КЛАССИЧЕСКАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
ПО МАТЕМАТИКЕ

М. М. ПОСТНИКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЛЕКЦИИ ПО ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье,
исправленное

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2009

ББК 22.151
П 63

Постников М. М.

П 63 Аналитическая геометрия. Лекции по геометрии. Часть I: Учебное пособие. 3-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 416 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0889-4

Книга написана на основе лекций, которые автор в течение ряда лет читал на механико-математическом факультете МГУ. Изложение ведется на основе «векторно-точечной» аксиоматики и на высоком уровне строгости и формализации. Помимо стандартных сведений, в книге приведено довольно много дополнительных материалов, обычно не попадающих в учебники аналитической геометрии. Подробно изложена теория ориентаций, бивекторов и тривекторов.

Учебное пособие предназначено для студентов математических специальностей вузов.

ББК 22.151

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию 8
Предисловие к первому изданию 9

ЛЕКЦИЯ 1 11

Предмет аналитической геометрии. — Векторы. — Сложение векторов. — Умножение вектора на число. — Линейные пространства. — Примеры. — Линейные пространства над произвольным полем.

ЛЕКЦИЯ 2 19

Простейшие следствия аксиом линейного пространства. — Независимость суммы любого числа векторов от расстановки скобок. — Понятие семейства. — Линейная зависимость и независимость. — Линейно независимые множества. — Свойства линейной зависимости. — Теорема о линейной зависимости.

ЛЕКЦИЯ 3 30

Коллинеарные векторы. — Компланарные векторы — Геометрический смысл коллинеарности и компланарности. — Полные семейства векторов, базисы, размерность. — Аксиома размерности. — Критерий базиса. — Координаты вектора. — Обозначения для сумм — Свойства сумм. — Координаты суммы векторов и произведения вектора на число.

ЛЕКЦИЯ 4 39

Изоморфизмы линейных пространств. — Координатные изоморфизмы. — Изоморфность линейных пространств одной и той же размерности. — Метод координат. — Аффинные пространства. — Изоморфность аффинных пространств одной и той же размерности. — Аффинные координаты. — Прямые в аффинном пространстве.— Отрезки.

ЛЕКЦИЯ 5 50

Параметрические уравнения прямой. — Уравнение прямой на плоскости. — Каноническое уравнение прямой на плоскости. — Общее уравнение прямой на плоскости. — Параллельные прямые. — Взаимное расположение двух прямых на плоскости. — Теорема единственности. — Прямые, проходящие через точку пересечения двух прямых. — Расположение прямой по отношению к осям координат. — Полуплоскости, на которые прямая разбивает плоскость.

ЛЕКЦИЯ 6 60

Матрицы. — Умножение матриц. — Двойные суммы. — Ассоциативность умножения матриц. — Квадратные матрицы. —

Переход от одного базиса линейного пространства к другому — Формулы преобразования координат векторов. — Формулы преобразования аффинных координат точек — Ориентации. — Ориентации прямой, плоскости и пространства.

ЛЕКЦИЯ 7 75

Унимодулярно эквивалентные семейства векторов. — Линейно эквивалентные семейства векторов. — Характеризация унимодулярно эквивалентных семейств — Элементарные преобразования матриц. — Ориентации как классы одноименных базисов. — Стороны прямой. — Индуцированная ориентация прямой. — Ориентация прямой, задаваемая уравнением.

ЛЕКЦИЯ 8 87

Внешние произведения. — Бивектор как плоскостной аналог вектора. — Тривектор как пространственный аналог вектора. — Умножение m-вектора на число. — Антикоммутативность внешнего произведения векторов. — Однородность внешнего произведения векторов. — n-векторы. — Ориентации. — Дистрибутивность внешнего умножения.

ЛЕКЦИЯ 9 103

Длины, площади и объемы. — Сложение бивекторов в пространстве. — Линейное пространство бивекторов.

ЛЕКЦИЯ 10 111

Ассоциативность сложения бивекторов. — Базис пространства бивекторов. — Условие параллельности вектора бивектору. — Плоскости в пространстве. — Параметрические уравнения плоскости. — Общее уравнение плоскости. — Плоскость, проходящая через три неколлинеарные точки.

ЛЕКЦИЯ 11 120

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. — Прямые в пространстве. — Плоскости, проходящие через данную прямую. — Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. — Плоскости, проходящие через точку пересечения трех плоскостей. — Взаимное расположение двух прямых в пространстве. — Полупространства, на которые плоскость разбивает пространство. — Индуцированная ориентация плоскости. — Ориентация плоскости, задаваемая уравнением.

ЛЕКЦИЯ 12 137

Скалярное произведение. — Аксиомы скалярного умножения — Евклидовы пространства. — Длина вектора и угол между векторами. — Неравенство Коши—Буняковского — Неравенство треугольника. — Теорема о диагоналях параллелограмма. — Ортогональные векторы и теорема Пифагора — Метрическая форма и метрические коэффициенты. — Условие положительной определенности — Формулы преобразования метрических коэффициентов при замене базиса.

ЛЕКЦИЯ 13 149

Ортонормированные семейства векторов и коэффициенты Фурье — Ортонормированные базисы и прямоугольные координаты. — Разложение положительно определенных матриц. — Процесс ортогонализации Грама—Шмидта. — Изоморфизм евклидовых пространств. — Ортогональные матрицы. — Ортогональные матрицы второго порядка. — Формулы преобразования прямоугольных координат

ЛЕКЦИЯ 14 159

Тривекторы в евклидовом ориентированном пространстве. — Смешанное произведение трех векторов. — Площадь бивектора в евклидовом пространстве — Вектор, дополнительный к бивектору в евклидовом ориентированном пространстве — Векторное умножение и его свойства

ЛЕКЦИЯ 15 166

Изоморфизм линеалов векторов и бивекторов. — Выражение векторного произведения в координатах — Двойное векторное произведение. — Определители Грама

ЛЕКЦИЯ 16 172

Прямая в евклидовой плоскости. — Расстояние от точки до прямой. — Углы между прямыми. — Плоскость в евклидовом пространстве. — Расстояние от точки до плоскости. — Угол между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью, между двумя прямыми — Расстояние от точки до прямой в пространств — Расстояние между двумя прямыми в пространстве — Уравнения общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых в пространстве.

ЛЕКЦИЯ 17 181

Парабола — Директориальное и оптическое свойства параболы. — Эллипс — Фокальное, директориальное и оптическое свойства эллипса — Гипербола. — Фокальное, директориальное и оптическое свойства гиперболы.

ЛЕКЦИЯ 18 195

Уравнения эллипсов, парабол и гипербол, отнесенные к вершине. — Эллипсы, параболы и гиперболы как конические сечения. —Полярные координаты. — Уравнения эллипсов, парабол и гипербол в полярных координатах — Аффинные эллипсы, параболы, гиперболы. — Алгебраические линии. — Линии второго порядка и связанные с ними трудности. — Комплексная аффинная геометрия и ее недостаточность.

ЛЕКЦИЯ 19 207

Вещественно-комплексные линейные пространства — Их размерность. — Изоморфизм вещественно-комплексных линейных пространств. — Комплексификация. — Вещественно-комплексные аффинные пространства. — Комплексификация аффинных пространств. — Вещественно-комплексные евклидовы пространства. — Вещественные, мнимые и действительные линии второго порядка.

ЛЕКЦИЯ 20 213

Вводные замечания. — Преобразование уравнения линии второго порядка. — Центры линии второго порядка. — Центры симметрии. — Корректность определения центров. — Центральные и нецентральные линии второго порядка. — Прямые неасимптотического направления. — Касательные. — Прямые асимптотического направления.

ЛЕКЦИЯ 21 227

Особые и неособые направления. — Диаметры — Диаметры и центры. — Сопряженные направления и сопряженные диаметры. — Упрощение уравнения центральной линии второго порядка. — Упрощение уравнения нецентральной линии второго порядка.

ЛЕКЦИЯ 22 237

Линии второго порядка на комплексной аффинной плоскости — Линии второго порядка на вещественно-комплексной аффинной плоскости. — Единственность уравнения линии второго порядка — Линии второго порядка на евклидовой плоскости. — Окружности.

ЛЕКЦИЯ 23 251

Эллипсоиды. — Мнимые эллипсоиды. — Мнимые конусы второго порядка. — Двуполостные гиперболоиды — Однополостные гиперболоиды. — Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.

ЛЕКЦИЯ 24 262

Конусы второго порядка. — Эллиптические параболоиды — Гиперболические параболоиды — Прямолинейные образующие гиперболического параболоида — Эллиптические цилиндры — Остальные поверхности второго порядка — Формулировка теоремы классификации поверхностей второго порядка.

ЛЕКЦИЯ 25 276

Ортогональные и аффинные преобразования. — Выражение аффинного преобразования в координатах. — Примеры аффинных преобразований. — Разложение аффинных преобразований. Ортогональные преобразования. — Движения плоскости. — Симметрии и скользящие симметрии.

ЛЕКЦИЯ 26 293

Разложение движения плоскости в композицию двух симметрий. — Центр композиции двух вращений плоскости. — Вращения пространства. — Углы Эйлера. — Винтовые движения.

ЛЕКЦИЯ 27 307

Вращения сферы. — Стереографические координаты на сфере. — Вращения вокруг координатных осей — Дробно-линейные преобразования. — Запись вращений сферы в виде дробно-линейных преобразований плоскости. — Примеры вращений — Задание вращения сферы углом и полюсом. — Дальнейшие примеры вращений. — Самосовмещения куба.

ЛЕКЦИЯ 28. 326

Симметрии пространства. — Разложение ортогональных преобразований в композицию симметрий. — Скользящие симметрии и вращения с переворотом.

ЛЕКЦИЯ 29 332

Координаты прямой. — Пучки прямых. — Собственные и несобственные пучки. — Расширенные плоскости. — Модели аффинно-проективной геометрии. — Однородные аффинные координаты — Формулы преобразования однородных аффинных координат. — Уравнения прямых в однородных координатах — Линии второго порядка на аффинно-проективной плоскости — Окружности на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости

ЛЕКЦИЯ 30 349

Пучки плоскостей. — Связки плоскостей. — Аффинно-проективное пространство. — Проективная плоскость. — Линии второго порядка на проективной плоскости — Координатные изоморфизмы линейных пространств — Координатные изоморфизмы аффинных пространств — Аффинно-проективные пространства — Проективные пространства

ЛЕКЦИЯ 31 362

Теорема Дезарга. — Теорема Паппа—Паскаля. — Теорема Фано — Принцип двойственности. — Модели проективной плоскости — Модели проективной прямой и проективного пространства

ЛЕКЦИЯ 32 373

Комплексная проективная прямая и ее проективные преобразования — Линейные преобразования — Инверсия — Инверсия и дробно-линейные преобразования. — Два свойства дробно-линейных преобразований — Неподвижные точки дробно-линейных преобразований — Параболические, эллиптические, гиперболические и локсодромические дробно-линейные преобразования — Теорема о трех точках — Множитель дробно-линейного непараболического преобразования — Классификация дробно-линейных преобразований — Дробно-линейные преобразования, задающие вращения сферы.

ЛЕКЦИЯ 33 390

Первая группа аксиом Гильберта. — Вторая группа аксиом — Третья группа аксиом — Четвертая группа аксиом — Пятая группа аксиом. — Непротиворечивость аксиоматики Гильберта — Неевклидовы геометрии. — Геометрия Лобачевского — Модель Пуанкаре

Предметный указатель 414

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании книга подверглась довольно существенной переработке.

Опыт преподавания показал, что в теории бивекторов целесообразно с самого начала предполагать знакомство с элементами матричной алгебры, даже если они еще не рассмотрены в параллельном курсе алгебры. Лучше независимо изложить эти элементы в курсе геометрии, чем строить теорию без них. Все равно к концу семестра студент будет владеть всем необходимым материалом. Эта установка позволила изложить теорию бивекторов (и тривекторов) в логическом порядке и сделать ее легким дополнением к теории ориентаций.

Хотя программы первых двух курсов на всех потоках механико-математического факультета в принципе одинаковы, но все же на практике программы различных потоков несколько отличаются друг от друга. Чтобы сделать учебник пригодным к использованию на всех потоках, в него включено довольно много дополнительного материала (оптическое свойство конических сечений, двойное векторное произведение, определители Грама, углы Эйлера и т. п.), обычно рассказываемого только в потоке механиков за счет проективной геометрии. Материал бывшей лекции 28 более реалистически распределен по трем лекциям 27, 31 и 32. Бывшая лекция 23 разбита на две лекции 23 и 24. Теперь учебник уже не является записью какого-нибудь единого курса и может обслуживать несколько разных программ. При этом минимально обязательный материал изложен в первых 25 лекциях. Из следующих лекций движениям (и смежным вопросам) посвящены лекции 26—28, а проективной геометрии — лекции 29—32. Поскольку все их прочитать, как правило, не удастся, здесь приходится делать — в зависимости от будущей специализации и подготовки студентов — определенный выбор. К сожалению, первыми жертвами падают обычно лекции 27 и 32, несмотря на то, что возможно более раннее знакомство с содержащимся в них нестандартным материалом очень ценно для развития общей математической культуры студента.

Особняком стоит дополнительная внепрограммная лекция 33.

Рисунки и чертежи в первом издании были сделаны В. Л. Поповым, а дополнительные рисунки к второму изданию — А. В. Хохловым. Значительные улучшения текста были предложены Б. Л. Лаптевым и А. П. Широковым. Всем перечисленным лицам я приношу глубокую благодарность.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга представляет собой почти точную запись лекций, которые автор читал в первом семестре первого курса на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова для студентов-математиков в рамках единого двухлетнего курса «Геометрия». Содержание этих лекций определялось учебным планом, сложившимися на кафедре высшей геометрии и топологии мехмата традициями, потребностями курса второго семестра и личными установками автора, а последовательность изложения, кроме того, — необходимостью согласования с параллельно читаемыми курсами алгебры и анализа, учетом требований ведущих семинарские занятия ассистентов и другими подобного рода малопринципиальными, но на практике первостепенными соображениями. Например, решение об отнесении тех или иных вопросов к последним нескольким лекциям в основном определялось практической невозможностью закрепить материал этих лекций на упражнениях. Содержание самой последней лекции определялось тем, что из-за пропусков лекций в праздничные дни эта лекция часто приходится на время зачетов и поэтому ее не всегда удается прочитать и т. д., и т. п.

Специального упоминания заслуживают, по-видимому, только две особенности книги. Первая состоит в том, что с самого начала изложение ведется на основе аксиом, а геометрическая наглядность привлекается только в пропедевтических целях. По понятным причинам, из многочисленных возможных систем аксиом выбрана восходящая к Вейлю «векторно-точечная» аксиоматика. Это объясняет непривычно раннее введение в курсе общего понятия линейного пространства. Как показывает опыт, трудностей у студентов с усвоением этого материала, как правило, не возникает.

Другая — более спорная — особенность книги состоит в систематическом развитии и использовании бивекторов и тривекторов. Это позволяет четко отделить аффинную часть теории от метрической и дает подготовку к общей теории поливекторов во втором семестре.

Каждая «лекция» в книге, как правило, на самом деле является изложением двухчасовой устной лекции. Это объясняет, почему часто в середине лекции кончается старая тема и начинается новая. Исключением является последняя, 28-я, лекция, в которой соединены вместе два различных варианта заключительной лекции. Из-за специфики устного и письменного изложений «изохронные» лекции оказались имеющими в книге разный объем. Их число объясняется тем, что хотя по учебному плану на курс аналитической геометрии отводится 36 лекций, но на практике приходится кончать чтение этого курса не позже 28-й лекции.

Лекция 1

Предмет аналитической геометрии. — Векторы. — Сложение векторов. — Умножение вектора на число. — Линейные пространства. — Примеры. — Линейные пространства над произвольным полем.

Аналитическая геометрия, которой посвящены эти лекции, не является каким-либо определенным отделом математики, а представляет собой учебный предмет (курс) с переменным содержанием, концентрирующимся в основном вокруг понятия координат. По традиции в этот курс во всяком случае включается теория линий первого и второго порядков (прямых и конических сечений) на плоскости и, как правило в меньшем объеме, теория поверхностей первого и второго порядков в пространстве. В остальном же его содержание довольно сильно варьируется.

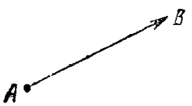
Мы, прежде чем переходить к собственно аналитической геометрии, т. е. к координатам, постараемся подвести под геометрию надежную аксиоматическую базу. Обычно аксиоматическое построение элементарной геометрии основывают, следуя в этом, по существу, Евклиду, на понятиях точки, прямой и плоскости. Как показывает опыт, это приводит к довольно сложной аксиоматике, содержащей до двух десятков аксиом и, что самое плохое, не использующейся ни полностью, ни частично нигде больше в математике. (См. лекцию 33.)

Оказывается, что значительно более удобную и простую аксиоматику можно получить, положив в ее основание понятие *вектора*. Упрощение здесь достигается за счет того, что «векторная» аксиоматика использует теорию вещественных чисел, обширный раздел которой волей-неволей приходится воспроизводить в аксиоматиках «евклидова» типа. Кроме того, отдельные фрагменты этой аксиоматики играют в современной математике исключительно важную роль и с ними надо все равно рано или поздно знакомиться. Таким образом, аксиоматическое построение геометрии на базе понятия вектора позволяет нам одним камнем убить двух зайцев.

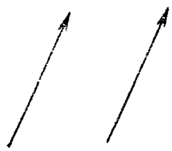
Содержательно вектор представляет собой не что иное, как направленный прямолинейный отрезок. Направление вектора фиксируется тем, что одна его конечная точка считается началом, а другая концом. Вектор с началом A и концом B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. На чертеже вектор изображается стрелкой.

В физике векторами являются силы, скорости, ускорения.

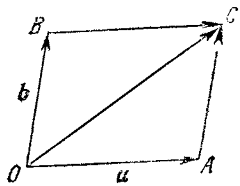
Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления, т. е. расположены на параллельных прямых и направлены в одну



Вектор



Равные векторы



Сложение векторов

сторону. Подчеркнем, что здесь, как и всюду далее, *совпадающие прямые мы считаем параллельными.*

Из физики (механики) известно, что действие двух сил на материальную точку эквивалентно действию одной силы, определяемой по известному правилу параллелограмма. В соответствии с этим *суммой* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ называется вектор, являющийся диагональю $\overrightarrow{OC}$ параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Поскольку $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$, определение суммы можно записать простой формулой:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

Правило сложения векторов, выражаемое этой формулой, часто называют «правилом треугольника»

Операция сложения векторов обладает свойством ассоциативности, т. е.

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} \tag{1}$$

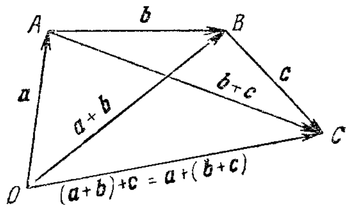
для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Действительно, если $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BC}$, то

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

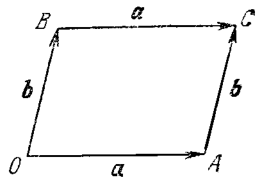
и

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Поэтому в сумме трех (или большего числа) векторов скобки можно не писать: символ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ имеет только одно значение.



Ассоциативность сложения векторов



Коммутативность сложения векторов

Операция сложения векторов также и коммутативна, т. е.

(2) $$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Действительно, если $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OC}$, то $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BC}$, и поэтому

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ рассматривается и при $A = B$. Такой вектор $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым*. Он не зависит от A и обозначается символом $\mathbf{0}$. Длина нулевого вектора, по определению, считается равной нулю, а направления он не имеет (можно также считать, что его направление какое угодно).

Формула

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

показывает, что вектор $\mathbf{0}$ является нулем сложения, т. е.

(3) $$\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

Переставив концевые точки вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, мы получим вектор $\overrightarrow{BA}$, который обозначается символом $-\boldsymbol{a}$.

Формула

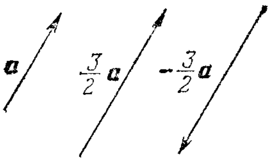
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

показывает, что *вектор* $-\boldsymbol{a}$ *является противоположным вектору* $\boldsymbol{a}$ *по отношению к сложению*, т. е.

$$(4) \qquad \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на (вещественное) число k называется вектор $k\boldsymbol{a}$, длина которого равна длине вектора $\boldsymbol{a}$, умноженной на абсолютную величину числа k, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$. В этом определении случаи $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ или $k = 0$ не исключаются. В каждом из них $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.



Умножение вектора на число

Определение умножения вектора на число согласовано с определением сложения в том смысле, что, как нетрудно видеть непосредственно по рисунку,

$$n\boldsymbol{a} = \underbrace{\boldsymbol{a} + \ldots + \boldsymbol{a}}_{n \text{ раз}}$$

для любого натурального n. Кроме того, ясно, что

$$(-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

Легко видеть, что

$$(5) \qquad (k + l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$$

и

$$(6) \qquad (kl)\,\boldsymbol{a} = k\,(l\boldsymbol{a})$$

для любых чисел k, l и любого вектора $\boldsymbol{a}$ (доказательство сводится к перечислению всех возможных случаев распределения знаков чисел k и l, в каждом из которых утверждение очевидно).

Далее, из того, что при гомотетии (и центральной симметрии) параллелограмм переходит в параллелограмм, непосредственно вытекает, что

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b} \tag{7}$$

для любого числа k и любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Наконец, очевидно, что

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{8}$$

для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

Установив эти наглядно-геометрические интуитивные факты, мы можем теперь обратить точку зрения и принять их за аксиомы. В этих аксиомах (см. ниже соотношения 1°—8°) по причине, которая вскоре выяснится, символом $\mathbb{K}$ обозначено множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Определение 1. Пусть $\mathscr{V}$ — некоторое множество, элементы которого мы будем называть *векторами*, хотя их природа может быть произвольной. Предположим, что любым двум векторам $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ и $\boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$ как-то сопоставлен третий вектор, обозначаемый символом $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и называемый *суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Кроме того, предположим, что любому числу $k \in \mathbb{K}$ и любому вектору $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ как-то сопоставлен новый вектор, обозначаемый символом $k\boldsymbol{a}$ и называемый *произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на число k. Если при этом выполнены перечисленные выше свойства (1)—(8), т. е. если

1° $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathscr{V}$;

2° $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$;

3° существует такой вектор $\boldsymbol{0} \in \mathscr{V}$, что $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$;

4° для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ существует такой вектор $-\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, что $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$;

5° $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$ для любых чисел $k, l \in \mathbb{K}$ и любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$;

6° $(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$ для любых чисел $k, l \in \mathbb{K}$ и любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$;

7° $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ для любого числа $k \in \mathbb{K}$ и любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$;

8° $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$,

то множество $\mathscr{V}$ называется *линейным* (или *векторным*) *пространством* (или, короче, *линеалом*).

При $k = \frac{1}{\lambda}$ вектор $k\boldsymbol{a}$ обозначается символом $\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}$.

Подчеркнем, что определение 1 не накладывает никаких ограничений на природу элементов множества $\mathscr{V}$ (векторов) и на конкретное воплощение операций $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longmapsto \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (сложение) и $(k, \boldsymbol{a}) \longmapsto k\boldsymbol{a}$ (умножение на число). Поэтому могут существовать (и действительно существуют) много различных линейных пространств.

Примеры.

1) Даже интуитивно-геометрические векторы (направленные отрезки), с которых мы начинали, позволяют построить несколько различных линеалов $\mathscr{V}$. Именно, можно рассматривать либо всевозможные векторы в пространстве, либо только векторы на плоскости, либо, наконец, лишь векторы на прямой. Это даст нам три различных линейных пространства.

2) Простейшим линеалом является линеал $\{\mathbf{0}\}$, состоящий лишь из одного нулевого вектора $\mathbf{0}$. Для упрощения обозначений мы будем этот линеал обозначать тем же символом $\mathbf{0}$, что и его единственный вектор. При минимальной внимательности это к недоразумениям привести не должно.

3) Пусть X — произвольное множество и $\mathscr{F}(X)$ — множество всех (вещественнозначных) функций, определенных на X. Определив сумму $f+g$ двух функций f и g и произведение kf функции f на число k обычным образом («по значениям»), т. е. формулами

$$(9) \qquad \begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad && x \in X, \\ (kf)(x) &= k(f(x)), && x \in X, \end{aligned}$$

мы без труда проверим, что все аксиомы 1°—8° будут выполнены. Это означает, что по отношению к операциям (9) множество $\mathscr{F}(X)$ является линеалом.

Таким образом, в этом примере «векторами» являются функции.

4) При $X=\mathbb{R}$ (или, более общо, при X, являющемся произвольным подмножеством числовой оси $\mathbb{R}$) имеет смысл говорить о множестве $\mathscr{C}(X)$ всех непрерывных функций, определенных на X. Из курса анализа известно, что сумма $f+g$ непрерывных функций и произведение kf непрерывной функции на число являются непрерывными функциями. Поэтому множество $\mathscr{C}(X)$ всех непрерывных функций является (по отношению к операциям (9)) линеалом (аксиомы 1°—8° можно не проверять, поскольку

$\mathscr{C}(X) \subset \mathscr{F}(X)$ и, значит, эти аксиомы выполнены автоматически).

Аналогичным образом, линеалами являются множества дифференцируемых (данное число раз) функций, множество функций, удовлетворяющих условию Липшица, и многие другие классы функций, с которыми имеет дело математический анализ.

Эти примеры так называемых «функциональных» линеалов объясняют, почему в современной теории функций понятие линеала играет, пожалуй, еще большую роль, чем в геометрии. По понятным причинам мы этими линеалами заниматься здесь не будем. Отдел математики, изучающий функциональные линеалы, называется «функциональным анализом». Его основы включены в курс «Анализ III».

5) Всевозможные многочлены (от одной переменной) также, очевидно, составляют линеал.

Линеалом будет, конечно, и совокупность всех многочленов, степень которых не превосходит данное число n. (Таким образом, в зависимости от n мы получаем бесконечно много различных линеалов.)

Мы видим, что линеалы играют первостепенную роль и в алгебре.

6) Пусть n — произвольное натуральное число. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n$ всех n-членных последовательностей $(a_1, \ldots, a_n)$ вещественных чисел. Определив векторные операции «покомпонентно», т. е. формулами

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$k(a_1, \ldots, a_n) = (ka_1, \ldots, ka_n),$$

мы, очевидно, превратим $\mathbb{R}^n$ в линеал.

Этот линеал в дальнейшем будет играть очень важную роль, и поэтому на него необходимо обратить особое внимание.

Замечание 1 (которое следует прочитать, когда в параллельном курсе алгебры будут введены поля и кольца). В определении 1 то обстоятельство, что $\mathbb{K}$ является множеством (полем) вещественных чисел, никак на самом деле не используется. Дословно та же формулировка будет иметь смысл, если под $\mathbb{K}$ понимать произвольное поле (даже конечной характеристики). В результате получается определение линейного (векторного) пространства *над полем* $\mathbb{K}$. При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ мы возвращаемся к прежним линейным пространствам.

Для определенности (и имея в виду геометрические приложения) мы будем в дальнейшем считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Однако на самом деле вся развиваемая далее теория (если только явно не оговорено противное) справедлива для произвольного поля $\mathbb{K}$.

Собственно говоря, определение 1 имеет смысл и тогда, когда $\mathbb{K}$ является всего лишь кольцом (с единицей), поскольку в аксиомах 1°—8° нигде не говорится о делении. В этом случае вводимый определением 1 объект называется *модулем* (над кольцом $\mathbb{K}$). Теория модулей существенно сложнее теории линеалов (из-за отсутствия деления), и заниматься ею мы не будем.

Замечание 2. Аксиомы 1°—4° означают, что по отношению к сложению линейное пространство $\mathscr{V}$ является абелевой (т. е. коммутативной) *группой*. Аксиомы же 5°—8° выражают тот факт, что поле (кольцо) $\mathbb{K}$ является полем (кольцом) *операторов* этой группы. Таким образом, можно сказать, что линеалы (модули) над $\mathbb{K}$ — это аддитивно записанные абелевы группы с полем (кольцом) операторов $\mathbb{K}$.

Лекция 2

Простейшие следствия аксиом линейного пространства. — Независимость суммы любого числа векторов от расстановки скобок. — Понятие семейства. — Линейная зависимость и независимость. — Линейно независимые множества. — Свойства линейной зависимости. — Теорема о линейной зависимости.

В теории линейных пространств геометрическая интуиция является неоценимым гидом и ею необходимо широко пользоваться как для геометрической интерпретации доказанных результатов, так и для формулирования новых теорем. Однако из доказательств ее следует тщательно изгонять и основывать их исключительно на аксиомах 1°—8°. Поэтому, в частности, прежде чем переходить к действительно интересным и важным понятиям и конструкциям, нам придется вывести из аксиом 1°—8° ряд геометрически очевидных следствий.

Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное линейное пространство.

1) Аксиома 3°, утверждая существование в $\mathscr{V}$ нулевого вектора, ничего не говорит о его единственности. Оказывается тем не менее, что *нулевой вектор существует только один*, т. е. если $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ — такие векторы из $\mathscr{V}$, что

$$\mathbf{0}_1 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \mathbf{0}_2 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, то $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Действительно, полагая $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}_1$ в соотношении $\mathbf{0}_2 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, мы получим, что $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1$, а полагая $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}_2$ в соотношении $\mathbf{0}_1 + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, мы получим, что $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$. Следовательно, $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. $\square$

2) Аналогично, хотя аксиома 4° ничего не говорит о единственности противоположного вектора $-\boldsymbol{a}$, *этот вектор единствен*, т. е. если

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0},$$

то $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Действительно,

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{0} + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \mathbf{0} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}. \quad \square$$

3) Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$ *уравнение*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$. Действительно, если $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, то

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$$

и, с другой стороны,

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})) = (\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})) + \boldsymbol{b} = 0 + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}. \quad \square$$

В дальнейшем вместо $\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a})$ мы будем писать $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

4) При умножении направленного отрезка $\boldsymbol{a}$ на число 0 получается, очевидно, нулевой вектор:

$$0\boldsymbol{a} = 0.$$

Легко видеть, что это верно и для любого вектора $\boldsymbol{a}$ произвольного линеала. Действительно,

$$0\boldsymbol{a} = (0 + 0)\,\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a},$$

и потому

$$0\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} - 0\boldsymbol{a} = 0. \quad \square$$

5) Аналогично,

$$k0 = 0$$

для любого $k \in \mathbb{K}$. Действительно,

$$k0 = k(0 + 0) = k0 + k0,$$

и потому

$$k0 = k0 - k0 = 0. \quad \square$$

6) Формула

$$(-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$$

также справедлива в любом линеале. Действительно,

$$\boldsymbol{a} + (-1)\,\boldsymbol{a} = 1\boldsymbol{a} + (-1)\,\boldsymbol{a} = (1 - 1)\,\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} = 0,$$

и поэтому, в силу единственности противоположного вектора, $(-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$. $\square$

Интересно, что аксиома 2° коммутативности сложения вытекает из остальных аксиом и единственности противоположного вектора. Действительно, в силу утверждения 6), в доказательстве которого использовалась лишь единственность противоположного вектора,

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-1)(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) =$$
$$= \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = 0,$$

и поэтому $\qquad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

Это означает, что «некоммутативных модулей» не существует.

7) Аксиома 1° утверждает, что сумма трех векторов не зависит от расстановки скобок, т. е. от порядка, в котором она вычисляется. Оказывается, что *аналогичное утверждение справедливо и для суммы любого числа слагаемых.* В отличие от предыдущих утверждений, доказательство этого утверждения не совсем тривиально и требует введения ряда вспомогательных понятий.

Складывая n слагаемых, мы при любой расстановке скобок производим $n—1$ сложений, причем одно и только одно сложение мы производим последним. Это означает, что при сложении n слагаемых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ для любой расстановки скобок существует такой однозначно определенный индекс k, $2 \leqslant k \leqslant n$, что сумма слагаемых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, отвечающая этой расстановке, имеет вид

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

где $\mathfrak{a}$ — сумма слагаемых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ (отвечающая некоторой расстановке скобок), а $\mathfrak{b}$ — сумма слагаемых $\boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ (также отвечающая некоторой расстановке скобок). При $k = 2$ сумма $\mathfrak{a}$ сводится к одному слагаемому $\boldsymbol{a}_1$, а при $k = 3$ является суммой $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ без скобок; аналогично, при $k = n$ сумма $\mathfrak{b}$ сводится к слагаемому $\boldsymbol{a}_n$, а при $k = n—1$ является суммой $\boldsymbol{a}_{n-1} + \boldsymbol{a}_n$ без скобок.

Этот индекс k мы назовем *рангом* рассматриваемой расстановки скобок (или соответствующей суммы).

Определим теперь по индукции сумму $n \geqslant 3$ слагаемых *с нормальной расстановкой скобок* (или, короче, *нормальную сумму*). При $n = 3$ такой суммой мы будем считать сумму $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_3$.

Пусть нормальная сумма $n - 1$ слагаемых уже определена. Тогда нормальной суммой n слагаемых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ мы назовем сумму вида $\mathfrak{a} + \boldsymbol{a}_n$, где $\mathfrak{a}$ — нормальная сумма $n - 1$ слагаемых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$.

Таким образом, нормальная сумма n слагаемых имеет вид

$$\underbrace{(\ldots((}_{n-2\ \text{скобок}}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_3) + \ldots) + \boldsymbol{a}_n.$$

Очевидно, нам достаточно доказать, что *сумма $n \geqslant 3$ слагаемых с произвольной расстановкой скобок равна сумме тех же слагаемых с нормальной расстановкой скобок.*

С этой целью мы проведем индукцию по числу n.

При $n = 3$ утверждение сводится к аксиоме 1°.

Пусть уже доказано, что каждая сумма не более чем $n - 1$ слагаемых равна их нормальной сумме. Рассмотрим произвольную сумму n слагаемых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Пусть k — ее ранг. Если $k < n$, то наша сумма имеет вид $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ — сумма не менее чем двух (и не более чем $n - 1$) слагаемых $\boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. В силу предположения индукции сумма $\mathfrak{b}$ не зависит от расстановки скобок, так что, не меняя окончательного результата, мы можем расставить в ней скобки как хотим (при $k = n - 1$ предположение индукции неприменимо, но в этом случае скобок в сумме $\mathfrak{b}$ вообще нет, так что и говорить не о чем).

В частности, мы можем считать, что

$$\mathfrak{b} = \boldsymbol{a}_k + \mathfrak{c},$$

где $\mathfrak{c}$ — некоторая (безразлично, с какой расстановкой скобок) сумма слагаемых $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ (при $k = n - 1$ — одно слагаемое $\boldsymbol{a}_n$). Но тогда, в силу аксиомы 1°,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (\boldsymbol{a}_k + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \boldsymbol{a}_k) + \mathfrak{c},$$

где справа получилась сумма ранга $k + 1$.

Таким образом, повышая шаг за шагом ранг, мы получим из данной суммы сумму ранга n, т. е. сумму вида $\mathfrak{a}' + \boldsymbol{a}_n$, где $\mathfrak{a}'$ — некоторая сумма $n - 1$ слагаемых. По предположению индукции последняя сумма равна нормальной сумме $\mathfrak{a}''$. Но тогда и данная сумма будет равна нормальной сумме $\mathfrak{a}'' + \boldsymbol{a}_n$. $\square$

В силу доказанного утверждения в сумме любого числа слагаемых скобки можно не писать.

Перейдем теперь к более содержательным понятиям и теоремам, имеющим нетривиальный геометрический смысл. Для этого нам понадобится общее понятие семейства элементов, которое стоит сейчас напомнить, поскольку его часто путают с понятием подмножества, что является ошибкой.

Пусть X — произвольное множество. *Семейством* (или *последовательностью*) n элементов множества X называется произвольное отображение

$$[1, \ldots, n] \to X \tag{1}$$

множества $[1, \ldots, n]$ первых n натуральных чисел в множество X.

Образ числа i, $1 \leqslant i \leqslant n$, при этом отображении обозначается обычно символом x_i и называется *i-м членом* семейства, а все семейство обозначается символом $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или просто $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Семейство (1), являющееся инъективным отображением, т е. такое, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, называется *семейством без повторений*. Оно определяет n-элементное подмножество в X, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Мы будем говорить, что это подмножество *отвечает* семейству (оно является не чем иным, как образом отображения (1)), а также что данное семейство получено некоторой *нумерацией* этого подмножества.

Очевидно, что для любого n-элементного подмножества существует $n!$ семейств без повторений, которым отвечает это подмножество. Мы будем говорить, что эти семейства получаются друг из друга посредством *перенумеровывания*.

Наконец, напомним, что *подсемейством* семейства $(x_1, \ldots, x_n)$ называется произвольное семейство вида $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — произвольное семейство векторов линейного пространства $\mathscr{V}$.

Определение 1*. Линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *с коэффициентами* $k_1, \ldots, k_m$ называется вектор

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m. \tag{2}$$

Об этом векторе говорят также, что он *линейно выражается* через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Ясно, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ линейно выражается через любые векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ (достаточно положить $k_1 = 0, \ldots, k_m = 0$).

Определение 2. Линейная комбинация (2) называется *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов $k_1, \ldots, k_m$ отличен от нуля. В противном случае линейная комбинация называется *тривиальной*.

Ясно, что тривиальная линейная комбинация произвольного семейства векторов равна нулю (является нулевым вектором).

Определение 3. Семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется *линейно зависимым*, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, т. е. если существуют такие числа $k_1, \ldots, k_m$, не все равные нулю, что

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}.$$

В противном случае семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называется *линейно независимым*.

Чтобы избежать частого и докучливого рассмотрения отдельных случаев, удобно к классу линейно независимых семейств векторов добавить *пустое семейство* векторов, отвечающее случаю $m = 0$. Таким образом, по определению *пустое семейство линейно независимо*. Это, быть может, несколько парадоксальное определение вполне удовлетворительно согласуется со всеми утверждениями, касающимися непустых семейств.

Ясно, что *любое семейство с повторениями линейно зависимо*. Действительно, если, например, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$, то

$$1\boldsymbol{a}_1 + (-1)\boldsymbol{a}_2 + 0\boldsymbol{a}_3 + \ldots + 0\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0},$$

и два коэффициента этой линейной комбинации отличны от нуля. □

Пусть теперь $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — произвольное семейство без повторений и $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ — семейство, которое получено некоторым его перенумеровыванием (так что обоим семействам отвечает одно и то же множество векторов). Очевидно, что семейство $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ тогда и только тогда линейно зависимо, когда линейно зависимо семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Это обеспечивает корректность следующего определения:

Определение 4. Конечное подмножество линейного пространства $\mathscr{V}$ называется *линейно* (*не*)*зависимым*, если хотя бы при одной (и, значит, каждой) нумерации его элементов получается линейно (не)зависимое семейство.

Согласно сказанному выше *пустое множество линейно независимо*. Что же касается *одноэлементного подмножества* (состоящего из одного вектора $\boldsymbol{a}$), то *оно линейно независимо тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Действительно, если $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, где $k \neq 0$, то $\boldsymbol{a} = k^{-1}(k\boldsymbol{a}) = k^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, а если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то, например, $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. □

Установим теперь несколько простых, но полезных свойств введенных понятий.

1) *Если вектор* $\boldsymbol{a}$ *линейно выражается через векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *и если каждый вектор* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *линейно выражается через векторы* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, *то вектор* $\boldsymbol{a}$ *линейно выражается через векторы* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Доказательство очевидно. □

Это свойство называется **транзитивностью** линейной выражаемости.

2) *Семейство (множество) векторов, обладающее линейно зависимым подсемейством (подмножеством), линейно зависимо.*

Достаточно добавить к равной нулю нетривиальной линейной комбинации векторов подсемейства все остальные векторы семейства, снабдив их нулевыми коэффициентами. □

Это свойство оправдывает следующее определение, которое иногда бывает полезно:

Определение 5. Бесконечное множество векторов называется *линейно зависимым*, если оно обладает конечным линейно зависимым подмножеством, и *линейно независимым*, если любое его конечное подмножество линейно независимо.

3) *Семейство (множество) векторов, содержащее нулевой вектор, линейно зависимо.*

Действительно, чтобы получить равную нулю нетривиальную линейную комбинацию, достаточно нулевой вектор снабдить коэффициентом 1, а все остальные векторы — коэффициентами 0. Можно также сослаться на свойство 2), поскольку нулевой вектор составляет линейно зависимое семейство. □

4) *Семейство (множество) векторов тогда и только тогда линейно зависимо, когда хотя бы один из его векторов линейно выражается через остальные.*

Действительно, если

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0},$$

где, например, $k_1 \neq 0$, то

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\boldsymbol{a}_m.$$

Обратно, если

$$\boldsymbol{a}_1 = l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_m\boldsymbol{a}_m,$$

то

$$(-1)\,\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0},$$

где $-1 \neq 0$. □

Для семейств (но, конечно, не для множеств) векторов имеет место и более точный результат:

5) *Семейство векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *тогда и только тогда линейно зависимо, когда некоторый вектор* $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *этого семейства линейно выражается через предыдущие векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}$.

Доказательство. Если вектор $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}$ (при $i = 1$, в соответствии с принятым выше общим соглашением, это означает, что $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$), то семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i$ линейно зависимо (свойство 4)), а потому (свойство 2)) линейно зависимо и семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Обратно, пусть семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимо. Тогда существует такое наименьшее i, $1 \leqslant i \leqslant m$, что семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i$ линейно зависимо ($i = 1$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$). Пусть

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

— равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i$. Ясно, что $k_i \neq 0$, ибо при $k_i = 0$ получится, что, вопреки предположению, линейно зависимо семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}$. Поэтому на k_i можно делить, и мы получаем, что

$$\boldsymbol{a}_i = \left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\boldsymbol{a}_{i-1}. \quad \square$$

6) *Семейство векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *тогда и только тогда линейно независимо, когда любой вектор, линейно выражающийся через эти векторы, выражается через них единственным образом.*

Действительно, пусть вектор $\boldsymbol{a}$ двумя разными способами выражается через данные векторы:

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m,$$
$$\boldsymbol{a} = l_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + l_m\boldsymbol{a}_m,$$

где $k_i \neq l_i$ хотя бы для одного $i = 1, \ldots, m$. Тогда, вычитая одно равенство из другого, мы получим равную нулю нетривиальную линейную комбинацию

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (k_m - l_m)\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Обратно, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0},$$

то любой вектор

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_m\boldsymbol{a}_m,$$

линейно выражающийся через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, можно будет выразить через эти векторы и другим способом:

$$\boldsymbol{a} = (k_1 + \lambda_1)\,\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (k_m + \lambda_m)\,\boldsymbol{a}_m. \quad \square$$

Все эти свойства линейной зависимости более или менее тривиальны. Следующее же свойство, напротив, отнюдь не тривиально. Чтобы отметить этот факт, мы возведем его в ранг теоремы.

Теорема 1 (о линейной зависимости). *Пусть каждый вектор семейства*

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \tag{3}$$

линейно выражается через векторы

$$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n. \tag{4}$$

Тогда, если $m > n$, то семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимо.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма. *Предполагая по-прежнему, что каждый вектор семейства* (3) *линейно выражается через векторы* (4), *допустим, что семейство* (3) *линейно независимо. Тогда для любого $s = 0, \ldots, n$ существует семейство векторов*

$$\boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_n^{(s)}, \tag{5}$$

обладающее следующими свойствами:

а) *каждый вектор семейства* (3) *линейно выражается через векторы* (5);

б) *первые s векторов семейства* (5) *совпадают с первыми s векторами семейства* (3):

$$\boldsymbol{c}_1^{(s)} = \boldsymbol{a}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{c}_s^{(s)} = \boldsymbol{a}_s.$$

Мы докажем эту лемму индукцией по числу s. При $s = 0$ она очевидна (за семейство (5) можно принять семейство (4)). Пусть она уже доказана для числа s; докажем ее для числа $s + 1$. Рассмотрим семейство

$$\boldsymbol{a}_{s+1}, \boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_n^{(s)}. \tag{6}$$

Это семейство линейно зависимо, ибо вектор $\boldsymbol{a}_{s+1}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_n^{(s)}$. Поэтому, согласно свойству 5) линейной зависимости, какой-то вектор семейства (6) линейно выражается через предыдущие векторы. Этим вектором не может быть первый вектор a_{s+1}, ибо он отличен от нуля (семейство (3) по условию линейно независимо). Значит, он является одним из векторов $c_1^{(s)}, \ldots, c_n^{(s)}$. Этим доказано, что существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что вектор $c_i^{(s)}$ линейно выражается через векторы $a_{s+1}, c_1^{(s)}, \ldots, c_{i-1}^{(s)}$.

Удалив теперь из семейства (6) вектор $c_i^{(s)}$ и переставив вектор a_{s+1} на $(s+1)$-е место, обозначим полученные векторы через

$$c_1^{(s+1)}, \ldots, c_n^{(s+1)}. \tag{7}$$

Так как семейства (6) и (7) отличаются лишь на вектор $c_i^{(s)}$, то все векторы, линейно выражающиеся через семейство (6), линейно выражаются и через семейство (7). Следовательно, семейство (7) удовлетворяет условию а).

Далее, легко видеть, что $i > s$. (Действительно, если $i \leqslant s$, то вектор $c_i^{(s)} = a_i$ будет выражаться через векторы

$$a_{s+1}, \ a_1 = c_1^{(s)}, \ \ldots, \ a_{i-1} = c_{i-1}^{(s)}$$

и семейство (3) окажется, вопреки предположению, линейно зависимым). Но, если $i > s$, то первыми s векторами семейства (7) будут первые s векторов $a_1, \ldots, a_s$ семейства (5). Так как, кроме того, по условию, $(s+1)$-м вектором семейства (7) является вектор a_{s+1}, то мы видим, что семейство (7) удовлетворяет по отношению к числу $s+1$ и условию б).

Тем самым лемма 1 по индукции полностью доказана. □

Доказательство теоремы 1. Предположим, что теорема неверна, т. е. что в ее условиях семейство (3) линейно независимо. Тогда к этому семейству будет применима доказанная лемма. Но при $s = n$ эта лемма дает, что каждый вектор семейства (3), и, в частности вектор a_m, линейно выражается через векторы $c_1^{(n)} = a_1, \ldots, c_n^{(n)} = a_n$. Поскольку $m > n$, это означает, что семейство (1) линейно зависимо. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Другое доказательство теоремы 1. Из курса алгебры известно, что система линейных однородных уравнений, число неизвестных которой больше числа уравнений, обязательно имеет ненулевое решение.

Из этого утверждения теорема 1 вытекает почти автоматически. Действительно, по условию существуют такие числа

$$\begin{matrix} k_{11}, & \ldots, & k_{1n}, \\ k_{21}, & \ldots, & k_{2n}, \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ k_{m1}, & \ldots, & k_{mn}, \end{matrix}$$

что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= k_{11}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + k_{1n}\boldsymbol{b}_n, \\ \boldsymbol{a}_2 &= k_{21}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + k_{2n}\boldsymbol{b}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_m &= k_{m1}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + k_{mn}\boldsymbol{b}_n. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \ldots + k_{m1}x_m &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ k_{1n}x_1 + k_{2n}x_2 + \ldots + k_{mn}x_m &= 0. \end{aligned}$$

Так как по условию $m > n$, то по указанной алгебраической теореме существуют числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, не все равные нулю, удовлетворяющие этим уравнениям. Но тогда

$$\begin{aligned} &x_1^{(0)}\boldsymbol{a}_1 + x_2^{(0)}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_m^{(0)}\boldsymbol{a}_m = \\ &= x_1^{(0)}(k_{11}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + k_{1n}\boldsymbol{b}_n) + x_2^{(0)}(k_{21}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + k_{2n}\boldsymbol{b}_n) + \ldots \\ &\qquad \ldots + x_m^{(0)}(k_{m1}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + k_{mn}\boldsymbol{b}_n) = \\ &\qquad = (k_{11}x_1^{(0)} + k_{21}x_2^{(0)} + \ldots + k_{m1}x_m^{(0)})\boldsymbol{b}_1 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (k_{1n}x_1^{(0)} + k_{2n}x_2^{(0)} + \ldots + k_{mn}x_m^{(0)})\boldsymbol{b}_n = \\ &\qquad\qquad = 0\boldsymbol{b}_1 + \ldots + 0\boldsymbol{b}_n = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимо. □

Здесь, конечно, вся тяжесть доказательства переложена на плечи алгебры.

Лекция 3

Коллинеарные векторы. — Компланарные векторы. — Геометрический смысл коллинеарности и компланарности. — Полные семейства векторов, базисы, размерность. — Аксиома размерности. — Критерий базиса. — Координаты вектора. — Обозначения для сумм. — Свойства сумм. — Координаты суммы векторов и произведения вектора на число.

В предыдущей лекции мы установили, что одноэлементное множество векторов тогда и только тогда линейно независимо, когда оно состоит из отличного от нуля вектора. Рассмотрим теперь аналогичный вопрос для двух- и трехэлементных множеств.

Определение 1. Два вектора называются *коллинеарными*, если они составляют линейно зависимое множество.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — коллинеарные векторы. По условию существуют такие числа k и l, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что

$$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

Если $k \neq 0$, то $\boldsymbol{a}=h\boldsymbol{b}$, где $h=-\frac{l}{k}$, а если $l \neq 0$, то $\boldsymbol{b}=h\boldsymbol{a}$, где $h=-\frac{k}{l}$. Ясно, что, и обратно, если $\boldsymbol{a}=h\boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{b}=h\boldsymbol{a}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны.

Определение 2. Говорят, что вектор $\boldsymbol{b}$ *пропорционален* вектору $\boldsymbol{a}$, если существует такое число h, что $\boldsymbol{b}=h\boldsymbol{a}$.

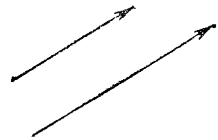
Мы, таким образом, доказали, что *два вектора тогда и только тогда коллинеарны, когда хотя бы один из них пропорционален другому.* □

Полезно иметь в виду, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отличны от нуля и первый пропорционален второму, то и второй пропорционален первому. Оговорка «хотя бы один» нужна, следовательно, только для того, чтобы не исключить случай, когда один (и только один) из данных векторов равен нулю.

Определение 3. Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называются *компланарными*, если они составляют линейно зависимое множество.

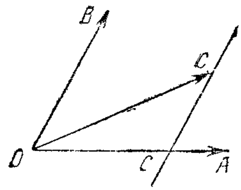
Согласно общей теории (см. в предыдущей лекции свойство 4)) векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ тогда и только тогда компланарны, когда один из них линейно выражается через остальные. При этом, если никакие два из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ не коллинеарны, то каждый из этих векторов будет выражаться через остальные. Если же, например, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны при произвольном векторе $\boldsymbol{c}$.

Наглядно-геометрически коллинеарность означает, очевидно, что оба вектора параллельны одной и той же прямой или (что то же самое) расположены на одной и той же прямой. Что геометрически означает компланарность?



Коллинеарные векторы

Пусть векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ не коллинеарны. Тогда три точки O, A, B определяют единственную плоскость. Этой плоскости принадлежат векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, а потому и любой вектор $\boldsymbol{c}$ вида $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$. Таким образом, если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны, то все они лежат в некоторой плоскости (или, что то же самое, параллельны ей). Ясно, что этот вывод сохранится и в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны.



Векторы, лежащие в одной плоскости

Обратно, пусть три вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ расположены в одной плоскости. Докажем, что они компланарны. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, доказывать нечего. Поэтому мы можем считать, что векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ не коллинеарны и потому определена плоскость OAB. По условию точка C лежит в этой плоскости. Прямая, проходящая через точку C параллельно прямой OB, пересекает прямую OA в некоторой (единственной) точке C_1. По определению сложения векторов

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C}.$$

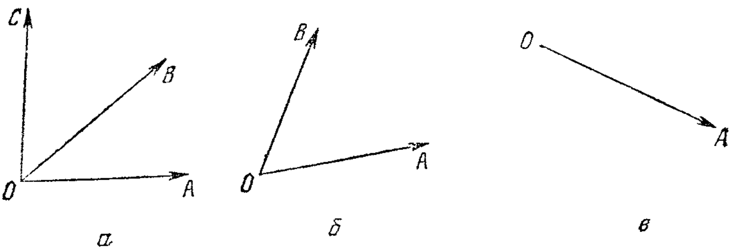
Но вектор $\overrightarrow{OC_1}$ параллелен вектору $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и потому ему пропорционален, так что $\overrightarrow{OC_1} = l.\boldsymbol{a}$.

Аналогично, $\overrightarrow{C_1C} = lb$. Тем самым доказано, что

$$c = ka + lb,$$

т. е. что векторы a, b и c компланарны. □

Если мы возьмем теперь четыре точки O, A, B и C, не лежащие в одной плоскости, то, по доказанному, векторы $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $c = \overrightarrow{OC}$ будут линейно независимы. Таким образом, в пространстве существуют линейно независимые тройки векторов.



Линейно независимые векторы: *а* — в пространстве, *б* — на плоскости, *в* — на прямой

Аналогично, на плоскости существуют линейно независимые пары векторов (достаточно взять три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой), а на прямой — линейно независимые одноэлементные множества векторов (достаточно взять любые две различные точки O и A).

При этом любые два вектора на прямой, так же как и любые три вектора на плоскости, будут линейно зависимы. Аналогичным образом, будут линейно зависимы и любые четыре вектора в пространстве.

Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда из четырех векторов

$$a = \overrightarrow{OA}, \quad b = \overrightarrow{OB}, \quad c = \overrightarrow{OC}, \quad d = \overrightarrow{OD}$$

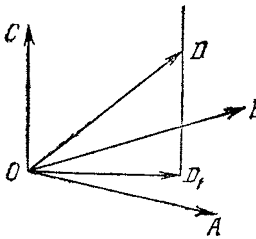
первые три вектора a, b, c не компланарны, т. е. точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости (и потому точки O, A, B не лежат на одной прямой). Тогда прямая, проходящая через точку D параллельно прямой OC, будет пересекать плоскость OAB в некоторой (однозначно определенной) точке D_1. Так как векторы a, b и $\overrightarrow{OD_1}$ компланарны, а векторы a и b не коллинеарны, то вектор $\overrightarrow{OD_1}$

линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Следовательно, поскольку

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D}$$

и поскольку вектор $\overrightarrow{D_1D}$ пропорционален, по построению, вектору $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, вектор $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Чтобы единообразно сформулировать полученные результаты, мы положим $n = 3$, если мы рассматриваем геометрию в пространстве (стереометрию), и $n = 2$, если мы ограничиваемся геометрией плоскости (планиметрией). Тогда, согласно доказанному, будут иметь место следующие утверждения:



Четыре вектора в пространстве

1. *Любое семейство векторов, состоящее более чем из n векторов, линейно зависимо.*

2. *Существуют линейно независимые семейства векторов, состоящие из n векторов.*

Для векторов на прямой эти утверждения справедливы при $n = 1$.

Утверждения 1 и 2 не вытекают из аксиом 1°—8° векторного пространства. Поэтому в аксиоматическом построении геометрии надо либо принять их за аксиомы, либо ввести какую-то другую аксиому, с помощью которой можно их доказать.

Чтобы сформулировать эту аксиому, удобно ввести следующее определение:

Определение 4. Семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ векторов линеала $\mathscr{V}$ называется *полным*, если любой вектор из $\mathscr{V}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Легко видеть, что *если полное семейство векторов линейно зависимо, то из него можно удалить один вектор так, чтобы оставшееся семейство было также полно.*

Действительно, если семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимо, то хотя бы один его вектор линейно выражается через остальные. Пусть для определенности это — вектор $\boldsymbol{a}_m$. Тогда каждый вектор семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ будет линейно выражаться через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$, и потому, в силу свойства транзитивности линейной зависимости (см. в лекции 2 свойство 1)), любой вектор, линейно выражающийся через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, будет линейно выражаться и через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$. Следовательно, если семейство векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ полно, то семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$ также полно. □

Определение 5. Линеал $\mathscr{V}$, в котором существуют (конечные) полные семейства векторов, называется *конечномерным*.

В силу только что доказанного утверждения *в любом конечномерном линеале $\mathscr{V}$ существуют полные линейно независимые семейства векторов.* Действительно, чтобы получить такое семейство, достаточно из произвольного полного семейства удалить необходимое число векторов, следя за тем, чтобы полнота сохранялась.

Определение 6. Каждое полное линейно независимое семейство векторов называется *базисом* линеала $\mathscr{V}$.

Подчеркнем, что, по определению, базисом является именно семейство (а не множество) векторов. Вместе с тем и полнота, и линейная независимость сохраняются при любом перенумеровывании (любой перестановке) векторов базиса. Поэтому, переставив векторы базиса, мы снова получим базис, но другой.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — некоторый базис, а $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — произвольное семейство векторов линеала $\mathscr{V}$.

Предложение 1. *Если семейство* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$

а) *линейно независимо, то* $m \leqslant n$;

б) *полно, то* $m \geqslant n$.

Доказательство. Так как базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ является полным семейством векторов, то любой вектор семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно через него выражается. Следовательно, по теореме 1 лекции 2, если семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независимо, то $m \leqslant n$.

Если семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ полно, то любой вектор базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно через него выражается. Так как базис является линейно независимым семейством векторов, то $m \geqslant n$ по той же теореме 1. □

Следствие. *Все базисы конечномерного линеала $\mathscr{V}$ состоят из одного и того же числа векторов.*

Определение 7. Это число называется *размерностью* линеала $\mathscr{V}$ и обозначается символом $\dim \mathscr{V}$.

Если $\dim \mathscr{V} = n$, то линеал $\mathscr{V}$ называется *n-мерным* и обыкновенно обозначается символом $\mathscr{V}^n$.

Заметим, что $\dim \mathscr{V} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{V} = 0$.

Теперь мы уже можем сформулировать дополнительную аксиому 9°. В этой аксиоме фигурирует некоторое натуральное число n, которое мы считаем равным либо 3 («стереометрический» вариант), либо 2 («планиметрический» вариант). Впрочем, формально возможен и случай $n = 1$ (когда получается тривиальная «геометрия прямой») и даже совсем уже вырожденный случай $n = 0$ («геометрия точки»).

Аксиома 9° (аксиома размерности). *Линеал $\mathscr{V}$ конечномерен и* $\dim \mathscr{V} = n$.

Заметим, что в таком линеале сформулированные выше утверждения 1 и 2 очевидным образом справедливы. Действительно, утверждение 1 равносильно пункту а) предложения 1, а утверждение 2 является не чем иным, как утверждением о существовании базисов.

В n-мерном линеале каждый базис

а) состоит из n векторов,

б) является полным семейством,

в) является линейно независимым семейством.

Замечательно, что при выполнении для некоторого семейства векторов свойства а) каждое из свойств б) и в) вытекает из другого:

Предложение 2. *Семейство векторов n-мерного линеала $\mathscr{V}$, состоящее из n векторов, тогда и только тогда является базисом, когда оно либо полно, либо линейно независимо.*

Доказательство. Нужно показать, что если семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ полно, то оно также и линейно независимо, а если линейно независимо, то также и полно.

Но если семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ полно и линейно зависимо, то мы можем, удалив из него подходящий вектор, получить полное семейство, состоящее из $n-1$ векторов, что, в силу пункта б) предложения 1, невозможно. Следовательно, полное семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимо.

Пусть теперь семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимо. Нам нужно показать, что оно полно, т. е. что любой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ через него выражается. Рассмотрим с этой целью семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}$. Оно содержит $n+1$ векторов и потому (пункт а) предложения 1) линейно зависимо. Следовательно, один из векторов этого семейства линейно выражается через предыдущие. Так как семейство $e_1, \ldots, e_n$, по условию, линейно независимо, то этим вектором может быть только вектор a. □

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис линейного пространства $\mathscr{V}$. Тогда для любого вектора $a \in \mathscr{V}$ существуют такие однозначно определенные числа $a^1, \ldots, a^n$ (где верхние индексы являются номерами, а не показателями степени), что

$$a = a^1 e_1 + \ldots + a^n e_n. \tag{1}$$

Существование чисел $a^1, \ldots, a^n$ обеспечивается полнотой базиса, а их единственность — его линейной независимостью.

Определение 8. Числа $a^1, \ldots, a^n$ называются *координатами* вектора a в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Говорят, что формула (1) дает *разложение вектора a по базису $e_1, \ldots, e_n$.*

Замечание об обозначениях. В математике часто рассматриваются суммы вида

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{2}$$

Такая сумма сокращенно обозначается через

$$\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3}$$

Индекс i в формуле (3) называется *индексом суммирования* (пробегающим значения от 1 до n; можно, конечно, рассматривать суммы, для которых индекс суммирования пробегает и другие значения).

Важно иметь в виду, что индекс i может быть заменен в (3) любой другой буквой (скажем j), так что, например, формула

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \tag{4}$$

обозначает *ту же* сумму (2), что и (3). Говорят, что (4) получено из (3) *переименованием* индекса суммирования.

Про это свойство иногда говорят, что индекс суммирования является *немым*.

В введенных обозначениях формула разложения (1) приобретает вид

$$a = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i.$$

По предложению Эйнштейна эта формула записывается без знака суммы $\sum$, т. е. в виде

$$a = a^i e_i. \tag{5}$$

Эта сокращенная запись оказывается очень удобной.

[Вообще, знак суммы опускается, если в общем члене суммы индекс суммирования повторяется два, — и только два! — раза, причем один раз вверху, а другой раз внизу.]

Стоит иметь в виду следующие две формулы для сумм:

$$k \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} kx_i, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a^i + b^i) x_i = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i + \sum_{i=1}^{n} b^i x_i. \tag{7}$$

[Формула (6) выражает свойство дистрибутивности сложения относительно умножения

$$k(x_1 + \ldots + x_n) = kx_1 + \ldots + kx_n,$$

а доказательство формулы (7) сводится к следующей выкладке:

$$\begin{aligned}(a^1 + b^1) x_1 + \ldots + (a^n + b^n) x_n &= \\ = a^1 x_1 + b^1 x_1 + \ldots + a^n x_n + b^n x_n &= \\ = (a^1 x_1 + \ldots + a^n x_n) + (b^1 x_1 + \ldots + b^n x_n)&,\end{aligned}$$

в которой кроме дистрибутивности используются также коммутативность и ассоциативность сложения.]

В сокращенных обозначениях Эйнштейна формула (7) приобретает вид

$$(a^i + b^i) x_i = a^i x_i + b^i x_i, \tag{8}$$

по форме тождественный с законом дистрибутивности.

Обратим внимание также на эйнштейнову формулу

$$k(a^i b_i) = (ka^i) b_i, \tag{9}$$

по форме совпадающую с законом ассоциативности умножения. В несокращенной форме она имеет вид

$$k\sum_{i=1}^{n} a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} (ka^i)\, b_i$$

и, переписанная в виде

$$k\sum_{i=1}^{n} a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} k\,(a^i b_i),$$

оказывается частным случаем формулы (6).

Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два вектора линеала $\mathscr{V}$, а

$$a^1, \ \ldots, \ a^n \quad \text{и} \quad b^1, \ \ldots, \ b^n$$

— их координаты (в одном и том же базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$). Тогда, согласно формуле (5) и формуле (8) (обобщенной на случай векторных слагаемых),

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = a^i\boldsymbol{e}_i + b^i\boldsymbol{e}_i = (a^i + b^i)\,\boldsymbol{e}_i =$$
$$= (a^1 + b^1)\,\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (a^n + b^n)\,\boldsymbol{e}_n,$$

так что координатами вектора $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ оказываются суммы

$$a^1 + b^1, \ \ldots, \ a^n + b^n$$

координат векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (короче: *при сложении векторов их координаты с одинаковыми номерами складываются*).

Аналогично, для любого вектора $\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{e}_i$ и любого числа k

$$k\boldsymbol{a} = k\,(a^i\boldsymbol{e}_i) = (ka^i)\,\boldsymbol{e}_i = (ka^1)\,\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (ka^n)\,\boldsymbol{e}_n,$$

так что *при умножении вектора на число его координаты умножаются на то же число.*

Лекция 4

Изоморфизмы линейных пространств. — Координатные изоморфизмы. — Изоморфность линейных пространств одной и той же размерности. — Метод координат. — Аффинные пространства. — Изоморфность аффинных пространств одной и той же размерности. — Аффинные координаты. — Прямые в аффинном пространстве. — Отрезки.

Установленные в конце предыдущей лекции свойства координат могут быть сформулированы в более инвариантных терминах.

Определение 1. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ — два линейных пространства. Биективное отображение

$$\varphi: \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$$

пространства $\mathscr{V}$ на пространство $\mathscr{V}'$ называется *изоморфизмом*, если оно сумму переводит в сумму и произведение на число в произведение на то же число, т. е. если

$$\varphi(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$$

и

$$\varphi(k\boldsymbol{a}) = k\varphi(\boldsymbol{a})$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$ и любого числа k.

Линейные пространства $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ называются *изоморфными*, если существует хотя бы один изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$. В этом случае пишут $\mathscr{V} \approx \mathscr{V}'$.

Ясно, что тождественное отображение $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ является изоморфизмом, отображение, обратное к изоморфизму, является изоморфизмом и композиция (произведение) изоморфизмов является изоморфизмом. Отсюда следует, что отношение изоморфности является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно ($\mathscr{V} \approx \mathscr{V}$), симметрично (если $\mathscr{V} \approx \mathscr{V}'$, то $\mathscr{V}' \approx \mathscr{V}$) и транзитивно (если $\mathscr{V} \approx \mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}' \approx \mathscr{V}''$, то $\mathscr{V} \approx \mathscr{V}''$). Поэтому совокупность всех линейных пространств (над данным полем $\mathbb{K}$) распадается в непересекающиеся классы изоморфных пространств.

В аксиоматической теории векторных пространств мы интересуемся (и можем интересоваться) лишь теми их свойствами, которые могут быть выражены в терминах операций сложения и умножения на числа. Ясно, что такого рода свойства у двух изоморфных пространств одинаковы. Поэтому в аксиоматической теории изоморфные пространства рассматриваются как одинаковые. Это позволяет применять утверждения, доказанные для одного пространства, ко всем пространствам, ему изоморфным. На этом обстоятельстве и основан, в сущности, метод координат, на котором базируется аналитическая геометрия.

