B \left[ 1 - \left( \frac{2|x|}{L} \right)^n \right], \quad \left( n = \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \quad (4.150)$$

и ввести новую переменную интегрирования  $x_1 = 2x/L$ , то задача сведется к нахождению интегралов вида<sup>1</sup>

$$\int_0^1 x^p \sin ax dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^p \cos ax dx, \quad \left( a = \frac{L}{2} k_1 \right).$$

Как показано в § 19, такие интегралы выражаются через ряды, которые легко вычислить на ЭВМ.

Расчет дифракционных сил при вертикальной и килевой качке на косом волнении нетрудно выполнить и вручную. С этой целью найдем пределы:

$$\lim_{k, x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx = LB^2 \frac{\alpha^2}{1+\alpha};$$

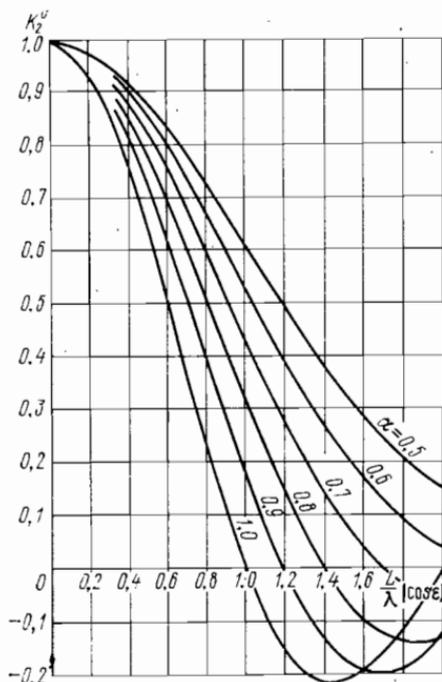
$$\lim_{k, x \rightarrow 0} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx = k_1 L^3 B^2 \frac{[\alpha^2]}{12(3-\alpha)(3-2\alpha)}.$$

<sup>1</sup> Поскольку обозначение переменной интегрирования не играет никакой роли, индекс  $l$  при  $x$  в подынтегральных функциях здесь опущен.

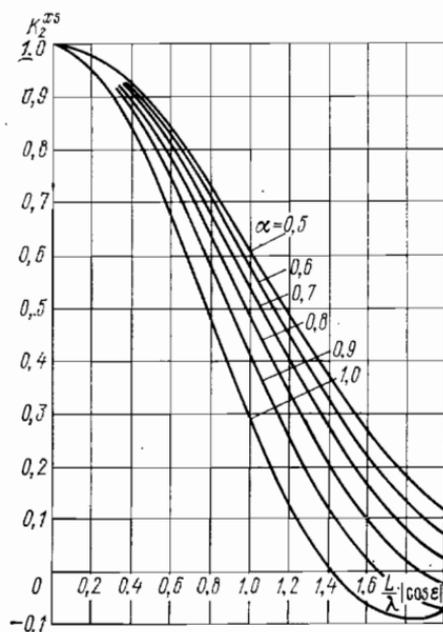
Введем теперь следующие безразмерные коэффициенты:

$$K_2^c = \frac{1 + \alpha}{\alpha^2 L B^2} \int_0^{L/2} b^2 \cos k_1 x dx;$$

$$K_2^{xs} = \frac{12(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)}{k_1 \alpha^2 L^3 B^2} \int_0^{L/2} b^2 x \sin k_1 x dx.$$



4.14. Редукционный коэффициент  $K_2^c$ .



4.15. Редукционный коэффициент  $K_2^{xs}$ .

Графики этих коэффициентов для корабля, ватерлиния которого описывается уравнением (4.150), приведены на рис. 4.14 и 4.15.

Согласно формулам (4.149) функции  $M_{33}^c$  и  $M_{33}^{xs}$  можно выразить через только что введенные коэффициенты следующим образом:

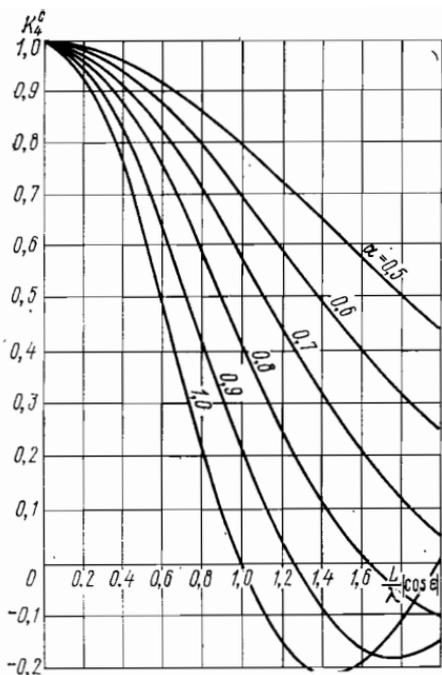
$$M_{33}^c = \kappa_3^0 \mu_{033} L \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} K_2^c;$$

$$M_{33}^{xs} = \kappa_3^0 k_1 \mu_{033} L^3 \frac{\alpha^2}{6(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)} K_2^{xs}.$$

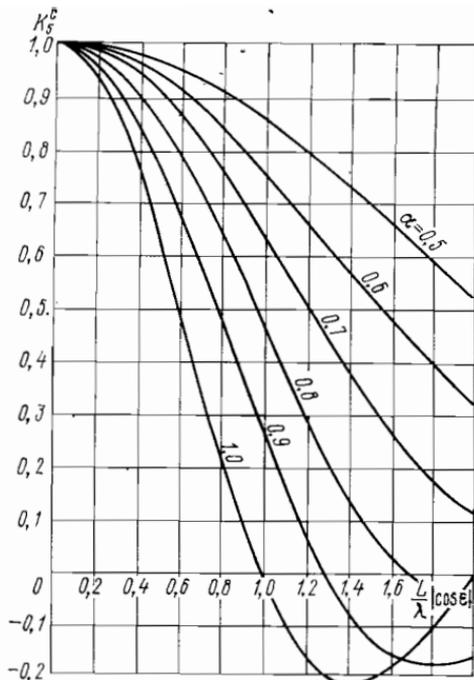
Но в соответствии с (2.42)

$$\mu_{033} L \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha} = M_{33};$$

$$\mu_{033} L^3 \frac{\alpha^2}{6(3 - \alpha)(3 - 2\alpha)} = M_{55}.$$



4.16. Редукционный коэффициент  $K_4^c$ .



4.17. Редукционный коэффициент  $K_5^c$ .

Вследствие этого предыдущие равенства принимают весьма простой вид:

$$M_{33}^c = M_{33}^0 K_2^c; \quad M_{33}^{xs} = k_1 M_{55}^0 K_2^{xs}.$$

Аналогичным способом можно получить

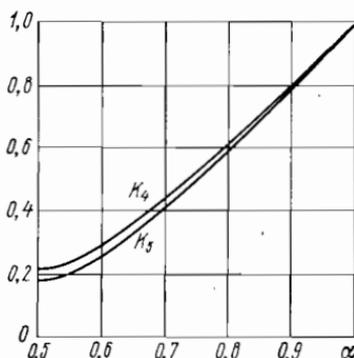
$$\Lambda_{33}^c = \Lambda_{33}^0 K_2^c; \quad \Lambda_{33}^{xs} = k_1 \Lambda_{55}^0 K_2^{xs}.$$

При известных значениях  $M_{33}^c$ ,  $M_{33}^{xs}$ ,  $\Lambda_{33}^c$  и  $\Lambda_{33}^{xs}$  дифракционная часть возмущающих сил для вертикальной и килевой качки легко вычислить по формулам (4.137).

Как видно из соотношений (4.149) функции, определяющие дифракционную часть возмущающих сил при поперечно-горизонтальной качке и рысканьи, также можно выразить через редукционные коэффициенты  $K_2^c$  и  $K_2^{xs}$ .

Для бортовой качки, помимо  $K_2^c$  и  $K_3^c$ , требуется ввести аналогичные коэффициенты для вычисления интегралов

$$\int_0^{L/2} b^4 \cos k_1 x dx \quad \text{и} \quad \int_0^{L/2} b^5 \cos k_1 x dx. \quad (4.151)$$



4.18. Функции  $K_4(\alpha)$  и  $K_5(\alpha)$ .

Представим эти коэффициенты в виде:

$$K_4^c = \frac{1}{K_4} \int_0^{L/2} b^4 \cos k_1 x dx; \quad K_5^c = \frac{1}{K_5} \int_0^{L/2} b^5 \cos k_1 x dx,$$

где

$$K_4 = \int_0^{L/2} b^4 dx \quad \text{и} \quad K_5 = \int_0^{L/2} b^5 dx$$

— предельные значения интегралов (4.151) при  $k_1 x \rightarrow 0$ .

Графики коэффициентов  $K_4^c$  и  $K_5^c$ , вычисленные для корабля с параболической ватерлинией, определяемой уравнением (4.150), приведены на рис. 4.16 и 4.17, а кривые зависимости  $K_4$  и  $K_5$  от коэффициента полноты ватерлинии  $\alpha$  — на рис. 4.18.

## § 21. Уравнения движения твердого тела

в подвижной системе координат.

Общий вид дифференциальных уравнений качки

Поскольку гидродинамические силы вычисляются в системе координат *Oxyz*, неизменно связанной с кораблем, дифференциальные уравнения качки также целесообразно записывать в этой системе. В связи с этим приведем вывод дифференциальных уравнений движения твердого тела в подвижной системе координат для общего случая, когда полюс *O* не совпадает с центром масс тела.

Если вектор и момент количества движения тела обозначить соответственно через  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{L}$ , а главный вектор и главный момент приложенных к нему внешних сил — через  $\mathbf{R}$  и  $\mathfrak{M}$  то, как известно из теоретической механики, уравнения движения можно написать в форме:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{R}; \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathfrak{M},$$

где  $d/dt$  — символ производной по времени, взятой в неподвижной системе координат (абсолютная производная).

Обозначим вектор поступательной скорости полюса через  $\mathbf{U}$ , вектор угловой скорости вращения тела относительно мгновенной оси, проходящий через полюс, — через  $\mathbf{\Omega}$ , а символ производной по времени, взятой в подвижной системе координат (относительная производная), — через  $\partial/\partial t$ . Для того чтобы выразить абсолютные производные векторов  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{L}$  через относительные, воспользуемся соотношениями (4.23) и (4.30). Тогда уравнения движения примут вид:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{R}; \quad (4.152)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{L} + \mathbf{U} \times \mathbf{K} = \mathfrak{M}. \quad (4.153)$$

Вектор количества движения  $\mathbf{K}$  получим как произведение массы тела  $m$  на вектор скорости центра масс:

$$\mathbf{K} = m(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_g), \quad (4.154)$$

где  $\mathbf{r}_g$  — радиус-вектор центра масс относительно начала подвижной системы координат (полюса)  $O$ .

Момент количества движения  $\mathbf{L}$  относительно полюса будет представлять собой сумму момента количества движения  $\mathbf{L}_g$  относительно центра масс и момента вектора количества движения  $\mathbf{K}$ , приложенного в центре масс, относительно полюса:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_g + \mathbf{r}_g \times \mathbf{K}.$$

Руководствуясь формулой (4.154), найдем относительную производную вектора  $\mathbf{K}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = m \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} \times \mathbf{r}_g \right). \quad (4.155)$$

Обозначим теперь вектор линейного ускорения полюса через  $\boldsymbol{\omega}$ , а вектор углового ускорения — через  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Выразим эти векторы, представляющие собой абсолютные производные соответствующих скоростей, через относительные производные:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}; \quad (4.156)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}.$$

Из формул (4.155) и (4.156) получим

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = m(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_g). \quad (4.157)$$

Будем считать вектор  $\boldsymbol{\Omega}$ , а следовательно и его проекции на подвижные оси, обозначаемые через  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\chi$ , малыми первого порядка. Положим далее, что оси подвижной системы координат являются главными осями инерции массы тела, и обозначим главные центральные моменты массы через  $I_{gx}$ ,  $I_{gy}$  и  $I_{gz}$ . Тогда вектор  $\mathbf{L}_g$  с проекциями  $I_{gx}\dot{\theta}$ ,  $I_{gy}\dot{\psi}$  и  $I_{gz}\dot{\chi}$  также будет величиной первого порядка малости. Малыми высших порядков будем в дальнейшем пренебрегать. Таким образом, можем написать

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K} = \boldsymbol{\Omega} \times m(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_g) = m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}. \quad (4.158)$$

Подставляя теперь выражения (4.157) и (4.158) в (4.152), получим дифференциальное уравнение движения полюса в следующем виде:

$$m(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_g) = \mathbf{R}. \quad (4.159)$$

Найдем теперь слагаемые левой части уравнения (4.153):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial L_g}{\partial t} + \{ \mathbf{r}_g \times \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \frac{\partial L_g}{\partial t} + \mathbf{r}_g \times m(\boldsymbol{\omega} - \\ &\quad - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_g); \\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} &= \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{L}_g + \mathbf{r}_g \times \mathbf{K}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_g \times \mathbf{K}) = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{r}_g \times m(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_g)] = m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_g \times \mathbf{U}); \\ \mathbf{U} \times \mathbf{K} &= \mathbf{U} \times m(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_g) = m\mathbf{U} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_g). \end{aligned} \right\} \quad (4.160)$$

При суммировании этих слагаемых учтем, что

$$-\mathbf{r}_g \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r}_g \times \mathbf{U}) + \mathbf{U} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_g) = 0. \quad (4.161)$$

В этом легко убедиться с помощью известной формулы для двойного векторного произведения

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Кроме того, на основании этой формулы можно написать

$$\mathbf{r}_g \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_g) = \boldsymbol{\varepsilon} r_g^2 - \mathbf{r}_g (\mathbf{r}_g \cdot \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (4.162)$$

Подставляя теперь в уравнение (4.153) только что найденные слагаемые его левой части и учитывая выражения (4.161) и (4.162), получим дифференциальное уравнение вращения тела вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, в виде

$$\frac{dL_g}{dt} + m[\mathbf{r}_g \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon} r_g^2 - \mathbf{r}_g (\mathbf{r}_g \cdot \boldsymbol{\varepsilon})] = \mathfrak{M}. \quad (4.163)$$

Для того чтобы применить полученные уравнения к задаче о качке корабля, найдем прежде всего проекции вектора ускорения  $\boldsymbol{\omega}$  на координатные оси подвижной системы  $Oxyz$ . Пренебрегая продольно-горизонтальной качкой, обозначим проекции вектора  $\mathbf{U}$  на оси неподвижной системы  $O_0\xi\eta\zeta$  следующим образом:

$$U_\xi = v; \quad U_\eta = \eta; \quad U_\zeta = \zeta.$$

При этом будем считать скорость хода корабля  $v$  конечной, а скорости поперечно-горизонтальной и вертикальной качки  $\eta$  и  $\zeta$  — малыми первого порядка. Углы  $\psi$  и  $\chi$  будем полагать настолько малыми, что их косинусы можно заменять единицами, а синусы — самими углами. Тогда, как видно из рис. 4.1,

$$U_x \approx v; \quad U_y = U_\eta \cos \chi - U_\xi \sin \chi = \eta - v\chi;$$

$$U_z = U_\zeta \cos \psi + U_\xi \sin \psi = \zeta + v\psi.$$

Воспользовавшись теперь первой из формул (4.156) и отбрасывая малые высших порядков, найдем:

$$\omega_y = \frac{\partial U_y}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U})_y \approx \dot{\eta} - v\dot{\chi} + v\ddot{\chi} = \ddot{\eta};$$

$$\omega_z = \frac{\partial U_z}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U})_z \approx \dot{\zeta} + v\dot{\psi} - v\ddot{\psi} = \ddot{\zeta}.$$

Далее, имея в виду, что  $\varepsilon_x = \bar{\theta}$ ,  $\varepsilon_y = \bar{\psi}$ ,  $\varepsilon_z = \bar{\chi}$  и обозначив проекции радиуса-вектора  $r_g$  через  $x_g$ ,  $0$  и  $z_g$  т. е. полагая, что центр масс лежит в диаметральной плоскости, можем написать проекции векторных равенств (4.159) и (4.163) на оси подвижной системы координат в виде:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{\eta} + x_g \ddot{\chi} - z_g \ddot{\theta}) &= R_y; \\ m(\ddot{\xi} - x_g \ddot{\psi}) &= R_z; \\ I_x \ddot{\theta} - m z_g (\ddot{\eta} + x_g \ddot{\chi}) &= \mathfrak{M}_x; \\ I_y \ddot{\psi} - m x_g \ddot{\xi} &= \mathfrak{M}_y; \\ I_z \ddot{\chi} + m x_g (\ddot{\eta} - z_g \ddot{\theta}) &= \mathfrak{M}_z, \end{aligned} \right\} \quad (4.164)$$

где через

$$\begin{aligned} I_x &= I_{gx} + m z_g^2; \\ I_y &= I_{gy} + m (x_g^2 + z_g^2); \\ I_z &= I_{gz} + m x_g^2 \end{aligned}$$

обозначены моменты инерции массы корабля относительно соответствующих осей, а через  $R$  и  $\mathfrak{M}$  с соответствующими индексами — проекции главного вектора и главного момента гидродинамических сил на эти оси.

Таким образом, мы получили две системы дифференциальных уравнений, одна из которых описывает совместную вертикальную и килевую качку, а вторая — совместную поперечно-горизонтальную качку, бортовую качку и рысканье. Совокупность вертикальной и килевой качки, как уже говорилось, принято называть продольной качкой, а совокупность поперечно-горизонтальной качки, бортовой качки и рысканья — боковой.

На первый взгляд представляется заманчивым совместить начало подвижной системы координат (полюс) с центром масс корабля. В самом деле, если положить  $r_g = 0$ , то системы уравнений, описывающих продольную и боковую качку, как видно из формул (4.164), должны распастись на изолированные дифференциальные уравнения для каждого вида качки (поперечно-горизонтальной, вертикальной, бортовой, килевой и рысканья). Однако этот вывод был бы справедливым если бы гидродинамические силы при данном виде качки не зависели от кинематических характеристик (смещений, скоростей, ускорений) других ее видов. В действительности гидродинамические силы таким свойством не обладают. Как видно из формул (4.39) и (4.40) для инерционно-демпфирующих сил, независимо от того, где расположено начало подвижной системы координат, дифференциальные уравнения качки всегда образуют две системы, одна из которых описывает продольную, а другая — боковую качку. Более того, если координатная пло-

скость  $Oxy$  не совпадает с ватерлинией, то значительно усложняется и теряется точность вычисления присоединенных масс и коэффициентов демпфирования, а следовательно, затрудняется и весь расчет качки.

## § 22. Дифференциальные уравнения продольной и боковой качки на регулярном волнении и их решение

Для получения дифференциальных уравнений качки воспользуемся уравнениями (4.164), имея в виду, что  $R$  и  $\mathfrak{M}$  представляют собой главный вектор и главный момент действующих на корабль гидродинамических сил, т. е.

$$R = F + F^r + F^* + F^0;$$

$$\mathfrak{M} = M + M^r + M^* + M^0.$$

С учетом принятых цифровых индексов для проекций гидродинамических сил будем иметь:

$$R_y = R_2 = F_2 + F_2^* + F_2^0;$$

$$R_z = R_3 = F_3 + F_3^r + F_3^* + F_3^0;$$

$$\mathfrak{M}_x = R_4 = F_4 + F_4^r + F_4^* + F_4^0;$$

$$\mathfrak{M}_y = R_5 = F_5 + F_5^r + F_5^* + F_5^0;$$

$$\mathfrak{M}_z = R_6 = F_6 + F_6^* + F_6^0, \quad (F_2^r = F_6^r = 0).$$

Здесь, как и ранее, через  $F_j$  и  $F_j^r$  обозначены проекции инерционно-демпфирующих и восстанавливающих сил, а через  $F_j^*$  и  $F_j^0$  — проекции главной и дифракционной частей возмущающих сил.

Подставив теперь в уравнения (4.164) значения  $F_j$ , определяемые формулами (4.39) и (4.40), и значения  $F_j^r$ , определяемые формулами (4.44), (4.45) и (4.48), придем к двум системам дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\sum_k (a_{jk} Y_k'' + b_{jk} Y_k' + c_{jk} Y_k) = F_j^* + F_j^0, \quad (4.165)$$

где

$$Y_2 = \eta; \quad Y_3 = \zeta; \quad Y_4 = \theta; \quad Y_5 = \psi; \quad Y_6 = \chi.$$

Первая система состоит из двух уравнений ( $j = 3, 5$ ) и описывает продольную качку, а вторая, состоящая из трех уравнений ( $j = 2, 4, 6$ ), — боковую. Индекс суммирования  $k$  в первой системе принимает значения 3 и 5, а во второй — 2, 4 и 6. Значения коэффициентов  $a_{jk}$ ,  $b_{jk}$  и  $c_{jk}$  приведены в табл. 14.

Таблица 14. Коэффициенты дифференциальных уравнений качки

| Виды качки | $jk$ | $a_{jk}$            | $b_{jk}$                                      | $c_{jk}$                          |
|------------|------|---------------------|---|-----------------------------------|
| Продольная | 33   | $m + M_{33}$        | $\Lambda_{33}$                                | $\rho g S_0$                      |
|            | 35   | $M_{35} - mx_g$     | $\Lambda_{35} + vM_{33}$                      | $-\rho g S_0 x_f + v\Lambda_{33}$ |
|            | 53   | $M_{35} - mx_g$     | $\Lambda_{35} - vM_{33}$                      | $-\rho g S_0 x_f - v\Lambda_{33}$ |
|            | 55   | $I_y + M_{55}$      | $\Lambda_{55} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{33}$ | $\rho g I_y - v^2 M_{33}$         |
| Боковая    | 22   | $m + M_{22}$        | $\Lambda_{22}$                                | 0                                 |
|            | 24   | $M_{24} - mz_g$     | $\Lambda_{24}$                                | 0                                 |
|            | 26   | $M_{26} + mx_g$     | $\Lambda_{26} - vM_{22}$                      | $-v\Lambda_{22}$                  |
|            | 42   | $M_{24} - mz_g$     | $\Lambda_{24}$                                | 0                                 |
|            | 44   | $I_x + M_{44}$      | $\Lambda_{44}$                                | $mgh$                             |
|            | 46   | $M_{46} - mx_g z_g$ | $\Lambda_{46} - vM_{24}$                      | $-v\Lambda_{24}$                  |
|            | 62   | $M_{26} + mx_g$     | $\Lambda_{26} + vM_{22}$                      | $v\Lambda_{22}$                   |
|            | 64   | $M_{46} - mx_g z_g$ | $\Lambda_{46} + vM_{24}$                      | $v\Lambda_{24}$                   |
|            | 66   | $I_z + M_{66}$      | $\Lambda_{66} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{22}$ | $-v^2 M_{22}$                     |

Проекции возмущающих сил представим в виде

$$F_j^* + F_j^0 = (\alpha_j + i\beta_j) e^{i\sigma t}. \quad (4.166)$$

Действительные и мнимые части комплексных амплитуд возмущающих сил при продольной качке можно определить, используя равенства (4.74) и (4.137), при поперечно-горизонтальной качке и рысканьи — (4.67) и (4.130), при бортовой — (4.91) и (4.148). Тогда, учитывая, что наибольший уклон взволнованной поверхности  $\alpha_0 = \sigma_0^2 r / g$ , можем написать следующие выражения для  $\alpha_j$  и  $\beta_j$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 &= r [\rho g A_3^c - \sigma_0 (M_{33}^c \sigma - \Lambda_{33}^s)]; \\ \beta_3 &= r [-\rho g A_3^s + \sigma_0 (M_{33}^s \sigma + \Lambda_{33}^c)]; \\ \alpha_5 &= r \{ -\rho g A_3^{xc} + \sigma_0 [M_{33}^{xc} \sigma - \Lambda_{33}^{xs} - v (M_{33}^s + \Lambda_{33}^c \sigma^{-1})] \}; \\ \beta_5 &= r [\rho g A_3^{xs} - \sigma_0 [M_{33}^{xs} \sigma + \Lambda_{33}^{xc} - v (M_{33}^c - \Lambda_{33}^s \sigma^{-1})] \}; \\ \alpha_2 &= r \sigma_0 (\rho A_2^s \sigma_0 + M_{22}^s \sigma + \Lambda_{22}^c) \sin \varepsilon; \\ \beta_2 &= r \sigma_0 (\rho A_2^c \sigma_0 + M_{22}^c \sigma - \Lambda_{22}^s) \sin \varepsilon; \\ \alpha_4 &= r \sigma_0 (-\rho A_4^s \sigma_0 + M_{24}^s \sigma + \Lambda_{24}^c) \sin \varepsilon; \\ \beta_4 &= r \sigma_0 (-\rho A_4^c \sigma_0 + M_{24}^c \sigma - \Lambda_{24}^s) \sin \varepsilon; \\ \alpha_6 &= r \sigma_0 [\rho A_2^{xs} \sigma_0 + M_{22}^{xs} \sigma + \Lambda_{22}^{xc} + v (M_{22}^c - \Lambda_{22}^s \sigma^{-1})] \sin \varepsilon; \\ \beta_6 &= r \sigma_0 [\rho A_2^{xc} \sigma_0 + M_{22}^{xc} \sigma - \Lambda_{22}^{xs} - v (M_{22}^s + \Lambda_{22}^c \sigma^{-1})] \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (4.167)$$

Поскольку на регулярном волнении, как и на тихой воде, свободные колебания корабля быстро затухают, ограничимся отыска-

нием лишь частных решений систем дифференциальных уравнений (4.165), описывающих вынужденные колебания. Запишем эти частные решения в виде

$$Y_k = (y_{k1} + iy_{k2}) e^{i\sigma t}, \quad (4.168)$$

где  $y_{21} = \eta_1$ ;  $y_{31} = \zeta_1$ ;  $y_{41} = \theta_1$ ;  $y_{51} = \psi_1$ ;  $y_{61} = \chi_1$  — действительные, а  $y_{22} = \eta_2$ ;  $y_{32} = \zeta_2$ ;  $y_{42} = \theta_2$ ;  $y_{52} = \psi_2$ ;  $y_{62} = \chi_2$  — мнимые части комплексных амплитуд качки.

Теперь подставим выражения (4.168) для функции  $Y_k$  и выражения  $\dot{Y}_k = i\sigma Y_k$ ;  $\ddot{Y}_k = -\sigma^2 Y_k$  для ее производных в дифференциальные уравнения (4.165), правые части которых запишем в форме (4.166). После этого, отделив в каждом уравнении действительную и мнимую части и обозначив для краткости записи

$$c_{jk} - a_{jk}\sigma^2 = d_{jk}; \quad b_{jk}\sigma = e_{jk}, \quad (4.169)$$

получим следующие линейные алгебраические системы для определения  $y_{k1}$  и  $y_{k2}$ .

#### Продольная качка

$$\left. \begin{aligned} d_{33}\zeta_1 - e_{33}\zeta_2 + d_{35}\psi_1 - e_{35}\psi_2 &= \alpha_3; \\ e_{33}\zeta_1 + d_{33}\zeta_2 + e_{35}\psi_1 + d_{35}\psi_2 &= \beta_3; \\ d_{53}\zeta_1 - e_{53}\zeta_2 + d_{55}\psi_1 - e_{55}\psi_2 &= \alpha_5; \\ e_{53}\zeta_1 + d_{53}\zeta_2 + e_{55}\psi_1 + d_{55}\psi_2 &= \beta_5. \end{aligned} \right\} \quad (4.170)$$

#### Боковая качка

$$\left. \begin{aligned} d_{22}\eta_1 - e_{22}\eta_2 + d_{24}\theta_1 - e_{24}\theta_2 + d_{26}\chi_1 - e_{26}\chi_2 &= \alpha_2; \\ e_{22}\eta_1 + d_{22}\eta_2 + e_{24}\theta_1 + d_{24}\theta_2 + e_{26}\chi_1 + d_{26}\chi_2 &= \beta_2; \\ d_{42}\eta_1 - e_{42}\eta_2 + d_{44}\theta_1 - e_{44}\theta_2 + d_{46}\chi_1 - e_{46}\chi_2 &= \alpha_4; \\ e_{42}\eta_1 + d_{42}\eta_2 + e_{44}\theta_1 + d_{44}\theta_2 + e_{46}\chi_1 + d_{46}\chi_2 &= \beta_4; \\ d_{62}\eta_1 - e_{62}\eta_2 + d_{64}\theta_1 - e_{64}\theta_2 + d_{66}\chi_1 - e_{66}\chi_2 &= \alpha_6; \\ e_{62}\eta_1 + d_{62}\eta_2 + e_{64}\theta_1 + d_{64}\theta_2 + e_{66}\chi_1 + d_{66}\chi_2 &= \beta_6. \end{aligned} \right\} \quad (4.171)$$

При известных значениях  $y_{k1}$  и  $y_{k2}$  амплитуда качки определяется по формуле

$$y_k = \sqrt{y_{k1}^2 + y_{k2}^2}.$$

Найдя по этой формуле амплитуду бортовой качки в первом приближении, следует, подставив ее значение в равенство (2.80), вычислить коэффициент демпфирования  $\Lambda_{44}$  во втором приближении и затем вторично решить систему уравнений (4.171) при новом значении  $e_{44}$ . Если определенная на основании этого решения амплитуда окажется достаточно близкой к полученной в первом приближении, расчет заканчивают. Если же этого сразу добиться не

удается, то вычисления продолжают в аналогичном порядке до тех пор, пока в каком-то приближении амплитуда не окажется близкой к полученной в предыдущем. В первом приближении можно учитывать только волновую компоненту  $\Lambda_{44}$ , определенную методами гидродинамической теории.

При расчете продольной качки можно вычислить действительные и мнимые части комплексных амплитуд, избежав решения системы (4.170). С целью вывода соответствующих формул напишем систему дифференциальных уравнений совместной килевой и вертикальной качки:

$$\begin{aligned} a_{33}\dot{\zeta} + b_{33}\ddot{\zeta} + c_{33}\zeta + r_{35}\ddot{\psi} + b_{35}\dot{\psi} + c_{35}\psi &= (\alpha_3 + i\beta_3) e^{i\sigma t}; \\ a_{53}\dot{\zeta} + b_{53}\ddot{\zeta} + c_{53}\zeta + a_{55}\ddot{\psi} + b_{55}\dot{\psi} + c_{55}\psi &= (\alpha_5 + i\beta_5) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (4.172)$$

и представим ее частные решения в виде:

$$\zeta = \zeta_a e^{i\sigma t}; \quad \psi = \psi_a e^{i\sigma t}, \quad (4.173)$$

где

$$\zeta_a = \zeta_1 + i\zeta_2; \quad \psi_a = \psi_1 + i\psi_2.$$

Подставив значения  $\zeta$  и  $\psi$ , определяемые равенствами (4.173), в формулы (4.172) и воспользовавшись обозначениями (4.169), получим следующую систему двух алгебраических уравнений относительно  $\zeta_a$  и  $\psi_a$ :

$$\begin{aligned} (d_{33} + ie_{33})\zeta_a + (d_{35} + ie_{35})\psi_a &= \alpha_3 + i\beta_3; \\ (d_{53} + ie_{53})\zeta_a + (d_{55} + ie_{55})\psi_a &= \alpha_5 + i\beta_5. \end{aligned}$$

Корни этой системы будут иметь вид:

$$\zeta_a = \frac{\Delta_\zeta}{\Delta}; \quad \psi_a = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}, \quad (4.174)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} d_{33} + ie_{33} & d_{35} + ie_{35} \\ d_{53} + ie_{53} & d_{55} + ie_{55} \end{vmatrix}; \\ \Delta_\zeta &= \begin{vmatrix} \alpha_3 + i\beta_3 & d_{35} + ie_{35} \\ \alpha_5 + i\beta_5 & d_{55} + ie_{55} \end{vmatrix}; \\ \Delta_\psi &= \begin{vmatrix} d_{33} + ie_{33} & \alpha_3 + i\beta_3 \\ d_{53} + ie_{53} & \alpha_5 + i\beta_5 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Раскрыв эти определители, получим

$$\Delta = a_0 + ib_0; \quad \Delta_\zeta = c_0 + id_0; \quad \Delta_\psi = e_0 + if_0,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= d_{33}d_{55} - d_{35}d_{53} + e_{35}e_{53} - e_{33}e_{55}; \\ b_0 &= d_{33}e_{55} + d_{55}e_{33} - d_{35}e_{53} - d_{53}e_{35}; \\ c_0 &= d_{55}\alpha_3 - d_{35}\alpha_5 - e_{55}\beta_3 + e_{35}\beta_5; \\ d_0 &= d_{55}\beta_3 - d_{35}\beta_5 + e_{55}\alpha_3 - e_{35}\alpha_5; \\ e_0 &= d_{33}\alpha_5 - d_{53}\alpha_3 - e_{33}\beta_5 - e_{53}\beta_3; \\ f_0 &= d_{33}\beta_5 - d_{53}\beta_3 + e_{33}\alpha_5 - e_{53}\alpha_3. \end{aligned}$$

Если теперь умножить числители и знаменатели формул (4.174) на  $\bar{\Delta} = a_0 - ib_0$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta_a &= \zeta_1 + i\zeta_2 = \frac{a_0c_0 + b_0d_0 + i(a_0d_0 - b_0c_0)}{a_0^2 + b_0^2}; \\ \psi_a &= \psi_1 + i\psi_2 = \frac{a_0e_0 + b_0f_0 + i(a_0f_0 - b_0e_0)}{a_0^2 + b_0^2}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить выражения для действительных и мнимых частей комплексных амплитуд вертикальной и килевой качки:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{a_0c_0 + b_0d_0}{a_0^2 + b_0^2}; & \zeta_2 &= \frac{a_0d_0 - b_0c_0}{a_0^2 + b_0^2}; \\ \psi_1 &= \frac{a_0e_0 + b_0f_0}{a_0^2 + b_0^2}; & \psi_2 &= \frac{a_0f_0 - b_0e_0}{a_0^2 + b_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.175)$$

Поскольку в выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель  $e^{i\sigma t}$ , принимается во внимание только действительная часть, равенства (4.173) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 \cos \sigma t - \zeta_2 \sin \sigma t; \\ \psi &= \psi_1 \cos \sigma t - \psi_2 \sin \sigma t, \end{aligned}$$

или, иначе

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 \cos(\sigma t - \gamma_3); \\ \psi &= \psi_0 \cos(\sigma t - \gamma_5). \end{aligned}$$

Эти равенства дают возможность установить зависимость между действительными и мнимыми частями комплексных амплитуд качки с одной стороны и амплитудами в обычном понимании (наибольшими отклонениями от положения равновесия) и углами сдвига фаз с другой. В самом деле, как видно из этих равенств:

$$\begin{aligned} \zeta_1 \cos \sigma t - \zeta_2 \sin \sigma t &= \zeta_0 (\cos \sigma t \cos \gamma_3 + \sin \sigma t \sin \gamma_3); \\ \psi_1 \cos \sigma t - \psi_2 \sin \sigma t &= \psi_0 (\cos \sigma t \cos \gamma_5 + \sin \sigma t \sin \gamma_5). \end{aligned}$$

Приравнявая в каждой из последних формул коэффициенты при одноименных функциях аргумента  $\sigma t$ , получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta_0 \cos \gamma_3; & \zeta_2 &= -\zeta_0 \sin \gamma_3; \\ \psi_1 &= \psi_0 \cos \gamma_5; & \psi_2 &= -\psi_0 \sin \gamma_5. \end{aligned} \right\} \quad (4.176)$$

Таким образом, амплитуды и углы сдвига фаз будут определяться равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} = \sqrt{\frac{c_0^2 + d_0^2}{a_0^2 + b_0^2}}; \\ \psi_0 &= \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \sqrt{\frac{e_0^2 + f_0^2}{a_0^2 + b_0^2}}; \\ \operatorname{tg} \gamma_3 &= -\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{b_0 c_0 - a_0 d_0}{a_0 c_0 + b_0 d_0}; \\ \operatorname{tg} \gamma_5 &= -\frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{b_0 e_0 - a_0 f_0}{a_0 e_0 + b_0 f_0}. \end{aligned} \right\} (4.177)$$

Для того чтобы однозначно определить угол сдвига фаз при известном значении его тангенса, необходимо еще знать четверть, в которой лежит этот угол, т. е. знак синуса или косинуса, определяемый формулами (4.176). Как видно из этих формул:

$$\operatorname{sign} \cos \gamma_3 = \operatorname{sign} \zeta_1;$$

$$\operatorname{sign} \cos \gamma_5 = \operatorname{sign} \psi_1,$$

где символ  $\operatorname{sign}$  означает «знак».

Для боковой качки применять прием, позволяющий без решения системы шести алгебраических уравнений найти значения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд, нецелесообразно. Дело в том, что в отличие от продольной качки, которая состоит из двух видов колебаний, боковая включает три вида и нахождение их комплексных амплитуд сводится к решению системы трех алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Выражения для ее корней оказываются настолько громоздкими, что для практики их использовать нельзя. Поэтому в случае необходимости выполнения экспресс-расчетов боковой качки без использования ЭВМ следует исключить из рассмотрения рысканье. После этого для определения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд поперечно-горизонтальной и бортовой качки может быть использован такой же прием, как и для продольной.

Отметим, что независимо от того, каким путем найдены действительные и мнимые части комплексных амплитуд какого-либо вида качки, нахождение амплитуд и углов сдвига фаз не представляет никаких трудностей и выполняется с помощью формул, аналогичных приведенным выше.

## § 23. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики основных видов качки

Как видно из изложенного выше, при наличии хода, а для реального корабля, не обладающего симметрией относительно мидельшпангоута, и без хода, различные виды качки существуют одновременно и оказывают взаимное влияние друг на друга. Однако для симметричного относительно миделя удлиненного корабля, не имеющего хода и сидящего в положении равновесия без крена и дифферента, вертикальная и килевая качки существуют изолированно. Кроме того, если пренебречь влиянием поперечно-горизонтальной качки на бортовую, то последнюю также можно рассматривать изолированно.

В связи с этим рассмотрим изолированное уравнение какого-нибудь из основных видов качки, например, вертикальной. Это позволит выяснить некоторые характерные особенности качки на регулярном волнении.