Действительно, координаты $a^1, \ldots, a^n$ каждого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ (в данном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$) составляют последовательность $(a^1, \ldots, a^n)$, являющуюся элементом пространства $\mathbb{R}^n$ (а в случае произвольного основного поля $\mathbb{K}$ — элементом аналогично строящегося пространства $\mathbb{K}^n$). Поэтому формула

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = (a^1, \ldots, a^n) \tag{1}$$

определяет некоторое, очевидно биективное, отображение

$$\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathbb{R}^n.$$

Тот факт, что координаты суммы равны суммам координат, выражается формулой

$$\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b}),$$

а тот факт, что координаты вектора $k\boldsymbol{a}$ равны произведениям координат вектора $\boldsymbol{a}$ на k, — формулой

$$\varphi(k\boldsymbol{a}) = k\varphi(\boldsymbol{a}).$$

Таким образом, мы видим, что отображение $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathbb{R}^n$ является изоморфизмом.

Определение 2. Изоморфизм, задаваемый формулой (1), называется *координатным изоморфизмом*, определенным базисом $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Особую роль в пространстве $\mathbb{R}^n$ играют n векторов

$$\begin{gathered}(1, 0, 0, \ldots, 0),\\ (0, 1, 0, \ldots, 0),\\ (0, 0, 1, \ldots, 0),\\ \ldots\ldots\ldots\\ (0, 0, 0, \ldots, 1).\end{gathered}$$

Ясно, что они составляют базис (называемый *стандартным базисом* пространства $\mathbb{R}^n$), причем координатами произвольного вектора $(a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ в этом базисе являются как раз его компоненты $a^1, \ldots, a^n$, т. е.

$$(a^1, \ldots, a^n) =$$
$$= a^1(1, 0, \ldots, 0) + a^2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + a^n(0, 0, \ldots, 1).$$

Координатный изоморфизм (1), очевидно, однозначно характеризуется как изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathbb{R}^n$, переводящий данный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ в стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что *любой изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathbb{R}^n$ является координатным изоморфизмом, соответствующим некоторому базису* (а именно базису, состоящему из векторов, переходящих при данном изоморфизме в векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$).

Факт существования изоморфизмов $\mathscr{V} \to \mathbb{R}^n$ означает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Каждое n-мерное линейное пространство $\mathscr{V}^n$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$.* $\square$

В частности, мы видим, что *любые два линейных пространства одной и той же размерности изоморфны* (и, конечно, разной размерности не изоморфны).

Таким образом, хотя различных линейных пространств существует необозримо много, классов изоморфных пространств имеется только счетное число. При этом для любого целого неотрицательного $n \geqslant 0$ существует один и только один такой класс; он состоит из всех n-мерных линейных пространств.

Каждый изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ двух линейных пространств определяется двумя базисами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ этих пространств и переводит вектор $\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i$ в вектор $\boldsymbol{x}' = x^i\boldsymbol{e}'_i$, имеющий в базисе $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ те же координаты, что и вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. На этом основании иногда говорят, что изоморфизм φ устанавливается *по равенству координат.*

Координатный метод аналитической геометрии (применительно к линейным пространствам) в том и состоит, что посредством координатного изоморфизма (1) произвольное линейное пространство $\mathscr{V}$ заменяется вполне конкретным пространством $\mathbb{R}^n$. Извлекаемая из этого польза состоит в том, что при доказательстве теорем в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы можем пользоваться всей аналитической техникой обращения с числами, что, конечно, существенно упрощает доказательства и часто позволяет доказывать теоремы почти автоматическим вычислением (тогда как вывод их из аксиом, т. е., как говорят, их «синтетическое» доказательство, почти всегда требует определенной изобретательности).

Однако при этом нужно быть внимательным и следить за тем, чтобы окончательный вывод имел «геометрический смысл», т. е. формулировался только в терминах основных операций и потому посредством обратного изоморфизма φ^{-1}: $\mathbb{R}^n \to \mathscr{V}$ мог быть перенесен в исходное пространство $\mathscr{V}$. Если это условие не соблюдено, то доказанное в $\mathbb{R}^n$ утверждение, вообще говоря, даже не имеет смысла в $\mathscr{V}$ (безотносительно к выбору базиса).

Все дело здесь в том, что *изоморфизм* (1) *зависит от выбора базиса*, и потому, работая в $\mathbb{R}^n$, мы автоматически включаем в исследование этот базис. «Геометрический смысл» имеют только те утверждения, которые от произвола в выборе базиса не зависят. Таково, например, утверждение, что некоторый вектор равен нулю, но отнюдь не утверждение, что равна нулю его первая координата.

Заманчивая мысль полностью алгебраизировать геометрию, отождествив раз и навсегда посредством изоморфизма (1) каждое линейное пространство $\mathscr{V}^n$ с пространством $\mathbb{R}^n$, потому и не проходит, что это отождествление осуществляется с большим произволом, ограничить который как-либо не представляется возможным.

Для построения полноценной геометрии одних векторов, конечно, недостаточно; как минимум нужны еще точки. Аксиоматизируя построение вектора по двум точкам, мы введем следующее определение:

Определение 3. *Аффинное пространство* — это множество $\mathscr{A}$ элементов произвольной природы, называемых *точками*, для которого задано

а) некоторое линейное пространство $\mathscr{V}$;

б) отображение, сопоставляющее любым двум точкам $A, B \in \mathscr{A}$ некоторый вектор из $\mathscr{V}$, обозначаемый символом $\overrightarrow{AB}$ и называемый вектором с *началом* в A и *концом* в B.

При этом требуется выполнение следующих двух аксиом:

10°. Для любой точки $A \in \mathscr{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ существует единственная точка $B \in \mathscr{A}$, для которой

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}.$$

11°. Для любых трех точек $A, B, C \in \mathscr{A}$ имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Полагая в аксиоме 11° $A = B = C$, мы получим, как и следовало ожидать, что $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. Полагая теперь $C = A$, мы получим, что $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Линейное пространство $\mathscr{V}$ называется *ассоциированным* с аффинным пространством $\mathscr{A}$. Говорят также, что $\mathscr{V}$ является *пространством трансляций* аффинного пространства $\mathscr{A}$. (Основания для такой терминологии см. ниже в лекции 25.)

Размерность $\dim \mathscr{V}$ пространства $\mathscr{V}$ называется *размерностью* аффинного пространства $\mathscr{A}$ и обозначается символом $\dim \mathscr{A}$.

Мы, естественно, будем пока интересоваться аффинными пространствами размерности $n \leqslant 3$. Пространство размерности 1 называется *прямой*, размерности 2 — *плоскостью*, а размерности 3 — увы! — *пространством*. Путаница усугубляется тем, что, как мы увидим ниже, прямыми и плоскостями называются также некоторые подмножества пространства. Все это, конечно, очень неприятно, но таково сложившееся словоупотребление.

Часть математики, изучающая аффинные пространства, называется *аффинной геометрией*. При нашем построении в этой геометрии имеются два первоначальных неопределяемых понятия (точка и вектор) и три неопределяемых отношения (отношение между тремя векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, состоящее в том, что вектор $\boldsymbol{c}$ является суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; отношение между двумя векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и числом k, состоящее в том, что $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$; отношение между двумя точками A, B и вектором $\boldsymbol{a}$, состоящее в том, что $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$). Эти отношения должны удовлетворять восьми «векторным» аксиомам 1°—8°, аксиоме размерности 9° (при данном n) и двум «аффинным» аксиомам 10° и 11°.

Примеры аффинных пространств.

1) Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное линейное пространство. Мы определим аффинное пространство $\mathscr{A}$, полагая $\mathscr{A} = \mathscr{V}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Аксиомы 10° и 11°, очевидно, выполнены (для любой «точки» $\boldsymbol{a} \in \mathscr{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{c} \in \mathscr{V}$ «точка» $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ является, очевидно, единственной точ-

кой, для которой $\overrightarrow{ab} = c$; для любых трех точек a, b и c имеет место равенство $c - a = (b - a) + (c - b)$). Таким образом, *любое линейное пространство $\mathscr{V}$ можно рассматривать как аффинное пространство.* В этом его качестве мы будем иногда обозначать его символом $\mathscr{V}_{\text{афф}}$.

2) В частности, мы получаем, что *множество $\mathbb{R}^n$ естественным образом является аффинным пространством*, с которым ассоциировано линейное пространство $\mathbb{R}^n$. (Таким образом, символ $\mathbb{R}^n$ у нас обозначает два разных объекта: аффинное пространство и линейное пространство. Когда требуется их различать, можно писать, например, $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ и $\mathbb{R}^n_{\text{лин}}$.) Если $A = (a^1, \ldots, a^n)$ и $B = (b^1, \ldots, b^n)$ — точки из $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ из $\mathbb{R}^n_{\text{лин}}$ определяется формулой

$$\overrightarrow{AB} = (b^1 - a^1, \ \ldots, \ b^n - a^n).$$

Этот пример будет играть в дальнейшем основную роль.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ — два аффинных пространства, и пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ — ассоциированные линеалы.

Определение 4. *Изоморфизмом* пространства $\mathscr{A}$ на пространство $\mathscr{A}'$ называется такое биективное отображение

$$\psi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}',$$

рассматриваемое вместе с некоторым изоморфизмом $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ ассоциированных линейных пространств, что для любых двух точек $A, B \in \mathscr{A}$ имеет место равенство

$$\overrightarrow{\psi(A)\,\psi(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB}).$$

Пространства $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ называются *изоморфными*, если существует хотя бы один изоморфизм пространства $\mathscr{A}$ на пространство $\mathscr{A}'$. Ясно, что отношение изоморфности аффинных пространств является отношением эквивалентности.

Легко видеть, что любое линейное n-мерное пространство $\mathscr{V}$, рассматриваемое как аффинное (см. пример 1)), изоморфно аффинному пространству $\mathbb{R}^n$. Соответствующим изоморфизмом $\psi\colon \mathscr{V}_{\text{афф}} \to \mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ является произвольный координатный изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathbb{R}^n$ (с ним же — в роли изоморфизма $\varphi\colon \mathscr{V}_{\text{лин}} \to \mathbb{R}^n_{\text{лин}}$). Таким образом, изоморфизм $\mathscr{V}_{\text{афф}}$ на $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$ задается выбором в $\mathscr{V}$ базиса.

С другой стороны, *любое аффинное пространство $\mathscr{A}$ изоморфно ассоциированному линейному пространству $\mathscr{V}$, рассматриваемому как аффинное пространство.* Чтобы задать такой изоморфизм, надо выбрать в $\mathscr{A}$ произвольную точку O и положить

$$\psi(A) = \overrightarrow{OA}. \tag{2}$$

Очевидно, что так определенное отображение $\psi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{V}$ является изоморфизмом аффинных пространств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{V}_{\text{афф}}$ (в этом случае φ — тождественное отображение $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$).

Вектор (2) обычно называется *радиус-вектором* точки A. Подчеркнем, что он зависит от выбора точки O.

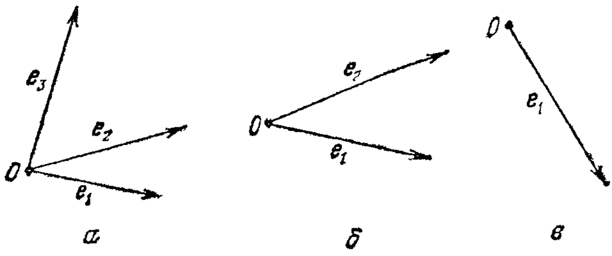
Комбинируя оба доказанных утверждения, мы получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Каждое n-мерное аффинное пространство $\mathscr{A}^n$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{R}^n$.*

Иначе говоря, *все аффинные пространства одной и той же размерности изоморфны.*

В этом состоит полнота аксиом аффинной геометрии: с точностью до изоморфизма они однозначно определяют соответствующее пространство.

Изоморфизм пространства $\mathscr{A}$ на $\mathbb{R}^n$ задается произвольной точкой $O \in \mathscr{A}$ (ее выбор определяет изоморфизм $\mathscr{A}$ на $\mathscr{V}_{\text{афф}}$) и произвольным базисом $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ (его выбор определяет изоморфизм $\mathscr{V}_{\text{афф}}$ на $\mathbb{R}^n_{\text{афф}}$).



Аффинная координатная система: *а* — в пространстве, *б* — на плоскости, *в* — на прямой

Определение 5. Совокупность, состоящая из точки O и базиса $e_1, \ldots, e_n$, называется *аффинной координатной системой* в $\mathscr{A}$. Обозначается она символом $Oe_1 \ldots e_n$. Точка O называется *началом отсчета* (координат).

Например, при $n = 3$ (в пространстве) аффинная координатная система имеет вид $Oe_1e_2e_3$, при $n = 2$ (на плоскости) — вид Oe_1e_2 и при $n = 1$ (на прямой) — вид Oe_1.

Согласно сказанному выше, каждая аффинная координатная система $Oe_1 \dots e_n$ определяет некоторый изоморфизм $\psi\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}^n$. Он называется *координатным изоморфизмом.*

Пусть M — точка аффинного пространства $\mathscr{A}$ и пусть

$$\psi(M) = (x^1, \dots, x^n).$$

Определение 6. Числа $x^1, \dots, x^n$ называются *аффинными координатами* (или просто *координатами*) точки M в аффинной координатной системе $Oe_1 \dots e_n$.

Эти координаты являются не чем иным, как координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$:

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n.$$

При $n = 3$ координаты обозначаются обычно символами x, y, z:

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

а при $n = 2$ — символами x, y:

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2.$$

По поводу роли и значения аффинных координат можно дословно повторить все, сказанное выше по поводу координат векторов.

Аффинная геометрия, основывающаяся на аксиомах 1°—11°, представляет собой ту часть элементарной геометрии, которая не использует измерения длины отрезков и величин углов. Эта часть, как мы увидим, не так мала. В частности, в ней имеет смысл понятие прямой линии.

Как аксиоматически ввести прямые? Как всегда, для этого нужно предварительное рассмотрение на интуитивно-геометрическом уровне.

На этом уровне ясно, что любая прямая (на плоскости или в пространстве) полностью определяется своей произвольной точкой M_0 и произвольным отличным от нуля вектором $\boldsymbol{a}$, параллельным этой прямой. При этом условие, что некоторая точка M принадлежит прямой, состоит в том, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, т. е. существует такое число t, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}. \tag{3}$$

При аксиоматическом построении нужно обратить это утверждение и принять его за определение.

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольное аффинное пространство с ассоциированным линейным пространством $\mathscr{V}$.

Определение 7. *Прямой* в пространстве $\mathscr{A}$, задаваемой точкой $M_0 \in \mathscr{A}$ и отличным от нуля вектором $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, называется множество всех точек $M \in \mathscr{A}$, для которых вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, т. е. для которых при некотором t имеет место равенство (3).

Вектор $\boldsymbol{a}$ называется *направляющим вектором прямой*. Любой коллинеарный ему вектор называется *параллельным* данной прямой. В силу этого определения *векторы тогда и только тогда коллинеарны, когда они параллельны некоторой прямой* (этот факт выше был установлен в рамках интуитивной теории; теперь же мы его получили и в аксиоматической теории).

Точки, лежащие на одной прямой, называются *коллинеарными*.

Легко видеть, что *каждая прямая в пространстве $\mathscr{A}$ естественным образом наделяется структурой аффинного пространства размерности* 1 (на этом основании одномерные аффинные пространства — даже когда они заданы абстрактно — также называются «прямыми»; см. выше).

Действительно, ясно, что

а) все векторы, параллельные прямой, образуют линеал размерности 1;

б) для любых точек A, B прямой соответствующий вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A}$ принадлежит этому линеалу;

в) возникающее соответствие $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ удовлетворяет аксиомам 10° и 11°. □

Поскольку при $t = 0$ получается точка M_0, мы видим, что точка M_0 принадлежит рассматриваемой прямой. Поэтому об этой прямой говорят также, что она *проходит через точку M_0 параллельно вектору $\boldsymbol{a}$*.

Ясно, что точка M_0 и вектор $\boldsymbol{a}$ составляют на прямой (рассматриваемой как аффинное пространство размерности 1) аффинную координатную систему. Координатой точки M в этой системе является фигурирующее в соотношении (3) число t.

Предложение 1. *Пусть N_0 — произвольная точка прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\boldsymbol{a}$, и пусть $\boldsymbol{b}$ — произвольный отличный от нуля вектор, параллельный этой прямой. Тогда точка N_0 и вектор $\boldsymbol{b}$ задают ту же прямую.*

Доказательство. По условию существуют такие числа t_0 и $h_0 \neq 0$, что

$$\overrightarrow{M_0N_0} = t_0\boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = h_0\boldsymbol{a}.$$

Поэтому, если

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a},$$

то

$$\overrightarrow{N_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0N_0} = t\boldsymbol{a} - t_0\boldsymbol{a} = \tau\boldsymbol{b},$$

где $\tau = \dfrac{t - t_0}{h_0}$.

Обратно, если

$$\overrightarrow{N_0M} = \tau\boldsymbol{b},$$

то

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{N_0M} + \overrightarrow{M_0N_0} = \tau\boldsymbol{b} + t_0\boldsymbol{a} = (\tau h_0 + t_0)\,\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{a},$$

где $t = \tau h_0 + t_0$. □

Таким образом, *прямая может задаваться любой своей точкой и любым отличным от нуля вектором, параллельным этой прямой.*

При этом легко видеть, что *для любых двух точек M_0 и M_1, принадлежащих прямой, соответствующий вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ параллелен этой прямой.* Действительно, согласно (3), существует такое t_1, что

$$\overrightarrow{M_0M_1} = t_1\boldsymbol{a}. \quad \square$$

Следовательно, *прямая однозначно определена любыми двумя ее различными точками M_0 и M_1*, поскольку она однозначно определена точкой M_0 и отличным от нуля вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$. Другими словами, *через две различные точки M_0 и M_1 проходит не более одной прямой.*

Если такая прямая существует, то ее точки M определяются из условия

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1},$$

где t — произвольный параметр. Обратно, по определению, это соотношение для любых двух различных точек M_0 и M_1 задает некоторую прямую. Поскольку $M = M_0$ при $t = 0$ и $M = M_1$ при $t = 1$, эта прямая проходит через точки M_0 и M_1.

Тем самым нами доказано следующее предложение:

Предложение 2. *Через любые две различные точки M_0 и M_1 аффинного пространства проходит одна и только одна прямая.* □

Эта прямая обозначается символом M_0M_1.

В случае, когда основное поле является полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, можно ввести следующее определение:

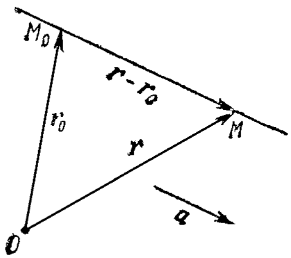
Определение 8. Говорят, что точка M прямой M_0M_1 *лежит между* точками M_0 и M_1, если соответствующее этой точке значение параметра t удовлетворяет неравенствам $0 < t < 1$.

Множество всех точек прямой M_0M_1, лежащих между точками M_0 и M_1, вместе с самими этими точками, называется *отрезком* с концами M_0 и M_1. Таким образом, для точек отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$. Обозначается отрезок символом $\overline{M_0M_1}$.

Лекция 5

Параметрические уравнения прямой. — Уравнение прямой на плоскости. — Каноническое уравнение прямой на плоскости. — Общее уравнение прямой на плоскости. — Параллельные прямые. — Взаимное расположение двух прямых на плоскости. — Теорема единственности. — Прямые, проходящие через точку пересечения двух прямых. — Расположение прямой по отношению к осям координат — Полуплоскости, на которые прямая разбивает плоскость.

Пусть в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ выбрано начало отсчета O. Тогда соотношение (3) предыдущей лекции, которое определяет точки прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\boldsymbol{a}$, мы можем записать в виде



(1) $$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{a},$$

где

$$\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM_0},\quad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$$

(напомним, что $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$). При изменении параметра t от $-\infty$ до $+\infty$ точка M с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$, задаваемым формулой (1), пробегает всю рассматриваемую прямую. На этом основании равенство (1) называется *векторным параметрическим уравнением* прямой.

Пусть $n=2$ (случай прямой на плоскости). Выбрав произвольную аффинную координатную систему Oe_1e_2, обозначим через x, y координаты точки M (т. е. координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$), через x_0, y_0 — координаты точки M_0 и через l, m — координаты вектора $\boldsymbol{a}$ (в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$). Тогда равенство (1) будет равносильно двум числовым равенствам:

(2) $$\begin{aligned} x&=x_0+tl,\\ y&=y_0+tm. \end{aligned}$$

Они называются *координатными параметрическими уравнениями* прямой на плоскости.

При $n = 3$ (в пространстве) к уравнениям (2) добавляется еще одно уравнение, и координатные параметрические уравнения прямой приобретают вид

(3) $$\begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm, \\ z &= z_0 + tn \end{aligned}$$

(третья координата вектора $\boldsymbol{a}$ по традиции обозначается буквой n; мы имеем на это право, поскольку, зафиксировав размерность 3, мы освободили букву n от обозначения размерности).

При задании прямой двумя точками M_0 и M_1 с радиус-векторами $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}_1$ (и — при $n = 3$ — координатами x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1) мы можем считать, что $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ (и, соответственно этому, что $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$ и $n = z_1 - z_0$). Отсюда следует, что векторное параметрическое уравнение прямой M_0M_1, проходящей через точки M_0 и M_1, имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0),$$

т. е. вид

(4) $$\boldsymbol{r} = (1 - t)\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{r}_1,$$

а ее координатные параметрические уравнения — вид

$$\begin{aligned} x &= (1 - t)\,x_0 + tx_1, \\ y &= (1 - t)\,y_0 + ty_1, \\ z &= (1 - t)\,z_0 + tz_1 \end{aligned}$$

(в пространстве; на плоскости последнее уравнение отсутствует).

Рассмотрим более внимательно прямые на плоскости (в двумерном аффинном пространстве). Если на плоскости фиксирована аффинная координатная система Oe_1e_2, то каждая прямая будет иметь параметрические уравнения вида (2). Исключив из этих уравнений параметр t, мы получим соотношение

(5) $$(x - x_0)\,m - (y - y_0)\,l = 0.$$

Таким образом, если точка M принадлежит прямой, то ее координаты x, y удовлетворяют уравнению (5). Обратно, если числа x, y удовлетворяют уравнению (5) и если, например, $l \neq 0$, то соотношения (2) будут удовлетворены при $t = \frac{x - x_0}{l}$ $\left(\text{а если } m \neq 0, \text{ то при } t = \frac{y - y_0}{m}\right)$, т. е. точка M с координатами x, y будет принадлежать рассматриваемой прямой. На этом основании соотношение (5) называется *уравнением прямой, заданной точкой* M_0 *и вектором* $\boldsymbol{a}$.

Если $m \neq 0$ и $l \neq 0$, то уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{6}$$

Условимся придавать смысл этому равенству и тогда, когда $l = 0$ (но $m \neq 0$) или $m = 0$ (но $l \neq 0$). Именно, будем считать, что при $l = 0$ оно равносильно соотношению $x - x_0 = 0$, а при $m = 0$ — соотношению $y - y_0 = 0$. В силу этого соглашения уравнение (6) при любых l, m (не равных нулю одновременно) будет равносильно уравнению (5) и потому также будет уравнением рассматриваемой прямой.

Уравнение вида (6) называется *каноническим уравнением* прямой.

В дальнейшем всегда символ $M_0(x_0, y_0)$ означает, что точка M_0 имеет координаты x_0, y_0. Аналогично, символ $\boldsymbol{a}(l, m)$ означает, что вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты l, m.

Для прямой M_0M_1, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, коэффициенты l и m выражаются формулами $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$. Таким образом, каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Это уравнение может быть также записано в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Полагая $A = -m$, $B = l$, мы уравнение (5) можем переписать в следующем виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это — *общее уравнение* прямой, проходящей через точку, $M_0(x_0, y_0)$.

Полагая $C = -Ax_0 - By_0$, мы можем переписать это уравнение в виде

$$Ax + By + C = 0. \tag{7}$$

Заметим, что *для прямой* (7) *направляющий вектор имеет координаты* B, $-A$.

Легко видеть, что *любое уравнение вида* (7), *где либо* $A \neq 0$, *либо* $B \neq 0$, *определяет некоторую прямую*. Действительно, найдем такие числа x_0, y_0, чтобы $Ax_0 + By_0 + C = 0$ (при $A \neq 0$ можно взять, например, $x_0 = -C/A$, $y_0 = 0$, а при $B \neq 0$, — например, $x_0 = 0$, $y_0 = -C/B$), и построим прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(B, -A)$. Уравнение (5) этой прямой лишь знаком отличается от данного уравнения (7). □

Рассмотрим теперь вопрос о взаимном расположении двух прямых на плоскости.

Определение 1. Две прямые (безразлично — на плоскости или в пространстве) называются *параллельными*, если их направляющие векторы коллинеарны (и потому могут быть выбраны одинаковыми).

Если параллельные прямые имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают (ибо прямая однозначно определяется точкой и направляющим вектором). Таким образом, различные параллельные прямые общих точек не имеют (не пересекаются).

На плоскости рассматриваемые прямые имеют уравнения вида

$$A_0x + B_0y + C_0 = 0 \tag{8}$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0. \tag{9}$$

Поскольку направляющие векторы этих прямых имеют, соответственно, координаты B_0, $-A_0$ и B_1, $-A_1$, а векторы коллинеарны (т. е. пропорциональны) тогда и только тогда, когда пропорциональны их координаты, то прямые (8) и (9) параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1}.$$

Здесь и в дальнейшем такого рода формулы надо воспринимать не как равенства чисел, а как «пропорции», т. е. как утверждение о существовании такого числа $\rho \neq 0$, называемого коэффициентом пропорциональности, что $A_0 = \rho A_1$ и $B_0 = \rho B_1$. Поэтому, например, не исключается равенство нулю «знаменателя» A_1, что имеет место тогда и только тогда, когда равен нулю «числитель» A_0 Это — то же самое соглашение, которое выше мы приняли в отношении канонических уравнений прямой.

Если прямые (8) и (9) имеют общую точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} A_0x_0 + B_0y_0 + C_0 = 0,\\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

и если эти прямые параллельны, т. е. при некотором $\rho \neq 0$ имеют место равенства $A_0 = \rho A_1$ и $B_0 = \rho B_1$, то, умножив второе из равенств (10) на ρ и вычтя из первого, мы получим, что $C_0 - \rho C_1 = 0$. Следовательно, если

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} \neq \frac{C_0}{C_1},$$

то равенства (10) невозможны, общих точек нет и прямые (8) и (9) не пересекаются. Если же

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{C_0}{C_1},$$

то каждое из уравнений (8) и (9) является следствием другого, так что в этом случае прямые (8) и (9) совпадают.

Если же прямые (8) и (9) не параллельны, т. е.

$$\frac{A_0}{A_1} \neq \frac{B_0}{B_1}, \tag{11}$$

то уравнения (8) и (9) имеют единственное решение

$$x_0 = \frac{B_0C_1 - C_0B_1}{A_0B_1 - B_0A_1}, \quad y_0 = \frac{C_0A_1 - A_0C_1}{A_0B_1 - B_0A_1} \tag{12}$$

(это — так называемые формулы Крамера, написанные для частного случая двух уравнений с двумя неизвестными). Это означает, что *непараллельные прямые пересекаются в единственной точке* (с координатами (12)).

Поскольку найденные условия исчерпывают все возможности и не перекрываются, каждое из них необходимо и достаточно. Этим доказана следующая теорема:

Теорема 1 (о взаимном расположении двух прямых на плоскости). *Две прямые на плоскости*

а) *либо не имеют ни одной общей точки;*

б) *либо имеют одну и только одну общую точку;*

в) *либо совпадают.*

Случай а) *характеризуется тем, что*

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{B_0}{B_1}\neq\frac{C_0}{C_1};$$

случай б) — *тем, что*

$$\frac{A_0}{A_1}\neq\frac{B_0}{B_1};$$

случай в) — *тем, что*

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{B_0}{B_1}=\frac{C_0}{C_1}.$$

В случаях а) *и* в) *прямые параллельны, а в случае* б) — *не параллельны.* □

В частности, мы видим, что *два уравнения* (8) *и* (9) *тогда и только тогда определяют одну и ту же прямую, когда эти уравнения пропорциональны.* Это утверждение известно как теорема единственности (для прямых на плоскости).

При решении конкретных геометрических задач часто требуется провести прямую через точку M_0 пересечения двух непараллельных прямых (8) и (9). Оказывается, что это можно сделать, не вычисляя координат точки M_0.

Предложение 1. *Для любых чисел* μ *и* ν, *одновременно не равных нулю, уравнение*

$$(A_0x+B_0y+C_0)\,\mu+(A_1x+B_1y+C_1)\,\nu=0, \tag{13}$$

т. е. уравнение

$$(A_0\mu + A_1\nu)\,x + (B_0\mu + B_1\nu)\,y + (C_0\mu + C_1\nu) = 0,$$

задает прямую, проходящую через точку M_0. *Обратно, любая прямая, проходящая через точку* M_0, *имеет уравнение вида* (13).

Доказательство. Так как данные прямые не параллельны и, значит, выполнено условие (11), то уравнения

$$A_0\mu + A_1\nu = 0,$$
$$B_0\mu + B_1\nu = 0$$

не имеют отличных от нуля решений. Следовательно, при любых μ и ν, одновременно не равных нулю, в уравнении (13) хотя бы один коэффициент при x, y отличен от нуля, и потому это уравнение задает некоторую прямую. Так как в точке M_0 обе скобки в (13) обращаются в нуль, то эта прямая проходит через точку M_0.

Обратно, пусть

$$Ax + By + C = 0 \tag{14}$$

— произвольная прямая, проходящая через точку M_0. Ввиду условия (11) существует единственная пара чисел (μ_0, ν_0) (отличная, конечно, от пары $(0, 0)$), обладающая тем свойством, что

$$\begin{aligned} A_0\mu_0 + A_1\nu_0 &= A, \\ B_0\mu_0 + B_1\nu_0 &= B. \end{aligned} \tag{15}$$

С другой стороны, по условию

$$A_0x_0 + B_0y_0 + C_0 = 0,$$
$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0,$$
$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

где x_0, y_0 — координаты точки M_0. Поэтому, сложив первые два равенства, умноженные, соответственно, на μ_0 и ν_0, и вычтя из их суммы третье, мы в силу (15) получим соотношение

$$C_0\mu_0 + C_1\nu_0 = C.$$

Вместе с (15) это соотношение показывает, что уравнение (14) имеет вид (13) (при $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$). □

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (13) можно рассматривать и для параллельных прямых (8) и (9). Оно дает прямую при $\mu : \nu \neq -A_1 : A_0$, эта прямая параллельна прямым (8) и (9), и все прямые, параллельные прямым (8) и (9), можно представить в таком виде. Однако практическое значение этого замечания ограничено, поскольку уравнения последних прямых проще записывать в виде

$$A_0x + B_0y + C = 0,$$

где C — произвольный параметр.

Аффинная координатная система Oe_1e_2 определяет две замечательные прямые, имеющие, соответственно, уравнения $x = 0$ и $y = 0$. Прямая $x = 0$ называется *осью ординат* (рассматриваемой координатной системы), а прямая $y = 0$ — *осью абсцисс*. Ось ординат однозначно характеризуется как прямая, задаваемая точкой $O(0, 0)$ и вектором $\boldsymbol{e}_2$, а ось абсцисс — как прямая, задаваемая точкой $O(0, 0)$ и вектором $\boldsymbol{e}_1$.

Ось абсцисс обозначается обычно символом Ox, а ось ординат — символом Oy. Впрочем, часто вместо Ox пишут Oe_1, а вместо Oy пишут Oe_2.

Из теоремы о взаимном расположении двух прямых непосредственно вытекает, что *прямая*

$$Ax + By + C = 0 \tag{16}$$

тогда и только тогда

а) *параллельна оси ординат, когда* $B = 0$;

б) *параллельна оси абсцисс, когда* $A = 0$.

Для полноты можно добавить, что *прямая* (16) *тогда и только тогда проходит через начало координат* O, *когда* $C = 0$.

Если $B \neq 0$, т. е. прямая не параллельна оси ординат, то, полагая $k = -A/B$ и $b = -C/B$, мы можем ее уравнение записать в знакомом из школы виде:

$$y = kx + b.$$

Эта прямая тогда и только тогда параллельна оси абсцисс, когда $k = 0$.

В нижеследующем определении существенно, что основным полем $\mathbb{K}$ является поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Определение 2. Предполагая заданной произвольную прямую (16), назовем две точки M_1, M_2 плоскости, не принадлежащие прямой (16), *неразделенными прямой* (16), если эти точки либо совпадают, либо (при $M_1 \neq M_2$) отрезок $\overline{M_1M_2}$ не имеет общих точек с прямой (16).

Положим для сокращения записи

$$F(x, y) = Ax + By + C.$$

Предложение 2. *Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, не принадлежащие прямой* (16), *тогда и только тогда неразделены этой прямой, когда отличные от нуля числа $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имеют одинаковые знаки.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $M_1 \neq M_2$. Тогда определена прямая M_1M_2, координатные параметрические уравнения которой имеют вид

$$x = (1 - t)\, x_1 + tx_2,$$

$$y = (1 - t)\, y_1 + ty_2$$

(ср. с уравнением (4)). Чтобы найти общие точки прямой M_1M_2 и прямой (16) (если они существуют), надо эти выражения для x и y подставить в уравнение (16) и решить получившееся уравнение относительно t. Результат подстановки имеет, очевидно, вид

$$(1 - t)\, F(x_1, y_1) + tF(x_2, y_2) = 0,$$

откуда следует, что

$$t = \frac{F(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)} \tag{17}$$

(если $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$, то решения не существует, т. е. прямая M_1M_2 параллельна прямой (16)).

С другой стороны, по определению точки M_1 и M_2 тогда и только тогда разделены прямой (16), когда число (17) существует и удовлетворяет неравенствам $0 < t < 1$.

Таким образом, мы видим, что точки M_1 и M_2 тогда и только тогда разделены прямой (16), когда $F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2)$ и

$$0 < \frac{F(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)} < 1.$$

Если $F(x_1, y_1) > F(x_2, y_2)$, то это возможно тогда и только тогда, когда $F(x_1, y_1) > 0$ и $F(x_2, y_2) < 0$, а если $F(x_1, y_1) < F(x_2, y_2)$, то тогда и только тогда, когда $F(x_1, y_1) < 0$ и $F(x_2, y_2) > 0$. В обоих случаях числа $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имеют разные знаки. Поэтому точки M_1 и M_2 тогда и только тогда неразделены, когда знаки этих чисел одинаковы. □

Из предложения 2 непосредственно вытекает, что отношение неразделенности является отношением эквивалентности и что соответствующих классов эквивалентности имеется точно два.

Определение 3. Эти классы эквивалентности называются *полуплоскостями*, определенными прямой (16).

Таким образом, две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, не принадлежащие прямой (16), тогда и только тогда принадлежат одной полуплоскости, когда отрезок $\overline{M_1M_2}$ не пересекает эту прямую, т. е. когда числа $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ имеют одинаковые знаки.

Лекция 6

Матрицы. — Умножение матриц. — Двойные суммы. — Ассоциативность умножения матриц. — Квадратные матрицы. — Переход от одного базиса линейного пространства к другому. — Формулы преобразования координат векторов. — Формулы преобразования аффинных координат точек. — Ориентации. — Ориентации прямой, плоскости и пространства.

Координаты (в линейном или аффинном пространстве) могут быть выбраны, конечно, многими различными способами. Чтобы изучить имеющийся здесь произвол, нам понадобятся некоторые сведения из алгебры.

Прямоугольная таблица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

чисел (или элементов произвольного поля $\mathbb{K}$), состоящая из p строк и q столбцов, называется *матрицей размера* $p \times q$.

Частными случаями матриц являются *строки*

$$(a_1, \dots, a_q)$$

(векторы пространства $\mathbb{R}^q$) и *столбцы*

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{Vmatrix}.$$

(Более последовательное обозначение для строк

$$\| a_1, \dots, a_q \|$$

не употребляется.)

При $p = q$ матрица (1) называется *квадратной*. О квадратной матрице размера $p \times p$ говорят, что она имеет *порядок* p.

Матрицы порядка 1 (размера 1×1) отождествляются с числами.

Суммой двух матриц

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{Vmatrix}$$

одного и того же размера $p \times q$ называется матрица

$$A + B = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1q} + b_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} + b_{p1} & a_{p2} + b_{p2} & \dots & a_{pq} + b_{pq} \end{Vmatrix},$$

а *произведением* матрицы A на число k называется матрица

$$kA = \begin{Vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \dots & ka_{pq} \end{Vmatrix}.$$

Автоматическая проверка показывает, что *по отношению к этим операциям множество* $\mathrm{Mat}_{p,q}(\mathbb{R})$ *всех матриц размера* $p \times q$ *является линейным пространством размерности* pq (отличающимся от пространства $\mathbb{R}^{pq}$ лишь способом записи его элементов).

Для некоторых матриц A и B может быть определено также и их *произведение* AB. Именно, это можно сделать (общепринятым способом) тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т. е. в случае, когда матрица A имеет размер $p \times q$, а матрица B — размер $q \times r$. При этом матрица AB будет иметь размер $p \times r$.

Пусть сначала $p = 1$ и $r = 1$, т. е. матрица A является строкой $a = (a_1, \dots, a_q)$, а матрица B — столбцом

$$b = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_q \end{Vmatrix}.$$

В этом случае произведение ab (которое должно быть матрицей размера 1×1, т. е. числом) определяется формулой

$$ab = a_1 b_1 + \dots + a_q b_q = \sum_{i=1}^{q} a_i b_i.$$

Таким образом, при умножении строки на столбец каждый член строки умножается на соответствующий член столбца и все произведения складываются.

В общем случае матрица A имеет p строк вида $(a_{i1}, \ldots, a_{iq})$, где $i = 1, \ldots, p$, а матрица B имеет r столбцов вида

$$\begin{Vmatrix} b_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{qj} \end{Vmatrix},$$

где $j = 1, \ldots, r$. Пусть

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{iq}b_{qi} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$$

— произведение i-ой строки матрицы A на j-й столбец матрицы B. Числа c_{ij} составляют прямоугольную матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1} & \ldots & c_{pr} \end{Vmatrix}$$

размера $p \times r$, которая и принимается за произведение AB матриц A и B.

Короче говоря, *при перемножении матриц A и B каждая строка матрицы A умножается на каждый столбец матрицы B* (и получающиеся произведения естественным образом располагаются в матрицу).

Если мы хотим воспользоваться обозначениями Эйнштейна, необходимо индексы, нумерующие, скажем, строки, вынести вверх, т. е. записывать матрицы A и B в следующем виде:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_q^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^p & \ldots & a_q^p \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_r^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^q & \ldots & b_r^q \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{Vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_r^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^p & \ldots & c_r^p \end{Vmatrix},$$

где $c_j^i = a_k^i b_j^k$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, r$ (здесь молчаливо предполагается, что k пробегает значения от 1 до q).

В частности, в этой системе обозначений для элементов строк нужно использовать нижние индексы:

$$(a_1, \ldots, a_q),$$

а для элементов столбцов — верхние:

$$\begin{Vmatrix} b^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^q \end{Vmatrix}.$$

[Заметим, что это расходится с принятым выше обозначением компонент векторов пространства $\mathbb{R}^n$ посредством верхних индексов. Мы пошли на это рассогласование исключительно для экономии места. Фактически же векторами пространства $\mathbb{R}^n$ надо считать не строки, а столбцы.]

Для исследования свойств умножения матриц удобно предварительно вывести одну общую формулу (полезную и во многих других вопросах).

Пусть нам задана прямоугольная матрица

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{p1} & \dots & x_{pq} \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

В соответствии с общими обозначениями для сумм (см. конец лекции 4) сумма всех элементов i-й строки $(x_{i1}, \dots, x_{iq})$ матрицы (2) имеет вид $\sum\limits_{j=1}^{q} x_{ij}$, а сумма этих сумм, т. е. сумма всех элементов матрицы (2), — вид

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} x_{ij}. \tag{3}$$

С другой стороны, вычислив сначала суммы $\sum\limits_{i=1}^{p} x_{ij}$ элементов столбцов матрицы (2), а затем их сложив, мы получим сумму вида

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} x_{ij}. \tag{4}$$

Поскольку каждая из двойных сумм (3) и (4) является суммой всех элементов матрицы (2), эти суммы равны:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} x_{ij} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i-1}^{p} x_{ij}. \tag{5}$$

Таким образом, *в двойных суммах можно менять порядок суммирования.*

В частном случае, когда каждое слагаемое x_{ij} имеет вид $a^i b^j_i c_j$ (где суммирование по i и j не производится!), формула (5) может быть записана с помощью сокращенных обозначений Эйнштейна в виде закона ассоциативности

$$a^i (b^j_i c_j) = (a^i b^j_i) c_j \tag{6}$$

(слева сначала производится суммирование по j, а потом по i, справа же наоборот — сначала по i, а потом по j). В этом случае обычно опускают скобки и пишут просто $a^i b^j_i c_j$. (Подчеркнем, что таким образом в последней записи порядок суммирований не фиксируется.)

Теперь легко видеть, что *умножение матриц ассоциативно*, т. е., более точно, если для матриц A, B и C определено двойное произведение $(AB)C$, то определено и двойное произведение $A(BC)$ и эти два произведения совпадают:

$$(AB)C = A(BC).$$

Действительно, произведение $(AB)C$ определено, если матрица A имеет размер $p \times q$, матрица B — размер $q \times r$ (тогда определена матрица AB размера $p \times r$), а матрица C — размер $r \times s$ (и тогда матрица $(AB)C$ имеет размер $p \times s$). Но в этом случае определена матрица BC (размера $q \times s$) и, значит, матрица $A(BC)$ (размера $p \times s$). Далее, если $A = \|a^j_i\|$, $B = \|b^k_j\|$ и $C = \|c^l_k\|$, то матрица $(AB)C$ состоит из чисел $(a^j_i b^k_j) c^l_k$, а матрица $A(BC)$ — из чисел $a^j_i (b^k_j c^l_k)$. С другой стороны, согласно формуле (6), для любых i и l имеет место равенство

$$(a^j_i b^k_j) c^l_k = a^j_i (b^k_j c^l_k)$$

(напомним, что не имеет значения, какой буквой обозначен индекс суммирования). Следовательно, $(AB)C = A(BC)$. $\square$

Замечание 1. Ниже мы будем рассматривать матрицы также с векторными элементами. Если элементами матрицы A являются числа, а матрицы B — векторы, то формулы для матрицы AB остаются осмысленными (если, конечно, число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B) и дают матрицу AB с векторными элементами. Аналогично дело обстоит в случае, когда матрица A состоит из векторов, а матрица B — из чисел (нужно лишь считать, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ и любого числа k символ ak обозначает ka). При этом для любых трех матриц A, B, C (соответствующих размеров), среди которых ровно одна является векторной, закон ассоциативности $(AB)C = A(BC)$ остается, очевидно, верным.

В частном случае, когда все рассматриваемые матрицы являются квадратными матрицами фиксированного порядка $n \geqslant 1$, произведение AB определено для любых матриц A, B и также является квадратной матрицей порядка n. При этом множество $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц порядка n будет (по отношению к операциям сложения и умножения) ассоциативным кольцом (в свете всего сказанного выше проверять нужно лишь дистрибутивность умножения по отношению к сложению, что осуществляется автоматической выкладкой). Это кольцо обладает единицей (которой является *единичная матрица*

$$\begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

обозначаемая обычно символом E) и представляет собой алгебру над полем $\mathbb{R}$ (т. е. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ для любых матриц A, B и любого числа k).

Заметим, что *при $n > 1$ кольцо $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ некоммутативно*, т. е. существуют такие матрицы A и B, что $AB \neq BA$.

В высшей алгебре любой квадратной матрице A сопоставляется некоторое число, обозначаемое символом $\det A$ и называемое ее *определителем*. Определитель является многочленом от элементов матрицы и потому непрерывно от них зависит. При этом $\det E = 1$.

Теорема о произведении определителей утверждает, что *определитель произведения матриц равен произведению их определителей:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *обратимой*, если существует такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Теорема об обратимых матрицах утверждает, что *квадратная матрица тогда и только тогда обратима, когда она невырождена*, а теорема о невырожденных матрицах утверждает, что *квадратная ма-*

трица тогда и только тогда невырождена, когда ее строки (или столбцы) линейно независимы.

Так как $\det E = 1$, то $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, т. е.

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Если $\det A = 1$, то матрица A называется *унимодулярной*. Ясно, что произведение унимодулярных матриц, а также матрица, обратная унимодулярной, является унимодулярной матрицей.

Явная конструкция определителей излагается в параллельном курсе алгебры. Там же доказываются перечисленные три теоремы.

Пусть теперь $\mathscr{V}$ — произвольное (конечномерное) линейное пространство. Размерность n этого пространства мы пока будем считать произвольной, хотя на самом деле нам нужны лишь значения $n = 1, 2, 3$.

Пусть в линейном пространстве $\mathscr{V}$ заданы два базиса:

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$$

(обратите внимание, что штрихи мы помещаем у индексов; это на первый взгляд странное обозначение оказывается очень удобным; впрочем, это относится только к рассмотрениям общего характера, подобным тем, которыми мы сейчас занимаемся; в конкретных вычислениях штрихи лучше ставить у букв). Разложив векторы $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, мы получим формулы вида

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= c^1_{1'}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c^n_{1'}\boldsymbol{e}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_{n'} &= c^1_{n'}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c^n_{n'}\boldsymbol{e}_n, \end{aligned} \tag{7}$$

которые в обозначениях Эйнштейна имеют вид

$$\boldsymbol{e}_{i'} = c^i_{i'}\boldsymbol{e}_i.$$

Можно эти формулы записать и в матричных обозначениях.

Матрица

$$C = \begin{Vmatrix} c^1_{1'} & \ldots & c^1_{n'} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c^n_{1'} & \ldots & c^n_{n'} \end{Vmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$. (Заметим, что координаты векторов

$e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ располагаются в этой матрице по столбцам.) Введя состоящие из векторов матрицы-строки

$$e = (e_1, \ldots, e_n) \quad \text{и} \quad e' = (e_{1'}, \ldots, e_{n'}),$$

мы можем формулы (7) записать в виде одного матричного равенства:

$$e' = eC. \tag{8}$$

Пусть теперь

$$e_{1''}, \ldots, e_{n''}$$

— некоторый третий базис и

$$e_{i''} = c_{i''}^{i'} e_{i'},$$

т. е.

$$e'' = e'C',$$

где $C' = \|c_{i''}^{i'}\|$ — матрица перехода от базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ к базису $e_{1''}, \ldots, e_{n''}$, а $e'' = (e_{1''}, \ldots, e_{n''})$. Так как в силу ассоциативности умножения матриц $(eC)\,C' = e\,(CC')$ (см. замечание 1), то

$$e'' = e\,(CC').$$

Этим доказано, что *если C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, а C' — матрица перехода от базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ к базису $e_{1''}, \ldots, e_{n''}$, то матрица CC' будет матрицей перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1''}, \ldots, e_{n''}$.* □

В обозначениях Эйнштейна это доказывается также очень просто: так как $e_{i'} = c_{i'}^{i} e_i$ и $e_{i''} = c_{i''}^{i'} e_{i'}$, то

$$e_{i''} = c_{i''}^{i'}\left(c_{i'}^{i} e_i\right) = \left(c_{i''}^{i'} c_{i'}^{i}\right) e_i,$$

т. е. $c_{i''}^{i} = c_{i'}^{i} c_{i''}^{i'}$.

В частности, при $e'' = e$ мы получаем, что $CC' = E$, где E — единичная матрица, т. е. что $C' = C^{-1}$. Таким образом, *если C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, то обратная матрица C^{-1} будет матрицей обратного перехода от базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ к базису $e_1, \ldots, e_n$.* □

Заметим, что в наших обозначениях элементы матрицы C^{-1} имеют вид $c_i^{i'}$ (т. е. отличаются от элементов матрицы C только положением штриха).

Факт существования матрицы C^{-1} показывает, что *любая матрица перехода C невырождена.*

Легко видеть, что, и обратно, *любая невырожденная матрица C является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (который можно задать произвольно) к некоторому базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$*, т. е., другими словами, что для любой невырожденной матрицы C векторы $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$, задаваемые формулами (7), составляют базис. Действительно, их n и они линейно независимы (в противном случае столбцы матрицы C будут линейно зависимы и потому, вопреки предположению, ее определитель будет равен нулю). □

Найдем теперь формулы, связывающие координаты в двух различных базисах $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$.

По определению координаты $x^1, \ldots, x^n$ произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ находятся из формулы

$$\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i, \tag{9}$$

а координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ того же вектора $\boldsymbol{x}$, но в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — из формулы

$$\boldsymbol{x} = x^{i'} \boldsymbol{e}_{i'}. \tag{10}$$

Поэтому, если

$$\boldsymbol{e}_{i'} = c_{i'}^{i} \boldsymbol{e}_i, \tag{11}$$

то

$$\boldsymbol{x} = x^{i'} (c_{i'}^{i} \boldsymbol{e}_i) = (x^{i'} c_{i'}^{i}) \boldsymbol{e}_i = (c_{i'}^{i} x^{i'}) \boldsymbol{e}_i$$

и, значит,

$$x^i = c_{i'}^{i} x^{i'}, \tag{12}$$

т. е.

$$\begin{gathered} x^1 = c_{1'}^{1} x^{1'} + \ldots + c_{n'}^{1} x^{n'}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n = c_{1'}^{n} x^{1'} + \ldots + c_{n'}^{n} x^{n'}. \end{gathered}$$

Заметим, что если в формулах (11) «новый» базис $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ выражается через «старый» $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то в формулах (12), наоборот, «старые» координаты $x^1, \ldots, x^n$ выражаются через «новые» $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$. Кроме того, соответствующая матрица является не матрицей C, а транспонированной матрицей C^{T}. Формально это выражается в том, что в формуле (11) суммирование идет по нештрихованным индексам, а в формуле (12) — по штрихованным.

Конечно, легко написать и выражения «новых» координат через «старые». Они имеют вид

$$x^{i'} = c_i^{i'} x^i.$$

Изменение положения штриха означает, как мы знаем, переход к обратной матрице.

Обратим внимание на структуру получающихся формул: во всех них слева и справа одинаковые индексы, по которым не производится суммирование, стоят на одинаковых местах (сверху или снизу). Этот формальный признак вместе с соглашением Эйнштейна (из индексов, по которым происходит суммирование, один находится вверху, а второй — внизу) очень часто позволяет почти автоматически писать правильные формулы (и обнаруживать неправильные).

Формулы (12) (называемые *формулами преобразования координат*) легко можно получить и в матричных обозначениях.

Вводя, наряду с матрицей-строкой $e = (e_1, \ldots, e_n)$, также и матрицу-столбец

$$x = \left\| \begin{matrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{matrix} \right\|,$$

мы можем формулу (9) написать в следующем виде:

$$x = ex$$

(здесь порядок множителей, как всегда при умножении матриц, существен). Аналогично, формула (10) в матричных обозначениях приобретает вид

$$x = e'x',$$

где $e' = (e_{1'}, \ldots, e_{n'})$ и

$$x' = \left\| \begin{matrix} x^{1'} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{n'} \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому, если

$$e' = eC$$

(см. формулу (8)), то

$$x = (eC)\,x' = e\,(Cx'),$$

и, значит,

$$x = Cx', \tag{13}$$

что в точности равносильно формуле (12) (фактический переход к транспонированной матрице отразился в том, что в формуле (13) умножение на матрицу C происходит слева).

Рассмотрим теперь аналогичный вопрос для аффинных координат в аффинном пространстве.

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки M в аффинной координатной системе $Oe_1 \ldots e_n$ определяются в два этапа: сначала строится радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, а затем вычисляются его координаты в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому, если две координатные системы $Oe_1 \ldots e_n$ и $O'e_{1'} \ldots e_{n'}$ имеют одно и то же начало $O = O'$, то переход от координат в системе $Oe_1 \ldots e_n$ к координатам в системе $Oe_{1'} \ldots e_{n'}$ осуществляется по уже известным нам формулам для координат векторов.

Другой крайний случай возникает, когда две координатные системы отличаются лишь начальными точками, т. е. имеют вид $Oe_1 \ldots e_n$ и $O'e_1 \ldots e_n$. Поскольку

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'},$$

координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $x'^1, \ldots, x'^n$ векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{O'M}$ связаны формулами

$$x^i = x'^i + b^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $b^1, \ldots, b^n$ — координаты (в базисе $e_1, \ldots, e_n$) вектора $\overrightarrow{OO'}$.

В общем случае возникает, естественно, комбинация этих преобразований. Таким образом, если $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки M в координатной системе $Oe_1 \ldots e_n$, а $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ — координаты той же точки в координатной системе $O'e_{1'} \ldots e_{n'}$, то

$$x^i = c^i_{i'} x^{i'} + b^i, \tag{14}$$

где $\|c^i_{i'}\|$ — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, а $b^1, \ldots, b^n$ — координаты вектора $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

В раскрытом виде формула (14) записывается так:

$$x^1 = c^1_{1'}x^{1'} + \ldots + c^1_{n'}x^{n'} + b^1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^n = c^n_{1'}x^{1'} + \ldots + c^n_{n'}x^{n'} + b^n,$$

а в матричном — так:

$$x = Cx' + b, \tag{15}$$

где b — матрица-столбец

$$b = \begin{Vmatrix} b^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^n \end{Vmatrix}$$

(заметим, что Cx' также является столбцом).

С вопросом о преобразовании координат тесно связано очень важное понятие о р и е н т а ц и и, формально эксплицирующее интуитивное представление о направлении движения на прямой (вправо или влево), направлении вращения на плоскости (по часовой стрелке или против) и винта в пространстве (правого или левого).

Здесь снова существенно предположение, что основным полем $\mathbb{K}$ является поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пусть $t \longmapsto \boldsymbol{a}(t)$ — функция, значениями которой являются векторы линеала $\mathscr{V}$. Для определенности будем считать, что эта функция задана при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

При заданном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ функция $t \longmapsto \boldsymbol{a}(t)$ однозначно определяется координатами

$$a^1(t), \ldots, a^n(t) \tag{16}$$

вектора $\boldsymbol{a}(t)$, являющимися n числовыми функциями.

Определение 1. Функция $t \longmapsto \boldsymbol{a}(t)$ называется *непрерывной*, если все функции (16) непрерывны.

При изменении базиса функции (16) заменяются некоторыми их линейными комбинациями с постоянными коэффициентами и потому остаются непрерывными. Это показывает, что определение 1 корректно.

Определение 2. *Деформацией базисов* линеала $\mathscr{V}$ называется такое семейство n непрерывных функций

$$\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t), \tag{17}$$

определенных при $0 \leqslant t \leqslant 1$, что для каждого t векторы (17) составляют базис линеала $\mathscr{V}$.

Базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется *деформируемым* в базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, если существует такая деформация базисов

$$\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t),$$

что

$$\boldsymbol{a}_1(0) = \boldsymbol{a}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(0) = \boldsymbol{a}_n,$$

$$\boldsymbol{a}_1(1) = \boldsymbol{b}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(1) = \boldsymbol{b}_n.$$

Об этой деформации говорят, что она *связывает* первый базис со вторым.

Предложение 1. *Отношение деформируемости базисов является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Это отношение рефлексивно, поскольку для любого базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ формулы

$$\boldsymbol{a}_1(t) = \boldsymbol{a}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(t) = \boldsymbol{a}_n$$

определяют, очевидно, деформацию, связывающую этот базис с самим собой. Оно симметрично, поскольку для любой деформации базисов $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ формулы

$$\boldsymbol{b}_1(t) = \boldsymbol{a}_1(1-t), \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_n(t) = \boldsymbol{a}_n(1-t)$$

определяют деформацию, связывающую базис $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1(1), \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n(1)$ с базисом $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1(0), \ldots, \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_n(0)$. Оно транзитивно, поскольку для любых двух деформаций базисов $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ и $\boldsymbol{b}_1(t), \ldots, \boldsymbol{b}_n(t)$, обладающих тем свойством, что $\boldsymbol{a}_1(1) = \boldsymbol{b}_1(0), \ldots, \boldsymbol{a}_n(1) = \boldsymbol{b}_n(0)$, формулы

$$\boldsymbol{c}_i(t) = \begin{cases} \boldsymbol{a}_i(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \boldsymbol{b}_i(2t-1), & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad i = 1, \ \ldots, \ n,$$

определяют деформацию, связывающую базис $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_1(0), \ldots, \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_n(0)$ с базисом $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1(1), \ldots, \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{b}_n(1)$. □

Согласно предложению 1 все базисы пространства $\mathscr{V}$ распределяются по непересекающимся классам деформируемых друг в друга базисов.

Определение 3. Каждый класс деформируемых друг в друга базисов называется *ориентацией* линеала $\mathscr{V}$ (или аффинного пространства, с которым ассоциирован этот линеал).

На прямой (при $n = 1$) базисами являются одночленные семейства, состоящие из одного отличного от нуля вектора. Любые два таких базиса $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пропорциональны, т. е. существует такое число $\delta \in \mathbb{R}$, что $\boldsymbol{b} = \delta \boldsymbol{a}$. При этом *базисы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ тогда и только тогда деформируемы* *друг в друга, когда* $\delta > 0$. Действительно, если $\delta > 0$, то формула

$$(18)\qquad \boldsymbol{a}(t) = (1 + t(\delta - 1))\boldsymbol{a}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

определяет деформацию базиса $\boldsymbol{a}$ в базис $\boldsymbol{b}$. Обратно, если $\boldsymbol{a}(t)$ — произвольная деформация базиса $\boldsymbol{a}$ в базис $\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a}(t) = \delta(t)\boldsymbol{a}$, где $\delta(t)$ — такая непрерывная и не обращающаяся в нуль функция на отрезке $[0, 1]$, что $\delta(0) = 1$ и $\delta(1) = \delta$. Но по известной теореме Дарбу, если непрерывная на отрезке функция не обращается в нуль, то она сохраняет знак. Следовательно, $\delta > 0$. □

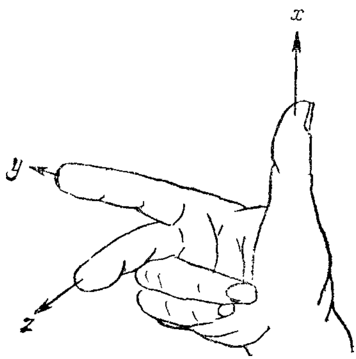
Неравенство $\delta > 0$ наглядно означает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют одно и то же направление. Таким образом, *задание на прямой ориентации равносильно заданию на ней одного из двух возможных направлений.* Следовательно, на прямой существует точно две ориентации.

На плоскости (при $n = 2$) каждый базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ задает некоторое направление вращения (по часовой стрелке или против), а именно, направление, в котором следует вращать вектор $\boldsymbol{a}_1$, чтобы кратчайшим путем совместить его направление с направлением вектора $\boldsymbol{a}_2$. При этом наглядно очевидно, во-первых, что деформируемые базисы задают одно и то же направление вращения и, во-вторых, что базис, задающий вращение по часовой стрелке нельзя продеформировать в базис, задающий вращение против часовой стрелки. (Мы вынуждены ограничиться ссылкой на наглядную очевидность, поскольку формального определения понятия «направление вращения» у нас нет.) Следовательно, на плоскости также существуют точно две различные ориентации. Задать на плоскости ориентацию — это значит выбрать на ней одно из двух возможных направлений вращения.

В пространстве (при $n = 3$) дело обстоит совершенно аналогично. Роль вращения играет здесь «винтовое движение», которое может происходить по правому или левому винту. Соответственно этому каждый базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ задает либо *правую ориентацию* (когда при взгляде с конца вектора $\boldsymbol{a}_3$ вектор $\boldsymbol{a}_1$ совмещается с вектором $\boldsymbol{a}_2$ при вращении против часовой стрелки), либо *левую ориентацию* (когда вектор $\boldsymbol{a}_1$ нужно вращать — для совмещения с вектором $\boldsymbol{a}_2$ — по часовой стрелке). Таким образом, и при $n = 3$ имеются только две различные ориентации.

Подчеркнем, что из двух возможных ориентаций прямой, плоскости или пространства чисто внутренним математическим образом нельзя выбрать какую-нибудь определенную. Для этого приходится обращаться к соображениям, не относящимся к математике (скажем, к вращению Земли или к анатомии человека).

Например, на прямой выбор ориентации означает выбор одного из двух возможных на прямой направлений. Если прямая изображена на рисунке горизонтальной линией, то обычно на ней выделяют направление слева направо. Это направление наиболее привычно (хотя бы потому, что большинство культурных народов пишет в этом направлении), и потому ему присвоено наименование *положительного направления* (*положительной ориентации*). Однако следует отчетливо понимать, что фиксация этого направления никакого инвариантного (не зависящего от рисунка) смысла не имеет: поверните рисунок вверх ногами — и положительное направление перейдет в отрицательное.



Аналогично, на вертикальных прямых положительным направлением принято считать направление снизу вверх.

На плоскости положительной ориентацией принято считать направление против часовой стрелки (ось абсцисс — направо, а ось ординат — вверх). Это соглашение, конечно, также не инвариантно: посмотрите на плоскость с другой стороны — и ориентация сменится.

Если посмотреть на правую руку со стороны ладони, то большой и указательный пальцы будут образовывать базис, ориентированный против часовой стрелки. На этом основании ориентацию плоскости против часовой стрелки обычно называют *правой ориентацией*, а ориентацию по часовой стрелке — *левой*.

Аналогично, в пространстве правая ориентация является ориентацией, определенной «базисом», состоящим из большого, указательного и среднего пальцев правой руки. В современных учебниках положительной ориентацией пространства считается обычно его правая ориентация; однако во многих старых сочинениях эта ориентация считалась отрицательной.

Лекция 7

Унимодулярно эквивалентные семейства векторов. — Линейно эквивалентные семейства векторов — Характеризация унимодулярно эквивалентных семейств. — Элементарные преобразования матриц. — Ориентации как классы одноименных базисов. — Стороны прямой. — Индуцированная ориентация прямой. — Ориентация прямой, задаваемая уравнением.

Определение ориентации как класса деформируемых друг в друга базисов, не оставляя желать ничего лучшего в отношении наглядности, часто вызывает определенные трудности, поскольку неясно — как практически установить деформируемы ли два данных базиса друг в друга, или нет. Решением этой задачи мы сейчас и займемся. При этом необходимые предварительные конструкции мы изучим в несколько большей общности, потому что они понадобятся нам и для других целей

Определение 1. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — произвольное линейно независимое семейство векторов (данного линеала $\mathscr{V}$, который мы считаем раз навсегда фиксированным).

Операцию, состоящую в прибавлении к некоторому элементу семейства $a_1, \ldots, a_m$ другого его элемента, умноженного на произвольное число k, мы назовем *элементарным преобразованием типа* (1), а операцию, состоящую в умножении некоторого элемента этого семейства на произвольное число $\lambda \neq 0$ с одновременным умножением другого элемента на λ^{-1}, — *элементарным преобразованием типа* (2).

Пример элементарного преобразования типа (1):

$$(1)\qquad (a_1, a_2, \ldots, a_m) \Rightarrow (a_1 + ka_2, a_2, \ldots, a_m)$$

и типа (2):

$$(2)\qquad (a_1, a_2, \ldots, a_m) \Rightarrow (\lambda a_1, \lambda^{-1} a_2, \ldots, a_m).$$

К числу элементарных преобразований принадлежит, конечно, *тождественное преобразование* (в (1) оно получается при $k = 0$, а в (2) — при $\lambda = 1$). Кроме того, ясно, что преобразование, обратное к элементарному, также является элементарным преобразованием (если, скажем, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{a}_m$, то $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 - k\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}_m$, а если $\boldsymbol{b}_1 = \lambda\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \lambda^{-1}\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{a}_m$, то $\boldsymbol{a}_1 = \lambda^{-1}\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \lambda\boldsymbol{b}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}_m$).

Определение 2. Два линейно независимых семейства векторов линеала $\mathscr{V}$ мы будем называть *унимодулярно эквивалентными* (происхождение этого названия будет ясно чуть позже), если от одного семейства можно перейти к другому цепочкой элементарных преобразований.

Ясно, что унимодулярно эквивалентные семейства состоят из одного и того же числа векторов. Отношение унимодулярной эквивалентности, очевидно, транзитивно, а из только что сделанных замечаний об элементарных преобразованиях непосредственно вытекает, что оно рефлексивно и симметрично. Таким образом, это отношение является эквивалентностью в общеалгебраическом смысле.

Определение 3. Два семейства векторов называются *линейно эквивалентными*, если любой вектор каждого семейства линейно выражается через векторы другого семейства.

В силу теоремы 1 лекции 2 линейно эквивалентные линейно независимые семейства состоят из одного и того же числа векторов. Для любых двух таких семейств $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ имеют место формулы вида

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= c_1^1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + c_1^m\boldsymbol{a}_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{b}_m &= c_m^1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + c_m^m\boldsymbol{a}_m,
\end{aligned} \tag{3}
$$

коэффициенты которых составляют матрицу

$$
C = \begin{Vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_m^1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_1^m & \ldots & c_m^m \end{Vmatrix},
$$

называемую *матрицей перехода* от семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ к семейству $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$.

При этом, в силу линейной независимости семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, матрица перехода C *однозначно* определяется семействами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$.

Введя матрицы-строки $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{b}_m)$, мы можем формулы (3) записать в виде одного матричного равенства

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}C \tag{4}$$

(уже знакомого нам для случая базисов; заметим, что любые два базиса автоматически линейно эквивалентны).

Так как $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}E$, где, как всегда, E — единичная матрица, то отношение линейной эквивалентности рефлексивно. Поскольку матрица C, очевидно, невырождена (в противном случае семейство $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ было бы линейно зависимо), из (4) следует, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}C^{-1}$. Следовательно, отношение линейной эквивалентности симметрично. Наконец, если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}C$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}D$, то $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(CD)$, и, значит, это отношение транзитивно. Таким образом, отношение линейной эквивалентности тоже является эквивалентностью в общеалгебраическом смысле.

Сравним теперь линейную эквивалентность с унимодулярной. Ясно, что если семейство $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ получается из семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ элементарным преобразованием, то эти семейства линейно эквивалентны. Более того, *соответствующая матрица перехода C унимодулярна* ($\det C = 1$). Действительно, если, например,

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{a}_m,$$

то

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

а если

$$\boldsymbol{b}_1 = \lambda\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \lambda^{-1}\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{a}_m,$$

то

$$C = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

В обоих случаях $\det C = 1$. □

Поскольку произведение унимодулярных матриц унимодулярно, отсюда следует, что *унимодулярно эквивалентные семейства линейно эквивалентны и связаны унимодулярной матрицей перехода.*

Замечательно, что обратное утверждение также верно:

Предложение 1. *Два линейно независимых семейства векторов линеала $\mathscr{V}$ тогда и только тогда унимодулярно эквивалентны, когда они линейно эквивалентны и соответствующая матрица перехода унимодулярна.*

Это предложение оправдывает термин «унимодулярно эквивалентные» для семейств, связанных цепочкой элементарных преобразований.

Доказательство предложения 1 мы начнем несколько издалека.

Пусть C — произвольная невырожденная квадратная матрица порядка m. Ее столбцы мы можем рассматривать как векторы линеала $\mathbb{R}^m$ и потому производить над ними элементарные преобразования.

Лемма 1. *Элементарными преобразованиями столбцов любую невырожденную матрицу C можно перевести в диагональную матрицу вида*

$$(5)\qquad \begin{Vmatrix} \delta & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix},$$

где $\delta = \det C$.

Доказательство. Мы приведем матрицу C к виду (5) в три этапа.

Этап 1. Пусть в некоторой строке матрицы C имеются два отличных от нуля элемента c и c'. Тогда, прибавив к содержащему элементу c' столбцу умноженный на $k = -c'c^{-1}$ столбец, содержащий элемент c, мы получим матрицу, в которой число отличных от нуля элементов рассматриваемой строки уменьшилось на единицу. Повторяя этот прием, мы получим матрицу, в данной строке которой содержится точно один отличный от нуля элемент.

Поскольку — как известно из курса алгебры — при элементарных преобразованиях столбцов определитель матрицы не меняется, полученная матрица также невырождена. Поэтому в любой строке этой матрицы, отличной от рассмотренной, найдется отличный от нуля элемент, лежащий в столбце, не содержащем элемент c.

Применяя к этому элементу (и содержащей его строке) этот же прием, мы обратим в нуль все другие элементы этой строки.

Перебрав все строки, мы в результате из матрицы C получим (также невырожденную) матрицу, обладающую тем свойством, что в каждой строке (а значит, и в каждом столбце) имеется только один отличный от нуля элемент. Иначе говоря, эта матрица будет диагональной матрицей с переставленными столбцами.

Этап 2. Этот этап основывается на том замечании, что *цепочкой элементарных преобразований можно переставить любые два столбца, одновременно изменив у одного из них знак.* Действительно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные столбцы, то преобразования

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Rightarrow (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \Rightarrow (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})) = \\ = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \Rightarrow (-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

переставляют эти столбцы и меняют у столбца $\boldsymbol{b}$ знак.

Поэтому соответствующей последовательностью элементарных преобразований мы можем матрицу, полученную на этапе 1, преобразовать в диагональную матрицу вида

$$(6)\qquad \begin{Vmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & c_m \end{Vmatrix},$$

где $c_1c_2 \ldots c_m = \det C \neq 0$.

Этап 3. На этом этапе мы производим над матрицей (6) $m-1$ элементарных преобразований типа (2), состоящих в умножении первого столбца последовательно на $c_2, c_3, \ldots, c_m$ и в делении остальных столбцов на те же числа соответственно. Ясно, что в результате мы и получим матрицу (5). □

Если матрица C служит матрицей перехода от семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ к семейству $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, то элементарные преобразования ее столбцов дают элементарные преобразования векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, и наоборот. Поэтому цепочкой элементарных преобразований мы можем перейти от семейства $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ к семейству $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m$, связанному с семейством $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ матрицей перехода (5), т. е. такому, что $\boldsymbol{b}'_1 = \delta\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{b}'_m = \boldsymbol{a}_m$. Это означает, что справедлива следующая лемма:

Лемма 2. Любое семейство $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, линейно эквивалентное семейству $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, унимодулярно эквивалентно семейству $\delta\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, где δ — определитель матрицы перехода от $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ к $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$. □

Теперь мы уже можем доказать предложение 1.

Доказательство предложения 1. Нам нужно лишь доказать, что семейства $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ унимодулярно эквивалентны, если они линейно эквивалентны и определитель δ матрицы перехода C равен 1. Но это непосредственно вытекает из леммы 2 (так как при $\delta = 1$ семейство $\delta\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ совпадает с семейством $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$). □

Все сказанное применимо, конечно, и к базисам (случай $m = n$) с тем лишь упрощением, что, как уже было замечено, для базисов условие линейной эквивалентности всегда выполнено.

Определение 4. Два базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ линейного пространства $\mathscr{V}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называются *одноименными*, если определитель матрицы перехода C от первого базиса ко второму положителен.

$$\det C > 0.$$

Если $\det C < 0$, то базисы называются *разноименными*.

Две аффинные координатные системы $O\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n$ и $O'\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n$ аффинного пространства $\mathscr{A}$ называются *одноименными* (*разноименными*), если одноименны (разноименны) базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ ассоциированного линеала $\mathscr{V}$.

Легко видеть, что *отношение одноименности базисов является отношением эквивалентности* (определитель единичной матрицы положителен; если $\det C > 0$, то $\det C^{-1} > 0$, если $\det C > 0$ и $\det D > 0$, то $\det (CD) > 0$) и, значит, множество всех базисов линеала $\mathscr{V}$ (а также множество всех координатных систем пространства $\mathscr{A}$) распадается на классы одноименных базисов (координатных систем). При этом, поскольку любые два базиса либо одноименны, либо разноименны (и существуют разноименные базисы), то *классов одноименных базисов* (*координатных систем*) *имеется точно два*. Базисы (координатные системы) одного класса одноименны, а разных — разноименны.

Очень часто приходится определять одноименность или разноименность двух базисов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, векторы которых заданы их координатами в некотором третьем базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Пусть Δ_a (соответственно Δ_b) — определитель, столбцами которого являются столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ (соответственно $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$). Ясно, что, скажем, Δ_a есть не что иное, как определитель матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ Поэтому *базисы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *и* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ *тогда и только тогда одноименны, когда определители* Δ_a *и* Δ_b *имеют один и тот же знак.*

Таким образом, установление одноименности (или разноименности) базисов не вызывает на практике никаких принципиальных затруднений (кроме чисто вычислительных).

Поэтому следующая теорема отвечает на поставленный в начале этой лекции вопрос:

Теорема 1. *Два базиса линейного пространства* $\mathscr{V}$ *тогда и только тогда деформируемы друг в друга, когда они одноименны.*

Мы предпошлем доказательству этой теоремы две леммы.

Лемма 3. *Деформируемые базисы одноименны.*

Доказательство. Пусть базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ деформируем в базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ и пусть $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ — соответствующая деформация. Рассмотрим определитель $\Delta(t)$ матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$. Ясно, что $\Delta(t)$ непрерывно зависит от t и $\Delta(0) = 1$. Кроме того, $\Delta(t) \neq 0$ для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому, в силу теоремы Дарбу, $\Delta(1) > 0$, и, значит, базис

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1(1), \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n(1)$$

одноименен с базисом $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. □

Лемма 4. *Если базис* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ *получается из базиса* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *элементарным преобразованием, то базис* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *деформируем в базис* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Доказательство. Если, например,

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n,$$

то формулы

$$\boldsymbol{a}_1(t) = \boldsymbol{a}_1 + tk\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_2(t) = \boldsymbol{a}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(t) = \boldsymbol{a}_n,$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, определяют деформацию, связывающую базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с базисом $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$

Аналогично, если

(7) $$b_1=\lambda a_1,\quad b_2=\lambda^{-1}a_2,\quad b_3=a_3,\ \ldots,\ b_n=a_n,$$

где $\lambda>0$, то соответствующая деформация определяется формулами

$$a_1(t)=(1+t(\lambda-1))a_1,\quad a_2(t)=(1+t(\lambda^{-1}-1))a_2,$$
$$a_3(t)=a_3,\ \ldots,\ a_n(t)=a_n$$

(ср. формулу (18) лекции 6).

Наконец, при $\lambda<0$ элементарное преобразование (7) разлагается в композицию элементарного преобразования

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\Rightarrow(|\lambda|a_1,\ |\lambda|^{-1}a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)$$

и элементарного преобразования

(8) $$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)\Rightarrow(-a_1,\ -a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n),$$

являющегося преобразованием (7) с $\lambda=-1$. Поэтому, в силу уже доказанного, нам достаточно рассмотреть лишь элементарное преобразование (8).

В этом случае мы положим

$$a_1(t)=(\cos\pi t)a_1-(\sin\pi t)a_2,$$
$$a_2(t)=(\sin\pi t)a_1+(\cos\pi t)a_2,$$
$$a_3(t)=a_3,\ \ldots,\ a_n(t)=a_n.$$

Автоматическая выкладка показывает, что эти формулы действительно определяют деформацию, связывающую базис $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ с базисом $-a_1, -a_2, a_3, \ldots, a_n$. □

Следствие. *Унимодулярно эквивалентные базисы деформируемы друг в друга.*

Доказательство. Достаточно вспомнить, что отношение деформируемости транзитивно. □

Теперь мы можем доказать и теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 3, деформируемые базисы одноименны. Поэтому нам нужно доказать лишь обратное утверждение.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — одноименные базисы и пусть $\delta>0$ — определитель их матрицы перехода. Согласно лемме 2 базис $b_1, \ldots, b_n$ унимодулярно эквивалентен базису $\delta a_1, a_2, \ldots, a_n$ и, значит, согласно лемме 4, деформируется в этот базис. С другой стороны, уже известная нам конструкция:

$$a_1(t)=(1+t(\delta-1))a_1,\quad a_2(t)=a_2,\ \ldots,\ a_n(t)=a_n$$

определяет деформацию базиса $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в базис $\delta\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Поэтому, в силу транзитивности (и симметричности) отношения деформируемости, базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{a}_n$ деформируется в базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ □

Согласно теореме 1 *ориентации линейного (или аффинного) пространства — это в точности классы одноименных базисов (координатных систем).*

Поэтому ориентаций линейного (или аффинного) пространства (размерности >0) существует точно две. (Факт, который на плоскости и в пространстве мы с наглядных позиций уже обсуждали в лекции 6. Теперь мы имеем его формальное доказательство.) Ориентация, отличная от ориентации o, обозначается символом $-o$ и называется *противоположной ориентацией.*

Базисы (координатные системы), задающие одну и ту же ориентацию, называются также *одинаково ориентированными*

Таким образом, базисы (координатные системы) тогда и только тогда одинаково ориентированы, когда они одноименны.

Линейное (или аффинное) пространство называется *ориентированным*, если в нем выбрана некоторая ориентация.

Эта ориентация называется *положительной*, а противоположная ориентация — *отрицательной.* Соответственно этому базис ориентированного линейного пространства, определяющий выбранную ориентацию, называется *положительно ориентированным*, а базис, определяющий противоположную ориентацию, — *отрицательно ориентированным.*

Аналогично определяются положительно и отрицательно ориентированные координатные системы в ориентированном аффинном пространстве.

Напомним (см. конец лекции 6), что прямую, плоскость и пространство обычно принято ориентировать так, чтобы на прямой положительной была ориентация слева направо, на плоскости — против часовой стрелки, а в пространстве — по правому винту.

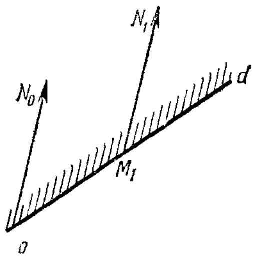
Без дополнительных данных ориентация плоскости (аффинного пространства размерности 2) и ориентации расположенных в этой плоскости прямых (аффинных пространств размерности 1) никак друг с другом не связаны. Чтобы связать их, можно, например, задать *сторону* прямой, т. е. одну из полуплоскостей, на которые прямая разбивает плоскость.

Пусть $\boldsymbol{n}$ — произвольный вектор, не параллельный прямой d (и, в частности, отличный от нуля). Выбрав на прямой произвольную точку M_0, отложим от нее вектор $\boldsymbol{n}$, т. е. найдем такую точку N_0, что $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$.

Так как вектор $\boldsymbol{n}$ не параллелен прямой d, то точка N_0 не лежит на этой прямой и, значит, определяет некоторую ее сторону. Легко видеть, что *эта сторона не зависит от выбора точки* M_0 (т. е. определяется исключительно вектором $\boldsymbol{n}$). Действительно, если M_1 — другая точка прямой d и $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1N_1}$, то

$$\overrightarrow{N_0N_1} = \overrightarrow{N_0M_0} + \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_0M_1}$$

и, значит, прямая N_0N_1 параллельна прямой $d = M_0M_1$. Следовательно, точки N_0 и N_1 расположены по одну сторону прямой d. □



Таким образом, мы видим, что каждый вектор $\boldsymbol{n}$, не параллельный прямой d, задает одну из полуплоскостей, на которые прямая разбивает плоскость. Говорят, что вектор $\boldsymbol{n}$ *направлен внутрь* этой полуплоскости

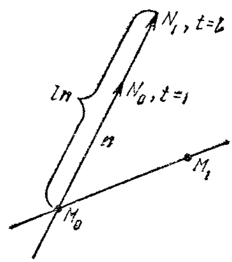
Когда два вектора $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}_1$ направлены внутрь одной и той же полуплоскости (в одну и ту же сторону прямой d)?

Пусть $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой d. Вместе с вектором $\boldsymbol{n}$ он составляет базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}$ плоскости, и потому любой третий вектор $\boldsymbol{n}_1$ разлагается по этим векторам:

$$\boldsymbol{n}_1 = l_1\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{n}.$$

Пусть вектор $\boldsymbol{n}_1$ не параллелен прямой d (и, значит, $l \neq 0$). В этом случае, как легко видеть, *вектор $\boldsymbol{n}_1$ тогда и только тогда направлен в ту же сторону прямой d, что и вектор $\boldsymbol{n}$, когда $l > 0$.* Действительно, отложив от точки $M_0 \in d$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$ вектор $\boldsymbol{n}_1$, мы получим ту же точку, что и отложив от точки $M_1 \in d$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0 + l_1\boldsymbol{a}$ вектор $l\boldsymbol{n}$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $\boldsymbol{n}_1 = l\boldsymbol{n}$. Но тогда точки N_0 и N_1, для которых $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$ и $\boldsymbol{n}_1 = \overrightarrow{M_0N_1}$, будут на прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{n}$ соответствовать значениям $t = 1$ и $t = l$ параметра t, и, значит, отрезок $\overline{N_0 N_1}$ будет определяться неравенствами $1 \leqslant t \leqslant l$. Однако точка M_0 этой прямой (являющаяся ее точкой пересечения с прямой d) соответствует значению $t = 0$. Следовательно, точки N_0 и N_1 тогда и только тогда лежат по одну сторону прямой d, когда $l > 0$. □

Напомним, что ориентация прямой d задается направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ (составляющим базис на прямой), причем два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда задают одну и ту же ориентацию, когда $k > 0$.



Пусть нам задана ориентация прямой d (направляющим вектором $\boldsymbol{a}$) и некоторая сторона этой прямой (вектором $\boldsymbol{n}$). Тогда на плоскости возникает базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}$. Легко видеть, что ориентация плоскости, задаваемая этим базисом, не зависит от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ и определяется исключительно данной ориентацией и данной стороной прямой d. Действительно, если векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{n}_1$ задают ту же ориентацию и сторону, то

$$\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{n}_1 = l_1\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{n},$$

где $k > 0$ и $l > 0$, и потому $\begin{vmatrix} k & l_1 \\ 0 & l \end{vmatrix} = kl > 0$. □

Таким образом, из трех объектов:

а) ориентация прямой d,

б) сторона прямой d,

в) ориентация плоскости

— первые два однозначно определяют третий.

Впрочем, легко видеть, что *любые два из этих объектов однозначно определяют третий.* Если задана ориентация плоскости и задана сторона (или ориентация) прямой вектором $\boldsymbol{n}$ (вектором $\boldsymbol{a}$), то соответствующая ориентация (сторона) прямой задается вектором $\boldsymbol{a}$ (вектором $\boldsymbol{n}$), обладающим тем свойством, что базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}$ положительно ориентирован. Корректность этого построения проверяется на основе тех же формул, что и выше. □

Называя *ориентацией полуплоскости* ориентацию содержащей ее плоскости, мы, в частности, получаем, что *каждая ориентация полуплоскости определяет ориентацию ограничивающей эту полуплоскость прямой.* Эта ориентация задается направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, составляющим вместе с произвольным вектором $\boldsymbol{n}$, направленным внутрь полуплоскости, положительно ориентированный базис плоскости. О ней говорят, что она *индуцирована* данной ориентацией полуплоскости.

Поскольку ориентация прямой есть, по существу, ориентация ассоциированного линеала, имеет смысл утверждение о совпадении и различии ориентаций на двух различных, но параллельных прямых. Поэтому у параллельных прямых можно сравнивать и стороны.

Заметим, что ориентации (и стороны) непараллельных прямых сравнивать нельзя.

Задание на плоскости координатной системы $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ определяет некоторую ее ориентацию (а именно ту, в которой базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ положительно ориентирован). С другой стороны, задание уравнения

$$Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

прямой определяет некоторую ее сторону, а именно ту, для точек $M(x, y)$ которой $Ax + By + C > 0$. Таким образом, когда написано уравнение прямой (а значит, задана и координатная система), эта прямая оказывается автоматически ориентированной.

При умножении уравнения (9) на положительное число эта ориентация (и сторона) не меняется, а при умножении на отрицательное число переходит в противоположную.

Легко видеть, что в указанную сторону прямой (9) направлен вектор $\boldsymbol{n}$ с координатами (A, B). Действительно, если $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$, где $M_0(x_0, y_0)$ — точка прямой (9), то для координат $x_0 + A$, $y_0 + B$ точки N_0 будет иметь место неравенство

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C =$$
$$= A^2 + B^2 + (Ax_0 + By_0 + C) = A^2 + B^2 > 0. \quad \square$$

Отсюда следует, что *определяемую уравнением* (9) *ориентацию прямой задает направляющий вектор* $\boldsymbol{a}(B, -A)$. Действительно,

$$\begin{vmatrix} B & A \\ -A & B \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0. \quad \square$$

Лекция 8

Внешние произведения. — Бивектор как плоскостной аналог вектора. — Тривектор как пространственный аналог вектора. — Умножение m-вектора на число. — Антикоммутативность внешнего произведения векторов. — Однородность внешнего произведения векторов. — n-векторы. — Ориентации. — Дистрибутивность внешнего умножения.

Отношение унимодулярной эквивалентности, введенное в предыдущей лекции как вспомогательное, имеет и большое самостоятельное значение.

Поскольку это отношение является эквивалентностью в общеалгебраическом смысле, множество всех линейно независимых m-членных семейств векторов данного линеала $\mathscr{V}$ распадается на непересекающиеся классы унимодулярно эквивалентных семейств.

Определение 1. Классы унимодулярно эквивалентных линейно независимых семейств векторов, состоящих из m векторов, называются *m-векторами*. m-вектор, содержащий семейство $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, обозначается символом $\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m$ и называется *внешним произведением* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

К m-векторам дополнительно причисляется *нулевой m-вектор* 0, по определению состоящий из всех m-членных линейно зависимых семейств векторов. Таким образом,

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \ \ldots \ \wedge \boldsymbol{a}_m = 0$$

тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимы.

Если же $\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m \neq 0$, то равенство

$$\boldsymbol{b}_1 \wedge \ \ldots \ \wedge \boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{a}_1 \wedge \ \ldots \ \wedge \boldsymbol{a}_m$$

имеет место тогда и только тогда, когда от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ можно перейти к векторам $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ цепочкой элементарных преобразований или, что в силу предложения 1 лекции 7 равносильно, когда семейство $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ линейно эквивалентно семейству $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и соответствующая матрица перехода C унимодулярна:

$$\det C = 1.$$

(Это свойство внешнего умножения называется свободностью.)

При $m = 1$ в определении 1 речь идет об одноэлементных семействах из одного-единственного вектора. Но ясно, что два таких семейства $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ тогда и только тогда унимодулярно эквивалентны, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Это показывает, что *понятие 1-вектора совпадает с понятием вектора.*

Пусть $m = 2$. В этом случае m-векторы называются *бивекторами*. Имеется *нулевой бивектор* 0, состоящий из всех линейно зависимых (коллинеарных) пар векторов Бивекторы же, отличные от нуля, существуют лишь при $n \geqslant 2$ и представляют собой классы унимодулярно эквивалентных линейно независимых пар векторов. Бивектор определяемый парой $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, обозначается символом $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и называется *внешним произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Таким образом, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы, а при $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq 0$ равенство

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{b}_1 = k_1\boldsymbol{a} + l_1\boldsymbol{b},$$

где

$$\begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix} = 1.$$

При $m = 3$ говорят о *тривекторах*. Имеется *нулевой тривектор* 0, состоящий из всех линейно зависимых (компланарных) троек векторов. Тривекторы же, отличные от нуля, существуют только при $n \geqslant 3$ и представляют собой классы унимодулярно эквивалентных линейно независимых троек векторов. Тривектор, определяемый тройкой $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, обозначается символом $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ и называется *внешним произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Таким образом, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы, а при $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \neq 0$ равенство

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{c}_1$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} + m\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{b}_1 &= k_1\boldsymbol{a} + l_1\boldsymbol{b} + m_1\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{c}_1 &= k_2\boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{b} + m_2\boldsymbol{c}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{vmatrix} k & l & m \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Случай, когда $m > 3$, выходит за пределы настоящего курса, поскольку при $m > n$ имеется лишь нулевой m-вектор, а по условию мы ограничиваемся лишь значениями $n = 1, 2, 3$. [По той же причине тривекторы мы будем рассматривать лишь в пространстве (случай $n = 3$), тогда как теория бивекторов оказывается вполне содержательной как на плоскости (случай $n = 2$), так и пространстве (случай $n = 3$).]

Подчеркнем, что в обозначении тривектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ оба знака $\wedge$ нераздельны и вместе выступают как единый символ операции внешнего умножения (аналогично дело обстоит, конечно, и в общем случае произвольного m-вектора $\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m$).

Впрочем, этот символ можно расщепить, если ввести операцию внешнего умножения бивектора на вектор. Именно, внешним произведением $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$ бивектора $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{c}$ естественно назвать тривектор $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$. Конечно, здесь требуется проверить корректность, т. е. независимость тривектора $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$ от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Другими словами, надо показать, что если $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{c}$. Но равенство $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ означает, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}_1 &= k_1\boldsymbol{a}_1 + l_1\boldsymbol{b}, \end{aligned} \qquad \text{где} \quad \begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix} = 1,$$

и, следовательно, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{b}_1 &= k_1\boldsymbol{a} + l_1\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{c} &= 0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b} + 1\boldsymbol{c}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{vmatrix} k & l & 0 \\ k_1 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому, действительно, $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$. □

Аналогично определяется внешнее произведение $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ вектора на бивектор (и, более общо, — произведение p-вектора на произвольный q-вектор).

Таким образом, в силу этих определений внешнее произведение оказывается ассоциативным:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}).$$

[Подчеркнем, однако, что в разных частях этой формулы знаки $\wedge$ имеют различный смысл: внешнего произведения вектора на вектор, внешнего произведения бивектора на вектор, внешнего произведения трех векторов и внешнего произведения вектора на бивектор.]

Объясним теперь интуитивно-геометрический смысл бивекторов и тривекторов.

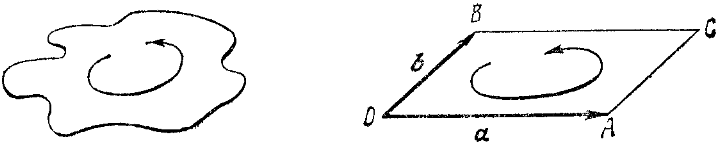
Наглядно-геометрически каждый вектор представляет собой направленный отрезок (т. е. кусочек ориентированной прямой), «свободно плавающий» в пространстве, не меняя величины и направления. По аналогии можно рассматривать свободно плавающие в пространстве кусочки ориентированных плоскостей (плоские площадки, на которых задано направление вращения по или против часовой стрелки), считая, в полной аналогии с векторами, что две площадки тогда и только тогда одинаковы (определяют один и тот же «плоскостной вектор»), когда

а) они имеют одинаковую площадь,

б) параллельны одной и той же плоскости,

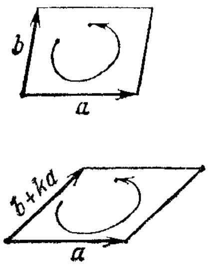
в) направления вращения на них совпадают.

При этом, ввиду условия а), нам нет нужды рассматривать площадки произвольной формы; не уменьшая общности, мы можем ограничиться, например, параллелограммами (см. рис.). Но параллелограмм $OACB$ однозначно задается неколлинеарными векторами $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. Более того, взятые в определенном порядке, эти векторы задают на параллелограмме $OACB$ определенное направление вращения (ориентацию). Следовательно, вместо площадок мы можем рассматривать упорядоченные пары (a, b) неколлинеарных (т. е. линейно независимых) векторов, считая, что две такие пары (a, b) и (c, d) задают один и тот же «плоскостной вектор», когда для построенных на них параллелограммов выполнены условия а), б) и в).

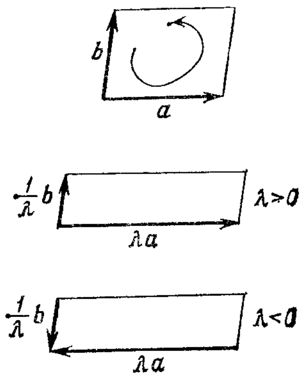


«Плоскостные векторы»

Чтобы придать этой идее точный смысл, необходимо, конечно, заменить условия а), б) и в) равносильными условиями, не использующими пока еще не введенных у нас понятий плоскости и площади. С этой целью мы заметим, что этим условиям удовлетворяют параллелограммы, построенные на векторах (a, b) и



Элементарное преобразование (1)

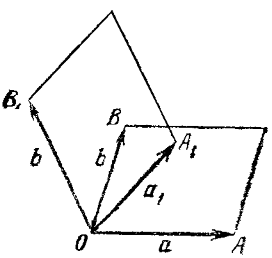


Элементарное преобразование (2)

(a, $b+ka$) (или ($a+kb$, b)), где k — произвольное число, т. е. на парах векторов, связанных элементарным преобразованием типа (1). Действительно, эти параллелограммы имеют, очевидно, одно и то же основание и одну и ту же высоту (см. рис.). Поэтому их площади равны. Кроме того, они оба расположены в одной плоскости и, в силу результатов предыдущей лекции, одинаково ориентированы (что, впрочем, непосредственно явствует и из чертежа). Аналогичное утверждение имеет место, конечно (см. рис.), и для нар векторов (a, b), $(\lambda a, \lambda^{-1}b)$, связанных элементарным преобразованием типа (2).

Поэтому условиям а), б) и в) удовлетворяют также и параллелограммы, построенные на парах (a, b) и (a_1, b_1) неколлинеарных векторов, связанных произвольной цепочкой элементарных преобразований, т. е. унимодулярно эквивалентных в смысле определения 2 лекции 7 (при $m = 2$).

Обратно, пусть для параллелограммов, построенных на парах (неколлинеарных) векторов (a, b) и (a_1, b_1), выполнены условия а), б), в). Тогда, в силу условия б), векторы a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости (компланарны) и потому (ввиду неколлинеарности векторов a и b) векторы a_1 и b_1 линейно выражаются через векторы a и b, т. е. пары (a, b) и (a_1, b_1) линейно эквивалентны в смысле определения 3 лекции 7 (при $m = 2$). Поэтому, в силу леммы 2 лекции 7, пара (a_1, b_1) унимодулярно эквивалентна паре $(\delta a, b)$, где δ — определитель матрицы перехода от (a, b) к (a_1, b_1). Следовательно, по уже доказанному, параллелограммы, построенные на векторах (a_1, b_1) и $(\delta a, b)$, удовлетворяют условиям а), б) и в). Поэтому этим условиям будут удовлетворять и параллелограммы, построенные на парах (a, b) и $(\delta a, b)$. Но ясно, что эти параллелограммы тогда и только тогда одинаково ориентированы (удовлетворяют условию в)), когда $\delta > 0$, и тогда и только тогда имеют одинаковую площадь (удовлетворяют условию а)), когда $|\delta| = 1$. Следовательно, $\delta = 1$, т. е. пары векторов (a, b) и (a_1, b_1) унимодулярно эквивалентны.



Унимодулярно эквивалентные пары векторов

Тем самым доказано, что пары векторов (a, b) и (c, d) тогда и только тогда определяют один и тот же «плоскостной вектор», когда они унимодулярно эквивалентны, т. е. определяют один и тот же бивектор. Таким образом, *понятие бивектора является точной алгебраической экспликацией интуитивного понятия «плоскостного вектора».*

Это заключение остается справедливым и для нулевого бивектора, поскольку нулевым плоскостным вектором естественно считать класс всевозможных «вырожденных площадок», имеющих нулевую площадь и, значит, задающихся коллинеарными векторами

Совершенно аналогично дело обстоит и с тривекторами, которые наглядно следует представлять себе как «свободно плавающие» в пространстве ориентированные тела данного объема. Действительно, поскольку мы интересуемся только объемом, вместо тел произвольной формы мы можем рассматривать лишь параллелепипеды, т. е. тройки некомпланарных векторов. Мы должны считать, что две такие тройки определяют один и тот же «пространственный вектор», если

а) построенные на них параллелепипеды имеют один и тот же объем;

б) их ориентации совпадают.

Но ясно, что элементарные преобразования не меняют объема параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (для преобразований типа (2) это очевидно, а для преобразований типа (1) вытекает из того, что они не меняют площадь основания и длину высоты параллелепипеда), а также не меняют ориентации тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (ибо определитель матрицы перехода от тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ к унимодулярно эквивалентной тройке равен единице и потому положителен). Поэтому эквивалентные тройки удовлетворяют условиям а) и б).

Обратно, пусть две некомпланарные тройки векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ удовлетворяют условиям а) и б). Согласно лемме 2 лекции 7 тройка $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ унимодулярно эквивалентна тройке вида $(\delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (где δ — определитель матрицы перехода от $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ к $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$; обе тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ являются базисами и потому линейно эквивалентны), и, значит, по уже доказанному тройки $(\delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ удовлетворяют условиям а) и б). Но тогда этим условиям удовлетворяют также тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\delta\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, что возможно только при $\delta = 1$. Следовательно, тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1)$ унимодулярно эквивалентны, т. е. $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{c}_1$.

Мы видим, таким образом, что *понятие тривектора является алгебраической экспликацией интуитивного понятия «пространственного вектора»*.

Любопытно, что хотя понятия плоскостного и пространственного векторов опираются на понятие ориентации и потому имеют смысл только над полем $\mathbb{R}$, эксплицирующие их понятия бивектора и тривектора (так же как и общее понятие m-вектора) непосредственно с ориентациями не связаны и имеют смысл в линейных пространствах над произвольным полем $\mathbb{K}$.

Множество всех бивекторов данного линеала $\mathscr{V}$ мы будем обозначать символом $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$, а тривекторов — символом $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$.

Оказывается, что в множества $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ и $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ можно ввести структуру линейного пространства, т. е. определить операцию умножения бивекторов и тривекторов на числа и операцию их сложения (при $n \leqslant 3$), так, чтобы были выполнены все восемь аксиом из лекции 1. Однако это делается отнюдь не просто, и мы будем заниматься этим довольно долго.

Проще всего дело обстоит с операцией умножения бивекторов и тривекторов на числа.

Мы определим эту операцию сразу для любого m (и любого n).

Определение 2. *Произведение* $k\alpha$ числа k на m-вектор $\alpha = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m$ определяется формулой

$$k\alpha = (k\boldsymbol{a}_1) \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m. \tag{1}$$

В частности, при $m = 2$

$$k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

[Интуитивно: при умножении на k площадь бивектора-параллелограмма (объем тривектора-параллелепипеда) умножается на $|k|$, а ориентация либо остается прежней (если $k > 0$), либо меняется на противоположную (если $k < 0$); все происходит точь-в-точь как для векторов.]

Конечно, это определение нуждается в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что m-вектор $k\alpha$ не зависит от выбора векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, внешним произведением которых является m-вектор α. Другими словами, мы должны доказать, что *если*

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{b}_m, \tag{2}$$

то $k\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m = k\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{b}_m$ *для любого числа* k. При этом, поскольку при $k = 0$ или при $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m = 0$ это утверждение очевидно, мы при доказательстве можем предполагать, что $k \neq 0$ и $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m \neq 0$. Но при $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m \neq 0$ равенство (2) означает, что (линейно независимые) семейства векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ линейно эквивалентны, причем соответствующая матрица перехода C унимодулярна. С другой стороны, ясно, что если семейства $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ линейно эквивалентны, то для любого $k \neq 0$ семейства $k\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ и $k\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ также линейно эквивалентны: если

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= c_1^1\boldsymbol{a}_1 + c_1^2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_1^m\boldsymbol{a}_m, \\ \boldsymbol{b}_2 &= c_2^1\boldsymbol{a}_1 + c_2^2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_2^m\boldsymbol{a}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{b}_m &= c_m^1\boldsymbol{a}_1 + c_m^2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m^m\boldsymbol{a}_m, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{b}_1 &= c_1^1(k\boldsymbol{a}_1) + (kc_1^2)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (kc_1^m)\boldsymbol{a}_m, \\ \boldsymbol{b}_2 &= \frac{c_2^1}{k}(k\boldsymbol{a}_1) + c_2^2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_2^m\boldsymbol{a}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{b}_m &= \frac{c_m^1}{k}(k\boldsymbol{a}_1) + c_m^2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m^m\boldsymbol{a}_m. \end{aligned}$$

При этом, как видно, матрица D перехода от $k\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ к $k\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ получается из матрицы C умножением ее первого столбца на k с одновременным делением на k ее первой строки. Так как при этих операциях определитель матрицы, очевидно, не меняется (он умножается и делится на k), то матрица D также унимодулярна. Следовательно,

$$k\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m = k\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{b}_m. \quad \square$$

Ясно, что для операции (1) выполнены аксиомы 6° и 8° линейного пространства, т. е.

(3) $\quad k(l\mathfrak{a}) = (kl)\mathfrak{a}$ для любых чисел k и l

и

(4) $\quad 1\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ для любого m-вектора $\mathfrak{a}$.

Кроме того,

(5) $\quad 0\mathfrak{a} = 0$ для любого m-вектора $\mathfrak{a}$.

Предложение 1. *Пусть для векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ существует такая матрица*

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_1^m & \ldots & a_m^m \end{Vmatrix},$$

что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= a_1^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_1^m\boldsymbol{e}_m, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_m &= a_m^1\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_m^m\boldsymbol{e}_m. \end{aligned}$$

Тогда

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{a}_m = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_m). \tag{6}$$

Доказательство. В случае, когда векторы $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ или $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ линейно зависимы, формула (6) очевидна (обратим внимание, что при $\det A = 0$ векторы $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ обязательно линейно зависимы). Поэтому без ограничения общности можно предположить, что оба семейства $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ и $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независимы и, значит, мы находимся — с точностью до обозначений — в условиях леммы 2 лекции 7. Следовательно, согласно этой лемме, семейство $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ унимодулярно эквивалентно семейству $\delta\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m$, где $\delta = \det A$, и, значит,

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{a}_m = \delta\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_m.$$

Для завершения доказательства остается вспомнить, что, по определению, $\delta\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_m = \delta(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_m)$. □

Для каждой подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

индексов $1, \dots, m$ мы положим

$$\operatorname{sign}\sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ четна}, \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетна}. \end{cases}$$

Следствие 1. *Для любого семейства векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ и любой подстановки (7) имеет место равенство*

$$\boldsymbol{a}_{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{a}_{i_m} = \operatorname{sign}\sigma\, \boldsymbol{a}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{a}_m. \tag{8}$$

Доказательство. Применим предложение 1, принимая за $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ векторы $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$, а за $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ — векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_m}$. Тогда A будет матрицей, j-й ($1 \leqslant j \leqslant m$) столбец которой состоит из нулей, за исключением единицы на i_j-м месте, и, значит, будет иметь место равенство $\det A = \operatorname{sign} \sigma$. В силу (1) это доказывает (8). □

В частности,

$$b \wedge a = -a \wedge b \tag{9}$$

для любого бивектора $a \wedge b$ (в этом случае $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$) и

$$\begin{aligned} a \wedge b \wedge c = c \wedge a \wedge b = b \wedge c \wedge a = \\ = -b \wedge a \wedge c = -a \wedge c \wedge b = -c \wedge b \wedge a \end{aligned} \tag{10}$$

для любого тривектора $a \wedge b \wedge c$.

Свойство внешнего умножения, выражаемое формулами (8), (9) и (10), называется **антикоммутативностью**.

Особая роль в формуле (1) первого вектора чисто случайна:

Следствие 2. *Для любого m-вектора $\mathfrak{a} = a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$, любого индекса i, $1 \leqslant i \leqslant m$, и любого числа k имеет место равенство*

$$k\mathfrak{a} = a_1 \wedge \ \ldots \ \wedge (ka_i) \ \wedge \ \ldots \ \wedge a_m. \tag{11}$$

Доказательство. При $\mathfrak{a} = 0$ или $k = 0$ формула (11) очевидна. Пусть $\mathfrak{a} \neq 0$ и $k \neq 0$. Тогда семейства векторов $a_1, a_2, \ldots, ka_i, \ldots, a_m$ и $ka_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ связаны диагональной матрицей перехода вида

$$\begin{Vmatrix} k & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{k} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как определитель этой матрицы равен единице, то $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge ka_i \wedge \ldots \wedge a_m = ka_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m$, что равносильно формуле (11)

[Другое доказательство. Применим следствие 1, принимая за σ транспозицию $(1i)$. Так как

$\operatorname{sign}\sigma = -1$, то, согласно этому следствию и формулам (1) и (3),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge k\boldsymbol{a}_i \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m = \\ = -k\boldsymbol{a}_i \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m = \\ = -k(\boldsymbol{a}_i \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m) = \\ = k(\boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_i \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_m) = k\mathfrak{a}]. \quad \square \end{aligned}$$

В частности, для любого числа k и любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

(12) $$k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge k\boldsymbol{b},$$

(13) $$k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = k\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge k\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge k\boldsymbol{c}.$$

Свойство внешнего умножения, выражаемое формулами (11), (12) и (13), называется однородностью.

Важный частный случай возникает при $m = n$, где, как всегда, $n = \dim \mathscr{V}$.

Пусть $\mathfrak{e}$ — произвольный, отличный от нуля n-вектор, т. е. пусть

$$\mathfrak{e} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_n,$$

где $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — некоторый базис линеала $\mathscr{V}$. Тогда, согласно предложению 1, для любого n-вектора $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_n$ будет иметь место равенство

(14) $$\mathfrak{a} = a\mathfrak{e},$$

где

(15) $$a = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

— определитель, столбцами которого являются столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Мы видим, таким образом, что *произвольно выбрав в n-мерном линеале $\mathscr{V}$ отличный от нуля n-вектор $\mathfrak{e}$, мы любой n-вектор $\mathfrak{a}$ можем записать в виде $a\mathfrak{e}$, где a — некоторое число* (очевидно, однозначно определенное n-вектором $\mathfrak{a}$).

Воспользуемся теперь следующей общеалгебраической леммой:

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{W}$ — множество, в котором*

1) *отмечен некоторый элемент* 0;

2) *задана операция* $\mathfrak{a} \mapsto k\mathfrak{a}$ *умножения на числа* $k \in \mathbb{R}$, *обладающая свойствами* (3), (4) *и* (5);

3) *для любых двух элементов* $\mathfrak{e} \neq 0$ *и* $\mathfrak{a}$ *существует единственное число* a, *обладающее тем свойством, что*

$$\mathfrak{a} = a\mathfrak{e}.$$

Тогда в $\mathscr{W}$ можно единственным способом определить операцию сложения, которая вместе с данной операцией умножения на числа задает на $\mathscr{W}$ структуру линейного пространства. Размерность этого пространства равна 1.

Доказательство. Пусть в $\mathscr{W}$ можно ввести сложение так, чтобы получилось линейное пространство. Тогда, выбрав произвольный элемент $\mathfrak{e} \neq 0$ и представив любые два элемента $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ в виде $\mathfrak{a} = a\mathfrak{e}$ и $\mathfrak{b} = b\mathfrak{e}$, мы в силу аксиомы 5° получим, что

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a + b)\mathfrak{e}. \tag{16}$$

Это доказывает, что обладающее нужными свойствами сложение в $\mathscr{W}$ единственно.

Чтобы доказать его существование, мы примем формулу (16) за определение сложения в $\mathscr{W}$. Тогда, в первую очередь, мы должны будем доказать его корректность, т. е. независимость от выбора элемента $\mathfrak{e}$. Другими словами, нам нужно показать, что если $\mathfrak{e}'$ — другой (отличный от нуля) элемент из $\mathscr{W}$ и $\mathfrak{a} = a'\mathfrak{e}'$ и $\mathfrak{b} = b'\mathfrak{e}$, то

$$(a' + b')\mathfrak{e}' = (a + b)\mathfrak{e}. \tag{17}$$

Но если $\mathfrak{e} = s\mathfrak{e}'$, то $a' = as$ и $b' = bs$. Поэтому $(a' + b')\mathfrak{e}' = (as + bs)\mathfrak{e}' = (a + b)s\mathfrak{e}' = (a + b)\mathfrak{e}$ и (17) доказано.

Далее, нужно проверить аксиомы линейного пространства. Но это делается совершенно тривиальными вычислениями. Например, если $\mathfrak{a} = a\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b} = b\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c} = c\mathfrak{e}$, то $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (a + (b + c))\mathfrak{e}$ и $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = ((a + b) + c)\mathfrak{e}$. Поэтому, в силу ассоциативности сложения чисел, $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$. Аналогичным образом проверяются и все остальные аксиомы.

Наконец, равенство $\dim \mathscr{W} = 1$ непосредственно вытекает из условия 3). □

Лемма 1 применима, в частности, к множеству всех n-векторов линеала $\mathscr{V}$. Поэтому, согласно этой лемме, *множество всех n-векторов n-мерного линеала $\mathscr{V}$ является одномерным линейным пространством.*

Каждый базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линеала $\mathscr{V}$ определяет базис $\mathfrak{e} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_n$ пространства n-векторов, и координата произвольного n-вектора $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{a}_n$ в базисе $\mathfrak{e}$ равна определителю

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \tag{18}$$

составленному из координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

[Заметим, что определитель в (18) мы транспонировали.]

В частности, при $n = 2$ (т. е. для бивекторов на плоскости) мы получаем, что

а) *при $n = 2$ множество $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ всех бивекторов является одномерным линеалом;*

б) *любой базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ линеала $\mathscr{V}$ определяет базис $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ линеала $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$;*

в) *для любого бивектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ имеет место равенство*

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2), \tag{19}$$

где (a_1, a_2) и (b_1, b_2) — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Аналогично,

а) *при $n = 3$ множество $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ всех тривекторов является одномерным линеалом;*

б) *любой базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ линеала $\mathscr{V}$ определяет базис $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$ линеала $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$;*

в) *для любого тривектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ имеет место равенство*

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3), \tag{20}$$

где (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3) — координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Если два базиса линеала $\mathscr{V}$ определяют один и тот же n-вектор, то они, конечно, одноименны, и, значит, задают одну и ту же ориентацию. Следовательно, ориентации линеала $\mathscr{V}$ можно задавать его n-векторами. При этом *два n-вектора тогда и только тогда задают одну и ту же* *ориентацию, когда они положительно пропорциональны* (т. е. отличаются положительным множителем).

Это означает, что *ориентации n-мерного линеала представляют собой не что иное, как ориентации одномерного линеала его n-векторов.*

В частности, ориентации плоскости (пространства) — это классы положительно пропорциональных бивекторов (тривекторов).

Рассмотрим на плоскости с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ три вектора

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

и

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2).$$

Следовательно,

(21) $$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Таким образом, *внешнее умножение пар векторов на плоскости дистрибутивно относительно сложения* (по отношению ко второму множителю, а, значит, в силу антикоммутативности, — и по отношению к первому).

Аналогично, если

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{d} = d_1\boldsymbol{e}_1 + d_2\boldsymbol{e}_2 + d_3\boldsymbol{e}_3$$

— четыре вектора в пространстве, то

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3),$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$$

и

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + d_1 & c_2 + d_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \right) (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3).$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{d}. \tag{22}$$

В силу антикоммутативности аналогичные формулы имеют место и по отношению к первому или второму сомножителям. По определению это означает, что *внешнее умножение троек векторов дистрибутивно относительно сложения.*

Замечание 1. Формулы (21) и (22) равносильны известным из алгебры формулам

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + d_1 & c_2 + d_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

для определителей второго и третьего порядка. Соответствующее свойство определителей порядка n также может быть сформулировано как свойство дистрибутивности n-векторов в n-мерном пространстве.

Вообще, теория n-векторов в n-мерном пространстве является — в силу общей формулы (6) — лишь геометрической переформулировкой теории определителей порядка n.

Лекция 9

Длины, площади и объемы. — Сложение бивекторов в пространстве. — Линейное пространство бивекторов.

Для того чтобы измерять длину на прямой, необходимо выбрать *эталон длины*, т. е. отрезок, или лучше вектор, длина которого принимается равной единице. Конечно, этот вектор должен быть отличен от нуля.

Будучи отличным от нуля, каждый эталон длины $\boldsymbol{e}$ составляет базис на прямой, и, значит, любой вектор $\boldsymbol{a}$ на прямой задается формулой

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e},$$

где a — некоторое число (координата вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$).

Определение 1. Абсолютная величина $d = |a|$ числа a называется *длиной вектора* $\boldsymbol{a}$ *при эталоне* $\boldsymbol{e}$. Для любых двух точек M_0 и M_1 длина вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ называется *длиной отрезка* $\overline{M_0M_1}$.

Длина вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается символом $|\boldsymbol{a}|$, а длина отрезка $\overline{M_0M_1}$ — символом $|M_0M_1|$.

Ясно, что определение 1 согласуется с наглядно-интуитивным представлением о длине (является его аксиоматической экспликацией).

Если x_0 и x_1 — координаты точек M_0 и M_1 в координатной системе $O\boldsymbol{e}$ (где O — произвольная точка прямой), то

$$(1) \qquad a = x_1 - x_0 \quad \text{и} \quad d = |x_1 - x_0|.$$

Аналогичным образом на плоскости определяются площади параллелограммов, а в пространстве — объемы параллелепипедов.

Пусть $\mathfrak{e}$ — произвольный отличный от нуля бивектор на плоскости (или тривектор в пространстве). Тогда, как мы знаем, любой бивектор $\mathfrak{a}$ на плоскости (тривектор в пространстве) задается формулой

$$\mathfrak{a} = a\mathfrak{e},$$

где a — некоторое число.

Определение 2. Абсолютная величина $|a|$ числа a называется *площадью бивектора* $\mathfrak{a}$ (соответственно, *объ-*

емом тривектора $\mathfrak{a}$) *при эталоне* $\mathfrak{e}$. Для любых трех точек M_0, M_1, M_2 плоскости (четырех точек M_0, M_1, M_2, M_3 пространства) площадь бивектора $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2}$ (объем тривектора $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_3}$) называется *площадью параллелограмма*, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ (соответственно, *объемом параллелепипеда*, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ и $\overrightarrow{M_0M_3}$).

Определение 2 эксплицирует наглядное представление о площади и объеме (ср обсуждение в лекции 8 плоскостных и пространственных «векторов»).

Площадь (объем) бивектора (тривектора) $\mathfrak{a}$ обозначается символом $|\mathfrak{a}|$

Часто вместо абсолютной величины $|a|$ удобно рассматривать само число a, которое называется в этом своем качестве *ориентированной площадью* (соответственно, *ориентированным объемом*). Таким образом, ориентированная площадь (ориентированный объем) является не чем иным, как координатой в базисе $\mathfrak{e}$

Аналогично, на прямой можно говорить об *ориентированной длине* произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ (которая является не чем иным, как его координатой a в базисе $\boldsymbol{e}$).

Если на плоскости задана координатная система $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ (в пространстве — координатная система $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$), то за эталон площади (объема) $\mathfrak{e}$ естественно принимать внешнее произведение $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ (соответственно, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$) векторов базиса. Так как, согласно формуле (19) лекции 8,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2),$$

где (a_1, a_2) и (b_1, b_2) — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, и так как векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$ имеют координаты $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ и $(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$, где (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) — координаты точек M_0, M_1 и M_2 в координатной системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, то при этом выборе эталона площади для ориентированной площади параллелограмма с вершинами в точках M_0, M_1, M_2, которую мы обозначим буквой S, будет иметь место формула

$$S = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично, в пространстве для ориентированного объема V параллелепипеда с вершинами в точках M_0, M_1, M_2 и M_3 будет иметь место формула

$$(3)\qquad V=\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix},$$

где (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) — координаты точек M_0, M_1, M_2 и M_3 в координатной системе $Oe_1e_2e_3$.

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ 0 & x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix},$$

формулу (2) можно переписать в следующем — иногда более удобном — виде:

$$(4)\qquad S=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что

$$(5)\qquad V=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что и первую из формул (1) можно записать в таком же виде:

$$(6)\qquad a=\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

На плоскости площадь треугольника $M_0M_1M_2$ с вершинами $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ является (по определению!) половиной площади соответствующего параллелограмма. Поэтому *площадь треугольника $M_0M_1M_2$ равна абсолютной величине числа*

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Поскольку каждый плоский многоугольник разбивается на треугольники, это позволяет вычислить площадь любого такого многоугольника. [Конечно, нужно предварительно определить, что мы понимаем под площадью многоугольника, но этот на удивление совсем не тривиальный вопрос полностью выходит за рамки этого курса.]

Аналогичным образом, в пространстве *объем тетраэдра с вершинами* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *и* $M_3(x_3, y_3, z_3)$ *равен абсолютной величине числа*

$$(8)\qquad \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Подчеркнем, что все полученные формулы для площадей и объемов справедливы только при эталонах длины, площади и объема, являющихся внешними произведениями векторов базиса.

Мы рассмотрели тривекторы в пространстве и бивекторы на плоскости. Остался наиболее трудный, но зато и наиболее интересный случай бивекторов в пространстве.

Согласно общему определению 2 лекции 9 для любого линеала $\mathscr{V}$ в множестве $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ всех его бивекторов определена операция умножения на числа (элементы основного поля $\mathbb{K}$). Однако при $n = 3$ операция сложения в этом множестве у нас еще не построена. Займемся этим.

Определение 3. Будем говорить, что вектор $\boldsymbol{e}$ *параллелен* отличному от нуля бивектору $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, и писать $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$, если этот вектор линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Ясно, что это определение корректно (не зависит от произвола в выборе $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

Если $\mathfrak{a} = 0$, то мы, по определению, будем считать, что $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{e}$.

Заметим, что, согласно определению 3, нулевой вектор параллелен любому бивектору.

Ясно, что если $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$. Обратное предложение верно в следующей форме:

Предложение 1. *Если* $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$ *и* $\boldsymbol{e} \neq 0$, *то существует такой вектор* $\boldsymbol{a}$, *что*

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Если $\mathfrak{a} = 0$, то можно положить $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ (или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$). Пусть $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b}_1 \neq 0$. По условию существуют такие числа k и l, что

$$\boldsymbol{e} = k\boldsymbol{a}_1 + l\boldsymbol{b}_1.$$

Подберем такие числа k_1 и l_1, чтобы $kl_1 - lk_1 = 1$ (например, при $k \neq 0$ можно положить $k_1 = 0$ и $l_1 = k^{-1}$, а при $k = 0$ можно положить $k_1 = -l^{-1}$ и $l_1 = 0$; случай $k = 0$ и $l = 0$, в силу условия $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, невозможен), и положим

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + l_1\boldsymbol{b}_1.$$

Тогда $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$. □

Предложение 2. *Если $n \leqslant 3$, то для любых двух бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ существует такой отличный от нуля вектор $\boldsymbol{e}$, что $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$ и $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{b}$.*

Доказательство. Если хотя бы один из бивекторов $\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$ равен нулю, то существование вектора $\boldsymbol{e}$ очевидно. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $\mathfrak{a} \neq 0$ и $\mathfrak{b} \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a}_1$ и $\mathfrak{b} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}_1$. Четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}_1$ в линейном пространстве размерности $\leqslant 3$ необходимо линейно зависимы, т. е. существуют такие числа k, k_1, l и l_1, не все равные нулю, что

$$k\boldsymbol{a} + k_1\boldsymbol{a}_1 + l\boldsymbol{b} + l_1\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}.$$

Мы положим

$$\boldsymbol{e} = k\boldsymbol{a} + k_1\boldsymbol{a}_1 = -(l\boldsymbol{b} + l_1\boldsymbol{b}_1).$$

Ясно, что $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$ и $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{b}$. Кроме того, $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, ибо векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}_1$ линейно независимы. □

Определение 4. *Суммой* двух бивекторов вида $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$ называется бивектор $\boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Таким образом, по определению,

$$\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}). \tag{9}$$

Из предложений 1 и 2 следует, что при $n \leqslant 3$ эта конструкция позволяет определить сумму любых двух бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$: пользуясь предложением 2, находим такой вектор $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, что $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}$ и $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{b}$; затем, пользуясь предложением 1, находим такие векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$; наконец, полагаем

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Видно, что конструкция бивектора $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ содержит значительный произвол. Поэтому требует доказательства корректность этого определения, т. е. независимость суммы $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ от произвола в выборе векторов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Теорема 1 (о корректности определения сложения бивекторов). *Если*

$$(10)\qquad \boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b},$$

то

$$(11)\qquad \boldsymbol{e}' \wedge (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда бивекторы $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$ отличны от нуля. Тогда равенства (10) по определению означают, что

$$\boldsymbol{e}' = k\boldsymbol{e} + l\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{e}' = k'\boldsymbol{e} + l'\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{a}' = k_1\boldsymbol{e} + l_1\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}' = k_1'\boldsymbol{e} + l_1'\boldsymbol{b},$$

где $kl_1 - lk_1 = 1$ и $k'l_1' - l'k_1' = 1$.

Если векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы, то верхние два равенства могут быть одновременно выполненными только при $l' = l = 0$ (и $k' = k$), когда $l_1 = l_1' = k^{-1}$. Значит, в этом случае

$$\boldsymbol{e}' = k\boldsymbol{e},$$
$$\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' = (k_1 + k_1')\boldsymbol{e} + k^{-1}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),$$

и потому (см. формулу (6) лекции 8)

$$\boldsymbol{e}' \wedge (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') = \begin{vmatrix} k & 0 \\ k_1 + k_1' & k^{-1} \end{vmatrix} (\boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})) = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Пусть векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы (компланарны), но по-прежнему $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b} \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{b} = u\boldsymbol{e} + v\boldsymbol{a}$ и, значит, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = u\boldsymbol{e} + (1 + v)\boldsymbol{a}$. Поэтому

$$\boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 + v \end{vmatrix} (\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}) = (1 + v)(\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}).$$

С другой стороны, так как

$$\boldsymbol{e}' = k'\boldsymbol{e} + l'(u\boldsymbol{e} + v\boldsymbol{a}) = (k' + l'u)\boldsymbol{e} + (l'v)\boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{b}' = k_1'\boldsymbol{e} + l_1'(u\boldsymbol{e} + v\boldsymbol{a}) = (k_1' + l_1'u)\boldsymbol{e} + (l_1'v)\boldsymbol{a}$$

и, значит,

$$\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' = (k_1 + k_1' + l_1'u)\boldsymbol{e} + (l_1 + l_1'v)\boldsymbol{a},$$

то $k' + l'u = k$, $l'v = l$ и

$$e' \wedge (a' + b') = \begin{vmatrix} k' + l'u & l'v \\ k_1 + k_1' + l_1'u & l_1 + l_1'v \end{vmatrix} (e \wedge a) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} k & l \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k' + l'u & l'v \\ k_1' + l'u & l_1'v \end{vmatrix} \right) (e \wedge a) = (1 + v)(e \wedge a).$$

Таким образом, соотношение (11) имеет место и в этом случае.

Наконец, если бивектор $e \wedge b$ равен нулю, т. е. векторы e и b коллинеарны и, значит, $b = le$, то

$$e = e + 0a,$$
$$a + b = le + a,$$

и потому

$$e \wedge (a + b) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{vmatrix} (e \wedge a) = e \wedge a.$$

По аналогичным соображениям

$$e' \wedge (a' + b') = e' \wedge a',$$

и, значит, соотношение (11) имеет место в силу первой из формул (10).

Случай, когда $e \wedge a = 0$, рассматривается аналогично.

Тем самым теорема 1 полностью доказана. □

Обозначив векторы e, a, b буквами a, b, c, мы можем формулу (9) записать в следующем виде:

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c. \tag{12}$$

Поскольку при $a = 0$ эта формула, очевидно, также верна, мы получаем, что *внешнее умножение векторов дистрибутивно относительно сложения и при $n = 3$.*

Однако в отличие от случая $n = 2$ свойство дистрибутивности при $n = 3$ не имеет прямых алгебраических параллелей в теории определителей.

Заметим, что конструкция сложения бивекторов по формуле (9) имеет смысл не только при $n = 3$, но и при $n = 2$, когда складывать бивекторы мы уже умеем. Оказывается, однако, что при $n = 2$ *получается та же самая операция.* Действительно, так как обе операции дистрибутивны относительно сложения, сумма бивекторов $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$ в обоих случаях равна одному и тому же бивектору $\boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. □

Итак, в множестве бивекторов $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ при $n = 3$ мы имеем две операции: сложения и умножения на числа. Естественно спросить, не будет ли это множество линейным пространством? Ответ оказывается утвердительным:

Теорема 2. *Множество $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ всех бивекторов является линейным пространством и при $n = 3$.*

Доказательство этой теоремы состоит в проверке аксиом линейного пространства 1°—8°, что для всех аксиом, кроме аксиомы 1° ассоциативности сложения, делается абсолютно автоматически. Например, аксиома 7° проверяется следующей выкладкой (где $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$):

$$k(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = k(\boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})) = \boldsymbol{e} \wedge k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \\ = \boldsymbol{e} \wedge k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} \wedge k\boldsymbol{b} = k\mathfrak{a} + k\mathfrak{b}.$$

Единственная трудность состоит в проверке аксиомы 1°, которой мы займемся в следующей лекции.

Лекция 10

Ассоциативность сложения бивекторов. — Базис пространства бивекторов. — Условие параллельности вектора бивектору. — Плоскости в пространстве. — Параметрические уравнения плоскости. — Общее уравнение плоскости. — Плоскость, проходящая через три неколлинеарные точки.

Чтобы доказать теорему 2 предыдущей лекции, нам осталось доказать ассоциативность сложения бивекторов, т. е. доказать, что для любых трех бивекторов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ имеет место равенство

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}). \tag{1}$$

Если хотя бы один из бивекторов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ или $\mathfrak{c}$ равен нулю, то соотношение (1) очевидно. Поэтому без ограничения общности мы можем предполагать, что $\mathfrak{a}\neq 0$, $\mathfrak{b}\neq 0$ и $\mathfrak{c}\neq 0$.

Пользуясь предложениями 1 и 2 лекции 9, мы можем бивекторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{c}$ представить в виде

$$\mathfrak{a}=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a},\quad \mathfrak{c}=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{c},$$

где $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$. Если $\boldsymbol{e}\parallel\mathfrak{b}$, т. е. (см. предложение 1 лекции 9) если существует такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $\mathfrak{b}=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{b}$, то все сводится к ассоциативности сложения векторов:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}&=\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}\wedge((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c})=\\&=\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\\&=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{c})=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}).\end{aligned}$$

Таким образом, единственный нетривиальный случай возникает, когда $\boldsymbol{e}\nparallel\mathfrak{b}$.

Пусть $\mathfrak{b}=\boldsymbol{b}_1\wedge\boldsymbol{b}_2$. Так как $\mathfrak{b}\neq 0$, то при $\boldsymbol{e}\nparallel\mathfrak{b}$ три вектора $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ линейно независимы. Поэтому случай $\boldsymbol{e}\nparallel\mathfrak{b}$ возможен только при $n=3$, и тогда векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ будут составлять базис. Разложим вектор $\boldsymbol{a}$ по этому базису:

$$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{e}+k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2.$$

Тогда $\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a}'$, где $\boldsymbol{a}'=k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2$. Это означает, что без ограничения общности мы можем предполагать, что $\boldsymbol{a}\parallel\mathfrak{b}$.

Аналогично мы можем предполагать, что $c \parallel \mathfrak{b}$. Пусть, таким образом,

$$a = k_1 b_1 + k_2 b_2, \quad c = l_1 b_1 + l_2 b_2.$$

Тогда (см. формулу (6) лекции 9)

$$a \wedge c = \delta (b_1 \wedge b_2) = \delta \mathfrak{b},$$

где $\delta = k_1 l_2 - k_2 l_1 = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}$.

Поэтому, если $\delta \neq 0$, то

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = e \wedge a + \frac{1}{\delta}(a \wedge c) = \left(e - \frac{1}{\delta} c\right) \wedge a.$$

Так как, с другой стороны,

$$\mathfrak{c} = e \wedge c = \left(e - \frac{1}{\delta} c\right) \wedge c,$$

то

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \left(e - \frac{1}{\delta} c\right) \wedge (a + c). \tag{2}$$

Аналогично,

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \frac{1}{\delta}(a \wedge c) + e \wedge c = \left(\frac{1}{\delta} a + e\right) \wedge c,$$

$$\mathfrak{a} = e \wedge a = \left(\frac{1}{\delta} a + e\right) \wedge a$$

и

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \left(\frac{1}{\delta} a + e\right) \wedge (a + c). \tag{3}$$

Для завершения доказательства (при $\delta \neq 0$) остается заметить, что разность правых частей формул (2) и (3) равна нулю:

$$\left(e - \frac{1}{\delta} c\right) \wedge (a + c) - \left(\frac{1}{\delta} a + e\right) \wedge (a + c) =$$

$$= \left(e - \frac{1}{\delta} c - \frac{1}{\delta} a - e\right) \wedge (a + c) =$$

$$= -\frac{1}{\delta}(a + c) \wedge (a + c) = 0.$$

Наконец, если $\delta = 0$, то существует такое число h, что $\boldsymbol{c} = h\boldsymbol{a}$. Кроме того, поскольку $\boldsymbol{a} \parallel \mathfrak{b}$, существует такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $\mathfrak{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Поэтому

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = (\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{e} \wedge h\boldsymbol{a} = \\ = (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} = ((h+1)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a}$$

и, аналогично,

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}) = \\ = ((h+1)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a}.$$

Тем самым формула (1), а значит, и теорема 2 лекции 9 полностью доказаны. $\square$

Сохраняя предположение $n = 3$, рассмотрим произвольный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ линеала $\mathscr{V}$.

Для любых векторов

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + a^2\boldsymbol{e}_2 + a^3\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + b^3\boldsymbol{e}_3$$

этого линеала мы, пользуясь свойствами антикоммутативности, однородности и дистрибутивности внешнего умножения, немедленно получим, что

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) - \\ - (a^1b^3 - a^3b^1)(\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1) + (a^1b^2 - a^2b^1)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2).$$

С помощью определителей эта формула записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) - \\ - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1) + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2). \tag{4}$$

Для ее запоминания удобно эту формулу записать в следующем условном виде:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Действительно, формально разложив этот определитель по элементам первой строки, мы как раз получим формулу (4).

Теорема 1. *Бивекторы* $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$ *и* $e_1 \wedge e_2$ *составляют при* $n = 3$ *базис линеала* $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$. *Следовательно,*

$$\dim(\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}) = 3.$$

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся введенной в лекции 8 операцией внешнего умножения бивекторов на вектор (в результате которой получается тривектор). Легко видеть, что *эта операция дистрибутивна относительно сложения*, т. е. что

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c} + \mathfrak{b} \wedge \boldsymbol{c}$$

для любых бивекторов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и любого вектора $\boldsymbol{c}$. Действительно, если $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$, то

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \\ = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c} + \mathfrak{b} \wedge \boldsymbol{c}. \quad \square$$

Отсюда легко следует, что *бивекторы* $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$ *и* $e_1 \wedge e_2$ *линейно независимы*. Действительно, если

$$k_1(e_2 \wedge e_3) + k_2(e_3 \wedge e_1) + k_3(e_1 \wedge e_2) = 0,$$

то, умножив это равенство на e_3, мы немедленно получим, что

$$k_3(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 0,$$

т. е. (поскольку $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$), что $k_3 = 0$. Аналогично доказывается, что $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$. $\square$

Поскольку, согласно формуле (4), бивекторы $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$ и $e_1 \wedge e_2$ составляют полное семейство, это доказывает теорему 1. $\square$

Согласно формуле (4) или (5) координаты A, B, C бивектора $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ в базисе $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$, $e_1 \wedge e_2$ выражаются через координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе e_1, e_2, e_3 по формулам

$$(6) \qquad A = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix},$$

т. е. являются алгебраическими дополнениями элементов первой строки определителя (5).

Пусть $\boldsymbol{l}$ — произвольный вектор линеала $\mathscr{V}$ и пусть (l, m, n) — его координаты (в базисе e_1, e_2, e_3). Легко видеть, что *вектор $\boldsymbol{l}$ тогда и только тогда параллелен бивектору* $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, *когда*

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} l & m & n \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0,$$

где a^1, a^2, a^3 *и* b^1, b^2, b^3 — *координаты векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$. Действительно, при $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = 0$ равенство (7), очевидно, выполнено (для любого вектора $\boldsymbol{l}$). При $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq 0$ соотношение $\boldsymbol{l} \parallel \mathfrak{a}$ по определению означает, что вектор $\boldsymbol{l}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. что в определителе (7) первая строка является линейной комбинацией второй и третьей строк. Следовательно, определитель равен нулю. Обратно, пусть определитель (7) равен нулю. Тогда по теореме о невырожденных матрицах его строки линейно зависимы. При этом, так как $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq 0$, две его последние строки линейно независимы. Следовательно, его первая строка линейно выражается через две последние, и, значит, $\boldsymbol{l} \parallel \mathfrak{a}$. □

Предложение 1. *Вектор $\boldsymbol{l}$ с координатами (l, m, n) (в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) тогда и только тогда параллелен бивектору $\mathfrak{a}$ с координатами (A, B, C) (в базисе $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$), когда*

$$(8)\qquad Al + Bm + Cn = 0.$$

Доказательство. Разложив определитель (7) по элементам первой строки, мы, в силу формул (6), получим соотношение (8). □

Теперь мы уже можем строить теорию плоскостей в пространстве, почти дословно повторяя теорию прямых на плоскости.