Из табл. 14 видно, что вертикальная качка будет существовать независимо от килевой, если  $M_{35} = \Lambda_{35} = 0$ , центр тяжести площади ватерлинии равновесия и центр масс корабля лежат в плоскости миделя, т. е.  $x_f = x_g = 0$ , и корабль не имеет хода. В этом случае, как следует из (4.165), уравнение вертикальной качки будет иметь вид

$$(m + M_{33})\ddot{\xi} + \Lambda_{33}\dot{\xi} + \rho g S_0 \xi = F_3^* + F_3^0. \quad (4.178)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением корабля, расположенного лагом к волне, длина которой весьма велика по сравнению с шириной и осадкой корабля. Тогда, во-первых, истинная  $\sigma_0$  и кажущаяся  $\sigma$  частота волны оказываются одинаковыми и, во-вторых, редуцированные коэффициенты  $\kappa_3$  и  $\kappa_3^0 = \kappa_2$  обращаются в единицу. Выражения (4.75) и (4.138), определяющие главную и дифракционную часть возмущающей силы, при этом приобретают весьма простую форму:

$$F_3^* = \rho g r S_0 e^{i\sigma_0 t}; \quad F_3^0 = -r\sigma_0 (M_{33}\sigma_0 - i\Lambda_{33}) e^{i\sigma_0 t}.$$

Подставив последние равенства в формулу (4.178), получим изолированное дифференциальное уравнение вертикальной качки на регулярном волнении в виде

$$(m + M_{33})\ddot{\xi} + \Lambda_{33}\dot{\xi} + \rho g S_0 \xi = r(\rho g S_0 - M_{33}\sigma_0^2 + i\sigma_0 \Lambda_{33}) e^{i\sigma_0 t},$$

или, иначе,

$$\ddot{\xi} + 2\nu_3\dot{\xi} + \omega_3^2\xi = r(\omega_3^2 - f_3\sigma_0 + 2i\sigma_0\nu_3) e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.179)$$

где  $\omega_3$  — частота свободных колебаний;  $\nu_3$  — коэффициент затухания, а  $f_3$  — безразмерный инерционный параметр. Эти величины

определяются следующими выражениями:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\rho g S_0}{m + M_{33}}}; \quad \nu_3 = \frac{\Lambda_{33}}{2(m + M_{33})};$$

$$\dot{i}_3 = \frac{M_{33}}{m + M_{33}}.$$

Будем искать частное решение уравнения (4.179) в форме

$$\xi = \xi_a e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.180)$$

где  $\xi_a = \xi_1 + i\xi_2$  — комплексная амплитуда. После подстановки (4.180) в это уравнение получим

$$(\omega_3^2 - \sigma_0^2 + 2i\nu_3\sigma_0) \xi_a = \alpha_3 + i\beta_3,$$

где

$$\alpha_3 = r(\omega_3^2 - f_3\sigma_0^2); \quad \beta_3 = 2r\nu_3\sigma_0.$$

Таким образом, имеем

$$\xi_a = \frac{\alpha_3 + i\beta_3}{\omega_3^2 - \sigma_0^2 + 2i\nu_3\sigma_0}.$$

Избавившись в последнем равенстве от мнимости в знаменателе и отделив действительную и мнимую части, найдем:

$$\xi_1 = \frac{\alpha_3(\omega_3^2 - \sigma_0^2) + 2\beta_3\nu_3\sigma_0}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2};$$

$$\xi_2 = \frac{\beta_3(\omega_3^2 - \sigma_0^2) - 2\alpha_3\nu_3\sigma_0}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2}.$$

Если теперь представить ординату<sup>1</sup> вертикальной качки в виде

$$\xi = \xi_0 \cos(\sigma t - \gamma_3)$$

то, как видно из формул (4.177),

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}; \quad \text{tg } \gamma_3 = -\frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Подставив в последние равенства выражения для  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , получим:

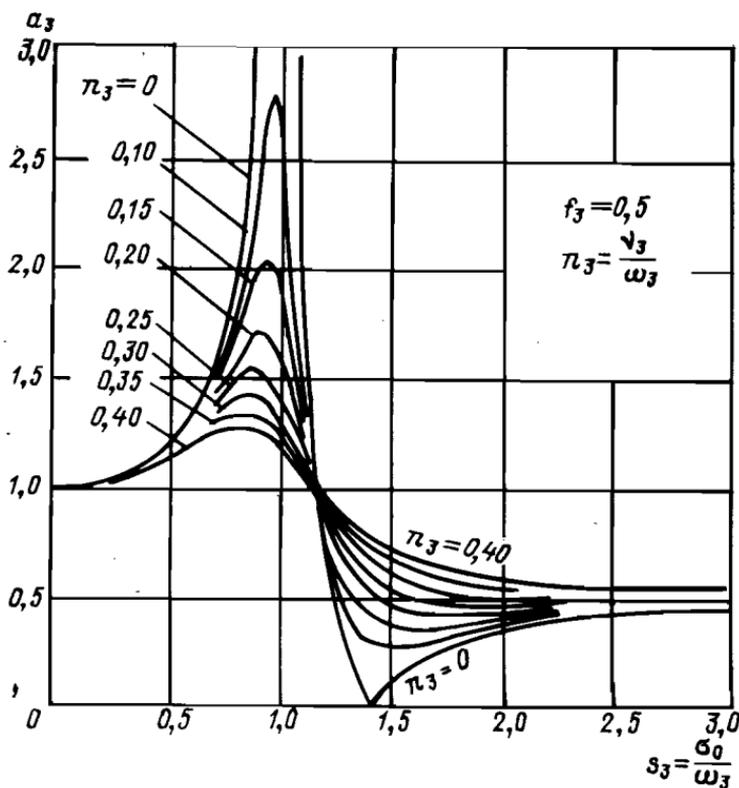
$$\xi_0 = r \sqrt{\frac{(\omega_3^2 - f_3\sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3\sigma_0)^2}};$$

$$\text{tg } \gamma_3 = \frac{2(1 - f_3)\nu_3\sigma_0^3}{(\omega_3^2 - f_3\sigma_0^2)(\omega_3^2 - \sigma_0^2) + (2\nu_3\sigma_0)^2}.$$

<sup>1</sup> Мгновенные значения поступательного перемещения или углов наклона корабля часто называют ординатами соответствующего вида качки.

Введем понятие коэффициента динамичности  $a_3$ , под которым будем понимать отношение амплитуды качки к амплитуде волны:

$$a_3 = \frac{\zeta_0}{r} = \sqrt{\frac{(\omega_3^2 - f_3 \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3 \sigma_0)^2}{(\omega_3^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_3 \sigma_0)^2}}$$



4.19. Амплитудно-частотная характеристика вертикальной качки.

График зависимости этого коэффициента от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой качки (рис. 4.19).

Характерная особенность амплитуды вынужденных колебаний—ее существенное увеличение при равенстве частот свободных колебаний и возмущающей силы. Это явление называется *резонансом качки*. В случае отсутствия демпфирования амплитуда вынужденных колебаний при резонансе стремится к бесконечности.

Еще одна характерная особенность амплитуды качки, отличающая ее от амплитуды вынужденных колебаний обычного гармонического осциллятора, состоит в своеобразии влияния коэффициентов демпфирования (затухания).

Дело в том, что при увеличении коэффициентов демпфирования с одной стороны увеличиваются собственно демпфирующие силы,

определяемые вторыми членами левых частей изолированных дифференциальных уравнений качки, а с другой — растут амплитуды возмущающих сил. Последнее обстоятельство связано с тем, что коэффициенты демпфирования входят в дифракционные составляющие этих сил. В итоге при различных соотношениях между параметрами  $f_3$  и  $\sigma_0/\omega_3$  влияние демпфирования на коэффициент динамичности оказывается различным. Так, при

$$\frac{\sigma_0}{\omega_3} = \sqrt{\frac{2}{1+f_3}}$$

демпфирование вообще не оказывает влияния на коэффициент динамичности и он равен единице при любых, в том числе и при нулевых значениях коэффициента затухания. При значениях  $\sigma_0/\omega_3$  меньших, чем определяемые последним соотношением, с ростом демпфирования коэффициент динамичности уменьшается, при больших — увеличивается.

Отметим еще некоторые особенности коэффициента динамичности качки. Так,

#### 4.20. Фазово-частотная характеристика вертикальной качки.

в случае отсутствия демпфирования дифференциальное уравнение (4.179) вертикальной качки на волнении будет иметь вид

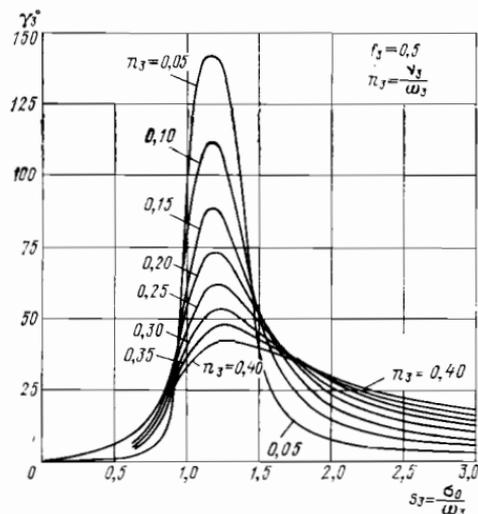
$$\ddot{\xi} + \omega_3^2 \xi = r (\omega_3^2 - f_3 \sigma_0^2) e^{i\sigma_0 t}.$$

Отсюда видно, что при  $\sigma_0^2 = \omega_3^2/f_3$  амплитуда возмущающей силы, а с ней и амплитуда вынужденных колебаний обращаются в нуль. Предельное значение коэффициента динамичности при  $\sigma_0 \rightarrow \infty$  равно не нулю, как у обычного гармонического осциллятора, а величине  $f_3$ .

Фазово-частотная характеристика качки, т. е. график зависимости угла  $\gamma_3$  от  $\sigma_0/\omega_3$  (рис. 4.20) также отличается от фазово-частотной характеристики обычного гармонического осциллятора. В частности, если для последнего при неограниченном возрастании  $\sigma_0/\omega_3$  угол  $\gamma_3$  стремится к  $\pi$ , то для качки он стремится к нулю.

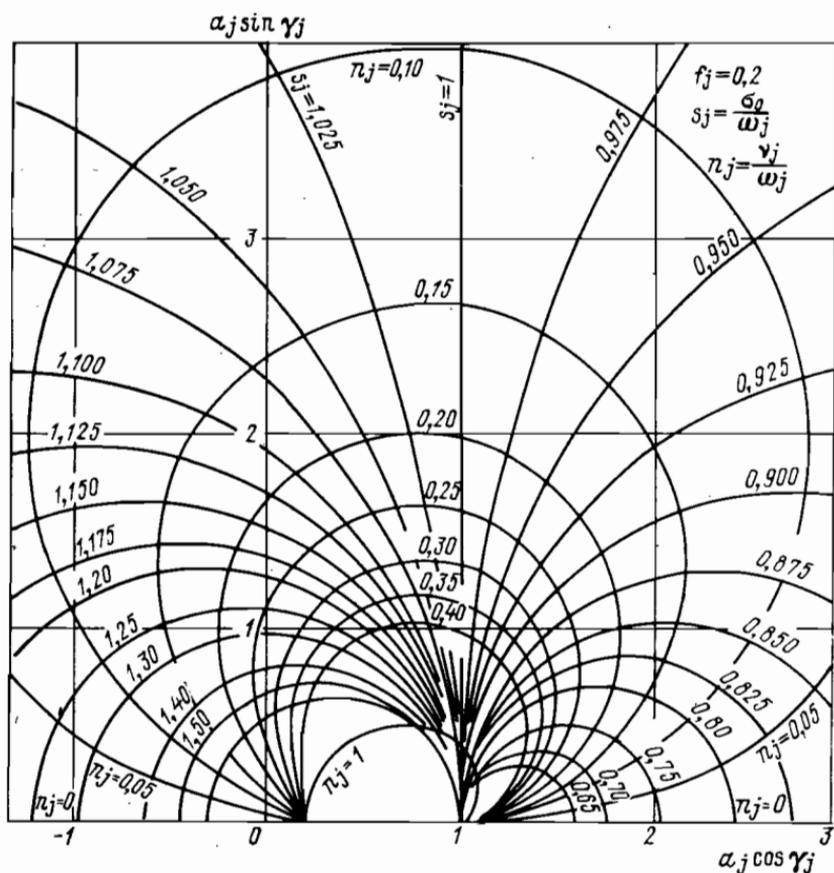
Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики бортовой и килевой качки имеют такой же вид, как аналогичные характеристики вертикальной качки. Под коэффициентами динамичности при этом понимаются следующие отношения:

$$a_4 = \frac{\theta_0}{\alpha_0}; \quad a_5 = \frac{\psi_0}{\alpha_0},$$



где  $\theta_0$  и  $\psi_0$  — амплитуды вынужденной бортовой и килевой качки.

Амплитудно-частотную и фазово-частотную характеристики можно изобразить на одном графике в виде амплитудно-фазовой частотной характеристики, откладывая по оси абсцисс  $a_j \cos \gamma_j$ , а по оси ординат  $a_j \sin \gamma_j$ . Пример такого графика приведен на



4.21. Амплитудно-фазовая частотная характеристика.

рис. 4.21. Легко видеть, что коэффициент динамичности определяется как длина радиуса-вектора соответствующей точки графика, а угол сдвига фаз — как угол между радиусом-вектором и положительным направлением оси абсцисс.

При бортовой качке дифракционные силы играют меньшую роль, чем при других видах качки. Поэтому при приближенных расчетах их иногда отбрасывают, учитывая только главную часть возмущающих сил. Получающееся при этом изолированное дифференциальное уравнение качки принято называть «укороченным». В соответствии с (4.165) это уравнение будет иметь вид

$$(I_x + M_{44}) \ddot{\theta} + \Lambda_{44} \dot{\theta} + mgh\theta = F_4^* \quad (4.181)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением корабля с полуэллиптическими шпангоутами, расположенного лагом к волне. Тогда, как видно из формулы (4.92):

$$F_4^* = -i\rho g \alpha_0 \kappa_4 V z_m e^{i\sigma t} = -i\alpha_0 \kappa_4 m g z_m e^{i\sigma t}. \quad (4.182)$$

Это выражение определяет собой момент гидродинамических давлений набегающих на корабль волн относительно оси  $Ox$ , лежащей в плоскости ватерлинии равновесия. Вместе с тем «укороченное» уравнение бортовой качки приобретает более удобный вид, если вычислять этот момент относительно продольной оси, проходящей через центр масс. Обозначив момент относительно этой оси через  $F_{4g}^*$ , можем написать

$$F_{4g}^* = F_4^* + z_g F_2^*,$$

где, очевидно,  $z_g$  — аппликата центра масс. Подставляя сюда выражения (4.182) и (4.71), получим

$$F_{4g}^* = -i\alpha_0 m g (\kappa_4 z_m - \kappa_2 z_g) e^{i\sigma t}.$$

Если рассматривать корабль, поперечные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны, то  $\kappa_2$  и  $\kappa_4$  окажутся равными единице и выражение, стоящее в последней формуле в скобках, будет представлять собой начальную метацентрическую высоту. Применяя эту формулу к кораблю, поперечные размеры которого сравнимы с длиной волны, следует иметь в виду, что обычно центр масс лежит в районе ватерлинии и, следовательно,  $z_g$  оказывается значительно меньше, чем  $z_m$ . Поэтому можно, не внося существенной погрешности в результат, заменить редуцированный коэффициент  $\kappa_2$  на  $\kappa_4$ . Тогда получим следующее равенство:

$$F_{4g}^* = -i\alpha_0 \kappa_4 m g h e^{i\sigma t}.$$

Введя допущение о независимости бортовой качки от поперечногоризонтальной, мы предполагаем, что  $M_{24} = \Lambda_{24} = 0$ . В этом случае при переносе начала координат в центр масс корабля следует в левой части укороченного уравнения качки под  $I_x$  понимать  $I_{gx}$ , и, кроме того, заменить  $M_{44}$  на  $M_{44g}$  и  $\Lambda_{44}$  на  $\Lambda_{44g}$ , руководствуясь соотношениями:

$$M_{44g} = M_{44} + z_g^2 M_{22}$$

и

$$\Lambda_{44g} = \Lambda_{44} + z_g^2 \Lambda_{22}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (4.181) и отбрасывая для простоты записи  $g$  в индексе, получим укороченное уравнение бортовой качки в виде

$$(I_x + M_{44}) \ddot{\theta} + \Lambda_{44} \dot{\theta} + mgh\theta = -i\alpha_0 \kappa_4 m g h e^{i\sigma t}, \quad (4.183)$$

или

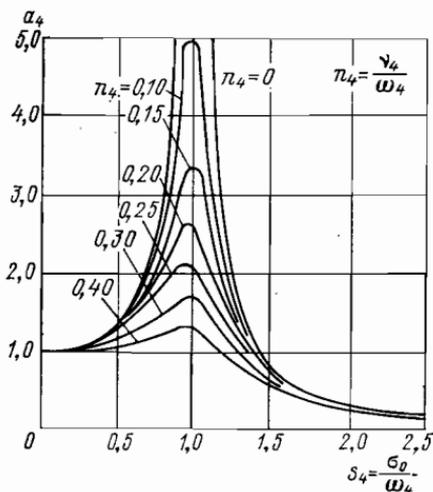
$$\ddot{\theta} + 2\nu_4 \dot{\theta} + \omega_4^2 \theta = -i\alpha_0 \kappa_4 \omega_4^2 e^{i\sigma t}, \quad (4.184)$$

где

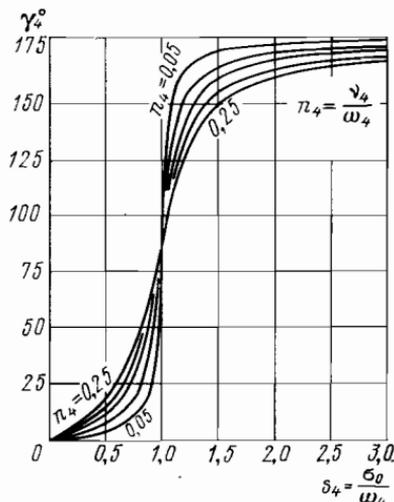
$$v_4 = \frac{\Lambda_{44}}{2(I_x + M_{44})}; \quad \omega_4 = \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44}}}. \quad (4.185)$$

Представив частное решение этого уравнения, описывающее вынужденные колебания, в форме

$$\theta = \theta_0 e^{i\sigma_0 t} = (\theta_1 + i\theta_2) e^{i\sigma_0 t},$$



4.22. Амплитудно-частотная характеристика бортовой качки (согласно «укороченному» уравнению).



4.23. Фазово-частотная характеристика бортовой качки (согласно «укороченному» уравнению).

нетрудно получить следующие соотношения:

$$(\omega_4^2 - \sigma_0^2 + 2iv_4\sigma_0)(\theta_1 + i\theta_2) = -i\alpha_0\kappa_4\omega_4^2;$$

$$\theta_1 = -\alpha_0\kappa_4 \frac{2v_4\sigma_0\omega_4^2}{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2v_4\sigma_0)^2};$$

$$\theta_2 = -\alpha_0\kappa_4 \frac{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)\omega_4^2}{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2v_4\sigma_0)^2}.$$

Используя тригонометрические представления

$$\theta = \theta_1 \cos \sigma_0 t - \theta_2 \sin \sigma_0 t,$$

или

$$\theta = \theta_0 \sin(\sigma_0 t - \gamma_4),$$

получим

$$\theta_0 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{\alpha_0\kappa_4\omega_4^2}{\sqrt{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2v_4\sigma_0)^2}}; \quad (4.186)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_4 = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{2v_4\sigma_0}{\omega_4^2 - \sigma_0^2}. \quad (4.187)$$

Коэффициент динамичности  $a_4$  в данном случае можно представить либо как  $\theta_0/\alpha_0$ , либо как  $\theta_0/\alpha_0\kappa_4$ .

Амплитудно-частотная характеристика, соответствующая второму представлению коэффициента динамичности, и фазово-частотная характеристика, рассчитанные на основе «укороченного» уравнения качки, приведены на рис. 4.22 и 4.23. Эти характеристики ничем не отличаются от аналогичных характеристик обычного гармонического осциллятора с одной степенью свободы.

## § 24. Продольно-горизонтальная качка

Имея в виду большое удлинение корабля, при рассмотрении продольно-горизонтальной качки можно пренебречь инерционно-демпфирующими и дифракционными силами, а также взаимодействием этого вида качки с остальными. Таким образом, дифференциальное уравнение продольно-горизонтальной качки можно записать в простейшем виде:

$$m\ddot{\xi} = F_1^* \quad (4.188)$$

где  $F_1^*$  — проекция главной части возмущающей силы на ось  $Ox$  неизменно связанной с кораблем системы координат. Ограничиваясь для простоты случаем отсутствия хода, под  $\xi$  будем понимать абсолютное горизонтальное смещение корабля вдоль продольной оси.

Учитывая, что  $\partial\Phi_1/\partial n = \cos(n, x)$  и применив к формуле (4.50) преобразование Остроградского—Гаусса, получим следующее выражение для силы  $F_1^*$ :

$$F_1^* = i\rho g k_1 r e^{i\sigma t} \iiint_V e^{kz - i(k_1x + k_2y)} dV,$$

где  $V$  — объем подводной части корабля в положении равновесия на тихой воде. Интеграл по объему  $V$  можно записать в виде

$$\iiint_V e^{kz - i(k_1x + k_2y)} dV = \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_1x} \int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2y} d\eta dz dx.$$

Воспользовавшись равенствами (4.59) и (4.62), получим

$$\int_{-T}^0 e^{kz} \int_{-y}^y e^{-ik_2y} d\eta dz = \kappa_2 \omega,$$

где, напомним, через  $\omega$  обозначена погруженная площадь шпангоута. Значения коэффициента  $\kappa_2$  для шпангоута полуэллиптической формы определяются по графику, приведенному на рис. 4.4. Таким образом,

$$\iiint_V e^{kz - i(k_1x + k_2y)} dV = \int_{-L/2}^{L/2} a_2 (\cos k_1x - i \sin k_1x) dx = A_2^c - iA_2^s,$$

где

$$\left. \begin{matrix} A_2^c \\ A_2^s \end{matrix} \right\} = \int_{-L/2}^{L/2} a_2 \left\{ \begin{matrix} \cos k_1 x \\ \sin k_1 x \end{matrix} \right\} dx, \quad a_2 = \kappa_2 \omega.$$

Если теперь подставить полученное значение интеграла по объему  $V$  в формулу для  $F_1^*$ , будем иметь

$$F_1^* = \rho g \alpha_0 \cos \varepsilon (A_2^s + i A_2^c) e^{i \sigma_0 t}.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (4.67) для главной части возмущающей силы при поперечно-горизонтальной качке, видим, что в случае отсутствия хода корабля

$$F_1^* = F_2^* \operatorname{ctg} \varepsilon.$$

Это соотношение справедливо для углов  $\varepsilon$ , отличных от нуля и  $180^\circ$ .

Представим частное решение дифференциального уравнения (4.188) в виде

$$\xi = (\xi_1 + i \xi_2) e^{i \sigma_0 t}.$$

Тогда

$$-m \sigma_0^2 (\xi_1 + i \xi_2) = \rho g \alpha_0 \cos \varepsilon (A_2^s + i A_2^c)$$

и, следовательно,

$$\xi_1 = -\frac{\rho g \alpha_0 A_2^s}{m \sigma_0^2} \cos \varepsilon; \quad \xi_2 = -\frac{\rho g \alpha_0 A_2^c}{m \sigma_0^2} \cos \varepsilon.$$

Поскольку

$$\alpha_0 = kr = \frac{\sigma_0^2}{g} r, \quad \text{а} \quad m = \rho V,$$

последние равенства можно переписать в виде:

$$\xi_1 = -\frac{A_2^s r}{V} \cos \varepsilon; \quad \xi_2 = -\frac{A_2^c r}{V} \cos \varepsilon.$$

Амплитуда качки будет определяться формулой

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \frac{r \cos \varepsilon}{V} \sqrt{(A_2^s)^2 + (A_2^c)^2}. \quad (4.189)$$

Если в качестве математической модели смоченной поверхности корабля принять поверхность, симметричную относительно мидельшпангоута, то  $A_2^s$  превратится в нуль, как интеграл от нечетной функции. Если теперь в выражении для  $A_2^c$  вынести осредненное значение  $\kappa_2$  из-под знака интеграла, то согласно (4.98) можем написать

$$A_2^c = \kappa_2 K_1^c V.$$

Таким образом, для симметричного относительно миделя корабля

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = -\kappa_2 K_1^c r \cos \varepsilon; \quad \xi_0 = |\xi_2|.$$

Значения  $K_1^c$  определяют по графику, приведенному на рис. 4.7, как функции коэффициента продольной полноты корабля  $\varphi$ .

Особенно простой вид имеет решение для прямоугольного понтона на встречном волнении ( $\varepsilon = \pi$ ,  $k_2 = k \sin \varepsilon = 0$ ). В этом случае

$$\kappa_2 = \frac{2}{k_2 \omega} \int_{-T}^0 e^{kz} \sin k_2 y dz = \frac{1}{kT} (1 - e^{-kT});$$

$$K_1^c = \frac{2}{V} \int_0^{L/2} \omega \cos k_1 x dx = \frac{2}{kL} \sin \frac{kL}{2}$$

и, следовательно,

$$\xi_2 = \frac{2r}{k^2 L T} (1 - e^{-kT}) \sin \frac{kL}{2}.$$

При расчетах на ЭВМ можно находить значения  $A_2^c$  и  $A_2^s$  по теоретическому чертежу, либо, ограничиваясь параболической аппроксимацией строевой по шпангоутам, считать  $A_2^s = 0$ , а функцию  $A_2^c$  вычислять, как указано в § 19, пользуясь разложением (4.96).

## § 25. Параметрический резонанс

При изучении основных видов качки на тихой воде мы рассматривали собственные колебания корабля, а на регулярном волнении — вынужденные. При собственных колебаниях корабль, выведенный из положения равновесия некоторым начальным возмущением, затем изолирован от каких-либо внешних воздействий. Вынужденные же колебания происходят под непрерывным воздействием внешних сил, изменяющихся во времени по величине и направлению.

Однако возможен и третий вид колебаний, возникающий вследствие того, что под действием внешних сил в процессе движения изменяются параметры самой колебательной системы (качающегося корабля). В этом случае коэффициенты дифференциальных уравнений, зависящие от параметров системы, становятся явными функциями времени. Такие колебания называются параметрически возбуждаемыми или просто параметрическими. Они могут быть как затухающими, так и нарастающими во времени. В первом случае говорят, что система устойчива, а во втором — что неустойчива.

Параметрическое возбуждение наблюдается только при определенных соотношениях между частотой внешнего воздействия и частотой собственных колебаний системы и в этом отношении оно сходно с резонансом. По этой причине его часто называют параметрическим резонансом. Явление параметрического резонанса можно исследовать в рамках как линейной, так и нелинейной теории качки. Мы ограничимся линейной теорией и будем рассматривать простейшую задачу о симметричном относительно миделя корабле, расположенном лагом к волне. Если пренебречь поперечно-горизонтальными колебаниями, то задача сведется к рассмотрению двух видов качки — вертикальной и бортовой. При этом за счет вертикальной качки восстанавливающий момент при бортовой станет периодической функцией времени, что может явиться причиной возникновения параметрического резонанса.

Пользуясь равенствами (4.165) и (4.166) и табл. 14, напомним дифференциальное уравнение бортовой качки в виде

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + \rho g V h \theta = (\alpha_4 + i\beta_4) e^{i\sigma t}. \quad (4.190)$$

Для того, чтобы найти произведение  $Vh$  как функцию переменной  $\zeta$ , разложим его в ряд Маклорена и соответственно точности линейной теории качки отбросим члены разложения, содержащие  $\zeta$  в степени выше первой:

$$Vh = V_0 h_0 + \zeta \left. \frac{d(Vh)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}, \quad (4.191)$$

где  $V_0$  и  $h_0$  — водоизмещение и начальная поперечная метацентрическая высота при посадке по ватерлинию равновесия на тихой воде. Поскольку  $V$  и  $h$  зависят от  $\zeta$ , можем написать

$$\frac{d(Vh)}{d\zeta} = \frac{dV}{d\zeta} h + V \frac{dh}{d\zeta}. \quad (4.192)$$

Если корабль переместился вдоль положительного направления вертикальной оси, т. е. вверх, на малую величину  $\zeta$ , то его объемное водоизмещение будет равно

$$V = V_0 - S_0 \zeta,$$

где  $S_0$  — площадь ватерлинии в положении равновесия. Тогда, очевидно,

$$\frac{dV}{d\zeta} = -S_0.$$

Для метацентрической высоты можем написать формулу

$$h = r + z_c - z_g,$$

где  $r$  — метацентрический радиус, а  $z_c$  — аппликата центра величины, вычисленные с учетом вертикальной качки.

Учитывая, что  $z_g$  от  $\zeta$  не зависит, получим

$$\frac{dh}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta} + \frac{dz_c}{d\zeta}.$$

При вычислении производной от метацентрического радиуса будем считать, что в районе изменения ватерлинии борта корабля вертикальны, или, иначе говоря, что момент инерции площади ватерлинии  $J_x$  не зависит от осадки. В этом случае

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{dr}{dV} \frac{dV}{d\zeta} = J_x \frac{d}{dV} \left( \frac{1}{V} \right) \frac{dV}{d\zeta} = \frac{rS_0}{V}.$$

Аппликата центра величины будет определяться формулой]

$$z_c = \frac{M_V}{V},$$

где  $M_V$  — статический момент погруженного объема корабля относительно плоскости мгновенной ватерлинии. Тогда, очевидно,

$$\frac{dz_c}{d\zeta} = \frac{1}{V^2} \left( \frac{dM_V}{d\zeta} V - \frac{dV}{d\zeta} M_V \right).$$

Учитывая, что

$$M_V = \int_{-r}^{-\zeta} S_z(z + \zeta) dz,$$

где  $S_z$  — площадь ватерлинии с аппликатой  $z$ , и, пользуясь теоремой о производной интеграла по параметру, получим

$$\frac{dM_V}{d\zeta} = V$$

и, следовательно,

$$\frac{dz_c}{d\zeta} = 1 + \frac{S_0 z_c}{V}.$$

Таким образом,

$$\frac{dh}{d\zeta} = 1 + \frac{S_0}{V} (r + z_c).$$

Если теперь подставить выражения для производных водоизмещения и метацентрической высоты в (4.192), будем иметь

$$\frac{d(Vh)}{d\zeta} = V + S_0 z'_g.$$

Тогда согласно (4.191) можем написать

$$Vh = V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_g) \zeta$$

и дифференциальное уравнение (4.190) примет вид

$$(I_x + M_{44}) \ddot{\theta} + \Lambda_{44} \dot{\theta} + \rho g [V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_g) \zeta] \theta = (\alpha_4 + i\beta_4) e^{i\sigma_0 t}.$$

Разделив на коэффициент при второй производной, получим

$$\ddot{\theta} + 2\nu\dot{\theta} + \omega^2 (1 + \rho\zeta) \theta = (\alpha_{04} + i\beta_{04}) e^{i\sigma_0 t}, \quad (4.193)$$

где  $v = v_4$  и  $\omega = \omega_4$  определяются формулами (4.185) \* и, кроме того, введены обозначения:

$$\rho = \frac{V_0 + S_0 z_g}{V_0 h_0}; \quad \alpha_{04} = \frac{\alpha_4}{I_x + M_{44}}; \quad \beta_{04} = \frac{\beta_4}{I_x + M_{44}}.$$

Подставляя в (4.193) значение  $\zeta$ , определяемое формулой

$$\zeta = \zeta_0 \cos(\sigma_0 t - \gamma_3),$$

придем к следующему линейному неоднородному дифференциальному уравнению с переменным коэффициентом

$$\ddot{\theta} + 2v\dot{\theta} + \omega^2 [1 + \rho \zeta_0 \cos(\sigma_0 t - \gamma_3)] \theta = (\alpha_{04} + i\beta_{04}) e^{i\sigma_0 t}. \quad (4.194)$$

Не интересуясь его частным решением, рассмотрим соответствующее однородное уравнение, называемое уравнением Матье. Прежде всего, отбросим не играющую роли начальную фазу  $\gamma_3$  и, введя в соответствии с равенством

$$\theta = \vartheta e^{-vt} \quad (4.195)$$

новую переменную  $\vartheta$ , избавимся от члена, содержащего первую производную. Дифференцируя (4.195) и подставляя производные в уравнение (4.194) с отброшенной правой частью, получим

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 (b + \rho \zeta_0 \cos \sigma_0 t) \vartheta = 0, \quad (4.196)$$

где

$$b = 1 - \frac{v^2}{\omega^2} \approx 1, \quad \left( \frac{v^2}{\omega^2} \ll 1 \right).$$

Введем теперь безразмерную переменную  $\tau = \sigma_0 t/2$ . Тогда, очевидно,

$$\ddot{\vartheta} = \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} \frac{\sigma_0^2}{4}.$$

Если дополнительно обозначить

$$\omega^2 b = \frac{\sigma_0^2}{4} a; \quad \text{и} \quad \omega^2 \rho \zeta_0 = -2q \frac{\sigma_0^2}{4},$$

то уравнение (4.196) примет форму

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) \vartheta = 0,$$

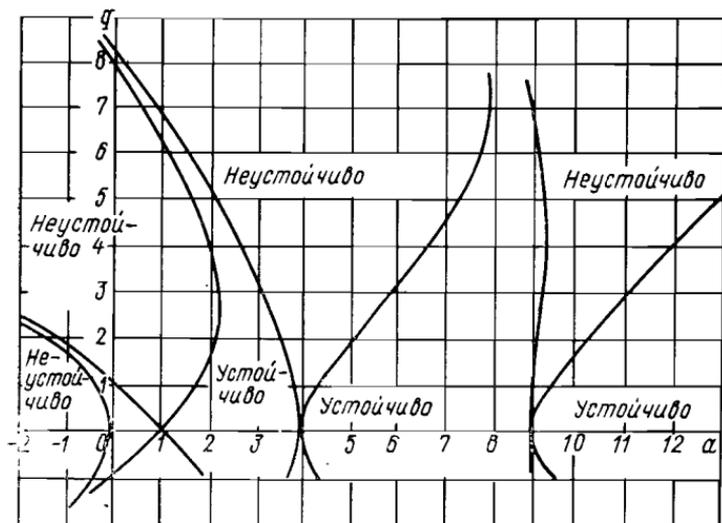
которая является канонической формой уравнения Матье.

Решениями этого уравнения являются специальные функции, называемые функциями Матье. Эти решения могут быть как ограниченными, так и неограниченно возрастающими. В первом случае система является устойчивой, во втором — неустойчивой. С этих позиций с одинаковым успехом можно рассматривать устойчивость

\* В этих формулах метацентрическая высота при осадке по ватерлинию равновесия обозначалась не через  $h_0$ , как в настоящем параграфе, а через  $h$ .

положения равновесия, когда  $\vartheta$  есть отклонение от этого положения, и устойчивость какого-либо вида движения, например гармонической бортовой качки, когда под  $\vartheta$  следует понимать вариацию угла качки  $\theta$ .

На рис. 4.24 приведена так называемая диаграмма устойчивости, на которой показаны области сочетаний параметров  $a$  и  $q$ , отвечающие устойчивым и неустойчивым состояниям системы. Поскольку диаграмма симметрична относительно оси  $a$ , на рисунке показана только верхняя ее часть. Эта диаграмма не связана с физической природой системы, и поэтому с ее помощью можно сделать заключение об устойчивости или неустойчивости состояния любой



4.24. Диаграмма устойчивости.

системы, описываемой уравнением Матье. При известных значениях  $a$  и  $q$  для такого заключения никаких вычислений не требуется. Из диаграммы видно, что при

$$a = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

области неустойчивости непосредственно примыкают к оси  $a$ , т. е. параметрический резонанс возникает при сколь угодно малых значениях  $q$ . Поскольку

$$a \approx \frac{4\omega^2}{\sigma_0^2},$$

легко видеть, что в данном случае

$$\frac{\sigma_0}{\omega} = \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

и, следовательно, опасность возникновения параметрического резонанса оказывается наибольшей при

$$\sigma_0 = 2\omega, \quad \omega, \quad \frac{2}{3}\omega, \dots \quad (4.197)$$

Здесь, напомним,  $\sigma_0$  — частота пульсации параметра (в нашем случае частота волны или равная ей частота вынужденной вертикальной качки), а  $\omega$  — частота собственных колебаний системы (собственная частота бортовой качки).

В практике скорее всего можно ожидать параметрического резонанса, возбуждаемого волнами, частота которых вдвое больше собственной частоты бортовой качки ( $\sigma_0 = 2\omega$ ). Такая частота характерна для относительно коротких волн, повторяемость которых значительно выше, чем длинных.

В заключение еще раз подчеркнем, что для возникновения параметрического резонанса какого-либо вида качки, принципиально говоря, не требуется, чтобы до этого имела место такая качка. Так, например, если на тихой воде модель корабля будет совершать гармоническую вертикальную качку, частота которой  $\sigma_0$  связана с собственной частотой бортовой качки  $\omega$  соотношением (4.197), то при сколь угодно малом наклонении вокруг продольной оси возникнут бортовые колебания с нарастающей амплитудой.

## Глава 5

---

### КАЧКА НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНЕНИИ

#### § 26. Некоторые основные понятия теории случайных процессов, применяемые в расчетах нерегулярной качки

Рассмотренная выше математическая модель волнения как системы плоских волн синусоидального профиля с совершенно одинаковыми характеристиками сугубо приближенно описывает действительную физическую картину явления. Поэтому в последние десятилетия уделялось большое внимание разработке методов более точного математического описания реального морского волнения с присущим ему случайным характером. Такую задачу и непосредственно связанную с ней задачу расчета нерегулярной качки удалось эффективно решить с помощью аппарата теории случайных процессов. Эта теория, возникшая в результате построения мате-

матических моделей реальных физических процессов, представляет собой чаще всего употребляемую в практике и наиболее быстро развивающуюся часть теории вероятностей.

Зародившись как наука о вероятности появления тех или иных случайных событий, теория вероятностей по мере своего развития перешла к изучению случайных величин, а затем и случайных процессов.

Как известно, случайным называется такое событие, которое при осуществлении определенного комплекса условий может произойти либо не произойти. Обобщением понятия случайного события является понятие случайной величины, т. е. такой величины, которая в результате опыта принимает одно из множества возможных значений — заранее неизвестно, какое именно. Случайная величина, зависящая от некоторого аргумента, называется случайной функцией. Иначе можно сказать, что случайной функцией называется такая функция, значение которой при каждом данном значении аргумента (или нескольких аргументов) является случайной величиной. Аргументами случайных функций могут быть произвольные скалярные или векторные величины. Если единственным аргументом случайной функции является время, то она называется случайным процессом. Случайные функции нескольких аргументов, например координат и времени, образуют случайные поля. Так, скорость частиц жидкости в любой точке взволнованного моря образует случайное векторное поле, а давление — случайное скалярное поле.

Вероятностные характеристики случайных функций (законы распределения, статистические моменты) тесно связаны с вероятностными характеристиками случайных величин.

Для полной характеристики случайной величины необходимо знать закон распределения, устанавливающий зависимость между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями. Различают два вида закона распределения: интегральную функцию (или просто функцию) распределения и дифференциальную функцию распределения, иначе называемую плотностью распределения или плотностью вероятности.

Интегральная функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  определяет вероятность того, что  $X$  примет значения, меньшие, чем  $x$ . Обозначив вероятность события  $A$  через  $P(A)$ , можем написать

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Интегральная функция (рис. 5.1) обладает следующими свойствами:

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1; \quad F(\infty) = 1; \\ F(-\infty) = 0.$$

Для непрерывных случайных величин более удобна дифференциальная функция распределения  $f(x)$ , которая связана с интег-

ральной функцией зависимостью

$$f(x) = \frac{dF}{dx}.$$

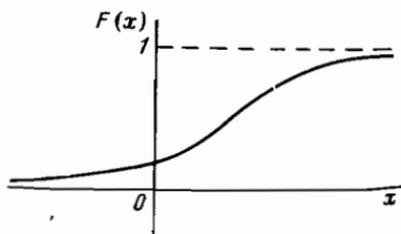
Очевидно, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi.$$

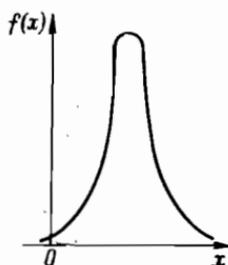
Плотность распределения (рис. 5.2) обладает следующими свойствами:

$$f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(\infty) = 1;$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$



5.1. Интегральная функция распределения случайной величины.



5.2. Дифференциальная функция распределения (плотность вероятности) случайной величины.

При решении некоторых задач удобно пользоваться понятием обеспеченности случайной величины  $X$ . Под обеспеченностью  $Q(x)$  понимается вероятность того, что  $X$  примет значения большие чем  $x$ :

$$Q(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi = 1 - F(x).$$

Закон распределения является наиболее исчерпывающей характеристикой случайной величины. Однако в практике он не всегда бывает известен. В этом случае для решения практических задач ограничиваются рассмотрением некоторых числовых характеристик законов распределения, которые определяют основные свойства случайных величин и могут служить для приближенных оценок. Эти числовые характеристики называются моментами распределения случайной величины. Различают начальные и центральные моменты. Начальным моментом порядка  $n$  называют величину

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Первый начальный момент ( $n = 1$ ) называется математическим ожиданием или средним значением случайной величины  $X$ :

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = m_x = M(X),$$

где  $M(X)$  и  $m_x$  — символы математического ожидания величины  $X$ .

Абсцисса центра тяжести площади, ограниченной кривой  $f(x)$ , будет

$$x_f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = m_x, \text{ так как } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины равно абсциссе центра тяжести площади, ограниченной кривой, выражающей дифференциальный закон распределения.

Центральным моментом порядка  $n$  называют интеграл вида

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n f(x) dx.$$

Как легко видеть, первый центральный момент  $\mu_1 = 0$ . Второй центральный момент

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = M[(X - m_x)^2] = D_x$$

называется дисперсией случайной величины  $X$ . В механическом смысле дисперсия представляет собой момент инерции площади, ограниченной кривой  $f(x)$ , относительно центральной оси, т. е. оси, проходящей через точку с абсциссой  $m_x$ . Дисперсия характеризует разброс возможных значений случайной величины относительно среднего ее значения. Чем дисперсия больше, тем больше разброс.

В тех случаях, когда отклонения случайной величины от ее среднего значения не подвержены какому-либо систематическому влиянию или ограничению, плотность вероятности описывается так называемым нормальным законом распределения (законом Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2D_x}} \quad (5.1)$$

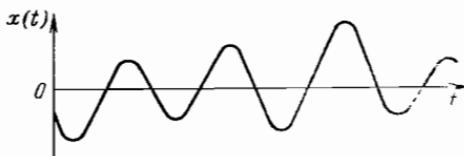
Очевидно, что нормальный закон полностью определяется математическим ожиданием и дисперсией. Несколько забегая вперед, отметим, что этому закону подчиняются ординаты реального морского волнения и нерегулярной качки.

Будем теперь считать, что непрерывная нормально распределенная случайная величина  $x$  зависит от некоторого аргумента  $t$  и имеет дисперсию  $D_x$  и нулевое среднее значение. Если в интервале между соседними нулями  $x(t)$  мало отличается по форме от синусоиды и имеет один экстремум (рис. 5.3), то распределение ее амплитуд  $x_0$  подчиняется закону Релея:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0) &= \frac{x_0}{D_x} e^{-\frac{x_0^2}{2D_x}} && \text{при } x_0 > 0; \\ f(x_0) &= 0 && \text{при } x_0 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Этот закон широко применяется для вероятностного описания амплитуд морского волнения и нерегулярной качки.

5.3. Непрерывная случайная величина, зависящая от времени (реализация случайного процесса).



Найдем выражение обеспеченности  $Q(x_0)$  амплитуды  $x_0$ , распределенной по закону Релея. Сначала определим интегральную функцию распределения. Учитывая (5.2), можем написать

$$F(x_0) = \frac{1}{D_x} \int_0^{x_0} \xi e^{-\frac{\xi^2}{2D_x}} d\xi.$$

Возьмем такой интеграл

$$\int_0^{x_0} \xi e^{a\xi^2} d\xi = \frac{1}{2a} \int_0^{x_0} e^{a\xi^2} d(a\xi^2) = \frac{1}{2a} e^{a\xi^2} \Big|_0^{x_0}.$$

Подставляя сюда  $a = -1/2 D_x$  и пределы, найдем

$$F(x_0) = 1 - e^{-\frac{x_0^2}{2D_x}}.$$

Обеспеченность величины  $x_0$  будет

$$Q(x_0) = 1 - F(x_0) = e^{-\frac{x_0^2}{2D_x}}.$$

Из последней формулы легко установить зависимость между  $x_0$  — амплитудой данной обеспеченности и дисперсией  $D_x$  мгновенных значений величины  $X$ :

$$\ln Q(x_0) = -\frac{x_0^2}{2D_x},$$

или

$$x_0 = \sqrt{-2 \ln Q(x_0) D_x} = k_0 \sqrt{D_x}, \quad (5.3)$$

где

$$k_0 = \sqrt{-2 \ln Q(x_0)} = \sqrt{2 \ln \frac{1}{Q(x_0)}}. \quad (5.4)$$

Найдем среднее значение случайной величины  $x_0$ , распределенной по закону Релея, и соответствующую ему обеспеченность. Поскольку при  $x_0 < 0$  плотность вероятности  $f(x_0) = 0$ , то среднее значение (математическое ожидание, начальный момент первого порядка) величины  $x_0$  будет определяться интегралом

$$x_{0\text{cp}} = \int_0^{\infty} x_0 f(x_0) dx_0 = 2 \int_0^{\infty} \frac{x_0^2}{2D_x} e^{-\frac{x_0^2}{2D_x}} dx_0.$$

Введем новую переменную интегрирования  $z$ , связанную с  $x_0$  соотношением

$$z = \frac{x_0^2}{2D_x}.$$

Тогда, очевидно,

$$x_0 = \sqrt{2D_x z}; \quad dx_0 = \sqrt{\frac{D_x}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

и, следовательно,

$$x_{0\text{cp}} = \sqrt{2D_x} \int_0^{\infty} \sqrt{z} e^{-z} dz.$$

Возьмем последний интеграл по частям, полагая

$$\sqrt{z} = u; \quad e^{-z} dz = dv.$$

В этом случае

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = du; \quad -e^{-z} = v$$

и

$$\int_0^{\infty} \sqrt{z} e^{-z} dz = -\sqrt{z} e^{-z} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, известен

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{\pi}.$$

<sup>1</sup> Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, с. 329.

Таким образом, имеем

$$x_{0\text{cp}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{D_x} = 1,25 \sqrt{D_x}. \quad (5.5)$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой (5.3), видим, что средней амплитуде соответствует значение  $k_0 = \sqrt{\pi/2} = 1,25$ . Подставляя это значение в выражение (5.4), получим

$$\ln \frac{1}{Q(x_{0\text{cp}})} = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{1}{Q(x_{0\text{cp}})} = 2,192;$$

$$Q(x_{0\text{cp}}) = 0,456.$$

Итак, среднему значению случайной величины, распределенной по закону Релея, соответствует обеспеченность  $Q = 45,6\%$ . Значения коэффициента  $k_0$  для различной обеспеченности, вычисленные по формуле (5.4), приведены в табл. 15.

Таблица 15. Значения коэффициента  $k_0$  для различной обеспеченности

|         |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $Q, \%$ | 0,1  | 0,5  | 1    | 2    | 3    | 5    | 10   | 20   | 30   |
| $k_0$   | 3,7  | 3,25 | 3,04 | 2,79 | 2,64 | 2,44 | 2,15 | 1,79 | 1,56 |
| $Q, \%$ | 40   | 45,6 | 50   | 60   | 70   | 80   | 90   | 95   | 100  |
| $k_0$   | 1,36 | 1,25 | 1,18 | 1,01 | 0,85 | 0,67 | 0,45 | 0,32 | 0    |

Во многих практически важных случаях приходится иметь дело не с одной, а с двумя или, вообще говоря, с  $n$  случайными величинами, образующими систему случайных величин. Характеристикой системы двух случайных величин  $X$  и  $Y$  является двумерная функция распределения  $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$  или двумерная плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Так, при нормальном распределении двумерная плотность определяется пятью параметрами:  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $D_x$ ,  $D_y$  и  $r_{xy}$ , где  $r_{xy}$  — так называемый коэффициент корреляции. Он определяется формулой

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad \text{где } K_{xy} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy$$

и называется корреляционным моментом. Величины, для которых  $K_{xy} = 0$ , называются некоррелированными. Независимые случай-

ные величины всегда некоррелированы. Однако обратное утверждение неверно: некоррелированные величины могут быть и зависимыми.

Переходя к вероятностным характеристикам случайных процессов, условимся называть конкретный вид, который приобретает случайный процесс  $x(t)$  в результате того или иного опыта, реализацией. Если рассмотреть совокупность значений  $x(t)$  во всех реализациях при фиксированном  $t$ , то мы получим случайную величину, называемую сечением случайного процесса. При неограниченном возрастании числа реализаций эта величина будет непрерывной. Ее вероятностные характеристики можно использовать для описания случайного процесса.

Рассмотрим случайную величину  $x(t_1)$  — сечение случайного процесса в момент времени  $t_1$ . Эта величина обладает законом распределения, который в общем случае зависит от времени. Обозначим плотность распределения этой величины через  $f(x_1, t_1)$  и будем называть ее одномерной плотностью вероятности случайного процесса.

Очевидно, что функция  $f(x_1, t_1)$  характеризует распределение только в данный момент времени и ничего не говорит о распределении при других  $t$ . Более полную информацию о случайном процессе  $x(t)$  дает так называемая двумерная плотность распределения случайного процесса

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, t_1, x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x < x_1 \text{ при } t = t_1 \text{ и } x < x_2 \text{ при } t = t_2).$$

Для исчерпывающей характеристики случайного процесса необходимо знать его  $n$ -мерную плотность вероятности при  $n \rightarrow \infty$ , однако практически она никогда не бывает известна. Вместе с тем, существуют такие случайные процессы, которые полностью характеризуют  $n$ -мерной плотностью при конечных значениях  $n$ .

В ряде случаев нет необходимости отыскивать многомерную плотность вероятности случайного процесса, если даже можно ее определить. Для практических целей достаточно бывает найти числовые характеристики процесса, аналогичные рассмотренным выше числовым характеристикам случайных величин. Такие характеристики в общем случае будут уже не числами, а функциями времени.

Рассмотрим сечение случайного процесса  $x(t)$  в определенный момент времени  $t$ . Это будет, как уже говорилось, случайная величина. Определим ее начальный момент первого порядка (математическое ожидание)

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, t) dx.$$

Очевидно, что оно, вообще говоря, зависит от  $t$ . Итак, математическим ожиданием случайного процесса называется неслучайная

функция времени, которая при фиксированных значениях аргумента  $t$  равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса. Вокруг  $m_x(t)$ , как среднего значения, группируются различные реализации процесса (рис. 5.4).

Найдем центральный момент второго порядка сечения случайного процесса  $x(t)$  — дисперсию случайного процесса:

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x, t) dx = M \{|x(t) - m_x(t)|^2\}.$$

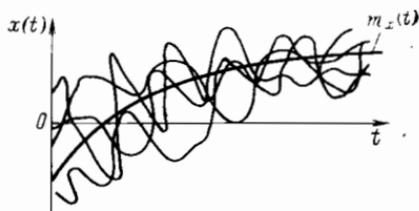
Очевидно, что в общем случае дисперсия случайного процесса также есть неслучайная функция времени.

Введенные выше понятия математического ожидания и дисперсии случайного процесса еще недостаточны для его характеристики. Для того чтобы установить статистическую зависимость между значениями случайного процесса  $x(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , вводят понятие корреляционной (автокорреляционной) функции  $K_x(t_1, t_2)$ , которая при каждой паре значений  $t_1$  и  $t_2$  равна корреляционному моменту соответствующих сечений процесса  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] [x_2 - \\ &- m_x(t_2)] f(x_1, t_1, x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= M \{|x(t_1) - m_x(t_1)| [x(t_2) - m_x(t_2)]\}. \end{aligned}$$

При

$$t_1 = t_2 = t \quad K_x(t, t) = M \{|x(t) - m_x(t)|^2\} = D_x(t).$$



5.4. Математическое ожидание случайного процесса.

Это значит, что дисперсия случайного процесса может быть определена как частное значение его корреляционной функции. Кроме того, корреляционная функция обладает следующими свойствами: она симметрична относительно  $t_1$  и  $t_2$ , т. е.  $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$ ; при  $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$   $K_x(t_1, t_2) \rightarrow 0$ , так как статистическая связь между  $x(t_1)$  и  $x(t_2)$  при бесконечном промежутке между моментами времени  $t_1$  и  $t_2$  отсутствует.

Раздел теории случайных процессов, в котором оперируют только моментами первого и второго порядков, называется корреляционной теорией случайных процессов. Для того чтобы в рамках этой теории исследовать систему случайных процессов, например  $x(t)$  и  $y(t)$ , помимо их автокорреляционных функций  $K_x(t_1, t_2)$  и  $K_y(t_1, t_2)$ , вводится понятие взаимной корреляционной функции  $K_{xy}(t_1, t_2)$ , характеризующей статистическую зависимость между рассматриваемыми случайными процессами. При каждой паре значений  $t_1$  и  $t_2$  эта функция равна корреляционному моменту сечений процесса  $x(t)$  в момент времени  $t_1$  и процесса  $y(t)$  в момент вре-

мени  $t_2$ . Таким образом, можем написать

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] [y_2 - m_y(t_2)] f(x_1, t_1, y_2, t_2) dx_1 dy_2 = \\ = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] [y(t_2) - m_y(t_2)] \}, \quad (5.6)$$

где  $f(x_1, t_1, y_2, t_2)$  — двухмерная плотность вероятности случайных величин  $x(t_1)$  и  $y(t_2)$ .

Развитое морское волнение и качка корабля принадлежат к большому классу случайных процессов, называемых стационарными. Этот термин можно применять как в строгом, так и в широком смысле.

Стационарными в строгом смысле называются такие процессы; многомерная плотность вероятности которых не зависит от изменения начала отсчета времени, т. е.

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots \\ \dots; x_n, t_n + \tau),$$

где  $\tau$  — некоторый фиксированный произвольный промежуток времени.

Учитывая произвольность этого промежутка, положим  $\tau = -t_1$ . Тогда, как легко видеть, одномерная плотность вероятности стационарного случайного процесса оказывается одинаковой для всех моментов времени

$$f(x_1, t_1) = f(x_1, t_1 + \tau) = f(x_1, 0) = f(x_1)$$

и его математическое ожидание постоянно

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1) dx_1 = \text{const.}$$

Двухмерная плотность вероятности в этом случае зависит только от разности  $t_2 - t_1$

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = f(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1)$$

и, следовательно, корреляционная функция процесса также будет зависеть только от этой разности:

$$K_x(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f(x_1, x_2, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = K_x(t_2 - t_1),$$

а дисперсия его, которая определяется как корреляционная функция при  $t_2 = t_1$ , не будет зависеть от времени

$$D_x = K_x(0) = \text{const.}$$

Приведенное выше строгое определение стационарности процесса в случае, когда ограничиваются корреляционной теорией, можно заменить более широким понятием. Согласно А. Я. Хинчину случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия постоянны, а кор-

реляционная функция зависит только от разности моментов времени, для которых вычислены значения ординат процесса. Мы будем пользоваться этим понятием стационарности.

Для практического определения характеристик стационарных случайных процессов используется свойство эргодичности. Это свойство заключается в том, что статистическая характеристика процесса, полученная осреднением по множеству реализаций в заданный момент времени, с вероятностью, произвольно близкой к единице, равна характеристике, полученной осреднением по одной достаточно длительной реализации. В этом случае при достаточно больших значениях промежутка времени  $T$  можно написать

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$$D_x = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt;$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt,$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ .

Приведенные формулы могут быть использованы для определения статистических характеристик морского волнения и качки по записи одной достаточно длительной реализации.

## § 27. Спектральное разложение случайных функций.

### Понятие об одномерных и двухмерных спектрах волнения

Рассмотрим некоторую периодическую функцию  $f(t)$ , где  $t$  — любой аргумент — не обязательно время. Свойство периодичности функции, как известно, записывается в виде

$$f(t) = f(t + nT), \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где через  $T$  обозначен период. Периодическая функция с несущественными для технических приложений математическими ограничениями может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t), \quad (5.7)$$

где

$$\omega_j = j \frac{2\pi}{T} = j\omega_1; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Умножим правую и левую части ряда на  $\cos \omega_k t$  и проинтегрируем в пределах от  $-T/2$  до  $T/2$ . Затем умножим обе части ряда на  $\sin \omega_k t$  и проинтегрируем в тех же пределах. Учитывая, что по свойству ортогональности одноименных функций (синусов или ко-

синусов) кратных углов

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_j t \sin \omega_k t dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_j t \cos \omega_k t dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{при } k=j \\ 0 & \text{при } k \neq j \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_j t \sin \omega_k t dt = 0,$$

получим следующие формулы для коэффициентов ряда:

$$A_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_j t dt; \quad B_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_j t dt. \quad (5.8)$$

Если коэффициенты определены по этим формулам, то при сохранении любого конечного числа  $N$  членов ряда он дает наименьшее квадратичное отклонение от точного значения функции  $f(t)$ . С увеличением числа членов аппроксимация улучшается, и при  $N \rightarrow \infty$  ряд дает точное значение функции.

Ряд Фурье представляет собой разложение периодической функции. Это разложение может быть обобщено и на случай непериодической функции с помощью предельного перехода к  $T \rightarrow \infty$ . Действительно, непериодическую функцию можно рассматривать как предельный случай периодической функции при неограниченно возрастающем периоде. Для получения соответствующих формул подставим выражения (5.8) для коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  в ряд (5.7). Тогда получим

$$f(t) = \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \cos \omega_j t \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_j t dt + \sin \omega_j t \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_j t dt \right).$$

Теперь сделаем предельный переход, считая  $T \rightarrow \infty$ . В этом случае сумма в последней формуле перейдет в интеграл, частота  $\omega_1 = 2\pi/T$  станет бесконечно малой величиной, которую обозначим через  $d\omega$ , а  $\omega_j = j\omega_1$  из дискретной превратится в непрерывную величину (текущую частоту)  $\omega$ . Таким образом, будем иметь

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) d\omega, \quad (5.9)$$

где

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad b = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (5.10)$$

Учитывая, что  $a$  есть четная, а  $b$  — нечетная функция  $\omega$ , вместо (5.9) можем написать

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) d\omega. \quad (5.11)$$

Формула (5.11) называется интегралом Фурье. Этот интеграл представляет непериодическую функцию суммой бесконечно большого числа периодических составляющих. Если ряд Фурье представляет периодическую функцию как сумму бесконечно большого числа периодических составляющих с дискретными частотами, то в интеграле Фурье частоты образуют непрерывную последовательность. Иными словами, в разложении непериодической функции имеются все частоты.

Введем некоторую функцию  $S(\omega)$ , называемую спектром, следующим образом:

$$S(\omega) = a - ib, \quad (5.12)$$

где  $a$  и  $b$  определяются равенствами (5.10). Тогда будем иметь

$$S(\omega)e^{i\omega t} = (a - ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + i(a \sin \omega t - b \cos \omega t).$$

Учитывая, что мнимая часть последнего равенства суть нечетная функция  $\omega$  и при интегрировании в симметричных пределах даст нуль, можем переписать интеграл Фурье (5.11) в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.13)$$

Функцию  $S(\omega)$  получим, подставив в равенство (5.12) значения  $a$  и  $b$ , определяемые формулами (5.10). Учитывая, что

$$\cos \omega t - i \sin \omega t = e^{-i\omega t},$$

будем иметь

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.14)$$

Формулы (5.13) и (5.14) представляют собой пару преобразований Фурье, связывающих между собой действительную функцию  $f(t)$  и комплексную  $S(\omega)$ . Иначе говоря, эти формулы есть пара интегральных уравнений, каждое из которых является решением другого. Таким образом, если известна функция  $S(\omega)$ , то тем самым определена и функция  $f(t)$  и наоборот.

Если функция  $f(t)$  четная, то формулы (5.13) и (5.14) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t d\omega; \\ S(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Эти равенства представляют собой так называемые косинус-преобразования Фурье.

Для нечетной функции  $f(t)$  получим соотношения:

$$f(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega t d\omega;$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt,$$

выражающие синус-преобразования Фурье.

Функция  $f(t)$  может быть представлена интегралом Фурье, если с ростом своего аргумента она убывает настолько быстро, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (5.16)$$

где вертикальные черточки есть символ модуля (абсолютного значения) функции. Для выполнения этого условия требуется, в частности, чтобы среднее значение функции  $f(t)$  равнялось нулю.

Корреляционная функция нерегулярного морского волнения<sup>1</sup>  $K(\tau)$  условию (5.16) удовлетворяет и, кроме того, она является четной функцией своего аргумента. Это дает возможность, заменив в общих выражениях косинус-преобразований Фурье (5.15) функцию  $f(t)$  на  $K(\tau)$ , получить соотношения, связывающие корреляционную функцию волнения со спектром волновых ординат  $S(\omega)$ , в виде:

$$\left. \begin{aligned} K(\tau) &= \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \\ S(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Эти соотношения справедливы, если функция  $S(\omega)$  абсолютно интегрируема, т. е. удовлетворяет условию, аналогичному (5.16).

Как показано в § 26, при  $\tau = 0$  корреляционная функция стационарного случайного процесса переходит в его дисперсию, т. е.

$$D = K(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (5.18)$$

Таким образом, дисперсия равна площади под кривой  $S(\omega)$ . Иначе говоря, ординаты кривой  $S(\omega)$ , характеризуют распределение дисперсии по частотам. По этой причине функцию  $S(\omega)$  иногда называют спектральной плотностью дисперсий. В механическом смысле дисперсия стационарного случайного процесса представляет собой его мощность, и функция  $S(\omega)$ , характеризующая распределение дисперсий по частотам, одновременно характеризует

<sup>1</sup> Поскольку здесь рассматривается один случайный процесс, его спектральная плотность и корреляционная функция обозначены через  $S(\omega)$  и  $K(\tau)$  без каких-либо индексов. При рассмотрении нескольких процессов во избежание путаницы будут использоваться соответствующие индексы.

распределение мощности. Из-за этого функцию  $S(\omega)$ , помимо частотного спектра, спектральной плотности дисперсий или просто спектральной плотности процесса, называют еще его энергетическим спектром.

Ординату свободной поверхности волнуемой жидкости в данной точке пространства рассматривают в теории нерегулярных волн как стационарный (в широком смысле) случайный процесс. Как доказывается в теории случайных функций, такой процесс может быть представлен в виде так называемого интеграла Фурье — Стильеса:

$$z(t) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dG(\omega), \quad (5.19)$$

который отличается от обычного интеграла тем, что под знаком интеграла стоит не дифференциал аргумента  $d\omega$ , а дифференциал  $dG(\omega)$  некоторой случайной функции аргумента  $\omega$ .

Физический смысл выражения (5.19) состоит в том, что случайный процесс рассматривается как суперпозиция гармонических составляющих со случайными бесконечно малыми комплексными амплитудами  $dG(\omega)$ , а следовательно, со случайными амплитудами и фазами.

Если нерегулярное волнение рассматривать как двухмерное, т. е. считать гребни бесконечно длинными, то в соответствии с изложенным выше ордината взволнованной поверхности может быть представлена как результат наложения распространяющихся в одном определенном направлении бесконечно большого числа регулярных синусоидальных волн (гармоник) с частотами  $0 < \sigma_0 < \infty$ . Таким образом, профиль элементарной гармоник будет описываться выражением

$$r \cos(\sigma_0 t - kx + \gamma),$$

где  $r$  — случайная бесконечно малая амплитуда;  $k = \sigma_0^2/g$  — волновое число;  $\gamma$  — случайная фаза, которую обычно считают равномерно распределенной в интервале от нуля до  $2\pi$ .

Спектр двухмерного (плоского) нерегулярного волнения называют одномерным, так как ордината кривой  $S$  зависит только от одной переменной  $\sigma_0$ . Спектр трехмерного нерегулярного волнения получают в предположении о том, что оно представляет собой суперпозицию бесконечно большого числа плоских волн, распространяющихся в различных направлениях. Амплитуда и фаза каждой плоской волны при этом рассматриваются как случайные величины.

Спектральная плотность нерегулярных волн, распространяющихся под углом  $\delta$  к генеральному (видимому) направлению распространения волн, представляется в виде:

$$S(\sigma_0, \delta) = S(\sigma_0) \varphi(\delta) \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$S(\sigma_0, \delta) = 0 \quad \text{при других значениях } \delta.$$

Поскольку спектр трехмерного волнения  $S(\sigma_0, \delta)$  зависит от двух переменных — частоты  $\sigma_0$  и угла  $\delta$  — его (спектр) называют двухмерным. Для функции  $\varphi(\delta)$ , характеризующей угловое распределение энергии, различными авторами предложены формулы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\delta) &= \frac{1}{2} \cos \delta; \\ \varphi(\delta) &= \frac{2}{\pi} \cos^2 \delta; \\ \varphi(\delta) &= \frac{8}{3\pi} \cos^4 \delta. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Наиболее широкое применение в практике расчетов находят вторая и третья формулы.

Если двухмерный спектр  $S(\sigma_0, \delta)$  проинтегрировать по углу  $\delta$  в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , то получим одномерный спектр  $S(\sigma_0)$ . Дисперсия трехмерного волнения определяется соотношением

$$D = \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S(\sigma_0, \delta) d\delta d\sigma_0 = \int_0^{\infty} S(\sigma_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\delta) d\delta d\sigma_0 = \int_0^{\infty} S(\sigma_0) d\sigma_0.$$

Таким образом, должно иметь место равенство

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\delta) d\delta = 1.$$

Очевидно, что все приведенные выше представления функции  $\varphi(\delta)$  тому равенству удовлетворяют.

## § 28. Связь спектральных и вероятностных характеристик волнения

Спектральная плотность случайного процесса не определяет собой законов его распределения. При одном и том же законе распределения спектральные плотности могут быть разными. И наоборот, процессы с одинаковыми законами распределения могут иметь различные спектры. Вместе с тем, некоторые вероятностные характеристики волнения можно определить по его спектральным характеристикам, в частности, по так называемым моментам спектра.

Моментом спектра порядка  $q$  называется интеграл

$$m_q = \int_0^{\infty} \sigma_0^q S(\sigma_0) d\sigma_0, \quad (5.21)$$

а шириной спектра — величина

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}}, \quad (5.22)$$

заключенная в пределах  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Из равенств (5.18) и (5.21)

видно, что момент нулевого порядка представляет собой дисперсию случайного процесса

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(\sigma_0) d\sigma_0 = D.$$

Эта формула является одним из основных соотношений между спектральными и вероятностными характеристиками процесса.

Можно доказать, что средний период волнения  $\tau_{\text{ср}}$ , если понимать его как удвоенный средний промежуток времени между соседними нулями реализации, будет определяться формулой

$$\tau_{\text{ср}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} = \frac{2\pi}{\sigma_{\text{ср}}}, \quad (5.23)$$

где

$$\sigma_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}. \quad (5.24)$$

Через моменты спектра можно также определить среднюю длину волны.

Для более подробного вероятностного описания волнения требуется знание законов распределения основных его элементов.

Многочисленные записи нерегулярного волнения, сделанные океанографами разных стран, показывают что ординаты  $z$  взволнованной поверхности в фиксированной точке распределяются по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием (средним значением). Таким образом, на основании (5.1) формулу для плотности вероятности ординат нерегулярного волнения можно написать в виде

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{z^2}{2D}}, \quad (5.25)$$

где  $D$  — дисперсия ординат.

В спектральной теории случайных процессов различают процессы с узким и широким спектрами. У процессов с узким спектром почти вся энергия приходится на небольшой интервал частот  $\Delta\sigma_0$ , близких к некоторой частоте  $\sigma_m$  (рис. 5.5, кривая 1). Нулевой, второй и четвертый моменты такого спектра можно приближенно представить следующими выражениями:

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(\sigma_0) d\sigma_0 \approx S(\sigma_m) \Delta\sigma_0;$$

$$m_2 = \int_0^{\infty} \sigma_0^2 S(\sigma_0) d\sigma_0 \approx \sigma_m^2 S(\sigma_m) \Delta\sigma_0;$$

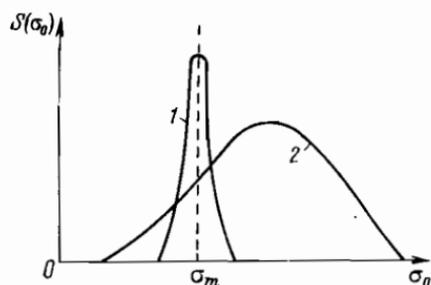
$$m_4 = \int_0^{\infty} \sigma_0^4 S(\sigma_0) d\sigma_0 \approx \sigma_m^4 S(\sigma_m) \Delta\sigma_0.$$

Тогда

$$\frac{m_2^2}{m_0 m_4} \approx 1$$

и, как видно из формулы (5.22), ширина спектра  $\epsilon$  близка к нулю.

Реализация процессов с узким спектром близки по форме к синусоиде<sup>1</sup> (см. рис. 5.3), и если их ординаты распределяются по нормальному закону, то распределение амплитуд подчиняется закону Релея, согласно которому плотность вероятности амплитуд зависит только от одного параметра — дисперсии ординат процесса. Такой подход дает вполне удовлетворительные результаты



5.5. Узкий и широкий спектры.

при  $\epsilon < 0,4$ . Хотя ширина спектра нерегулярного волнения не всегда удовлетворяет этому ограничению, в практике расчетов качки считают, что амплитуды волн  $r$  распределяются по закону Релея

$$f(r) = \frac{r}{D} e^{-\frac{r^2}{2D}},$$

где, как и в (5.25),  $D$  — дисперсия волновых ординат.

Если энергия процесса не сосредоточена вблизи какой-либо

определенной частоты, а «размазана» по относительно большому диапазону, то говорят, что процесс обладает широким спектром (рис. 5.5, кривая 2). У таких процессов кривая спектральной плот-



5.6. Реализация случайного процесса с широким спектром.

ности имеет значительные ординаты при высоких частотах. Вследствие этого момент четвертого порядка

$$m_4 = \int_0^{\infty} \sigma_0^4 S(\sigma_0) d\sigma_0$$

достигает больших значений, отношение  $m_2^2/m_0 m_4$  оказывается малым по сравнению с единицей, а ширина спектра  $\epsilon$ , определяемая

<sup>1</sup> Спектр гармонических колебаний представляет собой одну вертикальную линию.

формулой (5.22), приближается к единице. Наличие в широком спектре высокочастотных гармоник приводит к тому, что характер реализации процесса существенно отличается от синусоидального. В частности, между нулевыми точками реализация может иметь не один, а несколько экстремумов, называемых вторичными (рис. 5.6). В этом случае, отождествляя понятие амплитуды с понятием экстремума ординат процесса, можно говорить о законе распределения экстремумов. Если ординаты процесса с широким спектром распределяются по нормальному закону, то распределение экстремумов подчиняется так называемому закону Райса, который при  $\varepsilon \rightarrow 1$  переходит в нормальный закон. Таким образом, для нормального процесса с предельно широким спектром законы распределения ординат и экстремумов оказываются одинаковыми.

## § 29. Аналитическое представление спектров волнения.

### Нормированные спектры.

Для аналитического представления спектра нерегулярного морского волнения можно использовать два метода. В первом из них параметры спектра рассматривают как функции условий волнообразования: скорости и продолжительности действия ветра, длины разгона волн и т. д. Во втором методе считают известными видимые элементы волн (например, среднюю высоту или высоту 3% обеспеченности, средний период) и параметры спектра определяют как функции этих элементов. Первый метод используют, главным образом, для прогнозов волнения, второй — для расчета воздействия волн на различные сооружения, в том числе и на корабли.

Для спектральной плотности волновых ординат ряд авторов предложили формулы, большинство из которых имеют одинаковую структуру следующего вида:

$$S_3(\sigma_0) = A\sigma_0^{-k} e^{-B\sigma_0^{-n}}, \quad (5.26)$$

где  $k$  и  $n$  — целые числа ( $k \geq 5$ ,  $n \geq 2$ ), а  $A$  и  $B$  — некоторые параметры, зависящие от условий волнообразования или статистических характеристик волн. Моменты спектра (5.26) в соответствии с (5.21) будут определяться формулой

$$m_q = \int_0^{\infty} A\sigma_0^{q-k} e^{-B\sigma_0^{-n}} d\sigma_0, \quad (5.27)$$

где  $q$  — порядок момента.

Введем в (5.27) новую переменную интегрирования  $t = B\sigma_0^{-n}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= t^{-\frac{1}{n}} B^{\frac{1}{n}}; & \sigma_0^{q-k} &= t^{\frac{k-q}{n}} B^{\frac{q-k}{n}}; \\ d\sigma_0 &= -\frac{1}{n} B^{\frac{1}{n}} t^{-\frac{1+n}{n}} dt, \end{aligned}$$

нижним пределом интегрирования по переменной  $t$  станет бесконечность, а верхним — нуль. Таким образом, имеем

$$m_q = \frac{1}{n} AB \frac{q-k+1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{k-q-1-n}{n}} dt.$$

Используя специальную функцию

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (x > 0),$$

называемую гамма-функцией, можем написать

$$m_q = \frac{1}{n} AB \frac{q-k+1}{n} \Gamma\left(\frac{k-q-1}{n}\right).$$

Выпишем моменты нулевого, второго и четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{n} AB \frac{1-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right); \\ m_2 &= \frac{1}{n} AB \frac{3-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right); \\ m_4 &= \frac{1}{n} AB \frac{5-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-5}{n}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Считая спектр волнения узким<sup>1</sup> и распределение амплитуд подчиняющимся закону Релея, нетрудно выразить через эти моменты статистические характеристики волн. Так, в соответствии с (5.5) средняя амплитуда волны будет определяться формулой

$$r_{cp} = \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0} = 1,25 \sqrt{m_0},$$

где  $m_0 = D$  — дисперсия волновых ординат. Таким образом, средняя высота волны

$$h_{cp} = 2r_{cp} = \sqrt{2\pi m_0} = 2,5 \sqrt{m_0}.$$

Средний период  $\tau_{cp}$  и средняя частота  $\sigma_{cp}$  согласно (5.23) и (5.24) будут:

$$\tau_{cp} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}; \quad \sigma_{cp} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}. \quad (5.29)$$

Для определения частоты  $\sigma_m$ , отвечающей максимуму спектра (5.26), приравняем нулю производную функции  $S_3(\sigma_0)$  по частоте

$$\frac{dS_3(\sigma_0)}{d\sigma_0} = A \left( -k\sigma_0^{-k-1} + nB\sigma_0^{-k-n-1} \right) e^{-B\sigma_0^{-n}} = 0.$$

<sup>1</sup> При известных значениях  $m_0$ ,  $m_2$  и  $m_4$  ширину спектра легко определить по формуле (5.22).

Отсюда следует, что

$$k\sigma_m^{-k-1} = nB\sigma_m^{-k-n-1},$$

или

$$\sigma_m = \sqrt[n]{\frac{n}{k} B}. \quad (5.30)$$

Значения параметров спектра (5.26), предложенные различными авторами для полностью развитого волнения, приведены в табл. 16.

Таблица 16. Параметры спектра полностью развитого волнения

| № пп | Авторы   | A  | B                                     | k | n |
|------|--|--|---------------------------------------|---|---|
| 1    | Нейман   | $3,05 \frac{\pi}{2}$                       | $2 \left( \frac{g}{v_B} \right)^2$    | 6 | 2 |
| 2    | Пирсон и Москович  | $16,2 \cdot 10^{-3} g^2$                   | $0,74 \left( \frac{g}{v_B} \right)^4$ | 5 | 4 |
| 3    | Второй международный конгресс по конструкции и прочности судов | $0,28 h_{cp}^2 \sigma_{cp}^4$              | $0,44 \sigma_{cp}^4$                  | 5 | 4 |
| 4    | А. И. Вознесенский и Ю. А. Невцветаев                          | $9,43 \frac{m_0}{\sigma_{cp}} \sigma_m^6$  | $1,5 \sigma_m^4$                      | 6 | 4 |
| 5    | Ю. М. Крылов   | $0,0795 \cdot 2\pi h_{cp}^2 \sigma_{cp}^6$ | $0,785 \sigma_{cp}^4$                 | 7 | 4 |

$v_B$  — скорость ветра

В случае представления параметров спектральной плотности как функции видимых элементов волн можно, следуя А. И. Вознесенскому и Г. А. Фирсову, получить формулу для спектральной плотности не в экспоненциальном, а в дробно-рациональном виде.

Согласно предложению этих авторов, получившему экспериментальное подтверждение в работах Н. Н. Рахманина, корреляционная функция волновых ординат аппроксимируется выражением

$$K(\tau) = D e^{-\alpha |\tau|} \cos \beta \tau, \quad (5.31)$$

где  $D$  — дисперсия ординат;  $\alpha$  — коэффициент затухания корреляционной функции;  $\beta$  — ее частота, которая приближенно равна частоте, отвечающей максимуму спектра.

Применительно к развитому волнению, как показал Н. Н. Рахманин, имеют место следующие зависимости:

$$a = 0,21\beta; \quad \beta = 0,82\sigma_{cp}; \quad \sigma_{cp} = 1,74h_{3\%}^{-0,4}, \quad (5.32)$$

где  $h_{3\%}$  — высота волны 3 %-ной обеспеченности.

Используя косинус-преобразование Фурье (5.17), можно показать, что формуле (5.31) соответствует следующее выражение для спектра нерегулярного волнения:

$$S_3(\sigma_0) = \frac{2}{\pi} D\alpha \frac{\sigma_0^2 + b^2}{\sigma_0^4 + 2a^2\sigma_0^2 + b^4},$$

где  $a^2 = \beta^2 - \alpha^2$ ;  $b^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

Дисперсию волновых ординат  $D = m_0$  можно, пользуясь формулами (5.3) и (5.4), выразить через высоту волны 3 %-ной обеспеченности, которая в отечественной практике принята в качестве критерия степени волнения (табл. 17). Подставляя в формулу (5.4) значение обеспеченности  $Q = 3 \% = 0,03$ , найдем

$$k_0^2 = 2 \ln \frac{100}{3} = 7,014.$$

Таблица 17. Шкала степени волнения Главного управления гидрометслужбы, 1953 г.

| Степень волнения, баллы | Высота волны 3 %-ной обеспеченности, м | Словесная характеристика волнения |
|-------------------------|--|-----------------------------------|
| I                       | 0—0,25                                 | Слабое                            |
| II                      | 0,25—0,75                              | Умеренное                         |
| III                     | 0,75—1,25                              | Значительное                      |
| IV                      | 1,25—2,00                              | »                                 |
| V                       | 2,0—3,5                                | Сильное                           |
| VI                      | 3,5—6,0                                | »                                 |
| VII                     | 6,0—8,5                                | Очень сильное                     |
| VIII                    | 8,5—11,0                               | » »                               |
| IX                      | Более 11,0                             | Исключительное                    |

Тогда, учитывая, что амплитуда волны равна ее полувысоте, на основании (5.3) можем написать

$$D = \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{h_{3\%}}{2} \right)^2 = 0,143 \left( \frac{h_{3\%}}{2} \right)^2 \quad (5.33)$$

Типичные графики спектров волнения приведены на рис. 5.7. Во многих практических приложениях более удобным, чем спектр (5.26), оказывается нормированный спектр  $s_3$ , связанный со спектром  $S_3(\sigma_0)$  соотношением:

$$s_3 = \frac{S_3(\sigma_0) \sigma_{cp}}{m_0}.$$

Поскольку величины  $m_0$ ,  $S_3(\sigma_0)$  и  $\sigma_0$  будут соответственно иметь размерность  $m^2$ ,  $m^2c$  и  $c^{-1}$ , очевидно, что нормированный спектр будет безразмерным. Этот спектр является функцией безразмерной частоты  $\sigma_0/\sigma_m$  и зависит только от двух параметров  $k$  и  $n$ . Выясним характер этой зависимости.