Пусть $\mathscr{A}$ — аффинное трехмерное пространство, а $\mathscr{V}$ — ассоциированное с $\mathscr{A}$ линейное пространство.

Определение 1. Для любой точки $M_0 \in \mathscr{A}$ и любого отличного от нуля бивектора $\mathfrak{a} \in \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ *плоскостью* пространства $\mathscr{A}$, задаваемой точкой M_0 и бивектором $\mathfrak{a}$, называется множество всех таких точек $M \in \mathscr{A}$, что

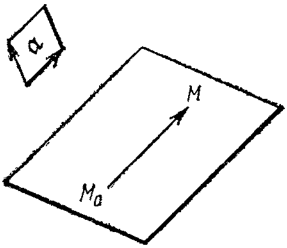
$$(9)\qquad \overrightarrow{M_0M} \parallel \mathfrak{a}.$$

При $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ это условие означает, что существуют числа u, v, для которых имеет место равенство

$$(10)\qquad \overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.$$

Бивектор $\mathfrak{a}$ называется *направляющим бивектором* плоскости. Вектор $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$ или бивектор $\mathfrak{a}' \in \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ называются *параллельными* плоскости, если, соответственно, $\boldsymbol{a} \parallel \mathfrak{a}$ или $\mathfrak{a}' = k\mathfrak{a}$.

Все векторы, параллельные плоскости, образуют, как легко видеть, линейное пространство размерности 2. Дословно так же, как для случая прямых (см. лекцию 5), отсюда следует, что любая плоскость естественным образом наделяется структурой аффинного пространства размерности 2 (с ассоциированным линеалом, состоящим из всех векторов, параллельных плоскости).



Плоскость, задаваемая точкой M_0 и бивектором $\mathfrak{a} \neq 0$

Так как $\mathbf{0} \parallel \mathfrak{a}$, то точка M_0 принадлежит рассматриваемой плоскости. Поэтому плоскость, задаваемую точкой M_0 и бивектором $\mathfrak{a} \neq 0$, называют также *плоскостью, проходящей через точку M_0 параллельно бивектору* $\mathfrak{a}$.

Точка M_0 и линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют на плоскости аффинную координатную систему. Координатами точки M в этой системе являются фигурирующие в соотношении (10) числа u и v.

Предложение 2. *Пусть N_0 — произвольная точка плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно бивектору $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, и пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный, отличный от нуля бивектор, параллельный этой плоскости. Тогда точка N_0 и бивектор $\mathfrak{b}$ задают ту же плоскость.*

Доказательство. По условию существуют такие числа u_0, v_0 и $h_0 \neq 0$, что

$$\overrightarrow{M_0N_0} = u_0\boldsymbol{a} + v_0\boldsymbol{b} \quad \text{и} \quad \mathfrak{b} = h_0\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Поэтому, если

$$\overrightarrow{M_0M} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b},$$

то

$$\overrightarrow{N_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0N_0} = (u - u_0)\,\boldsymbol{a} + (v - v_0)\,\boldsymbol{b} = u'\,(h_0\boldsymbol{a}) + v'\boldsymbol{b},$$

где $u' = \dfrac{u - u_0}{h_0}$ и $v' = v - v_0$.

Обратно, если

$$\overrightarrow{N_0M} = u'(h_0\boldsymbol{a}) + v'\boldsymbol{b},$$

то

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{N_0M} - \overrightarrow{N_0M_0} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b},$$

где $u = u'h_0 + u_0$ и $v = v' + v_0$. $\square$

Таким образом, плоскость может задаваться любой своей точкой и любым отличным от нуля бивектором, ей параллельным.

Пусть в $\mathscr{A}$ выбрана начальная точка O и пусть

$$\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}, \quad \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}.$$

Тогда формула (10) приобретет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}. \tag{11}$$

Когда параметры u и v независимо изменяются от $-\infty$ до $+\infty$, точка M с радиус-вектором, задаваемым формулой (11), пробегает всю рассматриваемую плоскость. Эта формула называется поэтому *векторным параметрическим уравнением* плоскости.

В произвольной аффинной координатной системе $Oe_1e_2e_3$ уравнение (11) равносильно трем уравнениям для координат:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua^1 + vb^1, \\ y &= y_0 + ua^2 + vb^2, \\ z &= z_0 + ua^3 + vb^3. \end{aligned} \tag{12}$$

Эти уравнения называются *координатными параметрическими уравнениями* плоскости.

Условие (9), т. е. условие $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \parallel \mathfrak{a}$, можно аналитически выразить и принципиально иными способами. Так, например (см. формулу (7)), это условие равносильно обращению в нуль определителя, составленного из координат векторов $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Таким образом, точка $M(x, y, z)$ тогда и только тогда принадлежит рассматриваемой плоскости, когда

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Короче говоря, (13) есть *уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *параллельно бивектору* $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$.

Разлагая (13) по элементам первой строки и полагая

$$(14)\quad A = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix},$$

мы получим *общее уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Полагая $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, мы можем его записать в виде

$$(15)\qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Сравнение формул (14) с формулами (6) показывает, что *коэффициенты* A, B, C *уравнения* (15) *являются координатами направляющего бивектора* $\mathfrak{a}$ (в базисе $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$).

Теперь легко видеть, что *любое уравнение вида* (15), *где* $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, *определяет некоторую плоскость*. Действительно, решая уравнение (15), найдем какую-нибудь тройку чисел (x_0, y_0, z_0), ему удовлетворяющую (например, если $A \neq 0$, то можно положить $x_0 = -\frac{D}{A}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$), и построим плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно бивектору $\mathfrak{a}(A, B, C)$. Из сказанного выше непосредственно следует, что уравнением этой плоскости будет уравнение (15). □

Мы будем говорить, что вектор $\boldsymbol{l}(l, m, n)$ *лежит в плоскости* (15) (или, что все равно, *параллелен* этой плоскости), если он параллелен ее направляющему бивектору $\mathfrak{a}(A, B, C)$, т. е. (см. формулу (5)) если

$$(16)\qquad Al + Bm + Cn = 0.$$

Легко видеть, что *для любых двух точек* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *плоскости* (15) *вектор* $\overrightarrow{M_0M_1}$ (*с координатами* $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ и $z_1 - z_0$) *лежит в этой плоскости*. Действительно, если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, то

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0. \quad \square$$

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат в плоскости (параллельны ее направляющему бивектору $\mathfrak{a}$), то их внешнее произведение $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ пропорционально бивектору $\mathfrak{a}$ и потому также является направляющим бивектором (если только оно отлично от нуля). Отсюда и из предыдущего утверждения вытекает, что *для любых трех неколлинеарных точек M_0, M_1, M_2 плоскости бивектор $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2}$ является направляющим бивектором этой плоскости.*

Полагая в (13) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_0M_1}$, мы получаем, что уравнение плоскости, проходящей через неколлинеарные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, может быть написано в виде

$$
\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{17}
$$

Это доказывает, в частности, единственность такой плоскости.

С другой стороны, уравнение (17) имеет смысл для любых трех неколлинеарных точек M_0, M_1, M_2 и, являясь (после раскрытия определителя) уравнением вида (15), определяет некоторую плоскость, очевидно содержащую данные точки.

Тем самым доказано следующее предложение:

Предложение 3. *Через любые три неколлинеарные точки M_0, M_1 и M_2 аффинного пространства проходит одна и только одна плоскость.* □

Обозначается эта плоскость символом $M_0M_1M_2$.

Лекция 11

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. — Прямые в пространстве. — Плоскости, проходящие через данную прямую. — Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. — Плоскости, проходящие через точку пересечения трех плоскостей. — Взаимное расположение двух прямых в пространстве. — Полупространства, на которые плоскость разбивает пространство. — Индуцированная ориентация плоскости. — Ориентация плоскости, задаваемая уравнением.

Определение 1. Две плоскости называются *параллельными*, если их направляющие бивекторы пропорциональны (и потому могут быть выбраны одинаковыми).

Если параллельные плоскости имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают (ибо плоскость однозначно определяется точкой и направляющим бивектором). Таким образом, *различные параллельные плоскости общих точек не имеют (не пересекаются)*.

С другой стороны, легко видеть, что *непараллельные плоскости обязательно имеют хотя бы одну общую точку*. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

— уравнения двух непараллельных плоскостей. Так как координатами их направляющих бивекторов являются, соответственно, числа A_0, B_0, C_0 и A_1, B_1, C_1, то (в силу непараллельности) тройка (A_0, B_0, C_0) не пропорциональна тройке (A_1, B_1, C_1), т. е. либо $\frac{A_0}{A_1} \neq \frac{B_0}{B_1}$, либо $\frac{A_0}{A_1} \neq \frac{C_0}{C_1}$, либо $\frac{B_0}{B_1} \neq \frac{C_0}{C_1}$. Пусть для определенности $\frac{A_0}{A_1} \neq \frac{B_0}{B_1}$. Тогда система двух уравнений

$$A_0x + B_0y + D_0 = 0 \text{ и } A_1x + B_1y + D_1 = 0$$

будет иметь единственное решение $x = x_0$, $y = y_0$. Это означает, что точка с координатами $(x_0, y_0, 0)$ принадлежит обеим плоскостям. $\square$.

Пусть $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор общей точки M_0 плоскостей (1), а $\mathfrak{a}_0$ (A_0, B_0, C_0) и $\mathfrak{a}_1$ (A_1, B_1, C_1) — их направляющие бивекторы.

Согласно предложениям 2 и 3 лекции 7 для бивекторов $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{a}_1$ существует такой вектор $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, что

$$\mathfrak{a}_0 = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \mathfrak{a}_1 = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Поэтому векторные параметрические уравнения рассматриваемых плоскостей можно записать в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{e} + v\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{e} + v\boldsymbol{b}.$$

Отсюда следует, что прямая

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{e} \tag{2}$$

содержится в каждой из данных плоскостей (ее точки получаются при $u = t$, $v = 0$). Этим доказано, что если пересечение двух плоскостей непусто, то оно содержит целую прямую.

Предположим, что это пересечение содержит хотя бы одну точку M_1, не принадлежащую прямой (2). Тогда вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{M_0M_1}$ будет принадлежать обеим плоскостям, т. е. будут иметь место соотношения $\boldsymbol{c} \parallel \mathfrak{a}_0$ и $\boldsymbol{c} \parallel \mathfrak{a}_1$. Так как по построению $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}_0$ и $\boldsymbol{e} \parallel \mathfrak{a}_1$, то бивектор $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{c}$ пропорционален обоим бивекторам $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{a}_1$. Поскольку по условию $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{c} \neq 0$, отсюда следует, что бивекторы $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{a}_1$ вопреки предположению пропорциональны. Поэтому точка M_1 существовать не может.

Таким образом, *пересечение двух непараллельных плоскостей представляет собой прямую.*

Если плоскости (1) параллельны, то тройки (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1) должны быть пропорциональны, т. е. должны иметь место равенства

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{C_0}{C_1}.$$

Если при этом

$$\frac{A_0}{A_1} \neq \frac{D_0}{D_1},$$

то общих точек у плоскостей, очевидно, нет (ср. в лекции 5 соответствующее рассуждение для прямых), а если

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{D_0}{D_1},$$

то плоскости совпадают. Поскольку обратные утверждения также, очевидно, справедливы, тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1 (о взаимном расположении двух плоскостей в пространстве). *Две плоскости в пространстве*

а) *либо не имеют ни одной общей точки;*

б) *либо имеют одну и только одну общую прямую;*

в) *либо совпадают.*

Случай а) *характеризуется тем, что*

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{B_0}{B_1}=\frac{C_0}{C_1}\neq\frac{D_0}{D_1},$$

случай б) — *тем, что имеет место хотя бы одно из неравенств*

$$\frac{A_0}{A_1}\neq\frac{B_0}{B_1},\quad \frac{A_0}{A_1}\neq\frac{C_0}{C_1},\quad \frac{B_0}{B_1}\neq\frac{C_0}{C_1},$$

а случай в) — *тем, что*

$$\frac{A_0}{A_1}=\frac{B_0}{B_1}=\frac{C_0}{C_1}=\frac{D_0}{D_1}.$$

В случаях а) *и* в) *плоскости параллельны, а в случае* б) *не параллельны.* □

В качестве следствия мы получаем (теорема единственности), что уравнения (1) тогда и только тогда определяют одну и ту же плоскость, когда эти уравнения пропорциональны.

Кроме того, мы видим, что прямые в пространстве могут характеризоваться как пересечения двух плоскостей, т. е. задаваться двумя уравнениями вида

$$\begin{aligned} &A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0,\\ &A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Требуется, конечно, чтобы коэффициенты A_0, B_0, C_0 и A_1, B_1, C_1 этих уравнений не были пропорциональны.

При этом легко видеть, что *любая прямая в пространстве является пересечением двух плоскостей*, т. е. может быть задана уравнениями вида (3).

Действительно, по определению (см. лекцию 4) каждая прямая состоит из всех точек $M(x, y, z)$, для которых вектор $\overrightarrow{M_0M}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — данная точка, коллинеарен данному вектору $\boldsymbol{a}(l, m, n)$. Это означает, что для координат векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ должна иметь место пропорция

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{4}$$

т. е. координаты x, y, z точки M должны удовлетворять двум уравнениям:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Переписав эти уравнения в виде

$$m(x-x_0)-l(y-y_0)=0,$$
$$n(x-x_0)-l(z-z_0)=0,$$

т. е. в виде

$$mx-ly-(mx_0-ly_0)=0,$$
$$nx-lz-(nx_0-lz_0)=0,$$

мы и получим уравнения вида (3) (с непропорциональными коэффициентами $A_0=m$, $B_0=-l$, $C_0=0$ и $A_1=n$, $B_1=0$, $C_1=-l$). □

Уравнения (4) называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве.

В качестве примера на использование полученных результатов мы докажем следующее предложение:

Предложение 1. *Для любой прямой и любой не лежащей на ней точки существует единственная плоскость, содержащая эту прямую и эту точку.*

Доказательство. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — данная точка и

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

— канонические уравнения данной прямой. Предположим, что искомая плоскость существует. Тогда векторы $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ принадлежат этой плоскости, и потому их внешнее произведение $\overrightarrow{M_0M_1}\wedge\boldsymbol{a}$ (по условию отличное от нуля) будет ее направляющим бивектором. Этим доказано, что рассматриваемая плоскость задается точкой M_1 и бивектором $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \boldsymbol{a}$. Поэтому она определена единственным образом.

Существование требуемой плоскости теперь очевидно: ею будет плоскость, задаваемая точкой M_0 и бивектором $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \boldsymbol{a}$. □

Уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Предложение 1 можно доказать и другим способом, основываясь на следующем предложении, являющемся аналогом предложения 1 лекции 5.

Предложение 2. *Для любой прямой* (3) *каждое уравнение вида*

$$(5)\quad (A_0x + B_0y + C_0z + D_0)\,\mu + \\ + (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)\,\nu = 0,$$

т. е. вида

$$(A_0\mu + A_1\nu)\,x + (B_0\mu + B_1\nu)\,y + (C_0\mu + C_1\nu)\,z + \\ + (D_0\mu + D_1\nu) = 0,$$

где $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, *определяет плоскость, проходящую через эту прямую, и обратно, любая плоскость, проходящая через прямую* (4), *задается уравнением вида* (5).

Доказательство. Так как тройки (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1) по условию не пропорциональны, то при любых μ и ν, одновременно не равных нулю, в уравнении (5) хотя бы один коэффициент при x, y, z отличен от нуля, и потому это уравнение определяет плоскость. Так как координаты любой точки прямой (3) обращают в нуль обе скобки в (5), то прямая (3) принадлежит этой плоскости.

Обратно, пусть

$$(6)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

— произвольная плоскость, проходящая через прямую (3). Тогда для каждой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой будут иметь место равенства

$$(7)\qquad \begin{aligned} A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0 + D &= 0,\\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 &= 0,\\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0, \end{aligned}$$

а для ее направляющего вектора $\mathfrak{a}(l, m, n)$ — равенства

$$(8)\qquad \begin{aligned} A_0l + B_0m + C_0n &= 0,\\ A_1l + B_1m + C_1n &= 0,\\ Al + Bm + Cn &= 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как тройки (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1) не пропорциональны, то хотя бы один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \\ C_0 & C_1 \end{Vmatrix}$$

отличен от нуля. Пусть, например,

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ B_0 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по теореме Крамера существуют такие числа μ_0 и ν_0, что

$$(10)\qquad \begin{aligned} A_0\mu_0 + A_1\nu_0 &= A,\\ B_0\mu_0 + B_1\nu_0 &= B. \end{aligned}$$

Поэтому, сложив первые два равенства (8), предварительно умноженные на μ_0 и ν_0, и вычтя из их суммы третье, мы получим соотношение

$$(11)\qquad (C_0\mu_0 + C_1\nu_0 - C)\,n = 0.$$

Заметим теперь, что $n \neq 0$. (Если $n = 0$, то, поскольку $(l, m) \neq (0, 0)$, первые два равенства (8) могут иметь место только при

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0,$$

что противоречит предположению (9).) Поэтому из (11) следует, что

$$C_0\mu_0 + C_1\nu_0 = C. \tag{12}$$

Сложив теперь первые два равенства (7), умноженные предварительно на μ_0 и ν_0, и вычтя из их суммы третье, мы получим соотношение

$$D_0\mu_0 + D_1\nu_0 = D,$$

вместе с (10) и (12) показывающее, что уравнение (6) имеет вид (5). □

Для вывода предложения 1 из предложения 2 достаточно заметить, что для любой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не принадлежащей прямой (3), равенство

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_0x_1 + B_0y_1 + C_0z_1 + D}$$

однозначно с точностью до пропорциональности определяет пару $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, для которой плоскость (5) проходит через точку M_1.

Замечание 1. Уравнение (5) можно рассматривать и для параллельных плоскостей

$$\begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Оно дает плоскость при $\mu : \nu \neq -A_1 : A_0$. Эта плоскость параллельна плоскостям (13), и все плоскости, параллельные плоскостям (13), можно представить в таком виде. Однако на практике уравнения последних плоскостей лучше записывать в виде

$$A_0x + B_0y + C_0z + D = 0,$$

где D — произвольный параметр. (Ср. с замечанием 1 в лекции 5.)

Изучим теперь взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Определение 2. Прямая называется *параллельной* плоскости, если ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ параллелен направляющему бивектору $\alpha(A, B, C)$ плоскости.

Как мы знаем (см. формулу (16) предыдущей лекции), это имеет место тогда и только тогда, когда

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{14}$$

Согласно предложению 1 лекции 9 при $\boldsymbol{a} \parallel \mathfrak{a}$ существует такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Поэтому, если плоскость и параллельная ей прямая имеют общую точку M_0 с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$, то векторное параметрическое уравнение прямой может быть записано в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \tag{15}$$

а векторное параметрическое уравнение плоскости — в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}. \tag{16}$$

Поскольку каждый вектор (15) имеет вид (16) (при $u = t$ и $v = 0$), этим доказано, что плоскость и параллельная ей прямая либо не имеют ни одной общей точки (не пересекаются), либо прямая целиком содержится в плоскости.

Иначе этот факт можно установить, подставив параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + tl, \ y = y_0 + tm, \ z = z_0 + tn$$

в общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Результат этой подстановки имеет вид

$$(Al + Bm + Cn)\,t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{17}$$

Поэтому, если прямая параллельна плоскости, т. е. выполнено условие (14), то уравнение (17) относительно t (дающее значения параметра t для общих точек прямой и плоскости) либо удовлетворяется тождественно (когда точка M_0 принадлежит плоскости, т. е. когда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$), либо вообще не имеет решений (в противном случае).

Более того, так как уравнение (17) при $Al + Bm + Cn \neq 0$ имеет одно и только одно решение, мы также получаем, что плоскость и не параллельная ей прямая всегда имеют одну и только одну общую точку.

Соберем все эти результаты в единую теорему.

Теорема 2 (о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве). *Плоскость и прямая в пространстве*

а) *либо не пересекаются;*

б) *либо имеют единственную общую точку;*

в) *либо прямая целиком содержится в плоскости.*

Случай а) *характеризуется тем, что*

$$Al + Bm + Cn = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

случай б) — *тем, что*

$$Al + Bm + Cn \neq 0,$$

а случай в) — *тем, что*

$$Al + Bm + Cn = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

В случаях а) *и* в) *прямая параллельна плоскости, а в случае* б) — *не параллельна.* □

Поскольку каждая прямая является пересечением двух плоскостей, теорему 2 можно рассматривать как частный случай некоей общей теоремы о взаимном расположении трех (или любого большего числа) плоскостей в пространстве. Различные возможности расположения этих плоскостей оказывается удобным характеризовать равенством нулю (или отличием от нуля) некоторых миноров матрицы, составленной из коэффициентов общих уравнений плоскостей. Это представляет собой не что иное, как геометрическую переформулировку (для случая трех неизвестных) общих алгебраических утверждений о решениях систем линейных уравнений.

Например, ясно, что *три плоскости*

$$\begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

тогда и только тогда имеют единственную общую точку, когда

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{19}$$

(Действительно, как известно из алгебры, условие (19) необходимо и достаточно, чтобы уравнения (18) имели единственное решение.)

Общий случай мы оставим читателю для самостоятельного исследования.

Докажем теперь следующее предложение, являющееся, подобно предложению 2, аналогом предложения 1 лекции 5:

Предложение 3. *Для любых трех плоскостей* (18), *имеющих единственную общую точку* $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$, *каждое уравнение вида*

$$(20)\quad (A_0x + B_0y + C_0z + D_0)\,\mu_0 + \\ + (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)\,\mu_1 + \\ + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2)\,\mu_2 = 0,$$

где $(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3) \neq (0,\ 0,\ 0)$, *т. е. вида*

$$(A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + A_2\mu_2)\,x + (B_0\mu_0 + B_1\mu_1 + B_2\mu_2)\,y + \\ + (C_0\mu_0 + C_1\mu_1 + C_2\mu_2)\,z + (D_0\mu_0 + D_1\mu_1 + D_2\mu_2) = 0,$$

определяет плоскость, проходящую через точку M_0, *и обратно, любая плоскость, проходящая через эту точку, имеет уравнение вида* (20).

Доказательство (вполне аналогичное доказательствам предложения 1 лекции 5 и предложения 2). Ввиду условия (19) для любых μ_0, μ_1, μ_2, одновременно не равных нулю, в уравнении (20) хотя бы один коэффициент при x, y, z отличен от нуля, и, значит, это уравнение определяет плоскость. Так как координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0 обращают в нуль все три скобки в (20), то плоскость (20) проходит через точку M_0.

Обратно, пусть

$$(21)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

— произвольная плоскость, проходящая через точку M_0. Тогда

$$(22)\qquad \begin{aligned} A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0 + D_0 &= 0, \\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 &= 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 &= 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0, \end{aligned}$$

и, с другой стороны, ввиду условия (19), существуют такие числа μ_0, μ_1, μ_2, что

$$(23)\qquad \begin{aligned} A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + A_2\mu_2 &= A, \\ B_0\mu_0 + B_1\mu_1 + B_2\mu_2 &= B, \\ C_0\mu_0 + C_1\mu_1 + C_2\mu_2 &= C. \end{aligned}$$

Поэтому, сложив первые три равенства (22), умноженные, соответственно, на μ_0, μ_1, μ_2, и вычтя четвертое, мы получим соотношение

$$D_0\mu_0 + D_1\mu_1 + D_2\mu_2 = D.$$

Вместе с (23) это показывает, что уравнение (21) имеет вид (20). □

Замечание 2. Если условие (19) не выполнено, т. е. если плоскости (18) либо параллельны, либо прямая d пересечения двух из них параллельна третьей, то уравнение (20) (для тех значений μ_0, μ_1 и μ_2, для которых хотя бы один коэффициент при x, y, z отличен от нуля) будет, соответственно, уравнением плоскости, параллельной либо плоскостям (18), либо прямой d. (Действительно, в первом случае

$$A_0 : A_1 : A_2 = B_0 : B_1 : B_2 = C_0 : C_1 : C_2,$$

и потому

$$\frac{A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + A_2\mu_2}{A_0} = \frac{B_0\mu_0 + B_1\mu_1 + B_2\mu_2}{B_0} = \frac{C_0\mu_0 + C_1\mu_1 + C_2\mu_2}{C_0}$$

для любых μ_0, μ_1, μ_2, а во втором случае, если $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ — направляющий вектор прямой d, и, значит,

$$A_0l + B_0m + C_0n = 0,$$
$$A_1l + B_1m + C_1n = 0,$$
$$A_2l + B_2m + C_2n = 0,$$

то

$$(A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + A_2\mu_2)\,l + (B_0\mu_0 + B_1\mu_1 + B_2\mu_2)\,m + \\ + (C_0\mu_0 + C_1\mu_1 + C_2\mu_2)\,n = 0$$

для любых μ_0, μ_1, μ_2.) При этом, конечно, любая плоскость, параллельная плоскостям (18) или прямой d, может быть представлена в виде (20).

Исследуем теперь взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Мы уже знаем (см. лекцию 5), что параллельные прямые либо не пересекаются, либо совпадают.

К этому мы можем сейчас добавить, что *несовпадающие параллельные прямые лежат в одной и только одной плоскости.*

Действительно, выбрав на первой прямой произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а на второй прямой произвольную точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$, рассмотрим плоскость с векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + v\boldsymbol{a}, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ — направляющий вектор данных прямых, а $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-векторы точек M_1 и M_2. Поскольку вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ не коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ (в противном случае рассматриваемые прямые совпадают), формула (24) действительно задает некоторую плоскость. Так как при $u = 0$ получаются точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + v\boldsymbol{a}$ первой прямой, а при $u = 1$ — точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + v\boldsymbol{a}$ второй прямой, этим существование плоскости, содержащей данные прямые, доказано. В координатной форме уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Для доказательства единственности плоскости, содержащей данные прямые, достаточно заметить, что, поскольку любая такая плоскость содержит точки M_1 и M_2 и параллельна вектору $\boldsymbol{a}$ (и, значит, имеет направляющий бивектор вида $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \boldsymbol{a}$), ее векторное параметрическое уравнение может быть записано в виде (24). □

Рассмотрим теперь две непараллельные прямые. Такие прямые имеют не более одной общей точки (если прямые имеют две общие точки, то они совпадают и потому параллельны). Легко видеть, что, подобно параллельным прямым, *непараллельные прямые, имеющие общую точку (пересекающиеся), лежат в одной и только одной плоскости*.

Действительно, плоскость с векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a}_1 + v\boldsymbol{a}_2,$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор общей точки M_0 данных прямых, а $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ — их направляющие векторы, содержит, очевидно, обе прямые (они получаются, соответственно, при $u = 0$ и $v = 0$). Единственность этой плоскости обеспечивается тем, что она проходит через данную точку M_0 и имеет данный направляющий бивектор $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2$. □

В координатах уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 — координаты векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, а x_0, y_0, z_0 — координаты точки M_0.

Если непараллельные прямые с направляющими векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не пересекаются (такие прямые называются *скрещивающимися*), то они не могут лежать в одной плоскости. С другой стороны, каждая из этих прямых параллельна любой плоскости с направляющим бивектором $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2$, т. е. либо содержится в такой плоскости, либо с ней не пересекается. Выбрав на одной из прямых точку M_1 и проведя через нее плоскость с направляющим бивектором $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2$, мы получим плоскость, содержащую эту прямую и потому не пересекающуюся со второй прямой. Поэтому для любой точки M_2 второй прямой вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ линейно не выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, и, значит, три вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ линейно независимы. Следовательно, определитель, составленный из их координат, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 3 (о взаимном расположении двух прямых в пространстве). *Две прямые в пространстве*

а) *либо не лежат в одной плоскости* (*скрещиваются*) *и тогда не пересекаются;*

б) *либо лежат в одной плоскости и не пересекаются;*

в) *либо лежат в одной плоскости и пересекаются в единственной точке;*

г) *либо совпадают.*

Случай а) *характеризуется тем, что определитель матрицы*

$$\left\| \begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix} \right\| \tag{26}$$

отличен от нуля; случай б) — *тем, что последние две строки матрицы* (26) *пропорциональны, но не пропорциональны первой строке; случай* в) — *тем, что последние две строки матрицы* (26) *не пропорциональны, но первая строка является их линейной комбинацией, и, наконец,* *случай* г) — *тем, что все три строки матрицы* (26) *пропорциональны.*

В случаях б) *и* г) *данные прямые параллельны, а в случаях* а) *и* в) *не параллельны.*

Все сказанное выше справедливо для аффинного пространства над любым полем $\mathbb{K}$. Теперь мы предположим, что этим полем является поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Определение 3. Две точки M_1 и M_2, не принадлежащие плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{27}$$

называются *неразделенными этой плоскостью*, если они либо совпадают, либо отрезок $\overline{M_1M_2}$ не имеет общих точек с плоскостью (27).

Положим для сокращения формул

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Предложение 4. *Точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *не принадлежащие плоскости* (27), *тогда и только тогда неразделены, когда отличные от нуля числа* $F_1 = F(x_1, y_1, z_1)$ *и* $F_2 = F(x_2, y_2, z_2)$ *имеют одинаковые знаки.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $M_1 \neq M_2$. Тогда определена прямая M_1M_2, координатные параметрические уравнения которой имеют вид

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2,$$
$$y = (1 - t)y_1 + ty_2,$$
$$z = (1 - t)z_1 + tz_2.$$

Подставив эти выражения в уравнение $F(x, y, z) = 0$, мы получим для t уравнение

$$(1 - t)F_1 + tF_2 = 0,$$

откуда следует, что

$$t = \frac{F_1}{F_1 - F_2}$$

(если $F_1 = F_2$, то решения не существует, т. е. прямая M_1M_2 параллельна плоскости (27)). С помощью уже известного нам рассуждения (см. лекцию 5) отсюда выводится, что $0 < t < 1$ тогда и только тогда, когда числа F_1

и F_2 имеют разные знаки. Поэтому отрезок тогда и только тогда не пересекает плоскость (27), когда знаки этих чисел одинаковы. $\square$

Из предложения 4 непосредственно вытекает, что отношение неразделенности является отношением эквивалентности и что соответствующих классов эквивалентности имеется точно два.

Определение 4. Эти классы эквивалентности называются *полупространствами*, определенными плоскостью (27) (или *сторонами* этой плоскости).

Таким образом, две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не принадлежащие плоскости (27), тогда и только тогда принадлежат одному полупространству, когда отрезок $\overline{M_1M_2}$ не пересекает эту плоскость, т. е. когда числа $F(x_1, y_1, z_1)$ и $F(x_2, y_2, z_2)$ имеют одинаковые знаки.

Дословно так же, как для случая прямой, доказывается, что

1) для любого не параллельного плоскости вектора $\boldsymbol{n}$ и любой точки M_0 плоскости сторона плоскости, определенная точкой N_0, для которой $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_0N_0}$, не зависит от выбора точки M_0, т. е. определяется этим вектором $\boldsymbol{n}$; говорят, что вектор $\boldsymbol{n}$ *направлен в эту сторону*;

2) вектор вида $\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор, параллельный плоскости, тогда и только тогда направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{n}$, когда $l > 0$;

3) из трех объектов:

а) ориентация плоскости,

б) сторона плоскости,

в) ориентация пространства

— любые два определяют третий.

Например, если ориентация плоскости задана базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, а сторона плоскости — вектором $\boldsymbol{n}$, то ориентация пространства, по определению, задается базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$. Если

$$\boldsymbol{a}_1 = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{b}_1 = k_1'\boldsymbol{a} + k_2'\boldsymbol{b}$$

— одноименный с базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ базис плоскости, а

$$\boldsymbol{n}_1 = l_1\boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{b} + l\boldsymbol{n}$$

— вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{n}$, то базисы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{n}_1$ одноименны, поскольку определитель их матрицы перехода равен

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_1' & l_1 \\ k_2 & k_2' & l_2 \\ 0 & 0 & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & k_1' \\ k_2 & k_2' \end{vmatrix} l$$

и, значит, положителен, ибо по условию

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_1' \\ k_2 & k_2' \end{vmatrix} > 0 \quad \text{и} \quad l > 0.$$

Следовательно, ориентация пространства, задаваемая базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$, определена корректно. □

Называя *ориентацией полупространства* ориентацию всего пространства, мы, в частности, получаем, что каждая ориентация полупространства естественно определяет ориентацию (называемую *индуцированной ориентацией*) ограничивающей это полупространство плоскости. Эта ориентация задается базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, составляющим вместе с произвольным вектором $\boldsymbol{n}$, направленным внутрь полупространства, положительно ориентированный базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ пространства.

Если в пространстве задана аффинная координатная система $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, то задана и ориентация. Уравнение же плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{28}$$

задает ее сторону (условием $Ax + By + Cz + D > 0$; эта сторона называется *положительной*). Поэтому уравнение плоскости задает ее ориентацию, которая остается прежней при умножении уравнения (28) на положительное число и переходит в противоположную ориентацию при умножении на отрицательное число.

Аналогично случаю прямой, вектор $\boldsymbol{n}$ с координатами A, B, C направлен в положительную сторону плоскости (28). Что же касается определяемой уравнением (28) ориентации плоскости, то она задается произвольной парой

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ линейно независимых векторов, параллельных плоскости и обладающих тем свойством, что

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0, \tag{29}$$

где a^1, a^2, a^3 и b^1, b^2, b^3 — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Согласно формулам (6) лекции 10 существуют такие линейно независимые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, параллельные плоскости (28), что координаты бивектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, т. е. алгебраические дополнения элементов последней строки определителя (29), будут как раз элементами A, B, C этой строки. Поэтому для таких векторов определитель (29) будет равен $A^2 + B^2 + C^2$ и, следовательно, будет положителен. Это доказывает, что *определяемую уравнением* (28) *ориентацию плоскости задает направляющий бивектор* $\mathfrak{a}$ (A, B, C).

Лекция 12

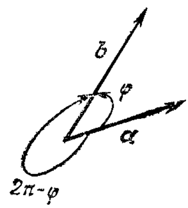
Скалярное произведение. — Аксиомы скалярного умножения. — Евклидовы пространства. — Длина вектора и угол между векторами. — Неравенство Коши — Буняковского — Неравенство треугольника. — Теорема о диагоналях параллелограмма. — Ортогональные векторы и теорема Пифагора. — Метрическая форма и метрические коэффициенты. — Условие положительной определенности. — Формулы преобразования метрических коэффициентов при замене базиса.

Для построения обычной школьной геометрии с измерениями длин и углов аффинных аксиом 1°—11° недостаточно. Чтобы найти дополнительные аксиомы, мы, как всегда, сначала исследуем вопрос на наглядно-интуитивном уровне.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два «геометрических» вектора. Предполагая их отличными от нуля, рассмотрим угол между ними. Этот угол имеет два значения: φ и $2\pi - \varphi$, косинусы которых одинаковы. Поэтому формула

$$\boldsymbol{ab} = ab \cos \varphi, \tag{1}$$

где a и b — длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, однозначно определяет некоторое число $\boldsymbol{ab}$.



Угол между двумя векторами

Определение 1. Число $\boldsymbol{ab}$, определенное формулой (1), называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ или $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, то, по определению, $\boldsymbol{ab} = 0$. Операция $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{ab}$ называется *скалярным умножением*.

Ясно, что скалярное умножение к о м м у т а т и в н о:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

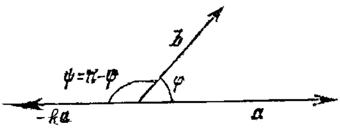
Кроме того, легко видеть, что оно о д н о р о д н о, т. е.

$$k(\boldsymbol{ab}) = (k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(k\boldsymbol{b}) \tag{2}$$

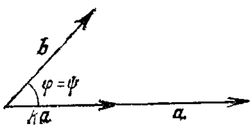
для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и любого числа k. Действительно, при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ или $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, а также при $k = 0$ формула (2) очевидна. Если же $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$ и $k \neq 0$, то длина вектора $k\boldsymbol{a}$ равна $|k|\, a$, а угол ψ между векторами $k\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен углу φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, когда $k > 0$, и равен $\pi - \varphi$, когда $k < 0$. Поэтому $k \cos\varphi = |k| \cos\psi$, и, значит,

$$(k\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = (|k|\, a)\, b \cos\psi = ab\,(|k| \cos\psi) = abk \cos\varphi =$$
$$= k\,(ab \cos\varphi) = k\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}).$$

Формула $\boldsymbol{a}(k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$ доказывается аналогично (можно также воспользоваться коммутативностью). □



Случай $k<0$



Случай $k>0$

Значение скалярного произведения состоит в том, что через него выражаются и длины, и углы. Действительно, так как $\varphi = 0$ при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то для длины a любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеет место формула

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^2},$$

где $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ («скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины»), и, значит, для угла φ между отличными от нуля векторами — формула

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}\,\sqrt{\boldsymbol{b}^2}}.$$

В частности, мы видим, что

$\boldsymbol{a}^2 \geqslant 0$ *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$, *причем* $\boldsymbol{a}^2 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Это свойство скалярного умножения называется его положительностью.

Число $a \cos\varphi$ называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{b} \neq 0$ и обозначается символом $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{e}$ — *орт вектора* $\boldsymbol{b}$ (вектор длины 1, имеющий направление вектора $\boldsymbol{b}$, т. е. такой, что $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}$). Таким образом,

(3) $$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \text{пр}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{a} \cdot b$$

и

(4) $$\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}.$$

Пусть $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}$ и пусть $\boldsymbol{e}_2$ — вектор длины 1, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{e}_1$ и (при $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq 0$) лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (т. е. в плоскости, параллельной бивектору $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$). Тогда ясно (скажем, непосредственно из чертежа), что проекция $\text{пр}_e\,\boldsymbol{a}$ является не чем иным, как координатой x^1 вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$:

$$x^1 = \text{пр}_e\,\boldsymbol{a}.$$

Поскольку координаты суммы равны суммам координат слагаемых, отсюда немедленно следует, что *проекция суммы равна сумме проекций*, т. е.

$$\text{пр}_e\,(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) = \text{пр}_e\,\boldsymbol{a}_1 + \text{пр}_e\,\boldsymbol{a}_2 \tag{5}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Теперь легко видеть, что *скалярное умножение дистрибутивно относительно сложения*, т. е.

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b} \tag{6}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$ (что и оправдывает наименование этой операции «умножением»). Действительно, при $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ формула (6) очевидна, а при $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ немедленно вытекает из формул (3) и (5):

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{b} = \text{пр}_e\,(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\cdot b = (\text{пр}_e\,\boldsymbol{a}_1 + \text{пр}_e\,\boldsymbol{a}_2)\,b =$$
$$= \text{пр}_e\,\boldsymbol{a}_1\cdot b + \text{пр}_{e_1}\,\boldsymbol{a}_2\cdot b = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}. \quad \square$$

В аксиоматической теории мы, как всегда, должны «обернуть» полученные результаты и принять их за аксиомы.

Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Определение 2. *Скалярным умножением* на пространстве $\mathscr{V}$ называется произвольная функция $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \longmapsto \boldsymbol{ab}$ пары векторов, принимающая числовые значения и обладающая следующими свойствами (мы продолжаем единую нумерацию аксиом):

12° (д и с т р и б у т и в н о с т ь). Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \in \mathscr{V}$

$$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}.$$

13° (о д н о р о д н о с т ь). Для любых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$ и любого числа k

$$k\,(\boldsymbol{ab}) = (k\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,(k\boldsymbol{b}).$$

14° (к о м м у т а т и в н о с т ь). Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}.$$

15° (положительность). Для любого отличного от нуля вектора $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$

$$\boldsymbol{a}^2 > 0.$$

Число $\boldsymbol{ab}$ называется при этом *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Замечание 1. Обозначение $\boldsymbol{ab}$ неудобно, когда элементами пространства $\mathscr{V}$ являются, скажем, функции. Поэтому вместо $\boldsymbol{ab}$ часто пишут $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. К этому обозначению также следует привыкнуть.

Определение 3. Линейное пространство $\mathscr{V}$, для которого выбрано и зафиксировано некоторое скалярное умножение $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{ab}$, называется *евклидовым линейным пространством*, короче — *евклидовым линеалом*. (Некоторые авторы называют такое пространство также *вещественным унитарным пространством* и даже, не мудрствуя лукаво, *пространством со скалярным умножением*.)

Евклидовым точечным пространством называется аффинное пространство $\mathscr{A}$, в ассоциированном линейном пространстве которого выбрано скалярное умножение (т. е. которое превращено в евклидово линейное пространство).

Раздел математики, в котором изучают евклидовы пространства, называется *евклидовой геометрией*. По сравнению с аффинной геометрией, евклидова геометрия имеет одно дополнительное первоначальное понятие («скалярное умножение») и четыре дополнительные аксиомы 12°—15°.

В евклидовом линейном пространстве *длина вектора* $\boldsymbol{a}$ (обозначаемая обычно символом $|\boldsymbol{a}|$, а иногда $\|\boldsymbol{a}\|$) определяется формулой

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} \tag{7}$$

(в других обозначениях: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$), а *угол* φ между двумя отличными от нуля векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — формулой

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}, \tag{8}$$

которая дает для φ два значения (в сумме составляющие 2π).

В евклидовом точечном пространстве *расстояние* $|M_0M_1|$ между двумя точками определяется формулой

$$|M_0M_1| = |\overrightarrow{M_0M_1}|,$$

а угол φ между двумя прямыми — формулой (8), в которой $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные направляющие векторы данных прямых. (Эта формула дает для φ — в зависимости от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — четыре различных значения, а если наложить на φ ограничение $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то два.)

Аксиома положительности 15° обеспечивает то, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ формула (7) однозначно определяет его длину $|\boldsymbol{a}|$, являющуюся вещественным неотрицательным числом. При этом $|\boldsymbol{a}| > 0$, если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и $|\boldsymbol{a}| = 0$, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (последнее следует из аксиомы однородности 13° при $k = 0$).

Хуже дело обстоит с формулой (8). Здесь требует специального доказательства то, что ее правая часть принадлежит области определения арккосинуса, т. е. что

$$|\boldsymbol{ab}| \leqslant |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|,$$

или, иными словами, что

$$(\boldsymbol{ab})^2 \leqslant \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2. \tag{9}$$

Это неравенство называется неравенством Коши—Буняковского. Для его доказательства мы рассмотрим функцию

$$f(t) = (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b})^2$$

числовой переменной t. Согласно аксиоме 15° для всех t имеет место неравенство $f(t) \geqslant 0$. С другой стороны,

$$f(t) = \boldsymbol{a}^2 + 2t(\boldsymbol{ab}) + t^2\boldsymbol{b}^2,$$

а из элементарной алгебры известно, что если квадратный трехчлен принимает лишь неотрицательные значения, то его дискриминант (подкоренное выражение в формуле для корней квадратного уравнения) неположителен. В нашем случае этот дискриминант равен $(\boldsymbol{ab})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$, что и доказывает неравенство (9). □

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то в (9) имеет место равенство. Обратно, если $(\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$, то при $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, согласно формуле для корней квадратного уравнения, $f(t_0)=0$, где $t_0=-\frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{b}^2}$. Поэтому $\boldsymbol{a}+t_0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. Таким образом, *неравенство Коши—Буняковского обращается в равенство только для коллинеарных векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

При $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ это означает, что *угол* φ *между неколлинеарными векторами отличен от нуля и от* π, тогда как между коллинеарными векторами он равен либо нулю (если векторы положительно пропорциональны), либо π (в противном случае).

Из неравенства Коши—Буняковского вытекает, что

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2$$

и, аналогично, что

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2\geqslant$$
$$\geqslant|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2.$$

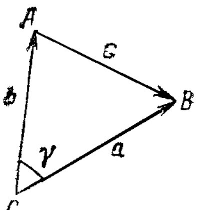
Отсюда следует, что

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{10}$$

Если ABC — произвольный треугольник и $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$, то $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$, и мы получаем из (10) знакомые неравенства:

$$||AB|-|BC||\leqslant|AC|\leqslant|AB|+|BC|$$

(«сторона треугольника не больше суммы двух других сторон и не меньше их разности»). На этом основании неравенства (10) обычно называются **неравенствами треугольника**.



$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

Скалярное умножение является мощным средством доказательства геометрических теорем. Рассмотрим, например, произвольный треугольник ABC. Известная **теорема косинусов** утверждает, что для длин $a=|BC|$, $b=|AC|$ и $c=|AB|$ его сторон имеет место равенство

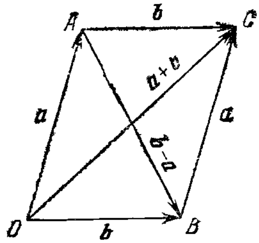
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

где γ — угол ACB. Введя векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}$ и $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$ и заметив, что $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, мы немедленно получим, что это равенство равносильно равенству

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}.$$

Таким образом, теорема косинусов есть просто формула квадрата разности.

Аналогично, пусть $OACB$ — произвольный параллелограмм. Полагая $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, мы получим, что $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Поэтому



$$|OC|^2+|AB|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)=2(|OA|^2+|OB|^2)=|OA|^2+|AC|^2+|BC|^2+|OB|^2,$$

т. е. *сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его четырех сторон.*

Определение 4. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ равно нулю:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=0.$$

При $\boldsymbol{a}\neq 0$ и $\boldsymbol{b}\neq 0$ это равносильно тому, что угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен $\pi/2$.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, то

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2. \tag{11}$$

При $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, когда $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, мы получаем отсюда теорему Пифагора:

$$|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2$$

(«квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов»). На этом основании равенство (11) также называется т е о р е м о й   П и ф а г о р а.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — произвольный базис евклидова линейного пространства $\mathscr{V}$ и пусть

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n=x^i\boldsymbol{e}_i,$$
$$\boldsymbol{y}=y^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+y^n\boldsymbol{e}_n=y^j\boldsymbol{e}_j$$

— два произвольных вектора этого пространства.

В обозначениях Эйнштейна

$$\boldsymbol{xy} = (x^i \boldsymbol{e}_i)(y^j \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j)\, x^i y^j,$$

т. е.

(12) $$\boldsymbol{xy} = g_{ij} x^i y^j,$$

где положено

(13) $$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что

(14) $$g_{ij} = g_{ji} \text{ для любых } i, j = 1, \ldots, n.$$

При $n = 1$ формула (12) имеет вид

$$\boldsymbol{xy} = g_{11} x^1 y^1,$$

где $g_{11} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1$;

при $n = 2$ — вид

$$\boldsymbol{xy} = g_{11} x^1 y^1 + g_{12} x^1 y^2 + g_{21} x^2 y^1 + g_{22} x^2 y^2 = \\ = g_{11} x^1 y^1 + g_{12} (x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{22} x^2 y^2,$$

где

$$g_{11} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1, \; g_{22} = \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2,$$
$$g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2;$$

при $n = 3$ — вид

$$\boldsymbol{xy} = g_{11} x^1 y^1 + g_{12} x^1 y^2 + g_{13} x^1 y^3 + g_{21} x^2 y^1 + g_{22} x^2 y^2 + \\ + g_{23} x^2 y^3 + g_{31} x^3 y^1 + g_{32} x^3 y^2 + g_{33} x^3 y^3 = \\ = g_{11} x^1 y^1 + g_{12} (x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{13} (x^1 y^3 + x^3 y^1) + \\ + g_{22} x^2 y^2 + g_{23} (x^2 y^3 + x^3 y^2) + g_{33} x^3 y^3,$$

где

$$g_{11} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1, \quad g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2,$$
$$g_{22} = \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2, \quad g_{23} = g_{32} = \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3,$$
$$g_{33} = \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3, \quad g_{13} = g_{31} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_3.$$

В общем случае мы также можем привести подобные члены:

$$\boldsymbol{xy} = \sum_i g_{ii} x^i y^i + \sum_{i<j} g_{ij} (x^i y^j + x^j y^i).$$

В первой сумме суммирование производится по i от 1 до n, а во второй сумме — по i и j от 1 до n при условии, что $i < j$.

Формулу (12) можно написать и в матричных обозначениях. Пусть, как и в лекции 6,

$$x = \begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^n \end{Vmatrix}$$

и пусть G — квадратная $n \times n$-матрица

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{15}$$

Рассмотрим матрицу

$$x^{\mathsf{T}} G y,$$

где $x^{\mathsf{T}} = (x^1, \dots, x^n)$ (индекс $^{\mathsf{T}}$ — знак транспонирования). По правилу умножения прямоугольных матриц эта матрица имеет размер 1×1, т. е. представляет собой число. Вычисляя его, мы немедленно найдем, что оно равно

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j, \tag{16}$$

т. е. равно (12). Тем самым доказано, что

$$\boldsymbol{xy} = x^{\mathsf{T}} G y. \tag{17}$$

При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ мы получаем, что

$$\boldsymbol{x}^2 = g_{ij} x^i x^j = \sum_{i} g_{ii} (x^i)^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x^i x^j = x^{\mathsf{T}} G x \tag{18}$$

и, в частности, при $n = 1$

$$\boldsymbol{x}^2 = g_{11} (x^1)^2,$$

при $n = 2$

$$\boldsymbol{x}^2 = g_{11} (x^1)^2 + 2g_{12} x^1 x^2 + g_{22} (x^2)^2$$

и при $n = 3$

$$\boldsymbol{x}^2 = g_{11} (x^1)^2 + 2g_{12} x^1 x^2 + 2g_{13} x^1 x^3 + \\ + g_{22} (x^2)^2 + 2g_{23} x^2 x^3 + g_{33} (x^3)^2.$$

Стоящее в правой части формулы (12) алгебраическое выражение (в менее условном виде записывающееся в виде (16)) представляет собой однородный многочлен от двух наборов переменных $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^n$, линейный по каждому из этих наборов. Однородные многочлены вообще называются *формами*, а многочлены вида (16) — *билинейными формами*. Формы (16), коэффициенты которых обладают свойством (14), называются *симметрическими формами*.

При $y^1 = x^1, \ldots, y^n = x^n$ симметрическая билинейная форма превращается (см. формулы (18)) в однородный многочлен второй степени от переменных $x^1, \ldots, x^n$, т. е., как говорят, в *квадратичную форму*. Ясно, что эта форма однозначно определяет соответствующую симметрическую билинейную форму (т. е. коэффициенты g_{ij}). Согласно аксиоме 15° форма (18) обладает тем свойством, что

$$g_{ij}x^ix^j > 0,$$

если $(x^1, \ldots, x^n) \neq (0, \ldots, 0)$. Такие квадратичные формы (а также соответствующие билинейные симметрические формы) называются *положительно определенными*.

Таким образом, в этой терминологии формула (12) (а также равносильная ей формула (17)) утверждает, что *скалярное произведение двух векторов является билинейной, симметрической и положительно определенной формой от их координат*.

Оказывается, что обратное утверждение также верно:

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное линейное пространство, $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый его базис и $g_{ij}x^iy^j$ — произвольная билинейная, симметрическая и положительно определенная форма от переменных $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$. Тогда формула* (12) *определяет в $\mathscr{V}$ некоторое скалярное умножение.*

Доказательство. Дистрибутивность и однородность (аксиомы 12° и 13°) следуют из билинейности:

$$g_{ij}(x_1^i + x_2^i)y^j = g_{ij}x_1^iy^j + g_{ij}x_2^iy^j,$$

$$g_{ij}(kx^i)y^j = g_{ij}x^i(ky^j) = kg_{ij}x^iy^j.$$

Коммутативность (аксиома 14°) вытекает из симметричности:

$$g_{ij}y^ix^j = g_{ji}y^ix^j = g_{ji}x^jy^i = g_{ij}x^iy^j.$$

В последнем преобразовании использовано то, что индекс, по которому происходит суммирование, может быть обозначен любой ранее не использованной буквой; подробно это преобразование делается так:

$g_{ji}x^jy^i = g_{\alpha i}x^\alpha y^i$ (заменяем j новой буквой α),

$= g_{\alpha j}x^\alpha y^j$ (заменяем i освободившейся буквой j),

$= g_{ij}x^iy^j$ (заменяем α освободившейся буквой i).

Наконец, положительность (аксиома 15°) обеспечивается, по определению, положительной определенностью формы $g_{ij}x^iy^j$. □

Таким образом, мы видим, что в одном и том же линейном пространстве существует м н о г о различных скалярных умножений, т. е. оно многими различными способами может быть обращено в евклидово пространство.

Определение 5. Форма $g_{ij}x^iy^j$ (а также соответствующая квадратичная форма $g_{ij}x^ix^j$) называется *метрической формой* данного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а ее коэффициенты g_{ij} — *метрическими коэффициентами* этого базиса.

Условие положительной определенности накладывает на коэффициенты g_{ij} определенные ограничения. Например, ясно, что

$$g_{ii} > 0 \text{ для любого } i = 1, \ldots, n.$$

При $n = 1$, когда имеется один коэффициент g_{11}, условие $g_{11} > 0$ не только необходимо, но, очевидно, и достаточно для положительной определенности формы.

Пусть $n = 2$ и пусть $g_{11} > 0$. Тогда

$$g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + g_{22}(x^2)^2 = \left(\sqrt{g_{11}}x^1 + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}x^2\right)^2 + \frac{g_{22}g_{11} - g_{12}^2}{g_{11}}(x^2)^2,$$

откуда следует, что рассматриваемая форма положительно определена тогда и только тогда, когда $g_{22}g_{11} - g_{12}^2 > 0$. Тем самым доказано, что *симметрическая матрица*

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix}, \quad g_{12} = g_{21},$$

тогда и только тогда является матрицей метрических коэффициентов некоторого базиса двумерного евклидова линеала, когда

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Аналогичные условия при $n = 3$ имеют вид

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Мы докажем это в следующем семестре.

По построению метрическая форма зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Найдем, как она меняется при замене этого базиса другим. Проделаем вычисление в матричной символике.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — два базиса,

$$x = \begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{Vmatrix}, \quad x' = \begin{Vmatrix} x^{1'} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{n'} \end{Vmatrix}$$

— столбцы координат одного и того же вектора $\boldsymbol{x}$ в этих базисах, $C = (c^i_{i'})$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ и $G = \|g_{ij}\|$ — матрица метрических коэффициентов базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тогда

$$x = Cx' \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x}^2 = x^{\mathsf{T}} Gx.$$

Кроме того, $(Cx')^{\mathsf{T}} = x'^{\mathsf{T}} C^{\mathsf{T}}$. Поэтому

$$\boldsymbol{x}^2 = (x'^{\mathsf{T}} C^{\mathsf{T}})\, G\, (Cx') = x'^{\mathsf{T}} (C^{\mathsf{T}} GC)\, x'.$$

Эта формула означает, что матрица $G' = (g_{i'j'})$ метрических коэффициентов базиса $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ выражается формулой

(19) $$G' = C^{\mathsf{T}} GC.$$

Иначе говоря,

(20) $$g_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}.$$

То же вычисление в символике Эйнштейна имеет вид

$$g_{i'j'} = \boldsymbol{e}_{i'} \boldsymbol{e}_{j'} = (c^i_{i'} \boldsymbol{e}_i)(c^j_{j'} \boldsymbol{e}_j) =$$
$$= c^i_{i'} c^j_{j'} (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j) = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}.$$

Лекция 13

Ортонормированные семейства векторов и коэффициенты Фурье. — Ортонормированные базисы и прямоугольные координаты. — Разложение положительно определенных матриц. — Процесс ортогонализации Грама—Шмидта. — Изоморфизм евклидовых пространств. — Ортогональные матрицы. — Ортогональные матрицы второго порядка. —Формулы преобразования прямоугольных координат.

Определение 1. Семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ векторов евклидова пространства называется *ортонормированным*, если

а) длина каждого вектора равна единице;

б) любые два различных вектора ортогональны, т. е. если

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad i = j, \\ 0, & \text{когда} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Определение 2. *Коэффициентами Фурье* вектора $\boldsymbol{x}$ по отношению к семейству $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ называются скалярные произведения $x_1 = \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_1, \ldots, x_m = \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_m$.

У нулевого вектора все коэффициенты Фурье равны нулю, но обратное, вообще говоря, неверно. Если из $x_1 = 0, \ldots, x_m = 0$ следует, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ называется *замкнутым*.

Предложение 1 (неравенство Бесселя). *Если семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ ортонормировано, то для любого вектора $\boldsymbol{x}$*

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leqslant |\boldsymbol{x}|^2,$$

причем вектор $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - x_1\boldsymbol{e}_1 - \ldots - x_m\boldsymbol{e}_m$ ортогонален всем векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ (т. е. все его коэффициенты Фурье по отношению к семейству $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ равны нулю).

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$0 \leqslant |\boldsymbol{x}'|^2 = \boldsymbol{x}'^2 = \left(\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^m x_i\boldsymbol{e}_i\right)\left(\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^m x_j\boldsymbol{e}_j\right) =$$

$$= \boldsymbol{x}^2 - 2\sum_{i=1}^m x_i(\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_i) + \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m x_ix_j(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) =$$

$$= \boldsymbol{x}^2 - 2\sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^m x_i^2 = \boldsymbol{x}^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2$$

и что

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{x}-x_1\boldsymbol{e}_1-\cdots-x_m\boldsymbol{e}_m)=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{x}-x_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i=x_i-x_i=0$$

для любого $i=1, \ldots, m$. $\square$

Напомним, что семейство векторов (не обязательно ортонормированное) называется полным, если любой вектор пространства через него линейно выражается.

Определение 3. Ортонормированное семейство векторов называется *максимальным*, если при добавлении к нему какого бы то ни было вектора оно перестает быть ортонормированным.

Предложение 2. *Следующие свойства ортонормированного семейства векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ равносильны:*

1°. *Семейство максимально.*

2°. *Семейство замкнуто.*

3°. *Семейство полно.*

4°. *Для любого вектора $\boldsymbol{x}$*

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — коэффициенты Фурье вектора $\boldsymbol{x}$.

5°. *Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$*

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n. \tag{1}$$

6°. *Для любого вектора $\boldsymbol{x}$*

$$\boldsymbol{x}^2=x_1^2+\cdots+x_n^2,$$

т. е. в неравенстве Бесселя имеет место равенство.

Доказательство.

1° $\Rightarrow$ 2°. Если для некоторого вектора $\boldsymbol{x}\neq 0$ имеют место равенства $x_1=0, \ldots, x_n=0$, то, добавив к семейству $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ вектор $\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$, мы получим ортонормированное семейство.

2° $\Rightarrow$ 3°. Если вектор $\boldsymbol{x}$ линейно не выражается через векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то построенный в предложении 1 вектор $\boldsymbol{x}'$ отличен от нуля и вместе с тем все его коэффициенты Фурье равны нулю.

3° $\Rightarrow$ 4°. Если $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n$, то

$$x_i=\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_i=k_i(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i)=k_i.$$

4° $\Rightarrow$ 5°. Если $\boldsymbol{x}=\sum\limits_i x_i\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{y}=\sum\limits_j y_j\boldsymbol{e}_j$, то

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\Big(\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i\Big)\Big(\sum_j y_j\boldsymbol{e}_j\Big)=\sum_i\sum_j x_iy_j(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)=\sum_i x_iy_i.$$

$5^\circ \Rightarrow 6^\circ$. Достаточно в (1) положить $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

$6^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Если бы к векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ с сохранением ортонормированности можно было добавить еще один вектор $\boldsymbol{x}$, то имело бы место равенство

$$1 = \boldsymbol{x}^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0,$$

ибо, будучи ортогональным векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, вектор $\boldsymbol{x}$ имел бы все коэффициенты Фурье $x_1, \ldots, x_n$ равными нулю. □

Равенство (1) называется *равенством Парсеваля*.

Замечание 1. Вывод, что $x_i = k_i$ (см. доказательство импликации $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$), использует только ортонормированность семейства $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и применим (без каких-либо дополнительных предположений об этом семействе) к любому вектору вида $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{e}_n$. Но если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то $x_i = 0$, и потому $k_i = 0$. Это показывает, что *любое ортонормированное семейство векторов линейно независимо*.

Определение 4. Ортонормированное семейство векторов, являющееся базисом, называется *ортонормированным базисом*.

Согласно предложению 2, для того чтобы ортонормированное семейство векторов было базисом, необходимо и достаточно, чтобы оно было либо максимальным, либо замкнутым, либо полным (либо состояло из $n = \dim \mathscr{V}$ векторов). При этом *координатами произвольного вектора в ортонормированном базисе являются его коэффициенты Фурье* (утверждение 1° предложения 2).

Поэтому в дальнейшем в связи с ортонормированными базисами мы термин «коэффициент Фурье» употреблять, как правило, не будем. Вместе с тем мы сохраним для координат в ортонормированном базисе обозначения $x_1, \ldots, x_n$ со спущенными вниз индексами.

Векторы ортонормированного базиса мы обыкновенно будем обозначать через $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ (при $n = 2$ — через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, а при $n = 3$ — через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$).

Определение 5. Координатная система $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ в точечном евклидовом пространстве, для которой базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ ортонормирован, называется *системой прямоугольных* (или *евклидовых*, а иногда — что с точки зрения истории математики совершенно необоснованно — *декартовых*) *координат*. Соответствующие координаты называются *прямоугольными* (*евклидовыми* или *декартовыми*) *координатами.* Тот же термин употребляется и по отношению к координатам векторов евклидова линейного пространства в ортонормированном базисе.

Ортонормированный базис характеризуется тем, что матрица G его метрических коэффициентов является единичной матрицей E. Поэтому в прямоугольных координатах все метрические формулы существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} &= x_1y_1 + \dots + x_ny_n, \\ \boldsymbol{x}^2 &= x_1^2 + \dots + x_n^2, \\ |\boldsymbol{x}| &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \\ |AB| &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \end{aligned}$$

($x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки A, а $y_1, \ldots, y_n$ — координаты точки B) и т. д.

По этой причине в изучении евклидовых пространств обычно пользуются лишь прямоугольными координатами.

При этом факт существования (при $\dim \mathscr{V} > 0$) ортонормированных базисов и прямоугольных координат непосредственно вытекает из того же предложения 2. Действительно, взяв произвольный, отличный от нуля вектор $\boldsymbol{a}$ и умножив его на число $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$, мы получим вектор $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ единичной длины (кстати сказать, такие векторы иногда называются *ортами*), т. е. ортонормированное семейство, состоящее из одного вектора. Этим доказано, что ортонормированные семейства векторов существуют. Поскольку любое такое семейство не может содержать (в силу линейной независимости) более чем $n = \dim \mathscr{V}$ векторов, среди ортонормированных семейств есть максимальные, т. е. базисы.

Любопытно, что из одного лишь факта существования ортонормированных базисов вытекают нетривиальные алгебраические утверждения. Например, пусть G — произвольная симметрическая *положительно определенная* матрица (т. е. такая, что квадратичная форма $x^{\mathsf{T}}Gx$ положительно определена). Произвольно выбрав в некотором линеале $\mathscr{V}$ (например в $\mathbb{R}^n$) базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, превратим этот линеал в евклидов, полагая $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x^{\mathsf{T}} Gy$ для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ (см. предложение 1 лекции 12), т. е. принимая матрицу G за матрицу метрических коэффициентов базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Согласно сказанному, в $\mathscr{V}$ существует ортонормированный базис $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$. Пусть C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тогда, как мы знаем, матрица G будет равна $C^{\top}EC =$ $= C^{\top}C$, где E — матрица метрических коэффициентов ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$, т. е. единичная матрица. Обратно, пусть C — произвольная невырожденная матрица, $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ — некоторый ортонормированный базис произвольного евклидова линеала $\mathscr{V}$ и $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис, связанный с базисом $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ матрицей перехода C. Тогда матрица G метрических коэффициентов этого базиса (являющаяся, как мы знаем, симметрической положительно определенной матрицей) будет равна $C^{\top}EC =$ $= C^{\top}C$. Тем самым доказано, что *матрица G тогда и только тогда является симметрической положительно определенной матрицей, когда существует такая невырожденная матрица C, что*

$$G = C^{\top}C. \tag{2}$$

Однако практическая значимость этого результата сужена, поскольку в нем не дается никакого рецепта, как найти по матрице G матрицу C. Чтобы устранить этот недостаток, нужно указать явный способ построения по любому базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ некоторого ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$. Мы опишем один такой способ, называемый *процессом ортогонализации Грама—Шмидта*.

Этот процесс состоит в постепенном, шаг за шагом, преобразовании данного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в ортонормированный. Пусть $0 \leqslant k \leqslant n$. Назовем базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *ортонормированным до номера k*, если его подсемейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ ортонормировано. В соответствии с этим определением любой базис ортонормирован до номера 0, а базис, ортонормированный до номера n, является не чем иным, как обычным ортонормированным базисом. Поэтому нам достаточно указать способ преобразования произвольного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, ортонормированного до номера $k < n$, в базис, ортонормированный до номера $k+1$.

Предложенный Грамом и Шмидтом способ состоит в том, что в данном ортонормированном до номера k базисе меняется лишь вектор $\boldsymbol{e}_{k+1}$, который сначала заменяется вектором

$$\boldsymbol{e}'_{k+1} = \boldsymbol{e}_{k+1} - x_1\boldsymbol{e}_1 - \cdots - x_k\boldsymbol{e}_k,$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — коэффициенты Фурье вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_{k+1}$ по отношению к ортонормированному семейству $\boldsymbol{e}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{e}_k$ (при $k = 0$, естественно, ничего не происходит). Ясно, что после такой замены базис останется базисом. Кроме того (см. предложение 1), вектор $\boldsymbol{e}'_{k+1}$ будет ортогонален всем векторам $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Поэтому для завершения построения нужно этот вектор лишь «пронормировать», т. е. разделить на его длину. В результате, очевидно, и получится базис, ортонормированный до номера $k+1$. □

Заметим, что получающийся в конце концов ортонормированный базис связан с исходным базисом *треугольной* матрицей перехода. Таким образом, мы не только нашли практический способ осуществлять разложение (2), но и доказали, что *для любой симметрической положительно определенной матрицы G существует разложение* (2) *с треугольной матрицей C*.