Как видно из формулы (5.30), параметр  $B$  легко выражается через частоту  $\sigma_m$ , отвечающую максимуму спектра  $S_3(\sigma_0)$ :

$$B = \frac{k}{n} \sigma_m^n. \quad (5.34)$$

Таким образом, показатель экспоненты в выражении (5.26) будет равен

$$-\frac{k}{n} \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right)^n.$$

Далее, пользуясь (5.28), можно выразить параметр  $A$  через момент нулевого порядка (дисперсию волновых ординат):

$$A = \frac{nm_0}{B \frac{1-k}{n} \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}.$$

Подставляя сюда следующее из (5.34) соотношение

$$B \frac{1-k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1-k}{n}} \sigma_m^{1-k},$$

получим

$$A = \frac{nm_0 \sigma_m^{k-1}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k-1}{n}}.$$

Таким образом, можем написать

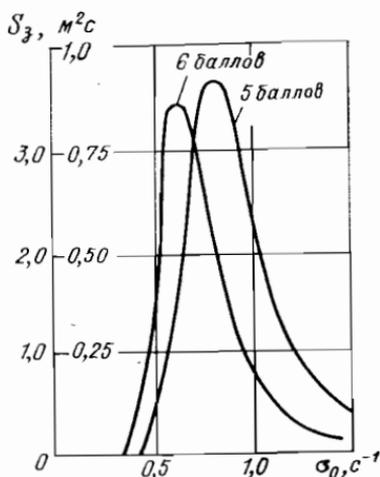
$$S_3 = \frac{S_3(\sigma_0) \sigma_{cp}}{m_0} = \frac{n}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^k \frac{\sigma_{cp}}{\sigma_m} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k-1}{n}} e^{-\frac{k}{n} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^n}. \quad (5.35)$$

Теперь, пользуясь равенствами (5.24) и (5.28), выразим среднюю частоту волнения через параметры  $B$ ,  $k$  и  $n$ :

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} = B \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}.$$

Разделив среднюю частоту на определяемую выражением (5.30) частоту максимума спектра

$$\sigma_m = B \frac{1}{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{n}},$$



5.7. Типичные спектры полностью развитого волнения.

будем иметь

$$\frac{\sigma_{\text{ср}}}{\sigma_m} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}. \quad (5.36)$$

Подставив последнее соотношение в (5.35), получим окончательное выражение для безразмерной нормированной спектральной плотности

$$s_3\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m}, k, n\right) = C \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^k e^{-\frac{k}{n} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right)^n},$$

где

$$C = \frac{n}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}.$$

В нормированной форме выражения для спектральной плотности приобретают весьма простой вид. Действительно, обозначив безразмерную частоту  $\sigma_m/\sigma_0$  через  $\omega_0$ , можем написать:

спектр Неймана ( $k=6; n=2$ )

$$s_3 = 33,2\omega_0^6 e^{-3\omega_0^2};$$

спектры Пирсона и Московица и Второго международного конгресса по конструкции и прочности судов ( $k=5; n=4$ )

$$s_3 = 7,03\omega_0^5 e^{-1,25\omega_0^4};$$

5.8. Нормированный спектр А. И. Вознесенского и Ю. А. Нецветаева.

спектр А. И. Вознесенского и Ю. А. Нецветаева ( $k=6; n=4$ )

$$s_3 = 9,43\omega_0^6 e^{-1,5\omega_0^4};$$

спектр Ю. М. Крылова ( $k=7; n=4$ )

$$s_3 = 12,8\omega_0^7 e^{-1,75\omega_0^4}.$$

График спектра А. И. Вознесенского и Ю. А. Нецветаева в безразмерном виде приведен на рис. 5.8.

Для использования этого спектра при заданной высоте волны 3 %-ной обеспеченности<sup>1</sup> по формулам (5.32) и (5.33) находим

<sup>1</sup> Если задана степень волнения, то в расчет следует принимать значения высоты волны 3 %-ной обеспеченности, наибольшие для данного балла.

среднюю частоту волнения и дисперсию волновых ординат (спектральный момент нулевого порядка). Затем, имея в виду, что согласно (5.36) при  $k = 6$  и  $n = 4$  частота максимума спектра и средняя частота волнения связаны соотношением  $\sigma_m = 0,77 \sigma_{cp}$ , определяем  $\sigma_m$ . Далее, задаваясь рядом значений отношения  $\sigma_m/\sigma_0$ , вычисляем размерные частоты  $\sigma_0$  и, умножая соответствующие ординаты кривой  $s_3$  на отношение  $m_0/\sigma_{cp}$ , находим ординаты функции  $S_3(\sigma_0)$  — размерной спектральной плотности нерегулярного волнения.

### § 30. Корабль как линейная динамическая система.

#### Преобразование случайных процессов линейными динамическими системами

В теории нерегулярной качки корабль рассматривается как некоторая динамическая система<sup>1</sup>, преобразующая случайный процесс волнения в случайный процесс качки. В связи с этим рассмотрим задачу об определении характеристик случайных процессов, получающихся в результате преобразования других случайных процессов, характеристики которых известны.

Пользуясь терминологией, заимствованной из радиотехники и теории автоматического управления, будем называть преобразуемые процессы *входными* процессами (функциями, сигналами, возмущениями), а процессы, получающиеся в результате преобразования, — *выходными*.

С математической точки зрения физическая природа системы, осуществляющей преобразование, не играет никакой роли. Имеет значение лишь тот присущий системе закон, та совокупность математических действий, в результате которых она ставит в соответствие данным функциям (входным) другие функции (выходные). Такая совокупность действий называется *оператором*. Соответствие между функциями  $x(t)$  и  $y(t)$ , устанавливаемое оператором  $A$ , записывается в виде

$$y(t) = Ax(t) \quad \text{или} \quad y(t) = A\{x(t)\}.$$

Пусть, например,  $A = d/dt$  — оператор дифференцирования по времени. Тогда  $y = dx/dt$ .

Оператор  $L$  называется линейным, если он обладает следующими свойствами:

- 1)  $L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\};$
- 2)  $L\{cx(t)\} = cL\{x(t)\},$

где  $t$  — любой аргумент (не обязательно время), а  $c$  — постоянный множитель.

<sup>1</sup> *Динамическими* называются системы, которые под влиянием внешних воздействий могут изменять свое состояние.

Система, обладающая линейным оператором, называется *линейной*. Так, если рассматривать качку корабля в рамках линейной теории, то корабль будет линейной динамической системой, ибо его движение будет описываться линейным дифференциальным уравнением, которое, очевидно, является линейным оператором.

Линейные системы можно характеризовать их реакциями на различные виды элементарных возмущений (входных сигналов). При этом характеристика получает особенно простой вид, если в качестве входных сигналов берутся инвариантные функции данной системы, т. е. такие функции, которые при бесконечно долгом действии проходят через систему без искажения формы, лишь умножаясь на некоторые независимые от времени коэффициенты.

Пусть  $x(t, \lambda)$  — инвариантная функция, зависящая от параметра  $\lambda$ , поступающая на вход системы. Тогда, согласно определению, выходная функция  $y(t)$  будет иметь вид

$$y(t) = \Phi(\lambda) x'(t, \lambda).$$

Множитель  $\Phi(\lambda)$ , на который умножается входная инвариантная функция при прохождении через систему, в случае, когда она подается на вход в течение бесконечно большого времени, называется *передаточной функцией* линейной динамической системы. Заметим, что условие о бесконечно долгом времени подачи входного сигнала равносильно условию о затухании в системе всех переходных процессов. Таким образом, передаточная функция представляет собой отношение выходного сигнала к входному в данный момент времени. Сама передаточная функция от времени не зависит.

Найдем передаточную функцию системы, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$Ay(t) = Bx(t), \quad (5.37)$$

где  $A$  и  $B$  — дифференциальные операторы следующего вида:

$$A = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k}; \quad B = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k}.$$

Будем полагать, что рассматриваемая система устойчива, т. е. ни один из корней характеристического уравнения не имеет положительной действительной части. В качестве инвариантной функции примем показательную функцию  $x(t) = e^{\lambda t}$ .

Представим решение уравнения (5.37) в виде

$$y(t) = \Phi(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Учитывая, что для любого  $k$  имеет место соотношение

$$\frac{d^k e^{\lambda t}}{dt^k} = \lambda^k e^{\lambda t},$$

после подстановки выражений  $x(t)$  и  $y(t)$  в дифференциальное уравнение и сокращения  $e^{\lambda t}$  получим

$$\Phi(\lambda) A(\lambda) = B(\lambda),$$

где

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k; \quad B(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k.$$

Отсюда имеем следующее выражение для передаточной функции

$$\Phi(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}.$$

При чисто мнимых значениях  $\lambda = i\omega$  передаточная функция характеризует реакцию системы на гармонические колебания с любыми частотами  $\omega$  и называется *частотной характеристикой системы*

$$\Phi(i\omega) = \frac{B(i\omega)}{A(i\omega)}.$$

При фиксированном  $\omega$  частотная характеристика — это комплексный коэффициент усиления системы или, что то же самое, комплексная амплитуда выходного процесса, когда на вход подается экспоненциальное воздействие вида

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

Пусть на вход системы подается экспоненциальное воздействие с комплексной амплитудой  $x_a = x_1 + ix_2$ , т. е.

$$x(t) = x_a e^{i\omega t}.$$

Реакцию системы представим в виде

$$y(t) = y_a e^{i\omega t} = \Phi(i\omega) x_a e^{i\omega t},$$

где  $y_a = y_1 + iy_2$  — комплексная амплитуда процесса  $y(t)$ .

Из последнего равенства видно, что частотная характеристика системы представляет собой отношение комплексной амплитуды  $y_a$  выходного процесса к комплексной амплитуде  $x_a$  входного возмущения, т. е.

$$\Phi(i\omega) = \frac{y_a}{x_a}.$$

Представив частотную характеристику в виде

$$\Phi(i\omega) = \Phi_1(\omega) + i\Phi_2(\omega), \quad (5.38)$$

можем написать

$$\Phi(i\omega) = \Phi_1(\omega) + i\Phi_2(\omega) = \frac{y_1 + iy_2}{x_1 + ix_2} = \frac{(y_1 + iy_2)(x_1 - ix_2)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\Phi_1(\omega) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{x_1^2 + x_2^2}; \quad \Phi_2(\omega) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

и, следовательно,

$$|\Phi(i\omega)| = \sqrt{\Phi_1^2(\omega) + \Phi_2^2(\omega)} = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2}{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Из последней формулы видно, что модуль частотной характеристики представляет собой отношение амплитуд выходного и входного процессов или, что то же самое, амплитуду выходного процесса при подаче на вход гармонического возмущения единичной амплитуды.

Частотную характеристику можно также представить в форме

$$\Phi(i\omega) = |\Phi(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = |\Phi(i\omega)| [\cos \varphi(\omega) + i \sin \varphi(\omega)], \quad (5.39)$$

где  $\varphi(\omega)$  — аргумент комплексной функции  $\Phi(i\omega)$ . Приравнявая действительные и мнимые части в выражениях (5.38) и (5.39), получим:

$$\Phi_1(\omega) = |\Phi(i\omega)| \cos \varphi(\omega);$$

$$\Phi_2(\omega) = |\Phi(i\omega)| \sin \varphi(\omega)$$

или

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\Phi_2(\omega)}{\Phi_1(\omega)}.$$

Модуль частотной характеристики  $|\Phi(i\omega)|$  называют амплитудно-частотной характеристикой динамической системы, а аргумент  $\varphi(\omega)$  — фазово-частотной характеристикой.

Рассмотрим теперь вопрос о преобразовании линейными динамическими системами спектра стационарного случайного процесса.

Ординаты спектра, как упоминалось в § 27, характеризуют распределение дисперсии процесса по частотам или, иными словами, представляют собой дисперсии составляющих его гармоник. Нетрудно показать, что дисперсии этих гармоник пропорциональны квадратам их амплитуд.

Пусть нам задан процесс, ординаты которого определяются формулой

$$x(t) = x_0(\omega) \cos \omega t.$$

Найдем дисперсию этого процесса как среднее за период  $T = 2\pi/\omega$  значение квадрата его ординат:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{x_0^2(\omega)}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \\ &= \frac{x_0^2(\omega)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{x_0^2(\omega)}{2}. \end{aligned}$$

Последнее соотношение, как легко проверить, справедливо для любой гармоник, независимо от величины ее начальной фазы. Это обстоятельство существенно для описания нерегулярного волнения, так как последнее рассматривается как суперпозиция гармоник, складывающихся со случайным сочетанием фаз.

Как было показано ранее, при преобразовании стационарного случайного процесса линейной динамической системой амплитуды входного возмущения умножаются на модуль частотной характеристики. Но ординаты кривой спектральной плотности процесса пропорциональны не первым степеням, а квадратам амплитуд соответствующих гармоник. Поэтому при преобразовании спектра его ординаты должны умножаться на квадрат модуля частотной характеристики. Иными словами, спектральная плотность выходного процесса представляет собой произведение спектральной плотности входного процесса на квадрат модуля частотной характеристики системы для соответствующей частоты:

$$S_{\text{вых}}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_{\text{вх}}(\omega). \quad (5.40)$$

Это соотношение, известное под названием теоремы А. Я. Хинчина, играет исключительно важную роль в спектральной теории стационарных случайных процессов, к которым относятся нерегулярное морское волнение и качка корабля.

### § 31. Спектры и псевдоспектры качки.

#### Вероятностные характеристики качки на нерегулярном волнении

Если корабль не имеет хода, то при заданной спектральной плотности волнения спектры различных видов качки определяются по формуле (5.40), в которой под текущей частотой  $\omega$  следует понимать истинную частоту волнения  $\sigma_0$ . Таким образом, эта формула принимает вид

$$S_j(\sigma_0) = |\Phi(i\sigma_0)|^2 S_3(\sigma_0) = a_j^2(\sigma_0) S_3(\sigma_0)$$

где  $S_j(\sigma_0)$  — спектральная плотность  $j$ -го вида качки корабля;  $S_3(\sigma_0)$  — спектральная плотность волновых ординат;  $a_j(\sigma_0)$  — его амплитудно-частотная характеристика. Индекс  $j = 1$ , как обычно, приписывается продольно-горизонтальной качке,  $j = 2$  — поперечно-горизонтальной,  $j = 3$  — вертикальной,  $j = 4$  — бортовой,  $j = 5$  — килевой,  $j = 6$  — рысканью.

Амплитудно-частотная характеристика  $a_j(\sigma_0)$  представляет собой отношение амплитуды  $j$ -го вида качки на регулярном волнении к амплитуде волны. Это значит, что при  $j = 1, 2, 3$ , функции  $a_j(\sigma_0)$  оказываются безразмерными, а при  $j = 4, 5, 6$  имеют размерность  $m^{-1}$ . Таким образом, размерность спектральных плотностей продольно-горизонтальной, поперечно-горизонтальной и вертикальной качки будет такой же, как и спектральной плотности волнения

(м<sup>2</sup>с), а спектральные плотности бортовой, килевой качки и рысканья будут иметь размерность с.

Амплитудно-частотную характеристику продольно-горизонтальной качки  $\alpha_1(\sigma_0)$  вычисляют по формуле

$$\alpha_1(\sigma_0) = \frac{\xi_0}{r};$$

где  $\xi_0$  — амплитуда качки на регулярном волнении, определяемая равенством (4.189), а  $r$  — амплитуда волны. Для нахождения амплитудно-частотных характеристик остальных видов качки корабля, не имеющего хода, требуется решить системы алгебраических уравнений (4.170) и (4.171), полагая  $\sigma = \sigma_0$ , после чего функции  $a_j(\sigma_0)$  находят по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_2(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}; & a_3(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}; \\ a_4(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}; & a_5(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}; \\ a_6(\sigma_0) &= \frac{1}{r} \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}. \end{aligned} \right\} (5.41)$$

При расчете продольной качки можно вместо решения системы уравнений (4.170) воспользоваться выражениями (4.177).

Для обеспечения необходимой точности вычисление ординат амплитудно-частотных характеристик и спектров качки следует производить для 30—40 значений частоты. Такие расчеты в связи с большой трудоемкостью выполняют на ЭВМ.

При известных значениях спектральной плотности дисперсия  $j$ -го вида качки определяется интегралом

$$D_j = \int_0^{\infty} S_j(\sigma_0) d\sigma_0, \quad (5.42)$$

для вычисления которого используется какое-либо правило приближенных квадратур.

Амплитуды качки заданной обеспеченности находят по формуле (5.3). Если обозначить амплитуду  $n$  %-ной обеспеченности  $j$ -го вида качки через  $y_{jn\%}$ , то эту формулу можно написать в виде

$$y_{jn\%} = k_0 \sqrt{D_j}, \quad (5.43)$$

где множитель  $k_0$  определяют по табл. 15, либо по формуле (5.4), в которой следует считать  $Q = 0,01 n$ .

Получим теперь выражение для дисперсии качки в условиях трехмерного нерегулярного волнения. Будем полагать, что продольная ось неизменно связанной с кораблем системы координат составляет угол  $\beta$  с генеральным направлением распространения волн. Тогда элементарная дисперсия качки, вызванной вол-

новой гармоникой, распространяющейся под углом  $\delta$  к генеральному направлению распространения, будет

$$D_j(\delta) = \int_0^{\infty} a_j^2(\sigma_0, \beta, \delta) S_3(\sigma_0, \delta) d\sigma_0.$$

Для нахождения амплитудно-частотной характеристики  $a_j(\sigma_0, \beta, \delta)$  следует при расчете качки на регулярном волнении по формулам гл. 4 заменять угол  $\epsilon$  на  $|\beta - \delta|$ .

Дисперсия  $j$ -го вида качки, вызванной всеми гармониками трехмерного волнения, определится с помощью интегрирования элементарных дисперсий по углу  $\delta$ . Поскольку принято считать, что  $S_3(\sigma_0, \delta) \neq 0$  только в диапазоне

$$-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2},$$

очевидно, что интеграл по углу должен быть взят в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Таким образом,

$$D_j = \int_0^{\infty} S_3(\sigma_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_j^2(\sigma_0, \beta, \delta) \varphi(\delta) d\delta d\sigma_0,$$

где  $\varphi(\delta)$  — определяемая по одной из формул (5.20) функция, характеризующая угловое распределение энергии в двухмерном спектре.

В практике иногда выполняют экспресс-расчеты изолированной бортовой качки с использованием одномерного спектра и вычислением амплитудно-частотной характеристики на основе «укороченного» дифференциального уравнения. При этом входным случайным процессом считают либо процесс изменения волновых ординат, либо процесс изменения уклонов взволнованной поверхности. В первом случае амплитудно-частотная характеристика будет представлять собой отношение амплитуды качки к амплитуде волны

$$a_{41}(\sigma_0) = \frac{\theta_0}{r},$$

а во втором — отношение амплитуды качки к наибольшему уклону взволнованной поверхности

$$a_{42}(\sigma_0) = \frac{\theta_0}{\alpha_0}.$$

Но, как показано в гл. 1,

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_0^2}{g} r. \quad (5.44)$$

Таким образом,

$$a_{42}(\sigma_0) = \frac{\theta_0}{r} \frac{g}{\sigma_0^2} = a_{41}(\sigma_0) \frac{g}{\sigma_0^2},$$

или

$$a_{41}(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^2}{g} a_{42}(\sigma_0).$$

Функция  $a_{42}(\sigma_0)$  на основании формулы (4.186) может быть записана в виде

$$a_{42}(\sigma_0) = \frac{\kappa_4 \omega_4^2}{\sqrt{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2}},$$

где, напомним,  $\omega_4$  представляет собой частоту собственной бортовой качки корабля, а  $\kappa_4$  — редуцированный коэффициент, определяемый по графику (рис. 4.6). При использовании этого графика для расчета амплитудно-частотной характеристики следует считать, что по оси абсцисс отложено отношение  $\sigma_0^2 T/g$ , где  $T$  — осадка корабля. Таким образом, спектральная плотность углов изолированной бортовой качки, вычисленная с помощью «укороченного» уравнения, может быть записана в виде

$$S_4(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^4}{g^2} \frac{\kappa_4^2 \omega_4^4}{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2} S_3(\sigma_0), \quad (5.45)$$

или

$$S_4(\sigma_0) = \frac{\kappa_4^2 \omega_4^4}{(\omega_4^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2} S_\alpha(\sigma_0), \quad (5.46)$$

где через  $S_\alpha(\sigma_0)$  обозначена спектральная плотность уклонов взволнованной поверхности. Но, как видно из равенства (5.44), передаточной функцией между процессами изменения волновых ординат и уклонов взволнованной поверхности служит волновое число, равное  $\sigma_0^2/g$ . В связи с этим, учитывая аналогию между передаточной функцией и модулем частотной характеристики, на основании (5.40) можем написать

$$S_\alpha(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^4}{g^2} S_3(\sigma_0). \quad (5.47)$$

Отсюда следует, что формулы (5.45) и (5.46) идентичны.

При известной спектральной плотности качки дисперсию и амплитуду заданной обеспеченности вычисляют с помощью выражений (5.42) и (5.43).

При наличии хода корабля расчет качки на нерегулярном волнении значительно усложняется. В этом случае реакцией корабля на гармоническое возмущение с частотой  $\sigma_0$  будут колебания с частотой  $\sigma$ , которая, напомним, называется кажущейся. Если обозначить угол между вектором скорости корабля и генеральным направлением распространения волн через  $\beta$ , а угол между направлением

распространения волновой гармонике с частотой  $\sigma_0$  и генеральным направлением через  $\delta$ , то кажущаяся частота этой гармонике будет

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_0^2}{g} v \cos(\beta - \delta). \quad (5.48)$$

Эта формула получается из соотношения (1.15) при подстановке в него выражения для волнового числа  $k = \sigma_0^2/g$  и замене угла  $\varepsilon$  на  $\beta - \delta$ .

При рассмотрении вопроса о преобразовании случайных процессов линейными динамическими системами мы установили, что входной процесс, частотная характеристика и выходной процесс имеют одинаковую частоту. Следовательно, для корабля, имеющего ход, у которого частотная характеристика и спектральная плотность выходного процесса (качки) равны кажущейся частоте, спектральная плотность волнения, рассматриваемая как функция истинной частоты, не является, строго говоря, спектральной плотностью входного процесса. Для того чтобы придать спектру волнения подобный смысл, его следует преобразовать к кажущейся частоте. Такое преобразование достаточно сложно, ибо, как видно из (5.48), зависимость истинной частоты от кажущейся неоднозначна. Вместе с тем, если конечной целью расчета является определение дисперсии и амплитуд качки, указанного преобразования можно избежать, воспользовавшись введенным А. И. Вознесенским понятием о псевдоспектре качки.

Псевдоспектр  $j$ -го вида качки  $S_j^*$  получается умножением ординат спектральной плотности волнения, которые рассматриваются как функции истинной частоты  $\sigma_0$  на квадраты ординат амплитудно-частотной характеристики при тех же значениях  $\sigma_0$ :

$$S_j^*(\sigma_0) = a_j^2(\sigma_0) S_j(\sigma_0).$$

Амплитудно-частотные характеристики различных видов качки, кроме продольно-горизонтальной, вычисляются по формулам (5.41) на основе решения систем алгебраических уравнений (4.170) и (4.171). Входящие в эти уравнения как явно, так и в качестве аргументов гидродинамических характеристик качки, значения кажущейся частоты будут однозначными функциями истинной, поскольку скорость корабля и угол между вектором этой скорости и направлением распространения волн рассматривают как параметры.

Если амплитудно-частотная характеристика бортовой качки определяется на основе «укороченного» уравнения, то в условиях двухмерного волнения псевдоспектр имеет вид

$$S_4^*(\sigma_0) = \frac{\sigma_0^4}{g^2} \frac{\kappa_4^2(\sigma_0, \beta) \omega_4^4}{(\omega_4^2 - \sigma^2)^2 + (2v_4\sigma)^2} S(\sigma_0).$$

Заметим, что при расчете спектров или псевдоспектров бортовой качки для учета квадратичного характера демпфирования систему (4.170) или «укороченное» уравнение следует решать методом последовательных приближений.

Хотя псевдоспектры  $S_j^*(\sigma_0)$  не характеризуют распределения дисперсий по частотам, т. е. не являются энергетическими спектрами качки, они оказываются очень удобными интегральными характеристиками, ибо, как можно доказать, однозначно определяют дисперсии соответствующих видов качки:

$$D_j = \int_0^{\infty} S_j(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} S_j^*(\sigma_0) d\sigma_0.$$

Наряду с псевдоспектрами ординат процессов качки  $S_j^*(\sigma_0)$ , могут быть вычислены псевдоспектры скоростей и ускорений качки  $S_{vj}^*(\sigma_0)$  и  $S_{wj}^*(\sigma_0)$  и их дисперсии  $D_{vj}$  и  $D_{wj}$ :

$$S_{vj}^*(\sigma_0) = \sigma^2(\sigma_0) S_j^*(\sigma_0);$$

$$S_{wj}^*(\sigma_0) = \sigma^2(\sigma_0) S_{vj}^*(\sigma_0) = \sigma^4(\sigma_0) S_j^*(\sigma_0);$$

$$D_{vj} = \int_0^{\infty} S_{vj}(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} S_{vj}^*(\sigma_0) d\sigma_0;$$

$$D_{wj} = \int_0^{\infty} S_{wj}(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} S_{wj}^*(\sigma_0) d\sigma_0.$$

Средний период качки корабля на нерегулярном волнении определяют соотношением

$$T_{j\text{cp}} = 2\pi \sqrt{\frac{D_j}{D_{vj}}}.$$

Вероятностные характеристики качки на трехмерном нерегулярном волнении при постоянных скорости хода  $v$  и курсовом угле  $\beta$  относительно генерального направления распространения волн рассчитывают в следующем порядке:

1. Для ряда значений истинной частоты  $\sigma_0$  и угла  $\delta$  вычисляют значения кажущейся частоты  $\sigma$ . Величины  $v$  и  $\beta$  здесь и в дальнейшем ходе расчета рассматриваются как параметры.

2. Определяют гидродинамические характеристики качки (присоединенные массы и коэффициенты демпфирования) как функции кажущейся частоты для всех рассматриваемых сочетаний  $\sigma_0$  и  $\delta$ .

3. Для каждого сочетания  $\sigma_0$  и  $\delta$  находят возмущающие силы на регулярном волнении. При этом под углом  $\varepsilon$  всюду понимается  $|\beta - \delta|$ .

4. Вычисляют значения амплитудно-частотных характеристик каждого вида качки как функции истинной частоты  $\sigma_0$  при различных углах  $\delta$ .

5. Выбирают двумерный спектр волновых ординат  $S_j(\sigma_0, \delta)$ .

6. Каждую ординату спектра  $S_j(\sigma_0, \delta)$  умножают на квадрат

ординаты амплитудно-частотной характеристики, соответствующей данному сочетанию  $\sigma_0$  и  $\delta$ . Это дает псевдоспектр данного вида качки.

7. Псевдоспектры интегрируют по углу  $\delta$  в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  и по частоте  $\sigma_0$  в пределах от 0 до  $\infty$ . Таким образом находятся дисперсии ординат процессов качки.

8. Определяют амплитуды качки заданной обеспеченности.

9. Вычисляют псевдоспектры и дисперсии скоростей и находят средние периоды различных видов качки.

Такие расчеты исключительно трудоемки и могут быть выполнены только на быстродействующих ЭВМ с большим объемом оперативной памяти.

## Глава 6

---

### ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИЕ СИЛЫ, КРУТЯЩИЙ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ

#### § 32. Инерция массы корабля

Изгиб и кручение качающегося корабля, помимо нагрузок гидродинамической природы, вызываются силами тяжести и инерции его массы. Начнем рассмотрение этих сил с инерции массы.

Предварительно обратим внимание на то, что при рассмотрении действующих на корабль нагрузок с целью придания логической стройности системе обозначений изменен смысл некоторых встречавшихся ранее символов. Так, если ранее через  $m$  обозначалась масса всего корабля, то теперь этим символом будем обозначать массу единицы его длины. Обозначим далее через  $i_{mx}$  момент инерции массы  $m$  относительно собственной центральной продольной оси, а через  $\omega_m$  — вектор ускорения. Тогда, считая угловую скорость качки величиной первого порядка малости и отбрасывая малые высших порядков, можем написать

$$\omega_m = \omega + \varepsilon \times r_m,$$

где  $\omega$  ( $\theta, \dot{\eta}, \ddot{\xi}$ ) — ускорение полюса, в качестве которого, как и ранее, выбирается точка 0, расположенная на пересечении плоскостей миделя, ватерлинии и диаметральной,  $\varepsilon$  ( $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}, \ddot{\chi}$ ) — угловое ускорение,  $r_m$  ( $x, y_m, z_m$ ) — радиус-вектор центра массы  $m$  относительно полюса 0. Здесь и в дальнейшем в круглых скобках после символа вектора записаны его проекции на оси неизменно свя-

занной с кораблем системы координат; при этом первой записывают проекцию на ось  $Ox$ , второй — на ось  $Oy$ , третьей — на ось  $Oz$ .

Проекции вектора  $\omega_m$  на эти оси будут:

$$\begin{aligned}\omega_{mx} &= \ddot{\psi}z_m - \ddot{\chi}y_m; \\ \omega_{my} &= \ddot{\eta} + \ddot{\chi}x - \ddot{\theta}z_m; \\ \omega_{mz} &= \ddot{\zeta} + \ddot{\theta}y_m - \ddot{\psi}x.\end{aligned}$$

Вектор  $f^m(0, f_2^m, f_3^m)$  и момент  $l^m(f_4^m, f_5^m, f_6^m)$  сил инерции массы  $m$  определяют по формулам:

$$f^m = -m\omega_m; \quad l^m = -m(r_m \times \omega_m).$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}f_2^m &= -m(\ddot{\eta} + x\ddot{\chi} - z_m\ddot{\theta}); \\ f_3^m &= -m(\ddot{\zeta} + y_m\ddot{\theta} - x\ddot{\psi}); \\ f_4^m &= -m[(y_m^2 + z_m^2)\ddot{\theta} - z_m(\ddot{\eta} + x\ddot{\chi}) + y_m(\ddot{\zeta} - x\ddot{\psi})] - i_{mx}\ddot{\theta}; \quad (6.1) \\ f_5^m &= -m[(x^2 + z_m^2)\ddot{\psi} - x\ddot{\zeta} - y_m(x\ddot{\theta} + z_m\ddot{\chi})]; \\ f_6^m &= -m[(x^2 + y_m^2)\ddot{\chi} + x(\ddot{\eta} - z_m\ddot{\theta}) - y_mz_m\ddot{\psi}].\end{aligned}$$

Найдем теперь момент  $l_0^m(f_{04}^m, f_{05}^m, f_{06}^m)$  относительно точки, имеющей по отношению к началу координат радиус-вектор  $r_0(x_0, 0, z_0)$ . Как легко видеть,

$$l_0^m = -m[(r_m - r_0) \times \omega_m] = l^m - r_0 \times f^m$$

или

$$\left. \begin{aligned}f_{04}^m &= f_4^m + z_0f_2^m; \\ f_{05}^m &= f_5^m - x_0f_3^m; \\ f_{06}^m &= f_6^m - x_0f_2^m.\end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Далее, интегрируя  $f_2^m$  и  $f_3^m$  по переменной  $x$  в пределах от  $-L/2$  до  $x_0$ , найдем компоненты перерезывающей силы  $F_{20}^m$  и  $F_{30}^m$ , обусловленные инерцией массы корабля, затем, интегрируя  $f_{04}^m$ , найдем компоненту крутящего момента  $F_{040}^m$ , интегрирование же  $f_{05}^m$  и  $f_{06}^m$  даст компоненты вертикального и горизонтального изгибающих моментов, обозначаемые соответственно через  $F_{050}^m$  и  $F_{060}^m$ .

Поясним принцип построения применяемой здесь и далее системы цифровых индексов. Последние состоят из некоторой цифры  $j = 2, 3, \dots, 6$  и могут включать нули как перед, так и после  $j$ . Символ  $j$ , как обычно, употребляется для определения вида проекции силы или момента. Нуль перед этой цифрой в проекциях сил ( $j = 2, 3$ ) отсутствует, а в проекциях моментов ( $j = 4, 5, 6$ ) означает, что они берутся относительно осей, проходящих параллельно

координатным через точку с координатами  $x_0, 0, z_0$ . Нуль в конце индекса показывает, что силы или моменты, отнесенные к единице длины корабля, проинтегрированы в пределах от  $-L/2$  до  $x_0$ . Иными словами, этот нуль ставят при компонентах перерезывающих сил, изгибающих и крутящего моментов в сечении с абсциссой  $x_0$ .

Если в индексе нуль после цифры отсутствует, условимся считать, что соответствующая проекция силы и момента вычислена для всего корабля, т. е. при  $x_0 = L/2$ . Отсутствие нуля перед цифрой, означает, что моменты вычислены непосредственно относительно координатных осей системы *Oxyz*. Очевидно, что вообще эти моменты не будут изгибающими и крутящим. Только для миделевого сечения моменты относительно осей *Oy* и *Oz* ( $j = 5, 6$ ) будут вертикальным и горизонтальным изгибающими моментами или, точнее говоря, компонентами этих моментов, обусловленными силами той или иной категории (инерции, тяжести, поддержания и т. п.).

Итак, интегрируя (6.1) и имея в виду (6.2), получим:

$$\left. \begin{aligned} F_{20}^m &= -M_0(\ddot{\eta} - z_{g0}\ddot{\theta} + x_{g0}\ddot{\chi}); \\ F_{30}^m &= -M_0(\ddot{\zeta} + y_{g0}\ddot{\theta} - x_{g0}\ddot{\psi}); \\ F_{040}^m &= -[I_{x0}\ddot{\theta} - I_{xy0}\ddot{\psi} - I_{xz0}\ddot{\chi} + M_0(y_{g0}\ddot{\zeta} - z_{g0}\ddot{\eta})] + z_0 F_{20}^m; \\ F_{050}^m &= -[I_{y0}\ddot{\psi} - I_{xy0}\ddot{\theta} - I_{yz0}\ddot{\chi} - M_0 x_{g0} \ddot{\zeta}] + x_0 F_{30}^m; \\ F_{060}^m &= -[I_{z0}\ddot{\chi} - I_{xz0}\ddot{\theta} - I_{yz0}\ddot{\psi} + M_0 x_{g0} \ddot{\eta}] - x_0 F_{20}^m. \end{aligned} \right\} (6.3)$$

В этих формулах использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{-L/2}^{x_0} m dx; & x_{g0} &= \frac{1}{M_0} \int_{-L/2}^{x_0} m x dx; \\ y_{g0} &= \frac{1}{M_0} \int_{-L/2}^{x_0} m y_m dx; & z_{g0} &= \frac{1}{M_0} \int_{-L/2}^{x_0} m z_m dx; \\ I_{x0} &= \int_{-L/2}^{x_0} [i_{mx} + m(y_m^2 + z_m^2)] dx; \\ I_{y0} &= \int_{-L/2}^{x_0} m(x^2 + z_m^2) dx; & I_{z0} &= \int_{-L/2}^{x_0} m(x^2 + y_m^2) dx; \\ I_{xy0} &= \int_{-L/2}^{x_0} m x y_m dx; & I_{yz0} &= \int_{-L/2}^{x_0} m y_m z_m dx; & I_{xz0} &= \int_{-L/2}^{x_0} m x z_m dx. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $M_0$  представляет собой массу части корабля, расположенной в корму от шпангоута с абсциссой  $x_0$ ;  $x_{g0}$ ;  $y_{g0}$ ;  $z_{g0}$  — координаты ее центра;  $I_{x0}$ ,  $I_{y0}$ ,  $I_{z0}$  — осевые, а  $I_{xy0}$ ,  $I_{yz0}$ , и  $I_{xz0}$  — центробежные моменты инерции относительно соответствующих осей. Для массы, координат ее центра и моментов инерции корабля в целом сохраним те же обозначения, отбросив нуль в нижнем индексе.

Учитывая, что масса корабля в целом распределена симметрично относительно диаметральной плоскости, т. е.  $y_g = 0$ , и полагая оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  главными осями инерции, найдем:

$$I_{xy} = 0; \quad I_{yz} = I; \quad I_{xz} = Mx_g z_g$$

и, следовательно, для корабля в целом:

$$F_2^m = -M(\ddot{\eta} - z_g \ddot{\theta} + x_g \ddot{\chi});$$

$$F_3^m = -M(\ddot{\xi} - x_g \ddot{\psi});$$

$$F_{04}^m = F_4^m + z_0 F_2^m;$$

$$F_{05}^m = F_5^m + \frac{L}{2} F_3^m;$$

$$F_{06}^m = F_6^m - \frac{L}{2} F_2^m,$$

где через  $F_j^m$  ( $j = 4, 5, 6$ ) обозначены моменты сил инерции относительно координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. Как видно из (6.3), эти моменты определяют по следующим формулам:

$$F_4^m = -[I_x \ddot{\theta} - Mz_g(\ddot{\eta} + x_g \ddot{\chi})];$$

$$F_5^m = -(I_y \ddot{\psi} - Mx_g \ddot{\xi});$$

$$F_6^m = -[I_z \ddot{\chi} + Mx_g(\ddot{\eta} - z_g \ddot{\theta})].$$

Полученные выражения для сил инерции  $F_j^m$  ( $j = 2, \dots, 6$ ) полностью совпадают с соответствующими членами дифференциальных уравнений движения (4.164).

Если, учитывая значительное удлинение корабля, при вычислении момента  $f_5^m$  пренебречь произведением  $z_m \omega_{mx}$  по сравнению с  $x \omega_{mz}$ , а при вычислении  $f_6^m$  пренебречь  $y_m \omega_{mx}$  по сравнению с  $x \omega_{my}$ , то выражения для  $f_5^m$  и  $f_6^m$  примут вид:

$$f_5^m = -x f_3^m = mx(\ddot{\xi} + y_m \ddot{\theta} - x \ddot{\psi});$$

$$f_6^m = x f_2^m = -mx(\ddot{\eta} - z_m \ddot{\theta} + x \ddot{\chi}).$$

Тогда компоненты вертикального и горизонтального изгибающих моментов, обусловленные инерцией масс корабля, в сечении с абсциссой  $x_0$  можно определить по формулам:

$$F_{050}^m = \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_3^m dx dx = - \int_{-L/2}^{x_0} x f_3^m dx + x_0 F_{30}^m;$$

$$F_{060}^m = - \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_2^m dx dx = - \int_{-L/2}^{x_0} x f_2^m dx - x_0 F_{20}^m.$$

В справедливости этих формул легко убедиться, вычисляя двойные интегралы по частям. Рассмотрим в качестве примера функцию  $F_{050}^m$ , положив

$$\int_{-L/2}^x f_3^m dx = u; \quad dx = dv.$$

Тогда, очевидно,

$$f_3^m dx = du, \quad x = v$$

и

$$\int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_3^m dx dx = x_0 \int_{-L/2}^{x_0} f_3^m dx - \int_{-L/2}^{x_0} x f_3^m dx = x_0 F_{30}^m - \int_{-L/2}^{x_0} x f_3^m dx.$$

Аналогично доказывается и справедливость формулы для  $F_{050}^m$ .

### § 33. Гравитационная и гидростатическая нагрузки

При вертикальной и килевой качке на тихой воде на шпангоут действуют (рис. 6.1) сила тяжести  $f^W (mg \sin \psi, 0, -mg \cos \psi)$  и гидростатическая сила поддержания  $f^H (-\rho g \omega_t \sin \psi, 0, \rho g \omega_t \cos \psi)$ , где, как и прежде,  $m$  — масса единицы длины корабля, а через  $\omega_t$  обозначена погруженная в данный момент времени площадь шпангоута.