Выше мы уже отмечали, что одно и то же линейное пространство можно превратить в много разных евклидовых пространств. Например, можно всегда сделать так, чтобы любой наперед заданный базис оказался ортонормированным.

Однако, несмотря на это, для любого $n \geqslant 0$ существует в некотором точном смысле только одно евклидово (линейное или точечное) пространство.

Определение 6. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ — евклидовы линейные пространства. Отображение $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ называется *изоморфизмом*, если оно является изоморфизмом линейных пространств (см. определение 1 в лекции 4) и, кроме того, сохраняет скалярное произведение, т. е.

$$\varphi(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

для любых двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$.

Евклидовы линейные пространства $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ называются *изоморфными*, если существует хотя бы один изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$.

Теорема 1. *Любые два евклидовых линейных пространства одной и той же размерности n изоморфны. Изоморфизм осуществляется по равенству координат в любых двух ортонормированных базисах.*

Доказательство. Достаточно заметить, что во всех ортонормированных базисах скалярное произведение выражается одной и той же формулой:

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n. \quad \square$$

Естественный способ превратить пространство $\mathbb{R}^n$ в евклидово состоит в том, чтобы объявить ортонормированным стандартный базис, т. е. для любых векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ положить, по определению,

$$\boldsymbol{xy} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Тогда для любого ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ произвольного евклидова линейного пространства $\mathscr{V}$ соответствующий координатный изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathbb{R}^n$ будет изоморфизмом евклидовых пространств.

Аналогичные определения и результаты имеют место, конечно, и для евклидовых точечных пространств.

Рассмотрим в заключение вопрос о матрицах, связывающих два ортонормированных базиса.

Определение 7. Матрица C перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется *ортогональной матрицей*.

Так как в обоих базисах матрицей метрических коэффициентов является единичная матрица E, то матрица C тогда и только тогда ортогональна, когда

$$C^{\top}C = E. \tag{3}$$

Положив

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix},$$

мы видим, что равенство (3) равносильно $\frac{n(n+1)}{2}$ соотношениям вида

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots + c_{ni}c_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j, \end{cases}$$

где $i, j = 1, \ldots, n$ и $i \leqslant j$, выражающим тот факт, что столбцы матрицы C составляют ортонормированное семейство (базис) векторов пространства $\mathbb{R}^n$ (как и должно быть, поскольку эти столбцы состоят из координат ортонормированных векторов в ортонормированном базисе).

Равенство (3) равносильно равенству

$$C^{-1} = C^{\top},$$

которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$CC^{\mathsf T} = E.$$

Последнее соотношение означает, что

$$c_{i1}c_{j1} + \dots + c_{in}c_{jn} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

для любых $i, j = 1, \dots, n$, т. е. что ортонормированное семейство составляют также и строки матрицы C.

Сопоставив все эти утверждения, мы получим следующее предложение:

Предложение 3. *Матрица C тогда и только тогда ортогональна, когда она обладает одним (а потому и любым другим) из следующих пяти свойств*:

а) $C^{\mathsf T}C = E$;

б) *столбцы матрицы C ортонормированы*;

в) $C^{-1} = C^{\mathsf T}$;

г) $CC^{\mathsf T} = E$;

д) *строки матрицы C ортонормированы.* □

Переходя в соотношении а) к определителям и учитывая, что $\det C^{\mathsf T} = \det C$, мы получим равенство

$$(\det C)^2 = 1,$$

т. е. равенство

$$\det C = \pm 1.$$

Таким образом, *определитель ортогональной матрицы равен* ± 1.

Определение 8. Ортогональная матрица C называется *собственной* (или *унимодулярной*), если $\det C = 1$.

Ясно, что матрица, обратная ортогональной (собственной ортогональной) матрице, а также произведение двух ортогональных (собственных ортогональных) матриц является ортогональной (собственной ортогональной) матрицей (скажем, если $C_1^{\mathsf T}C_1 = E$ и $C_2^{\mathsf T}C_2 = E$, то $(C_1C_2)^{\mathsf T} \times (C_1C_2) = C_2^{\mathsf T}(C_1^{\mathsf T}C_1)C_2 = C_2^{\mathsf T}C_2 = E$). На языке алгебры это означает, что совокупность всех ортогональных (собственных ортогональных) матриц данного порядка n образует группу. Эта группа обозначается символом $\mathrm{O}(n)$ (соответственно символом $\mathrm{SO}(n)$).

При $n = 1$ ортогональная матрица $C = \| c_{11} \|$ является не чем иным, как числом c_{11}, удовлетворяющим соотношению $c_{11}^2 = 1$. Это означает, что группа O (1) состоит из двух элементов ± 1, а группа SO (1) — из одного:

$$O(1) = \{1, -1\}, \quad SO(1) = \{1\}.$$

При $n = 2$ имеется три условия ортогональности:

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1,$$
$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0,$$
$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1.$$

Первое и последнее означают, что найдутся такие углы α и β, что

$$c_{11} = \cos\alpha, \quad c_{21} = \sin\alpha,$$
$$c_{12} = \cos\beta, \quad c_{22} = \sin\beta,$$

а второе — что эти углы связаны соотношением

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0,$$

т. е. соотношением

$$\cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Таким образом, либо $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, либо $\beta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$, т. е. матрица C имеет либо вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix},$$

либо вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

В первом случае матрица собственная, во втором — несобственная.

В частности, мы видим, что *любая собственная ортогональная матрица второго порядка имеет вид*

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

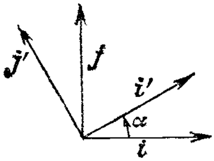
Это означает, что два ортонормированных одноименных базиса плоскости $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ связаны формулами

$$\boldsymbol{i}' = \cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \sin\alpha\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}' = -\sin\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\alpha\cdot\boldsymbol{j},$$

а соответствующие координаты x, y и x', y' — формулами

$$x = \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y',$$
$$y = \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'.$$

Так как $\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i} = \cos\alpha$, $\boldsymbol{j}'\boldsymbol{i} = -\sin\alpha$ и $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{i}'| = 1$, то, чтобы получить базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, нужно повернуть базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ на угол α.



Угол α

Аналогичное описание ортогональных матриц третьего порядка довольно сложно, и мы им займемся позже.

В точечном евклидовом пространстве формулы преобразования прямоугольных координат имеют вид (в матричной записи; см. формулу (15) лекции 6):

$$x = Cx' + b,$$

где C — ортогональная матрица (а b — произвольный столбец). В частности, при $n = 2$ мы получаем (обозначая координаты символами x и y) следующие *формулы преобразования прямоугольных координат на плоскости:*

$$x = \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y' + x_0,$$
$$y = \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y' + y_0,$$

где α — угол между положительными направлениями осей абсцисс старой и новой координатных систем, а (x_0, y_0) — координаты «нового» начала O' в «старой» координатной системе.

Лекция 14

Тривекторы в евклидовом ориентированном пространстве. — Смешанное произведение трех векторов. — Площадь бивектора в евклидовом пространстве. — Вектор, дополнительный к бивектору в евклидовом ориентированном пространстве. — Векто ное умножение и его свойства.

В евклидовом (трехмерном) пространстве теория бивекторов и тривекторов существенно упрощается и, по существу, сводится к теории векторов. Займемся сначала случаем тривекторов, как более простым.

Пусть $\mathscr{V}$ — трехмерное евклидово пространство. Предполагая пространство $\mathscr{V}$ ориентированным, рассмотрим в нем произвольный ортонормированный положительно ориентированный базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. С любым другим таким базисом $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ связан собственной ортогональной матрицей перехода. Поскольку определитель этой матрицы равен $+1$, мы получаем, следовательно (см. формулу (20) лекции 8), что

$$\boldsymbol{i}' \wedge \boldsymbol{j}' \wedge \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}.$$

Таким образом, *тривектор* $\alpha_0 = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$ *не зависит от выбора базиса* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, т. е. один и тот же для всех ортонормированных и положительно ориентированных базисов.

Поскольку $\alpha_0 \neq 0$, любой тривектор α линеала $\mathscr{V}$ имеет вид

$$\alpha = a\alpha_0,$$

где a — некоторое число.

Определение 1. Число a называется *величиной* (*или ориентированным объемом*) тривектора α, а его абсолютная величина $|a|$ — *объемом* тривектора α.

В соответствии с общей теорией объема (см. лекцию 9) определение 1 означает, что мы принимаем за эталон объема в пространстве тривектор α_0. Другими словами, объем единичного куба (т. е. куба с ребром длины 1) мы считаем равным единице. Мы видим, таким образом, что *евклидова структура линейного пространства однозначно определяет в нем измерение объемов.*

Определение 2. Величина тривектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ называется *смешанным* (или *тройным*) произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и обозначается символом $\boldsymbol{abc}$.

Согласно формуле (20) лекции 8, если $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$, то

$$(1) \qquad \boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что смешанное произведение зависит от ориентации пространства и при замене ориентации на противоположную меняет знак.

Алгебраические свойства смешанного произведения, естественно, те же, что и внешнего произведения: оно дистрибутивно (относительно сложения), однородно (по отношению к умножению векторов на числа), антикоммутативно (меняет знак при транспозиции сомножителей) и свободно (равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы компланарны).

Таким образом, в евклидовом (и ориентированном!) пространстве тривекторы естественным образом (без какого-либо произвола) заменяются числами (их величинами), а внешнее произведение троек векторов — их смешанным произведением.

Для бивекторов ситуация оказывается, как и следовало ожидать, более сложной.

Пусть $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ — произвольный отличный от нуля бивектор (в некотором евклидовом пространстве $\mathscr{V}$). При замене вектора $\boldsymbol{b}$ вектором $\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$, ортогональным вектору $\boldsymbol{a}$, бивектор $\mathfrak{a}$, очевидно, не изменится. Поэтому без ограничения общности мы можем с самого начала считать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональными. Нормируя эти векторы, т. е. деля их на их длины, и вынося общий множитель, мы получим для бивектора $\mathfrak{a}$ представление вида

$$(2) \qquad \mathfrak{a} = a(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2),$$

где векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ортонормированы, а $a \geqslant 0$.

Представление (2) (с $a = 0$) имеет место и при $\mathfrak{a} = 0$.

Легко теперь видеть, что *в представлении* (2) *число* $a \geqslant 0$ *однозначно определено бивектором* $\mathfrak{a}$. Действительно, равенство

$$a(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) = a'(\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2'),$$

где пары векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ ортонормированы, при $a = 0$ возможно лишь при $a' = 0$, а при $a > 0$ (и $a' > 0$) означает, что имеют место соотношения

$$a'\boldsymbol{e}_1' = k(a\boldsymbol{e}_1) + l\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2' = k'(a\boldsymbol{e}_1) + l'\boldsymbol{e}_2,$$

причем

$$\begin{vmatrix} k & l \\ k' & l' \end{vmatrix} = 1,$$

Но тогда

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{ka}{a'}\boldsymbol{e}_1 + \frac{l}{a'}\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2' = (k'a)\boldsymbol{e}_1 + l'\boldsymbol{e}_2,$$

откуда следует, что матрица

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{ka}{a'} & k'a \\ \dfrac{l}{a'} & l' \end{Vmatrix}$$

ортогональна и потому ее определитель a/a' равен ± 1. Этим доказано, что $a' = \pm a$. Но числа a и a', по условию, положительны. Поэтому $a' = a$. $\square$

Определение 3. Фигурирующее в представлении (2) число a называется *площадью* бивектора $\mathfrak{a}$.

По доказанному это определение корректно.

Таким образом, евклидова структура пространства позволяет в каждой плоскости ввести эталон площади, причем эти эталоны на различных плоскостях в некотором смысле (который при желании можно уточнить) одинаковы.

Заметим, что в аффинном пространстве нет никакого естественного способа сравнивать эталоны площади на различных (непараллельных) плоскостях.

Предположим теперь, что рассматриваемое евклидово пространство трехмерно (бивекторы в двумерном пространстве мало интересны, будучи полностью аналогичны тривекторам в трехмерном пространстве и представляя собой геометрический эквивалент определителей второго порядка) и, кроме того, ориентировано.

В первую очередь, заметим, что *для любых двух ортонормированных векторов* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *существует один и только один вектор* $\boldsymbol{e}_3$, *составляющий с этими векторами положительно ориентированный ортонормированный базис* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Действительно, так как ортонормированное семейство, состоящее из векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, не полно, и, следовательно (см. предложение 2 лекции 13), не максимально, то существует такой вектор $\boldsymbol{e}_3$, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ составляют ортонормированный базис. Если этот базис положительно ориентирован, то тем самым существование вектора $\boldsymbol{e}_3$ доказано. В случае же, когда ориентация базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ оказалась отрицательной, достаточно у вектора $\boldsymbol{e}_3$ изменить знак.

Пусть существует другой вектор

$$\boldsymbol{e}_3' = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3,$$

составляющий с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ положительно ориентированный ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3'$. Тогда матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}$$

как матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3'$ будет ортогональной и собственной, что, очевидно, возможно только при $a = b = 0$ и $c = 1$. Это доказывает единственность вектора $\boldsymbol{e}_3$. □

Определение 4. Вектором, *дополнительным к бивектору* (2), называется вектор, обозначаемый символом $\mathfrak{a}^{\perp}$ и определяемый формулой

$$\mathfrak{a}^{\perp} = a\boldsymbol{e}_3,$$

где $\boldsymbol{e}_3$ — такой вектор, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ составляют положительно ориентированный ортонормированный базис.

Здесь в первую очередь нужно проверить корректность определения, для чего достаточно, очевидно, доказать, что *если* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ *и* $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ — *такие одноименные ортонормированные базисы, что* $\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$, *то* $\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3$.

Пусть

$$\begin{Vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{Vmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$. Эта матрица ортогональна и собственна, так что

$$\begin{aligned} k_1^2+k_2^2+k_3^2&=1,\\ l_1^2+l_2^2+l_3^2&=1,\\ m_1^2+m_2^2+m_3^2&=1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}=1.$$

С другой стороны, так как $\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$, то

$$m_1=0,\ m_2=0,$$

и матрица

$$\begin{Vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{Vmatrix}$$

(очевидно, ортогональная) унимодулярна. Таким образом,

$$\begin{aligned} k_1^2+k_2^2&=1,\\ l_1^2+l_2^2&=1 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}=1.$$

Из выписанных соотношений непосредственно вытекает, что $k_3=0$, $l_3=0$ и $m_3=1$. Таким образом, $\boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_3$. □

Определение 5. *Векторным произведением* $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, дополнительный к их внешнему произведению $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})^{\perp}.$$

Следующее предложение объясняет название «смешанное» для произведения $\boldsymbol{abc}$.

Предложение 1. *Для любых трех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *имеет место формула*

$$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Для доказательства этого предложения нам понадобится лемма:

Лемма 1. Для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *существует такой положительно ориентированный ортонормированный базис* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, *что*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1,\\
(3)\qquad &\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2,\\
&\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
$$

где $a_1 \geqslant 0$ *и* $b_2 \geqslant 0$.

Доказательство. При $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ мы примем за $\boldsymbol{e}_1$ орт $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ вектора $\boldsymbol{a}$, а при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ — произвольный вектор длины 1. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы, то за $\boldsymbol{e}_2$ мы примем орт

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{e}_1|}$$

вектора $\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, а в противном случае — произвольный вектор длины 1, ортогональный вектору $\boldsymbol{e}_1$. Наконец, за $\boldsymbol{e}_3$ мы примем (как знаем, единственный) вектор, составляющий вместе с векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ положительно ориентированный базис. $\square$

Замечание 1. Для линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ изложенное доказательство воспроизводит процесс ортогонализации Грама—Шмидта (см. лекцию 13) с небольшим отличием на последнем этапе.

Доказательство предложения 1. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — базис, указанный в лемме 1. Тогда $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a_1b_2\,(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)$ и, значит, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_1b_2\boldsymbol{e}_3$. Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = a_1b_2c_3.$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & b_2 & c_2\\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3.$$

Таким образом, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc}$. $\square$

С помощью предложения 1 легко доказывается теперь следующее важное предложение, оправдывающее наименование операции $\times$ умножением:

Предложение 2. *Векторное умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е.*

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$$

для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор. Тогда, в силу дистрибутивности смешанного и скалярного умножений,

$$(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}))\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{abx} + \boldsymbol{acx} =$$
$$= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{x}.$$

Принимая за $\boldsymbol{x}$ векторы некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, мы получаем отсюда, что все коэффициенты Фурье векторов $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ одинаковы. Следовательно, эти векторы также одинаковы. □

Следствие. *Дополнительный вектор суммы бивекторов равен сумме дополнительных векторов слагаемых, т. е.*

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{\perp} = \mathfrak{a}^{\perp} + \mathfrak{b}^{\perp}$$

для любых бивекторов $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$. □

Это следствие является лишь переформулировкой предложения 2.

Предложение 3. *Векторное умножение однородно и антикоммутативно, т. е.*

$$k\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times k\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

для любого числа k и любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из однородности смешанного и скалярного умножений (ср. с доказательством предложения 2). Второе следует из первого и из антикоммутативности внешнего умножения. □

Следствие. *Для любого числа k и любого бивектора $\mathfrak{a}$ имеет место равенство*

$$(k\mathfrak{a})^{\perp} = k\mathfrak{a}^{\perp}. \quad \square$$

Заметим, что это следствие можно легко вывести и непосредственно. Действительно если $\mathfrak{a} = a\,(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)$ и $\mathfrak{a}^{\perp} = a\boldsymbol{e}_3$, то $k\mathfrak{a} = ka\,(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)$ при $k \geqslant 0$, и потому $(k\mathfrak{a})^{\perp} = ka\boldsymbol{e}_3 = k\mathfrak{a}^{\perp}$. Если же $k < 0$, то $k\mathfrak{a} = |k|\,a\,(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1)$, и потому $(k\mathfrak{a})^{\perp} = |k|a\,(-\boldsymbol{e}_3) = ka\boldsymbol{e}_3 = k\mathfrak{a}^{\perp}$, так как базис $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1$, $-\boldsymbol{e}_3$ ортонормирован и положительно ориентирован. □

Это дает прямое доказательство и предложения 3 (аналогичного достаточно простого доказательства предложения 2, по-видимому, не существует).

Лекция 15

Изоморфизм линеалов векторов и бивекторов. — Выражение векторного произведения в координатах. — Двойное векторное произведение. — Определители Грама.

Продолжим изучение соответствия $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{\perp}$.

Теорема 1. *Соответствие $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{\perp}$ представляет собой изоморфизм линеала $\mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ на линеал $\mathscr{V}$.*

Доказательство. Ввиду следствий предложений 2 и 3 предыдущей лекции нужно лишь доказать, что отображение $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^{\perp}$ биективно, т. е. что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует единственный бивектор $\mathfrak{a}$ такой, что $\mathfrak{a}^{\perp} = \boldsymbol{a}$.

Пусть a — длина вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. пусть $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_3$, где $\boldsymbol{e}_3$ — вектор длины 1 (определенный однозначно, когда $a \neq 0$, и произвольный, когда $a = 0$). Пусть, далее, $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — такие векторы, что векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ составляют положительно ориентированный ортонормированный базис (существование таких векторов очевидно), и пусть $\mathfrak{a} = a(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)$. Тогда, по определению, $\mathfrak{a}^{\perp} = \boldsymbol{a}$. Тем самым существование бивектора $\mathfrak{a}$ доказано.

Для доказательства его единственности достаточно, очевидно, установить, что для одноименных ортонормированных базисов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ из равенства $\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3$ вытекает равенство $\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$. Но это почти очевидно. Действительно, так как $\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3$, то матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Условие ортогональности для последней строки дает

$$m_1^2 + m_2^2 + 1 = 1,$$

откуда следует, что $m_1 = 0$ и $m_2 = 0$. Поэтому

$$\boldsymbol{e}_1' = k_1\boldsymbol{e}_1 + l_1\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_2' = k_2\boldsymbol{e}_1 + l_2\boldsymbol{e}_2,$$

причем

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $e_1' \wedge e_2' = e_1 \wedge e_2$. □

Следствие 1. *Векторное умножение свободно, т. е.* $a \times b = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* a *и* b *коллинеарны.* □

Подчеркнем, что обеспечиваемое теоремой 1 полное сведение бивекторов к векторам возможно только в трехмерном пространстве и только при выборе определенной ориентации этого пространства.

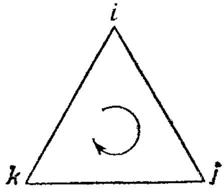
Очевидно, что для любого положительно ориентированного ортонормированного базиса i, j, k имеют место формулы

$$(j \wedge k)^{\perp} = i, \quad (k \wedge i)^{\perp} = j, \quad (i \wedge j)^{\perp} = k,$$

т. е. формулы

$$j \times k = i, \quad k \times i = j, \quad i \times j = k. \tag{1}$$

Для запоминания этих формул удобна схема



При движении по часовой стрелке произведением любых двух вершин этого треугольника будет третья вершина, а при движении против часовой стрелки — она же, но со знаком минус.

Из формулы (1) следует (ср. с формулой (8) лекции 8), что для любых векторов

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \text{ и } b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

имеет место формула

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Подчеркнем, что базис i, j, k здесь предполагается не только ортонормированным, но и положительно ориентированным (правым).

По построению длина $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ векторного произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Поэтому

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}. \tag{2}$$

Хотя в формуле (2) векторное умножение в явном виде не участвует, доказать ее, не пользуясь этим умножением, было бы весьма хлопотно.

Для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ мы можем образовать их *двойное векторное произведение* $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$. Это произведение ортогонально вектору $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, т. е. в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Следовательно, оно разлагается по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. существуют такие числа x и y, что

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Чтобы найти эти числа, мы воспользуемся леммой 1 лекции 14. Согласно этой лемме существует положительно ориентированный ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, связанный с векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ формулами

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1\boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{b} &= b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{c} &= c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3. \end{aligned} \tag{4}$$

В этом базисе вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ имеет координаты $(0, 0, a_1b_2)$, и потому вектор $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ — координаты

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a_1b_2c_2, \quad -\begin{vmatrix} 0 & a_1b_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как вектор $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ имеет координаты $(xa_1 + yb_1, yb_2, 0)$, то, следовательно, формула (3) будет иметь место при

$$x = -b_1c_1 - b_2c_2, \quad y = a_1c_1.$$

Поскольку, с другой стороны, $a_1c_1 = \boldsymbol{ac}$ и $b_1c_1 + b_2c_2 = \boldsymbol{bc}$, этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Для любых векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *имеет место равенство*

$$(5)\qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}.\quad\square$$

Из формулы (5) непосредственно вытекает следующее тождество Якоби:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=0.$$

Действительно, в силу коммутативности скалярного умножения

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}=0.\quad\square$$

С помощью формулы (5) легко вычисляется также скалярное произведение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ двух векторных произведений. Действительно, дважды применяя предложение 1 лекции 14 и пользуясь антикоммутативностью смешанного произведения, мы немедленно получим, что

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}.$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=((\boldsymbol{x}\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{y}\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{y}\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{y}\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}),$$

т. е.

$$(6)\qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{y}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{y}\boldsymbol{b}\end{vmatrix}.$$

Определитель в правой части этой формулы называется *взаимным определителем Грама* пар векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

При $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}$ формула (6) дает формулу

$$(7)\qquad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}^2\end{vmatrix},$$

которую можно переписать также в следующем изящном виде:

$$(8)\qquad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

Определитель в правой части формулы (7) называется *определителем Грама* пары векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Поскольку $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ равно площади S параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, формула (7) равносильна формуле

$$S^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

в которой векторные произведения явно не участвуют. Таким образом, мы видим, что *определитель Грама пары векторов равен квадрату площади параллелограмма, построенного на этих векторах.*

Вычислив скалярные произведения через координаты и сравнив формулы (2) и (9), мы немедленно получим следующее тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \tag{10}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix}.$$

При $a_3 = 0$, $b_3 = 0$ («случай плоскости») тождество (10) равносильно тождеству

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2, \tag{11}$$

известному из теории комплексных чисел (тождество (11) выражает тот факт, что произведение модулей комплексных чисел $a_1 + ia_2$ и $b_1 + ib_2$ равно модулю их произведения).

Аналог формулы (9) (и тождества (10)) существует и для трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. В нем участвует определитель

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix},$$

называемый *определителем Грама* тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. В координатах относительно ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, в котором векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ выражаются по формулам (4), этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 + b_2^2 & b_1c_1 + b_2c_2 \\ a_1c_1 & b_1c_1 + b_2c_2 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Автоматическое вычисление показывает, что он равен $a_1 b_2^2 c_3^2$. С другой стороны, как мы уже знаем, $a_1 b_2 c_3 = \boldsymbol{abc}$. Таким образом, в полной аналогии с формулой (7)

$$(12)\qquad (\boldsymbol{abc})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ba} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$(13)\qquad V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ba} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix},$$

где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Аналог формулы (6) имеет вид

$$(14)\qquad (\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{xyz}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{ax} & \boldsymbol{ay} & \boldsymbol{az} \\ \boldsymbol{bx} & \boldsymbol{by} & \boldsymbol{bz} \\ \boldsymbol{cx} & \boldsymbol{cy} & \boldsymbol{cz} \end{vmatrix},$$

где определитель справа называется *взаимным определителем Грама* троек $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Доказательство формулы (14) сводится к тривиальному, хотя и несколько длинному, вычислению. Мы оставим его читателю.

Лекция 16

Прямая в евклидовой плоскости. — Расстояние от точки до прямой. — Углы между прямыми. — Плоскость в евклидовом пространстве. — Расстояние от точки до плоскости. — Угол между двумя плоскостями, между прямой и плоскостью, между двумя прямыми. — Расстояние от точки до прямой в пространстве. — Расстояние между двумя прямыми в пространстве. — Уравнения общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых в пространстве.

Наличие в плоскости или в пространстве евклидовой структуры (скалярного умножения) позволяет существенно дополнить также и теорию прямых и плоскостей. Как всегда, рассмотрим сначала прямые на плоскости.

Пусть в евклидовой плоскости задан произвольный отличный от нуля вектор $\boldsymbol{n}$ и некоторая точка M_0.

Легко видеть, что множество всех точек M плоскости, для которых вектор $\boldsymbol{n}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{M_0M}$, т. е. для которых имеет место равенство

$$\boldsymbol{n}\overrightarrow{MM} = 0, \tag{1}$$

является прямой, проходящей через точку M_0. Действительно, в прямоугольных координатах условие (1) имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где A, B — координаты вектора $\boldsymbol{n}$, а x, y и x_0, y_0 — координаты соответственно точек M и M_0. □

О векторе $\boldsymbol{n}$ говорят, что он *ортогонален* прямой. С точностью до коллинеарности он однозначно определен прямой. Любое уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

(в прямоугольных координатах) определяет вектор $\boldsymbol{n}(A, B)$, ортогональный прямой. Если этот вектор нормирован (имеет длину 1), т. е. если $A^2 + B^2 = 1$, и если $C \leqslant 0$, то уравнение (2) называется *нормальным уравнением* прямой. В этом случае вектор $\boldsymbol{n}$ имеет координаты $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, где α — угол между вектором $\boldsymbol{n}$ и единичным вектором $\boldsymbol{i}$ оси абсцисс.

Обыкновенно нормальное уравнение пишут в виде

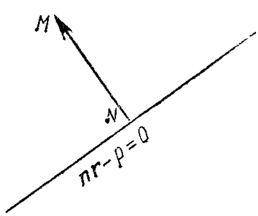
(3) $$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где $p = -C \geqslant 0$. Чтобы привести уравнение (2) к виду (3), достаточно разделить его на $\sqrt{A^2 + B^2}$, когда $C \leqslant 0$, и на $-\sqrt{A^2 + B^2}$, когда $C \geqslant 0$.

Вводя радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (x, y), мы можем уравнение (3) записать в векторной форме:

(4) $$\boldsymbol{nr} - p = 0.$$

Определение 1. Две прямые называются *перпендикулярными*, если их направляющие векторы ортогональны.



Пусть N — точка пересечения с прямой (4) прямой, проходящей через данную точку M и перпендикулярной прямой (4) (легко видеть, что такая прямая всегда существует и единственна). Длина $d = |NM|$ отрезка $\overline{NM}$ называется *расстоянием от точки M до прямой* (4).

Это расстояние равно, очевидно, абсолютной величине скалярного произведения $\boldsymbol{n}\overrightarrow{NM} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})$, где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ — радиус-векторы точек M и N. Но точка N лежит на прямой (4), и потому $\boldsymbol{ns} = p$. Следовательно,

(5) $$d = |\boldsymbol{nr} - p| = |x \cos \alpha + y \sin \alpha - p|.$$

Эта формула объясняет, зачем нужны нормальные уравнения.

При $p \neq 0$ величина $\boldsymbol{nr} - p$ положительна (и, значит, равна d) тогда и только тогда, когда точка M лежит не в той полуплоскости, которой принадлежит начало координат O.

Вообще говоря, угол φ между двумя прямыми на евклидовой плоскости определить единственным образом не так-то просто. Как мы уже замечали (см. лекцию 12), его безыскусственное определение как угла между направляющими векторами этих прямых дает, вообще говоря, четыре различных значения. Даже если наложить ограничение $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (такие углы можно назвать «элементарно-геометрическими»), то все равно останется выбор между двумя смежными углами (в сумме дающими π).

Пусть рассматриваемые прямые заданы (в прямоугольных координатах) уравнениями

$$(6)\qquad Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C = 0.$$

Тогда за угол φ естественно принять угол между направляющими векторами $\boldsymbol{a}(B, -A)$ и $\boldsymbol{a}_1(B_1, -A_1)$ (задающими ориентации прямых, определяющиеся данными уравнениями; см. лекцию 7). Значит,

$$(7)\qquad \cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Вместе с условием $0 \leqslant \varphi < \pi$ это однозначно определит угол φ. Этот угол — острый при $AA_1 + BB_1 > 0$, тупой при $AA_1 + BB_1 < 0$ и прямой при $AA_1 + BB_1 = 0$

В частности, мы видим, что *прямые* (6) *тогда и только тогда перпендикулярны, когда*

$$AA_1 + BB_1 = 0.$$

Вместо того чтобы накладывать на угол φ элементарно-геометрическое ограничение $0 \leqslant \varphi < \pi$, можно потребовать, чтобы сумма $\varphi + \frac{\pi}{2}$ была одним из углов между векторами $\boldsymbol{a}(B, -A)$ и $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1)$. Поскольку $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$, это равносильно требованию, чтобы имело место равенство

$$(8)\qquad \sin\varphi = \frac{AB_1 - A_1B}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Формулы (7) и (8) однозначно определяют угол φ, удовлетворяющий условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Его абсолютная величина равна элементарно-геометрическому углу φ.

Еще один способ фиксировать угол φ состоит в том, что ищется элементарно-геометрический угол, имеющий тот же тангенс, что и угол, определяющийся по второму способу. Другими словами, этот угол однозначно определяется формулой

$$(9)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}$$

и условием $0 \leqslant \varphi < \pi$.

Последний способ обыкновенно употребляется, когда прямые заданы уравнениями вида

$$(10)\qquad y = kx + b \quad \text{и} \quad y = k_1x + b_1.$$

Для таких прямых формула (9) приобретает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1}.$$

В частности, мы видим, что *прямые* (10) *тогда и только тогда*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{параллельны,}\\ \textit{перпендикулярны}\end{array}\right\}, \textit{ когда } \left\{\begin{array}{l} k = k_1,\\ kk_1 = -1.\end{array}\right.$$

Как известно из школьного курса геометрии, коэффициент k называется *угловым коэффициентом* прямой $y = kx + b$ и равен тангенсу угла, образованного этой прямой с осью абсцисс.

Для плоскостей в евклидовом пространстве дело обстоит совершенно аналогично.

Для любого отличного от нуля вектора $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ множество всех точек $M(x, y, z)$ пространства, для которых

$$\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M} = 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка, является плоскостью

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

О векторе $\boldsymbol{n}$ говорят, что он *ортогонален* этой плоскости. Он является вектором, дополнительным к направляющему бивектору плоскости. Поэтому с точностью до коллинеарности вектор $\boldsymbol{n}$ однозначно определен плоскостью.

Любое уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{11}$$

(в прямоугольных координатах) определяет вектор $\boldsymbol{n}(A, B, C)$, ортогональный плоскости. Если этот вектор нормирован, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, и если $D \leqslant 0$, то уравнение (1) называется *нормальным уравнением* плоскости. В этом случае, $\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы между вектором $\boldsymbol{n}$ и векторами базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Обыкновенно нормальное уравнение пишут в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{12}$$

где $p \leqslant 0$. Чтобы привести уравнение (11) к виду (12), достаточно разделить его на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, когда $D \leqslant 0$, и на $-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, когда $D \geqslant 0$.

В «векторной» форме уравнение (12) имеет вид

$$nr - p = 0. \tag{13}$$

Определение 2. Прямая называется *перпендикулярной* плоскости (13), если ее направляющий вектор коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}$. Пусть N — точка пересечения плоскости (13) с прямой, проходящей через данную точку M и перпендикулярной этой плоскости. Длина $d = |NM|$ отрезка $\overline{NM}$ называется *расстоянием от точки M до плоскости* (13).

Дословно так же, как для расстояния от точки до прямой доказывается, что расстояние от точки M до плоскости (13) выражается формулой

$$d = |\boldsymbol{nr} - p|,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M.

Угол между двумя плоскостями определяется как угол между ортогональными этим плоскостям векторами. Его можно однозначно фиксировать теми же тремя способами, что и угол между двумя прямыми на плоскости, и получить аналогичные формулы. За полной тривиальностью мы не будем тратить на это ни времени, ни места. Отметим только, что *две плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

тогда и только тогда перпендикулярны (т. е. угол между ними равен $\pi/2$), *когда выполнено соотношение*

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

Аналогично, *угол между прямой и плоскостью* определяется как дополнение до $\pi/2$ угла между направляющим вектором $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ прямой и вектором $\boldsymbol{n}(A, B, C)$, ортогональным плоскости, с дополнительными ограничениями того или иного характера, обеспечивающими единственность. Для него имеет место формула

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

В частности, мы видим, что *прямая и плоскость тогда и только тогда перпендикулярны, когда*

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Наконец, *угол между двумя прямыми в пространстве* определяется по общему правилу (как угол между их направляющими векторами), и потому для него имеет место формула

$$\cos\varphi = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}},$$

где l, m, n и l_1, m_1, n_1 — координаты направляющих векторов данных прямых.

Более интересны вопросы о расстоянии от точки до прямой в пространстве и о расстоянии между прямыми.

Произвольная прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и произвольная не лежащая на ней точка $M(\boldsymbol{r})$ принадлежат, как мы знаем (см. предложение 2 лекции 11), одной и только одной плоскости (а именно плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и имеющей направляющий бивектор $\overrightarrow{M_0M} \wedge \boldsymbol{a}$). Расстояние d от точки M до прямой в этой плоскости и называется *расстоянием от точки M до прямой в пространстве.*

По определению, чтобы его вычислить, нужно найти на прямой такую точку N, чтобы прямая NM была перпендикулярна данной прямой, т. е. чтобы вектор $\overrightarrow{NM}$ был ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$. Тогда d будет равно длине вектора $\overrightarrow{NM}$, т. е. будет иметь место равенство

$$\overrightarrow{NM} = d\boldsymbol{e}_1,$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — некоторый единичный вектор, а следовательно, и равенство

$$\overrightarrow{NM} \wedge \boldsymbol{a} = ad(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2),$$

где a — длина вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{a}}{a}$. Так как векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ единичны и ортогональны (т. е. составляют ортонормированное семейство), отсюда следует, что $|\overrightarrow{NM} \wedge \boldsymbol{a}| = ad$, т. е. что

$$d = \frac{1}{a}|\overrightarrow{NM} \times \boldsymbol{a}|.$$

С другой стороны, так как точка N принадлежит данной прямой, ее радиус-вектор $\boldsymbol{s}$ имеет вид $\boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{a}$, где

t_1 — некоторое число. Поэтому $\overrightarrow{NM} = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) - t_1\boldsymbol{a}$, и, значит,

$$\overrightarrow{NM} \times \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{a}.$$

Этим доказано, что

$$d = \frac{1}{a} \left| (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{a} \right|,$$

т. е. (см. формулу (7) лекции 15)), что

$$d^2 = \frac{1}{a^2} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)^2 & (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a} \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 \end{vmatrix}.$$

В координатах

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}{l^2 + m^2 + n^2}$$

и

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 & (x - x_0)\,l + (y - y_0)\,m + (z - z_0)\,n \\ (x - x_0)\,l + (y - y_0)\,m + (z - z_0)\,n & l^2 + m^2 + n^2 \end{vmatrix}}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Последние формулы существенно упрощаются, когда вектор $\boldsymbol{a}$ является ортом (т. е. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$).

Пусть теперь

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{b} \tag{14}$$

— две непараллельные прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости (скрещивающиеся прямые). Оказывается, что *существует одна и только одна такая пара чисел* (s_0, t_0), *что прямая* N_0N_1, *проходящая через точки* $N_0\,(\boldsymbol{n}_0)$ *и* $N_1\,(\boldsymbol{n}_1)$, *где* $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{r}_0 + s_0\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{r}_1 + t_0\boldsymbol{b}$, *перпендикулярна обеим прямым* (14).

Действительно, прямая N_0N_1 имеет направляющий вектор $\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0 = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) + t_0\boldsymbol{b} - s_0\boldsymbol{a}$, и потому она тогда и только тогда перпендикулярна прямым (14), когда $(\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0)\,\boldsymbol{a} = 0$ и $(\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0)\,\boldsymbol{b} = 0$, т. е. когда

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a} + t_0\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} - s_0\boldsymbol{a}^2 = 0,$$
$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{b} + t_0\boldsymbol{b}^2 - s_0\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0.$$

С другой стороны, определитель этой системы линейных уравнений относительно s_0, t_0 является определителем Грама векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и, значит, отличен от нуля. Поэтому эта система имеет единственное решение

$$s_0 = \frac{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a} & \boldsymbol{ab} \\ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix}}, \qquad t_0 = -\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{ab} & (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix}}. \quad \square$$

Прямая N_0N_1 называется *общим перпендикуляром* скрещивающихся прямых, а длина $d = |N_0N_1|$ отрезка $\overline{N_0N_1}$ — *расстоянием* между этими прямыми.

Название числа d объясняется тем, что, как нетрудно видеть, *для любой точки M_0 прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a}$ и любой точки M_1 прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{b}$ имеет место неравенство*

$$|M_0M_1| \geqslant |N_0N_1|,$$

причем равенство достигается только при $M_0 = N_0$ и $M_1 = N_1$. Действительно, так как $(\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0)\,\boldsymbol{a} = 0$ и $(\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0)\,\boldsymbol{b} = 0$, то

$$\begin{aligned} |M_0M_1|^2 &= ((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) + t\boldsymbol{b} - s\boldsymbol{a})^2 = \\ &= \{((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) + t_0\boldsymbol{b} - s_0\boldsymbol{a}) + (t - t_0)\,\boldsymbol{b} - (s - s_0)\,\boldsymbol{a}\}^2 = \\ &= ((\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0) + (t - t_0)\,\boldsymbol{b} - (s - s_0)\,\boldsymbol{a})^2 = \\ &= (\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0)^2 + [(t - t_0)\,\boldsymbol{b} - (s - s_0)\,\boldsymbol{a}]^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|M_0M_1|^2 \geqslant (\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_0)^2 = |N_0N_1|^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $s = s_0$, $t = t_0$. $\square$

Заметим теперь, что смешанное произведение $\overrightarrow{M_0M_1}\boldsymbol{ab}$ не зависит от выбора точек M_0 и M_1 на прямых (4), поскольку при изменении этих точек к вектору $\overrightarrow{M_0M_1}$ прибавляется линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Но при $s = 0$, $t = 0$ это произведение равно $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{ab}$, а при $s = s_0$ и $t = t_0$ оно равно $\overrightarrow{N_0N_1}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \pm |N_0N_1| \cdot |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ (ибо векторы $\overrightarrow{N_0N_1}$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ коллинеарны). Следовательно,

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{ab}|}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}.$$

В координатах

$$(15)\qquad d=\left|\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ l & m & n\\ l_1 & m_1 & n_1\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n\\ m_1 & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l & n\\ l_1 & n_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l & m\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}^2}}\right|,$$

где

l, m, n — координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a}$,
l_1, m_1, n_1 — координаты направляющего вектора $\boldsymbol{b}$,
x_0, y_0, z_0 — координаты радиус-вектора $\boldsymbol{r}_0$,
x_1, y_1, z_1 — координаты радиус-вектора $\boldsymbol{r}_1$.

Таким образом, формула (15) дает расстояние между двумя непараллельными прямыми

$$(16)\qquad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\quad\text{и}\quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}.$$

Для прямой N_0N_1 мы знаем радиус-вектор ее точки N_0 и направляющий вектор $\overrightarrow{N_0N_1}$. Поэтому мы можем сразу же написать параметрическое уравнение этой прямой. После очевидных тождественных преобразований оно приобретает вид

$$\boldsymbol{r}=\frac{\begin{vmatrix} (1-t)\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{r}_1 & -(1-t)\boldsymbol{a} & t\boldsymbol{b}\\ (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab}\\ (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{b} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab}\\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2\end{vmatrix}}.$$

Эту прямую можно охарактеризовать как линию пересечения двух плоскостей: одной, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и имеющей направляющий бивектор $\boldsymbol{a}\wedge\wedge\overrightarrow{N_0N_1}$ (или, что равносильно, направляющий бивектор $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$), и другой, проходящей через точку M_1 (x_1, y_1, z_1) и имеющей направляющий бивектор $\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, т. е. уравнениями

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ l & m & n\\ \begin{vmatrix} m & n\\ m_1 & n_1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} l & n\\ l_1 & n_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l & m\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0,\\ &\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ \begin{vmatrix} m & n\\ m_1 & n_1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} l & n\\ l_1 & n_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l & m\\ l_1 & m_1\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0.\end{aligned}\right.$$

Лекция 17

Парабола — Директориальное и оптическое свойства параболы — Эллипс — Фокальное, директориальное и оптическое свойства эллипса — Гипербола — Фокальное, директориальное и оптическое свойства гиперболы.

В этой лекции мы начнем изучение трех замечательных линий на евклидовой плоскости — параболы, эллипса и гиперболы. Несмотря на их внешнее несходство, мы увидим, что они естественным образом объединяются в одну группу

Определение 1. Линия на евклидовой плоскости называется *параболой*, если существует система прямоугольных координат x, y, в которой уравнение этой линии имеет вид

$$y^2 = 2px, \text{ где } p > 0. \tag{1}$$

Заметим, что мы не даем никакого общего определения, что такое линия, поскольку никаких теорем о «линиях вообще» мы доказывать не собираемся. Употреблять же термин «линия» мы будем как синоним термина «подмножество плоскости», но имеющий более узкое значение, определяющееся исключительно традицией.

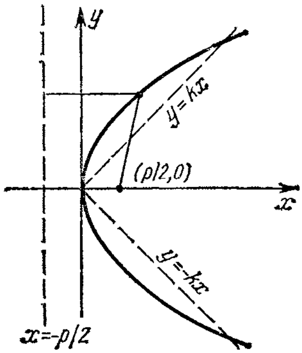
«Уравнением» линии мы будем называть произвольное соотношение между координатами x и y, выполняющееся тогда и только тогда, когда точка M (x, y) с этими координатами принадлежит линии Это не является строгим определением, а лишь словесным описанием в достаточной мере нечеткого понятия. Поэтому о связи «уравнений» и «линий» мы не утверждаем ничего: ни того, что любая линия имеет уравнение, и ни того, что любое уравнение задает линию. На практике, определяя конкретную линию (или класс линий), мы всегда будем указывать некоторое ее (их) уравнение.

В принципе можно было бы обойтись без понятий линии и ее уравнения, но это приведет к непривычным и утяжеленным формулировкам. Например, определение 1 примет тогда следующий вид: множество точек плоскости называется параболой, если существуют такая система прямоугольных координат x, y и такое число $p > 0$, что точка

$M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит этому множеству, когда $y^2 = 2px$.

Предусмотренные определением 1 прямоугольные координаты x, y называются *каноническими координатами* для данной параболы, а уравнение (1) — ее *каноническим уравнением*.

Ось абсцисс системы канонических координат является осью симметрии параболы (ибо при изменении у y знака уравнение (1) не меняется). На этом основании эта прямая называется *осью* параболы (иногда *фокальной осью*).



Парабола

При $x < 0$ точек, удовлетворяющих уравнению (1), не существует. Это означает, что вся парабола расположена в полуплоскости $x \geqslant 0$.

Ось ординат $x = 0$ парабола (1) пересекает только в точке $O(0,0)$, которая называется *вершиной* параболы.

Отношение

$$\frac{|y|}{x} = \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}$$

стремится к нулю, когда $x \to +\infty$. Наглядно это означает, что начиная с достаточно большого x, парабола содержится в любом симметричном угле, охватывающем положительную полуось оси абсцисс. Таким образом, если смотреть вдоль этой полуоси, то парабола будет казаться сходящейся, хотя на самом деле она сколь угодно далеко отходит от оси абсцисс (ибо $|y| \to +\infty$ при $x \to +\infty$).

Теперь легко видеть, что *ось параболы является ее единственной осью симметрии*. Действительно, пусть d — произвольная ось симметрии параболы (1) и пусть AOB — произвольный симметричный угол, охватывающий положительную полуось оси параболы. При симметрии в оси d угол AOB переходит в некоторый угол $A'O'B'$, обладающий вместе с углом AOB свойством содержать почти всю параболу (1) (т. е. всю эту параболу за исключением некоторой ее конечной части). Поэтому пересечение углов AOB и $A'O'B'$ также будет содержать почти всю параболу (1) и, значит, будет простираться в бесконечность. С другой стороны, ясно, что если биссектрисы этих углов непараллельны (что имеет место тогда и только тогда, когда ось d непараллельна оси параболы), то их пересечение либо пусто, либо является четырехугольником конечного размера. Это доказывает, что ось d должна быть параллельна оси параболы (оси абсцисс канонической системы координат). Но симметрия относительно оси, параллельной оси абсцисс, переводит ось ординат в себя и потому должна оставлять точку O на месте (ибо эта точка является единственной общей точкой параболы и оси ординат). Поскольку это возможно только тогда, когда ось d проходит через точку O, этим доказано, что эта ось является осью параболы (1). □

По аналогичным соображениям *у параболы нет центра симметрии.*

Таким образом, ось и вершина параболы однозначно характеризуются чисто геометрически, без обращения к каким-либо координатам: ось есть ось симметрии, а вершина — общая точка оси и параболы. Это означает, что оси системы канонических координат также однозначно характеризуются параболой: ось абсцисс — как ее ось, а ось ординат — как прямая, проходящая через вершину перпендикулярно оси. Положительное направление оси абсцисс также определяется параболой (как направление, задающее полуплоскость, в которой она расположена)

Этим доказано, что, с точностью до изменения ориентации оси ординат (т. е. знака у координаты y), *канонические координаты однозначно определены параболой.*

Поэтому все объекты, определяющиеся с помощью канонических координат, но не зависящие от ориентации оси ординат, будут инвариантно (т. е. без какого-либо произвола) связаны с параболой. К ним относятся:

число p, называемое *фокальным параметром*,

число $p/2$, называемое *фокусным расстоянием*,

точка $(p/2, 0)$, называемая *фокусом*,

прямая $x = -p/2$, называемая *директрисой.*

Легко видеть, что *парабола является множеством* (или, как предпочитают по старинке говорить, «геометрическим местом») *всех точек, равноудаленных от фокуса и директрисы.* Действительно, условие равноудаленности

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

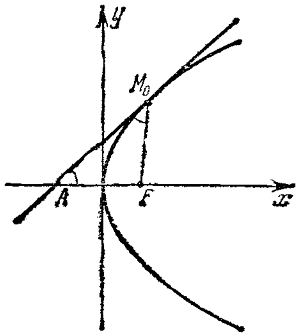
после возведения в квадрат и приведения подобных членов превратится в уравнение (1), и наоборот, если $y^2 = 2px$, то это условие, очевидно, выполнено. □

Это свойство параболы называется ее **директориальным свойством**.

В курсе анализа показывается, что касательная к кривой $y = f(x)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$ (определяемая как предельное положение секущей) имеет уравнение

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Это общее утверждение применимо, в частности, к части параболы, расположенной в верхней полуплоскости $y > 0$ и задаваемой уравнением $y = \sqrt{2px}$. Так как



$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y},$$

то, следовательно, касательная к параболе (1) в ее точке $M_0(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, задается уравнением

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Поскольку $y_0^2 = 2px_0$, это уравнение после умножения на y_0 и приведения подобных членов может быть записано в виде

$$y_0 y = p(x + x_0). \tag{2}$$

Легко видеть, что это же уравнение получается и при $y_0 < 0$ (при $y_0 = 0$ касательной является, очевидно, ось ординат $x = 0$). Таким образом, *касательная к параболе* (1) *в произвольной ее точке* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет уравнение* (2).

Отрезок, соединяющий фокус параболы с ее точкой M_0, называется *фокальным радиусом* точки M_0.

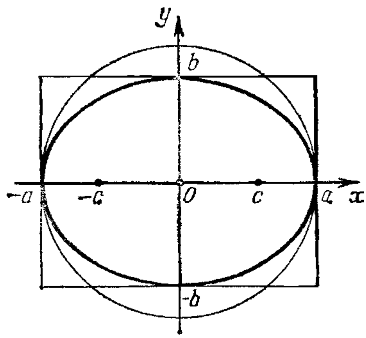
Прямая (2) пересекает ось абсцисс $y = 0$ в точке $A(-x_0, 0)$, находящейся на том же расстоянии $x_0 + \frac{p}{2}$ от фокуса $F(p/2, 0)$ параболы, что и точка касания $M_0(x_0, y_0)$. Поэтому *угол* AM_0F *между касательной и фокальным радиусом точки касания равен углу* M_0AF *между касательной и положительным направлением оси абсцисс*. [Другое доказательство. Направляющий вектор прямой (2) имеет координаты (y_0, p), а прямой FM_0 — координаты $\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$. Поэтому для угла φ

между этими прямыми имеет место — в силу директориального свойства — равенство

$$\cos\varphi = \frac{y_0\left(x_0 - \frac{p}{2}\right) + py_0}{\sqrt{y_0^2+p^2}\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+y_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+p^2}}.$$

Но то же равенство имеет место и для угла между прямой (2) и осью абсцисс.]

Это свойство параболы называется ее оптическим свойством. (Если представить себе, что из фокуса F параболы испускаются лучи света, то, поскольку угол падения равен углу отражения, все отраженные лучи будут параллельны оси параболы; на этом свойстве параболы основано устройство параболических зеркал, прожекторов, зеркальных телескопов и т. п.)



Эллипс

Определение 2. Линия на евклидовой плоскости называется *эллипсом*, если существует система прямоугольных координат x, y, в которых уравнение этой линии имеет вид

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a \geqslant b > 0.$$

Координаты, в которых уравнение эллипса имеет вид (3), называются *каноническими* (для этого эллипса), а само уравнение (3) называется *каноническим уравнением* эллипса.

При $b = a$ эллипс имеет уравнение

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

являющееся, очевидно, уравнением окружности радиуса a с центром в точке O (0, 0). Следовательно, окружность является частным случаем эллипса.

При $b < a$ сравним эллипс (3) с окружностью (4). Пусть $k = \frac{b}{a}$. Если точка с координатами x, y принадлежит окружности (4), то точка с координатами x, ky будет принадлежать эллипсу (3) $\left(\text{ибо } \frac{x^2}{a^2} + \frac{(ky^2)}{b^2} = \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1\right)$, и наоборот. Это означает, что эллипс (3) получается из окружности (4) преобразованием $(x, y) \longmapsto (x, ky)$, геометрически представляющим собой *сжатие* плоскости к оси абсцисс в отношении k. Это не только дает вполне удовлетворительное представление о форме эллипса, но одновременно и доказывает (поскольку $k < 1$), что, за исключением точек $(\pm a, 0)$, все точки эллипса (3) лежат внутри окружности (4).

При $b = a$ любая прямая, проходящая через точку O (0, 0), будет осью симметрии эллипса. Так как в уравнение (3) входят только квадраты координат, то координатные оси будут осями симметрии эллипса и при любых a и b. Являясь точкой пересечения осей симметрии, точка O (0, 0) будет центром симметрии эллипса.

Оказывается, что *при $b < a$ эллипс никаких других осей симметрии не имеет*. Действительно, поскольку эллипс является ограниченной фигурой (расположен внутри окружности (4)), точка O (0, 0) является его единственным центром симметрии (так как отражение одного центра симметрии в другом снова является центром симметрии, то только бесконечные фигуры могут иметь более одного центра симметрии). Поэтому любая ось симметрии эллипса (3) проходит через точку O (0,0) и, значит, является осью симметрии окружности (4). Поэтому симметрия в этой оси должна сохранять пересечение окружности (4) и эллипса (3), состоящее, как мы выяснили, из двух точек $(\pm a, 0)$. Следовательно, эта симметрия либо оставляет на месте обе точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, либо их переставляет. В первом случае осью симметрии является ось абсцисс системы канонических координат, а во втором — ось ординат. $\square$

Таким образом, при $b < a$ оси системы канонических координат однозначно характеризуются эллипсом. Значит, *с точностью до знаков канонические координаты единственны.*

Поэтому при $b < a$ все объекты, определяющиеся с помощью канонических координат, но не зависящие от ориентации координат осей (не меняющиеся при произвольных изменениях знаков координат), будут инвариантно связаны с эллипсом.

К ним относятся:

число a, называемое *большой полуосью*;

число b, называемое *малой полуосью*;

число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называемое *линейным эксцентриситетом*;

число $2c$, называемое *фокусным расстоянием*;

число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, называемое (числовым) *эксцентриситетом* (очевидно, что $0 \leqslant e < 1$);

число $p = \frac{b^2}{a}$, называемое *фокальным параметром* (или просто *параметром*);

ось абсцисс, называемая *большой* (или *фокальной*) *осью*;

ось ординат, называемая *малой осью*;

точка O (0,0), называемая *центром;*

точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$, называемые *вершинами*;

точки $(\pm c, 0)$, называемые *фокусами*;

при $e \neq 0$ прямые $x = \pm \frac{a}{e}$, называемые *директрисами*.

Фокус $(c, 0)$ и директриса $x = \frac{a}{e}$ называются *правыми*, а фокус $(-c, 0)$ и директриса $x = -\frac{a}{e}$ — *левыми*. Фокус и директриса называются *одноименными*, если они оба — правые или оба — левые. Ясно, что это отношение между фокусом и директрисой геометрически инвариантно, тогда как свойство фокуса (директрисы) быть правым(ой) или левым(ой) зависит от ориентации оси абсцисс.

Для окружности $b = a$, $c = 0$, $e = 0$, $p = a$, фокусы совпадают с центром, а директрисы не определены.

Отрезок, соединяющий точку M (x, y) эллипса с фокусом, называется *фокальным радиусом* этой точки. Имеется два фокальных радиуса — *правый* и *левый*.

Для длины r_1 левого фокального радиуса имеет место формvла

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2 = (x + c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + 2xc + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2xc + a^2 =$$
$$= e^2x^2 + 2xea + a^2 = (ex + a)^2.$$

Поскольку $|x| \leqslant a$ и, значит, $|ex| < a$, отсюда следует, что

$$r_1 = a + ex.$$

Аналогично доказывается, что для длины r_2 правого фокального радиуса справедлива формула

$$r_2 = a - ex.$$

Следовательно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — такая точка плоскости, что сумма ее расстояний от фокусов эллипса равна $2a$:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Уединяя один корень, возводя в квадрат, приводя подобные члены, еще раз уединяя корень и снова возводя в квадрат, мы после очевидных преобразований получим уравнение (3). Этим доказано, что *эллипс* (3) *является геометрическим местом точек, сумма расстояний которых от фокусов равна* $2a$.

Это свойство эллипса называется его **ф о к а л ь н ы м с в о й с т в о м**.

Расстояние точки $M(x, y)$ эллипса (3) до левой директрисы $x = -\frac{a}{e}$ равно

$$\left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex+a|}{e} = \frac{r_1}{e},$$

а до правой —

$$\left|x - \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex-a|}{e} = \frac{r_2}{e}.$$

Обратно, если

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = e\left|x \pm \frac{a}{e}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (ex \pm a)^2,$$

и потому

$$(1 - e^2)\,x^2 + y^2 = a^2 - c^2,$$

что, очевидно, равносильно уравнению (3). Этим доказано, что *эллипс* (3) *является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от фокуса до одноименной директрисы равно* e.

Это свойство эллипса называется его **директориальным свойством**. Оно вполне аналогично соответствующему свойству параболы, в которое оно превращается при $e = 1$. На этом основании удобно считать параболу своего рода эллипсом с эксцентриситетом $e = 1$.

Верхняя половина эллипса (расположенная в полуплоскости $y > 0$) является графиком функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

а нижняя — графиком функции

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

В первом случае

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y},$$

и, как легко видеть, то же равенство будет иметь местс и во втором случае. Значит, касательная к эллипсу в любой его точке $M_0(x_0, y_0)$ (отличной от вершин $(\pm a, 0)$) имеег уравнение

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0).$$

Умножая на y_0, деля на b^2 и учитывая равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Поскольку в вершинах $(\pm a, 0)$ касательными к эллипсу (3) являются вертикальные прямые $x = \pm a$ и, следовательно, уравнение (5) годится и для этих точек, мы получаем таким образом, что *касательная к эллипсу* (3) *в произвольной его точке* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет уравнение* (5).

В частности, мы видим, что расстояние d_1 от первого фокуса $F_1(-c, 0)$ до касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ выражается формулой

$$d_1 = \frac{1}{N}\left|\frac{x_0(-c)}{a^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{b^2} - 1\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{x_0 c}{a^2} + 1\right| =$$
$$= \frac{1}{Na}|x_0 e + a| = \frac{r_1}{Na},$$

где

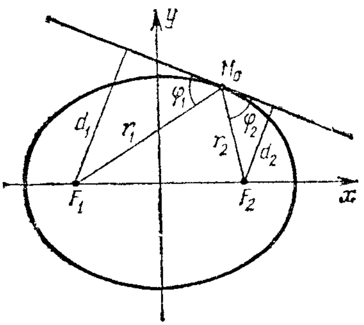
$$N = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$$

— нормирующий множитель, а r_1 — длина левого фокального радиуса точки M_0. Аналогично, расстояние d_2 от правого фокуса F_2 $(c, 0)$ до той же касательной выражается формулой

$$d_2 = \frac{1}{N}\left|\frac{x_0 c}{a^2} - 1\right| = \frac{1}{Na}\,|x_0 e - a| = \frac{r_2}{Na},$$

где r_2 — длина правого фокального радиуса точки M_0.

Теперь легко видеть, что *касательная в любой точке M_0 эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы*. Действительно, если φ_1 и φ_2 — эти углы, то



$$\sin\varphi_1 = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{Na}$$

и $$\sin\varphi_2 = \frac{d_2}{r_2} = \frac{1}{Na}.$$

Таким образом, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$, и потому $\varphi_1 = \varphi_2$. □

Это свойство (называемое обычно **оптическим свойством** эллипса) означает, что все лучи света, исходящие из одного фокуса (скажем, F_1), после отражения в эллипсе собираются в его другом фокусе F_2.

Определение 3. Линия на евклидовой плоскости называется *гиперболой*, если существует система прямоугольных координат x, y, в которых уравнение этой линии имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{6}$$

Координаты, в которых уравнение гиперболы имеет вид (6), называются *каноническими* (для этой гиперболы), а само уравнение (6) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

При $b = a$ гипербола называется *равнобочной*. В координатах

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

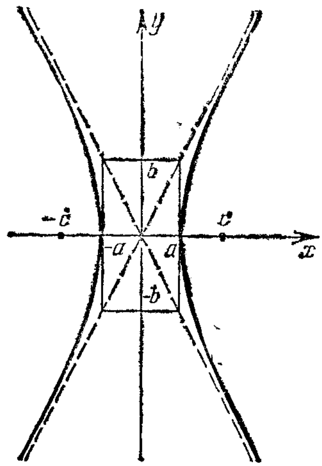
(также, очевидно, прямоугольных) ее уравнение

$$(7) \qquad x^2 - y^2 = a^2$$

приобретает вид

$$uv = 2a^2,$$

откуда следует, что по отношению к координатам u и v равнобочная гипербола представляет собой известный из школы **график обратной пропорциональной зависимости**. В координатах x и y мы получаем, следовательно, тот же график, но повернутый на $\frac{\pi}{4}$.



Гипербола

При $u \to \pm\infty$ (а также при $v \to \pm\infty$) график обратной пропорциональной зависимости все теснее приближается к оси абсцисс $v = 0$ (соответственно к оси ординат $u = 0$), т. е., как говорят, имеет эти оси своими *асимптотами* (двусторонними). В канонических координатах x, y эти асимптоты являются биссектрисами $y = x$ и $y = -x$ координатных углов.

Чтобы перейти от равнобочной гиперболы (7) к произвольной гиперболе (6), достаточно произвести сжатие $(x, y) \mapsto (x, ky)$ к оси абсцисс с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$ (заметим, что, в отличие от случая эллипса, этот коэффициент вполне может быть теперь больше единицы, так что наше «сжатие» может быть на самом деле растяжением). Это дает вполне удовлетворительное представление о форме гиперболы.

В частности, мы видим, что гипербола состоит из двух связных частей, получающихся, соответственно, при $x > a$ и при $x < -a$, и обладает двумя (и только двумя!) асимптотами с уравнениями $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, располагаясь в двух вертикальных углах, образованных ими.

Эти части называются *ветвями* гиперболы, соответственно, — *левой* и *правой*.

Так как в уравнение (6) входят только квадраты координат, то координатные оси будут осями симметрии гиперболы, а точка O (0,0) будет ее центром симметрии. Легко видеть, что *гипербола никаких других осей симметрии не имеет* (в том числе и при $b = a$). Действительно, любая симметрия гиперболы переводит асимптоты в асимптоты и, в частности, оставляет на месте их точку пересечения O (0,0). Следовательно, каждая ось симметрии гиперболы проходит через точку O (0,0) и потому является осью симметрии окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Но из сказанного выше непосредственно вытекает, что гипербола (6) пересекает эту окружность в двух точках $(\pm a, 0)$. Поэтому рассматриваемая симметрия либо оставляет каждую из этих точек на месте (и, значит, является симметрией относительно оси абсцисс), либо переставляет эти точки (и, значит, является симметрией относительно оси ординат). $\square$

Тем самым доказано, что оси системы канонических координат однозначно определены гиперболой, т. е. что *с точностью до знаков канонические координаты единственны*. Поэтому все объекты, определяющиеся с помощью канонических координат, но не меняющиеся при изменении их знаков, инвариантно связаны с гиперболой. К ним относятся:

число a, называемое *действительной полуосью*;

число b, называемое *мнимой полуосью*;

число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называемое *линейным эксцентриситетом*;

число $2c$, называемое *фокусным расстоянием*;

число $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$, называемое (числовым) *эксцентриситетом* (очевидно, что $1 < e < \infty$);

число $p = \dfrac{b^2}{a}$, называемое *фокальным параметром*;

ось абсцисс, называемая *действительной* (или *фокальной*) осью;

ось ординат, называемая *мнимой осью*;

точка O (0,0), называемая *центром;*

точки $(\pm a, 0)$, называемые *вершинами;*

точки $(\pm c, 0)$, называемые *фокусами;*

прямые $x = \pm \dfrac{a}{e}$, называемые *директрисами*.

Левые, правые и одноименные фокусы, директрисы и фокальные радиусы определяются для гиперболы точно так же, как для эллипса. Формулы

$$r_1^2 = (ex + a)^2, \quad r_2^2 = (ex - a)^2$$

для квадратов длин фокальных радиусов также сохраняются (вместе с доказательством). Однако теперь извлечение корней следует проводить с осторожностью, поскольку для гиперболы $|ex| > |x| \geqslant a$, и потому

$$r_1 = \begin{cases} a + ex & \text{при} \quad x > 0, \\ -a - ex & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

и

$$r_2 = \begin{cases} -a + ex & \text{при} \quad x > 0, \\ a - ex & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a & \text{при} \quad x > 0, \\ -2a & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

т. е. для всех x

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Обратно, если абсолютная величина разности расстояний некоторой точки $M(x, y)$ от фокусов гиперболы равна $2a$, т. е. если

$$\left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

то после практически тех же преобразований, что и в случае эллипса, мы получим для x и y соотношение (6). Этим доказано, что *гипербола* (6) *является геометрическим местом точек, абсолютная величина разности расстояний которых от фокусов равна* $2a$ (ф о к а л ь н о е с в о й с т в о г и п е р б о л ы).

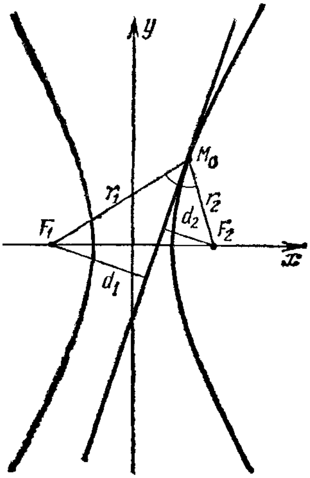
Из формул для r_1 и r_2 дословно так же, как для эллипса, выводится д и р е к т о р и а л ь н о е с в о й с т в о г и п е р б о л ы, т. е. что *гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от фокуса до одноименной директрисы равно* e.

Таким образом, эллипс, парабола и гипербола могут быть получены одной и той же «директориально-фокальной» конструкцией. Все различие будет лишь в величине эксцентриситета e.

Уравнение касательной к гиперболе (6) в ее точке M_0 (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \tag{8}$$

(что доказывается точно так же, как для эллипса), откуда следует, что для расстояний d_1 и d_2 от фокусов гиперболы до касательной в точке M_0 сохраняются прежние формулы



$$d_1 = \frac{r_1}{Na} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{r_2}{Na}.$$

Поэтому, как и для эллипса, *касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы.* По аналогии с эллипсом это свойство называется о п т и ч е с к и м с в о й с т в о м гиперболы. (Однако заявлять, что лучи, исходящие из одного фокуса гиперболы, собираются в другом, было бы слишком поспешным, так как на самом деле эти лучи составляют расходящийся пучок. Дело здесь в том, что, в отличие от касательной к эллипсу, касательная к гиперболе проходит между фокусами, и потому свет отражается не к фокусу, а от него.)