Если обозначить, как и ранее, ширину шпангоута по ватерлинии равновесия на тихой воде через  $b$ , а его погруженную площадь при осадке по эту ватерлинию через  $\omega$ , то, как легко видеть,

$$\omega_t = \omega - b(\zeta - x\psi).$$

Пологая здесь и в дальнейшем синусы углов качки и рысканья равными самим углам, а косинусы равными единице, получим выражение для проекции  $f_3^r$  элементарной восстанавливающей силы на ось  $Oz$  в виде

$$f_3^r = f_3^H - f_3^W = \rho g \omega - \rho g b(\zeta - x\psi) - mg.$$

Далее, пользуясь общей формулой для момента силы  $l = r \times f$ , найдем выражение для  $f_5^r$  — момента относительно оси  $Oy$  сил тяжести и поддержания, действующих на шпангоут (элементарного продольного восстанавливающего момента). Считая, что аппликата точки приложения силы  $f^H$  равна аппликате  $z_\omega$  центра тяжести площади  $\omega$ , получим

$$\begin{aligned} f_5^r &= z_m f_x^W + z_\omega f_x^H - x(f_z^W + f_z^H) = \\ &= g \{ (mz_m - \rho \omega z_\omega) \psi - x[-m + \rho \omega - \rho b(\zeta - x\psi)] \} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Момент относительно сечения с абсциссой  $x_0$  определится формулой

$$f_{05}^r = f_5^r + x_0 f_3^r.$$

Интегрируя выражения для  $f_3^r$  и  $f_{05}^r$  в пределах от  $-L/2$  до  $x_0$ , получим компоненты перерезывающей силы  $F_{30}^r$  и изгибающего момента  $F_{050}^r$ , обусловленные силами тяжести и поддержания:

$$F_{30}^r = -g [M_0 - \rho (V_0 - S_0 \zeta + S_0 x_{f_0} \psi)];$$

$$F_{050}^r = g [ (M_0 z_{g_0} - \rho V_0 z_{c_0}) \psi + M_0 x_{g_0} - \rho (V_0 x_{c_0} - S_0 x_{f_0} \zeta + J_{y_0} \psi) ] + x_0 F_{30}^r,$$

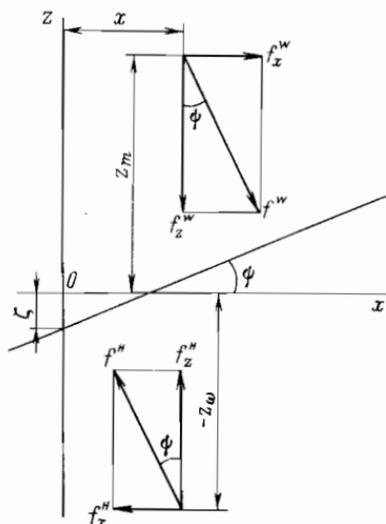
где

$$V_0 = \int_{-L/2}^{x_0} \omega dx; \quad S_0 = \int_{-L/2}^{x_0} b dx;$$

$$x_{f_0} = \frac{1}{S_0} \int_{-L/2}^{x_0} b x dx; \quad J_{y_0} = \int_{-L/2}^{x_0} b x^2 dx;$$

$$x_{c_0} = \frac{1}{V_0} \int_{-L/2}^{x_0} \omega x dx;$$

$$z_{c_0} = \frac{1}{V_0} \int_{-L/2}^{x_0} \omega z_{\omega} dx.$$



6.1. Силы тяжести и поддержания, действующие на шпангоут при продольной качке.

Очевидно, что  $V_0$  представляет собой объем погруженной части корабля, расположенной в корму от шпангоута, с абсциссой  $x_0$ , а  $x_{c_0}$  и  $z_{c_0}$  — координаты центра величины этой части. Аналогично,  $S_0$  представляет собой площадь кормовой по отношению к шпангоуту с абсциссой  $x_0$  части ватерлинии,  $x_{f_0}$  — абсциссу ее центра тяжести, а  $J_{y_0}$  — момент инерции относительно оси  $Oy$ .

Компоненты перерезывающей силы и изгибающего момента для корабля в целом будут определяться выражениями:

$$F_3^r = -\rho g S (\zeta - x_f \psi); \quad F_{05}^r = F_5^r + \frac{L}{2} F_3^r,$$

где

$$F_5^r = -MgH\psi + \rho g S x_f (\zeta - x_f \psi) + Mg (x_g - x_c).$$

Здесь  $H$  — продольная метацентрическая высота,  $S$  и  $x_f$  — площадь и абсцисса центра тяжести площади ватерлинии,  $x_g$  и  $x_c$  — абсциссы центра массы корабля и центра величины, которые в положении равновесия одинаковы. При получении последней формулы использовано известное соотношение

$$J_y = J_f + S x_f^2 = VR + S x_f^2,$$

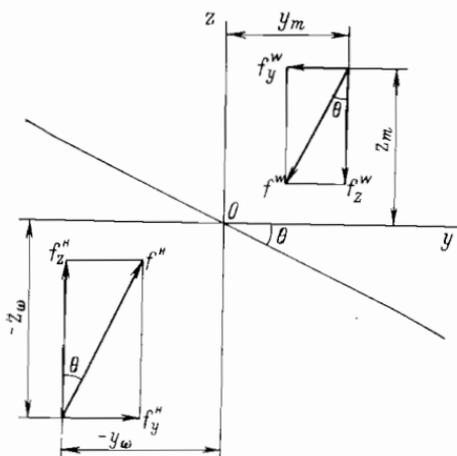
где  $J_f$  — момент инерции площади ватерлинии равновесия относительно поперечной оси, проходящей через ее центр тяжести;  $V$  —

объемное водоизмещение корабля;  $R$  — продольный метацентрический радиус.

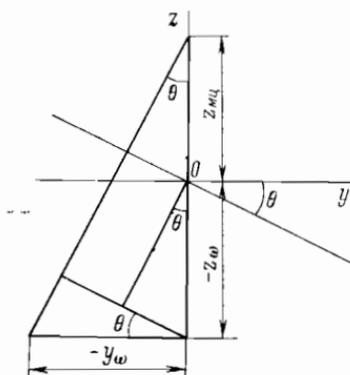
Если в выражении (6.4) пренебречь слагаемыми  $z_m f_x^W$  и  $z_\omega f_x^H$ , то получим  $f_5^r = -x f_3^r$ . В этом случае составляющая изгибающего момента, обусловленная силами тяжести и плавучести, в сечении с абсциссой  $x_0$  может быть определена по формуле

$$F_{050}^r = \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^{x_0} f_3^r dx dx = - \int_{-L/2}^{x_0} x f_3^r dx + x_0 \int_{-L/2}^{x_0} f_3^r dx.$$

Интересно отметить, что для корабля в целом отсутствие учета слагаемых  $z_m f_x^W$  и  $z_\omega f_x^H$  равносильно отождествлению продольной



6.2. Силы тяжести и поддержания, действующие на шпангоут при бортовой качке.



6.3. К определению поперечного восстанавливающего момента, действующего на шпангоут

метацентрической высоты с продольным метацентрическим радиусом.

При бортовой качке на шпангоут действуют (рис. 6.2) сила тяжести  $f^W$  ( $0, -mg \sin \theta, -mg \cos \theta$ ) и сила поддержания  $f^H$  ( $0, \rho g \omega \sin \theta, \rho g \omega \cos \theta$ ). Проекции  $f_2^r$  результирующей этих сил на ось  $Oy$  и момент  $f_4^r$  относительно оси  $Ox$  будут:

$$f_2^r = f_y^W + f_y^H = (-mg + \rho g \omega) \sin \theta \approx -g(m - \rho \omega) \theta;$$

$$f_4^r = -mg(y_m \cos \theta - z_m \sin \theta) + \rho g \omega(y_\omega \cos \theta - z_\omega \sin \theta), \quad (6.6)$$

где  $y_\omega$  — ордината центра тяжести погруженной площади шпангоута. Но, как видно из рис. 6.3,

$$-y_\omega \cos \theta = (z_{мц} - z_\omega) \sin \theta,$$

или

$$y_\omega \cos \theta - z_\omega \sin \theta = -z_{мц} \sin \theta,$$

где  $z_{\text{мц}}$  — аппликата метацентра для данного шпангоута, определяемая формулой

$$z_{\text{мц}} = z_{\omega} + \frac{b^3}{12\omega}.$$

учетом полученных соотношений можем написать

$$f_4^r = -g \left\{ my_m - \left[ mz_m - \rho\omega \left( z_{\omega} + \frac{b^3}{12\omega} \right) \right] \theta \right\}.$$

Элементарный момент относительно продольной оси с аппликацией  $z_0$  будет

$$f_{04}^r = f_4^r + z_0 f_2^r.$$

Интегрируя выражения для  $f_2^r$  и  $f_{04}^r$  в пределах от  $-L/2$  до  $x_0$ , получим формулы для компонент горизонтальной перерезывающей силы и крутящего момента, обусловленных весом и плавучестью корабля:

$$F_{20}^r = -g (M_0 - \rho V_0) \theta;$$

$$F_{040}^r = -g \{ M_0 y_{g0} - [M_0 z_{g0} - \rho (V_0 z_{c0} + J_{x0})] \theta \} + z_0 F_{20}^r, \quad (6.7)$$

где в дополнение к ранее принятым обозначениям через  $J_{x0}$  обозначен поперечный момент инерции кормовой по отношению к шпангоуту с абсциссой  $x_0$  части площади ватерлинии, т. е.

$$J_{x0} = \frac{1}{12} \int_{-L/2}^{x_0} b^3 dx.$$

Компонента горизонтального изгибающего момента, обусловленная весом и плавучестью, в сечении с абсциссой  $x_0$  будет

$$F_{060}^r = \int_{-L/2}^{x_0} f_2^r (x - x_0) dx = -g (M_0 x_{g0} - \rho V_0 x_{c0}) \theta - x_0 F_{20}^r, \quad (6.8)$$

или иначе

$$F_{060}^r = \int_{-L/2}^{x_0} \int_{-L/2}^x f_2^r dx dx.$$

Для корабля в целом получим

$$F_2^r = 0; \quad F_{04}^r = F_4^r = -Mgh\theta;$$

$$F_{06}^r = F_6^r = -Mg(x_g - x_c)\theta = 0,$$

где  $h$  — поперечная метацентрическая высота.

### § 34. Инерционно-демпфирующие компоненты гидродинамической нагрузки

Для вычисления нагрузки, обусловленной возмущенным движением жидкости, будем сначала, пользуясь линеаризованным интегралом Лагранжа—Коши

$$p^e = -\rho \left( \frac{\partial \Phi^e}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right), \quad (6.9)$$

находить избыточные гидродинамические давления, а затем определять силу  $F_0^e$  в сечении с абсциссой  $x_0$  и момент  $L_0^e$  относительно точки с радиусом — вектором  $r_0(x_0, 0, z_0)$  по формулам

$$F_0^e = -\iint_{\Sigma_0} p^e n dS; \quad L_0^e = -\iint_{\Sigma_0} p^e [(r - r_0) \times n] dS. \quad (6.10)$$

Здесь  $\Sigma_0$  — часть смоченной поверхности корабля, расположенная в корму от шпангоута с абсциссой  $x_0$ , а  $n$  — орт внешней нормали к этой поверхности.

Проекция вектора  $F_0^e$  на оси  $Oy$  и  $Oz$  будут, очевидно, составляющими горизонтальной и вертикальной перерезывающих сил, обусловленными возмущенным движением жидкости; проекции вектора  $L_0^e$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  будут составляющими крутящего, вертикального изгибающего и горизонтального изгибающего моментов. Как видно из последних формул,

$$L_0^e = M_0^e - r_0 \times F_0^e, \quad (6.11)$$

где через

$$M_0^e = -\iint_{\Sigma_0} p^e (r \times n) dS \quad (6.12)$$

обозначен момент относительно начала подвижной системы координат  $Oxyz$ .

Потенциал скоростей возмущенного движения жидкости  $\Phi^e$  будем, как и ранее, представлять в виде

$$\Phi^e = \Phi + \Phi^* + \Phi^0, \quad (4.6)$$

где  $\Phi$  — потенциал скоростей движения жидкости, вызванного ходом и качкой корабля на тихой воде;  $\Phi^*$  — потенциал скоростей набегающих, а  $\Phi^0$  — дифрагированных волн.

Функцию  $\Phi$  будем по-прежнему представлять в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^6 U_j \Phi_j, \quad (4.13)$$

где  $U_j$  — проекции линейной и угловой скорости, определяемые равенствами (4.36) и (4.37), а  $\Phi_j$  — гармонические функции, удовлетворяющие на смоченной поверхности корабля граничным условиям (4.15).

Введем следующие обозначения для проекций сил и моментов:

$$\left. \begin{aligned} F_{0y}^e &= F_{20}^e; & F_{0z}^e &= F_{30}^e; & M_{0x}^e &= F_{40}^e; & M_{0y}^e &= F_{50}^e; \\ M_{0z}^e &= F_{60}^e; & L_{0x}^e &= F_{040}^e; & L_{0y}^e &= F_{050}^e; & L_{0z}^e &= F_{060}^e. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Цифровые индексы при  $F^e$  здесь построены по принципу, описанному в § 32.

Таким образом, на основании равенств (6.10) — (6.12) и (4.15) можем написать следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} F_{j0}^e &= - \iint_{\Sigma_0} p^e \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (j=2, 3, \dots, 6); \\ F_{040}^e &= F_{40}^e + z_0 F_{20}^e; & F_{050}^e &= F_{50}^e + x_0 F_{30}^e; & F_{060}^e &= F_{60}^e - x_0 F_{20}^e. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Учитывая (6.9) и (4.6), будем иметь

$$p^e = p + p^* + p^0.$$

В этом случае, как видно из (6.14),

$$F_{j0}^e = F_{j0} + F_{j0}^* + F_{j0}^0; \quad F_{0j0}^e = F_{0j0} + F_{0j0}^* + F_{0j0}^0.$$

Здесь, как и ранее, через  $F$  обозначены инерционно-демпфирующие компоненты гидродинамической нагрузки, а через  $F^*$  и  $F^0$  — волновые.

Приступим теперь непосредственно к выводу формул для инерционно-демпфирующих компонент, сохраняя предположение о большом удлинении корабля. Тогда, имея в виду, что для такого корабля имеют место приближенные зависимости:

$$\Phi_5 = -x\Phi_3; \quad \Phi_6 = x\Phi_2,$$

и подставляя в (4.13) значения  $U_j$ , определяемые равенствами (4.36) и (4.37), получим

$$\Phi = (\eta - v\chi + x\dot{\chi}) \Phi_2 + (\xi + v\psi - x\dot{\psi}) \Phi_3 + \theta \Phi_4.$$

В этом случае на основании интеграла Лагранжа—Коши (6.9) будем иметь

$$\begin{aligned} p &= -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = -\rho [(\ddot{\eta} - 2v\dot{\chi} - x\ddot{\chi}) \Phi_2 - \\ &\quad - v(\dot{\eta} - v\chi + x\dot{\chi}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + (\ddot{\xi} + 2v\dot{\psi} - x\ddot{\psi}) \Phi_3 - \\ &\quad - v(\xi + v\psi - x\dot{\psi}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \ddot{\theta} \Phi_4 - v\dot{\theta} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Подстановка последнего равенства и выражений

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial n} = -x \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}; \quad \frac{\partial \Phi_6}{\partial n} = x \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$

в формулу

$$F_{j0} = - \iint_{\Sigma_0} \rho \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \quad (6.16)$$

приведет к интегралам вида

$$\iint_{\Sigma_0} x^n \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma_0} x^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (n=0, 1, 2).$$

На основании метода плоских сечений перепишем первый из этих интегралов так:

$$\iint_{\Sigma_0} x^n \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \iint_{-L/2}^{x_0} x^n \int_l \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl dx,$$

где  $l$  — смоченная часть контура шпангоута с абсциссой  $x$ . Воспользуемся далее формулой М. Д. Хаскинда, справедливой для гармонических колебаний с частотой  $\sigma$ ,

$$-\rho \int_l \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl = \mu_{jk} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jk},$$

где  $\mu_{jk}$  — присоединенная масса, а  $\lambda_{jk}$  — коэффициент демпфирования шпангоута. Тогда получим

$$-\rho \iint_{\Sigma_0} x^n \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \int_{-L/2}^{x_0} x^n \left( \mu_{jk} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{jk} \right) dx.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{matrix} M_{jko} \\ \Lambda_{jko} \end{matrix} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{matrix} \mu_{jk} \\ \lambda_{jk} \end{matrix} \right\} dx, \quad (jk = 22, 33, 44, 24).$$

Очевидно, что  $M_{jko}$  представляет собой присоединенную массу, а  $\Lambda_{jko}$  — коэффициент демпфирования части корабля, расположенной между кормой и шпангоутом с абсциссой  $x_0$ . Таким образом, будем иметь

$$-\rho \iint_{\Sigma_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = M_{jko} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{jko}, \quad (jk = 22, 33, 44, 24).$$

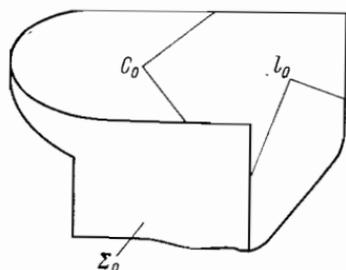
Аналогичным путем получим

$$-\rho \iint_{\Sigma_0} x \Phi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = M_{260} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{260};$$

$$-\rho \iint_{\Sigma_0} x^2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = M_{660} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{660};$$

$$\begin{aligned}
-\rho \iint_{\Sigma_0} x \Phi_2 \frac{\partial \Phi_4}{\partial n} dS &= M_{460} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{460}; \\
-\rho \iint_{\Sigma_0} x \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= -M_{350} + \frac{i}{\sigma} \Lambda_{350}; \\
-\rho \iint_{\Sigma_0} x^2 \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= M_{550} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{550}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:



6.4. К формуле Стокса.

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} M_{260} \\ \Lambda_{260} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{22} \\ \lambda_{22} \end{aligned} \right\} x dx; \\
\left. \begin{aligned} M_{660} \\ \Lambda_{660} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{22} \\ \lambda_{22} \end{aligned} \right\} x^2 dx; \\
\left. \begin{aligned} M_{460} \\ \Lambda_{460} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{24} \\ \lambda_{24} \end{aligned} \right\} x dx;
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{350} \\ \Lambda_{350} \end{aligned} \right\} = - \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{33} \\ \lambda_{33} \end{aligned} \right\} x dx; \quad \left. \begin{aligned} M_{550} \\ \Lambda_{550} \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} \left\{ \begin{aligned} \mu_{33} \\ \lambda_{33} \end{aligned} \right\} x^2 dx.$$

Для вычисления интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} dS$$

воспользуемся формулой Стокса, вычисляя линейный интеграл по замкнутому контуру, состоящему из части  $C_0$  контура ватерлинии, расположенной в корму от шпангоута с абсциссой  $x_0$ , и смоченной части  $l_0$  контура этого шпангоута (рис. 6.4). С учетом направления координатной оси  $Ox$  формула Стокса в нашем случае примет вид

$$- \int_{C_0 + l_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{C} = \iint_{\Sigma_0} \text{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS,$$

или

$$\begin{aligned}
- \int_{C_0 + l_0} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) &= \iint_{\Sigma_0} \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS.
\end{aligned}$$

Поскольку для удлиненного корабля полагаем  $\cos(n, x) = 0$ , то на контуре ватерлинии  $dy = \cos(n, x) dC = 0$ . Кроме того, так

как этот контур лежит в плоскости  $Oxy$ , для него  $dz = 0$ . Полагая далее в формуле Стокса  $a_x = 0$ , получим

$$-\int_{l_0} (a_y dy + a_z dz) = \iint_{\Sigma_0} \left[ -\frac{\partial a_z}{\partial x} \cos(n, y) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \cos(n, z) \right] dS.$$

На контуре шпангоута  $dy = -\cos(n, z) dl$ , а  $dz = \cos(n, y) dl$ . Следовательно,

$$\int_{l_0} [a_y \cos(n, z) - a_z \cos(n, y)] dl = \iint_{\Sigma_0} \left[ \frac{\partial a_y}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial a_z}{\partial x} \cos(n, y) \right] dS.$$

Отсюда, полагая поочередно  $a_y = 0$ ,  $a_z = \Phi_k$  и  $a_z = 0$ ,  $a_y = \Phi_k$ , получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \cos(n, y) dS &= \int_{l_0} \Phi_k \cos(n, y) dl; \\ \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \cos(n, z) dS &= \int_{l_0} \Phi_k \cos(n, z) dl. \end{aligned}$$

Полагая далее  $a_y = \Phi_k y$ ,  $a_z = \Phi_k z$ , будем иметь

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dS = \int_{l_0} \Phi_k [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] dl.$$

Таким образом, окончательно можем написать

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl, \quad (j, k = 2, 3, 4). \quad (6.17)$$

Для вычисления интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma_0} x^2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

используем очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x \Phi_k) - \Phi_k; \\ x^2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \Phi_k) - 2x \Phi_k. \end{aligned}$$

Тогда, пользуясь равенством (6.17), найдем

$$\iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial x} (x \Phi_k) \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS -$$

$$\begin{aligned}
-\iint_{\Sigma_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS &= x_0 \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl - \iint_{\Sigma_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS; \\
\iint_{\Sigma_0} x^2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS &= \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 \Phi_k) \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS - \\
-2 \iint_{\Sigma_0} x \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS &= x_0^2 \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl - 2 \iint_{\Sigma_0} x \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS.
\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$-\rho \int_{l_0} \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl = \mu_{j k 0} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{j k 0}.$$

Очевидно, что  $\mu_{j k 0}$  и  $\lambda_{j k 0}$  представляют собой присоединенные массы и коэффициенты демпфирования шпангоута с абсциссой  $x_0$ . Таким образом, интегралы вида

$$\iint_{\Sigma_0} x^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad (n=0, 1, 2)$$

могут быть выражены через присоединенные массы и коэффициенты демпфирования шпангоута с абсциссой  $x_0$  и присоединенные массы и коэффициенты демпфирования части корабля, расположенной между кормовым перпендикуляром и этим шпангоутом. Так, например,

$$\begin{aligned}
-\rho \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= \mu_{330} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{330}; \\
-\rho \iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= x_0 \left( \mu_{330} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{330} \right) - \left( M_{330} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{330} \right); \\
-\rho \iint_{\Sigma_0} x^2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS &= x_0^2 \left( \mu_{330} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{330} \right) + 2 \left( M_{350} - \frac{i}{\sigma} \Lambda_{350} \right).
\end{aligned}$$

Если теперь подставить выражения (6.15) в (6.16) и воспользоваться найденными соотношениями для интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} x^n \Phi_k \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma_0} x^n \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS,$$

получим следующие формулы для инерционно-демпфирующих компонент перерезывающих сил, крутящего и изгибающих моментов

в плоскости шпангоута с абсциссой  $x_0$ :

$$\begin{aligned}
 F_{20} &= - \{ M_{220} \ddot{\eta} + (\Lambda_{220} - v \mu_{220}) \dot{\eta} - v \lambda_{220} \eta + M_{240} \ddot{\theta} + (\Lambda_{240} - \\
 &- v \mu_{240}) \dot{\theta} - v \lambda_{240} \theta + M_{260} \ddot{\chi} + [\Lambda_{260} - v (M_{220} + x_0 \mu_{220}) - \\
 &- v^2 \sigma^{-2} \lambda_{220}] \dot{\chi} - v (\Lambda_{220} + x_0 \lambda_{220} - v \mu_{220}) \chi \}; \\
 F_{30} &= - \{ M_{330} \ddot{\zeta} + (\Lambda_{330} - v \mu_{330}) \dot{\zeta} - v \lambda_{330} \zeta + M_{350} \ddot{\psi} + [\Lambda_{350} + \\
 &+ v (M_{330} + x_0 \mu_{330}) + v^2 \sigma^{-2} \lambda_{330}] \dot{\psi} + v (\Lambda_{330} + x_0 \lambda_{330} - v \mu_{330}) \psi \}; \\
 F_{040} &= - \{ M_{240} \ddot{\eta} + (\Lambda_{240} - v \mu_{240}) \dot{\eta} - v \lambda_{240} \eta + M_{440} \ddot{\theta} + (\Lambda_{440} - \\
 &- v \mu_{440}) \dot{\theta} - v \lambda_{440} \theta + M_{460} \ddot{\chi} + [\Lambda_{460} - v (M_{240} + x_0 \mu_{240}) - \\
 &- v^2 \sigma^{-2} \lambda_{240}] \dot{\chi} - v (\Lambda_{240} + x_0 \lambda_{240} - v \mu_{240}) \chi \} + z_0 F_{20}; \\
 F_{050} &= F_{50} + x_0 F_{30} = - \{ (M_{350} + x_0 M_{330}) \ddot{\zeta} + (\Lambda_{350} - v M_{330} + \\
 &+ x_0 \lambda_{330}) \dot{\zeta} - v \Lambda_{330} \zeta + (M_{550} + x_0 M_{350}) \ddot{\psi} + [\Lambda_{550} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{330} + \\
 &+ x_0 (\Lambda_{350} + v M_{330})] \dot{\psi} - v (v M_{330} - x_0 \Lambda_{330}) \psi \}; \\
 F_{060} &= F_{60} - x_0 F_{20} = - \{ (M_{260} - x_0 M_{220}) \ddot{\eta} + (\Lambda_{260} + v M_{220} - \\
 &- x_0 \Lambda_{220}) \dot{\eta} + v \Lambda_{220} \eta + (M_{460} - x_0 M_{240}) \ddot{\theta} + (\Lambda_{460} + v M_{240} - \\
 &- x_0 \Lambda_{240}) \dot{\theta} + v \Lambda_{240} \theta + (M_{660} - x_0 M_{260}) \ddot{\chi} + [\Lambda_{660} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{220} - \\
 &- x_0 (\Lambda_{260} - v M_{220})] \dot{\chi} - v (v M_{220} - x_0 \Lambda_{220}) \chi \}.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Из этих формул легко получить выражения для  $F_j$  — инерционно-демпфирующих сил, действующих на весь корабль, и их моментов относительно координатных осей. Для этого следует положить  $x_0 = z_0 = 0$ , заменить  $M_{j k 0}$  на  $M_{j k}$  и  $\Lambda_{j k 0}$  на  $\Lambda_{j k}$ , и, кроме того, значения  $\mu_{j k 0}$  и  $\lambda_{j k 0}$ , которые в рассматриваемом случае представляют собой присоединенные массы и коэффициенты демпфирования шпангоута, совпадающего с носовым перпендикуляром, считать равными нулю. Тогда, как легко видеть, формулы (6.18) перейдут в равенства (4.39) и (4.40).

### § 35. Волновые компоненты гидродинамической нагрузки

К волновым компонентам гидродинамической нагрузки будем относить силы, обусловленные давлением набегающих на корабль и дифрагированных волн, т. е. возмущающие силы. Проекции главной части возмущающих сил, действующих на участок длины корабля, заключенный между кормой и шпангоутом с абсциссой  $x_0$ , будут определяться формулой

$$F_{j0}^* = - \iint_{\Sigma_0} p^* \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \tag{6.19}$$

где  $p^*$  — избыточное гидродинамическое давление набегающих на

корабль волн, определяемое равенством (4.49). Для удлиненного корабля формула (6.19) принимает вид, аналогичный (4.52), с той лишь разницей, что теперь верхним пределом интеграла будет не  $L/2$ , а  $x_0$ . Таким образом, имеем

$$F_{j0}^* = -\rho g r e^{i\sigma t} \int_{-L/2}^{x_0} e^{-ik_1 x} h_j dx, \quad (k_1 = k \cos \epsilon), \quad (6.20)$$

где  $k$  — волновое число;  $h_j$  — функции, определяемые равенством (4.51). Для этих функций нами получены соотношения (4.64), (4.73) и 4.90), согласно которым

$$\begin{aligned} h_2 &= -ik_2 a_2; \quad h_3 = -a_3; \quad h_4 = ik_2 a_4. \\ h_5 &= -x h_3; \quad h_6 = x h_2; \quad (k_2 = k \sin \epsilon), \end{aligned} \quad (6.21)$$

Значения  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$ , входящие в эти соотношения, определяются формулами (4.63), (4.72) и (4.89).

Подставляя (6.21) в (6.20) и вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} A_{j0}^s \\ A_{j0}^c \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} a_j \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx;$$

$$\left. \begin{aligned} A_{j0}^{xs} \\ A_{j0}^{xc} \end{aligned} \right\} = \int_{-L/2}^{x_0} a_j x \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx,$$

можем написать следующие выражения для компонентов перерезывающих сил, крутящего и изгибающих моментов, обусловленных гидродинамическим давлением набегающих на корабль свободно распространяющихся волн:

$$\left. \begin{aligned} F_{20}^* &= \rho g k r \sin \epsilon (\bar{A}_{20}^s + i A_{20}^c) e^{i\sigma t}; \\ F_{30}^* &= \rho g r (\bar{A}_{30}^c - i A_{30}^s) e^{i\sigma t}; \\ F_{040}^* &= -\rho g k r \sin \epsilon [A_{40}^s - z_0 A_{20}^s + i (\bar{A}_{40}^c - z_0 A_{20}^c)] e^{i\sigma t}; \\ F_{050}^* &= -\rho g r [A_{30}^{xc} - x_0 A_{30}^c - i (A_{30}^{xs} - x_0 A_{30}^s)] e^{i\sigma t}; \\ F_{060}^* &= \rho g k r \sin \epsilon [A_{20}^{xs} - x_0 A_{20}^s + i (A_{20}^{xc} - x_0 A_{20}^c)] e^{i\sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Заменяя в последних выражениях  $A_{j0}$  на  $A_j$  с соответствующими верхними индексами и полагая  $x_0 = z_0 = 0$ , получим формулы для главной части возмущающих сил, действующих на весь корабль, и моментов относительно осей координат  $Oxuz$ .

Для проекций дифракционных сил, действующих на кормовую по отношению к шпангоуту с абсциссой  $x_0$  часть корабля, можно написать следующее аналогичное (6.19) выражение:

$$F_{j0}^0 = - \iint_{\Sigma_0} p^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS,$$

где  $p^0$  — гидродинамическое давление дифрагированных волн. Обо-

значая потенциал скоростей этих волн через  $\Phi^0$  и воспользовавшись линеаризованным интегралом Лагранжа—Коши, будем иметь

$$p^0 = -\rho \left( \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} - v \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right).$$

Представив функцию  $\Phi^0$  в виде

$$\Phi^0(x, y, z, t) = \varphi^0(x, y, z) e^{i\sigma t},$$

перепишем формулы для  $p^0$  и  $F_{j0}^0$  следующим образом:

$$p^0 = -\rho \left( i\sigma \varphi^0 - v \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \right) e^{i\sigma t}; \quad F_{j0}^0 = \rho \left( i\sigma Q_{j0} - v R_{j0} \right) e^{i\sigma t}, \quad (6.23)$$

где

$$Q_{j0} = \iint_{\Sigma_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS, \quad R_{j0} = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS. \quad (6.24)$$

Воспользовавшись формулой (4.104), получим

$$Q_{j0} = \iint_{\Sigma_0} \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dS. \quad (6.25)$$

На основании равенства (4.108) последнее выражение можно переписать так

$$Q_{j0} = -r\sigma_0 \iint_{\Sigma_0} \Phi_j e^{-ik_j x} f^0 dS,$$

где  $f^0$  — функция, определяемая формулой (4.109).

Переходя к методу плоских сечений и учитывая, что для удлиненного корабля  $\Phi_5 = -x\Phi_3$ ,  $\Phi_6 = x\Phi_2$ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} Q_{j0} &= -r\sigma_0 \int_{-L/2}^{x_0} e^{-ik_j x} q_j dx, \quad (j=2, 3, 4); \\ Q_{50} &= r\sigma_0 \int_{-L/2}^{x_0} e^{-ik_3 x} x q_3 dx; \quad Q_{60} = -r\sigma_0 \int_{-L/2}^{x_0} e^{-ik_2 x} x q_2 dx, \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

где  $q_j$  в общем виде определяется равенством (4.111). Если функции излучения  $\Phi_j$  представить в виде (4.112), то, как показано в гл. 4, значения  $q_j$  можно выразить через присоединенные массы и коэффициенты демпфирования шпангоута. Эти выражения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= -\frac{\kappa_2^0}{\rho} \left( \mu_{22} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{22} \right) \sin \varepsilon, \quad q_3 = -i \frac{\kappa_3^0}{\rho} \left( \mu_{33} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{33} \right); \\ q_4 &= -\frac{\kappa_4^0}{\rho} \left( \mu_{24} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{24} \right) \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Поправочные коэффициенты  $\kappa_k^0$ , учитывающие влияние конечности размеров шпангоутного контура, определяются выражениями (4.126), (4.135) и (4.147).

Интегралы  $R_{j0}$  можно преобразовать с помощью формулы Стокса. Соответствующие выкладки полностью совпадают с приведенными выше при преобразовании интегралов вида

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

и требуют лишь замены символа  $\Phi_k$  на  $\varphi^0$ . Таким образом, по аналогии с формулой (6.17) можем написать

$$R_{j0} = \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS = \int_{l_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl, \quad (6.28)$$

где, напомним,  $l_0$  — смоченная часть контура шпангоута с абсциссой  $x_0$ . Применяя к последнему интегралу формулу

$$\int_{l_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dl = \int_{l_0} \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dl,$$

будем иметь

$$R_{j0} = \int_{l_0} \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dl.$$

Обратим внимание на то, что выражение (6.25) можно переписать в виде

$$Q_{j0} = \int_{-L/2}^{x_0} \int_1 \Phi_j \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} dl dx.$$

Таким образом,

$$R_{j0} = \left. \frac{\partial Q_j}{\partial x} \right|_{x=x_0}.$$

Учитывая (6.26), окончательно находим

$$R_{j0} = -r\sigma_0 e^{-ik_1 x_0} q_{j0}, \quad (j=2, 3, 4), \quad (6.29)$$

где через  $q_{j0}$  обозначена функция  $q_j$  для шпангоута с абсциссой  $x_0$ .

С целью нахождения функций  $R_{50}$  и  $R_{80}$ , которые для удлиненного корабля определяются формулами

$$R_{50} = - \iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS; \quad R_{80} = \iint_{\Sigma_0} x \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS,$$

используем очевидное тождество

$$x \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x\varphi^0) - \varphi^0.$$

Тогда, пользуясь (6.28) и (6.24), получим

$$R_{\varepsilon_0} = -x_0 \int_{l_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dl + \iint_{\Sigma_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} dS = -x_0 R_{30} + Q_{30};$$

$$R_{60} = x_0 \int_{l_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dl - \iint_{\Sigma_0} \varphi^0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = x_0 R_{20} - Q_{20}.$$

Приступим теперь к непосредственному нахождению дифракционной составляющей  $F_{20}^0$  горизонтальной перерезывающей силы. Подставив в (6.26) значение  $q_2$ , определяемое (6.27), можем написать

$$\begin{aligned} \rho \sigma Q_{20} &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \int_{-L/2}^{x_0} e^{-ik_1 x} \kappa_2^0 (\mu_{22} \sigma - i \lambda_{22}) dx = \\ &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \int_{-L/2}^{x_0} \kappa_2^0 [\mu_{22} \sigma \cos k_1 x - \lambda_{22} \sin k_1 x - \\ &\quad - i (\mu_{22} \sigma \sin k_1 x + \lambda_{22} \cos k_1 x)] dx. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_{jk0}^s \\ M_{jk0}^c \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \kappa_k^0 \mu_{jk} \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \\ \left. \begin{aligned} \Lambda_{jk0}^s \\ \Lambda_{jk0}^c \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \kappa_k^0 \lambda_{jk} \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \end{aligned} \right\} (jk = 22, 33, 24)$$

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_{jk0}^{xs} \\ M_{jk0}^{xc} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \kappa_k^0 \mu_{jk} x \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx; \\ \left. \begin{aligned} \Lambda_{jk0}^{xs} \\ \Lambda_{jk0}^{xc} \end{aligned} \right\} &= \int_{-L/2}^{x_0} \kappa_k^0 \lambda_{jk} x \begin{cases} \sin k_1 x \\ \cos k_1 x \end{cases} dx. \end{aligned} \right\} (jk = 22, 33) \quad (6.31)$$

Эти обозначения строятся по тому же принципу, что и обозначения  $M_{jk}$  и  $\Lambda_{jk}$  с соответствующими верхними индексами, определяемые равенствами (4.129). Разница состоит лишь в том, что в (4.129) интегралы берут в пределах от  $-L/2$  до  $L/2$ , а в (6.31) — от  $-L/2$  до  $x_0$ . В связи с этим в последних нижний индекс вместо  $jk$  записывается в виде  $jk0$ . Используя только что введенные обозначения, перепишем (6.30) следующим образом:

$$\rho \sigma Q_{20} = r \sigma_0 \sin \varepsilon [M_{220}^c \sigma - \Lambda_{220}^s - i (M_{220}^s \sigma + \Lambda_{220}^c)]. \quad (6.32)$$

Далее в соответствии с (6.27) можем написать

$$q_{20} = -\frac{\kappa_{20}^0}{\rho} \left( \mu_{220} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{220} \right) \sin \varepsilon,$$

где через  $\kappa_{20}^0$  обозначен поправочный коэффициент  $\kappa_2^0$  для шпангоута с абсциссой  $x_0$ . Тогда на основании (6.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \rho R_{20} &= r \sigma_0 \kappa_{20}^0 e^{-ik_1 x_0} \left( \mu_{220} - \frac{i}{\sigma} \lambda_{220} \right) \sin \varepsilon = \\ &= r \sigma_0 \kappa_{20}^0 \left[ \mu_{220} \cos k_1 x_0 - \lambda_{220} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0 - \right. \\ &\quad \left. - i (\mu_{220} \sin k_1 x_0 + \lambda_{220} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0) \right] \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Подставив (6.32) и (6.33) в (6.23), получим окончательную формулу для  $F_{20}^0$

$$\begin{aligned} F_{20}^0 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \left\{ M_{220}^s \sigma + \Lambda_{220}^c - v \kappa_{20}^0 (\mu_{220} \cos k_1 x_0 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{220} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0) + i [M_{220}^c \sigma - \Lambda_{220}^s + v \kappa_{20}^0 (\mu_{220} \sin k_1 x_0 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{220} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0)] \right\} e^{i \sigma t}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Аналогичным путем могут быть получены формулы для дифракционных составляющих вертикальной перерезывающей силы, крутящего, вертикального изгибающего и горизонтального изгибающего моментов. Эти формулы имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{30}^0 &= -r \sigma_0 \left\{ M_{330}^c \sigma - \Lambda_{330}^s + v \kappa_{30}^0 (\mu_{330} \sin k_1 x_0 + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{330} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0) - i [M_{330}^s \sigma + \Lambda_{330}^c - \right. \\ &\quad \left. - v \kappa_{30}^0 (\mu_{330} \cos k_1 x_0 - \lambda_{330} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0)] \right\} e^{i \sigma t}; \\ F_{040}^0 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \left\{ M_{240} \sigma + \Lambda_{240}^c - v \kappa_{40}^0 (\mu_{240} \cos k_1 x_0 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{240} \sigma^{-1} \sin k_1 x_0) + i [M_{240}^c \sigma - \Lambda_{240} + v \kappa_{40}^0 \times \right. \\ &\quad \left. \times (\mu_{240} \sin k_1 x_0 + \lambda_{240} \sigma^{-1} \cos k_1 x_0)] \right\} e^{i \sigma t} + z_0 F_{20}^0; \\ F_{050}^0 &= r \sigma_0 \left\{ M_{330}^{xc} \sigma - \Lambda_{330}^{xs} - v (M_{330}^s + \Lambda_{330}^c \sigma^{-1}) - \right. \\ &\quad \left. - x_0 (M_{330}^c \sigma - \Lambda_{330}^s) - i [M_{330}^{xs} \sigma + \Lambda_{330}^{xc} + \right. \\ &\quad \left. + v (M_{330}^c - \Lambda_{330}^s \sigma^{-1}) - x_0 (M_{330}^s \sigma + \Lambda_{330}^c)] \right\} e^{i \sigma t}; \\ F_{060}^0 &= r \sigma_0 \sin \varepsilon \left\{ M_{220}^{xs} \sigma + \Lambda_{220}^{xc} + v (M_{220}^c - \Lambda_{220}^s \sigma^{-1}) - \right. \\ &\quad \left. - x_0 (M_{220}^s \sigma + \Lambda_{220}^c) + i [M_{220}^{xc} \sigma - \Lambda_{220}^{xs} - \right. \\ &\quad \left. - v (M_{220}^s + \Lambda_{220}^c \sigma^{-1}) - x_0 (M_{220}^c \sigma - \Lambda_{220}^s)] \right\} e^{i \sigma t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Если в формулах для  $F_{j0}^0$  и  $F_{0j0}^0$  положить  $x_0 = z_0 = 0$ ,  $\mu_{j0} = \lambda_{j0} = 0$  и заменить  $M_{j0}^c$  и  $\Lambda_{j0}^c$  с верхними индексами  $s, c$  на  $M_{jk}$  и  $\Lambda_{jk}$  с соответствующими верхними индексами, то

получим выражения для  $F_j^0$  — проекций действующих на весь корабль дифракционных сил и их моментов относительно координатных осей.

В дальнейшем для краткости записи будем использовать представление волновых составляющих гидродинамической нагрузки в виде

$$\begin{aligned} F_{j0}^* + F_{j0}^0 &= (\alpha_{j0} + i\beta_{j0}) e^{i\sigma t}; \\ F_{0j0}^* + F_{0j0}^0 &= (\alpha_{0j0} + i\beta_{0j0}) e^{i\sigma t}. \end{aligned}$$

### § 36. Силы и моменты в шпангоутных сечениях

Будем обозначать перерезывающие силы, крутящий и изгибающие моменты в плоскости шпангоута с абсциссой  $x_0$  общим символом  $N_j(x_0)$ . Индексу  $j$  здесь придается следующий смысл:  $j = 2$  определяет собой горизонтальную перерезывающую силу,  $j = 3$  — вертикальную перерезывающую силу,  $j = 4$  — крутящий момент,  $j = 5$  — вертикальный изгибающий момент,  $j = 6$  — горизонтальный изгибающий момент. Подчеркнем, что под горизонтальным и вертикальным изгибом понимается изгиб в неизменно связанных с кораблем координатных плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$ , а не в вертикальной и горизонтальной плоскостях, неподвижных в пространстве.

Общие выражения для  $N_j(x_0)$  будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} N_j(x_0) &= F_{j0}^m + F_{j0}^r + F_{j0} + F_{j0}^* + F_{j0}^0, \quad (j = 2, 3); \\ N_4(x_0) &= F_{40}^m + F_{40}^r + F_{40} + F_{40}^* + F_{40}^0 + z_0 N_2(x_0); \\ N_5(x_0) &= F_{50}^m + F_{50}^r + F_{50} + F_{50}^* + F_{50}^0 + x_0 N_3(x_0); \\ N_6(x_0) &= F_{60}^m + F_{60}^r + F_{60} + F_{60}^* + F_{60}^0 - x_0 N_2(x_0). \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Слагаемые этих равенств зависят от кинематических характеристик (смещений, скоростей, ускорений) различных видов качки и параметров системы набегающих волн, в том числе от кажущейся частоты, которая, в свою очередь, зависит от курса и скорости корабля. Если считать волнение регулярным, а его параметры заданными, то задача сведется к нахождению комплексных амплитуд качки, определяемых частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения качки можно получить, приравняв нулю перерезывающие силы, крутящий и изгибающие моменты на носовом перпендикуляре корабля, т. е. при  $x_0 = L/2$ . При этом уравнения, полученные из условий  $N_2(L/2) = 0$  и  $N_3(L/2) = 0$ , совпадут с соответствующими уравнениями систем (4.165), а полученные из условий  $N_4(L/2) = 0$ ,  $N_5(L/2) = 0$  и  $N_6(L/2) = 0$ , будут иметь несколько более громоздкий вид за счет последних слагаемых, содержащих перерезывающие силы  $N_2$  и  $N_3$ . Однако поскольку  $N_2(L/2) = N_3(L/2) = 0$ , дифференциальные

уравнения, полученные приравниванием нулю крутящего и изгибающих моментов на носовом перпендикуляре, оказываются эквивалентными соответствующим уравнениям систем (4.165). Таким образом, вынужденные колебания корабля будут описываться выражением (4.168), а действительные и мнимые части комплексных амплитуд качки — определяться как корни систем линейных алгебраических уравнений (4.170) и (4.171).<sup>1</sup>

Подставляя теперь выражения для перемещений, скоростей и ускорений корабля в формулы для  $F_{j0}^m$ ,  $F_{j0}^r$  и  $F_{j0}$  и пользуясь полученными ранее соотношениями для  $F_{j0}^*$  и  $F_{j0}^0$ , на основании (6.36) можем написать

$$N_j(x_0) = [N_{j1}(x_0) + iN_{j2}(x_0)]e^{i\sigma t} + N_{j3}(x_0),$$

где  $N_{j3}$  — перерезывающие силы, крутящий и изгибающие моменты, действующие на корабль, находящийся в положении равновесия на тихой воде. Если при этом корабль сидит прямо, то, как видно из формул (6.7) и (6.8),  $N_{23} = N_{33} = 0$ . Для корабля, сидящего в положении равновесия на ровный киль, вертикальная перерезывающая сила на тихой воде  $N_{33}$  и изгибающий момент  $N_{53}$  будут определяться не зависящими от  $\zeta$  и  $\psi$  слагаемыми выражений (6.5):

$$N_{33}(x_0) = -g(M_0 - \rho V_0);$$

$$N_{53}(x_0) = g[M_0(x_{g0} - x_0) - \rho V_0(x_{c0} - x_0)].$$

Для того чтобы определить крутящий момент при прямой посадке на тихой воде, следует, положив в (6.6)  $\theta = 0$ , проинтегрировать функцию  $f_4$  в пределах от  $-L/2$  до  $x_0$ . Тогда получим

$$N_{43}(x_0) = -g(M_0 y_{g0} - \rho V_0 y_{c0}).$$

Формулы для действительных и мнимых частей комплексных амплитуд перерезывающих сил, крутящего и изгибающих моментов можно получить, подставляя выражения

$$\eta = (\eta_1 + i\eta_2)e^{i\sigma t}; \quad \dot{\eta} = i\sigma\eta; \quad \ddot{\eta} = i\sigma\dot{\eta} = -\sigma^2\eta$$

и аналогичные соотношения для  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\chi$  в равенства (6.3), (6.5), (6.7), (6.18) с последующим суммированием всех компонентов на грузки и отделением в результатах действительных и мнимых частей. Эти формулы имеют следующий вид:  
вертикальная перерезывающая сила

$$N_{31}(x_0) = b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 + b_3\psi_1 + b_4\psi_2 + b_5\theta_1 + b_6\theta_2 + \alpha_{30};$$

$$N_{32}(x_0) = -b_2\zeta_1 + b_1\zeta_2 - b_4\psi_1 + b_3\psi_2 - b_6\theta_1 + b_5\theta_2 + \beta_{30},$$

где

$$b_1 = (M_0 + M_{330})\sigma^2 - \rho g S_0 + \nu\lambda_{330};$$

$$b_2 = (\Lambda_{330} - \nu\mu_{330})\sigma;$$

<sup>1</sup> Для продольной качки можно вместо решения системы (4.170) воспользоваться формулами (4.175).

$$b_3 = (M_{350} - M_0 x_{g0}) \sigma^2 + \rho g S_0 x_{f0} - v (\Lambda_{330} + x_0 \lambda_{330} - v \mu_{330});$$

$$b_4 = \Lambda_{350} + v (M_{330} + x_0 \mu_{330}) + v^2 \sigma^{-2} \lambda_{330};$$

$$b_5 = M_0 y_{g0} \sigma^2; \quad b_6 = 0;$$

вертикальный изгибающий момент

$$N_{51}(x_0) = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + c_3 \psi_1 + c_4 \psi_2 + c_5 \theta_1 + c_6 \theta_2 + c_7 \chi_1 + c_8 \chi_2 + \alpha_{050};$$

$$N_{52}(x_0) = -c_2 \zeta_1 + c_1 \zeta_2 - c_4 \psi_1 + c_3 \psi_2 - c_6 \theta_1 + c_5 \theta_2 - c_8 \chi_1 + c_7 \chi_2 + \beta_{050},$$

где

$$c_1 = (M_{350} + x_0 M_{330} - M_0 x_{g0}) \sigma^2 + \rho g S_0 (x_{f0} - x_0) + v \Lambda_{330};$$

$$c_2 = (\Lambda_{350} - v M_{350} + x_0 \Lambda_{330}) \sigma;$$

$$c_3 = (I_{y0} + M_{550} + x_0 M_{350}) \sigma^2 + g (M_0 z_{g0} - \rho V_0 z_{c0}) -$$

$$- \rho g (I_{y0} - S_0 x_{f0} x_0) + v (v M_{330} - x_0 \Lambda_{330});$$

$$c_4 = [\Lambda_{550} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{330} + x_0 (\Lambda_{350} + v M_{330})] \sigma;$$

$$c_5 = -I_{xy0} \sigma^2; \quad c_6 = 0; \quad c_7 = -I_{y20} \sigma^2; \quad c_8 = 0;$$

крутящий момент

$$N_{41}(x_0) = d_1 \eta_1 + d_2 \eta_2 + d_3 \theta_1 + d_4 \theta_2 + d_5 \chi_1 + d_6 \chi_2 + d_7 \zeta_1 +$$

$$+ d_8 \zeta_2 + d_9 \psi_1 + d_{10} \psi_2 + \alpha_{040};$$

$$N_{42}(x_0) = -d_2 \eta_1 + d_1 \eta_2 - d_4 \theta_1 + d_3 \theta_2 - d_6 \chi_1 + d_5 \chi_2 - d_8 \zeta_1 +$$

$$+ d_7 \zeta_2 - d_{10} \psi_1 + d_9 \psi_2 + \beta_{040},$$

где

$$d_1 = [M_0 (z_0 - z_{g0}) + M_{240} + z_0 M_{220}] \sigma^2 + v (\lambda_{240} + z_0 \lambda_{220});$$

$$d_2 = [\Lambda_{240} - v \mu_{240} + z_0 (\Lambda_{220} - v \mu_{220})] \sigma;$$

$$d_3 = [I_{x0} + M_{440} - z_0 (M_0 z_{g0} - M_{240})] \sigma^2 + g [M_0 (z_{g0} - z_0) -$$

$$- \rho V_0 (z_{c0} - z_0) - \rho J_{x0}] + v (\lambda_{440} - z_0 \lambda_{240});$$

$$d_4 = [\Lambda_{440} - v \mu_{440} + z_0 (\Lambda_{240} - v \mu_{240})] \sigma;$$

$$d_5 = [M_{460} - I_{xz0} + z_0 (M_0 x_{g0} + M_{260})] \sigma^2 + v [\Lambda_{240} + x_0 \lambda_{240} -$$

$$- v \mu_{240} + z_0 (\Lambda_{220} + x_0 \lambda_{220} - v \mu_{220})];$$

$$d_6 = \{ \Lambda_{460} - v (M_{240} + x_0 \mu_{240}) - v^2 \sigma^{-2} \lambda_{240} +$$

$$+ z_0 [\Lambda_{260} - v (M_{220} + x_0 \mu_{220}) - v^2 \sigma^{-2} \lambda_{220}] \} \sigma;$$

$$d_7 = M_0 y_{g0} \sigma^2; \quad d_8 = 0;$$

$$d_9 = -I_{xy0} \sigma^2; \quad d_{10} = 0;$$

горизонтальная перерезывающая сила

$$N_{21}(x_0) = p_1 \eta_1 + p_2 \eta_2 + p_3 \theta_1 + p_4 \theta_2 + p_5 \chi_1 + p_6 \chi_2 + \alpha_{20};$$

$$N_{22}(x_0) = -p_2 \eta_1 + p_1 \eta_2 - p_4 \theta_1 + p_3 \theta_2 - p_6 \chi_1 + p_5 \chi_2 + \beta_{20},$$

где

$$p_1 = (M_0 + M_{220}) \sigma^2 + v \lambda_{220};$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= (\Lambda_{220} - v\mu_{220}) \sigma; \\ \rho_3 &= (M_{240} - M_0 z_{g0}) \sigma^2 + g(\rho V_0 - M_0) + v\lambda_{240}; \\ \rho_4 &= (\Lambda_{240} - v\mu_{240}) \sigma; \\ \rho_5 &= (M_0 x_{g0} + M_{260}) \sigma^2 + v(\Lambda_{220} + x_0 \lambda_{220} - v\mu_{220}); \\ \rho_6 &= [\Lambda_{260} - v(M_{220} + x_0 \mu_{220}) - v^2 \sigma^{-2} \lambda_{220}] \sigma; \end{aligned}$$

горизонтальный изгибающий момент

$$\begin{aligned} N_{61}(x_0) &= r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2 + r_3 \theta_1 + r_4 \theta_2 + r_5 \chi_1 + r_6 \chi_2 + r_7 \psi_1 + r_8 \psi_2 + \alpha_{060}; \\ N_{62}(x_0) &= -r_2 \eta_1 + r_1 \eta_2 - r_4 \theta_1 + r_3 \theta_2 - r_6 \chi_1 + r_5 \chi_2 - r_8 \psi_1 + r_7 \psi_2 + \beta_{060}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= [M_0 x_{g0} + M_{260} - x_0 (M_0 + M_{220})] \sigma^2 - v\Lambda_{220}; \\ r_2 &= (\Lambda_{260} + vM_{220} - x_0 \Lambda_{220}) \sigma; \\ r_3 &= [M_{460} - I_{xz0} - x_0 (M_{240} - M_0 z_{g0})] \sigma^2 + x_0 g(\rho V_0 - M_0) - v\Lambda_{240}; \\ r_4 &= (\Lambda_{460} + vM_{240} - x_0 \Lambda_{240}) \sigma; \\ r_5 &= [M_{660} + I_{z0} - x_0 (M_0 x_{g0} + M_{260})] \sigma^2 + v(vM_{220} - x_0 \Lambda_{220}); \\ r_6 &= [\Lambda_{660} + v^2 \sigma^{-2} \Lambda_{220} - x_0 (\Lambda_{260} - vM_{220})] \sigma; \\ r_7 &= -I_{yz0} \sigma^2; \quad r_8 = 0. \end{aligned}$$

Значения действительных и мнимых частей комплексных амплитуд волновых составляющих гидродинамической нагрузки, входящие в выражения для  $N_{j1}(x_0)$  и  $N_{j2}(x_0)$ , определяются из равенств (6.22), (6.34) и (6.35).

Как уже упоминалось, для удлиненного корабля можно пренебречь произведениями  $z_m \omega_{mx}$  по сравнению с  $x \omega_{mz}$  и  $y_m \omega_{mx}$  по сравнению с  $x \omega_{my}$  и не учитывать различия между продольной метацентрической высотой и продольным метацентрическим радиусом. Это равносильно отождествлению входящих в выражения для  $c_3$  и  $r_5$  моментов инерции массы относительно осей  $Oy$  и  $Oz$  с моментами инерции относительно плоскости  $Oyz$ . Кроме того, при рассматриваемом подходе значения  $c_7$  и  $r_7$  оказываются равными нулю, а в выражении для  $c_3$  должно быть опущено слагаемое, включающее  $z_{g0}$  и  $z_{c0}$ . Тогда вертикальный и горизонтальный изгибающие моменты могут быть вычислены как интегралы от соответствующих перерезывающих сил.

Ордината  $n_j$  амплитудно-частотной характеристики  $j$ -го вида динамической нагрузки<sup>1</sup> будет представлять собой отношение ее амплитуды к амплитуде волны  $r$ :

$$n_j = \frac{1}{r} \sqrt{N_{j1}^2 + N_{j2}^2}.$$

<sup>1</sup> Под динамическими нагрузками понимаются дополнительные по отношению к действующим на тихой воде перерезывающие силы ( $j = 2, 3$ ), крутящий ( $j = 4$ ) и изгибающие ( $j = 5, 6$ ) моменты, возникающие за счет волнения и качки.

Величины  $N_{j1}$ ,  $N_{j2}$  и  $n_j$  зависят от абсциссы  $x_0$  шпангоута, для которого вычисляется нагрузка (здесь и в дальнейшем этот аргумент для краткости письма опускается), и от частоты колебаний, которая при наличии хода корабля равна кажущейся частоте волны  $\sigma$ , а на стоянке — истинной частоте  $\sigma_0$ . Кроме того, эти величины будут непосредственно зависеть от курса корабля по отношению к волне и скорости.

Поскольку мы ограничиваемся линейной теорией качки, очевидно, что тот или иной вид динамической нагрузки на нерегулярном волнении должен рассматриваться как процесс на выходе линейной динамической системы, для которой входным является случайный процесс морского волнения. Таким образом, в соответствии с общей теорией преобразования стационарных случайных процессов линейными динамическими системами спектральная плотность  $j$ -го вида нагрузки на стоянке  $S_{N_j}(\sigma_0)$  будет представлять собой произведение спектра волнения на квадрат ординаты амплитудно-частотной характеристики для соответствующей частоты:

$$S_{N_j}(\sigma_0) = n_j^2(\sigma_0) S_\delta(\sigma_0).$$

Дисперсия будет определяться обычной формулой

$$D_{N_j} = \int_0^{\infty} S_{N_j}(\sigma_0) d\sigma_0.$$

При наличии хода корабля дисперсия  $j$ -го вида нагрузки может быть вычислена через псевдоспектр  $S_{N_j}^*(\sigma_0)$  согласно выражению

$$D_{N_j} = \int_0^{\infty} S_{N_j}^*(\sigma_0) d\sigma_0,$$

где

$$S_{N_j}^*(\sigma_0) = n_j^2(\sigma_0) S_\delta(\sigma_0).$$

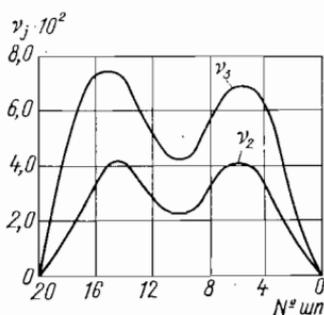
Дисперсию нагрузки на трехмерном нерегулярном волнении вычисляют аналогично вычислению дисперсии качки.

Различие состоит лишь в том, что вместо квадратов ординат амплитудно-частотной характеристики качки двухмерный спектр волнения  $S_\delta(\sigma_0, \delta)$  умножают на квадраты ординат амплитудно-частотной характеристики соответствующего вида динамической нагрузки.

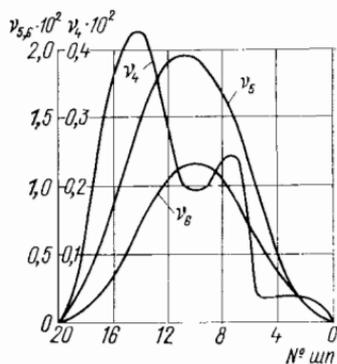
На основании полученных выше формул И. М. Коганом и А. Ю. Ремезом были составлены алгоритмы и программы для ЭВМ и произведен ряд расчетов динамических нагрузок.

Ниже в виде примеров приведены некоторые результаты вычислений для лихтеровоза ( $L = 232$  м;  $B = 32,2$  м;  $T = 11,6$  м масса 58 868 т) и контейнерного судна ( $L = 175$  м;  $B = 25,4$  м;  $T = 9,2$  м; масса 24 742 т).

Для лихтеровоза рассчитывались безразмерные амплитуды  $v_j$  динамических перерезывающих сил ( $j = 2, 3$ ), крутящего ( $j = 4$ ) и изгибающих ( $j = 5, 6$ ) моментов. При этом под безразмерными амплитудами сил и моментов понимались следующие отношения:



6.5. Безразмерные амплитуды динамических перерезывающих сил для лихтеровоза.

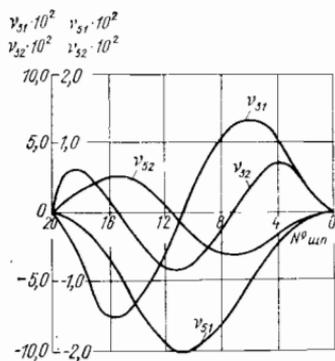


6.6. Безразмерные амплитуды динамических моментов для лихтеровоза.

$$v_j = |v_{j1} + iv_{j2}| = \frac{\sqrt{N_{j1}^2 + N_{j2}^2}}{\rho g r L B}, \quad (j = 2, 3);$$

$$v_j = |v_{j1} + iv_{j2}| = \frac{\sqrt{N_{j1}^2 + N_{j2}^2}}{\rho g r L^2 B}, \quad (j = 4, 5, 6).$$

На рис. 6.5 и 6.6 приведены графики значений  $v_j$  в шпангоутных сечениях при нулевой скорости на волне длиной 171 м, набегающей со стороны носа (угол  $\varepsilon = 150^\circ$ ).

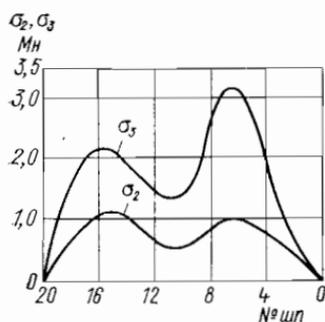


6.7. Действительные и мнимые части безразмерных комплексных амплитуд вертикальных перерезывающей силы и изгибающего момента для лихтеровоза.

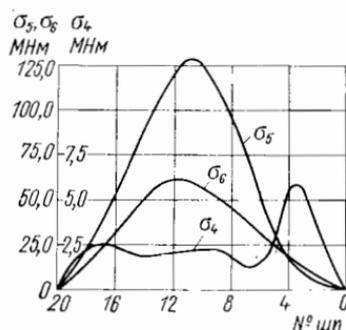
Обратим внимание на то, что кривые амплитуды изгибающих моментов не являются интегральными по отношению к кривым амплитуд перерезывающих сил. Интегральными будут кривые действительных частей  $N_{51}$  и  $N_{61}$  комплексных амплитуд изгибающих моментов по отношению соответственно к действительным частям  $N_{31}$  и  $N_{21}$  комплексных амплитуд перерезывающих сил. Точно такое же соотношение будет и для мнимых частей комплексных амплитуд изгибающих моментов и перерезывающих сил: кривые  $N_{52}$  и  $N_{62}$  будут интегральными по отношению к кривым  $N_{32}$  и  $N_{22}$

соответственно. Для иллюстрации этого положения на рис. 6.7 приведены кривые действительных и мнимых частей безразмерных комплексных амплитуд вертикальных перерезывающей силы и изгибающего момента.

На рис. 6.8 и 6.9 приведены значения  $\sigma_j$  — стандартов<sup>1</sup> динамических перерезывающих сил (в меганьютонах), крутящего и изгибающих моментов (в меганьютон-метрах) для шпангоутов



6.8. Стандарты динамических перерезывающих сил для контейнерного судна.



6.9. Стандарты динамических моментов для контейнерного судна.

контейнеровоза при скорости 22 уз и курсовом угле  $\varepsilon = 150^\circ$  на двухмерном нерегулярном волнении степенью 6 баллов (высота волны 3 %-ной обеспеченности 6 м).

## Глава 7

### ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КАЧКИ

#### § 37. Особенности теории качки конечной амплитуды

Как видно из изложенного выше, основные трудности решения задачи о качке состоят в определении действующих на корабль гидродинамических сил. Если эта задача решается в рамках допущения о малости амплитуд набегающих волн, качки и вынужденных волн, то краевая задача для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости линеаризуется и зависимость гидродина-

<sup>1</sup> Стандартом случайной величины (функции) называется квадратный корень из ее дисперсии.

мических сил от кинематических характеристик движения приобретает линейный характер. Вследствие этого обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие качку, оказываются линейными и их интегрирование не вызывает затруднений.

Значительно сложнее обстоит дело с определением гидродинамических сил при качке конечной амплитуды. Такая постановка задачи требует учета конечности амплитуд набегающих и вынужденных волн, сохранения в интеграле Лагранжа—Коши для гидродинамических давлений квадратов скоростей возмущенного движения жидкости, учета изменения площади смоченной поверхности качающегося корабля в процессе наклонения. В столь общей постановке решения задач нелинейной теории качки до настоящего времени не получены.

Эффективное приближенное решение нелинейных краевых задач для потенциала скоростей возмущенного движения жидкости получено с помощью метода малого параметра. Напомним сущность этого метода. Она состоит в том, что граничные условия, потенциал скоростей вынужденных волн, смещения корабля при качке, площадь смоченной поверхности, гидродинамические силы представляются в виде рядов по степеням одного или нескольких малых параметров. Отбрасывая в полученных рядах члены, содержащие высшие степени этих параметров, можно получить конструктивные решения, причем с тем большей точностью, чем более высокие степени сохраняются в рядах. Однако теоретически сходимость метода малого параметра не доказана, а решение уже во втором приближении обычно имеет весьма громоздкий вид, что затрудняет его практическое использование.

Построение строгой нелинейной теории затрудняется еще и тем, что в ней неприменимо разделение гидродинамических сил на отдельные категории, как это делается в линейной теории качки.

По указанным выше причинам нелинейная теория до настоящего времени развивалась главным образом по пути решения отдельных задач с использованием далеко идущих упрощающих допущений, в частности допущения о возможности упомянутого разделения гидродинамических сил.

Простейшей задачей нелинейной теории качки является задача об определении периода бортовой качки конечной амплитуды на тихой воде без учета демпфирования. Этой задаче посвящены исследования многих авторов, и в настоящее время найдены простые и удобные способы ее решения. Рассматривалась также бортовая качка на тихой воде при нелинейной зависимости демпфирующего момента от угловой скорости. При этом выяснилось, что замена линейного закона демпфирования на квадратичный либо линейно-квадратичный слабо влияет на результаты расчета качки. В то же время отказ от использования линеаризованной метацентрической формулы и переход к определению восстанавливающего момента по диаграмме статической остойчивости существенно изменяет результаты не только с количественной, но и с качественной стороны.

В частности, учет нелинейности восстанавливающего момента показывает, что период качки на тихой воде зависит от амплитуды, тогда как линейная теория такой зависимости не выявляет.

До настоящего времени нелинейная теория строилась главным образом применительно к изолированной бортовой качке, так как исследование бортовой качки конечной амплитуды тесно связано с вопросом об опрокидывании корабля на волнении. Следует, однако, отметить, что решение задачи об опрокидывании нельзя получить на основе рассмотрения стационарных режимов качки не только в рамках линейной, но и нелинейной теории. Эта задача требует глубокого изучения неустановившихся режимов качки при совместном действии ветра и нерегулярного волнения. При таком изучении должны учитываться не только нелинейные эффекты собственно бортовой качки, но и влияние других видов качки, в первую очередь поперечно-горизонтальной.

Для того, чтобы рассматривать продольную качку конечной амплитуды на основе линейной теории волн, требуется наложение определенных ограничений либо на геометрию, либо на кинематику корабля, ибо движение корабля, имеющего произвольное соотношение продольного и поперечных размеров, при конечной скорости будет вызывать волны конечной амплитуды. Поскольку наложение ограничений на кинематику, т. е. предположение о малости скоростей, исключает возможность рассмотрения качки на ходу, ограничения обычно накладываются на геометрию корабля. Наиболее подходящей математической моделью, удовлетворяющей этим ограничениям, является модель, называемая кораблем типа Мичелла. Такая модель имеет малое отношение ширины к длине, вследствие чего ее движение с конечной скоростью не вызывает волн конечной амплитуды и продольная качка конечной амплитуды может изучаться в рамках линейной теории волн.

Заканчивая на этом обсуждение особенностей теории качки конечной амплитуды, рассмотрим некоторые наиболее простые задачи этой теории на примере изолированной бортовой качки.

### § 38. Период бортовой качки конечной амплитуды на тихой воде

Рассмотрим бортовую качку корабля с заданной диаграммой остойчивости без учета демпфирования. Полагая присоединенный момент инерции  $M_{44}$  не зависящим от угла крена, запишем дифференциальное уравнение качки в виде

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + M(\theta) = 0,$$

где  $M(\theta)$  — восстанавливающий момент, определяемый по диаграмме статической остойчивости. Иначе можем написать

$$\ddot{\theta} + F(\theta) = 0, \quad (7.1)$$

где функция  $F(\theta) = M(\theta)/(I_x + M_{44})$  имеет размерность  $c^{-2}$  и определяется кривой восстанавливающего момента, ординаты которой разделены на  $I_x + M_{44}$ .

Проинтегрируем это уравнение в пределах от  $\theta_0$  — амплитудного значения угла крена, отвечающего моменту времени  $t = 0$ , до некоторого произвольного угла  $\theta$ :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta) d\theta. \quad (7.2)$$

Сделаем замену переменной в левой части последнего равенства, перейдя от интегрирования по углу  $\theta$  к интегрированию по угловой скорости  $\dot{\theta}$ . Используя очевидные соотношения

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}; \quad d\theta = \dot{\theta} dt$$

и учитывая, что при  $\theta = \theta_0$  угловая скорость обращается в нуль а при произвольном угле  $\theta$  равна  $\dot{\theta}$ , имеем

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta} d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2.$$

Теперь выразим правую часть равенства (7.2) через ординаты диаграммы динамической остойчивости. Как известно, интеграл от восстанавливающего момента, взятый в пределах от нуля до  $\theta$ , представляет собой потенциальную энергию корабля, наклоненного на угол  $\theta$ , т. е. ординату диаграммы динамической остойчивости при этом угле крена. Итак, получаем

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F(\theta) d\theta = \int_0^{\theta_0} F(\theta) d\theta - \int_0^{\theta} F(\theta) d\theta = \Psi(\theta_0) - \Psi(\theta),$$

где  $\Psi(\theta_0)$  и  $\Psi(\theta)$  представляют собой ординаты диаграммы динамической остойчивости при соответствующих углах крена, разделенные на  $I_x + M_{44}$ .

Подставив полученные результаты в выражение (7.2), будем иметь

$$\dot{\theta}^2 = 2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)],$$

или

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}.$$

В данном случае перед корнем должен быть выбран знак минус, так как  $\theta_0 > \theta$  и полученная формула отвечает процессу выпрямления корабля, при котором угловая скорость отрицательна. Таким образом,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}$$

или

$$dt = - \frac{d\theta}{\sqrt{2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}$$

Учитывая, что продолжительность наклонения от амплитудного значения угла  $\theta = \theta_0$  до прямого положения  $\theta = 0$  составляет четверть периода качки, и обозначая последний через  $T_\theta$ , получим

$$\int_0^{T_\theta/4} dt = - \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{2[\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}$$

или

$$T_\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)}}$$

Из последней формулы видно, что для качки конечной амплитуды свойство изохронности, т. е. независимости периода от амплитуды, имеющее место в случае малых колебаний, теряется.

Интеграл, определяющий  $T_\theta$ , является несобственным, так как при верхнем пределе ( $\theta = \theta_0$ ) подынтегральная функция обращается в бесконечность. Для устранения этой особенности существует много способов, предложенных различными исследователями. Воспользуемся наиболее простым и удобным из них — способом М. Г. Крейна — В. Г. Сизова.

Введем новую переменную  $\varphi$  согласно соотношению

$$\theta = \theta_0 \cos \varphi$$

Тогда, очевидно,

$$d\theta = -\theta_0 \sin \varphi d\varphi.$$

Пределы интегрирования при этой замене приобретут следующие значения:

$$\begin{aligned} \theta = 0, & \quad \cos \varphi = 0, & \quad \varphi = \pi/2; \\ \theta = \theta_0, & \quad \cos \varphi = 1, & \quad \varphi = 0. \end{aligned}$$

В итоге формула для периода будет иметь вид

$$T_\theta = 2\sqrt{2} \theta_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta_0 \cos \varphi)}}$$

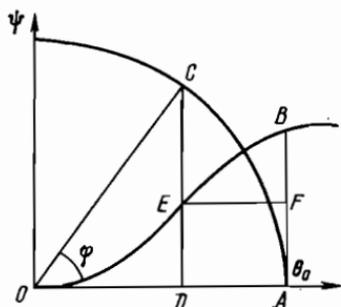
Этот интеграл особенностей не имеет и может быть вычислен по любой квадратурной формуле. Перед этим, однако, следует устранить неопределенность вида  $0/0$ , в которую обращается подынтегральная функция при  $\varphi = 0$ . Обозначив эту функцию через  $f(\varphi)$

и воспользовавшись правилом Лопиталья, можем написать

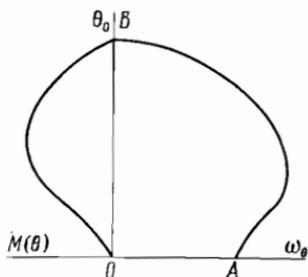
$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} f^2(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \varphi}{\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta_0 \cos \varphi)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{-\frac{d\Psi}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi}}.$$

Поскольку

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = F(\theta) = F(\theta_0 \cos \varphi); \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = -\theta_0 \sin \varphi,$$



7.1. К определению периода бортовой качки корабля с заданной диаграммой остойчивости.



7.2. Кривая зависимости частоты колебаний от амплитуды.

полагая  $\cos \varphi = 1$ , получим

$$f^2(\varphi) \Big|_{\varphi=0} = \frac{2}{\theta_0 F(\theta_0)}, \quad \text{или } f(\varphi) \Big|_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{2}{\theta_0 F(\theta_0)}}.$$

Для определения подкоренного выражения функции  $f(\varphi)$  удобно пользоваться следующим графическим приемом, предложенным В. Г. Сизовым (рис. 7.1).

Строится кривая  $\Psi(\theta)$ , представляющая собой диаграмму динамической остойчивости, ординаты которой разделены на  $I_x + M_{44}$ . Затем из начала координат проводится четверть окружности радиусом  $OA = \theta_0$ . В точке  $A$  восставляется перпендикуляр к оси  $\theta$  до пересечения с кривой в точке  $B$ . Отрезок  $AB$  будет равен  $\Psi(\theta_0)$ . Далее из начала координат проводится под углом  $\varphi$  к оси  $\theta$  радиус  $OC$ . Тогда отрезок  $OD$  будет равен  $\theta_0 \cos \varphi$ , а  $DE$  будет представлять собой  $\Psi(\theta_0 \cos \varphi)$ . Разность  $AB$  и  $DE$ , которая изображается отрезком  $BF$ , и будет равна  $\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta_0 \cos \varphi)$ . Значение  $F(\theta_0)$  определяется исходя из диаграммы статической остойчивости, ординаты которой также должны быть разделены на  $I_x + M_{44}$ .

Задаваясь разными значениями  $\varphi$  в пределах от нуля до  $\theta_0$ , можно найти  $f(\varphi)$ , а затем по любой из квадратурных формул вычислить значение периода  $T_\theta$  для данной амплитуды  $\theta_0$ . Найдя  $T_\theta$  как функцию  $\theta_0$ , можно построить кривую частот свободных ко-

лебаний, т. е. кривую зависимости частоты  $\omega_\theta$  от амплитуды (частота и период связаны обычным соотношением  $\omega_\theta = 2\pi/T_\theta$ ). Такая кривая приведена на рис. 7.2. Отрезок  $OA$  отвечает значению  $\omega_\theta$  при  $\theta = 0$ , т. е. определяет собой частоту свободных бортовых колебаний  $\omega_4$ , соответствующую линейной теории качки. Отрезок  $OB$  отвечает углу заката диаграммы статической остойчивости, которая приведена в левой части рисунка.

Теперь, следуя Г. Е. Павленко, получим приближенную формулу для частоты бортовой качки конечной амплитуды методом коллокации. Будем искать приближенное решение дифференциального уравнения (7.1) в виде

$$\theta = \theta_0 \cos \omega_\theta t. \quad (7.3)$$

Подставив это соотношение в уравнение (7.1), получим

$$-\omega_\theta^2 \theta_0 \cos \omega_\theta t + F_1(\theta_0 \cos \omega_\theta t) = 0. \quad (7.4)$$

Отсюда видно, что соотношение (7.3) не может являться точным решением рассматриваемого уравнения, так как подстановка точного решения в уравнение должна превращать его в тождество при любых значениях независимой переменной, т. е. в любой момент времени. Однако мы можем рассматривать (7.3) как приближенное решение, удовлетворяющее уравнению не в любой момент времени, а лишь при  $t = 2\pi/\omega_\theta$ , т. е. при  $\cos \omega_\theta t = 1$ . Тогда, как следует из выражения (7.4),

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{F(\theta_0)}{\theta_0}}.$$

Нетрудно показать, что при определении восстанавливающего момента по линеаризованной метацентрической формуле остойчивости

$$M(\theta) = mgh\theta$$

частота  $\omega_\theta$  переходит в частоту  $\omega_4$ , соответствующую линейной постановке задачи. Действительно, в этом случае

$$F_1(\theta_0) = \frac{M(\theta_0)}{I_x + M_{44}} = \frac{mgh\theta_0}{I_x + M_{44}}$$

и

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44}}} = \omega_4.$$

### § 39. Нелинейная бортовая качка на регулярном волнении

Рассмотрим изолированную бортовую качку корабля, расположенного лагом к регулярным волнам малой амплитуды. Для простоты отбросим дифракционные силы, которые, как уже упомина-

лось, при бортовой качке играют значительно меньшую роль, чем при других видах качки. Будем учитывать единственный вид нелинейности — нелинейность восстанавливающего момента. Такую задачу принято называть задачей о качке корабля с заданной диаграммой остойчивости.

В рамках сделанных допущений качка будет описываться «укороченным» уравнением, в котором восстанавливающий момент  $M(\theta)$  будет определяться не по линеаризованной метацентрической формуле, а по диаграмме статической остойчивости. В этом случае «укороченное» уравнение (4.183) примет вид

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + M'_i(\theta) = -i\alpha_0 \kappa_4 m g h e^{i\sigma_0 t}. \quad (7.5)$$

Ограничиваясь в целях упрощения задачи рассмотрением качки корабля, поперечные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с длиной набегающих волн, т. е. считая  $\kappa_4 = 1$ , перепишем последнее уравнение в форме

$$\theta + 2\nu\dot{\theta} + F'_i(\theta) = -i\alpha_0 \omega^2 e^{i\sigma_0 t}, \quad (7.6)$$

где значения коэффициента затухания  $\nu = \nu_4$  и частоты свободных колебаний малой амплитуды  $\omega = \omega_4$  определяются равенствами (4.185).

Если диаграмма статической остойчивости не имеет точек перегиба, т. е. целиком располагается ниже касательной, проведенной в начале координат, то значения восстанавливающего момента при любых углах крена будут меньше, чем определяемые линеаризованной метацентрической формулой. Если диаграмма имеет S-образную форму, т. е. на некотором участке проходит выше начальной касательной, то на этом участке восстанавливающий момент будет превышать определяемый метацентрической формулой. В первом случае нелинейность принято называть *мягкой*, во втором — *жесткой*.