Лекция 18

Уравнения эллипсов, парабол и гипербол, отнесенные к вершине. — Эллипсы, параболы и гиперболы как конические сечения. — Полярные координаты. — Уравнения эллипсов, парабол и гипербол в полярных координатах. — Аффинные эллипсы, параболы, гиперболы. — Алгебраические линии. — Линии второго порядка и связанные с ними трудности. — Комплексная аффинная геометрия и ее недостаточность.

Единство эллипсов, парабол и гипербол можно пояснить и с другой точки зрения.

Рассмотрим для произвольной гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\quad b>0,$$

ее уравнение в координатах

$$x'=x-a,\quad y'=y,$$

получающихся при переносе начала канонических координат в правую вершину $(a, 0)$ гиперболы. Это уравнение имеет вид

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

т. е. вид (мы убираем штрихи)

$$y^2=2px+qx^2, \tag{1}$$

где $q=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1>0\left(\text{а } p=\frac{b^2}{a},\text{ как и раньше}\right)$.

Аналогичный перенос начала координат в левую вершину $(-a, 0)$ эллипса приведет, как нетрудно видеть, его уравнение к тому же виду (1), причем q будет выражаться формулой

$$q=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$$

и, значит, будет удовлетворять неравенствам $-1\leqslant q<0$.

Наконец, при $q=0$ мы получим из (1) каноническое уравнение параболы.

Таким образом, *все гиперболы, параболы и эллипсы могут быть заданы одним и тем же уравнением* (1), где $p > 0$, а $q > 0$ для гипербол, $q = 0$ для парабол и $-1 \leqslant q < 0$ для эллипсов (при $q = -1$ получается окружность).

Если в уравнении (1), оставляя p неизменным, менять q, то при q очень большом получится сильно «раскрытая» гипербола, прижатая к оси ординат. При уменьшении q ветви гиперболы постепенно смыкаются, причем левая ветвь отодвигается все дальше влево (абсцисса левой вершины равна $\left.-\frac{2p}{q}\right)$, пока, наконец, при $q = 0$ левая ветвь не исчезнет («уйдет в бесконечность»), а правая не превратится в параболу. При дальнейшем уменьшении q парабола сомкнется в сильно вытянутый эллипс $\left(\text{с правой вершиной в точке с абсциссой } -\frac{2p}{q}\right)$, который, постепенно округляясь, перейдет при $q = -1$ в окружность.

Интересно посмотреть, что получится, если в уравнении (1) взять $q < -1$. С этой целью введем новые координаты

$$x' = y, \quad y' = x + \frac{p}{q}.$$

В этих координатах линия (1) имеет уравнение (мы снова отбрасываем штрихи)

$$x^2 = 2p\left(y - \frac{p}{q}\right) + q\left(y - \frac{p}{q}\right)^2,$$

т. е. уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 = -\frac{p^2}{q}$, $b^2 = \frac{p^2}{q^2}$. Поскольку $b < a$, это — каноническое уравнение эллипса. Однако теперь эллипс вытянут в вертикальном направлении (вдоль старой оси ординат). Его фокальный параметр равен $\frac{p}{\sqrt{-q}}$, а эксцентриситет равен $\sqrt{1 + q^{-1}}$.

Мы видим, таким образом, что при изменении q от -1 до $-\infty$ окружность, изменяясь в размерах, постепенно вытягивается в вертикальном направлении, одновременно прижимаясь к оси ординат (старой). В «пределе» при $q \to -\infty$ получается точка.

Обратим внимание, что при изменении q от -1 до $-\infty$ меняется и фокальный параметр, который при $q < -1$ равен не p, а $\frac{p}{\sqrt{-q}}$. Поэтому при $q \to -\infty$ не получается параболы (хотя и $e \to 1$), поскольку фокальный параметр стремится к нулю.

Прямым круговым конусом называется поверхность, имеющая в прямоугольных координатах x, y, z уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 z^2. \tag{2}$$

Коническим сечением называется линия, получающаяся при пересечении конуса (2) плоскостью, не проходящей через точку $O(0, 0, 0)$ (плоскость, проходящая через точку O, пересекает конус (2) либо по точке, либо по паре прямых).

В силу круговой симметрии конуса (2) можно без ограничения общности считать, что секущая плоскость параллельна оси Oy, и, значит, имеет уравнение вида

$$x \cos\alpha + z \sin\alpha - p_0 = 0, \tag{3}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ и $p_0 > 0$.

Чтобы найти уравнение конического сечения, получающегося при пересечении конуса (2) плоскостью (3), мы перейдем к новым прямоугольным координатам

$$\begin{aligned} x' &= -x \sin\alpha + z \cos\alpha + q_0, \\ y' &= y, \\ z' &= x \cos\alpha + z \sin\alpha_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$q_0 = p_0 \frac{R \sin\alpha - \cos\alpha}{R \cos\alpha + \sin\alpha}$$

(заметим, что $R \cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$).

Из уравнений (4) следует, что

$$\begin{aligned} x &= -(x' - q_0) \sin\alpha + z' \cos\alpha, \\ y &= y', \\ z &= (x' - q_0) \cos\alpha + z' \sin\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому конус (2) в координатах x', y', z' будет иметь уравнение

$$(-(x' - q_0) \sin\alpha + z' \cos\alpha)^2 + y'^2 = R^2 ((x' - q_0) \cos\alpha + z' \sin\alpha)^2, \tag{5}$$

а плоскость (3) — уравнение

$$z' = p_0.$$

Чтобы в координатах x', y' на плоскости (3) получить уравнение линии пересечения конуса (2) с этой плоскостью, надо в уравнении (5) положить $z' = p_0$. Проделав это и раскрыв скобки, мы после довольно длинных, но вполне элементарных вычислений получим уравнение (штрихи опускаем)

$$y^2 = 2Rp_0x + (R^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\, x^2.$$

Поскольку это уравнение имеет вид (1) с

(6) $$p = Rp_0 \quad \text{и} \quad q = R^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

этим доказано, что *конические сечения — это в точности эллипсы, параболы или гиперболы*. См. рис. на стр. 264.

Согласно уравнениям (6)

$$p_0 = \frac{p}{R} \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = \frac{R^2 - q}{1 + R^2}.$$

Поэтому при любом R (например при $R = 1$) мы в качестве сечения конуса (2) можем получить произвольный эллипс. Когда $\alpha = \pi/2$ получается окружность, при уменьшении α постепенно вытягивающаяся. При

$$\alpha = \arcsin \frac{R}{\sqrt{1 + R^2}}$$

получается парабола, при дальнейшем уменьшении угла α переходящая в гиперболу. При данном R мы можем получить любую гиперболу с $0 < q \leqslant R^2$. Поэтому, чтобы получить все гиперболы, нужны все конусы (2).

Согласно первому закону Кеплера планеты движутся по эллипсам (а кометы — по параболам и гиперболам), в одном из фокусов которых находится Солнце. Поэтому для астрономических нужд эллипсы, параболы и гиперболы удобно задавать в так называемых *полярных координатах*. Опишем прежде всего эти координаты.

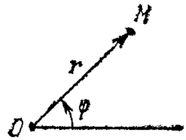
Полярные координаты задаются

а) некоторой ориентацией плоскости (обычно против часовой стрелки);

б) некоторой точкой O, называемой *полюсом*;

в) некоторой ориентированной прямой, проходящей через точку O и называемой *полярной осью* (обычно полярная ось выбирается горизонтальной с ориентацией слева направо).

Ориентация плоскости и ориентация полярной оси позволяют однозначно сопоставить каждому вектору $\boldsymbol{r} \neq 0$ так называемый *ориентированный угол* φ от оси до вектора, принимающий значения от $-\pi$ (исключительно) до π (включительно). Если $\boldsymbol{r}$ направлен по оси, то $\varphi = 0$; если $\boldsymbol{r}$ имеет противоположное направление, то $\varphi = \pi$; если $\boldsymbol{r}$ направлен в положительную сторону полярной оси («вверх»), то $0 < \varphi < \pi$, а в противном случае $-\pi < \varphi < 0$.



Вместе с длиной r вектора $\boldsymbol{r}$ этот угол φ однозначно определяет вектор $\boldsymbol{r}$. Числа r и φ для вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ и называются *полярными координатами* точки M (число r — *полярным радиусом*, а угол φ — *полярным углом*). При $M = O$ угол φ считается имеющим какое угодно значение (а $r=0$).

Если x и y — прямоугольные координаты, *согласованные* с полярными координатами r, φ, т. е.

а) задающие данную ориентацию плоскости;

б) имеющие точку O началом координат;

в) имеющие осью абсцисс полярную ось,

то

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(ясно, что последние два уравнения однозначно определяют угол φ).

Пусть теперь

$$y^2 = 2px \tag{7}$$

— произвольная парабола. Согласно директориальному свойству параболы расстояние r произвольной ее точки до фокуса равно $x + \frac{p}{2}$. Но это расстояние является полярным радиусом полярной системы координат, согласованной с прямоугольными координатами $x - \frac{p}{2}$, y, получающимися из канонических координат переносом начала координат в фокус. Поэтому

$$x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi,$$

что вместе с равенством $r = x + \frac{p}{2}$ дает соотношение

$$r - p = r\cos\varphi,$$

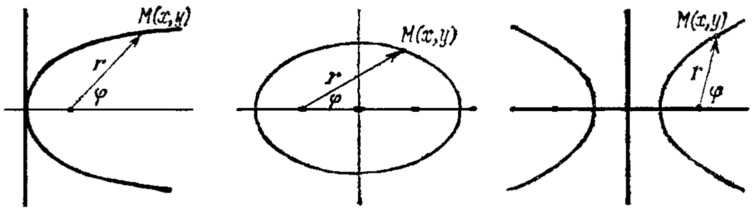
т. е. соотношение

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \tag{8}$$

Обратно, если выполнено (8) и $x - \frac{p}{2} = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$x + \frac{p}{2} = r\cos\varphi + p = r,$$

и, значит (по директориальному свойству), точка $M(x, y)$ принадлежит параболе (7). Таким образом, (8) является уравнением параболы (7) в полярных координатах r, φ.



Для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0, \tag{9}$$

мы поместим полюс полярных координат в левый фокус, а полярную ось по-прежнему направим по оси абсцисс. Тогда согласованными с r и φ прямоугольными координатами будут координаты $x + c$ и y, так что, в частности, будет иметь место равенство $x + c = r\cos\varphi$. С другой стороны, полярным радиусом будет левый фокальный радиус $r_1 = a + ex$. Поэтому

$$r = a + e(-c + r\cos\varphi) = p + er\cos\varphi$$

(ибо $a - ec = p$), т. е.

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{10}$$

Обратно, если выполнено (10) и $x + c = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$x + \frac{a}{e} = -c + r\cos\varphi + \frac{a}{e} = \frac{p + er\cos\varphi}{e} = \frac{r}{e},$$

и потому (по директориальному свойству эллипса) точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу (9). Таким образом, (10) является уравнением эллипса (9) в полярных координатах r, φ.

Наконец, для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{11}$$

мы поместим полюс в правый фокус $(c, 0)$ и ограничимся лишь правой ветвью $(x > 0)$. Тогда будут иметь место равенства

$$r = ex - a,$$

$$x - c = r \cos \varphi,$$

из которых следует, что

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{12}$$

По директориальному свойству гиперболы из (12) обратно следует (11) (для $x = c + r\cos\varphi > 0$ и $y = r\sin\varphi$). Таким образом, (12) является уравнением правой ветви гиперболы (11) в полярных координатах r, φ.

Мы видим, что *эллипс*, *парабола* и *гипербола* (точнее, одна ее ветвь) *могут быть заданы в полярных координатах одним и тем же уравнением*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{13}$$

что снова подчеркивает единство всех этих линий.

При этом полюс координат r, φ находится для параболы в ее единственном фокусе, для ветви гиперболы — в фокусе, одноименном с этой ветвью, а для эллипса — в любом из фокусов. Полярной осью во всех трех случаях является фокальная ось рассматриваемой линии, а ее ориентацией — для параболы каноническая ориентация, а для ветви гиперболы и для эллипса — та, в которой данный фокус следует за одноименной вершиной. Ориентацией же плоскости значения не имеет. Таким образом, для параболы и гиперболы есть две системы полярных координат (отличающиеся ориентацией плоскости, т. е. знаком угла φ), в которых имеет место уравнение (13), а для эллипса — так все четыре (отличающиеся, кроме того, выбором фокуса в качестве полюса). Причиной этому служит наличие у эллипса двух осей симметрии, а у параболы и ветви гиперболы — одной.

Перейдем теперь от евклидовой плоскости к аффинной, т. е. снова вернемся к аффинной геометрии.

Напомним, что любая евклидова плоскость является аффинной и что любую аффинную плоскость можно многими различными способами превратить в евклидову плоскость, т. е., как говорят, ввести в нее евклидову структуру. В частности, это можно сделать так, чтобы любая наперед заданная аффинная координатная система превратилась в евклидову систему прямоугольных координат.

Определение 1. Линия на аффинной плоскости называется *аффинным эллипсом*, если в плоскость можно ввести евклидову структуру, относительно которой данная линия будет эллипсом в смысле определения 2 лекции 17. Аналогично определяются *аффинная парабола* и *аффинная гипербола*.

Таким образом, линия на аффинной плоскости является эллипсом, если существуют такие координаты x, y, что уравнение этой линии имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Но тогда в координатах

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}$$

уравнение этой линии приобретает вид (мы убираем штрихи)

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{14}$$

Этим доказано, что *для любого аффинного эллипса существует система аффинных координат x, y, в которой его уравнение имеет вид* (14). Мы будем называть это уравнение и соответствующие координаты *аффинно каноническими*.

Введя в аффинную плоскость евклидову структуру, в которой аффинно канонические координаты прямоугольны, мы получим окружность радиуса 1 («единичную окружность»). Таким образом, линия на аффинной плоскости тогда и только тогда является эллипсом, когда в плоскость можно ввести евклидову структуру, относительно которой эта линия будет единичной окружностью.

Аналогично, для любой гиперболы существуют аффинные координаты, в которых она является «единичной гиперболой», т. е. имеет уравнение

$$x^2 - y^2 = 1,$$

и для любой параболы — аффинные координаты, в которых она является «единичной параболой»

$$y^2 = 2x.$$

Эти уравнения и соответствующие координаты называются *аффинно каноническими*.

Напомним, что *многочленом* $F(x, y)$ от двух переменных x и y называется сумма *одночленов* вида ax^py^q, где a — некоторое число. Если $a \neq 0$, то говорят, что одночлен ax^py^q *входит* в данный многочлен. *Степенью* одночлена ax^py^q называется число $p + q$, а *степенью многочлена* $F(x, y)$ — наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Ясно, что при любой обратимой линейной замене переменных, т. е. при замене вида

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13},$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23},$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

многочлен от x, y перейдет в многочлен от x', y' *той же степени* (возрасти степень не может, а в силу обратимости не может и уменьшиться).

Определение 2. *Алгебраической линией n-го порядка* на аффинной (или евклидовой) плоскости называется множество точек, координаты (x, y) которых в некоторой (а потому и в любой) аффинной координатной системе удовлетворяют соотношению вида

$$F(x, y) = 0, \tag{15}$$

где $F(x, y)$ — многочлен степени n. Это соотношение называется *уравнением* алгебраической линии.

Некоторая неуклюжесть этого определения объясняется тем, что по причинам, указанным в начале лекции

17, мы избегали в нем употребления терминов «линия» и «уравнение линии».

Следует подчеркнуть, что в связи с определением 2 возникают существенные трудности. Например, вполне возможно, что одна и та же линия в одной и той же координатной системе будет иметь два непропорциональных уравнения, быть может, даже различных степеней. Поэтому о порядке алгебраической линии можно говорить лишь тогда, когда выбрано ее уравнение (15).

Линии первого порядка задаются уравнениями вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A или B отличен от нуля. Как мы знаем (см. лекцию 6), это в точности все прямые и только они.

Линии второго порядка должны иметь уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{16}$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Примеры линий второго порядка.

[1] Линия с уравнением

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Это известный нам *эллипс*.

[2] Линия с уравнением

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Эта линия называется *мнимым эллипсом*.

[3] Линия с уравнением

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Это *пара мнимых пересекающихся прямых*.

[4] Линия с уравнением

$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Это *гипербола*.

[5] Линия с уравнением

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Это *пара пересекающихся прямых*.

[6] Линия с уравнением

$$y^2 - 2x = 0.$$

Это *парабола*.

[7] Линия с уравнением

$$y^2 - 1 = 0.$$

Это *пара различных параллельных прямых.*

[8] Линия с уравнением

$$y^2 + 1 = 0.$$

Это *пара мнимых параллельных прямых.*

[9] Линия с уравнением

$$y^2 = 0.$$

Это *пара совпадающих прямых.*

Определение 3. Перечисленные девять уравнений называются *аффинно каноническими уравнениями* линий второго порядка.

Для уравнений [1], [4], [5], [6], [7] названия соответствующих линий вполне понятны (хотя можно сомневаться, соответствует ли, например, пара пересекающихся прямых интуитивному представлению о линии). Название же линии [9] вполне условно и служит лишь для того, чтобы напомнить о том, что ее уравнение имеет степень 2; на самом же деле (как множество точек) эта линия является прямой. Столь же условны названия остальных «линий», которые служат лишь для того, чтобы указать на сходство их уравнений с уравнениями соответствующих «действительных» линий. Линия [2] является пустым множеством, линия [3] состоит из одной точки, а линия [8] снова является пустым множеством.

Мы видим, таким образом, что для линий второго порядка алгебраическое рассмотрение не адекватно геометрическому; при переходе от уравнений к линиям теряются алгебраические аналогии и смазывается общая картина (что проявляется, скажем, в том, что разные уравнения дают — в качестве соответствующей линии — одно и то же пустое множество).

Хотелось бы поэтому усовершенствовать «геометрию» с тем, чтобы она точно отражала «алгебру».

Для этого, конечно, нужно ввести «мнимые» точки с комплексными (вообще говоря, невещественными) координатами. На первый взгляд кажется, что для этого мы располагаем всеми необходимыми понятиями. Действительно, мы уже неоднократно отмечали, что понятие линейного пространства имеет смысл над любым полем

$\mathbb{K}$ и, в частности, над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В аксиомах 10°, 11° аффинного пространства основное поле фигурирует только косвенно, и, чтобы получить понятие *аффинного пространства над полем* $\mathbb{K}$ (и, в частности, понятие *комплексного аффинного пространства*), надо только в этих аксиомах предполагать ассоциированный линеал $\mathscr{V}$ линеалом над полем $\mathbb{K}$ (соответственно над полем $\mathbb{C}$). Вся аффинная теория (за исключением вопросов, связанных с ориентацией) полностью остается в силе и для случая любого поля $\mathbb{K}$. Евклидова же геометрия на этот случай не переносится (по крайней мере непосредственно), потому что аксиома 15° положительности имеет смысл только над полем $\mathbb{R}$.

Однако переход в теории линий второго порядка к комплексной аффинной геометрии имеет свои недостатки. Рассмотрим, например, линии [1] и [4]. И геометрически, и алгебраически они различны. Тем не менее комплексная замена координат $x' = x$, $y' = iy$ переводит одну из них в другую.

Дело здесь в том, что в рамках комплексной геометрии нет места понятию «вещественной» точки: все точки в ней совершенно равноправны. Для того же, чтобы сохранить контакт с геометрией, нужно уметь отличать обычные («вещественные») точки от новых («мнимых»), которые мы добавляем только в силу суровой алгебраической необходимости. Поэтому, хотя координаты и могут теперь принимать любые комплексные значения, но формулы перехода от одной системы координат к другой должны иметь вещественные коэффициенты (иначе точка с вещественными координатами может стать «мнимой», и наоборот).

Соответствующим аксиоматическим построением мы займемся в следующей лекции.

Лекция 19

Вещественно-комплексные линейные пространства. — Их размерность. — Изоморфизм вещественно-комплексных линейных пространств. — Комплексификация. — Вещественно-комплексные аффинные пространства. — Комплексификация аффинных пространств. — Вещественно-комплексные евклидовы пространства. — Вещественные, мнимые и действительные линии второго порядка.

Определение 1. *Вещественно-комплексным* линейным пространством называется комплексное (т. е. над полем $\mathbb{C}$) линейное пространство $\mathscr{V}$, в котором задано подмножество $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, элементы которого называются *вещественными векторами*, и которое обладает следующими свойствами (мы продолжаем нашу общую нумерацию аксиом):

16°. Если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.

17°. Если $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, то $k\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ для любого вещественного числа k.

18°. Для любого вектора $\boldsymbol{c} \in \mathscr{V}$ существуют такие векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, что

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

19°. Если $\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b} = 0$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, то $\boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{b} = 0$.

Из аксиомы 19° следует, что предусмотренное аксиомой 18° разложение (1) единственно. Участвующий в нем вектор $\boldsymbol{a}$ называется *вещественной частью* вектора $\boldsymbol{c}$ и обозначается символом $\operatorname{Re} \boldsymbol{c}$. Аналогично, вектор $\boldsymbol{b}$ называется *мнимой частью* вектора $\boldsymbol{c}$ и обозначается символом $\operatorname{Im} \boldsymbol{c}$. Условно аксиому 18° можно записать мнемонической формулой $\mathscr{V} = \mathscr{V}^{\mathbb{R}} + i\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.

Аксиомы 16° и 17° означают, что подмножество $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. На этом основании $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ называется *вещественным подпространством* пространства $\mathscr{V}$.

Пусть n — размерность линейного пространства $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о размерности линеала над $\mathbb{R}$, мы будем обозначать ее символом $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.

Аналогично, размерность линеала $\mathscr{V}$ как линеала над $\mathbb{C}$ мы обозначим через $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{V}$.

Предложение 1. *Имеет место равенство*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathscr{V}^{\mathbb{R}}.$$

Любой базис линеала $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ *является базисом линеала* $\mathscr{V}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис линеала $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ и пусть $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b} \in \mathscr{V}$. Тогда, если $\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a^n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + b^n\boldsymbol{e}_n$, то $\boldsymbol{c} = (a^1 + ib^1)\,\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (a^n + ib^n)\,\boldsymbol{e}_n$. Следовательно, семейство векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ полно в $\mathscr{V}$.

С другой стороны, если $c^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + c^n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$, где $c^1 = a^1 + ib^1, \ldots, c^n = a^n + ib^n$, то $(a^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a^n\boldsymbol{e}_n) + i\,(b^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + b^n\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0}$ и по аксиоме 19° $a^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a^n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$ и $b^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + b^n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$. Поэтому $a^1 = 0, \ldots, a^n = 0$, $b^1 = 0, \ldots, b^n = 0$ и, значит, $c^1 = 0, \ldots, c^n = 0$. Следовательно, семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимо в $\mathscr{V}$. $\square$

Базисы в $\mathscr{V}$, являющиеся базисами в $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$, мы будем называть *вещественными* базисами. Они обладают тем свойством, что в них координаты вектора $\boldsymbol{c} \in \mathscr{V}$ тогда и только тогда вещественны, когда вектор $\boldsymbol{c}$ веществен.

Примером вещественно-комплексного линеала может служить линеал $\mathbb{C}^n$, в котором вещественными векторами считаются строки, состоящие из вещественных чисел. Для этого линеала $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$.

Определение 2. Два вещественно-комплексных линеала $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}_1$ называются *изоморфными*, если существует их изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$ как линеалов над $\mathbb{C}$, отображающий вещественное подпространство $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ на вещественное подпространство $\mathscr{V}_1^{\mathbb{R}}$ (и потому индуцирующий изоморфизм $\mathscr{V}^{\mathbb{R}} \to \mathscr{V}_1^{\mathbb{R}}$).

Согласно сказанному выше каждый вещественный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ определяет изоморфизм вещественно-комплексного линеала $\mathscr{V}$ на вещественно-комплексный линеал $\mathbb{C}^n$. Таким образом, как и следовало ожидать, *все вещественно-комплексные линеалы одной и той же размерности изоморфны.* $\square$

Любой вещественно-комплексный линеал $\mathscr{V}$ мы можем рассматривать просто как линеал над $\mathbb{C}$, не обращая внимания на то, вещественны или нет его векторы. Эту операцию перехода от вещественно-комплексного линеала к комплексному мы будем называть *игнорированием вещественности.*

Обратно, в каждый комплексный линеал мы можем «ввести вещественность», выбрав произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ и объявив вещественными векторы, имеющие в этом базисе вещественные координаты. Ясно, что аксиомы 16°—19° окажутся при этом выполненными.

Очевидно, что это построение, примененное к двум разным базисам, тогда и только тогда дает одно и то же вещественно-комплексное пространство, когда матрица перехода от одного базиса к другому вещественна (состоит из вещественных чисел).

Более интересно, что *для любого вещественного линейного пространства $\mathscr{W}$ существует вещественно-комплексное пространство $\mathscr{V}$, вещественное подпространство $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ которого совпадает с пространством $\mathscr{W}$* (или, точнее, естественно ему изоморфно). Конструкция этого пространства $\mathscr{V}$ полностью повторяет известную конструкцию поля комплексных чисел (и переходит в нее при $\mathscr{W} = \mathbb{R}$).

За векторы пространства $\mathscr{V}$ мы примем пары вида $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathscr{W}$. Сложение таких пар мы определим формулой

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}_1),$$

а умножение их на комплексные числа — формулой

$$(k + il)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a} - l\boldsymbol{b}, k\boldsymbol{b} + l\boldsymbol{a}).$$

Автоматическая проверка показывает, что в результате мы получаем линеал $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{C}$.

Чтобы превратить его в вещественно-комплексный линеал, достаточно объявить вещественными векторами пары вида $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$. [Аксиомы 16°—19° проверяются автоматически; например, аксиома 17° следует из того, что $k\boldsymbol{b} + l\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ при $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ и $l = 0$, а аксиома 18° — из того, что $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}) = i(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$.] Отождествив каждую пару $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$ с соответствующим вектором $\boldsymbol{a} \in \mathscr{W}$, мы и получим, что $\mathscr{W} = \mathscr{V}^{\mathbb{R}}$. $\square$

Построенное пространство $\mathscr{V}$ называется *комплексификацией* пространства $\mathscr{W}$. Оно обозначается символом $\mathscr{W}^{\mathbb{C}}$.

Перейдем теперь к пространствам точек.

Определение 3. *Вещественно-комплексным аффинным пространством* называется комплексное аффинное пространство $\mathscr{A}$, в котором

а) зафиксировано некоторое подмножество $\mathscr{A}^{\mathbb{R}}$, элементы которого называются *вещественными точками*;

б) ассоциированное линейное пространство $\mathscr{V}$ является вещественно-комплексным пространством,

причем выполнены следующие аксиомы:

20°. Для любых двух вещественных точек A, $B \in \mathscr{A}^{\mathrm{R}}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ вещественен:

$$A, B \in \mathscr{A}^{\mathrm{R}} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \mathscr{V}^{\mathrm{R}}.$$

21°. Если точка A и вектор $\overrightarrow{AB}$ вещественны, то точка B также вещественна:

$$A \in \mathscr{A}^{\mathrm{R}}, \quad \overrightarrow{AB} \in \mathscr{V}^{\mathrm{R}} \Rightarrow B \in \mathscr{A}^{\mathrm{R}}.$$

Из аксиомы 21° (и аксиомы 17°) следует, что если точка B и вектор $\overrightarrow{AB}$ вещественны, то точка A также вещественна (достаточно перейти к вектору $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$).

Аксиомы 20° и 21° означают, что подмножество $\mathscr{A}^{\mathrm{R}}$ является вещественным аффинным пространством с ассоциированным линеалом $\mathscr{V}^{\mathrm{R}}$. Оно называется *вещественным подпространством* вещественно-комплексного пространства $\mathscr{A}$. Его размерность («вещественная») равна размерности («комплексной») пространства $\mathscr{A}$.

Аффинная координатная система $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{A}$ называется *вещественной*, если точка O и базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ вещественны. Такие координатные системы характеризуются тем, что в них координаты точки из $\mathscr{A}$ тогда и только тогда вещественны, когда эта точка вещественна.

Две точки вещественно-комплексного пространства $\mathscr{A}$ называются *комплексно-сопряженными*, если в некоторой (а потому и в любой) вещественной координатной системе они имеют комплексно-сопряженные координаты.

Изоморфизм вещественно-комплексных аффинных пространств определяется очевидным образом. При этом, как и следовало ожидать, *все вещественно-комплексные аффинные пространства одной и той же размерности изоморфны*.

Любое вещественно-комплексное аффинное пространство мы можем, «игнорируя вещественность», считать просто комплексным аффинным пространством. Обратно, любое комплексное аффинное пространство мы можем обратить в вещественно-комплексное пространство, выбрав произвольную аффинную координатную систему $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ и объявив точки и векторы вещественными, если они в этой системе имеют вещественные координаты. При этом две координатные системы тогда и только тогда приводят к одному и тому же вещественно-комплексному пространству, когда формулы перехода от одних координат к другим имеют вещественные коэффициенты.

Кроме того, *для любого вещественного аффинного пространства* $\mathscr{B}$ *существует такое вещественно-комплексное аффинное пространство* $\mathscr{A} = \mathscr{B}^{\mathbb{C}}$ (называемое *комплексификацией* пространства $\mathscr{B}$), *что* $\mathscr{A}^{\mathbb{R}} = \mathscr{B}$.

Действительно, пусть $\mathscr{A}$ — множество всех пар вида (A, B), где A, B — произвольные точки аффинного пространства $\mathscr{B}$, и пусть $\mathscr{V} = \mathscr{W}^{\mathbb{C}}$ — комплексификация линеала $\mathscr{W}$, ассоциированного с пространством $\mathscr{B}$. Для любых двух точек $C = (A, B)$ и $C_1 = (A_1, B_1)$ из $\mathscr{A}$ мы определим вектор $\overrightarrow{CC}$ из $\mathscr{V}$ формулой

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} + i\overrightarrow{BB_1}. \tag{2}$$

Тривиальная проверка показывает, что соответствие $C, C_1 \mapsto \overrightarrow{CC_1}$ удовлетворяет аксиомам 10° и 11°, т. е. формула (2) задает на $\mathscr{A}$ структуру комплексного аффинного пространства с ассоциированным линеалом $\mathscr{V}$. Чтобы задать на $\mathscr{A}$ структуру вещественно-комплексного пространства, мы, выбрав в $\mathscr{B}$ произвольную точку O, объявим вещественными точками в $\mathscr{A}$ все точки вида (A, O). Ясно, что аксиомы 20° и 21° будут тогда выполненными (и пространство $\mathscr{A}^{\mathbb{R}}$ будет естественно изоморфно данному пространству $\mathscr{B}$). □

Для полноты введем еще вещественно-комплексные пространства с евклидовой структурой.

Определение 4. Вещественно-комплексное линейное или аффинное пространство называется *евклидовым*, если в его вещественное подпространство введена евклидова структура.

В таком пространстве формулы, определяющие длины (расстояния) и углы, можно применять и для невещественных объектов. Однако вне вещественной области никакой хорошей (с привычными свойствами) теории не получается (например, длина отличного от нуля вектора может быть равна нулю). Тем не менее выход за эту область иногда бывает полезен.

Вернемся теперь к случаю $n = 2$, т. е. рассмотрим вещественно-комплексную аффинную (или евклидову) плоскость.

***Определение* 5.** Алгебраическая линия на вещественно-комплексной плоскости называется *вещественной*, если в некоторой (а потому и в любой) вещественной координатной системе она может быть задана уравнением, левая часть которого является многочленом с вещественными коэффициентами.

Например, *вещественная линия второго порядка* должна иметь уравнение вида (16) из предыдущей лекции, в котором все коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} вещественны. Перечисленные там же девять аффинно канонических уравнений [1] — [9] все вещественны.

Названия соответствующих линий (кроме, конечно, линии [9]) приобретают теперь полный смысл. Эпитет «мнимый» попросту означает, что рассматриваемая линия не пересекает вещественного подпространства (или, как линия [3], имеет с ним только одну общую точку). «Не мнимые» линии мы будем называть *действительными*. Таким образом, здесь этот термин уже не будет синонимичен термину «вещественные»; все линии [1] — [9] вещественны, но только некоторые из них действительны. Вещественные линии называются также линиями, *определенными над* $\mathbb{R}$.

Следует подчеркнуть, что, например, действительные эллипсы [1] и аффинные эллипсы в смысле определения 1 лекции 18 представляют собой, строго говоря, различные объекты, поскольку первые имеют невещественные точки, а вторые (будучи, по определению, линиями на вещественной плоскости) таких точек иметь не могут. Связь между ними состоит в том, что аффинные эллипсы являются пересечениями действительных эллипсов с вещественной плоскостью. Поэтому, например, хотя аффинные эллипсы асимптот, очевидно, не имеют, действительные эллипсы, как мы в свое время увидим, асимптотами обладают (для эллипса $x^2 + y^2 = 1$ ими будут мнимые прямые $y = \pm ix$).

Аналогично дело обстоит, конечно, и для других действительных линий из списка [1] — [9] (парабол, гипербол и пар вещественных прямых).

Наша ближайшая цель будет состоять в доказательстве того, что любая вещественная линия второго порядка на вещественно-комплексной плоскости является одной (и только одной) линией из списка [1] — [9]. Для этого нам придется в следующих лекциях достаточно далеко развить общую теорию этих линий.

Лекция 20

Вводные замечания. — Преобразование уравнения линии второго порядка. — Центры линии второго порядка. — Центры симметрии. — Корректность определения центров. — Центральные и нецентральные линии второго порядка. — Прямые неасимптотического направления. — Касательные. — Прямые асимптотического направления.

Начальные этапы теории линий второго порядка одни и те же для любого основного поля $\mathbb{K}$ (требуется лишь, чтобы характеристика этого поля была отлична от двух). В более тонких вопросах необходимо считать это поле полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, т. е. работать в комплексной аффинной плоскости. При этом, чтобы не потерять полностью контакта с наглядными представлениями, эту плоскость следует считать вещественно-комплексной. Чтобы различить последние два случая, мы будем называть первый с и т у а ц и е й $\mathbb{C}$, а второй — с и т у а ц и е й $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. В ситуации $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ мы иногда будем ограничиваться лишь вещественной плоскостью (с и т у а ц и я $\mathbb{R}$).

Пусть x, y — аффинные координаты на плоскости (по отношению к некоторой фиксированной координатной системе Oe_1e_2). В ситуации $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, естественно, предполагается, что эти координаты вещественны, т. е. для вещественных точек являются вещественными числами.

Все наши утверждения будут относиться (если только явно не оговорено противное) к некоторой фиксированной линии второго порядка

$$(1)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

В общей теории (над произвольным полем $\mathbb{K}$ характеристики, отличной от двух) коэффициенты этого уравнения могут быть произвольными элементами поля $\mathbb{K}$ (но, конечно, хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} должен быть отличен от нуля). В частности, в ситуации $\mathbb{C}$ они могут быть любыми комплексными числами. В ситуации же $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ мы будем предполагать их вещественными.

Для симметрии формул мы введем также коэффициенты a_{21}, a_{31} и a_{32}, считая, по определению, что

$$a_{21} = a_{12},\quad a_{31} = a_{13},\quad a_{32} = a_{23}.$$

Тем самым коэффициенты a_{ij} будут определены для любых $i, j = 1, 2, 3$.

Мы будем упрощать уравнение (1), выбирая соответствующим образом систему координат. Для этого нам нужно предварительно исследовать в общем виде вопрос об изменении этого уравнения при переходе от данных координат x, y к другим аффинным координатам x', y'.

Основное поле $\mathbb{K}$ мы пока считаем произвольным полем (характеристики, отличной от двух).

Пусть

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

— левая часть уравнения (1) и пусть

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned}$$

— выражения координат x, y через координаты x', y'. Чтобы найти уравнение линии (1) в координатах x', y', нужно выражения (2) подставить в многочлен $F(x, y)$. Получится многочлен $F'(x', y')$ от x', y' второй степени:

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33},$$

и равенство $F'(x', y') = 0$ будет уравнением линии (1) в координатах x', y'. (Об этом уравнении мы будем говорить, что *оно получено из уравнения* (1) *преобразованием* (2).)

Нам надо найти формулы, выражающие коэффициенты a'_{ij} многочлена F' через коэффициенты a_{ij} многочлена F и коэффициенты преобразования (2). Соответствующие выкладки, не представляющие никаких принципиальных трудностей, довольно громоздки. Чтобы облегчить их, мы воспользуемся символикой матричного исчисления.

Пусть

$$(3) \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}$$

и

$$(4) \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Тогда формулы (2) могут быть представлены в виде одного матричного равенства

$$(5) \qquad \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix},$$

а многочлен $F(x, y)$ записан в виде

$$F(x, y) = (x, y)\, A \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + a_{33}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F'(x', y') &= \left[C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}\right]^{\mathsf{T}} A \left[C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}\right] + \\ &\quad + 2\,(a_{13}, a_{23}) \left[C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}\right] + a_{33} = \\ &= (x', y')\, C^{\mathsf{T}} A C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + (x', y')\, C^{\mathsf{T}} A \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \\ &\quad + (x_0, y_0)\, A C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + (x_0, y_0)\, A \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \\ &\quad + 2\,(a_{13}, a_{23})\, C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + a_{33} = \\ &= (x', y')\, C^{\mathsf{T}} A C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + 2\,[(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)\, A]\, C \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} + \\ &\quad + (x_0, y_0)\, A \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + a_{33} \end{aligned}$$

$\Bigl($в преобразованиях мы воспользовались симметричностью, $A^{\mathsf{T}} = A$, матрицы A и тождеством $(a, b) \begin{Vmatrix} c \\ d \end{Vmatrix} = (c, d) \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix}\Bigr)$.

Этим доказано, что матрица

$$A' = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{Vmatrix} \tag{6}$$

выражается формулой

$$A' = C^{\mathsf{T}} A C, \tag{7}$$

а числа a'_{13}, a'_{23} и a'_{33} — формулами

$$\begin{aligned} (a'_{13}, a'_{23}) &= [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)\, A]\, C, \\ a'_{33} &= (x_0, y_0)\, A \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + 2\,(a_{13}, a_{23}) \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + a_{33}. \end{aligned} \tag{8}$$

(Заметим, что, таким образом, $a'_{33} = F(x_0, y_0)$.)

В частном случае, когда $C = E$, т. е. когда координаты x, y и x', y' отличаются лишь выбором начала координат, мы получим, что $A' = A$, так что *при переносе начала координат коэффициенты при членах второй степени не меняются.*

Кроме того, в этом случае

$$(a'_{13},\ a'_{23}) = (a_{13},\ a_{23}) + (x_0,\ y_0)\,A,$$

т. е.

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13},$$
$$a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}. \tag{9}$$

Заметим, что x_0, y_0 — координаты точки, в которую перенесено начало координат.

Определение 1. Точка $M_0\,(x_0,\ y_0)$ называется *центром* линии (1), если

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \tag{10}$$

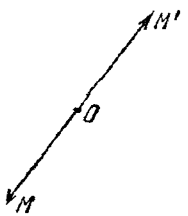
т. е. если при переносе начала координат в эту точку в уравнении (1) пропадают члены первой степени.

В матричной записи уравнения (10) имеют вид

$$(x,\ y)\,A + (a_{13},\ a_{23}) = 0 \tag{11}$$

(мы опускаем у координат индексы), где A — матрица (4).

Определение 1 нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что центры линии (1) не зависят как от выбора ее уравнения (в данной системе координат), так и от выбора системы координат. Лучший способ сделать это состоит в том, чтобы охарактеризовать центры линии второго порядка чисто геометрически без апелляции к ее уравнению. Хотя, к сожалению, эту программу для всех линий выполнить нельзя, но мы все же сделаем сейчас все что можно.



Понятие центральной симметрии (в отличие, например, от понятия осевой симметрии) может быть корректно определено в любом аффинном пространстве (над произвольным полем). Именно, мы скажем, что точка M' получается из точки M *симметрией в центре* O (или *относительно* O), если $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Если O — начало координат $(0,\ 0)$ и x, y — координаты точки M, то $-x$, $-y$ — координаты точки M'.

Точка O называется *центром симметрии* некоторого множества (линии), если вместе с каждой точкой M этому множеству принадлежит симметричная точка M'. Начало координат O тогда и только тогда является центром симметрии линии $F(x, y) = 0$, когда из равенства $F(x, y) = 0$ следует равенство $F(-x, -y) = 0$.

Отсюда непосредственно вытекает, что *любой центр линии* (1) *является ее центром симметрии* (это, в частности, и объясняет происхождение термина «центр»). Действительно, если центр линии (1) находится в начале координат, т. е. если в уравнении (1) отсутствуют линейные члены, то имеет место тождественное равенство $F(-x, -y) = F(x, y)$, и потому из $F(x, y) = 0$ следует, что $F(-x, -y) = 0$. □

И обратно, оказывается, что *в ситуациях* ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) *и* $\mathbb{C}$ *любой центр симметрии линии* (1) *является ее центром*, так что центры линии (1) — это в точности ее центры симметрии, и, значит, определены корректно. Однако, к сожалению, доказать этот факт мы пока не можем.

На примерах мы уже видели, что в ситуации $\mathbb{R}$ линия второго порядка может быть пустым множеством. Для такой линии центром симметрии является каждая точка плоскости. С другой стороны, скажем, линия $x^2 + y^2 = -1$ обладает единственным центром (0, 0). Таким образом, для линий в ситуации $\mathbb{R}$ могут существовать центры симметрии, не являющиеся центрами.

В соответствии с этим, в ситуации $\mathbb{R}$ определение 1, вообще говоря, некорректно! Например, над полем $\mathbb{R}$ уравнения $x^2 + y^2 = -1$ и $x^2 + 1 = 0$ определяют одну и ту же линию — пустое множество, но уравнения (10) для них различны. (Причина здесь, конечно, в существовании у линии двух принципиально разных уравнений. Ниже мы увидим, что над полем $\mathbb{C}$ (в ситуациях ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) и $\mathbb{C}$) подобный пример невозможен.) Это заставляет нас поставить задачу о корректности определения 1 более узко.

Рассмотрим наряду с координатами x, y произвольные другие (но также аффинные) координаты x', y'. Эти координаты связаны с координатами x, y формулами (2), т. е. — в матричной записи — формулой (5). Пусть

$$(12)\quad a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

— уравнение рассматриваемой линии второго порядка в координатах x', y', полученное из уравнения (1) преобразованием (2). Тогда в координатах x', y' для центров будет иметь место матричное уравнение

$$(13) \qquad (x', y')A' + (a'_{13}, a'_{23}) = 0,$$

где A' — матрица (6).

Предложение 1. *Уравнения* (11) *и* (13) *определяют одни и те же точки, т. е. числа x, y тогда и только тогда составляют решение уравнений* (11), *когда связанные с ними соотношениями* (2) *числа x', y' составляют решение уравнений* (13).

Доказательство. В матричной записи соотношения (2) имеют после транспонирования вид

$$(x, y) = (x', y')\ C^{\top} + (x_0, y_0)$$

(см. формулу (5)). Поэтому числа x, y тогда и только тогда удовлетворяют уравнениям (11), когда для чисел x', y' имеет место равенство

$$(x', y')C^{\top}A + (x_0, y_0)A + (a_{13}, a_{23}) = 0.$$

Поскольку при умножении матричного уравнения на невырожденную матрицу получается, очевидно, равносильное уравнение, этим доказано, что числа x, y тогда и только тогда удовлетворяют уравнениям (11), когда числа x', y' удовлетворяют уравнению

$$(x', y')C^{\top}AC + [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C = 0,$$

т. е., ввиду формул (6) и (7), уравнению (13). □

Таким образом, если в новой системе координат мы задаем линию уравнением, полученным из уравнения (1) преобразованием координат, то центры получаются те же самые! В этом смысле определение 1 корректно для любых линий второго порядка и любого основного поля $\mathbb{K}$.

Вообще говоря, соотношения (9) означают, что центры линии (1) являются общими точками двух прямых:

$$(14) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \quad \text{и} \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

и потому либо отсутствуют (прямые (14) параллельны), либо имеется только один центр (прямые (14) пересекаются), либо центры заполняют целую прямую (прямые (14) совпадают). Может, конечно, случиться, что одно из уравнений (14) удовлетворяется тождественно или, наоборот, уравнение несовместно, т. е. не существует ни одной точки плоскости, ему удовлетворяющей (с первым уравнением так будет при $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} \neq 0$). Однако ничего нового при этом не получается (если одно из уравнений (14) удовлетворяется тождественно, то имеется прямая центров, а если оно несовместно, то центров вообще нет). Таким образом, для линии (1) возможны следующие случаи:

I. Существует единственный центр.

II. Не существует ни одного центра.

III. Имеется целая прямая центров.

Определение 2. В случае I линия (1) называется *центральной линией* второго порядка, а в случаях II и III — *нецентральной.*

Согласно доказанной в лекции 6 теореме о взаимном расположении на плоскости двух прямых, случай I имеет место, когда $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$, т. е. когда $a_{11}a_{22} - a_{21}^2 \neq 0$; случай II — когда $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$, а случай III — когда $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$. Удобно эти условия записать в несколько ином виде, введя в рассмотрение определители

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

называемые, соответственно, *малым* и *большим определителями* уравнения (1).

Поскольку $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, мы видим, что $\delta \neq 0$ в случае I и $\delta = 0$ в случаях II и III. Кроме того, $\Delta = 0$ в случае III (первые две строки этого определителя пропорциональны). Обратно, пусть $\Delta = 0$ и $\delta = 0$. Разложив определитель Δ по элементам последнего столбца, мы получим, что

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Последним определителем является равный нулю определитель δ. Кроме того, из равенства $\delta = 0$ следует, что существует такое число k, что $a_{11} = ka_{21}$, $a_{12} = ka_{22}$, и потому

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Этим доказано, что при $\delta = 0$

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Поэтому, если $\Delta = 0$, то либо $a_{13} = ka_{23}$ (и, значит, первые две строки определителя Δ пропорциональны), либо $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$, и потому существует такое число l, что $a_{31} = la_{12}$, $a_{32} = la_{22}$, и, значит, $a_{31} = la_{12} = lka_{22} = ka_{32} = ka_{23}$, так что и в этом случае первые две строки определителя Δ пропорциональны. Этим доказано, что случай III имеет место тогда и только тогда, когда $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Оставшаяся возможность $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$ характеризует поэтому случай II.

Собирая вместе все доказанное, мы получаем следующую теорему:

Теорема 1 (о центрах). *Линия второго порядка тогда и только тогда является центральной линией, когда $\delta \neq 0$.*

Линия второго порядка тогда и только тогда не имеет ни одного центра, когда $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$.

Линия второго порядка тогда и только тогда обладает прямой центров, когда $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. □

В порядке дополнения к этой теореме интересно выяснить геометрический смысл условия $\Delta = 0$. Поскольку при $\delta = 0$ ответ дается теоремой 1 (равенство $\Delta = 0$ равносильно существованию прямой центров), достаточно ограничиться случаем $\delta \neq 0$.

Предложение 2. *При $\delta \neq 0$ равенство $\Delta = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда центр линии* (1) *ей принадлежит.*

Доказательство. Пусть центр $M_0(x_0, y_0)$ линии (1) ей принадлежит. Тогда для его координат имеют место равенства (10), а также равенство (1), в котором положено $x = x_0$ и $y = y_0$. Умножив первое из равенств (10) на x_0, второе — на y_0 и вычтя их из (1), мы, очевидно, получим соотношение

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0.$$

Вместе с равенствами (10) оно означает, что три числа x_0, y_0, 1 составляют нетривиальное решение системы однородных уравнений

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0.$$

Следовательно, определитель Δ этой системы равен нулю. Заметим, что предположение $\delta \neq 0$ мы в этом рассуждении не использовали.

Обратно, если $\Delta = 0$, то написанная система имеет нетривиальное решение x_0, y_0, z_0. При этом $z_0 \neq 0$, ибо $\delta \neq 0$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 1$. Тогда первые два уравнения покажут, что точка M_0 (x_0, y_0) является центром линии (1). С другой стороны, умножив первое из этих уравнений (в которых положено $x = x_0$, $y = y_0$ и $z = 1$) на x_0, второе — на y_0 и сложив их с третьим, мы, очевидно, получим уравнение (1) (в котором положено $x = x_0$, $y = y_0$). Следовательно, центр M_0 (x_0, y_0) лежит на линии (1). □

Примеры. Найдем центры линий [1]—[9].

[1] Действительный эллипс: $\delta = 1$ и $\Delta = -1$. Имеется один центр (0, 0).

[2] Мнимый эллипс: $\delta = 1$ и $\Delta = 1$. Имеется один центр (0, 0).

[3] Пара мнимых пересекающихся прямых: $\delta = 1$ и $\Delta = 0$. Имеется один центр (0, 0).

[4] Гипербола: $\delta = -1$ и $\Delta = 1$. Имеется один центр (0, 0).

[5] Пара действительных пересекающихся прямых: $\delta = -1$ и $\Delta = 0$. Имеется один центр (0, 0).

[6] Парабола: $\delta = 0$ и $\Delta = -1$. Центров нет.

[7] Пара действительных параллельных прямых: $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Имеется прямая центров $y = 0$.

[8] Пара мнимых параллельных прямых: $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Имеется прямая центров $y = 0$.

[9] Пара совпадающих прямых: $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Имеется прямая центров $y = 0$.

Мы видим, что центральные линии (из списка [1]—[9]) — это оба эллипса, гипербола и пары пересекающихся прямых (действительных или мнимых). Во всех случаях центр является, как и полагается, центром симметрии.

Нецентральной линией без центра является только парабола.

Нецентральными линиями с прямой центров являются пары параллельных прямых (действительных или мнимых, различных или совпадающих).

Заметим, что для всех линий [1]—[9] центры симметрии и центры совпадают (в ситуациях $\mathbb{C}$ и $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$).

Изучим теперь взаимное расположение линии (1) и произвольной прямой

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm. \tag{15}$$

Общие точки линии (1) и прямой (15) определяются из уравнения $F(x_0 + tl,\ y_0 + tm) = 0$, т. е. из уравнения

$$\begin{gathered}(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)\,t^2 + \\ + 2\,(a_{11}lx_0 + a_{12}\,(ly_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m)\,t + \\ + F(x_0,\ y_0) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Определение 3. При $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0$ говорят, что прямая (15) имеет *неасимптотическое направление* (по отношению к линии (1)), а при

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \tag{17}$$

— что эта прямая имеет *асимптотическое направление*.

[Заметим, что направление прямой (15) характеризуется вектором $\boldsymbol{a}(l,\ m)$, рассматриваемым с точностью до коллинеарности, т. е. отношением $l : m$. Для краткости мы будем говорить, что прямая имеет *направление* $l : m$.]

Для прямой неасимптотического направления уравнение (16) является уравнением второй степени. Поэтому оно имеет (в основном поле $\mathbb{K}$) либо два корня, либо один (двойной) корень, либо не имеет ни одного корня. В первом случае прямая (15) пересекает линию (1) в двух различных точках, во втором случае имеет с линией (1) одну общую точку, в третьем — прямая (15) и линия (1) не пересекаются.

В ситуациях $\mathbb{C}$ и $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ третий случай невозможен, причем в ситуации $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ в первом случае общие точки могут быть либо вещественными (и тогда в ситуации $\mathbb{R}$ будет иметь место также первый случай), либо комплексно-сопряженными, невещественными (и тогда в ситуации $\mathbb{R}$ будет иметь место третий случай).

Определение 4. Прямая неасимптотического направления, для которой уравнение (16) имеет один (двойной) корень, называется *касательной* к линии (1), а соответствующая этому корню ее точка (единственная точка, общая с линией (1)) — *точкой касания*.

Если точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит линии (1) (и, значит, $F(x_0, y_0) = 0$), то уравнение (16) будет удовлетворяться при $t = 0$ и этот корень будет двойным тогда и только тогда, когда

(18) $a_{11}lx_0 + a_{12}(ly_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m = 0,$

т. е. когда

(19) $l : m = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) : (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}).$

Таким образом, *прямая* (15) *тогда и только тогда является касательной к линии* (1) *в ее точке* $M_0(x_0, y_0)$, *когда имеет место пропорция* (19) (в предположении, конечно, что эта пропорция имеет смысл и задает неасимптотическое направление).

С другой стороны, из соотношения (18) (и равенства $F(x_0, y_0) = 0$) немедленно вытекает, что

$$a_{11}x_0(x_0 + tl) + \\ + a_{12}[y_0(x_0 + tl) + x_0(y_0 + tm)] + a_{22}y_0(y_0 + tm) + \\ + a_{13}(x_0 + (x_0 + tl)) + a_{23}(y_0 + (y_0 + tm)) + a_{33} = 0$$

тождественно по t. Следовательно, *уравнение*

(20) $$a_{11}x_0x + a_{12}(y_0x + x_0y) + a_{22}y_0y + \\ + a_{13}(x_0 + x) + a_{23}(y_0 + y) + a_{33} = 0$$

является уравнением касательной к линии (1) *в ее точке* $M_0(x_0, y_0)$ (если это уравнение не удовлетворяется тождественно или не дает прямую асимптотического направления).

В частности, для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и параболы

$$y^2 = 2px$$

когда, соответственно,

$$\begin{array}{llllll} a_{11}=\frac{1}{a^2}, & \frac{1}{a^2}, & 0, & a_{13}= & 0, & 0, \ -p, \\ a_{12}= \ 0, & 0, & 0, & a_{23}= & 0, & 0, \quad 0, \\ a_{22}=\frac{1}{b^2}, & -\frac{1}{b^2}, & 1, & a_{33}= & -1, & -1, \quad 0, \end{array}$$

мы получаем уже известные нам уравнения (5), (8) и (2) из лекции 17. Таким образом, *касательные к эллипсу, гиперболе и параболе в смысле определения* 4 *совпадают с касательными в смысле дифференциального исчисления* (предельными положениями секущих).

Для линии

$$x^2 - y^2 = 0, \tag{21}$$

состоящей из двух прямых $y = \pm x$, пересекающихся в точке (0, 0), уравнение (20) при $(x_0, y_0) = (0, 0)$ удовлетворяется тождественно, а при $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ дает одну из прямых $y = \pm x$. Но, так как эти прямые являются, очевидно, прямыми асимптотического направления, то касательными они быть не могут. Следовательно, *линия* (21) *ни в одной точке, отличной от точки* (0, 0), *касательных не имеет.*

Что же касается точки (0, 0), то *любая прямая, проходящая через эту точку, будет касательной к линии* (21) (конечно, если она отлична от прямых $y = \pm x$).

Аналогично, для линии

$$y^2 = 1, \tag{22}$$

состоящей из различных параллельных прямых $y = \pm 1$, уравнение (20) дает одну из этих прямых. Поэтому в *одной точке линии* (22) *касательной не существует.*

Наконец, для линии

$$y^2 = 0, \tag{23}$$

состоящей из двух совпадающих прямых $y = 0$, уравнение (20) удовлетворяется тождественно. Поэтому *любая прямая, проходящая через произвольную точку* M_0 $(x_0, 0)$ *линии* (23) (*и отличная от прямой* $y = 0$), *будет касательной к линии* (23) *в этой точке.*

Таким образом, *для линии второго порядка, распадающейся на пару прямых, касательные существуют только в общих точках этих прямых, и для любой такой точки* *каждая проходящая через нее прямая (отличная от данных прямых) будет касательной.*

Эта формулировка уже не связана с конкретным видом уравнения линии.

Замечание 1. Последний вывод находится в некотором конфликте с наглядным представлением о касательных. Поэтому для линий второго порядка, распадающихся на пару прямых, некоторые авторы предпочитают совсем не пользоваться общим определением 4. Они либо вообще избегают говорить для таких линий о касательных, либо называют касательными прямые, из которых эти линии состоят.

Для прямой асимптотического направления уравнение (16) линейно и потому имеет либо один корень (когда коэффициент при t отличен от нуля), либо не имеет ни одного корня (когда коэффициент при t равен нулю, но свободный член отличен от нуля), либо удовлетворяется тождественно (когда все коэффициенты равны нулю). В первом случае прямая (15) пересекает линию (1) в одной точке (но касательной не является!), во втором случае не имеет с линией (1) ни одной общей точки, в третьем — целиком принадлежит линии (1).

Поскольку произведенное исследование покрывает все случаи, мы, в частности, видим, что *прямая, имеющая с линией* (1) *три общие точки, целиком принадлежит этой линии.*

Определение 5. Прямая асимптотического направления, не имеющая общих точек с линией (1), называется ее *асимптотой.*

Примеры.

Для линий [1], [2] и [3] из списка в лекции 18 уравнение (17), определяющее асимптотические направления, имеет вид $l^2 + m^2 = 0$ и потому вещественных решений, отличных от нулевого $(l, m) = (0, 0)$, нам не нужного, не имеет. Таким образом, в ситуации $\mathbb{R}$ для этих линий прямых асимптотического направления не существует, а в ситуациях $\mathbb{C}$ и $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ имеется два асимптотических направления $1 : i$ и $1 : -i$. Для линий [1] и [2] асимптотами будут прямые $y = ix$ и $y = -ix$. Линия [3] (пара прямых) асимптот не имеет.

Для линий [4] и [5] асимптотические направления определяются из уравнения $l^2 - m^2 = 0$. Поэтому (над любым полем характеристики, отличной от 2) их два

(1 : 1 и $-1 : 1$). Для линии [4] (гиперболы) асимптотами будут, как и полагается, прямые $y = x$ и $y = -x$. Линия [5] (пара прямых) асимптот не имеет.

Для линий [6], [7], [8] уравнение асимптотических направлений имеет вид $m^2 = 0$, так что имеется одно (двойное) асимптотическое направление $1 : 0$. У линии [6] (параболы) асимптот нет, а у линий [7] и [8] (пар параллельных прямых) асимптотой будет любая параллельная им, но отличная от них прямая.

В общем случае линии (1) (и произвольного поля $\mathbb{K}$) уравнение (17) имеет 0, 1 или 2 решения. Случай 0 решений (нет асимптотических направлений) имеет место тогда и только тогда, когда в $\mathbb{K}$ нет элемента $\sqrt{-\delta}$, где, как всегда, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Если же $\sqrt{-\delta} \in \mathbb{K}$, то решения даются любой из двух формул:

$$(24)\qquad \begin{aligned} l : m &= (-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}) : a_{11}, \\ l : m &= a_{22} : (-a_{12} \mp \sqrt{-\delta}). \end{aligned}$$

При $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ обе эти формулы равносильны, а при $a_{11} = 0$ или $a_{22} = 0$ следует пользоваться той из них, которая имеет смысл. Единственное асимптотическое направление имеется тогда и только тогда, когда $\delta = 0$.

Предположим теперь, что мы находимся в ситуации ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) (или $\mathbb{R}$). Тогда все коэффициенты уравнения (1) вещественны и потому число δ вещественно.

Определение 6. Линия (1) называется линией

$$\left.\begin{array}{l} \textit{эллиптического типа}, \\ \textit{гиперболического типа}, \\ \textit{параболического типа} \end{array}\right\}, \quad \text{если} \quad \left\{\begin{array}{l} \delta > 0, \\ \delta < 0, \\ \delta = 0. \end{array}\right.$$

Линия эллиптического типа имеет два мнимых асимптотических направления, линия гиперболического типа — два действительных асимптотических направления, а линия параболического типа — одно действительное асимптотическое направление.

Заметим, что линии параболического типа — это в точности нецентральные линии.

Лекция 21

Особые и неособые направления. — Диаметры. — Диаметры и центры. — Сопряженные направления и сопряженные диаметры. — Упрощение уравнения центральной линии второго порядка. — Упрощение уравнения нецентральной линии второго порядка

Пусть по-прежнему

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

— произвольная линия второго порядка на аффинной плоскости.

Для любого направления $l : m$ координаты x_0, y_0 точек $M_0(x_0, y_0)$, для которых равен нулю коэффициент при t в уравнении (16) предыдущей лекции, удовлетворяют уравнению

$$(a_{11}l + a_{12}m)\,x + (a_{12}l + a_{22}m)\,y + (a_{13}l + a_{23}m) = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Направление $l : m$ называется *особым*, если

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m &= 0, \\ a_{12}l + a_{22}m &= 0; \end{aligned} \tag{3}$$

в противном случае оно называется *неособым*.

Для неособого направления уравнение (2) определяет некоторую прямую. Эта прямая называется *диаметром*, сопряженным с неособым направлением $l : m$.

Поскольку

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = $$
$$= (a_{11}l + a_{12}m)\,l + (a_{12}l + a_{22}m)\,m,$$

каждое *особое направление является асимптотическим.*

Обратное, вообще говоря, неверно. Например, при $\delta \neq 0$ уравнения (3) относительно l и m имеют только тривиальное решение $(l, m) = (0, 0)$ (ибо δ является определителем этой системы однородных уравнений), так что *для каждой центральной линии все направления неособы* (в том числе и оба асимптотических, когда они существуют).

Если же $\delta = 0$, то уравнения (3) имеют единственное (с точностью до пропорциональности) нетривиальное решение $(l, m) \neq (0, 0)$. Для этого решения $l : m = -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$. Таким образом, *для нецентральных линий существует единственное особое направление* $-a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$.

Но из формул (24) лекции 20 следует, что при $\delta = 0$ это есть единственное асимптотическое направление линии. Таким образом, *для нецентральных линий асимптотическое направление особо.*

В случае параболы оно представляет собой, как показывает непосредственное вычисление, направление ее оси, а в случае пары параллельных прямых — направление этих прямых.

Рассмотрим теперь диаметр (2), сопряженный с неособым направлением $l : m$. Ясно, что от этого направления он зависит корректно, т. е., задав то же направление другой (но пропорциональной) парой чисел l и m и построив для этой пары уравнение (2), мы получим ту же прямую (ибо уравнение (2) заменится пропорциональным).

Вопрос же зависимости прямой (2) от выбора уравнения (1) рассматриваемой линии второго порядка — существенно труднее. Поскольку мы пока не знаем, с каким произволом может быть выбрано это уравнение, единственный путь установления корректности определения диаметра (2) состоит, как и для центров, в том, чтобы дать ему прямое геометрическое описание, не апеллирующее к уравнению (1).

Для неособого направления $l : m$ диаметр (2) имеет направление $-(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m)$. Поэтому, если направление $l : m$ является асимптотическим (что возможно, напомним, только при $\delta \neq 0$), и, значит,

$$(a_{11}l + a_{12}m)\, l + (a_{12}l + a_{22}m)\, m = 0,$$

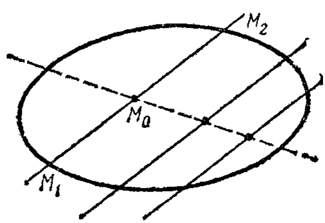
то оно будет совпадать с направлением диаметра (2). Кроме того, по определению, для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ этого диаметра коэффициент при t в уравнении (16) лекции 20 равен нулю. Поэтому диаметр (2) является либо асимптотой направления $l : m$ (что его однозначно характеризует), либо прямой направления $l : m$, целиком принадлежащей линии (1) (что ввиду центральности линии (1) также, как мы увидим ниже, однозначно его характеризует). Таким образом, для асимптотического направления $l:m$ диаметр (2) определен корректно.

Пусть теперь направление $l:m$ не является асимптотическим. Рассмотрим произвольную прямую этого направления (имеющую направляющий вектор $\boldsymbol{a}\,(l, m)$). Предположим, что эта прямая пересекает линию (1) в двух различных точках M_1 и M_2, и примем середину отрезка $\overline{M_1M_2}$ за точку $M_0\,(x_0, y_0)$, задающую вместе с вектором $\boldsymbol{a}\,(l, m)$ эту прямую. Пусть

$$x = x_0 + tl,\qquad y = y_0 + tm \tag{4}$$

— соответствующие параметрические уравнения и пусть t_1 и t_2 — значения параметра t, отвечающие точкам M_1 и M_2. Тогда $\overrightarrow{M_0M_1} = t_1\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = t_2\boldsymbol{a}$. С другой стороны, по условию $\overrightarrow{M_0M_1} = -\overrightarrow{M_0M_2}$. Следовательно, $t_1 + t_2 = 0$.

Поскольку, согласно формулам Виета, сумма $t_1 + t_2$ является взятым с обратным знаком и разделенным на коэффициент при t^2 коэффициентом при t в уравнении (16) лекции 20, этим доказано, что указанный коэффициент равен нулю. Это означает, что координаты (x_0, y_0) середины отрезка, высекаемого линией (1) на каждой прямой направления $l:m$, удовлетворяют уравнению диаметра, сопряженного с направлением $l:m$, т. е. что эта середина принадлежит диаметру (2).



Обратно, пусть $M_0\,(x_0, y_0)$ — произвольная точка диаметра (2). Предположим, что прямая (4) направления $l:m$, проходящая через эту точку, пересекает линию (1) в двух точках M_1 и M_2. Тогда отвечающие этим точкам значения t_1 и t_2 параметра t будут корнями уравнения (16) лекции 20. Но, поскольку точка $M_0\,(x_0, y_0)$ принадлежит диаметру (2), коэффициент при t в этом уравнении равен нулю. Поэтому $t_1 + t_2 = 0$, и, значит, точка M_0 будет серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$.

З а м е ч а н и е 1. Если точка $M_0\,(x_0, y_0)$ является точкой пересечения диаметра (2) с линией (1), то в уравнении (16) лекции 20 будут равны нулю как коэффициент при t (поскольку точка M_0 принадлежит диаметру), так и свободный член (поскольку точка M_0 принадлежит линии). Поэтому это уравнение будет иметь двойной корень $t=0$, и, значит, прямая (4) будет касательной. Этим доказано, что *диаметр, сопряженный с направлением касательной, проходит через точку касания.*

Определение 2. Направление $l:m$ называется *хордальным* (для линии (1)), если существуют по крайней мере две прямые этого направления, каждая из которых пересекает линию (1) в двух различных точках.

Любое хордальное направление является неасимптотическим.

Согласно только что доказанному *диаметр линии* (1), *сопряженный с хордальным направлением* $l:m$, *однозначно характеризуется как прямая, проходящая через середины отрезков, высекаемых линией* (1) *на прямых этого направления.*

Таким образом, диаметры, сопряженные с хордальными направлениями, определены корректно.