Происхождение этих терминов нелинейной механики связано с рассмотрением деформации пружины. При заданной силе у мягкой пружины деформация будет больше, а у жесткой — меньше, чем у «нормальной» пружины, деформация которой связана с действующей силой линейной зависимостью.

Если провести аналогию между наклоном корабля и деформацией пружины, то аналогом силы будет момент  $M(\theta)$ , а аналогом деформации — угол крена  $\theta$ .

Как видно из рис. 7.3, между углами  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$ , первый из которых соответствует диаграмме остойчивости без точек перегиба, второй — линеаризованной метацентрической формуле и третий S-образной диаграмме, существует соотношение

$$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3.$$

Таким образом, диаграмма без точек перегиба аналогична нелинейной характеристике мягкой, а S-образная диаграмма —

жесткой пружины. Этой аналогией и объясняется использование названных терминов в теории качки.<sup>1</sup>

Вернемся теперь к дифференциальному уравнению (7.6). Общий интеграл уравнений такого типа неизвестен, и для их решения в нелинейной механике применяют различные приближенные способы.

Как показывают многочисленные эксперименты, даже при резко выраженной нелинейности восстанавливающего момента бортовая качка на регулярном волнении практически несет характер гармонических колебаний, частота которых равна частоте возмущающей силы. Этот экспериментальный результат совпадает с теоретическим положением нелинейной механики, утверждающим, что колебания нелинейных систем с малым затуханием носят именно такой характер. Перепишем уравнение (7.6)

в виде

$$\ddot{\theta} + 2\nu\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = -iAe^{i\sigma_0 t}. \quad (7.7)$$

Коэффициент  $\omega_0^2 = F(\theta)/\theta$  здесь представляет собой квадрат частоты свободных колебаний, а через  $A$  обозначено отношение амплитуды возмущающей силы к инерционному коэффициенту  $I_x + M_{44}$ :

$$A = \frac{\alpha_0 mgh}{I_x + M_{44}} = \alpha_0 \omega_4^2.$$

Опуская из рассмотрения неустановившиеся режимы качки, будем искать приближенное решение уравнения (7.7) для установившихся колебаний в виде

$$\theta = \theta_a e^{i\sigma_0 t},$$

где  $\theta_a = \theta_1 + i\theta_2$  — комплексная амплитуда.

Подставив это решение в уравнение, будем иметь

$$(\omega_0^2 - \sigma_0^2 + 2i\nu\sigma_0)(\theta_1 + i\theta_2) = -iA.$$

Отделив в последнем равенстве действительную и мнимую части, получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

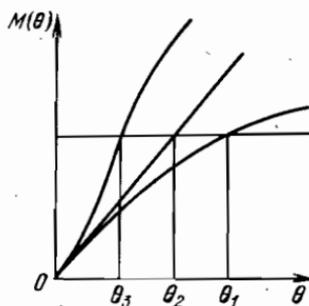
$$(\omega_0^2 - \sigma_0^2)^2 \theta_1 - 2\nu\sigma_0 \theta_2 = 0;$$

$$2\nu\sigma_0 \theta_1 + (\omega_0^2 - \sigma_0^2)^2 \theta_2 = -A.$$

Отсюда находим

$$\theta_1 = -\frac{2\nu\sigma_0 A}{(\omega_0^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu\sigma_0)^2}; \quad \theta_2 = -\frac{(\omega_0^2 - \sigma_0^2) A}{(\omega_0^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu\sigma_0)^2}.$$

<sup>1</sup> S-образную диаграмму правильнее было бы называть жестко-мягкой нелинейной характеристикой, так как после достижения некоторого угла крена она опускается ниже начальной касательной,



7.3. Различные виды нелинейности.

Амплитуда качки  $\theta_0$  будет, очевидно, определяться соотношением

$$\theta_0 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_\theta^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu\sigma_0)^2}} \quad (7.8)$$

Это соотношение, несмотря на внешнее сходство, по существу отличается от равенства (4.186), соответствующего линейной теории качки. Их различие заключается в том, что в равенстве (4.186) частота свободных колебаний  $\omega_4$  от амплитуды качки не зависит, а в соотношении (7.8) частота  $\omega_\theta$  является функцией амплитуды. Последнее обстоятельство затрудняет непосредственное использование (7.8) для построения амплитудно-частотной характеристики, и ее рассчитывают несколько иначе.

С помощью элементарных преобразований соотношение (7.8) можно представить в виде биквадратного уравнения относительно  $\sigma_0$

$$\sigma_0^4 - 2(\omega_\theta^2 - 2\nu^2)\sigma_0^2 + \omega_\theta^4 - \frac{A^2}{\theta_0^2} = 0.$$

Положительные корни этого уравнения

$$\sigma_0 = \sqrt{\omega_\theta^2 - 2\nu^2 \pm \sqrt{-4\nu^2(\omega_\theta^2 - \nu^2) + \frac{A^2}{\theta_0^2}}} \quad (7.9)$$

определяют собой два значения частоты возмущающей силы, отвечающие данной амплитуде качки. Таким образом, для расчета амплитудно-частотной характеристики следует, задавшись рядом значений амплитуды  $\theta_0$ , по кривой частот свободных колебаний найти соответствующие значения  $\omega_\theta$  и затем по формуле (7.9) вычислить частоты возмущающей силы  $\sigma_0$ .

Если в формуле (7.9) пренебречь малой величиной  $4\nu^4$ , то при

$$\theta_0 = \frac{A}{2\nu\omega_\theta} \quad (7.10)$$

выражение под внутренним радикалом обратится в нуль. Таким образом, данному значению амплитуды будет соответствовать не два, а одно значение  $\sigma_0$ . Иными словами, значение амплитуды, определяемое выражением (7.10), при данных  $A$  и  $\nu$  будет максимальным. Как видно из (7.9), это значение достигается при

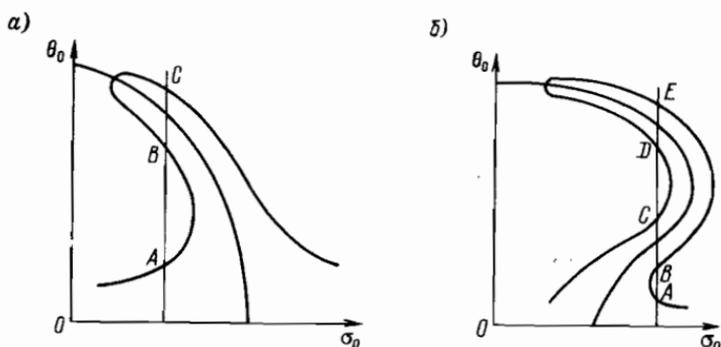
$$\sigma_0 = \sqrt{\omega_\theta^2 - 2\nu^2}. \quad (7.11)$$

Поскольку  $\nu^2 \ll \omega_\theta^2$ , можно заменить (7.11) приближенным равенством  $\sigma_0 \approx \omega_\theta$ , т. е. считать, что максимум амплитудно-частотной характеристики располагается на кривой частот свободных колебаний.

Типичные амплитудно-частотные характеристики качки изображены на рис. 7.4, а (мягкая нелинейность) и 7.4, б (жесткая нелинейность).

Из этих рисунков видно, что при определенных частотах возмущающей силы возможно существование нескольких режимов качки с различными амплитудами. Число таких режимов всегда нечетное. Оно может доходить до трех при мягкой нелинейности (точки А, В, С на рис. 7.4, а) и до пяти при жесткой (точки А, В, С, D, E на рис. 7.4, б).

Важная особенность нелинейной качки состоит в том, что некоторые ее режимы устойчивы и существуют в условиях эксперимента, а некоторые — неустойчивы. Последние в условиях эксперимента получены быть не могут.



7.4. Амплитудно-частотные характеристики при мягкой и жесткой нелинейностях.

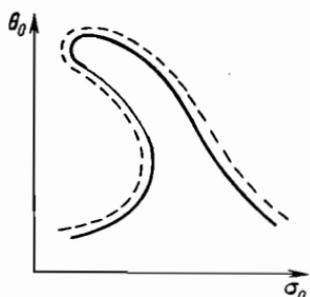
Для исследования устойчивости рассмотрим характер изменения амплитудно-частотной характеристики при небольшом увеличении амплитуды возмущающей силы. В этом случае увеличится величина А, а с ней и выражение под внутренним радикалом в формуле (7.9). Таким образом, горизонтальные расстояния между ветвями амплитудно-частотной характеристики также увеличатся и последняя примет вид, изображенный на рис. 7.5 пунктиром.

Из энергетических соображений ясно, что устойчивыми будут колебания, амплитуды которых при увеличении амплитуды возмущающей силы возрастают. Колебания, у которых при увеличении амплитуды возмущающей силы амплитуда должна уменьшаться, существовать не могут, т. е. являются неустойчивыми.

Руководствуясь этим критерием, нетрудно убедиться, что на рис. 7.5 участки амплитудно-частотной характеристики, выделенные жирными линиями, соответствуют устойчивым режимам качки, а тонкой — неустойчивой. На границах устойчивых и неустойчивых режимов амплитудно-частотная характеристика имеет вертикальные касательные, иными словами, этим границам соответствует условие  $d\theta_0/d\sigma_0 = \infty$ .

Для того чтобы выяснить, какая именно из установившихся амплитуд будет иметь место при данном значении частоты возмущающей силы  $\sigma_0$ , необходимо располагать сведениями об истории колебательного процесса.

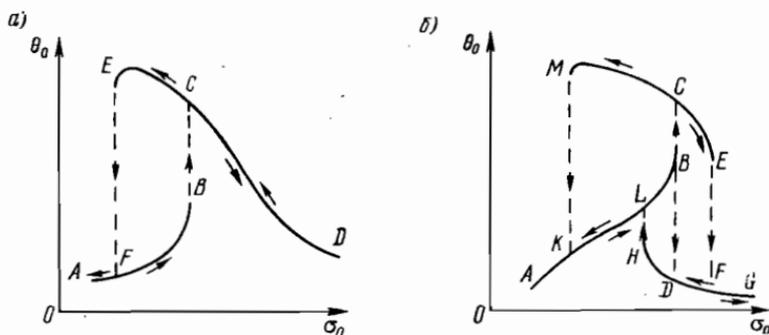
Если при мягкой нелинейности (рис. 7.6, а) частота  $\sigma_0$  будет увеличиваться, начиная с малых значений, то амплитуда будет плавно возрастать по кривой  $AFB$ , в точке  $B$  скачком увеличится до точки  $C$  и затем будет плавно уменьшаться по кривой  $CD$ . При уменьшении частоты амплитуда будет расти по кривой  $DCE$ , в точке  $E$  скачкообразно упадет до точки  $F$  и затем будет плавно уменьшаться по кривой  $FA$ .



7.5. К определению устойчивости нелинейных колебаний.

В случае жесткой нелинейности (рис. 7.6, б) при увеличении частоты амплитуда качки будет сначала плавно увеличиваться по кривой  $AKLB$ , а при достижении точки  $B$  изменится скачком. Поскольку при частоте, отвечающей точке  $B$ , существуют два установившихся режима, один из которых характеризуется точкой  $C$ , а другой — точкой  $D$ , то в зависимости от случайных возмущений в момент скачка может установиться любой из этих режимов.

Если установился режим  $D$ , то дальнейшее изменение амплитуды будет происходить по кривой  $DFG$ , а если режим  $C$ , то после плавного



7.6. Устойчивые режимы колебаний при мягкой и жесткой нелинейностях.

уменьшения по кривой  $CE$  произойдет скачок амплитуды до точки  $F$ , за которым вновь последует плавное уменьшение — теперь уже по кривой  $FG$ .

Рассмотрим теперь характер изменения амплитуды при уменьшении частоты. Если режим качки характеризуется какой-либо точкой кривой  $GFDH$ , то в точке  $H$  амплитуда скачкообразно увеличится до точки  $L$ , а затем будет плавно убывать по кривой  $LKA$ .

После скачка из точки  $B$  в точку  $C$  может установиться режим, характеризующийся некоторой точкой кривой  $ECM$ . В этом случае при уменьшении частоты амплитуда вначале будет увеличиваться до точки  $M$ , затем скачком уменьшится до точки  $K$  и в дальнейшем будет изменяться по кривой  $KA$ .

Все изложенные результаты теоретического исследования установившихся режимов качки подтверждены экспериментально. Неустановившиеся режимы до настоящего времени почти не изучены, и эта задача еще ожидает своего решения.

## § 40. Нелинейная бортовая качка на нерегулярном волнении.

### Метод статистической линеаризации

В случаях, когда амплитуда качки достигает больших значений или диаграмма остойчивости имеет существенную нелинейность при малых углах наклона, непосредственное применение хорошо разработанных методов линейной теории стационарных случайных процессов к расчету качки на нерегулярном волнении может привести к значительным погрешностям. В связи с этим в теорию нерегулярной качки, в первую очередь бортовой, в последние годы стали интенсивно внедряться новейшие методы статистической динамики нелинейных систем. Наиболее простым из них оказался метод статистической линеаризации, основанный на замене нелинейных преобразований случайных функций линейными преобразованиями, эквивалентными в статистическом смысле нелинейным. Линеаризованная система допускает применение аппарата линейной теории случайных функций, что значительно упрощает задачу.

Понятие статистической эквивалентности нелинейных и линейных преобразований не является однозначно и строго определенным, в связи с чем можно выбирать различные критерии этой эквивалентности. В настоящее время наиболее употребительными являются два таких критерия. Первый из них состоит в равенстве математических ожиданий и дисперсий нелинейной и аппроксимирующей ее линейной функции. Второй требует, чтобы среднее значение квадрата ошибки, вызванной аппроксимацией, т. е. дисперсия разности нелинейной и линейной функции была минимальной.

Рассмотрим применение этих методов к расчету изолированной бортовой качки на нерегулярном волнении, принимая во внимание только нелинейность восстанавливающего момента. В этом случае мы можем рассматривать корабль как динамическую систему, в которой имеется нелинейный элемент, осуществляющий преобразование угла наклона  $\theta$  в восстанавливающий момент  $M(\theta)$ , определяемый диаграммой статической остойчивости. При этом как  $\theta$ , так и  $M(\theta)$  являются случайными функциями времени (случайными процессами).

Вместо  $M(\theta)$  нам удобнее рассматривать случайную функцию  $F(\theta)$ , определяемую равенством

$$F(\theta) = \frac{M(\theta)}{I_x + M_{44}}.$$

Представим эту функцию в виде полинома по нечетным степеням угла наклона

$$F(\theta) = a_1\theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5, \quad (7.12)$$

а аппроксимирующую ее линейную функцию в виде простейшей зависимости

$$F_l(\theta) = \omega_l^2\theta.$$

Нам необходимо определить значения  $\omega_l^2$  так, чтобы функция  $F_l(\theta)$  была по тому или иному критерию эквивалентна функции  $F(\theta)$ .

Полагая, что угол наклона  $\theta$  распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, т. е. имеет плотность вероятности

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}}, \quad (7.13)$$

где, очевидно, через  $D_\theta$  обозначена дисперсия угла  $\theta$ , вычислим дисперсию случайной функции  $F(\theta)$ :

$$D[F(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta) f(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1\theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5)^2 e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta.$$

Ограничиваясь шестой степенью  $\theta$ , можем написать

$$D[F(\theta)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} [a_1^2\theta^2 + 2a_1a_3\theta^4 + (a_3^2 + 2a_1a_5)\theta^6] e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta. \quad (7.14)$$

Возьмем по частям интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 e^{-c\theta^2} d\theta,$$

полагая

$$e^{-c\theta^2} = u; \quad \theta^2 d\theta = dv.$$

Тогда

$$-2c\theta e^{-c\theta^2} d\theta = du; \quad \frac{\theta^3}{3} = v$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 e^{-c\theta^2} d\theta = \frac{1}{3} \theta^3 e^{-c\theta^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2c}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^4 e^{-c\theta^2} d\theta.$$

Но

$$\theta^n e^{-c\theta^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad \text{при любом } n.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^4 e^{-c\theta^2} d\theta = \frac{3}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 e^{-c\theta^2} d\theta. \quad (7.15)$$

Аналогичным путем получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^6 e^{-c\theta^2} d\theta = \frac{15}{(2c)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 e^{-c\theta^2} d\theta. \quad (7.16)$$

Подставляя полученные выражения в (7.14) и учитывая, что  $c = 1/2D_\theta$ , а

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 f(\theta) d\theta = D_\theta, \quad (7.17)$$

будем иметь

$$D[F(\theta)] = a_1^2 D_\theta + 6a_1 a_3 D_\theta^2 + 15(a_3^2 + 2a_1 a_5) D_\theta^3.$$

Дисперсия аппроксимирующей линейной функции  $F_l = \omega_l^2 \theta$  будет определяться формулой

$$D[F_l(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} F_l^2(\theta) f(\theta) d\theta = \omega_l^4 \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 f(\theta) d\theta = \omega_l^4 D_\theta.$$

Приравняв дисперсии  $D[F(\theta)]$  и  $D[F_l(\theta)]$ , как этого требует первый критерий статистической линеаризации, найдем

$$\omega_l^2 = \sqrt{a_1^2 + 6a_1 a_3 D_\theta + 15(a_3^2 + 2a_1 a_5) D_\theta^2}. \quad (7.18)$$

Перейдем теперь ко второму критерию, который, напомним, требует, чтобы дисперсия разности нелинейной функции  $F(\theta)$  и линейной  $F_l(\theta)$  была минимальной. Это условие записывается в виде

$$M\{[F(\theta) - F_l(\theta)]^2\} = M\{[F(\theta) - \omega_l^2 \theta]^2\} = \min.$$

Для того чтобы оно выполнялось, требуется найти значение  $\omega_l^2$ , удовлетворяющее равенству

$$\frac{\partial}{\partial (\omega_l^2)} M\{[F(\theta) - \omega_l^2 \theta]^2\} = 0.$$

Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial (\omega_l^2)} \{M[F^2(\theta)] - 2M[F(\theta)\omega_l^2 \theta] + M[\omega_l^4 \theta^2]\} = 0.$$

В этом выражении можно поменять местами операции дифференцирования и определения математического ожидания, так как производная от математического ожидания случайной функции равна математическому ожиданию производной этой функции. Таким образом, получаем

$$-2M[F(\theta)\dot{\theta}] + 2\omega_l^2 M[\theta^2] = 0.$$

Отсюда, имея в виду, что  $M[\theta^2] = D_\theta$ , находим

$$\omega_l^2 = \frac{1}{D_\theta} M[F(\theta)\dot{\theta}].$$

Здесь  $M[F(\theta)\dot{\theta}]$  представляет собой взаимную корреляционную функцию случайных процессов  $F(\theta)$  и  $\dot{\theta}$  в один и тот же момент времени. В этом случае можно, задавшись плотностью вероятности угла  $\theta$ , найти  $M[F(\theta)\dot{\theta}]$  по общему правилу вычисления математического ожидания. Тогда будем иметь

$$\omega_l^2 = \frac{1}{D_\theta} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)\dot{\theta}f(\theta) d\theta. \quad (7.19)$$

Будем, по-прежнему полагать, что функция  $F(\theta)$  может быть представлена полиномом (7.12), а угол наклона распределяется по нормальному закону (7.13). Подставляя эти выражения в (7.19), получим

$$\omega_l^2 = \frac{1}{D_\theta \sqrt{2\pi D_\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1\theta^2 + a_3\theta^4 + a_5\theta^6) e^{-\frac{\theta^2}{2D_\theta}} d\theta$$

или с учетом соотношений (7.15) — (7.17)

$$\omega_l^2 = a_1 + 3a_3 D_\theta + 15a_5 D_\theta^2. \quad (7.20)$$

Эта формула определяет значение  $\omega_l^2$ , удовлетворяющее второму критерию статистической линеаризации. Методов оценки погрешности, получаемой при использовании того или иного критерия, не существует, и поэтому выбор последнего, по существу, произволен. Часто рекомендуется принимать в расчет полусумму результатов, полученных по обоим критериям.

«Укороченное» нелинейное уравнение изолированной бортовой качки корабля, располагающегося лагом к волне, имеет вид (7.5). Подставив в это уравнение линеаризованное выражение для восстанавливающего момента

$$M(\theta) = (I_x + M_{44})F(\theta) = (I_x + M_{44})\omega_l^2\theta$$

и разделив все члены на инерционный коэффициент  $I_x + M_{44}$ , будем иметь

$$\ddot{\theta} + 2\nu_4\dot{\theta} + \omega_l^2\theta = -i\alpha_0\kappa_4\omega_4^2 e^{i\nu_4 t}, \quad (7.21)$$

где  $\omega_l$  — частота свободных колебаний конечной амплитуды, определяемая по методу статистической линеаризации, а  $\omega_4$  — частота свободных колебаний малой амплитуды.

Линеаризованное уравнение (7.21) отличается от линейного уравнения (4.184), на основании которого обычно производятся экспресс-расчеты амплитудно-частотной характеристики изолированной бортовой качки, лишь тем, что в левой части (7.21) вместо  $\omega_4^2$  стоит  $\omega_l^2$ . Вследствие этого формула (5.46) для спектральной плотности углов бортовой качки приобретает вид<sup>1</sup>

$$S_{\theta}(\sigma_0) = \frac{\kappa_4^2 \omega_4^4}{(\omega_l^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2} S_{\alpha}(\sigma_0),$$

а их дисперсия будет определяться выражением

$$D_{\theta} = \int_0^{\infty} \frac{\kappa_4^2 \omega_4^4}{(\omega_l^2 - \sigma_0^2)^2 + (2\nu_4 \sigma_0)^2} S_{\alpha}(\sigma_0) d\sigma_0. \quad (7.22)$$

Из этого выражения видно, что при использовании метода статистической линеаризации для определения дисперсии необходимо знать частоту  $\omega_l$ , которая, в свою очередь, зависит от дисперсии. Таким образом, задача сводится к решению системы, состоящей из уравнений (7.18) и (7.22) или (7.20) и (7.22). Вследствие сложности указанной системы и необходимости ее многократного решения при различных значениях  $\sigma_0$  такие расчеты можно выполнять только с помощью быстродействующей вычислительной техники.

При известных значениях дисперсии углов качки амплитуду заданной обеспеченности определяют по формуле (5.3).

## Глава 8

### СТАБИЛИЗАЦИЯ КОРАБЛЯ

#### § 41. Выбор курса и скорости на волнении.

##### Универсальная штормовая диаграмма

Меры к стабилизации корабля, в первую очередь к улучшению характеристик его бортовой качки, принимают уже в процессе проектирования. Этому вопросу уделяют большое внимание при разработке планов загрузки корабля (карго-планов), которые должны составлять так, чтобы остойчивость была достаточной, но не чрезмерной, ибо с ростом остойчивости амплитуда колебаний растет, а период уменьшается.

<sup>1</sup> Поскольку в настоящей главе дисперсия углов бортовой качки обозначается через  $D_{\theta}$ , для спектральной плотности используется обозначение  $S_{\theta}$ .

По отношению к бортовой качке корабль представляет собой систему с весьма резко выраженными резонансными свойствами. Если в спектре возмущающих сил присутствует частота, достаточно близкая к частоте свободных колебаний такой системы, то воздействие этой спектральной составляющей будет резко превалировать над воздействием всех остальных и система будет вести себя примерно так, как будто на нее действует только гармоническая возмущающая сила резонансной частоты. Этим объясняется хорошо известный из практики мореплавания имеющий место при любом курсе и скорости факт равенства среднего периода бортовой качки на нерегулярном волнении, в спектре которого присутствуют все частоты, в том числе и резонансная, и периода свободных колебаний корабля. Поэтому для обеспечения хорошей мореходности остойчивость должна ограничиваться не только снизу, но и сверху.

В отличие от периода амплитуда качки на нерегулярном волнении существенно зависит от курса и скорости корабля. Если частоты свободной бортовой или килевой качки  $\omega_4$  или  $\omega_5$  заметно отличаются от кажущейся частоты максимума спектра волнения  $\sigma_m$ , то энергия резонансных гармоник возмущающей силы будет небольшой и амплитуды качки умеренными. Если же  $\omega_4$  или  $\omega_5$  близки к  $\sigma_m$ , то энергия резонансных гармоник и амплитуды соответствующих видов качки резко возрастут.

Это подтверждается численным экспериментом, который показывает, что на нерегулярном волнении амплитуды бортовой или килевой качки существенно увеличиваются при равенстве  $\omega_4$  или  $\omega_5$  и кажущейся частоты гармоник, соответствующей максимуму спектра уклонов взволнованной поверхности. Будем называть такое явление резонансом нерегулярной качки по аналогии с качкой на регулярном волнении, где под резонансом понимается резкое увеличение амплитуд при равенстве частот (периодов) собственных колебаний и возмущающей силы.

Период возмущающей силы (кажущийся период волны) зависит от скорости и курса корабля по отношению к волне. Следовательно, за счет целенаправленного выбора курса и скорости можно уклониться от резонанса и избежать опасного усиления качки.

Для решения задачи о выборе курсов и скоростей, обеспечивающих умеренную качку, рядом специалистов предлагались диаграммы, называемые диаграммами качки или штормовыми диаграммами. Рассмотрим одну из них — универсальную штормовую диаграмму, пригодную для любого корабля при любой глубине моря.

Выражение для кажущегося периода волны можно записать в виде

$$\tau = \frac{1,95\lambda}{c + v \cos q}, \quad (8.1)$$

где  $\lambda$  — длина волны, м;  $c$  — фазовая скорость волн, уз;  $v$  —

скорость корабля, уз;  $q$  — курсовой угол волны, под которым, как это принято в морской практике, понимается угол между направлением движения корабля и вектором  $-c$ , противоположным вектору фазовой скорости волн. Таким образом, угол  $q$  равен нулю при чисто встречном волнении,  $90^\circ$  при расположении корабля лагом к волне и  $180^\circ$  при чисто попутном волнении.

Формула для фазовой скорости волн при глубине воды  $H$  имеет вид

$$c = 1,95 \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}, \quad (8.2)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Как следует из выражения (8.1),

$$v \cos q = -c + \frac{1,95\lambda}{\tau}. \quad (8.3)$$

Вводя обозначения

$$x = v \cos q; \quad x_1 = -c; \quad x_2 = 1,95 \frac{\lambda}{\tau},$$

перепишем равенство (8.3) в виде

$$x = x_1 + x_2. \quad (8.4)$$

Диаграмма (рис. 8.1) дает возможность легко найти решение уравнения (8.4) графическим путем при любых значениях  $\lambda$ ,  $H$  и  $\tau$ .

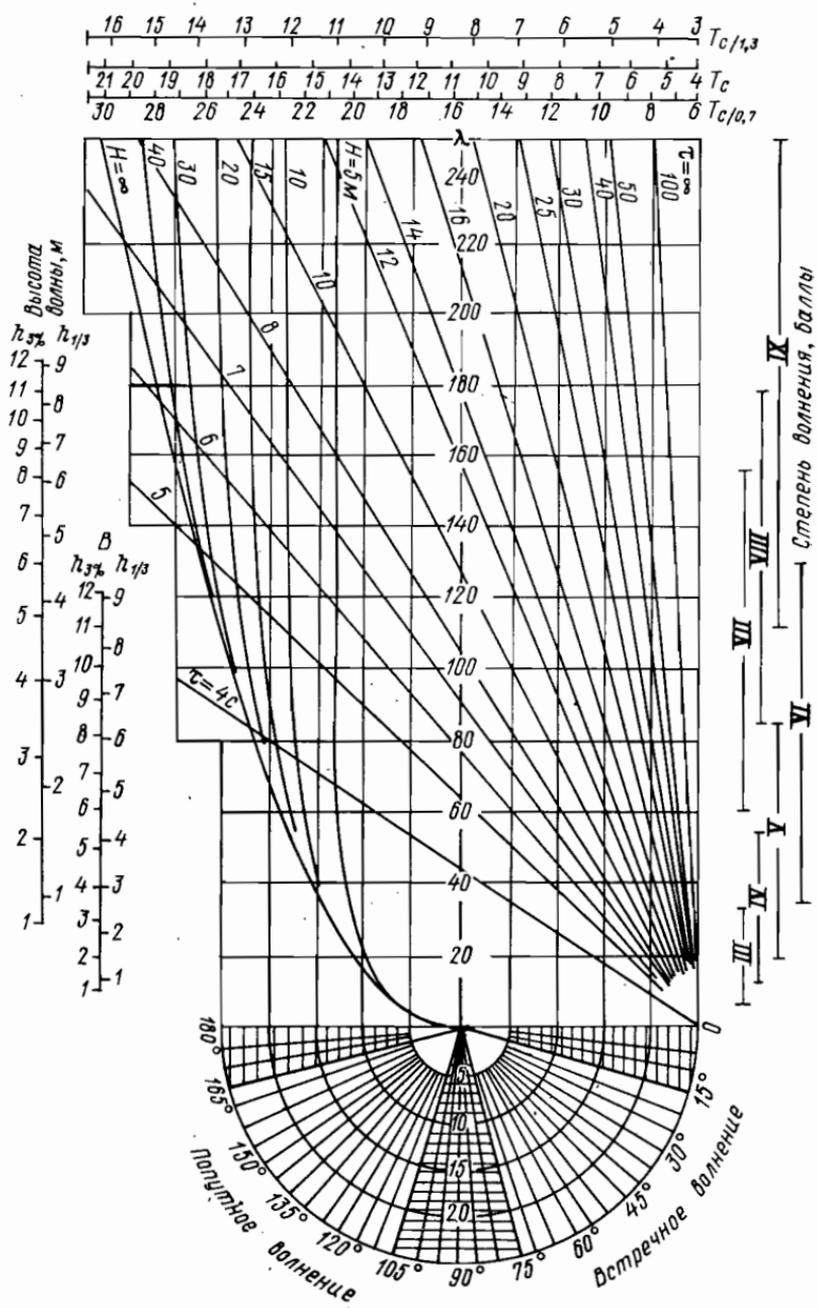
По вертикальной оси диаграммы отложена длина волны  $\lambda$ , а по горизонтальной — значения  $v \cos q = x$ . Диаграмма содержит семейство кривых  $x_1$  при параметре  $H$  и пучок прямых  $x_2$  при параметре  $\tau$ . Для удобства практического использования диаграммы значения  $x_2$  отложены влево от ее правого края. Таким образом, прямые  $x_2$  наклонены к отрицательному направлению оси абсцисс на угол, тангенс которого равен  $\tau/1,95$ .

Снизу к диаграмме примыкает график для определения возможных сочетаний  $v$  и  $q$ , отвечающих данному значению  $v \cos q$ , или для определения  $v \cos q$  по известным  $v$  и  $q$ . Этот график состоит из семейства концентрических полуокружностей и пучка радиальных прямых. Каждая полуокружность соответствует определенному значению скорости судна  $v$ , каждая прямая — определенному курсовому углу  $q$ .

Зоны курсовых углов, близких к нулю или  $180^\circ$ , когда амплитуды бортовой качки оказываются незначительными даже в условиях резонанса, отмечены на графике вертикальной штриховкой. Зона углов, близких к  $90^\circ$ , когда корабль располагается почти лагом к волне и резонанс бортовой качки становится особенно опасным, отмечена горизонтальной штриховкой.

Принято считать, что амплитуды качки существенно возрастают при

$$0,7 \leq \frac{T_c}{\tau} \leq 1,3, \quad (8.5)$$



8.1. Универсальная штормовая диаграмма для произвольных глубин.

где через  $T_c$  обозначен период свободных колебаний корабля. Таким образом, для бортовой качки под  $T_c$  понимается  $T_4$ , а для килевой  $T_5$ .

Зона, в которой выполняется неравенство (8.5), называется резонансной, и ее границам отвечают значения кажущегося периода волны  $\tau$ , равные  $T_c/1,3$  и  $T_c/0,7$ .

Для определения указанных значений  $\tau$  над диаграммой помещена вспомогательная шкала, на средней линии которой отложены величины периода свободных колебаний судна  $T_c$ , а над и под ними нанесены соответственно значения  $T_c/1,3$  и  $T_c/0,7$ .

Слева от диаграммы расположены шкалы А и В высот нерегулярных волн. На каждой из этих шкал нанесена высота 3 %-ной обеспеченности  $h_{3\%}$  и «значительная» высота  $h_{1/3}$ , которая принята в ряде зарубежных стран в качестве характеристики степени волнения. Под «значительной» высотой понимается средняя из 1/3 наиболее крупных волн, связанная с дисперсией волновых ординат соотношением

$$h_{1/3} = 4,0 \sqrt{D_i}.$$

По имеющимся данным,  $h_{1/3}$  примерно равна высоте, фиксируемой при визуальных наблюдениях.

Поскольку при распределении амплитуд волн по закону Релея высота 3 %-ной обеспеченности определяется выражением

$$h_{3\%} = 5,28 \sqrt{D_i},$$

соответствие между шкалами  $h_{3\%}$  и  $h_{1/3}$  устанавливается равенством

$$h_{3\%} = 1,32 h_{1/3}.$$

Для приведения в соответствие шкал высот и длин волн использованы следующие соображения.

На основании формул (5.29) и (5.28) можно написать следующее выражение для среднего периода волнения:

$$\tau_{cp} = 2\pi B^{-\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}}.$$

Далее, представив в соответствии с (5.47) и (5.26) спектр уклонов взволнованной поверхности в виде

$$S_\alpha(\sigma_0) = A g^{-2} \sigma_0^{-k+4} e^{-B\sigma_0^{-n}};$$

нетрудно убедиться, что максимуму этого спектра отвечает период

$$\tau_m = 2\pi B^{-\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{n}{k-4}}.$$

Таким образом, между периодами  $\tau_m$  и  $\tau_{cp}$  существует соотношение

$$\tau_m = \tau_{cp} \sqrt[n]{\frac{k-4}{n}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}}$$

Если, следуя А. И. Вознесенскому и Ю. А. Нецветаеву, принять  $k = 6$ ,  $n = 4$ , то отношение  $\tau_m/\tau_{cp}$  окажется равным 0,98. Приняв  $k = 5$ ,  $n = 4$  (см. Второй международный конгресс по конструкции и прочности судов: Пирсон и Москович и другие авторы), получим  $\tau_m/\tau_{cp} = 0,94$ . Следуя Ю. М. Крылову ( $k = 7$ ,  $n = 4$ ), будем иметь  $\tau_m/\tau_{cp} = 0,99$ . Таким образом, отношение периода, отвечающего максимуму кривой спектральной плотности уклонов взволнованной поверхности, к среднему истинному периоду волнения настолько близко к единице, что с практической точки зрения эти периоды можно считать равными. Что касается отношения соответствующих кажущихся периодов, то оно может отличаться от единицы и на большую и на меньшую величину. Однако с точностью, удовлетворяющей практике мореплавания, их также можно считать равными. Это дает возможность, входя в диаграмму по среднему кажущемуся периоду, т. е. используя шкалу длин волн, с успехом определять сочетания курсов и скоростей, отвечающие резонансным режимам бортовой или килевой качки на реальном морском волнении, которое всегда носит нерегулярный характер.

Для определения зависимости наибольших  $\tau_{cp1}$  и наименьших  $\tau_{cp2}$  значений среднего периода волнения от высоты волн 3 %-ной обеспеченности используем данные Н. Н. Рахманина, полученные с помощью обработки результатов измерений, проведенных на различных морях и океанах. Наибольшее  $\tau_{m1}$  и наименьшее  $\tau_{m2}$  значения периода, отвечающего максимуму спектра уклонов взволнованной поверхности, исходя из приведенных выше соображений, считаем равными соответственно  $\tau_{cp1}$  и  $\tau_{cp2}$ .

При неограниченной глубине моря длина волны  $\lambda$  и ее истинный период  $\tau_0$  связаны зависимостью

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} \tau_0^2 = 1,56\tau_0^2. \quad (8.6)$$

Таким образом, длины волн, имеющих периоды  $\tau_{m1}$  и  $\tau_{m2}$ , будут

$$\lambda_1 = 1,56\tau_{m1}^2; \quad \lambda_2 = 1,56\tau_{m2}^2.$$

Поскольку на диаграмме имеются не две, а одна шкала длин волн, ей приведены в соответствие две шкалы высот.

В условиях нерегулярного волнения формула, связывающая среднюю длину и средний период волны, имеет вид, аналогичный (8.6). Однако коэффициент в ней может в зависимости от степени развитости волнения несколько отличаться от 1,56. Для того чтобы это обстоятельство не вносило заметных искажений в выходную

информацию диаграммы, в резонансную зону, определяемую равенством (8.5), включен достаточно большой диапазон значений периодов.

Справа от диаграммы помещена шкала степени волнения, построенная на основе шкал высоты волн 3 %-ной обеспеченности согласно соотношениям, установленным шкалой Главного управления гидрометслужбы 1953 г.

Шкалы высот волн и степени волнения целесообразно использовать для планирования перехода через штормовую зону с учетом волновых прогнозов. В условиях уже разыгравшегося шторма следует пользоваться шкалой длин волн, тем более что длина легко определяется с помощью самой диаграммы.

Для этой цели необходимо знать глубину моря, скорость корабля, курсовой угол и кажущийся период волны. Значение последнего может быть определено как время прохождения одной волны через какой-либо створ на движущемся корабле, ориентированный параллельно фронту волн. Практически для нахождения кажущегося периода следует определить время прохождения через указанный створ серии из 10—20 волн и вычислить фактическое значение  $\tau$  как среднее арифметическое. Обозначим найденное таким образом значение  $\tau$  через  $\tau_{\phi}$ .

Далее на нижнем графике находится точка, отвечающая данным значениям скорости корабля и курсового угла волны. Затем эта точка переносится по вертикали на ось абсцисс диаграммы и через полученную точку оси абсцисс проводится прямая, параллельная линии  $\tau = \tau_{\phi}$ . Ордината точки пересечения этой прямой с кривой  $x_1$ , отвечающей данному значению глубины моря  $H$ , и определит собой искомую длину волны  $\lambda$ . Так, например, если  $H = 20$  м,  $v = 10$  уз,  $q = 60^\circ$ ,  $\tau_{\phi} = 8$  с, произведя указанное построение, найдем, что  $\lambda = 117$  м.

На встречном волнении с помощью такого построения длина волны определяется однозначно. На попутном волнении в случае, когда волны обгоняют корабль, отыскание длины волны несколько осложняется тем, что наклонная прямая, отвечающая найденным значениям  $v \cos q$  и  $\tau_{\phi}$ , может пересекать кривую  $x_1$ , соответствующую данной глубине  $H$ , в двух точках. Это значит, что в рассматриваемом случае определенному сочетанию величин  $v \cos q$ ,  $\tau$  и  $H$  могут отвечать два различных значения  $\lambda$ .

Если эти значения существенно отличаются друг от друга, то выбор из них истинного может быть произведен глазомерным способом, а в случае малого отличия зачастую можно с достаточной для практики точностью остановиться на любом из найденных значений. Кроме того, можно еще раз определить по диаграмме длину волны при измененных  $v$  или  $q$ . Значения  $\lambda$ , совпавшие в результате обоих измерений, и будут истинными.

В случае, когда корабль, двигаясь на попутном волнении, обгоняет волну, для определения  $\lambda$  наклонную прямую из точки, отвечающей найденному значению  $v \cos q$ , следует проводить под

углом  $\arctg(\tau_\phi/1,95)$  к положительному направлению оси абсцисс. Иными словами, эта прямая должна составлять такой же угол с положительным направлением оси абсцисс, какой имеющаяся на диаграмме прямая  $\tau = \tau_\phi$  составляет с отрицательным направлением этой оси. Однако этот случай обычно не представляет практического интереса.