Заметим, что для линий [1]—[8] все (неасимптотические) направления хордальны. Поэтому для этих линий определение 2 корректно. Тривиальное вычисление показывает, что для пары совпадающих прямых [9] диаметром, сопряженным с любым неасимптотическим направлением, будет каждая из этих прямых. Следовательно, и для этой линии определение 2 корректно.

В общем же случае, как и для центров, корректность этого определения можно доказать только в ослабленном виде лишь по отношению к преобразованному уравнению.

Пусть x', y' — координаты, связанные с координатами x, y формулами

$$(x,\ y)=(x',\ y')C^{\mathsf{T}}+(x_0,\ y_0) \tag{5}$$

(см. формулы (5) лекции 20), и пусть

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a_{13}x'+2a_{23}y'+a'_{33}=0 \tag{6}$$

— уравнение, полученное из уравнения (1) преобразованием (5).

Уравнение (2) сопряженного диаметра, написанное для уравнения (6), имеет вид

$$(a'_{11}l'+a'_{12}m')x'+(a'_{12}l'+a'_{22}m')y'+(a'_{13}l'+a'_{23}m')=0, \tag{7}$$

где $l' : m'$ — отношение, задающее в координатах x', y' направление, определенное в координатах x, y отношением $l : m$.

Оказывается (в этом и состоит ослабленное утверждение о корректности понятия сопряженного диаметра), что *уравнение* (7) *определяет в координатах* x', y' *ту же прямую, что и уравнение* (2) *в координатах* x, y, т. е. что это уравнение получается из уравнения (2) подстановкой вместо координат x, y их выражений (5).

Естественно, что соответствующую выкладку лучше всего проделать в матричной записи. С этой целью мы заметим, что в обозначениях, введенных в лекции 20, уравнение (2) имеет вид

$$(x,\ y)\,A\begin{Vmatrix} l \\ m \end{Vmatrix} + (a_{13},\ a_{23})\begin{Vmatrix} l \\ m \end{Vmatrix} = 0,$$

т. е. вид

$$[(x,\ y)\,A + (a_{13},\ a_{23})]\begin{Vmatrix} l \\ m \end{Vmatrix} = 0, \tag{8}$$

и, значит, уравнение (7) — вид

$$[(x',\ y')\,A' + (a'_{13},\ a'_{23})]\begin{Vmatrix} l' \\ m' \end{Vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Кроме того, числа l, m и l', m' (являющиеся координатами одного и того же направляющего вектора в двух различных координатных системах) связаны формулой

$$\begin{Vmatrix} l \\ m \end{Vmatrix} = C\begin{Vmatrix} l' \\ m' \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Но, ввиду формул (6) и (7) лекции 20, уравнение (9) равносильно уравнению

$$\{(x',\ y')\,C^{\top}AC + [(a_{13},\ a_{23}) + (x_0,\ y_0)\,A]\,C\}\begin{Vmatrix} l' \\ m' \end{Vmatrix} = 0,$$

т. е. уравнению

$$\{[(x',\ y')\,C^{\top} + (x_0,\ y_0)]\,A + (a_{13},\ a_{23})\}\,C\begin{Vmatrix} l' \\ m' \end{Vmatrix} = 0.$$

Для завершения доказательства остается лишь заметить, что это в точности уравнение, получающееся из уравнения (8) подстановкой выражений (5) и (10). □

Уравнение (2) может быть переписано в виде

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\,l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\,m = 0,$$

откуда непосредственно следует (ср. с уравнениями (10) лекции 20), что ему удовлетворяют координаты любого центра линии (1). Таким образом, *все диаметры линии* (1) *проходят через каждый ее центр.*

В частности, отсюда следует, что *нецентральная линия, обладающая прямой центров, имеет единственный диаметр, совпадающий с этой прямой.* Этот диаметр сопряжен с каждым неособым (т. е. неасимптотическим) направлением.

Что же касается центральных линий, то *любая прямая, проходящая через центр, является диаметром.* Действительно, требование, чтобы прямая $Ax + By + C = 0$ проходила через центр линии (1), означает, что эта прямая проходит через точку пересечения прямых (14) лекции 20. Поэтому (см. предложение 1 лекции 5) существуют такие числа l и m, что

$$A = a_{11}l + a_{21}m, \quad B = a_{12}l + a_{22}m, \quad C = a_{13}l + a_{23}m.$$

Но тогда прямая $Ax + By + C = 0$ и будет диаметром, сопряженным с направлением $l : m$. □

Направление

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m)$$

диаметра (2), сопряженного с направлением $l : m$, удовлетворяет соотношению

$$(a_{11}l + a_{12}m)\, l' + (a_{12}l + a_{22}m)\, m' = 0,$$

т. е. соотношению

$$a_{11}ll' + a_{12}\,(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0. \tag{11}$$

Это мотивирует следующее определение:

Определение 3. Направление $l' : m'$ называется *сопряженным* (по отношению к линии (1)) с направлением $l : m$, если выполнено условие (11).

Это условие сохраняется при перестановке l, m с l', m'. Следовательно, *отношение сопряженности симметрично*, т. е. направление $l : m$ сопряжено с направлением $l' : m'$. Поэтому можно говорить о *сопряженных направлениях* $l : m$ и $l' : m'$.

Для неособого направления $l : m$ сопряженное направление $l' : m'$ является направлением сопряженного диаметра и потому определено однозначно. С особым же направлением $l : m$ сопряжено любое направление.

Кроме того, направление $l:m$ (особое или нет) тогда и только тогда является асимптотическим, когда оно *самосопряжено*, т. е. сопряжено с самим собой.

Определение 4. Два диаметра центральной линии (1) называются *сопряженными*, если они имеют сопряженные направления, т. е. каждый сопряжен с направлением другого.

Для нецентральных линий понятие сопряженных диаметров не определяется.

Диаметр тогда и только тогда самосопряжен, т. е. сопряжен с самим собой, когда он является асимптотой. Обратно, каждая асимптота (центральной линии) является самосопряженным диаметром.

Исследуем теперь вопрос о возможном упрощении уравнения линии (1) за счет целесообразного выбора аффинных координат.

Условие (11) показывает, что *направления* $1:0$ *и* $0:1$ *координатных осей тогда и только тогда сопряжены, когда*

$$a_{12}=0.$$

Действительно, условие (11) для направлений $l:m=1:0$ и $l':m'=0:1$ выполнено тогда и только тогда, когда $a_{12}=0$. $\square$

Поэтому, выбрав координатные оси, имеющие сопряженные направления, мы уничтожим в уравнении (1) член с произведением xy координат x и y.

Поместив же начало координат в центр, мы уничтожим и линейные члены. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Для любой центральной линии второго порядка существует система аффинных координат x, y, в которой ее уравнение имеет вид*

$$\text{(I)}\qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0,\ \textit{где}\ a_{11}\neq 0,\ a_{22}\neq 0.$$

Система аффинных координат тогда и только тогда обладает этим свойством, когда начало координат лежит в центре данной линии, а координатные оси являются сопряженными диаметрами. $\square$

Условие $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ выполнено потому, что в противном случае уравнение (I) не было бы уравнением центральной линии.

Обсудим изложенное доказательство предложения 1 более подробно. Как мы уже видели, определение центра и сопряженных направлений в общем случае привязано к фиксированному, с самого начала заданному, уравнению (1) рассматриваемой линии второго порядка. Поэтому, если быть абсолютно строгим, надо говорить не «центр», а «центр по отношению к уравнению (1)», не «сопряженные направления», а «направления, сопряженные по отношению к уравнению (1)» и т. п. Имея это в виду, изложим еще раз доказательство предложения 1. Чтобы сделать логическую структуру этого доказательства до конца прозрачной, разобьем его на отдельные элементарные этапы.

Этап 1. Выбираем произвольное неасимптотическое (по отношению к уравнению (1)) направление и принимаем его за направление оси ординат новой координатной системы.

Этап 2. Сопряженное направление (по отношению к уравнению (1)) принимаем за направление оси абсцисс.

Этап 3. По условию рассматриваемая линия имеет единственный центр (по отношению к уравнению (1)). Примем этот центр за начало координат.

Этап 4. Окончательно фиксируем координатную систему, произвольно выбрав направляющие векторы координатных осей.

Этап 5. Обозначив координаты относительно так построенной координатной системы символами x', y', напишем уравнение нашей линии в этих координатах:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \tag{12}$$

Этап 6. Так как координатные оси сопряжены, а центр находится в начале координат, то

$$a'_{12} = 0, \quad a'_{13} = 0, \quad a'_{23} = 0.$$

Следовательно, уравнение (12) имеет вид (I) (с точностью до штрихов).

Мы видим теперь, что, собственно говоря, это рассуждение ошибочно, так как на последнем этапе сопряженность и центр понимаются по отношению к уравнению (12), а не по отношению к уравнению (1)!

Но это возражение легко снимается: достаточно считать, что уравнение (12) получается из уравнения (4) преобразованием координат. Действительно, как мы уже знаем, при таком выборе уравнения (12) диаметры, сопряженные по отношению к этому уравнению, будут сопряженными и по отношению к уравнению (1). Следовательно, тем более это верно и для их направлений.

Таким образом, с этим уточнением доказательство предложения 1 оказывается вполне корректным.

Для нецентральной линии мы за направление $0:1$ оси ординат примем произвольное неособое (т. е. в этом случае неасимптотическое) направление, а за ось абсцисс примем диаметр, сопряженный с этим направлением (тем самым мы фиксируем не только направление, но и положение оси абсцисс). Согласно общей формуле (2) диаметр, сопряженный с направлением $0:1$, имеет уравнение

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

(здесь мы, конечно, имеем в виду коэффициенты соответствующего уравнения (12) и координаты x', y' с отброшенными штрихами). Поэтому из условия, что этот диаметр является осью абсцисс $y = 0$, следует, что $a_{12} = 0$, $a_{22} \neq 0$ и $a_{23} = 0$, откуда, далее, вытекает, что $a_{11} = 0$ (ибо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$). Таким образом, при таком выборе оси абсцисс и направления оси ординат уравнение нецентральной линии приобретает вид

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0, \text{ где } a_{22} \neq 0. \tag{13}$$

Так как для этого уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{13}^2,$$

то линия (13) при $a_{13} \neq 0$ принадлежит типу II (не имеет центров), а при $a_{13} = 0$ — типу III (обладает прямой центров).

При $a_{13} = 0$ мы получаем, таким образом, следующее предложение:

Предложение 2. *Для любой нецентральной линии второго порядка, принадлежащей к типу* III, *т. е. имеющей прямую центров, существует система аффинных координат x, y, в которой ее уравнение имеет вид*

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \text{ где } a_{22} \neq 0. \tag{III}$$

Система аффинных координат тогда и только тогда обладает этим свойством, когда ось ординат имеет неособое направление, а ось абсцисс является диаметром, сопряженным с направлением оси ординат. □

Пусть теперь $a_{13} \neq 0$. Тогда ось абсцисс пересекает линию (13) в точке с абсциссой $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$. Выбрав начало координат в этой точке (что фиксирует положение оси ординат), мы добьемся того, что в уравнении (13) свободный член a_{33} обратится в нуль. Тем самым доказано следующее предложение:

Предложение 3. *Для любой нецентральной линии второго порядка, принадлежащей к типу* II, *т. е. не имеющей центров, существует система аффинных координат x, y, в которой ее уравнение имеет вид*

$$\text{(II)} \qquad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \text{ где } a_{22} \neq 0,\ a_{13} \neq 0.$$

Система аффинных координат тогда и только тогда обладает этим свойством, когда ось ординат имеет неособое направление, ось абсцисс является диаметром, сопряженным с направлением оси ординат, и начало координат принадлежит линии. □

Доказанные предложения целесообразно объединить в единую теорему:

Теорема 1. *Для любой линии второго порядка на аффинной плоскости существует система аффинных координат x, y, в которой ее уравнение принадлежит к одному из трех следующих типов:*

$$\text{(I)} \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \text{ где } a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0;$$

$$\text{(II)} \qquad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \text{ где } a_{22} \neq 0,\ a_{13} \neq 0;$$

$$\text{(III)} \qquad a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \text{ где } a_{22} \neq 0.$$

При этом ни для одной линии не существует двух систем координат, в которых уравнение данной линии принадлежало бы к разным типам. □

Последнее утверждение вытекает из того, что каждый из трех типов характеризуется геометрически: центральные линии, линии без центра и линии с прямой центров.

Подчеркнем, что теорема 1 справедлива в аффинной плоскости над произвольным полем $\mathbb{K}$ (характеристики, отличной от двух).

Лекция 22

Линии второго порядка на комплексной аффинной плоскости. — Линии второго порядка на вещественно-комплексной аффинной плоскости. — Единственность уравнения линии второго порядка. — Линии второго порядка на евклидовой плоскости. — Окружности.

В зависимости от равенства или неравенства нулю отдельных коэффициентов и после деления на коэффициент, отличный от нуля, мы получим из теоремы 1 предыдущей лекции следующие типы уравнений второго порядка:

$$(\mathrm{I}_1)\quad Ax^2 + By^2 = 1,$$
$$(\mathrm{I}_0)\quad Ax^2 + By^2 = 0,$$
$$(\mathrm{II})\quad y^2 = 2Ax,$$
$$(\mathrm{III}_1)\quad y^2 = A,$$
$$(\mathrm{III}_0)\quad y^2 = 0,$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Возможность дальнейшего упрощения этих уравнений зависит от арифметических свойств основного поля $\mathbb{K}$. Например, если в поле $\mathbb{K}$ для любого элемента существует квадратный корень (этим свойством обладает, в частности, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел), то в случаях (I_1) и (I_0) можно ввести новые координаты x', y' по формулам

$$x' = \sqrt{A}x, \quad y' = \sqrt{B}y,$$

а в случаях (II) и (III_1) — по формулам

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{A}}.$$

Это даст нам следующую теорему:

Теорема 1 (о приведении к каноническому виду в ситуации $\mathbb{C}$). *Для любой линии второго порядка на комплексной аффинной плоскости существует система аффинных координат x, y, в которой* *уравнение данной линии является одним из пяти следующих уравнений:*

[1] $x^2 + y^2 = 1$,
[2] $x^2 + y^2 = 0$,
[3] $y^2 = 2x$,
[4] $y^2 = 1$,
[5] $y^2 = 0$.

При этом ни для одной линии не существует двух систем координат, в которых эта линия имела бы различные уравнения из этого списка.

Последнее утверждение вытекает из того, что линия [2] представляет собой пару пересекающихся прямых, линия [4] — пару параллельных прямых, линия [5] — пару совпадающих прямых, линия [3] не имеет центра (симметрии), а линия [1] представляет собой центральную линию (с центром симметрии) и не содержит никакой прямой (если тождественно по t имеет место равенство вида

$$(x_0 + tl)^2 + (y_0 + tm)^2 = 1,$$

то

$$l^2 + m^2 = 0, \quad x_0 l + y_0 m = 0, \quad x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

что возможно только при $(l, m) = (0, 0)$). □

Следствие (теорема классификации линий второго порядка в ситуации $\mathbb{C}$). *В комплексной аффинной плоскости любая линия второго порядка является либо*

а) *центральной линией* [1], *на которой не лежит ни одной прямой, либо*

б) *линией без центра* [3], *либо*

в) *парой прямых* (*пересекающихся* [2], *параллельных и различных* [4], *совпадающих* [5]). □

Линию а) можно с равным правом называть эллипсом или гиперболой. Некоторые авторы называют ее *овалом*.

Линию б) вполне можно называть параболой.

В ситуации ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$), чтобы не нарушить вещественности коэффициентов, следует в случаях (I_1) и (I_0) ввести новые координаты по формулам

$$x' = \sqrt{|A|}\,x, \quad y' = \sqrt{|A|}\,y,$$

а в случаях (II) и (III_1) — по формулам

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{|A|}}.$$

Учитывая возможность умножения уравнений на —1, мы получаем отсюда следующую теорему:

Теорема 2 (о приведении к каноническому виду в ситуации ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$)). *Для любой вещественной линии второго порядка на вещественно-комплексной аффинной плоскости существует вещественная аффинная координатная система, в которой уравнение данной линии является одним из следующих девяти аффинно канонических уравнений:*

[1] $x^2 + y^2 = 1$,
[2] $x^2 + y^2 = -1$,
[3] $x^2 + y^2 = 0$,
[4] $x^2 - y^2 = 1$,
[5] $x^2 - y^2 = 0$,
[6] $y^2 = 2x$,
[7] $y^2 = 1$,
[8] $y^2 = -1$,
[9] $y^2 = 0$.

При этом ни для одной линии не существует двух систем координат, в которых эта линия имела бы различные уравнения из этого списка.

Последнее утверждение вытекает из того, что каждая из линий [1]—[9] может быть охарактеризована геометрически:

[1] Центральная линия, высекающая на вещественной плоскости эллипс.

[2] Центральная линия, не пересекающая вещественной плоскости.

[3] Пара комплексно-сопряженных пересекающихся прямых.

[4] Центральная линия, высекающая на вещественной плоскости гиперболу.

[5] Пара вещественных пересекающихся прямых.

[6] Линия без центров (высекающая на вещественной плоскости параболу).

[7] Пара вещественных параллельных и различных прямых.

[8] Пара комплексно-сопряженных параллельных и различных прямых.

[9] Пара совпадающих прямых (автоматически вещественных). □

Аффинные координаты, в которых уравнение данной линии второго порядка имеет указанный в теореме 2 вид, называются *каноническими* (для данной линии).

Как уже говорилось, линия [1] называется действительным эллипсом, линия [2] — мнимым эллипсом, а линии [4] и [6] — соответственно гиперболой и параболой (с или без эпитета «действительной»).

Следствие (теорема классификации линий второго порядка в ситуации ($\mathbb{C}, \mathbb{R}$)). *В вещественно-комплексной аффинной плоскости любая вещественная линия второго порядка является либо*

а) *эллипсом* (*действительным* [1] *или мнимым* [2]), *либо*

б) *гиперболой* [4], *либо*

в) *параболой* [6], *либо*

г) *парой прямых* (*пересекающихся комплексно-сопряженных* [3], *пересекающихся вещественных* [5], *параллельных различных и вещественных* [7], *параллельных различных и комплексно-сопряженных* [8], *совпадающих* [9]). □

Чтобы завершить теорию линий второго порядка (в ситуациях $\mathbb{C}$ и ($\mathbb{C}, \mathbb{R}$)), осталось рассмотреть вопрос о единственности их уравнений.

Ясно, что если линия второго порядка задана некоторым уравнением вида

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — многочлен второй степени, то пропорциональное уравнение

$$kF(x, y) = 0,$$

где k — произвольное отличное от нуля число, будет задавать ту же линию. Такие уравнения естественно рассматривать как одинаковые.

Оказывается, что в ситуациях $\mathbb{C}$ и ($\mathbb{C}, \mathbb{R}$) этим исчерпывается весь произвол:

Теорема 3 (о единственности уравнения линии второго порядка). *Если на* *комплексной или вещественно-комплексной аффинной плоскости два уравнения второй степени*

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0$$

задают (в одной и той же системе аффинных координат x, y) одну и ту же линию, то эти уравнения пропорциональны:

$$G(x, y) = kF(x, y), \quad k \neq 0.$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что центры и сопряженные направления для линии второго порядка определены корректно (не зависят от выбора уравнения), так что проявленная нами при доказательстве теоремы 1 лекции 21 скрупулезность была на самом деле напрасной. Однако, во избежание логического круга, пользоваться там теоремой 3 мы не могли, поскольку ее доказательство опирается на теорему классификации (и, значит, на результаты лекции 21).

Доказательству теоремы 3 мы предпошлем ряд общих замечаний, имеющих и самостоятельный интерес. Основное поле $\mathbb{K}$ мы пока будем считать произвольным.

Тот факт, что линия второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, означает выполнение соотношения

$$(1) \quad a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0,$$

представляющего собой линейное однородное условие на шесть коэффициентов

$$(2) \qquad a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$$

ее уравнения. Но из алгебры известно (это частный случай общей теоремы о числе фундаментальных решений системы однородных уравнений, для которой, кстати сказать, в следующем семестре мы дадим геометрическую интерпретацию и новое доказательство), что система n линейных однородных уравнений от $n+1$ неизвестных имеет единственное с точностью до пропорциональности нетривиальное решение, если уравнения этой системы линейно независимы. Поэтому, если пять различных точек

$$(3) \qquad M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$$

обладают тем свойством, что соответствующие им пять условий вида (1) на коэффициенты (2) линейно независимы (будем на время доказательства теоремы 3 называть такие точки *независимыми*), и если существует линия второго порядка, проходящая через эти точки (из теоремы об уравнениях существование этой линии не вытекает, так как у решения могут оказаться равными нулю все три компоненты a_{11}, a_{12}, a_{22}), то любые два уравнения этой линии пропорциональны. Это означает, что справедливо следующее предложение:

Предложение 1. *Если на линии второго порядка существуют пять независимых точек, то любые два уравнения этой линии (вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен второй степени) пропорциональны.* □

Важным дополнением к этому предложению является следующая лемма:

Лемма. *Точки* (3) *независимы, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Предположим, что точки (3) зависимы, т. е. что соотношение вида (1), отвечающее одной из этих точек (скажем, точке M_5), является линейной комбинацией соотношений, отвечающих остальным точкам. Это означает, что любая линия второго порядка, проходящая через первые четыре точки, проходит также и через точку M_5. Но одной из таких линий будет пара прямых M_1M_2 и M_3M_4. Поэтому точка M_5 принадлежит одной из этих прямых. По аналогичным соображениям эта точка принадлежит также одной из прямых M_1M_3 и M_2M_4. Но очевидно, что это возможно только тогда, когда хотя бы две из этих четырех прямых совпадают, т. е. когда хотя бы три точки четверки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на одной прямой.

Пусть это будут точки M_1, M_2 и M_3. Тогда линия второго порядка, состоящая из прямой M_1M_2 и произвольной прямой, проходящей через точку M_4, будет содержать все четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 и потому будет содержать точку M_5. Ясно, что это возможно только тогда, когда точка M_5 принадлежит прямой M_1M_2. Но тогда, вопреки предположению, точки M_1, M_2, M_3 и M_5 будут лежать на одной прямой. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Теперь мы уже можем непосредственно перейти к доказательству теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Согласно предложению 1 достаточно на каждой линии второго порядка найти пять независимых точек. При этом в случае ситуации ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$) нет нужды, чтобы эти точки были вещественны (поскольку мы не строим по этим точкам уравнение линии, а лишь доказываем его единственность). Поэтому, не уменьшая общности, мы можем ограничиться ситуацией $\mathbb{C}$.

Если рассматриваемая линия второго порядка не содержит ни одной прямой (т. е. является овалом или параболой), то любые ее три (и тем более четыре) точки не лежат на одной прямой. Следовательно, согласно лемме ее любые пять точек независимы. Тем самым для такой линии теорема 3 доказана.

Ясно, что пять точек, удовлетворяющих условию леммы и потому независимых, можно найти и на любой паре различных прямых. Поэтому для пар различных прямых теорема 3 также верна.

Для остающегося случая совпадающих прямых требуется отдельное исследование.

Пусть $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен второй степени, — произвольное уравнение пары совпадающих прямых. Согласно теореме приведения (в ее аккуратной формулировке) от координат x, y можно перейти к другим координатам:

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + x'_0,$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + y'_0,$$

обладающим тем свойством, что после подстановки в многочлен $F(x, y)$ выражений координат x, y через координаты x', y' получится многочлен, пропорциональный многочлену y'^2. Но тогда ясно, что сам многочлен $F(x, y)$ пропорционален многочлену $(c_{21}x + c_{22}y + y'_0)^2$. Этим доказано, что любое уравнение пары совпадающих прямых имеет вид $(Ax + By + C)^2 = 0$, где $Ax + By + C = 0$ — уравнение каждой из этих прямых.

Пропорциональность любых двух уравнений пары совпадающих прямых вытекает теперь из пропорциональности любых двух уравнений прямой.

Тем самым теорема 3 полностью доказана. $\square$

Замечание 1. В случае произвольного основного поля (характеристики $\neq 2$) легко показывается, что линии типа (I_1) и (II) (см. начало лекции) не содержат ни одной прямой, линия типа (I_0) является либо точкой, либо парой пересекающихся прямых, а линия типа (III_1) — либо пустым множеством, либо парой параллельных прямых. Кроме того, множество точек каждой линии типа (II) равномощно множеству элементов поля $\mathbb{K}$, а множество точек каждой непустой линии типа (I_1) равномощно множеству элементов поля $\mathbb{K}$ плюс еще один элемент (докажите!). Таким образом, для случая произвольного поля $\mathbb{K}$ дело формально обстоит точно так же, как в случае поля $\mathbb{R}$.

Поэтому, если число элементов поля $\mathbb{K}$ больше трех, то теорема 3 будет справедлива для любых линий второго порядка на аффинной плоскости над полем $\mathbb{K}$, содержащих более одной точки. Для пустых же и одноточечных линий она в принципе не может быть верной.

Обратимся теперь к линиям второго порядка на евклидовой (вещественной или вещественно-комплексной) плоскости. Координаты x, y мы будем теперь считать прямоугольными.

Определение 1. Направление $l:m$ называется *главным* по отношению к данной линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

если перпендикулярное к нему направление $-m:l$ с ним сопряжено.

Это условие, конечно, выполнено для особого направления $-a_{12}:a_{11} = -a_{22}:a_{12}$. Таким образом, для каждой нецентральной линии особое направление (т. е. направление оси для параболы, а для параллельных прямых — их направление) является главным направлением.

Главным является и направление, перпендикулярное особому. Других главных направлений нецентральная линия второго порядка не имеет. Таким образом, *для любой нецентральной линии существует два и только два перпендикулярных главных направления.*

Вспомнив теперь изложенный в лекции 21 метод приведения уравнения линий второго порядка к простейшему виду (II) или (III), мы немедленно обнаружим, что на евклидовой плоскости это можно сделать в классе прямоугольных координат: достаточно на начальном этапе построения направление оси ординат выбрать главным и неособым. Таким образом, *для любой нецентральной линии второго порядка на вещественной или вещественно-*

комплексной евклидовой плоскости существуют прямоугольные координаты x, y, в которых ее уравнение имеет вид (II) *или* (III).

Аналогичное утверждение для центральных линий будет, конечно, также доказано, если мы докажем существование хотя бы одной пары сопряженных перпендикулярных (и, следовательно, главных) направлений. С этой целью заметим, что сопряженность неособого направления $l : m$ с перпендикулярным направлением $-m : l$ означает, что имеет место равенство

$$l\,(a_{21}l + a_{22}m) - m\,(a_{11}l + a_{12}m) = 0,$$

т. е. равенство

$$a_{21}l^2 + (a_{22} - a_{11})\,lm - a_{12}m^2 = 0. \tag{4}$$

Таким образом, *направление $l : m$ тогда и только тогда является главным направлением, когда выполнено соотношение* (4).

(Непосредственная проверка показывает, кстати сказать, что это верно и тогда, когда направление $l : m$ особо.)

При $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$ соотношение (4) удовлетворяется тождественно, т. е. в этом случае любое направление является главным. При $a_{12} \neq 0$ соотношение (4) представляет собой квадратное уравнение относительно $l : m$, решения которого можно написать в одном из двух равносильных видов:

$$l : m = \left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right) : 2a_{12},$$

$$l : m = -2a_{12} : \left(a_{11} - a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right).$$

Эти же формулы пригодны и при $a_{12} = 0$, $a_{11} \neq a_{22}$; нужно лишь пользоваться той формулой, которая имеет смысл, т. е. верхней, когда корень берется с положительным знаком, и нижний — в противном случае.

Таким образом, при $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$, эти формулы дают для $l : m$ два вещественных значения. Это означает, что *для центральной линии второго порядка либо существует два и только два главных направления* (автоматически сопряженных и перпендикулярных), *либо любое направление является главным.*

Тем самым, в частности, доказано, что для любой такой линии существуют прямоугольные координаты, в которых ее уравнение имеет вид (I), т. е. либо вид (I_1), либо вид (I_0).

Умножая (если нужно) на -1, мы можем считать, что в этом уравнении $A > 0$. Мы положим

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{|B|}}.$$

Более того, в случае (I_1) при $B > 0$, а также в случае (I_0) можно дополнительно считать, что $a \geqslant b$ (иначе надо переименовать координаты). Кроме того, в случае (I_0) мы можем добиться и того, чтобы имело место равенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

Аналогично, в случае (II) (изменив, если нужно ориентацию оси абсцисс) мы можем считать, что $A > 0$. Мы положим $p = A$.

В случае же (III_1) мы положим

$$b = \sqrt{|A|}.$$

Тем самым мы получаем следующую теорему:

Теорема 4 (о приведении к каноническому виду на евклидовой плоскости). *Для любой вещественной линии второго порядка на вещественной или вещественно-комплексной евклидовой плоскости существует вещественная система прямоугольных координат, в которой уравнение данной линии принадлежит к одному из следующих девяти типов:*

[1] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *где* $a \geqslant b > 0$;

[2] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, *где* $a \geqslant b > 0$;

[3] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, *где* $a \geqslant b > 0$ *и* $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$;

[4] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *где* $a > 0$, $b > 0$;

[5] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, *где* $a > 0$, $b > 0$ *и* $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$;

[6] $y^2 = 2px$, *где* $p > 0$;

[7] $y^2 = b^2$, *где* $b > 0$;

[8] $y^2 = -b^2$, *где* $b > 0$;

[9] $y^2 = 0$.

На вещественной плоскости это, соответственно,
[1] *эллипс,*
[2] *пустое множество,*
[3] *точка,*
[4] *гипербола,*
[5] *пара пересекающихся прямых,*
[6] *парабола,*
[7] *пара параллельных, но различных прямых,*
[8] *пустое множество,*
[9] *пара совпадающих прямых,*
а на вещественно-комплексной плоскости —
[1] *действительный эллипс,*
[2] *мнимый эллипс,*
[3] *пара комплексно-сопряженных пересекающихся прямых,*
[4] *гипербола*
[5] *пара вещественных пересекающихся прямых,*
[6] *парабола,*
[7] *пара вещественных параллельных различных прямых,*
[8] *пара комплексно-сопряженных параллельных различных прямых,*
[9] *пара совпадающих прямых.*

При этом ни для одной линии (в вещественном случае, содержащей более одной точки) не существует двух систем координат, в которых эта линия имела бы различные уравнения из этого списка.

Последнее утверждение в отношении уравнений разных типов вытекает из соответствующего утверждения для аффинного случая, а в отношении уравнений одного типа — из того, что коэффициенты этих уравнений (в случаях [1]—[8]) могут быть охарактеризованы геометрически:

[1] Числа a и b равны длинам отрезков, высекаемых линией на осях симметрии.

[2] (Относится только к вещественно-комплексному случаю.) Числа ia и ib равны длинам отрезков, высекаемых линией на осях симметрии.

[3] (Относится только к вещественно-комплексному случаю.) При $a = b$ длина любого отрезка каждой из прямых, составляющих линию, равна нулю (такие прямые называются *изотропными*), а при $a \neq b$ косинус угла между этими прямыми равен $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. Вместе с норми-

рующим условием $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ это однозначно определяет числа a и b, подчиненные неравенствам $a \geqslant b > 0$.

[4] Число $2a$ равно длине отрезка, высекаемого линией на оси симметрии, а число $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ — косинусу угла между ее асимптотами.

[5] Число $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ равно косинусу угла между прямыми, составляющими линию.

[6] Число $\frac{p}{2}$ равно расстоянию от фокуса до вершины.

[7] Число $2b$ равно расстоянию между прямыми, составляющими линию.

[8] (Относится только к вещественно-комплексному случаю.) Число $2ib$ равно расстоянию между прямыми, составляющими линию. □

Следствие (теорема классификации линий второго порядка на евклидовой плоскости). *Любая вещественная линия второго порядка на вещественно-комплексной евклидовой плоскости (любая вещественная линия второго порядка на вещественной евклидовой плоскости, содержащая более одной точки) является либо*

а) *эллипсом (действительным* [1] *или мнимым* [2]), *либо*

б) *гиперболой* [4], *либо*

в) *параболой* [6], *либо*

г) *парой прямых (пересекающихся комплексно-сопряженных* [3], *пересекающихся вещественных* [5], *параллельных различных и вещественных* [7], *параллельных различных и комплексно-сопряженных* [8], *совпадающих* [9]). □

Рассмотрим в заключение вопрос о геометрическом описании центральных линий, для которых любое направление является главным, т. е. таких, что $a_{12}=0$ и $a_{11}=a_{22}$.

На вещественной евклидовой плоскости такой линией является *окружность*, т. е. геометрическое место точек, расстояние которых от данной точки (центра) равно данному числу R. Действительно, уравнение окружности (в прямоугольных координатах x, y) имеет вид

(5) $$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где a, b — координаты центра, т. е. вид

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \tag{6}$$

где $c = a^2 + b^2 - R^2$. С другой стороны, уравнение линии второго порядка тогда и только тогда имеет вид (6), когда $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$. □

На вещественно-комплексной плоскости мы примем последнее свойство за определение:

Определение 2. Вещественная линия второго порядка на вещественно-комплексной евклидовой плоскости называется *окружностью*, если $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$, т. е. если ее уравнение может быть записано в виде (6). Точка (вещественная) с координатами a, b называется при этом *центром* окружности, а число $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ — ее *радиусом*.

Непосредственно проверяется, что *это определение корректно*, т. е. не зависит от выбора прямоугольных координат x, y. Действительно, в обозначениях, введенных в лекции 20, уравнение (6) характеризуется тем, что для него $A = E$. Но, если $A = E$, то для любой ортогональной матрицы перехода C матрица A' из формулы (7) лекции 20 также будет матрицей E. Поэтому свойство линии быть окружностью не зависит от выбора координат. Далее, если $A = E$, то, согласно первой из формул (8) лекции 20, числа $a' = -a'_{13}$ и $b' = -a'_{23}$ будут связаны с числами $a = -a_{13}$ и $b = -a_{23}$ формулой

$$(a', b') = [(a, b) - (x_0, y_0)]\,C.$$

Следовательно, если обе координатные системы x, y и x', y' прямоугольны (и, значит, в частности, $C^{\mathsf T} = C^{-1}$), то

$$\begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} = C \begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix},$$

т. е. в координатах x, y и x', y' числа a, b и a', b' являются координатами одной и той же точки. Поэтому свойство точки быть центром окружности также не зависит от выбора координат. Кроме того, мы видим, что

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a,\ b)\begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix} = \\ &= [(a',\ b')\,C^{\mathsf T} + (x_0,\ y_0)]\left[C\begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}\right] = \\ &= (a',\ b')\,C^{\mathsf T}C\begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix} + (a',\ b')\,C^{\mathsf T}\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \end{aligned}$$

$$+(x_0,\ y_0)\,C\begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix}+(x_0,\ y_0)\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}=(a',\ b')\begin{Vmatrix} a' \\ b' \end{Vmatrix}+$$

$$+[(a,\ b)-(x_0,\ y_0)]\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}+(x_0,\ y_0)\left[\begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}\right]+$$

$$+(x_0,\ y_0)\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}=a'^2+b'^2+2ax_0+2by_0-(x_0^2+y_0^2).$$

Поскольку же, согласно второй из формул (8) лекции 20, число $c'=a'_{33}$ выражается формулой

$$c'=x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c,$$

отсюда следует, что $a^2+b^2-c=a'^2+b'^2-c'$, т. е. что и радиус R не зависит от выбора системы координат. □

Возможны три случая:

Случай $a^2+b^2-c>0$. В этом случае радиус R окружности является положительным вещественным числом. Ее пересечение с вещественной плоскостью представляет собой обычную окружность радиуса R с центром $(a,\ b)$. Как линия второго порядка такая окружность имеет тип [1], т. е. является действительным эллипсом. Обычно она называется *действительной окружностью*.

Случай $a^2+b^2-c=0$. Радиус R окружности равен нулю. С вещественной плоскостью она имеет единственную общую точку (0, 0) — центр. Как линия второго порядка эта окружность принадлежит типу [3] и является парой пересекающихся (в точке (0, 0)) комплексно-сопряженных изотропных прямых.

Случай $a^2+b^2-c<0$. В этом случае обычно полагают $R=\sqrt{|a^2+b^2-c|}$, обозначая тем самым радиус окружности через iR. Вещественных точек такая окружность не имеет. Она принадлежит типу [2] и обычно называется *мнимой окружностью*.

Во всех трех случаях окружность представляет собой геометрическое место точек вещественно-комплексной евклидовой плоскости, расстояние которых от центра равно данному вещественному или чисто мнимому числу. При желании это можно принять за ее определение.

Лекция 23

Эллипсоиды. — Мнимые эллипсоиды. — Мнимые конусы второго порядка. — Двуполостные гиперболоиды. — Однополостные гиперболоиды. — Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.

Аналогом линий второго порядка являются в пространстве *поверхности второго порядка*, имеющие уравнение вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — некоторый многочлен от x, y, z второй степени. Для этих поверхностей можно повторить с соответствующими изменениями и усложнениями все сказанное выше о линиях второго порядка. Не имея на это времени, мы ограничимся тем, что вкратце опишем все возможные их типы. Работать мы будем в евклидовом пространстве в прямоугольных координатах.

Тип [1]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Они называются *эллипсоидами*.

При $a = b = c$ эллипсоид является *сферой* радиуса a.

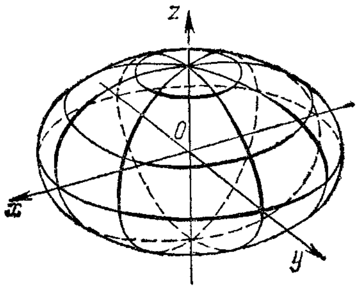
Чтобы представить себе форму произвольного эллипсоида, проще всего изучить его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Рассмотрим, например, плоскость $z = h$, параллельную плоскости Oxy. На этой плоскости числа x, y являются координатами (относительно координатной системы $H_{i,j}$, где i, j — орты осей Ox и Oy, а H — точка с координатами $(0, 0, h)$), а уравнение линии, высекаемой на ней эллипсоидом (1), имеет в этих координатах вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2},$$

т. е. вид

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

Следовательно, плоскость $z = h$ при $|h| > c$ не пересекает эллипсоид (1), при $|h| = c$ имеет с эллипсоидом (1) единственную общую точку ($(0, 0, c)$ при $h = c$ и $(0, 0, -c)$ при $h = -c$) и при $|h| < c$ пересекает эллипсоид (1) по эллипсу с полуосями



Эллипсоид

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

наибольшими (и равными a и b) при $h = 0$ и монотонно уменьшающимися до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до c.

Аналогично показывается, что плоскость $y = h$ при $|h| > b$ не пересекает эллипсоид (1), при $|h| = b$ имеет с эллипсоидом (1) единственную общую точку ($(0, b, 0)$, когда $h = b$, и $(0, -b, 0)$, когда $h = -b$) и при $|h| < b$ пересекает эллипсоид (1) по эллипсу с полуосями

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},$$

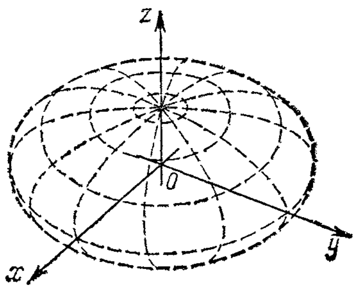
наибольшими (и равными a и c), когда $h = 0$, и монотонно уменьшающимися до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до b.

Точно так же плоскость $x = h$ при $|h| > a$ не пересекает эллипсоид (1), при $|h| = a$ имеет с эллипсоидом (1) единственную общую точку ($(a, 0, 0)$, когда $h = a$, и $(-a, 0, 0)$, когда $h = -a$) и при $|h| < a$ пересекает эллипсоид (1) по эллипсу с полуосями

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},$$

наибольшими (и равными b и c), когда $h = 0$, и монотонно уменьшающимися до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до a.

Все это дает вполне удовлетворительное представление о форме эллипсоида (1). В частности, мы видим, что эллипсоид (1) целиком расположен в прямоугольном параллелепипеде (вписан в этот параллелепипед) с центром в точке O $(0, 0, 0)$, с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, имеющими длины $2a$, $2b$ и $2c$.



Мнимый эллипсоид

Можно еще добавить, что так как уравнение (1) не меняется при изменении знаков координат x, y, z, то координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида (1), а начало координат — его центром симметрии.

При $a > b > c$ никаких других плоскостей симметрии эллипсоид не имеет.

Тип [2]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{2}$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Они вещественных точек не имеют и называются *мнимыми эллипсоидами*.

Тип [3]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{3}$$

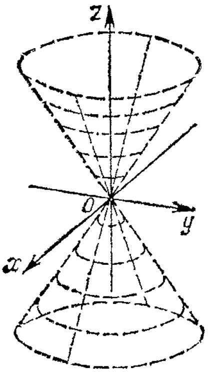
где $a \geqslant b \geqslant c > 0$ и $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Они имеют единственную вещественную точку O $(0, 0, 0)$ и называются *мнимыми конусами второго порядка*.

Тип [4]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат

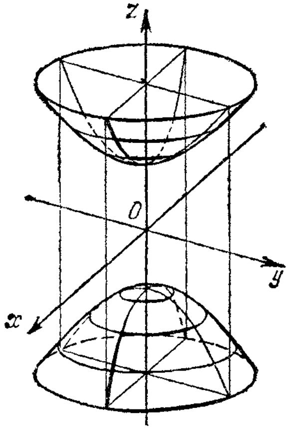
x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{4}$$

где $a \geqslant b > 0$, $c > 0$. Они называются *двуполостными гиперболоидами.*



Мнимый конус второго порядка



Двуполостный гиперболоид

Плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид (4), при $|h| = c$ имеет с гиперболоидом (4) единственную общую точку ($(0, 0, c)$ при $h = c$ и $(0, 0, -c)$ при $h = -c$) и при $|h| > c$ пересекает гиперболоид (4) по эллипсу с полуосями

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

монотонно возрастающими (от 0 до $+\infty$), когда $|h|$ возрастает от c до $+\infty$.

Каждая плоскость $y = h$ пересекает гиперболоид (1) по гиперболе с полуосями

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}, \quad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}},$$

монотонно возрастающими (от c и a до $+\infty$), когда $|h|$ возрастает от нуля до $+\infty$.

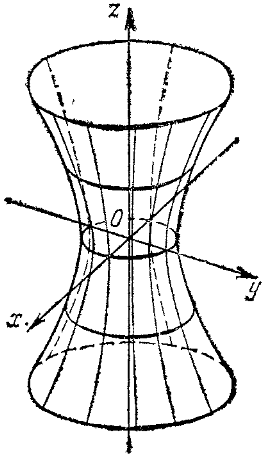
Каждая плоскость $x=h$ пересекает гиперболоид (1) по гиперболе с полуосями

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}},$$

монотонно возрастающими (от c и b до $+\infty$), когда $|h|$ возрастает от нуля до $+\infty$.

Этим форма двуполостного гиперболоида полностью выяснена. В частности, мы видим, что этот гиперболоид состоит из двух симметричных частей («пол»), расположенных, соответственно, в полупространствах $z \geqslant c$ и $z \leqslant -c$.

По тем же соображениям, что и для эллипсоида, координатные плоскости являются плоскостями симметрии двуполостного гиперболоида, а начало координат — его центром симметрии.



Однополостный гиперболоид

Тип [5]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{5}$$

где $a \geqslant b > 0$, $c > 0$. Они называются *однополостными гиперболоидами*.

Каждая плоскость $z=h$ пересекает гиперболоид (5) по эллипсу с полуосями

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

монотонно возрастающими от a и b до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от нуля до $+\infty$.

Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

получающийся при $h=0$, называется *горловым эллипсом* гиперболоида (5).

Что же касается плоскостей $y = h$ и $x = h$, то плоскость $y = h$ при $|h| < b$ пересекает гиперболоид (5) по гиперболе с полуосями

$$a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}},$$

монотонно убывающими от a и c до нуля, когда $|h|$ возрастает от нуля до b; при $|h| = b$ она пересекает гиперболоид (5) по паре прямых, имеющей в координатах x, z (являющихся, очевидно, прямоугольными координатами на этой плоскости) уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

и при $|h| > b$ — по гиперболе с полуосями

$$c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}, \quad a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1},$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от b до $+\infty$. Мнимые (действительные) оси гипербол, получающихся при $|h| > b$, параллельны действительным (мнимым) осям гипербол, получающихся при $|h| < b$.

Аналогично, плоскость $x = h$ при $|h| < a$ пересекает гиперболоид (5) по гиперболе с полуосями

$$b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}},$$

монотонно убывающими (от b и c до нуля), когда $|h|$ возрастает от нуля до a; при $|h| = a$ она пересекает гиперболоид (5) по паре прямых, имеющей в координатах y, z (являющихся, очевидно, прямоугольными координатами на этой плоскости) уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

и при $|h| > a$ — по гиперболе с полуосями

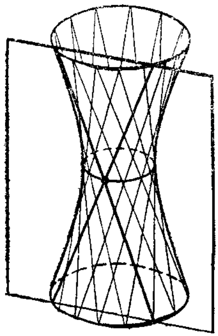
$$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1},$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от a до $+\infty$. Мнимые (действительные) оси гипербол, получающихся при $|h| > a$, параллельны действительным (мнимым) осям гипербол, получающихся при $|h| < a$.

Кроме того, подобно предыдущим поверхностям, гиперболоид имеет координатные плоскости плоскостями симметрии, а начало координат — центром симметрии.

Самым замечательным свойством гиперболоида (5) является наличие прямых, целиком на нем лежащих.

Определение 1. Поверхность в пространстве называется *l-кратно линейчатой поверхностью*, если через любую ее точку проходит l (и только l) различных прямых, целиком на ней лежащих. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* линейчатой поверхности.



Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

Предложение 1. *Однополостный гиперболоид* (5) *является дважды линейчатой поверхностью.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка гиперболоида (5). Прямая, проходящая через точку M_0 и имеющая направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$, тогда и только тогда целиком лежит на гиперболоиде (5), когда тождественно по t имеет место равенство

$$\frac{(x_0+tl)^2}{a^2}+\frac{(y_0+tm)^2}{b^2}-\frac{(z_0+tn)^2}{c^2}=1.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что, согласно условию,

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

мы получим отсюда два соотношения:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0$$

и

$$\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}=0.$$

Из первого соотношения следует, что $n \neq 0$ (так как иначе имело бы место равенство $(l, m, n) = (0, 0, 0)$).

Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $n = c$.

Тогда для l и m мы будем иметь уравнения

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1, \quad \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} = \frac{z_0}{c}.$$

Полагая во втором уравнении

$$x_0 = x_1 + l\frac{z_0}{c} \quad \text{и} \quad y_0 = y_1 + m\frac{z_0}{c},$$

мы немедленно получим (учитывая первое уравнение), что

$$\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2} = 0.$$

Кроме того, так как

$$\frac{\left(x_1 + l\frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_1 + m\frac{z_0}{c}\right)^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} +$$

$$+ 2\left(\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2}\right)\frac{z_0}{c} + \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 1\right)\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2},$$

то

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

т. е. точка (x_1, y_1) принадлежит горловому эллипсу гиперболоида (5).

Поэтому числа x_1 и y_1 не равны одновременно нулю, и, значит, равенство

$$\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2} = 0$$

однозначно определяет отношение $l : m = -a^2y_1 : b^2x_1$. Мы положим

$$l = -\frac{a}{b}y_1u, \quad m = \frac{b}{a}x_1u,$$

где u — множитель пропорциональности. Так как

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = \left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}\right)u^2,$$

то $u^2=1$, т. е. $u=\pm 1$. Кроме того,

$$x_0 = x_1 + l\frac{z_0}{c} = x_1 - u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c}y_1,$$

$$y_0 = y_1 + m\frac{z_0}{c} = y_1 + u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c}x_1,$$

откуда мы находим x_1 и y_1:

$$(6)\qquad x_1 = \frac{x_0 + u\frac{a}{b}\frac{z_0}{c}y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}, \qquad y_1 = \frac{y_0 - u\frac{b}{a}\frac{z_0}{c}x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}.$$

Обратно, непосредственная проверка показывает, что для любого t точка с координатами

$$(7)\qquad x = x_0 - u\frac{a}{b}y_1 t,\quad y = y_0 + u\frac{b}{a}x_1 t,\quad z = z_0 + ct,$$

где $u=\pm 1$, а числа x_1 и y_1 вычислены по формулам (6), лежит на гиперболоиде (5) (а точка (x_1, y_1) — на его горловом эллипсе).

Этим доказано, что через любую точку M_0 гиперболоида (5) проходят две и только две прямые (7), целиком лежащие на гиперболоиде. Следовательно, гиперболоид (5) является дважды линейчатой поверхностью. □

Параметрические уравнения (7) прямолинейных образующих гиперболоида (5) удобно переписать по-иному, заметив, что

$$x_1 = x_0 - u\frac{a}{b}y_1\left(-\frac{z_0}{c}\right),$$

$$y_1 = y_0 + u\frac{b}{a}x_1\left(-\frac{z_0}{c}\right),$$

$$0 = z_0 + c\left(-\frac{z_0}{c}\right),$$

т. е. что при $t=-\frac{z_0}{c}$ получается точка $(x_1, y_1, 0)$. Поэтому, полагая $t' = t + \frac{z_0}{c}$ и опуская штрихи, мы получим для прямолинейных образующих те же уравнения, но с заменой x_0, y_0 и z_0 на x_1, y_1 и 0. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. *Каждая прямолинейная образующая однополостного гиперболоида пересекает его горловой эллипс. Параметрические уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку* (x_1, y_1) *горлового эллипса, имеют вид*

$$x = x_1 - u\frac{a}{b}y_1 t,$$

$$y = y_1 + u\frac{b}{a}x_1 t,$$

$$z = ct,$$

где $u = \pm 1$. □

Две прямолинейные образующие гиперболоида (5) мы будем называть *одноименными*, если им соответствует одно и то же значение u. Тем самым все образующие разбиваются на два класса: одноименные образующие принадлежат одному классу разноименные — разным. Эти классы обычно называются *семействами* прямолинейных образующих гиперболоида (5).

Теорема 1 (о свойствах прямолинейных образующих однополостного гиперболоида). *Имеют место следующие утверждения:*

А. *Через любую точку однополостного гиперболоида проходит одна и только одна прямолинейная образующая каждого семейства.*

Б *Любые две разноименные образующие однополостного гиперболоида лежат в одной плоскости.*

В. *Любые две одноименные несовпадающие образующие однополостного гиперболоида скрещиваются.*

Г. *Никакие три одноименные попарно различные образующие однополостного гиперболоида не параллельны никакой плоскости.*

Доказательство. Свойство **А** фактически доказано выше. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две точки горлового эллипса. Тогда, согласно предложению 2, направляющие векторы прямолинейных образующих, проходящих через эти точки, имеют вид

$$\left(-u_1\frac{a}{b}y_1,\ u_1\frac{b}{a}x_1,\ c\right),\quad \left(-u_2\frac{a}{b}y_2,\ u_2\frac{b}{a}x_2,\ c\right),$$

где $u_1 = \pm 1$ и $u_2 = \pm 1$, и поэтому эти образующие тогда и только тогда скрещиваются, когда отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ -u_1\frac{a}{b}y_1 & u_1\frac{b}{a}x_1 & c \\ -u_2\frac{a}{b}y_2 & u_2\frac{b}{a}x_2 & c \end{vmatrix} =$$

$$= -u_2abc\left[\frac{(x_2-x_1)(x_2-ux_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2-uy_1)}{b^2}\right],$$

где $u=u_1u_2$. Но если $u=1$ и рассматриваемые образующие различны, то

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2-ux_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2-uy_1)}{b^2}=$$

$$=\frac{(x_2-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)^2}{b^2}>0$$

(при $u=1$ оба равенства $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ невозможны, ибо тогда образующие были бы одинаковыми), а если $u=-1$, то

$$\frac{(x_2-x_1)(x_2-ux_1)}{a^2}+\frac{(y_2-y_1)(y_2-uy_1)}{b^2}=$$

$$=\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0.$$

Этим доказаны свойства **Б** и **В**.

Для доказательства свойства **Г** достаточно установить, что для любых трех попарно различных точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) горлового эллипса векторы

$$\left(-u\frac{a}{b}y_1,\ u\frac{b}{a}x_1,\ c\right),\quad \left(-u\frac{a}{b}y_2,\ u\frac{b}{a}x_2,\ c\right),$$

$$\left(-u\frac{a}{b}y_3,\ u\frac{b}{a}x_3,\ c\right),$$

где $u=\pm 1$, не компланарны, т. е. что определитель

$$\begin{vmatrix} -u\frac{a}{b}y_1 & u\frac{b}{a}x_1 & c \\ -u\frac{a}{b}y_2 & u\frac{b}{a}x_2 & c \\ -u\frac{a}{b}y_3 & u\frac{b}{a}x_3 & c \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Но это на самом деле так, поскольку точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) не лежат на одной прямой. □

Лекция 24

Конусы второго порядка. — Эллиптические параболоиды. — Гиперболические параболоиды. — Прямолинейные образующие гиперболического параболоида. — Эллиптические цилиндры. — Остальные поверхности второго порядка. — Формулировка теоремы классификации поверхностей второго порядка.

Продолжим перечисление возможных типов поверхностей второго порядка.

Тип [6]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{1}$$

где $a \geqslant b > 0$, $c > 0$ и $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Они называются *действительными конусами второго порядка.*

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии конуса (1), а начало координат — его центром симметрии.

Вообще, *конусом* называется линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой проходят через одну точку, называемую *вершиной* конуса.

Для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности (1), отличной от точки $O(0, 0, 0)$, каждая точка вида (tx_0, ty_0, tz_0), т. е. каждая точка прямой OM_0, принадлежит этой поверхности:

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0.$$

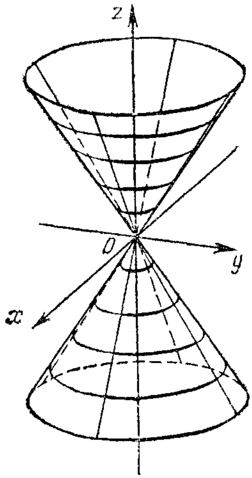
Таким образом, поверхность (1) действительно является конусом.

Направляющей конуса называется произвольная расположенная на нем линия, обладающая тем свойством, что любая прямолинейная образующая пересекает ее в одной и только одной точке.

Примером направляющей конуса (1) может служить его сечение произвольной плоскостью вида $z=h$, где $h \neq 0$. Это сечение является эллипсом с полуосями

$$\frac{a}{c}|h|, \quad \frac{b}{c}|h|,$$

монотонно возрастающими вместе с $|h|$ от нуля до $+\infty$. Прямая, проходящая через центры эллипсов, получающихся таким способом при различных h, т. е. ось Oz, называется *осью конуса.* Интересно, что, пересекая конус (1) плоскостями, не перпендикулярными оси, мы можем получить окружность (докажите!). Поэтому конус (1) называется также *круговым конусом* или — когда желают подчеркнуть, что ось конуса не проходит, вообще говоря, через центр этой окружности, — *косым круговым конусом.* В случае, когда ось конуса проходит через центр окружности, — что имеет место тогда и только тогда, когда плоскость окружности перпендикулярна оси, или, иначе, когда $a=b$, — конус (1) называется *прямым круговым конусом* (см. лекцию 18).



Конус второго порядка

Направляющими конуса (1) — или, точнее, этого конуса без двух образующих — будут также его сечения плоскостями $y=h$ и $x=h$, где $h \neq 0$, являющиеся гиперболами с полуосями

$$\frac{c}{b}|h|, \quad \frac{a}{b}|h| \quad \text{и} \quad \frac{c}{a}|h|, \quad \frac{b}{a}|h|,$$

также монотонно возрастающими вместе с $|h|$ от нуля до $+\infty$.

Плоскость $z=0$ пересекает конус (1) по точке, а плоскости $y=0$ и $x=0$ — по парам прямых (двум образующим).

Плоскими сечениями (и направляющими) конуса (1) являются не только эллипсы и гиперболы, но и параболы. Так, например, параболой будет сечение конуса (1) любой плоскостью вида

$$z = \frac{c}{a} x + h, \text{ где } h \neq 0.$$

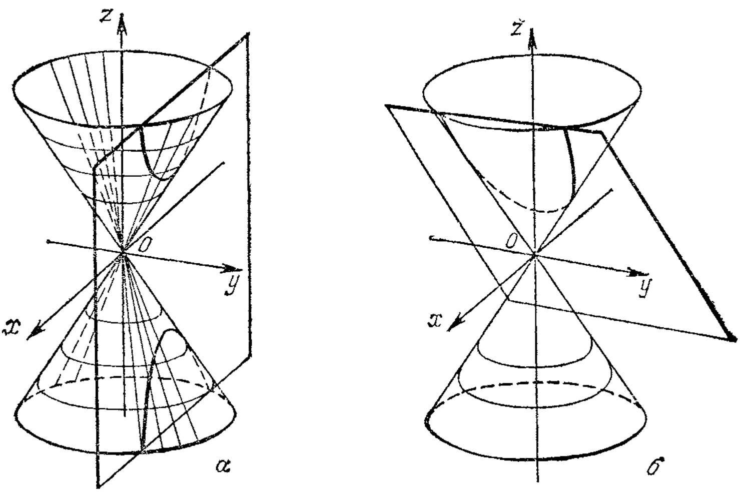
Действительно, числа x, y являются на этой плоскости аффинными (не прямоугольными!) координатами, а уравнение линии, высекаемой на ней конусом (1), имеет в этих координатах вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{\left(\frac{c}{a} x + h\right)^2}{c^2} = 0.$$

Несложными преобразованиями это уравнение приводится к виду

$$y^2 = 2\frac{hb^2}{ac}\left(x + \frac{ha}{2c}\right),$$

с очевидностью показывающему, что оно определяет параболу. См. также лекцию 18.



Сечения конуса второго порядка, являющиеся: *а* — гиперболой, *б* — параболой

Тип [7]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат

x, y, z уравнение вида

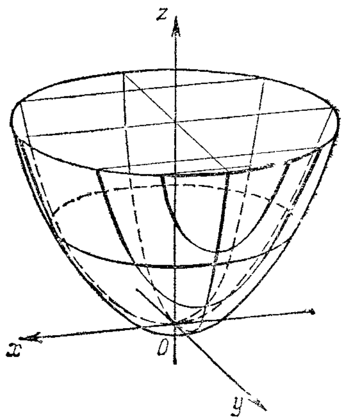
$$(2) \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

где $p \geqslant q > 0$. Они называются *эллиптическими параболоидами.*

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид (2), при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку (0,0,0) и при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу с полуосями

$$\sqrt{2hp}, \quad \sqrt{2hq},$$

монотонно возрастающими вместе с h от нуля до $+\infty$.



Эллиптический параболоид

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают параболоид (2) по параболам с фокальными параметрами p и q, с вершинами в точках $\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$ и $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$ и с «рогами», направленными вверх.

Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии параболоида (2). При $p \neq q$ других плоскостей симметрии у него нет.

Ясно, что эллиптический параболоид (подобно эллипсоиду и двуполостному гиперболоиду) линейчатой поверхностью не является.

Тип [8]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$(3) \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

где $p > 0$, $q > 0$. Они называются *гиперболическими параболоидами.*

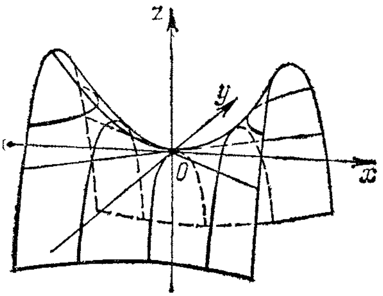
Из всех поверхностей второго порядка форму гиперболического параболоида представить себе труднее всего.

Плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид (3) по гиперболе с полуосями

$$\sqrt{-2qh}, \quad \sqrt{-2ph},$$

монотонно убывающими от $+\infty$ до нуля, когда h возрастает от $-\infty$ до нуля. Действительная ось этой гиперболы параллельна оси Ox, а мнимая — оси Oy.

Плоскость $z = 0$ пересекает гиперболоид (3) по паре прямых, имеющей (в координатах x, y) уравнение



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,$$

а плоскость $z = h$ при $h > 0$ — по гиперболе с полуосями

$$\sqrt{2ph}, \quad \sqrt{2qh},$$

монотонно возрастающими вместе с h от нуля до $+\infty$. В противоположность случаю $h < 0$, действительная ось этой гиперболы параллельна оси Oy, а мнимая—оси Ox.

Плоскости $y = h$ и $x = h$ пересекают гиперболический параболоид (3) по параболам с фокальными параметрами p и q и с вершинами, соответственно, в точках $\left(0, h, -\frac{h^2}{2q}\right)$ и $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$. «Рога» первой параболы направлены вверх, а второй — вниз. Вершины парабол, высекаемых плоскостями $y = h$, лежат на параболе, высекаемой плоскостью $x = 0$, а вершины парабол, высекаемых плоскостями $x = h$, — на параболе, высекаемой плоскостью $y = 0$.

Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида (3). Никаких других плоскостей симметрии этот параболоид не имеет.

Предложение 1. *Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка параболоида (3).

Если проходящая через точку M_0 прямая

$$x = x_0 + tl,$$
$$y = y_0 + tm,$$
$$z = z_0 + tn$$

целиком лежит на параболоиде (3), то тождественно по t должно иметь место равенство

$$\frac{(x_0 + tl)^2}{p} - \frac{(y_0 + tm)^2}{q} = 2(z_0 + tn),$$

т. е. равенство

$$t^2\left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right) + 2t\left(\frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n\right) = 0,$$

что возможно только при

$$\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0$$

и

$$\frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n = 0.$$

С точностью до пропорциональности эти уравнения имеют два и только два решения:

$$l:m:n = \sqrt{p} : u\sqrt{q} : \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right),$$

где $u = \pm 1$.

Обратно, непосредственная проверка показывает, что обе прямые

$$x = x_0 + t\sqrt{p},$$
$$y = y_0 + ut\sqrt{q},$$
$$z = z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

целиком лежат на параболоиде (3). □

Если $\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} \neq 0$, то при $t = t_1$, где

$$t_1 = -\frac{z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right),$$

найденные прямолинейные образующие пересекают плоскость $z = 0$ и, следовательно, одну из лежащих на параболоиде прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

принадлежащих этой плоскости. Поскольку

$$\frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} + u\,\frac{y_0 + ut_1\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + u\,\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) + 2t_1 = 0,$$

этой прямой является прямая

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + u\,\frac{y}{\sqrt{q}} = 0$$

с параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \tau\sqrt{p}, \\ y &= -\tau u\sqrt{q}, \end{aligned} \qquad -\infty < \tau < +\infty.$$

При этом точке пересечения $(x_0 + t_1\sqrt{p},\ y_0 + ut_1\sqrt{q})$ отвечает отличное от нуля значение

$$\tau_1 = \frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\,\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

параметра τ. Геометрически число τ_1 равно расстоянию точки пересечения от начала координат, деленному на длину вектора $(\sqrt{p}, -u\sqrt{q})$, т. е. на $\sqrt{p+q}$.

Полагая $t' = t - t_1$, мы получаем отсюда, что

$$x = x_0 + t\sqrt{p} = (x_0 + t_1\sqrt{p}) + (t - t_1)\sqrt{p} = (t' + \tau_1)\sqrt{p},$$

$$y = y_0 + tu\sqrt{q} = (y_0 + t_1 u\sqrt{q}) + u(t - t_1)\sqrt{q} = u(t' - \tau_1)\sqrt{q},$$

$$z = z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\,\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = (t - t_1)\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\,\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = 2t'\tau_1.$$

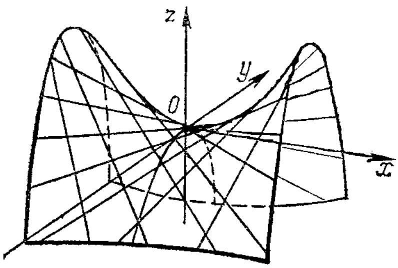
Если же $\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\,\frac{y_0}{\sqrt{q}} = 0$ и потому (согласно уравнению (3)) $z_0 = 0$, то рассматриваемая прямолинейная образующая целиком лежит в плоскости $z = 0$ и проходит через начало координат. По-прежнему полагая $t' = t - t_1$, мы можем ее параметрические уравнения записать в виде

$$x = t'\sqrt{p}, \quad y = ut'\sqrt{q}, \quad z = 0,$$

т. е. в том же виде, как и раньше, но с $\tau_1 = 0$.

Тем самым нами доказано следующее предложение (мы снова обозначаем t' через t, а τ_1 — через τ):

Предложение 2. *Каждая прямолинейная образующая гиперболического параболоида* (3) *пересекает плоскость* $z = 0$ *или лежит в этой плоскости. Ее параметрические уравнения могут быть записаны в виде*



$$x = (t + \tau)\sqrt{p},$$
$$y = u(t - \tau)\sqrt{q},$$
$$z = 2t\tau,$$

где $u = \pm 1$, *а число* τ *либо равно нулю (если образующая целиком лежит в плоскости* $z = 0$), *либо равно деленному на* $\sqrt{p + q}$ *расстоянию от начала координат до точки пересечения образующей с плоскостью* $z = 0$. □

Так же как и в случае однополостного гиперболоида, две прямолинейные образующие называются *одноименными* (принадлежащими одному *семейству* образующих), если им отвечает одно и то же значение параметра u.

Теорема 1 (о свойствах прямолинейных образующих гиперболического параболоида). *Имеют место следующие утверждения:*

А. *Через любую точку гиперболического параболоида проходит одна и только одна прямолинейная образующая каждого семейства.*

Б. *Любые две разноименные образующие гиперболического параболоида пересекаются (и, значит, лежат в одной плоскости).*

В. *Любые две одноименные несовпадающие образующие гиперболического параболоида скрещиваются.*

Г. *Все образующие одного семейства параллельны одной плоскости.*

Мы видим, что свойства образующих гиперболического параболоида вполне аналогичны свойствам образующих однополостного гиперболоида (причем свойство **Б** даже несколько сильнее — исключена параллельность образующих). Единственное фундаментальное различие заключено в свойстве **Г**.