Рассмотрим теперь вопрос об определении резонансных сочетаний курсов и скоростей на встречном волнении или на попутном волнении при  $|v \cos q| < c$ , т. е. в случае, когда волны обгоняют корабль. Для этого по горизонтали, соответствующей определенной длине волны  $\lambda$ , измеряется расстояние от правого края диаграммы до прямой  $\tau = T_c$  и затем это расстояние откладывается по той же горизонтали вправо от кривой  $x_1$ , отвечающей данной глубине  $H$ . Через полученную таким образом точку, абсцисса которой определяется выражением

$$x = v \cos q = -c + \frac{1,95\lambda}{T_c},$$

проводится вертикальная линия. Лежащие на этой линии точки нижнего графика соответствуют резонансным сочетаниям  $v$  и  $q$ .

Для определения границ резонансной зоны по вспомогательной шкале, помещенной над диаграммой, прочитываются значения  $T_c/0,7$  и  $T_c/1,3$  при данном  $T_c$  и затем производится такое же построение, как и для резонанса: по горизонтали, отвечающей рассматриваемой длине волны, измеряют расстояния от правого края диаграммы до прямых  $\tau = T_c/0,7$  и  $\tau = T_c/1,3$ , эти расстояния откладывают по той же горизонтали вправо от кривой  $x_1$  для данной глубины и через полученные точки проводят вертикальные прямые, ограничивающие резонансную зону. Так, например, для корабля, имеющего период свободных колебаний  $T_c = 14$  с, при глубине моря  $H = 15$  м и длине волны  $\lambda = 100$  м, выполнив указанные построения, найдем, что резонанс наступает при  $v \cos q = -7$  уз, а границам резонансной зоны соответствуют значения  $v \cos q$ , равные  $-3$  и  $-11$  уз.

Заметим, что корабль может испытывать резонансную качку и при обгоне волны, т. е. при  $\cos q < 0$  и  $|v \cos q| > c$ . В этом случае определение сочетаний  $v$  и  $q$ , отвечающих резонансу и границам резонансной зоны, выполняются способом, аналогичным приведенному выше, только отрезки  $\tau = T_c$ ,  $\tau = T_c/0,7$  и  $\tau = T_c/1,3$  откладывают не вправо, а влево от кривых  $x_1$ .

Для малых кораблей серьезную опасность представляет уменьшение устойчивости на вершине попутной волны, длина которой равна длине корабля  $L$  или близка к ней. Чтобы не допустить этого, следует, проведя вертикаль через точку пересечения кривой  $x_1$  для данной глубины и горизонтальной прямой  $\lambda = L$ , избегать таких скоростей, при которых точка, соответствующая определенным значениям  $v$  и  $q$ , будет располагаться на указанной вертикали или вблизи нее в вертикально заштрихованном секторе нижнего

графика. Так, например, при  $L = 60$  м и  $H = 10$  м на попутной волне следует избегать скоростей, близких к 17 уз.

При неограниченной глубине воды (практически при  $H \geq \lambda/2$ ) для определения условий попадания в резонанс можно пользоваться шкалами А и В высот волн или шкалой интенсивности волнения в баллах.

При известной высоте волны (3 %-ной обеспеченности или «значительной») из соответствующих точек шкал А и В проводят горизонтальные прямые, по которым измеряют расстояния от правого края диаграммы до прямой  $\tau = T_c$ . Затем эти расстояния откладывают по соответствующим горизонталям вправо от кривой  $x_1$  для неограниченной глубины ( $H = \infty$ ) и через полученные точки проводят вертикальные прямые, выделяющие на нижнем графике область резонансных сочетаний курсовых углов и скоростей.

В рассматриваемом случае нельзя однозначно определить значение  $v \cos q$ , отвечающее резонансу, а упомянутые выше вертикальные прямые лишь ограничивают область, в которой оно заключено.

Рассмотрим способ определения границ зоны резонансной качки на нерегулярном волнении, т. е. зоны, в которой заведомо выполняется неравенство (8.5), где под  $\tau$  следует понимать кажущийся период гармоника, отвечающей максимуму спектра уклонов взволнованной поверхности.

Для этой цели по вспомогательной шкале прочитывают значения  $T_c/0,7$  и  $T_c/1,3$  и затем таким же способом, как и для регулярного волнения, находят границы двух резонансных зон применительно к горизонталям, проведенным из соответствующих точек шкал А и В. Как нетрудно видеть, неравенство (8.5) заведомо выполняется в зоне, заключенной между наружными вертикалями, ограничивающими обе построенные выше резонансные зоны.

При использовании шкалы степени волнения на диаграмме производят те же построения, что и при использовании шкал А и В, только исходные горизонтальные линии проводят через нижнюю и верхнюю точки отрезка шкалы, отвечающего данному баллу волнения.

Если, воспользовавшись шкалами высот волн или степени волнения, откладывать все горизонтальные отрезки не вправо, а влево от кривой  $x_1$  для неограниченной глубины, то с помощью построений, аналогичных описанным выше, можно найти еще одну зону резонансной качки на нерегулярном волнении. Однако при более или менее крупных волнах этой зоне отвечают такие скорости, которые для современных водоизмещающих кораблей практически недостижимы.

## § 42. Принципы действия успокоителей качки

Помимо целенаправленного выбора курса и скорости на волнении стабилизация корабля может осуществляться с помощью специальных устройств, называемых успокоителями качки. Стабили-

зирующий эффект при этом достигается за счет создания момента, противоположного по фазе возмущающему моменту. Если при таком сочетании фаз стабилизирующий и возмущающий моменты окажутся равными по величине, то корабль вообще качаться не будет. Заметим сразу, что полная ликвидация качки на нерегулярном волнении практически неосуществима. Поэтому целью стабилизации является уменьшение амплитуд до пределов, обеспечивающих удовлетворительную обитаемость корабля и возможность выполнять соответствующие его назначению задачи. В практике применяют успокоители только для бортовой качки. Создать эффективные успокоители килевой качки пока не удалось.

Из многочисленных видов успокоителей, предлагавшихся различными авторами, жизнеспособными и применяемыми в настоящее время оказались только скуловые кили, бортовые управляемые рули и жидкостные цистерны. Если классифицировать эти успокоители по природе сил, создающих стабилизирующий момент, то скуловые кили и бортовые рули следует отнести к гидродинамическим успокоителям, а жидкостные цистерны — к гравитационным. В меньшей мере для успокоения качки применяют гироскопы.

Успокоители качки бывают пассивными или активными. Первые (за исключением гироскопов) лишены каких-либо силовых приводов и систем управления и создают стабилизирующий момент лишь как реакцию на наклонение корабля. Вторые имеют силовые приводы и системы автоматического управления, что повышает их эффективность. Однако при этом увеличивается их стоимость и в известной мере уменьшается надежность.

Существует два принципа стабилизации бортовой качки. Согласно первому из них успокоение производится таким образом, чтобы палуба все время оставалась почти горизонтальной (стабилизация относительно горизонта). Согласно второму палуба должна быть параллельна касательной к волновому профилю. Этот принцип называется стабилизацией относительно динамической вертикали<sup>1</sup> и является предпочтительным с точки зрения улучшения обитаемости корабля. Последнее обстоятельство объясняется тем, что действующая на качающийся корабль, находящихся на нем людей и грузы так называемая кажущаяся сила тяжести, представляющая собой геометрическую сумму веса и силы инерции, направлена параллельно динамической вертикали. Таким образом, при использовании второго принципа стабилизации экипажу легче оставаться на своих местах, люди не выпадают из коек, уменьшается опасность смещения грузов и т. п.

Рассмотрим бортовую качку при так называемой параметрической стабилизации относительно горизонта. В этом случае стабилизирующий момент определяется зависимостью

$$M_{ст} = - (A\theta + B\dot{\theta} + C\ddot{\theta}), \quad (8.7)$$

<sup>1</sup> Динамической вертикалью называется нормаль к волновому профилю

где  $A, B, C$  — коэффициенты управления,  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  — угол наклона стабилизированного корабля, угловая скорость и ускорение (параметры системы). Активный успокоитель, управляемый по такому закону, называется *идеальным*. Стабилизирующий момент, создаваемый реальным успокоителем, не будет точно подчиняться зависимости (8.7) из-за несовершенства систем управления, различного рода ограничений и других причин подобного характера.

Для корабля с включенным идеальным успокоителем, движущегося косым курсом по отношению к волне, «укороченное» уравнение бортовой качки (4.183) можно записать в виде

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + mgh\theta = -i\alpha_0\kappa_4 mgh e^{i\sigma t} - (A\theta + B\dot{\theta} + C\ddot{\theta}), \quad (8.8)$$

или

$$\ddot{\theta} + 2\nu\dot{\theta} + \omega^2\theta = -i\alpha_0\kappa_4\omega_*^2 e^{i\sigma t},$$

где

$$\nu = \frac{\Lambda_{44} + B}{2(I_x + M_{44} + C)}; \quad \omega = \sqrt{\frac{mgh + A}{I_x + M_{44} + C}};$$

$$\omega_* = \sqrt{\frac{mgh}{I_x + M_{44} + C}}.$$

Из полученных равенств видно, что управление успокоителем по углу наклона ( $M_{ст} = -A\theta$ ) эквивалентно изменению коэффициента поперечной остойчивости и приводит к перемещению резонанса в область более высоких частот при  $A > 0$  и более низких при,  $A < 0$ . При стабилизирующем моменте, пропорциональном угловому ускорению ( $M_{ст} = -C\ddot{\theta}$ ), также происходит изменение резонансной частоты в сторону уменьшения при  $C > 0$  и увеличения при  $C < 0$ . Величина резонансной амплитуды при управлении по углу наклона либо угловому ускорению почти не изменяется, в связи с чем управление успокоителем только по этим параметрам не производится.

Чаще всего управление ведется по угловой скорости ( $M_{ст} = -B\dot{\theta}$ ,  $B > 0$ ), что равносильно увеличению коэффициента демпфирования. Такой закон управления приводит к существенному уменьшению резонансной амплитуды и поэтому является основным. Кроме того, управление может вестись по двучленным зависимостям

$$M_{ст} = -(A\theta + B\dot{\theta}) \quad \text{или} \quad M_{ст} = -(B\dot{\theta} + C\ddot{\theta})$$

либо по трехчленной зависимости (8.7). Если используется трехчленная зависимость (8.7) и при этом

$$\frac{A}{mgh} = \frac{B}{\Lambda_{44}} = \frac{C}{I_x + M_{44}} = F,$$

то дифференциальное уравнение (8.8) приобретает вид

$$(I_x + M_{44})\ddot{\theta} + \Lambda_{44}\dot{\theta} + mgh\theta = -i \frac{\alpha_0}{1+F} \kappa_4 m g h e^{i\omega t}.$$

Такое управление успокоителем, называемое регулированием по моменту, равносильно уменьшению уклона взволнованной поверхности или, что то же самое, уменьшению возмущающего момента. В условиях регулярного волнения оно является оптимальным, так как приводит к уменьшению амплитуд качки при всех частотах.

Важнейшими критериями эффективности успокоителя является его статическая характеристика и достигаемая кратность умерения качки. Различают номинальную и используемую статические характеристики успокоителя. Под номинальной статической характеристикой  $\varphi_s$  понимают угол крена, который получит корабль, плавающий на тихой воде, при статическом приложении к нему максимального момента, развиваемого успокоителем:

$$\varphi_s = \frac{M_{\max}}{mgh},$$

где, очевидно,  $M_{\max}$  — максимальный стабилизирующий момент. Используемой статической характеристикой  $\varphi_s^*$  называется отношение амплитуды  $M_a$  стабилизирующего момента, развиваемого успокоителем при качке на волнении, к коэффициенту поперечной остойчивости корабля  $mgh$ .

При конструировании успокоителя стремятся повысить используемую характеристику до уровня номинальной, однако добиться этого не удастся и практически всегда  $\varphi_s^* < \varphi_s$ . Только в идеальном случае имеет место равенство этих характеристик. Таким образом, можем написать

$$M_a = mgh\varphi_s^* \leq mgh\varphi_s. \quad (8.9)$$

*Кратностью умерения качки* на регулярном волнении называется отношение резонансных амплитуд качки нестабилизированного и стабилизированного корабля. На нерегулярном волнении под кратностью умерения понимается корень квадратный из отношения дисперсий углов наклона нестабилизированного и стабилизированного корабля. Наибольшие значения кратности умерения, достижимые в практике, не превосходят 3—4.

В условиях нерегулярного волнения стабилизирующий момент, зависящий от случайных функций времени  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\ddot{\theta}$ , также будет случайной функцией времени (случайным процессом). В соответствии с (8.7) его дисперсия определяется выражением

$$D_M = A^2 D_\theta + B^2 D_{\dot{\theta}} + C^2 D_{\ddot{\theta}} + 2ABK_{\theta\dot{\theta}} + 2ACK_{\theta\ddot{\theta}} + 2BCK_{\dot{\theta}\ddot{\theta}}, \quad (8.10)$$

где  $D_\theta$ ,  $D_{\dot{\theta}}$ ,  $D_{\ddot{\theta}}$  — дисперсии углов наклона, угловых скоро-

стей и ускорений;  $K_{\theta\theta}$ ,  $K_{\theta\ddot{\theta}}$ ,  $K_{\dot{\theta}\ddot{\theta}}$  — взаимные корреляционные функции.

Но в теории нормальных стационарных случайных процессов доказывается, что две последовательные производные одного и того же процесса образуют независимые случайные процессы. Таким образом, взаимные корреляционные функции между процессами  $\theta$  и  $\dot{\theta}$ , а также между  $\dot{\theta}$  и  $\ddot{\theta}$  равны нулю. Взаимная корреляционная функция между  $\theta$  и  $\ddot{\theta}$  будет равна по величине и противоположна по знаку дисперсии  $\dot{\theta}$ . Тогда формула (8.10) примет вид

$$D_M = A^2 D_\theta + (B^2 - 2AC) D_{\dot{\theta}} + C^2 D_{\ddot{\theta}}. \quad (8.11)$$

При распределении по закону Релея амплитуда 3 %-ной обеспеченности стабилизирующего момента будет определяться формулой

$$M_{3\%} = 2,64 \sqrt{D_M}.$$

Принимая такую обеспеченность за расчетную и имея в виду соотношения (8.9) и (8.11), увидим, что коэффициенты управления  $A$ ,  $B$ ,  $C$  должны удовлетворять условию

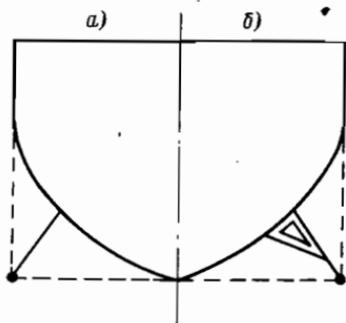
$$2,64 \sqrt{A^2 D_\theta + (B^2 - 2AC) D_{\dot{\theta}} + C^2 D_{\ddot{\theta}}} \leq mgh\varphi_s.$$

Поскольку дисперсии и коэффициенты управления зависят друг от друга, расчет качки стабилизированного корабля на нерегулярном волнении выполняют методом последовательных приближений.

### § 43. Гидродинамические успокоители

Простейшим пассивным гидродинамическим успокоителем качки являются скуловые кили — пластины, устанавливаемые на скулах корабля нормально к его наружной обшивке. Суммарная площадь килей составляет 3—5 % от площади ватерлинии, а высоту выбирают так, чтобы они не выходили за габариты миделевого сечения. В противном случае кили будут повреждаться при швартовке и посадке на мель. Прочность соединения их с корпусом рассчитывают так, чтобы в случае удара о грунт или причальную стенку киль отламывался без повреждения наружной обшивки.

При относительно малой высоте киль обычно представляет собой просто лист, приваренный к наружной обшивке корабля, при высоте 500—600 мм для повышения жесткости вдоль свободной кромки листа приваривают прокатные профили различной формы (рис. 8.2, а), при большой высоте киль подкрепляют bracketами (рис. 8.2, б).



8.2. Скуловые кили.

С целью уменьшения отрицательного влияния килей на ходкость корабля их устанавливают вдоль линий тока. В этом случае при движении без дифферента на тихой воде сопротивление килей будет состоять только из трения; добавочного сопротивления формы и волнового сопротивления возникать не будет. Однако даже при такой установке килей скорость на тихой воде будет уменьшаться на 2—3 % от скорости полного хода. Учитывая, что при наличии дифферента направление линий тока изменяется, особенно вблизи оконечностей корабля, скуловые кили устанавливают только в средней части на протяжении 30—40 % длины. Установка их в средней части наиболее целесообразна и с точки зрения эффективности стабилизации, так как в этом случае кили оказываются на максимально возможном расстоянии друг от друга, что увеличивает стабилизирующий момент и уменьшает их взаимное экранирование.

Стабилизирующее действие килей обусловлено увеличением демпфирования бортовой качки за счет отрывного обтекания в поперечной плоскости. В связи с этим применение килей приводит к существенному уменьшению амплитуды в области резонанса, и они бывают весьма эффективны как на ходу корабля, так и в условиях стоянки. На ходу они оказывают дополнительное стабилизирующее действие, работая как крылья предельно малого удлинения.<sup>1</sup> Однако возникающий при этом дополнительный момент весьма мал. Более того, на стоянке стабилизирующий эффект килей оказывается большим, чем на ходу. Это связано с тем, что на ходу возрастает демпфирование самого корпуса и доля демпфирования килей в общем комплекс «корпус—кили» уменьшается.

Эффективность килей, принципиально говоря, можно несколько повысить, ставя их ближе к ватерлинии. В этом случае они будут вызывать дополнительные волнообразование, что приведет к еще большему демпфированию и уменьшению амплитуд. Однако, как уже упоминалось, выносить кили за габаритные размеры корпуса нельзя по условиям швартовки.

Скуловые кили применяют на всех кораблях, где это допускается условиями эксплуатации. В первую очередь их ставят на кораблях с большими радиусами закругления скул, так как в этом случае демпфирование самого корпуса мало и резонансные амплитуды достигают очень больших значений. При острых скулах или малых радиусах скуловых закруглений роль килей существенно уменьшается.

С целью повышения стабилизирующего момента на ходу предпринимались попытки делать кили разрезными, состоящими из ряда отдельных крыльев с расстоянием между ними в 3—4 хорды. Ожидалось, что за счет значительного удлинения этих крыльев

---

<sup>1</sup> Геометрическое удлинение киля — отношение его высоты к протяженности вдоль корабля — составляет 0,01—0,02. Эффективное удлинение с учетом влияния корпуса корабля вдвое больше геометрического.

на них будут возникать большие силы, чем на сплошных килях. Однако эта попытка успехом не увенчалась из-за усложнения конструкции, снижения стабилизирующего эффекта на стоянке и весьма незначительного увеличения его на ходу по причине взаимного влияния крыльев, расположенных на малом расстоянии друг от друга.

В качестве активных гидродинамических успокоителей широко применяют поворачивающиеся крылья, называемые бортовыми управляемыми рулями (рис. 8.3). Их устанавливают на скулах или несколько выше скул, обычно недалеко от миделя, и перекалывают с помощью специальной системы автоматического управления. На тихой воде во избежание повышения сопротивления рули либо втягивают внутрь корпуса, либо заваливают в специальные ниши. Таким же образом рули убирают при швартовке, что предохраняет их от поломок.

Если на скуловых килях, представляющих собой крылья предельно малого удлинения, стабилизирующий момент практически полностью создается за счет увеличения демпфирования, то момент, создаваемый бортовыми рулями, имеет иную природу. На рулях правого и левого бортов, которые являются крыльями не предельно малого, а малого удлинения, при достаточной скорости возникают значительные подъемные силы разных знаков, образующие стабилизирующий момент.

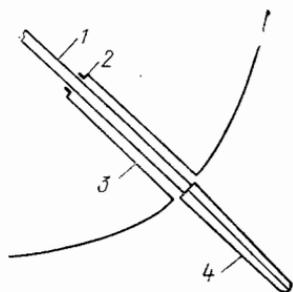
Система управления работает таким образом, что руль, расположенный на опускающемся борту, поворачивается передней кромкой вверх, а на поднимающемся — передней кромкой вниз. Таким образом, на руле опускающегося борта подъемная сила будет направлена вверх, а на руле поднимающегося — вниз, и момент, создаваемый этими силами, будет противодействовать наклонению.

Гидродинамический расчет бортовых управляемых рулей должен, принципиально говоря, строиться на основе теории тонкого крыла малого удлинения в нестационарном потоке. Однако многочисленные вычисления показывают, что для определения подъемной силы может быть использована гипотеза стационарности.

В рамках этой гипотезы коэффициент подъемной силы крыла при докритических углах атаки можно определить по формуле Г. Ф. Бураго с поправкой К. К. Федяевского. Эта формула имеет вид

$$C_y = 4,75\alpha_0 \frac{2,75\lambda + 2\alpha_0}{2,75\lambda + 5,6} \cos \alpha_0,$$

где  $\lambda$  — геометрическое удлинение, которое для прямоугольного в плане крыла равно отношению размаха к хорде. При расположении крыла вблизи корпуса, если зазор не превышает 1/4 размаха,



8.3. Бортовой руль: 1 — баллер; 2 — сальник; 3 — ниша; 4 — руль.

вместо геометрического в расчет следует принимать эффективное удлинение, которое больше геометрического и при отсутствии зазора между крылом и корпусом превышает его в два раза. Под  $\alpha_0$  в последней формуле понимается суммарный угол атаки, приближенно равный

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{l\dot{\theta}}{v},$$

где  $\alpha$  — угол перекадки;  $l$  — отстояние середины размаха руля от оси наклона корабля;  $v$  — скорость судна;  $\dot{\theta}$  — угловая скорость бортовой качки.

При известной величине  $C_y$  подъемная сила определяется по формуле

$$Y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S_r,$$

где  $\rho$  — плотность воды, а  $S_r$  — площадь руля в плане. Зная подъемные силы, легко определить стабилизирующий момент, создаваемый рулями.

Необходимую площадь рулей выбирают исходя из минимальной скорости судна, при которой необходимо получить стабилизирующий момент определенной величины. При этом удлинение определяют из условия уборки рулей внутрь корпуса и обеспечения прочности баллеров. Для втягивающихся рулей удлинение обычно составляет 1,5—2,0; для заваливающихся 2,0—2,5.

При удлинении, характерном для втягивающихся рулей, критический угол атаки не превосходит  $25^\circ$ . На практике во избежание кавитации обычно ограничивают максимальный угол перекадки величиной  $20$ — $22^\circ$ . Для заваливающихся рулей эти углы несколько меньше.

Ввиду того, что рули должны одинаково эффективно работать при наклонении на любой борт, для них выбирают симметричные профили. Однако такие профили создают значительно меньшую подъемную силу, чем изогнутые. Для того чтобы, сохраняя симметричную форму профиля, увеличить его подъемную силу, рули часто делают разрезными, состоящими из основной части и закрылка. Основная часть и закрылок поворачиваются в одну и ту же сторону, причем закрылок поворачивается на больший угол, что и приводит к увеличению подъемной силы.

Эксперименты показывают, что при средней степени волнения с помощью бортовых управляемых рулей можно почти полностью стабилизировать корабль. На сильном нерегулярном волнении бортовые рули обеспечивают примерно трехкратное умерение качки.

#### § 44. Гравитационные успокоители

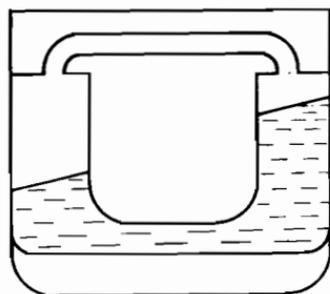
В гравитационных успокоителях стабилизирующий эффект создается с помощью перемещения грузов. Попытки использовать для этой цели твердые грузы оказались несостоятельными; пригодными

для практического использования оказались гравитационные успокоители только жидкостного типа.

Первыми успокоителями такого рода были плоские цистерны, в которых находилась жидкость со свободной поверхностью. За счет последней уменьшалась остойчивость корабля, увеличивался период его свободных колебаний, и для корабля, расположенного лагом к волне, резонанс смещался в сторону более длинных, а следовательно, и менее крутых волн. Кроме того, поскольку длинные волны обладают меньшей повторяемостью, чем короткие, уменьшалась вероятность наступления резонансного режима.

• Дальнейшим развитием гравитационных жидкостных успокоителей были пассивные цистерны. Они представляют своего рода гидравлический маятник, состоящий из соединенных между собой цистерн, расположенных у бортов корабля.

Различают цистерны первого и второго рода. Цистерны первого рода (закрытые) соединяются снизу жидкостным, а сверху воздушным каналами (рис. 8.4). У цистерн второго рода (открытых) также имеется воздушный канал, а вместо водяного канала делают отверстия в бортах, и жидкостное сообщение осуществляется через забортную воду. Таким образом, цистерны первого рода, принципиально говоря, могут быть использованы как топливные, а для цистерн второго рода такая возможность отсутствует.



8.4. Успокоительные цистерны закрытого типа.

Стабилизирующее действие пассивных цистерн основано на принципе так называемого вторичного (или двойного) резонанса. Суть этого принципа заключается в следующем. Если рассматривать бортовую качку в рамках «укороченного» уравнения, то, как видно из формулы (4.187), при резонансе вынужденные колебания корабля отстают по фазе от возмущающей силы на  $90^\circ$ .<sup>1</sup> Если период собственных колебаний жидкости в цистернах равен периоду собственных колебаний корабля, то здесь также имеет место резонанс (вторичный) и колебания жидкости, в свою очередь, отстают на  $90^\circ$  от колебаний корабля. Таким образом, в рассматриваемом случае сдвиг фаз между колебаниями жидкости в цистернах и возмущающим действием волны составляет  $180^\circ$ , в результате чего и создается стабилизирующий момент.

В настоящее время пассивные цистерны применяют редко из-за низкой эффективности на нерегулярном волнении, увеличения

<sup>1</sup> Напомним, что в «укороченном» уравнении опущены дифракционные силы. Однако последние вследствие их малости не могут существенно изменить это угол.

амплитуд качки в нерезонансных условиях, снижения грузоподъемности и грузовместимости и других недостатков. Кроме того, открытые цистерны заметно снижают скорость корабля, так как часть мощности силовой установки расходуется на придание втекающей воде кинетической энергии, которая при вытекании безвозвратно теряется.

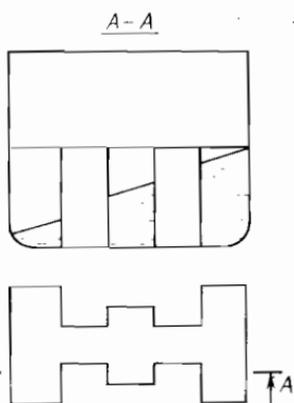
Активизация цистерн может быть достигнута установкой компрессора в воздушном канале или насоса переменной производительности в жидкостном. Очевидно, что компрессор может ставиться как в открытых, так и в закрытых цистернах, а насос, перекачивающий жидкость из цистерны в цистерну, — только в закрытых.

Активные цистерны оказываются значительно эффективнее пассивных. Они создают стабилизирующий момент не только при резонансе, но и при любом соотношении частот, что играет существенную роль в условиях нерегулярного волнения. Их можно использовать для стабилизации корабля, имеющего статический крен, для раскочки на тихой воде и т. п. Однако вследствие своей сложности, большой стоимости, необходимости затрачивать мощность, чтобы привести в движение стабилизирующую жидкость, высоких требований к системе автоматического управления, активные цистерны на кораблях не устанавливают.

Чаще, чем пассивные цистерны, применяют другой вид успокоителей гравитационного типа — цистерны типа «Флюм»

8.5. «Флюм» — система.

(«Флюм»-система). Эта система состоит из двух бортовых цистерн, соединенных каналом, высота которого одинакова с высотой цистерн. В средней части канал имеет уширенный отсек (рис. 8.5). Цистерны и канал заполняются жидкостью так, что в них всегда имеется свободная поверхность. Систему проектируют таким образом, чтобы период свободных колебаний стабилизирующей жидкости равнялся периоду свободных колебаний корабля при некотором характерном для условий его эксплуатации состоянии нагрузки. Изменение уровня налива жидкости на периоде ее свободных колебаний отражается слабо. Таким образом, цистерны типа «Флюм» сочетают в себе свойства, присущие плоским цистернам, уменьшающим остроту, и пассивным цистернам закрытого типа, стабилизирующий эффект которых основан на принципе вторичного резонанса. Поток жидкости в этих цистернах по меньшей мере дважды резко изменяет площадь своего сечения, испытывая внезапное сужение и расширение. При этом, как известно из гидравлики, поток теряет часть своей кинетической энергии, т. е. имеет место демпфирование колебаний стабилизирующей жидкости. Это, с одной стороны, ос-



лабляет нежелательные удары жидкости в крышки цистерн, а с другой, уменьшает их раскачивающее действие при нерезонансных режимах.

#### § 45. Гироскопические успокоители

Гироскопические успокоители качки, применение которых в 20—30-е гг. носило массовый характер, в последнее время используются редко. Вместе с тем, гироскопы широко применяют для местной стабилизации различных приборов, устройств и т. п.

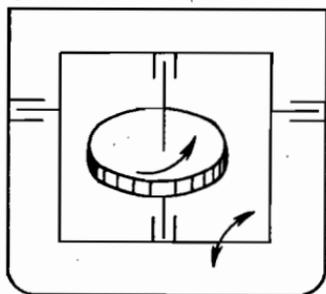
В качестве успокоителя качки используют гироскоп с ротором, вращающимся вокруг вертикальной оси. Цапфы последней укрепляют в раме, расположенной в плоскости шпангоута (рис. 8.6). Эта рама может качаться в цапфах вокруг поперечной оси. Такое движение рамы, называемое прецессией, возникает в случае, когда внешние силы наклоняют раму вокруг продольной оси, как это и имеет место при бортовой качке.

Разумеется, что, говоря о вертикальной и поперечной осях, мы имеем в виду оси материальные, а под продольной осью понимаем просто определенное направление в пространстве.

Прецессия вызывает гироскопический момент, действующий в плоскости, проходящей через ось прецессии и ось вращения ротора, т. е. в плоскости, весьма близкой к плоскости шпангоута.<sup>1</sup> Этот гироскопический момент, пропорциональный угловой скорости прецессии, противодействует возмущающему моменту, наклоняющему корабль. В этом и состоит механизм возникновения стабилизирующего эффекта.

Гироскопические успокоители, так же как гидродинамические и гравитационные, могут быть пассивными и активными. У пассивных успокоителей прецессия возникает только как реакция на бортовую качку, а у активных создается принудительно специальным двигателем, регулируемым с помощью системы автоматического управления. Существенное преимущество активного гироскопа состоит в возможности создания стабилизирующего эффекта при любом соотношении между периодом возмущающей силы (кажущимся периодом волны) и периодом собственных колебаний корабля.

На косом волнении бортовая качка всегда будет сопровождаться другими видами колебаний, в частности килевой качкой и рысканьем. По отношению к гироскопическому успокоителю бортовой качки килевая должна рассматриваться как дополнительная



8.6. Схема гироскопического успокоителя.

<sup>1</sup> Угол между этими плоскостями равен углу прецессии.

прецессия, а рысканье — как изменение угловой скорости вращения ротора. Это может привести к потере устойчивости системы «корабль — успокоитель». Для того чтобы избежать этой опасности, предлагались спаренные гиросtabilизаторы с противоположными направлениями вращения роторов. Однако из-за их сложности такие успокоители использовались лишь в единичных случаях.

Высокая стоимость, большая масса и габариты, сложность систем управления и другие причины привели к почти полному отказу от применения гироскопов для общей стабилизации корабля.

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. **Басин А. М.** Качка судов. М., Транспорт, 1969.
2. **Благовещенский С. Н.** Качка корабля. Л., Судпромгиз, 1954.
3. **Благовещенский С. Н., Холодили А. Н.** Справочник по статике и динамике корабля. В двух томах. Том 2. Динамика (качка) корабля. Л., Судостроение, 1975.
4. **Бородай И. К., Нецветаев Ю. А.** Мореходность судов. Л., Судостроение, 1982.
5. **Герасимов А. В.** Энергостатистическая теория нелинейной нерегулярной качки судна. Л., Судостроение, 1979.
6. **Крылов А. Н.** Качка корабля. Собр. трудов. Т. XI. М.—Л., изд-во АН СССР, 1951.
7. **Липис В. Б., Ремез Ю. В.** Безопасные режимы штормового плавания судов. М., Транспорт, 1982.
8. **Луговский В. В.** Нелинейные задачи мореходности корабля. Л., Судостроение, 1966.
9. **Луговский В. В.** Гидродинамика нелинейной качки судов. Л., Судостроение, 1980.
10. **Некрасов В. А.** Вероятностные задачи мореходности судов. Л., Судостроение, 1978.
11. **Павленко В. Г.** Методы расчета качки судов. Л., Судпромгиз, 1956.
12. **Павленко Г. Е.** Качка судов. Л., ОГИЗ, Гострансиздат, 1935.
13. **Павленко Г. Е.** Теория и расчет продольной качки корабля. Л., изд-во ЛКН, 1939.
14. **Ремез Ю. В., Некрасов В. А., Шестопал В. П.** Качка судна на нерегулярном волнении. Николаев, изд-во НКИ, 1973.
15. **Семенов-Тянь-Шанский В. В., Благовещенский С. Н., Холодили А. Н.** Качка корабля. Л., Судостроение, 1969.
16. **Фан-дер-Флит А. П.** Теория корабля. Часть III. Качка и изгибающий момент на волнении. Пг, 1916.
17. **Хаскинд М. Д.** Гидродинамическая теория качки корабля. М., Наука, 1973.
18. **Холодили А. Н.** Стабилизация судна на волнении. Л., Судостроение, 1973.
19. **Холодили А. Н., Шмырев А. Н.** Мореходность и стабилизация судна на волнении. Л., Судостроение, 1976.
20. **Шмырев А. Н., Моришильдт В. А., Ильина С. Г., Гольдин А. И.** Успокоители качки судов. Л., Судостроение, 1972.
21. **Korvin-Kroukovsky V. V.** Theory of seakeeping. N.Y., SNAME, 1961.
22. **Vossers G.** Fundamentals of the behaviour of ships in waves. International Shipbuilding Progress, 1959—1962, v. 6—9, N 63—93.

|  |     |
|--|-----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .  | 3   |
| ВВЕДЕНИЕ . . . . .   | 5   |
| § 1. Общие сведения о мореходности и качке корабля . . . . .   | 5   |
| § 2. Краткий исторический очерк и современное состояние теории качки . . . . .   | 10  |
| <br><i>Глава 1</i>   |     |
| ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ . . . . .  | 23  |
| § 3. Основные уравнения теории гравитационных волн малой амплитуды . . . . .   | 23  |
| § 4. Плоские прогрессивные волны . . . . .   | 27  |
| § 5. Характеристики прогрессивных волн в подвижной системе координат . . . . .   | 33  |
| <br><i>Глава 2</i>   |     |
| ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧКИ . . . . .   | 36  |
| § 6. Общие формулы для присоединенных масс. Метод плоских сечений . . . . .  | 36  |
| § 7. Присоединенные массы шпангоутных контуров . . . . .   | 46  |
| § 8. Демпфирование . . . . .   | 70  |
| <br><i>Глава 3</i>   |     |
| ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ НА ТИХОЙ ВОДЕ . . . . .  | 102 |
| § 9. Системы координат. Уравнения движения корабля . . . . .   | 102 |
| § 10. Изолированные дифференциальные уравнения основных видов качки . . . . .  | 105 |
| § 11. Логарифмический декремент. Экспериментальное определение коэффициента затухания . . . . .  | 112 |
| § 12. Совместная поперечно-горизонтальная и бортовая качка . . . . .   | 114 |
| § 13. Совместная вертикальная и килевая качка . . . . .  | 120 |
| § 14. Приближенные формулы для моментов инерции массы корабля и периодов качки. Оперативный контроль остойчивости корабля в море . . . . . | 126 |
| <br><i>Глава 4</i>   |     |
| ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КАЧКИ НА РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНЕНИИ . . . . .   | 137 |
| § 15. Основные гипотезы и общая постановка задачи гидродинамической теории качки . . . . .   | 137 |
| § 16. Категории гидродинамических сил . . . . .  | 142 |
| § 17. Инерционно-демпфирующие силы . . . . .   | 144 |
| § 18. Восстанавливающие силы . . . . .   | 158 |
| § 19. Главная часть возмущающих сил . . . . .  | 161 |
| § 20. Дифракционная часть возмущающих сил . . . . .  | 183 |
| § 21. Уравнения движения твердого тела в подвижной системе координат. Общий вид дифференциальных уравнений качки . . . . .                 | 205 |

|   |            |
|---|------------|
| § 22. Дифференциальные уравнения продольной и боковой качки на регулярном волнении и их решение . . . . .                       | 209        |
| § 23. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики основных видов качки . . . . .                                     | 215        |
| § 24. Продольно-горизонтальная качка . . . . .  | 222        |
| § 25. Параметрический резонанс . . . . .  | 224        |
| <b>Глава 5</b>  |            |
| <b>КАЧКА НА НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНЕНИИ . . . . .</b>   | <b>229</b> |
| § 26. Некоторые основные понятия теории случайных процессов, применяемые в расчетах нерегулярной качки . . . . .                | 229        |
| § 27. Спектральное разложение случайных функций. Понятие об одномерных и двумерных спектрах волнения . . . . .                  | 239        |
| § 28. Связь спектральных и вероятностных характеристик волнения . . . . .   | 244        |
| § 29. Аналитическое представление спектров волнения. Нормированные спектры . . . . .  | 247        |
| § 30. Корабль как линейная динамическая система. Преобразование случайных процессов линейными динамическими системами . . . . . | 253        |
| § 31. Спектры и псевдоспектры качки. Вероятностные характеристики качки на нерегулярном волнении . . . . .                      | 257        |
| <b>Глава 6</b>  |            |
| <b>ПЕРЕРАБАТЫВАЮЩИЕ СИЛЫ, КРУТЯЩИЙ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ . . . . .</b>   | <b>263</b> |
| § 32. Инерция массы корабля . . . . .   | 263        |
| § 33. Гравитационная и гидростатическая нагрузки . . . . .  | 267        |
| § 34. Инерционно-демпфирующие компоненты гидродинамической нагрузки . . . . .   | 271        |
| § 35. Волновые компоненты гидродинамической нагрузки . . . . .  | 277        |
| § 36. Силы и моменты в шпангоутных сечениях . . . . .   | 283        |
| <b>Глава 7</b>  |            |
| <b>ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КАЧКИ . . . . .</b>   | <b>289</b> |
| § 37. Особенности теории качки конечной амплитуды . . . . .   | 289        |
| § 38. Период бортовой качки конечной амплитуды на тихой воде . . . . .  | 291        |
| § 39. Нелинейная бортовая качка на регулярном волнении . . . . .  | 295        |
| § 40. Нелинейная бортовая качка на нерегулярном волнении. Метод статистической линеаризации . . . . .                           | 301        |
| <b>Глава 8</b>  |            |
| <b>СТАБИЛИЗАЦИЯ КОРАБЛЯ . . . . .</b>   | <b>305</b> |
| § 41. Выбор курса и скорости на волнении. Универсальная штормовая диаграмма . . . . .   | 305        |
| § 42. Принципы действия успокоителей качки . . . . .  | 313        |
| § 43. Гидродинамические успокоители . . . . .   | 317        |
| § 44. Гравитационные успокоители . . . . .  | 320        |
| § 45. Гироскопические успокоители . . . . .   | 323        |
| <b>ЛИТЕРАТУРА . . . . .</b>   | <b>325</b> |