Доказательство теоремы 1. Свойство **А** мы выше уже фактически доказали. Для того чтобы две образующие

$$x=(t+\tau_1)\sqrt{p}, \qquad x=(t+\tau_2)\sqrt{p},$$
$$y=u_1(t-\tau_1)\sqrt{q}, \quad \text{и} \quad y=u_2(t-\tau_2)\sqrt{q},$$
$$z=2t\tau_1 \qquad z=2t\tau_2$$

не скрещивались, необходимо и достаточно, чтобы был равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} \tau_2\sqrt{p}-\tau_1\sqrt{p} & -u_2\tau_2\sqrt{q}+u_1\tau_1\sqrt{q} & 0 \\ \sqrt{p} & u_1\sqrt{q} & 2\tau_1 \\ \sqrt{p} & u_2\sqrt{q} & 2\tau_2 \end{vmatrix} =$$
$$=2\sqrt{pq}\,(u_1+u_2)(\tau_2-\tau_1)^2.$$

Это доказывает свойство **В**. Для доказательства же свойства **Б** нужно еще дополнительно заметить, что, поскольку

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p} & u_1\sqrt{q} \\ \sqrt{p} & u_2\sqrt{q} \end{vmatrix} = \sqrt{pq}\,(u_2-u_1),$$

разноименные образующие не могут быть параллельны

Наконец, ясно, что все векторы вида $(\sqrt{p},\ u\sqrt{q},\ 2\tau)$ параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-u\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Это доказывает свойство **Г**. □

Тип [9]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4}$$

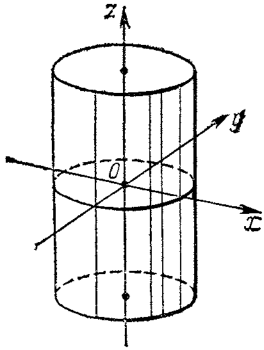
где

$$a\geqslant b>0.$$

Они называются *эллиптическими цилиндрами*.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии цилиндра (4), а начало координат — его центром симметрии. При $a \neq b$ других плоскостей симметрии цилиндр (4) не имеет.

Вообще, *цилиндром* называется линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой параллельны друг другу. Если цилиндр имеет центр симметрии, прямая, проходящая через этот центр параллельно образующим, называется *осью цилиндра* (она будет его осью симметрии).

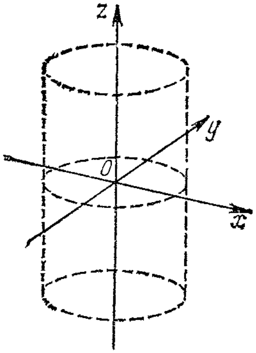


Эллиптический цилиндр

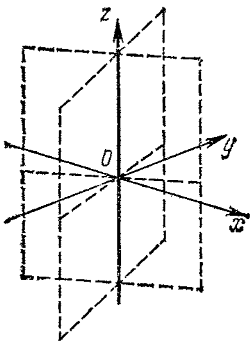
Ясно, что для любой точки M_0 (x_0, y_0, z_0) поверхности (4) каждая точка вида (x_0, y_0, z), т. е. каждая точка прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно оси Oz, принадлежит этой поверхности. Таким образом, поверхность (4) действительно является цилиндром. Его осью служит ось Oz

Направляющей цилиндра называется произвольная расположенная на нем линия, которую каждая образующая пересекает в одной и только одной точке В частности, плоские направляющие — это в точности линии, высекаемые на цилиндре плоскостями, не параллельными образующим. Например, каждая плоскость $z=h$ (перпендикулярная образующим цилиндра (4)) пересекает цилиндр (4) по эллипсу, имеющему в координатах x, y, определенных на этой плоскости, уравнение (4) Это объясняет прилагательное «эллиптический» в названии цилиндра (4). Интересно, что одной из плоских направляющих цилиндра (4) является окружность (докажите!). Поэтому эллиптические цилиндры называются также *круговыми цилиндрами* или, точнее, — когда следует подчеркнуть, что плоскость, высекающая окружность, не перпендикулярна оси, — *косыми круговыми цилиндрами* В случае, когда эта плоскость перпендикулярна оси, т. е. в случае, когда $a = b$, цилиндр (4) называется *прямым круговым цилиндром* Это и есть цилиндр, рассматриваемый в школьном курсе математики.

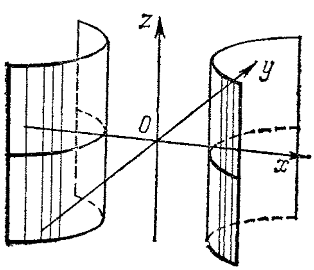
Все остальные поверхности второго порядка также представляют собой цилиндры (направляющими которых



Мнимый эллиптический цилиндр



Пара мнимых плоскостей



Гиперболический цилиндр

являются другие линии второго порядка).

Тип [10]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{5}$$

где $a \geqslant b > 0$. Они вещественных точек не имеют и называются *мнимыми эллиптическими цилиндрами.*

Тип [11]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{6}$$

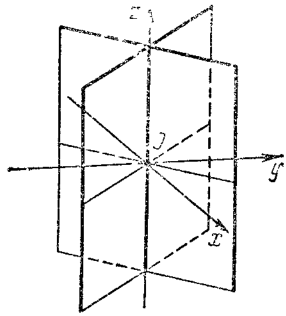
где $a > 0$, $b > 0$ и, кроме того, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

Вещественные точки каждой такой поверхности составляют прямую. В вещественно-комплексном пространстве поверхность (6) представляет собой пару мнимых (комплексно-сопряженных) плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой.

Тип [12]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

где $a > 0$, $b > 0$. Они называются *гиперболическими цилиндрами*. Каждая плоскость $z = h$ пересекает цилиндр (7) по гиперболе, имеющей в координатах x, y на этой плоскости уравнение (7).

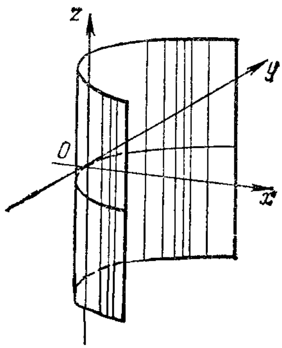


Пара пересекающихся плоскостей

Тип [13]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. Каждая такая поверхность представляет собой пару пересекающихся плоскостей.

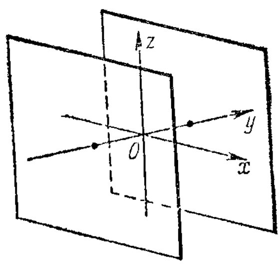


Параболический цилиндр

Тип [14]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$(9) \qquad y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Они называются *параболическими цилиндрами*. Каждая плоскость $z = h$ пересекает цилиндр (9) по параболе, имеющей в координатах x, y на этой плоскости уравнение (9).



Пара параллельных различных плоскостей

Тип [15]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

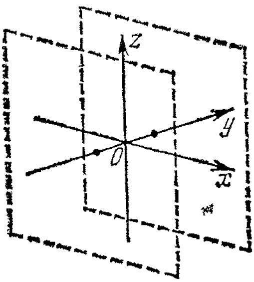
$$(10) \qquad y^2 = b^2,$$

где $b > 0$. Они представляют собой пару параллельных различных плоскостей.

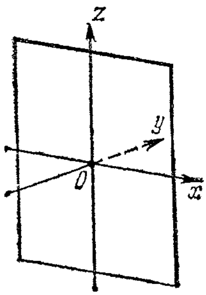
Тип [16]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$(11) \qquad y^2 = -b^2,$$

где $b > 0$. Они представляют собой пару мнимых (комплексно-сопряженных и различных) плоскостей.



Пара мнимых различных плоскостей



Пара совпадающих плоскостей

Тип [17]. К этому типу принадлежат поверхности, имеющие в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнение вида

$$(12) \qquad y^2 = 0.$$

Каждую такую поверхность можно рассматривать как пару совпадающих плоскостей.

Теорема классификации поверхностей второго порядка утверждает, что перечисленными в этой и предыдущей лекциях семнадцатью типами исчерпываются все поверхности второго порядка в евклидовом пространстве, причем ни для одной поверхности не существует двух систем прямоугольных координат, в которых она бы имела различные уравнения этих типов. Таким образом, *все поверхности второго порядка исчерпываются*

а) *эллипсоидами* (действительными [1] и мнимыми [2]),

б) *гиперболоидами* (однополостными [5] и двуполостными [4]),

в) *параболоидами* (эллиптическими [7] и гиперболическими [8]), г) *конусами второго порядка* (мнимыми [3] и действительными [6]),

д) *цилиндрами второго порядка* (действительными эллиптическими [9], мнимыми эллиптическими [10], параболическими [14] и гиперболическими [12]),

е) *парами плоскостей* (мнимых пересекающихся [11], действительных пересекающихся [13], действительных параллельных и различных [15], мнимых параллельных [16], действительных совпадающих [17]).

В аффинном пространстве поверхности одного и того же типа аффинно эквивалентны, а различных типов нет. Таким образом, *в аффинном пространстве имеется точно семнадцать типов аффинно не эквивалентных поверхностей второго порядка.*

Эта формулировка относится, конечно, к ситуации $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. Над полем $\mathbb{C}$ остается лишь десять типов поверхностей (эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы, два типа цилиндров и три типа плоскостей).

Мы не будем здесь доказывать эти утверждения, поскольку в следующем семестре докажем их обобщения на случай пространств любой размерности.

Лекция 25

Ортогональные и аффинные преобразования — Выражение аффинного преобразования в координатах. — Примеры аффинных преобразований — Разложение аффинных преобразований. — Ортогональные преобразования. — Движения плоскости. — Симметрии и скользящие симметрии

Из школьного курса мы знаем, какое большое значение в геометрии имеет понятие конгруэнтности фигур и тесно связанное с ним понятие движения.

Наглядно движение (скажем, плоскости) представляет собой преобразование, при котором «ничего существенного не меняется»: длины и углы сохраняются, сумма векторов переходит в сумму векторов, произведение вектора на число — в произведение вектора на число и т. д. С общей точки зрения это означает, что движение представляет собой изоморфизм евклидовой плоскости на себя, т. е. ее *автоморфизм*. Точнее, поскольку движение сохраняет также и ориентацию оно является автоморфизмом ориентированной плоскости. Но мы знаем (см. лекцию 13), что изоморфизм $\mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ одного евклидова пространства на другое (или на то же самое) пространство осуществляется по равенству координат в двух системах прямоугольных координат, т. е., чтобы его задать, нужно выбрать в пространстве $\mathscr{A}$ прямоугольную координатную систему $O\boldsymbol{i}_1\ldots$ $\ldots\boldsymbol{i}_n$, в пространстве $\mathscr{A}'$ — прямоугольную координатную систему $O'\boldsymbol{i}_1'\ldots\boldsymbol{i}_n'$ и сопоставить произвольной точке $A\in\mathscr{A}$ точку $A'\in\mathscr{A}'$, имеющую в системе $O'\boldsymbol{i}_1'\ldots\boldsymbol{i}_n'$ те же координаты, которые имеет точка A в системе $O\boldsymbol{i}_1\ldots\boldsymbol{i}_n$. Поскольку все это применимо и к интересующему нас сейчас случаю $\mathscr{A}'=\mathscr{A}$ и поскольку движение должно сохранять ориентацию, мы приходим тем самым к следующему формальному определению (которое мы сформулируем сразу же для любого n, хотя нужно оно будет нам лишь при $n=2$ и $n=3$):

Определение 1. *Движением* евклидова n-мерного пространства $\mathscr{A}$ называется произвольное его преобразование по равенству координат в двух одноименных системах прямоугольных координат. Это означает, что любое движение однозначно определяется двумя такими системами

$O\boldsymbol{i}_1 \ldots \boldsymbol{i}_n$ и $O'\boldsymbol{i}'_1 \ldots \boldsymbol{i}'_n$ (причем первую из них можно задать произвольно) и переводит каждую точку A в точку A', имеющую в системе $O'\boldsymbol{i}'_1 \ldots \boldsymbol{i}'_n$ те же координаты, которые имела точка A в системе $O\boldsymbol{i}_1 \ldots \boldsymbol{i}_n$.

Таким образом, если

$$\overrightarrow{OA} = a_1\boldsymbol{i}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{i}_n,$$

то

$$\overrightarrow{O'A'} = a_1\boldsymbol{i}'_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{i}'_n.$$

Ясно, что все движения пространства $\mathscr{A}$ образуют группу. С точностью до изоморфизма эта группа зависит только от размерности n. Мы будем ее обозначать символом $\mathrm{Ort}^+(n)$.

Если в определении 1 снять требование одноименности, то получатся более общие преобразования. Они называются *ортогональными преобразованиями*. Эти преобразования образуют группу $\mathrm{Ort}\,(n)$, подгруппой которой является группа движений $\mathrm{Ort}^+(n)$.

Аналогичным образом вводятся автоморфизмы аффинных пространств. Они называются *аффинными преобразованиями* и представляют собой преобразования, действующие по равенству координат в двух аффинных координатных системах.

Если эти координатные системы отличаются только началами O и O', то соответствующее аффинное преобразование называется *параллельным переносом* (или *трансляцией*). Оно однозначно определяется вектором $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OO'}$, называемым *вектором переноса*, и произвольную точку M переводит в такую точку M', что

$$\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{b}.$$

(Действительно, по определению $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$ и, значит, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{b}$.)

Все параллельные переносы (трансляции) аффинного пространства $\mathscr{A}$ составляют группу $\mathrm{Trans}(n)$, и соответствие

$$\text{трансляция} \Rightarrow \text{вектор } \boldsymbol{b}$$

является изоморфизмом этой группы на ассоциированный линеал $\mathscr{V}$ (рассматриваемый как группа)

[В силу этого изоморфизма векторы пространства $\mathscr{V}$ можно отождествлять с трансляциями пространства $\mathscr{A}$.

Это объясняет термин «пространство трансляций»; см. лекцию 4.]

В евклидовом пространстве параллельные переносы являются ортогональными преобразованиями.

В евклидовой геометрии конгруэнтные фигуры, т. е. переводимые друг в друга некоторым движением (или, более общо, — некоторым ортогональным преобразованием), считаются одинаковыми. Это определение равенства фигур характеризует евклидову геометрию

Аналогично, в аффинной геометрии считаются одинаковыми фигуры *аффинно конгруэнтные* (или, как еще говорят, *аффинно эквивалентные*), т. е. переводимые друг в друга аффинным преобразованием.

Заметим, что каждое аффинное (в частности, ортогональное) преобразование Ф очевидным образом порождает преобразование ассоциированного линеала (которое обозначается той же буквой Ф). Именно, если $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$ и $A' = Ф(A)$. $B' = Ф(B)$, то, по определению, $Ф\boldsymbol{x} = \overrightarrow{A'B'}$. (Вопрос: почему это определение корректно?)

Любой базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ каждое аффинное (или ортогональное) преобразование Ф переводит в базис $Ф\boldsymbol{e}_1, \ldots$ $\ldots, Ф\boldsymbol{e}_n$. Если базисы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $Ф\boldsymbol{e}_1, \ldots, Ф\boldsymbol{e}_n$ одноименны, то о преобразовании Ф говорят, что оно *сохраняет ориентацию*, а в противном случае — что это преобразование *обращает ориентацию*. (Легко проверить, что это определение корректно, т. е. свойство преобразования Ф сохранять или обращать ориентацию не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.)

Преобразование Ф аффинного (или евклидова) пространства тогда и только тогда является параллельным переносом, когда оно порождает тождественное преобразование ассоциированного линеала ($Ф\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$).

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — фиксированные аффинные координаты в аффинном пространстве $\mathcal{A}$. Тогда любое аффинное преобразование Ф пространства $\mathcal{A}$, являясь преобразованием по равенству координат, будет определять некоторые другие аффинные координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ и, обратно, любые аффинные координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ будут задавать некоторое аффинное преобразование Ф.

По определению для любой точки $A \in \mathcal{A}$ «штрихованные» координаты точки $A' = Ф(A)$ совпадают с «нештрихованными» координатами точки A:

$$x^{1'} = x^1, \ \ldots, \ x^{n'} = x^n.$$

Но, по правилу преобразования аффинных координат, «нештрихованные» координаты точки A' (обозначим их символами $y^1, \ldots, y^n$) выражаются через ее «штрихованные» координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ по формулам вида:

$$\begin{gathered} y^1 = c_1^1 x^{1'} + \ldots + c_n^1 x^{n'} + b^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n = c_1^n x^{1'} + \ldots + c_n^n x^{n'} + b^n, \end{gathered}$$

где определитель матрицы $\| c_i^j \|$ отличен от нуля. Заменив здесь координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ точки A' равными им координатами $x^1, \ldots, x^n$ точки A, мы получим, что

$$\begin{gathered} y^1 = c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n + b^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n = c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n + b^n, \end{gathered} \tag{1}$$

или, в матричной записи, что

$$y = Cx + b, \tag{2}$$

где x, y, b — столбцы, состоящие из чисел $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$ и $b^1, \ldots, b^n$, а

$$C = \begin{Vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_1^n & \ldots & c_n^n \end{Vmatrix}.$$

Тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *В заданных в пространстве $\mathscr{A}$ аффинных координатах любое аффинное преобразование Φ однозначно определяется некоторой невырожденной матрицей C и матрицей-столбцом b. Это преобразование переводит точку A с координатами $x^1, \ldots, x^n$ в точку A' с координатами $y^1, \ldots, y^n$, выражающимися формулами* (1) *или* (2). □

Матрица C называется обычно *матрицей преобразования* Φ (в данной координатной системе $Oe_1 \ldots e_n$). Ее столбцы состоят из координат (в базисе $e_1, \ldots, e_n$) векторов $\Phi e_1, \ldots, \Phi e_n$ (так что $\Phi e_i = c_i^j e_j$).

Преобразование Φ тогда и только тогда сохраняет ориентацию, когда определитель матрицы C положителен:

$$\det C > 0.$$

Если Φ — преобразование $y = Cx + b$, а Ψ — преобразование $y = Dx + c$, то составное преобразование (композиция) $\Psi \circ \Phi$ будет выражаться формулой

$$y = D(Cx + b) + c = DCx + (Db + c).$$

Обозначив аффинное преобразование (2) символом (C, b), мы можем этот результат записать в виде следующей легко запоминаемой формулы:

$$(D, c) \circ (C, b) = (DC, Db + c).$$

В частности, мы видим, что *при компонировании аффинных преобразований их матрицы перемножаются*, т. е. соответствие

(3) $$\text{преобразование} \Rightarrow \text{матрица}$$

является гомоморфизмом группы аффинных преобразований на группу всех невырожденных матриц порядка n.

Ясно, что преобразование Φ тогда и только тогда является параллельным переносом, когда его матрица C является единичной матрицей E. (На языке теории групп это означает, что параллельные переносы составляют ядро гомоморфизма (3).) Таким образом, для параллельного переноса формула (2) имеет вид

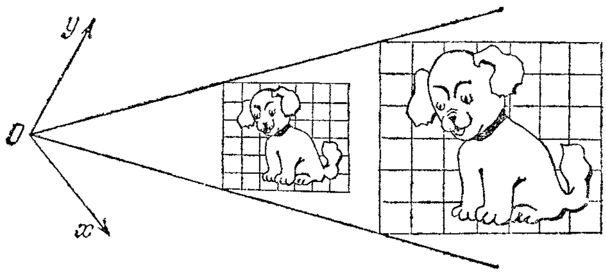
$$y = x + b.$$

Ясно, что здесь b — это столбец координат вектора переноса $\boldsymbol{b}$.

Обратим внимание, что формулы (1) идентичны формулам преобразования аффинных координат. Они являются формулами аффинного преобразования, когда $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ представляют собой координаты различных точек в одной и той же системе координат, и формулами преобразования координат, когда $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ представляют собой координаты одной и той же точки в различных системах координат.

Замечание 1. Каждое аффинное преобразование любую прямую переводит в прямую. Можно доказать (мы этого делать не будем), что при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $n > 1$ верно и обратное: *каждое биективное преобразование аффинного пространства, сохраняющее прямолинейное расположение точек, является аффинным преобразованием*. Ограничение $n > 1$ вызвано, конечно, тем, что при $n = 1$ условие сохранения прямолинейности бессодержательно. Ограничение же $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ оказывается существенным. Например, в комплексном случае преобразование, переводящее каждую точку в точку с комплексно-сопряженными координатами, не является аффинным (оно не имеет вида (1)), хотя и сохраняет прямолинейное расположение точек. Дело здесь в том, что поле $\mathbb{C}$ имеет нетождественный автоморфизм (комплексное сопряжение), а в поле $\mathbb{R}$ таких автоморфизмов нет.

Примеры аффинных преобразований. Конечно, любое ортогональное преобразование евклидова пространства является его аффинным преобразова-



Гомотетия

нием. Мы приведем (ограничиваясь случаем евклидовой плоскости) менее тривиальные примеры.

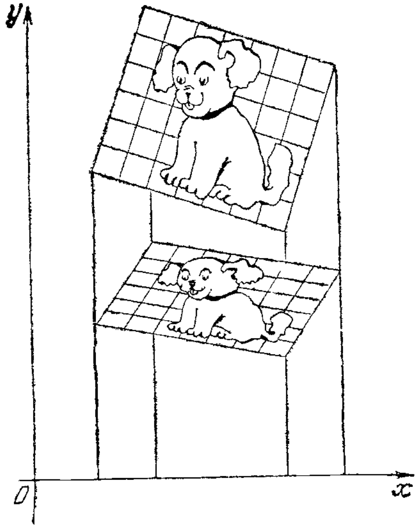
1) Каждая гомотетия представляет собой аффинное преобразование. Ее матрица является (в любой системе аффинных координат с началом в центре гомотетии) диагональной матрицей с равными диагональными элементами, т. е. имеет вид kE, где E — единичная матрица. (Как известно, такие матрицы называются *скалярными*.)

2) Аффинное преобразование плоскости, задаваемое в координатах x, y формулами

$$x_1 = x, \quad y_1 = ky,$$

где $k > 0$, называется *сжатием* к оси абсцисс. Комбинация двух сжатий, к оси абсцисс и к оси ординат, задается формулами

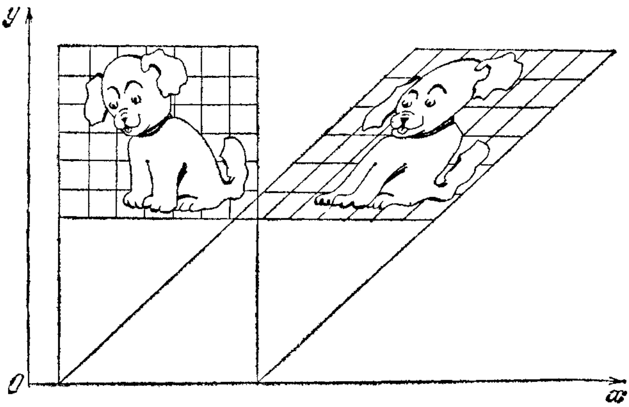
$$x_1 = kx, \quad y_1 = ly,$$



Сжатие

где $k > 0$, $l > 0$. Ее матрицей является диагональная матрица с положительными диагональными элементами k и l.

Ясно, что любой эллипс можно сжатиями и движениями перевести в любой другой эллипс, например в окружность. Таким образом, *все эллипсы аффинно конгруэнтны*. Аналогично, *аффинно конгруэнтны и все гиперболы, и все параболы* (последние даже гомотетичны, — конечно, при соответствующем расположении). Аналитически это выражается в том, что для эллипсов, гипербол и парабол имеется только одно аффинно каноническое уравнение.



Сдвиг

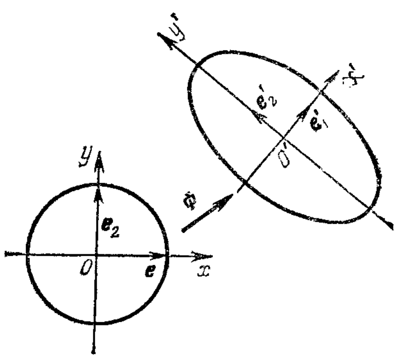
3) Аффинное преобразование, задаваемое формулами

$$x_1 = x + py, \quad y_1 = y,$$

где p — произвольное число, называется *сдвигом*. Оно обладает тем свойством, что сохраняет площади фигур.

Замечательно, что на евклидовой плоскости любой сдвиг можно разложить в композицию (произведение) ортогонального преобразования (движения) и двух сжатий к взаимно перпендикулярным осям. Более того, это верно для любого аффинного преобразования:

Предложение 1. *На евклидовой плоскости любое аффинное преобразование* Φ *является композицией ортогонального преобразования и двух сжатий к взаимно перпендикулярным осям.*

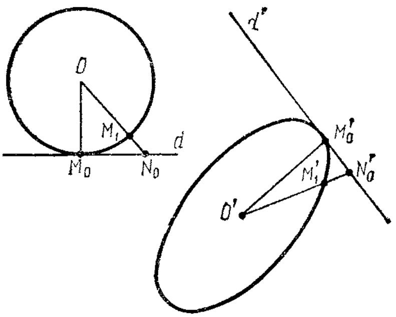


Доказательство. Рассмотрим на плоскости произвольную окружность радиуса 1. Аффинное преобразование Φ переводит эту окружность в некоторый эллипс, а ее центр O — в центр O' эллипса (почему?). Пусть $O'E'_1$ и $O'E'_2$ — прямые, проходящие через точку O' по главным направлениям эллипса (его *главные диаметры*), и пусть e'_1 и e'_2 — их направляющие орты (векторы длины 1), составляющие, следовательно, ортонормированный базис. Предполагая, что E'_1 и E'_2 являются точками пересечения эллипса с прямыми $O'E'_1$ и $O'E'_2$, рассмотрим их прообразы E_1 и E_2 при отображении Φ. Тогда векторы $e_1 = \overrightarrow{OE_1}$ и $e_2 = \overrightarrow{OE_2}$ будут ортами, а прямые OE_1 и OE_2 — диаметрами окружности. Так как аффинное преобразование сопряженные диаметры переводит, как легко видеть, в сопряженные диаметры, а диаметры $O'E'_1$ и $O'E'_2$, будучи главными, сопряжены, то диаметры окружности OE_1 и OE_2 сопряжены. Поскольку сопряженные диаметры окружности перпендикулярны, этим доказано, что базис e_1, e_2 ортонормирован.

Итак, мы построили две прямоугольные координатные системы Oe_1e_2 и $O'e'_1e'_2$, обладающие тем свойством, что аффинное преобразование Φ переводит координатные оси первой системы в координатные оси второй системы.

Для завершения доказательства остается заметить, что ортогональное преобразование по равенству этих прямоугольных координат отличается, очевидно, от преобразования Ф только двумя сжатиями к прямым $O'E_2'$ и $O'E_1'$ (с коэффициентами k и l, равными, соответственно, длинам векторов $\overrightarrow{O'E_1'}$ и $\overrightarrow{O'E_2'}$). □

Ключевым пунктом этого доказательства является установление того факта, что на плоскости существуют два перпендикулярных направления, которые преобразование Ф переводит в перпендикулярные направления. Оказывается, что это можно легко доказать и не обращаясь к теории линий второго порядка, если воспользоваться (применительно к функциям на окружности) известной из анализа *теоремой Вейерштрасса* о том, что на компактном множестве непрерывная функция достигает своего наименьшего значения.



Рассмотрим с этой целью ту же окружность радиуса 1 с центром в точке O. Обозначив для любой ее точки M через $f(M)$ расстояние преобразованной точки $M' = \Phi(M)$ от точки O', мы получим на этой окружности, очевидно непрерывную, функцию $f: M \mapsto f(M)$. Пусть M_0 — точка, в которой эта функция принимает наименьшее значение. Оказывается, что прямую OM_0 и перпендикулярную ей в точке M_0 прямую d (касательную к окружности) преобразование Ф переводит в перпендикулярные прямые $O'M_0'$ и d'. Действительно, если это не так и точка M_0' отлична от основания N_0' перпендикуляра, опущенного из точки O' на прямую d' (и потому $|O'N_0'| < |O'M_0'| = f(M_0)$), то для точки M_1, в которой прямая ON_0, $N_0 = \Phi^{-1}(N_0')$, пересекает нашу окружность, будет (ввиду того, что точка M_1 расположена на отрезке $\overline{ON_0}$ и, значит, точка $M_1' = f(M_1)$ — на отрезке $\overline{O'N_0'}$) иметь место противоречащее выбору точки M_0 неравенство

$$f(M_1) = |O'M_1'| < |O'N_0'| < f(M_0). \quad \square$$

Это рассуждение без труда обобщается на любое число измерений (получается, конечно, не два перпендикулярных направления, а n таких направлений). Поэтому предложение 1 справедливо (с соответствующими изменениями) для аффинных преобразований евклидова пространства произвольной размерности.

Предложение 1, по существу, полностью сводит теорию произвольных аффинных преобразований к теории ортогональных преобразований. Займемся поэтому более подробно ортогональными преобразованиями (и, в частности, движениями). Все координаты будем предполагать прямоугольными.

Будучи частным случаем аффинных преобразований, ортогональные преобразования записываются в том же виде (2):

$$y = Cx + b, \tag{4}$$

но только матрица C будет для них не произвольной невырожденной матрицей, а (в прямоугольных координатах) произвольной ортогональной (см. лекцию 13) матрицей.

Преобразование (4) тогда и только тогда является движением, когда матрица C является собственной ортогональной матрицей (имеет определитель 1). На этом основании движения называются также *собственными ортогональными преобразованиями.*

Соответствие (3) для ортогональных преобразований (или движений) является гомоморфизмом группы $\mathrm{Ort}\,(n)$ (группы $\mathrm{Ort}^+(n)$) на группу $\mathrm{O}\,(n)$ ортогональных матриц (на группу $\mathrm{SO}\,(n)$ собственных ортогональных матриц). Ядро этого гомоморфизма состоит из преобразований (4), для которых $C = E$, т. е. из параллельных переносов

$$y = x + b. \tag{5}$$

Точка M называется *неподвижной точкой* преобразования Φ, если $\Phi\,(M) = M$, т. е. если Φ точку M оставляет на месте.

Из формулы (5), в частности, следует, что *при* $b \neq 0$ *параллельный перенос* (5) *неподвижных точек не имеет.*

Движения, оставляющие на месте некоторую точку O, называются *вращениями с центром* в O. Они составляют группу, обозначаемую символом $\mathrm{Rot}_O\,(n)$.

Легко видеть, что *при гомоморфизме* (3) *группа* $\mathrm{Rot}_O\,(n)$ *изоморфно отображается на группу* $\mathrm{SO}\,(n)$. [Действительно, этот гомоморфизм не зависит, очевидно, от выбора начала координат (от этого выбора в формуле (2) зависит только столбец b). С другой стороны, если начало координат выбрано в точке O, то для элементов группы $\mathrm{Rot}_O(n)$ столбец b в формуле (4) равен нулю, и, следовательно, эта формула приобретает вид

$$y = Cx,$$

делающий утверждение об изоморфности отображения (3) на группе $\mathrm{Rot}_O(n)$ очевидным.]

К параллельным переносам и вращениям сводится (при каждом n) произвольное движение. Действительно, *любое движение* (4) *является композицией вращения* $y = Cx$ *и переноса* $y = x + b$ (а также переноса $y = x + C^{-1}b$ и того же вращения $y = Cx$).

Собственные ортогональные матрицы при $n = 2$ были описаны в лекции 13. Из этого описания вытекает, что вращения плоскости с центром в начале координат имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned} \tag{6}$$

где α — некоторый угол, при условии $-\pi < \alpha \leqslant \pi$ единственным образом определенный. Этот угол называется *углом вращения*.

Вектор $\boldsymbol{a}$ с координатами x, y вращение (6) переводит в вектор $\boldsymbol{a}'$ с координатами x', y'. Поэтому

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}' = xx' + yy' &= \\ &= x(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + y(x\sin\alpha + y\cos\alpha) = \\ &= (x^2 + y^2)\cos\alpha = \boldsymbol{a}^2\cos\alpha \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}'^2 &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 = \\ &= (x^2 + y^2)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 + y^2 = \boldsymbol{a}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}' = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}'|\cos\alpha,$$

т. е. α является углом между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$. Этот факт выражают, говоря, что вращение (6) *поворачивает* все векторы на угол α. Говорят также, что α является *углом поворота*.

Для определенности мы всегда будем предполагать, что угол α от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{a}'$ измеряется против часовой стрелки.

Замечательно, что на плоскости вращениями (с произвольным центром) и параллельными переносами исчерпываются все движения:

Предложение 2. *Любое движение плоскости является либо параллельным переносом, либо вращением. Иначе говоря, группа* $\mathrm{Ort}^+(2)$ *является объединением группы* $\mathrm{Trans}(2)$ *и всевозможных групп* $\mathrm{Rot}_O(2)$:

$$\mathrm{Ort}^+(2) = \mathrm{Trans}(2) \cup \bigcup_O \mathrm{Rot}_O(2).$$

Доказательство. Из того, что любое вращение плоскости имеет вид (6) непосредственно следует, что в произвольных прямоугольных координатах x, y каждое движение плоскости записывается формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + b_1, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b_2. \end{aligned} \tag{7}$$

При $\alpha = 0$ оно является параллельным переносом. Покажем, что при $\alpha \neq 0$ движение (7) обязательно имеет неподвижную точку и потому представляет собой вращение.

Условие, что точка $M_0(x_0, y_0)$ остается при движении (7) на месте, состоит в выполнении двух равенств:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha + b_1, \\ y_0 &= x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha + b_2, \end{aligned}$$

т. е. равенств

$$\begin{aligned} (1-\cos\alpha)\,x_0 + (\sin\alpha)\,y_0 &= b_1, \\ (-\sin\alpha)\,x_0 + (1-\cos\alpha)\,y_0 &= b_2. \end{aligned}$$

Так как эти равенства представляют собой систему линейных неоднородных уравнений от x_0, y_0 с определителем

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha),$$

отличным от нуля при $\alpha \neq 0$, то неподвижная точка M_0 существует (и единственна). □

Из единственности неподвижной точки M_0, в частности, следует, что движение плоскости, не являющееся тождественным преобразованием, не может оставлять на месте более одной точки. Для ортогональных преобразований, не сохраняющих ориентацию, это уже не так.

Пусть l — произвольная прямая на плоскости. Напомним, что *симметрией относительно прямой* l называется преобразование S плоскости, оставляющее все точки прямой l на месте и переводящее любую другую точку M в такую точку M', что

а) прямая MM' перпендикулярна прямой l;

б) точки M и M' находятся на одном и том же расстоянии от прямой l по разные ее стороны.

Ясно, что эти условия однозначно характеризуют точку M'.

Прямая l называется *осью* симметрии S.

В прямоугольных координатах x, y, ось ординат Oy которых является прямой l, симметрия S записывается формулами

$$x' = -x, \quad y' = y. \tag{8}$$

(Действительно, по отношению к прямой Oy преобразование (8) обладает свойствами а) и б).) Поскольку матрицей преобразования (8) является несобственная ортогональная матрица

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

каждая симметрия относительно прямой является обращающим ориентацию ортогональным преобразованием плоскости.

По построению, это преобразование имеет прямую неподвижных точек. И обратно, оказывается, что *любое нетождественное ортогональное преобразование S плоскости, обладающее прямой неподвижных точек, является симметрией относительно этой прямой* (и потому, в частности, никаких других неподвижных точек не имеет). Действительно, пусть прямая неподвижных точек преобразования S является осью ординат Oy системы прямоугольных координат x, y и пусть в этих координатах преобразование S записывается формулами

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + b_1,$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + b_2.$$

Так как любая точка $(0, y)$ оси Oy является, по условию, неподвижной точкой преобразования S, то тождественно по y должны иметь место равенства

$$0 = c_{12}y + b_1,$$
$$y = c_{22}y + b_2,$$

что возможно только тогда, когда

$$\begin{Vmatrix} c_{12} & b_1 \\ c_{22} & b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Поэтому, в силу ортогональности матрицы

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix},$$

должны иметь место равенства $c_{21} = 0$ и $c_{11} = \pm 1$. Так как при $c_{11} = 1$ получается тождественное преобразование, то для нетождественного преобразования S необходимо $c_{11} = -1$. Это означает, что преобразование S записывается формулами (8) и, значит, является симметрией с осью Oy. □

Ясно (например, из формул (8)), что *каждая симметрия S является инволютивным преобразованием*, т. е. ее квадрат $S \circ S$ представляет собой тождественное преобразование.

Для произвольного обращающего ориентацию ортогонального преобразования Φ и произвольной симметрии S композиция $S \circ \Phi$ сохраняет ориентацию, т. е. является движением. Поскольку $\Phi = S \circ (S \circ \Phi)$, этим доказано, что *любое обращающее ориентацию ортогональное преобразование Φ является композицией движения и произвольной симметрии S* (которую можно выбрать одной и той же для всех Φ).

Несобственное ортогональное преобразование плоскости называется *скользящей симметрией*, если оно разлагается в композицию симметрии и параллельного переноса вдоль ее оси. В прямоугольных координатах x, y, для которых ось ординат является осью этой симметрии, произвольная скользящая симметрия выражается формулами

$$x' = -x,$$

$$y' = y + a,$$

откуда, в частности, непосредственно вытекает, что *при* $a \neq 0$ *скользящая симметрия неподвижных точек не имеет.*

Неподвижные точки нетождественных ортогональных преобразований плоскости

Тип преобразования	0 неподвижных точек	1 неподвижная точка	Прямая неподвижных точек
Собственное	параллельные переносы	вращения	—
Несобственное	скользящая симметрия с $a \neq 0$	—	симметрии

Прочерк означает, что соответствующих преобразований нет.

Согласно предложению 2 верхняя строка этой таблицы исчерпывает все собственные ортогональные преобразования плоскости. Оказывается, что аналогичное утверждение справедливо и по отношению к нижней строке:

Предложение 3. *Любое обращающее ориентацию ортогональное преобразование плоскости является скользящей симметрией.*

Доказательство. Из полученного в лекции 13 описания несобственных ортогональных матриц непосредственно вытекает, что любое обращающее ориентацию ортогональное преобразование плоскости выражается в произвольной системе прямоугольных координат x, y формулами

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + b_1, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + b_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Покажем, что существуют такие числа l, m, что если T — параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{a}(l, m)$, то преобразование $S = T^{-1} \circ \Phi$ представляет собой симметрию, ось которой параллельна вектору $\boldsymbol{a}$. Ясно, что этим предложение будет доказано, поскольку преобразование $\Phi = T \circ S$ будет тогда скользящей симметрией.

Для любых l и m преобразование $S = T^{-1} \circ \Phi$ задается, очевидно, формулами

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + b_1 - l,$$

$$y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha + b_2 - m.$$

Следовательно, его неподвижные точки определяются из уравнений

$$\begin{aligned} x(1 - \cos \alpha) - y \sin \alpha &= b_1 - l, \\ -x \sin \alpha + y(1 + \cos \alpha) &= b_2 - m. \end{aligned} \tag{10}$$

Задача состоит в том, чтобы подобрать l и m так, чтобы, во-первых, эти уравнения определяли прямую (тогда S будет нетождественным — поскольку оно обращает ориентацию — ортогональным преобразованием, обладающим прямой неподвижных точек, т. е. будет симметрией). Иными словами, числа l и m нужно подобрать так, чтобы уравнения (10) были пропорциональны:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{b_1 - l}{b_2 - m}.$$

Условие

$$\frac{1 - \cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

удовлетворяется тождественно, а условие

$$\frac{-\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{b_1 - l}{b_2 - m}$$

дает для l и m уравнение

$$(b_2 - m)\lambda + (b_1 - l) = 0,$$

где для сокращения формул введено обозначение

$$\lambda = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

И, во-вторых, мы должны потребовать, чтобы полученная прямая была параллельна вектору $\boldsymbol{a}(l, m)$, т. е. чтобы имело место равенство

$$\frac{l}{m} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, для l и m мы получаем два уравнения:

$$l + m\lambda = b_2\lambda + b_1, \quad \lambda l - m = 0. \tag{11}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что уравнения (11) имеют единственное решение

$$l = \frac{b_2\lambda + b_1}{1+\lambda^2}, \quad m = \lambda\frac{b_2\lambda + b_1}{1+\lambda^2}. \quad \square$$

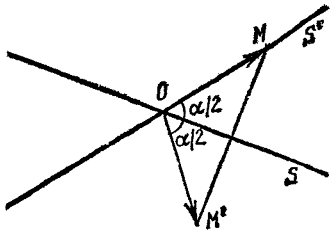
Лекция 26

Разложение движения плоскости в композицию двух симметрий. — Центр композиции двух вращений плоскости. — Вращения пространства. — Углы Эйлера. — Винтовые движения.

Так как скользящая симметрия с $a \neq 0$ не оставляет неподвижной ни одной точки, то обращающее ориентацию ортогональное преобразование, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, является симметрией (и потому оставляет на месте целую прямую). Но для любого вращения Φ его композиция $S' = S \circ \Phi$ с симметрией S, ось которой проходит через центр вращения, является, очевидно, такого рода преобразованием и потому представляет собой симметрию. Поскольку

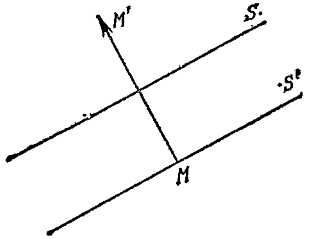
$$S \circ S' = S \circ (S \circ \Phi) = (S \circ S) \circ \Phi = \Phi,$$

этим доказано, что *любое вращение плоскости является композицией двух симметрий, оси которых проходят через центр вращения.* При этом одну симметрию можно выбрать произвольно (лишь бы ее ось проходила через центр вращения). Другая симметрия будет тогда однозначно определена.



Обратно, пусть S и S' — две симметрии, оси которых пересекаются в точке O. Тогда композиция $S \circ S'$ будет собственным ортогональным преобразованием, оставляющим на месте точку O, т. е. будет вращением с центром O. Каждый вектор $\overrightarrow{OM}$ это вращение поворачивает на один и тот же угол α. Чтобы найти этот угол, достаточно поэтому найти его лишь для одной, произвольно выбранной точки $M \neq O$. Имея это в виду, мы выберем точку M на оси симметрии S'. Тогда вращение $S \circ S'$ будет переводить эту точку в точку $M' = S(M)$ и ось симметрии S будет высотой, а значит, и биссектрисой равнобедренного треугольника OMM'. Поэтому угол α между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ будет равен удвоенному углу между осями симметрий S и S'. Таким образом, *композиция двух симметрий с пересекающимися осями представляет собой вращение, центром которого служит точка пересечения осей, а углом — удвоенный угол между этими осями.* Направление этого вращения — от оси первой симметрии к оси второй.

В случае, когда оси симметрий S и S' не пересекаются (параллельны), движение $S \circ S'$ не имеет, очевидно, неподвижных точек, т. е. является параллельным переносом. Чтобы найти вектор этого переноса, рассмотрим снова произвольную точку M на оси симметрии S'. Тогда ясно, что вектор переноса $\overrightarrow{MM'}$ будет ортогонален осям симметрий S' и S, а его длина будет равна удвоенному расстоянию между этими осями. Таким образом, *композиция двух симметрий с параллельными осями представляет собой параллельный перенос на вектор, ортогональный осям, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями* (и который направлен от оси первой симметрии к оси второй).



Обратно, для любого параллельного переноса его композиция с симметрией, ось которой перпендикулярна вектору этого переноса, является обращающим ориентацию ортогональным преобразованием, обладающим неподвижной прямой, т. е. симметрией. Например, если перенос происходит вдоль оси абсцисс, т. е. имеет вид

$$x' = x + a,$$
$$y' = y,$$

то его композиция

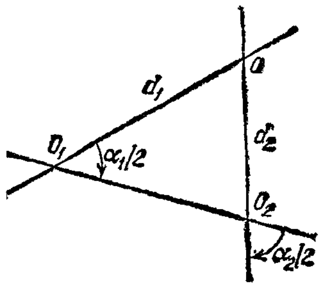
$$x' = -x + a,$$
$$y' = y$$

с симметрией относительно оси ординат имеет неподвижную прямую $x = a/2$. Этим доказано, что *любой параллельный перенос плоскости является композицией двух симметрий с параллельными осями.* Эти оси ортогональны вектору переноса $\boldsymbol{a}$, и одну из них можно выбрать как угодно (конечно, среди прямых, ортогональных вектору $\boldsymbol{a}$).

В частности, мы видим, что *любое движение плоскости может быть разложено в композицию двух симметрий.*

Для несобственных ортогональных преобразований (скользящих симметрий) отсюда вытекает, что *любое такое преобразование является композицией трех симметрий* (если только, конечно, оно само не является симметрией). Эти симметрии можно выбрать так, чтобы оси двух из них были параллельны, а ось третьей симметрии была бы им перпендикулярна.

Пользуясь разложениями вращений на симметрии, можно для любых двух вращений Φ_1 и Φ_2, композиция $\Phi_2 \circ \Phi_1$ которых является вращением, дать элегантное геометрическое построение центра вращения $\Phi_2 \circ \Phi_1$.



Пусть O_1 и O_2 — центры вращений Φ_1 и Φ_2, а α_1 и α_2 — их углы. Предполагая, что $O_1 \neq O_2$ (в противном случае проблемы нет), рассмотрим прямую O_1O_2. Пусть d_1 и d_2 — такие прямые, проходящие через точки O_1 и O_2 соответственно, что угол от прямой d_1 до прямой O_1O_2 равен $\alpha_1/2$, а угол от прямой O_1O_2 до прямой d_2 равен $\alpha_2/2$ (обратите внимание на совпадение направлений отсчета углов!). Тогда *точка O пересечения прямых d_1 и d_2 будет центром вращения $\Phi_2 \circ \Phi_1$.*

Действительно, если S, S_1 и S_2 — симметрии с осями O_1O_2, d_1 и d_2 соответственно, то, согласно сказанному выше, для вращений Φ_1 и Φ_2 имеют место формулы

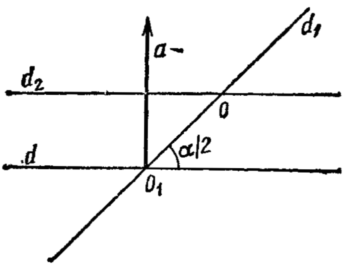
$$\Phi_1 = S \circ S_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = S_2 \circ S.$$

Поэтому $\Phi_2 \circ \Phi_1 = S_2 \circ S_1$, что и доказывает утверждение. □

Заметим, что угол от d_1 к d_2 равен $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Следовательно, угол вращения $\Phi_2 \circ \Phi_1$ равен $\alpha_1 + \alpha_2$. Таким образом, *при композиции вращений их углы складываются* (безотносительно к тому, совпадают или нет центры этих вращений).

В случае, когда прямые d_1 и d_2 параллельны (что будет при $\alpha_2 = -\alpha_1$), композиция $\Phi_2 \circ \Phi_1$ будет параллельным переносом на вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Легко находится центр вращения $\Phi_2 \circ \Phi_1$ и в случае, когда одно из движений Φ_1 или Φ_2 является параллельным переносом. Пусть, например, Φ_1 является вращением с центром O_1 на угол α, а Φ_2 — параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$. Пусть, далее, d_1 — прямая, проходящая через точку O_1 и образующая с вектором $\boldsymbol{a}$ угол $\frac{\pi-\alpha}{2}$, а d_2 — прямая, ортогональная вектору $\boldsymbol{a}$ и находящаяся от точки O_1 на расстоянии $|\boldsymbol{a}|/2$. Тогда композиция $\Phi_2 \circ \Phi_1$ будет вращением на угол α вокруг точки O пересечения прямых d_1 и d_2. Действительно, в этом случае $\Phi_1 = S \circ S_1$ и $\Phi_2 = S_2 \circ S$, и, значит, $\Phi_2 \circ \Phi_1 = S_2 \circ S_1$, где S_1 и S_2, как и раньше, — симметрии с осями d_1 и d_2, а S — симметрия с осью d, проходящей через точку O_1 ортогонально вектору $\boldsymbol{a}$.



Аналогично можно поступать и в случае, когда одно (или оба) из данных преобразований является скользящей симметрией. Разбор всех возникающих здесь случаев мы предоставим читателю.

Напомним, что для любой точки O пространства группа $\mathrm{Rot}_O(3)$ всех вращений с центром O изоморфна группе SO (3) собственных ортогональных матриц порядка 3. Однако в отличие от случая плоскости это мало что дает, поскольку строение группы SO (3) нам пока неизвестно. Напротив, одной из наших основных целей и будет изучение этой группы.

Пусть l — произвольная ориентированная прямая в пространстве и пусть $Oijk$ — система прямоугольных координат x, y, z (как всегда, правая), для которой прямая l является осью абсцисс Oi (и, значит, векторы $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ ей ортогональны).

Рассмотрим преобразование Φ пространства, оставляющее на месте все точки прямой l и в каждой плоскости, перпендикулярной этой прямой, являющееся вращением против часовой стрелки, — если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{i}$ — на один и тот же угол α. В координатах x, y, z это преобразование записывается, очевидно, формулами

$$
\begin{aligned}
x' &= x,\\
y' &= y\cos\alpha - z\sin\alpha, \qquad (1)\\
z' &= y\sin\alpha + z\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

где $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, и, значит, является собственным ортогональным преобразованием, оставляющим на месте точку O, т. е. вращением с центром O. Матрица этого вращения имеет вид

$$
\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}, \qquad (2)
$$

т. е. является «окаймленной» матрицей из SO (2).

Определение 1. Преобразование (1) называется *вращением на угол α с осью l* (или *вокруг оси l*).

Множество $\mathrm{Rot}_l(3)$ всех вращений с осью l является, очевидно, группой, изоморфной группе SO (2). Для любой точки O прямой l эта группа содержится в группе $\mathrm{Rot}_O(3)$ (является ее подгруппой).

При изменении ориентации прямой l группа $\mathrm{Rot}_l(3)$, очевидно, не меняется (лишь угол каждого вращения сменит знак).

Предложение 1. *Любое вращение пространства Φ имеет ось, т. е. принадлежит некоторой группе $\mathrm{Rot}_l(3)$, где l — прямая, проходящая через центр вращения Φ. Иначе говоря, группа $\mathrm{Rot}_O(3)$ является объединением всевозможных групп $\mathrm{Rot}_l(3)$:*

$$
\mathrm{Rot}_O(3) = \bigcup_{O\in l} \mathrm{Rot}_l(3). \qquad (3)
$$

Мы выведем предложение 1 из одной леммы об аффинных преобразованиях.

Аффинное преобразование Φ называется *центроаффинным*, если оно оставляет на месте некоторую точку O. (Таким образом, каждое вращение является центроаффинным преобразованием.)

Замечание 1. Согласно общей формуле (2) лекции 25 каждое аффинное преобразование является композицией центроаффинного преобразования $y = Cx$ и параллельного переноса $y = x + b$.

Лемма 1. Для любого центроаффинного преобразования Φ *трехмерного пространства существует такая прямая* l, *проходящая через точку* O, *что*

а) *для каждой точки* M *прямой* l *точка* $M' = \Phi(M)$ *также принадлежит этой прямой (так что векторы* $\overrightarrow{OM}$ *и* $\overrightarrow{OM'}$ *коллинеарны и, значит, пропорциональны);*

б) *коэффициент пропорциональности между векторами* $\overrightarrow{OM}$ *и* $\overrightarrow{OM'}$ *не зависит от точки* M, *т. е. существует такое число* $\lambda \in \mathbb{R}$, *что*

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \tag{4}$$

для любой точки M *прямой* l.

Доказательство. В аффинных координатах x, y, z с началом в точке O центроаффинное преобразование Φ записывается формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z, \end{aligned}$$

а условие (4) — формулами

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x, \\ y' &= \lambda y, \\ z' &= \lambda z. \end{aligned}$$

Поэтому координаты x, y, z точек M, обладающих свойством (4), должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} (c_{11} - \lambda)\, x + c_{12}y + c_{13}z &= 0, \\ c_{21}x + (c_{22} - \lambda)\, y + c_{23}z &= 0, \\ c_{31}x + c_{32}y + (c_{33} - \lambda)\, z &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

которые, как известно из алгебры, тогда и только тогда имеют нетривиальное решение, когда

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Но последнее равенство является относительно λ кубическим уравнением, а известно, что любое уравнение нечетной степени с вещественными коэффициентами обязательно имеет вещественный корень. Это доказывает, что точки M, обладающие свойством (4), существуют, причем λ является корнем уравнения (6). Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — одна из этих точек, то ввиду однородности уравнений (5) любая точка $M(x, y, z)$, для которой

$$x = tx_0,$$
$$y = ty_0,$$
$$z = tz_0,$$

где $t \in \mathbb{R}$, т. е. любая точка прямой OM_0, также будет обладать свойством (4). Таким образом, за искомую прямую l мы можем принять прямую OM_0. $\square$

Замечание 2. Ясно, что эта лемма справедлива для центроаффинных преобразований любого нечетномерного аффинного пространства (над полем $\mathbb{R}$; для пространства над полем $\mathbb{C}$ никаких ограничений на размерность, конечно, не нужно).

Доказательство предложения 1. Применив лемму к вращению Φ, мы получим прямую l, для точек M которой имеет место равенство (4). Поэтому в координатной системе $Oljk$, осью Ol которой является прямая l, преобразование Φ будет иметь матрицу вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C'}} \\ 0 & & \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

где, ввиду ортогональности этого преобразования, $\lambda = \pm 1$, а C' — ортогональная матрица второго порядка (являющаяся матрицей ортогонального преобразования Φ' плоскости Ojk, индуцированного преобразованием Φ).

Если $\lambda = 1$, то $\det C' = 1$, и, значит, матрица (7) имеет вид (2). Следовательно, в этом случае преобразование Φ является вращением с осью l.

Если же $\lambda = -1$, то $\det C' = -1$, и, значит, Φ' представляет собой несобственное ортогональное преобразование. Имея неподвижную точку O, преобразование Φ' является поэтому симметрией. Приняв ось этой симметрии за ось Ok, мы приведем матрицу C' к виду $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.
Следовательно, при таком выборе координатной системы $Oljk$ матрица (7) будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и, значит, будет матрицей вращения вокруг оси Ok на угол π. Таким образом, преобразование Φ является вращением вокруг оси и при $\lambda = -1$. $\square$

Замечание 3. Для *несобственного* центроаффинного ортогонального преобразования аналогичное рассуждение показывает, что в соответствующей координатной системе $Oijk$ оно имеет матрицу вида

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C'}} \\ 0 & & \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где C' — *собственная* ортогональная матрица второго порядка. (Действительно, при $\lambda = -1$ — это просто матрица (7), а при $\lambda = 1$ получается матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

превращающаяся в матрицу (8) (с $C' = E$) после перестановки элементов базиса.)

Легко видеть, что в разложении (3) различные подгруппы Rot_l (3) пересекаются лишь по тождественному преобразованию, т. е. *вращение* Φ, *имеющее две различные оси* l_1 *и* l_2, *является тождественным преобразованием.* Действительно, в аффинной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ которой направлены по прямым l_1 и l_2 (а вектор $\boldsymbol{e}_3$ произволен), преобразование Φ задается матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{Vmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые числа (координаты вектора $\Phi\boldsymbol{e}_3$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$). При этом, если, дополнительно, вектор $\boldsymbol{e}_3$ (а, значит, и вектор $\Phi\boldsymbol{e}_3$) ортогонален векторам $\boldsymbol{e}_1 = \Phi\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2 = \Phi\boldsymbol{e}_2$, то $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$. Поэтому $\Phi\boldsymbol{e}_3 = c_3\boldsymbol{e}_3$, что возможно (поскольку Φ является собственным ортогональным преобразованием) только при $c_3 = 1$. Таким образом, в координатной системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ преобразование Φ задается единичной матрицей и, значит, является тождественным преобразованием. $\square$

Доказанное утверждение означает, что *ось любого вращения (на отличный от нуля угол* α*) определена единственным образом.*

Это позволяет каждому вращению Φ с центром O однозначно сопоставить точку A, лежащую на оси l вращения Φ и такую, что

а) при $\alpha > 0$ вектор $\overrightarrow{OA}$ определяет данную ориентацию прямой l, а при $\alpha < 0$ — противоположную;

б) длина вектора $\overrightarrow{OA}$ равна абсолютной величине $|\alpha|$ угла α вращения Φ.

Для вращения Φ с $\alpha = 0$ (являющегося тождественным преобразованием) точкой A является точка O.

В этом соответствии между элементами группы $\mathrm{Rot}_O(3)$ и точками шара радиуса π с центром в точке O вращениям на углы $\alpha \neq \pm \pi$ взаимно однозначно отвечают внутренние точки шара, а каждому вращению на угол π (или, что равносильно, — на угол $-\pi$) — две диаметрально противоположные точки его граничной сферы. Это устанавливает взаимно однозначное соответствие между группой $\mathrm{Rot}_O(3)$ и шаром, в котором отождествлены диаметрально противоположные точки его граничной сферы. В этом смысле такой шар является *моделью* группы $\mathrm{Rot}_O(3)$ (или группы $SO(3)$).

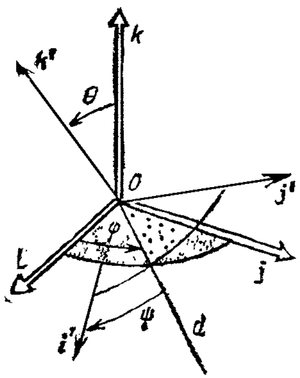
Это дает вполне удовлетворительное наглядное представление об устройстве группы $\mathrm{Rot}_O(3)$ (но, конечно, не о правилах перемножения ее элементов!).

Как мы уже знаем, если аффинные (в частности, ортогональные) преобразования Φ и Ψ n-мерного пространства имеют в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ матрицы $C = \|c_i^j\|$ и $D = \|d_i^j\|$ (т. е. если $\Phi\boldsymbol{e}_i = c_i^j\boldsymbol{e}_j$ и $\Psi\boldsymbol{e}_i = d_i^j\boldsymbol{e}_j$), то преобразование $\Psi \circ \Phi$ будет иметь в том же базисе матрицу $DC = \|d_k^j c_i^k\|$. Однако при вычислении последней матрицы иногда удобно рассматривать матрицу преобразования Ψ в базисе $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \Phi\boldsymbol{e}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}_n = \Phi\boldsymbol{e}_n$. Обозначая эту матрицу через $\hat{D}$, а ее элементы — через $\hat{d}_i^j$ (так что $\Psi\hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{d}_i^j\hat{\boldsymbol{e}}_j$), мы получим, что

$$(\Psi \circ \Phi)\boldsymbol{e}_i = \Psi\hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{d}_i^k\hat{\boldsymbol{e}}_k = \hat{d}_i^k(c_k^j\boldsymbol{e}_j) = (\hat{d}_i^k c_k^j)\boldsymbol{e}_j.$$

Поскольку числа $\hat{d}_i^k c_k^j$ являются элементами матрицы $C\hat{D}$, этим доказано, что *матрицей преобразования* $\Psi \circ \Phi$ (*в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$) *является матрица* $C\hat{D}$. (Иначе этот факт можно доказать, заметив, что матрица $\widehat{D}$ связана с матрицей D преобразования Ψ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ формулой $\widehat{D} = C^{-1}DC$ и, значит, — что $C\widehat{D} = DC$.)

Таким образом, при таком сопоставлении матриц преобразованиям композиции преобразований отвечает произведение матриц *в обратном порядке.*



Пусть теперь Ω — произвольное вращение с центром O и пусть $O\boldsymbol{ijk}$ — система прямоугольных координат с началом в точке O. Пусть, далее, $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$ — система прямоугольных координат, в которую вращение Ω переводит систему $O\boldsymbol{ijk}$ (т. е. такая, что вращение Ω является преобразованием по равенству координат в системах $O\boldsymbol{ijk}$ и $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$), и пусть θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, — угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$. Если $\boldsymbol{k}' \neq \pm\boldsymbol{k}$, то координатные плоскости $O\boldsymbol{ij}$ и $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ пересекаются по некоторой прямой d. Пусть $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор (орт) прямой d, направленный так, что если смотреть с его конца, то поворот на угол θ, совмещающий вектор $\boldsymbol{k}$ с вектором $\boldsymbol{k}'$, будет происходить в положительном направлении (против часовой стрелки), и пусть φ — принадлежащий интервалу $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ угол от вектора $\boldsymbol{i}$ к вектору $\boldsymbol{e}$, т. е. угол вращения Φ вокруг оси $O\boldsymbol{k}$ (ортогональной векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{e}$), переводящего вектор $\boldsymbol{i}$ в вектор $\boldsymbol{e}$. Вращение Φ переводит векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ в векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{e}' = \Phi\boldsymbol{j}$, и в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ имеет матрицу

$$(9) \qquad \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пусть, далее, Θ — вращение на угол θ вокруг прямой d (ортогональной векторам $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$), переводящее вектор $\boldsymbol{k}$ в вектор $\boldsymbol{k}'$. Это вращение переводит векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{k}$ в векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}''$, $\boldsymbol{k}'$, где $\boldsymbol{e}'' = \Theta\boldsymbol{e}'$, и в базисе $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{k}$ имеет матрицу

$$(10) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

Наконец, пусть ψ — принадлежащий интервалу $-\pi <$ $< \psi \leqslant \pi$ угол от вектора $\boldsymbol{e}$ к вектору $\boldsymbol{i}'$, т. е. угол вращения Ψ вокруг оси $O\boldsymbol{k}'$ (ортогональной векторам $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{i}'$), переводящего вектор $\boldsymbol{e}$ в вектор $\boldsymbol{i}'$. Вращение Ψ переводит векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}''$, $\boldsymbol{k}'$ в векторы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{e}'''$, $\boldsymbol{k}'$, где $\boldsymbol{e}''' = \Psi\boldsymbol{e}''$, и в базисе $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}''$, $\boldsymbol{k}'$ имеет матрицу

$$(11) \qquad \begin{Vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{e}'''$, $\boldsymbol{k}'$ ортонормирован и одноименен с базисом $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$. Кроме того, первый и третий векторы этих базисов одинаковы. Поэтому их вторые векторы также должны совпадать. Это доказывает, что $\boldsymbol{e}''' = \boldsymbol{j}'$, т. е. что вращение Ψ переводит базис $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}''$, $\boldsymbol{k}'$ в базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$.

Но тогда составное вращение $\Psi \circ \Theta \circ \Phi$ будет переводить базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ в базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, т. е. на базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ будет действовать так же, как данное вращение Ω. Поэтому как преобразования по равенству координат в одних и тех же координатных системах эти два вращения будут совпадать:

$$(12) \qquad \Omega = \Psi \circ \Theta \circ \Phi.$$

Следовательно, согласно сделанному выше замечанию, матрица C вращения Ω (в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) будет произведением матриц (9), (10) и (11) вращений Φ, Θ, Ψ в обратном порядке. Тем самым нами доказано следующее предложение (правда, только при условии, что $\boldsymbol{k}' \neq \pm \boldsymbol{k}$, т. е. что $\theta \neq 0, \pi$):

Предложение 2 (Теорема Эйлера). *Произвольная собственная ортогональная матрица $C \in SO(3)$ третьего порядка допускает разложение вида*

$$(13)\; C = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $-\pi < \psi \leqslant \pi$.

При $\theta \neq 0$, π это разложение единственно.

(Последнее утверждение вытекает из того, что все вращения Φ, Θ и Ψ однозначно строятся по вращению Ω без какого-либо произвола.)

Если же $\theta = 0, \pi$, то Ω представляет собой вращение вокруг оси $O\boldsymbol{k}$ на угол $\varphi + \psi$ при $\theta = 0$ (т. е. при $\boldsymbol{k}' =$

$= \boldsymbol{k}$) и на угол $\varphi - \psi$ при $\theta = \pi$ (т. е. при $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$), и соответственно этому матрица C имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \cos(\varphi \pm \psi) & -\sin(\varphi \pm \psi) & 0 \\ \sin(\varphi \pm \psi) & \cos(\varphi \pm \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Здесь один из углов φ или ψ может быть выбран произвольно (а второй угол будет тогда однозначно определен).

Углы φ, θ, ψ называются *углами Эйлера* матрицы C (или вращения Ω). Произведя в формуле (13) умножение, мы получим следующее явное, но громоздкое выражение матрицы C через эти углы:

$$C = \begin{Vmatrix} \begin{matrix}\cos\varphi\cos\psi - \\ -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi\end{matrix} & \begin{matrix}-\cos\varphi\sin\psi - \\ -\cos\theta\sin\varphi\cos\psi\end{matrix} & \sin\varphi\sin\theta \\ \begin{matrix}\sin\varphi\cos\psi + \\ +\cos\theta\cos\varphi\sin\psi\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\varphi\sin\psi + \\ +\cos\theta\cos\varphi\cos\psi\end{matrix} & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}.$$

Иногда удобно ввести в рассмотрение вращения

$$\Phi' = \Phi, \quad \Theta' = \Phi^{-1} \circ \Theta \circ \Phi, \quad \Psi' = \Phi^{-1} \circ \Theta^{-1} \circ \Psi \circ \Theta \circ \Phi,$$

имеющие в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ матрицы (9), (10) и (11) и являющиеся вращениями вокруг координатных осей исходной системы координат $O\boldsymbol{ijk}$. Вращение Ω выражается через эти вращения по формуле

$$(14) \qquad \Omega = \Phi' \circ \Theta' \circ \Psi'.$$

Таким образом, мы видим, что *любое вращение разлагается в композицию трех вращений вокруг координатных осей.*

Заметим, что в разложении (14) участвуют вращения лишь вокруг осей $O\boldsymbol{k}$ и $O\boldsymbol{i}$. Обозначив эти оси через l_1 и l_2, опустив в формуле (14) ненужные теперь штрихи и учтя произвол в выборе координатной системы, мы получим, что *для любых двух перпендикулярных прямых l_1 и l_2, проходящих через центр O произвольного вращения Ω, это вращение допускает разложение*

$$(15) \qquad \Omega = \Phi \circ \Theta \circ \Psi,$$

где Φ и Ψ — вращения вокруг прямой l_1, а Θ — вращение вокруг прямой l_2.

В этой формулировке координаты уже никак явно не участвуют.

Перейдем теперь к исследованию произвольных движений пространства.

Напомним, что, как было замечено в лекции 25, любое движение пространства является композицией некоторого вращения и некоторого параллельного переноса

Определение 2. Движение пространства называется *винтовым*, если оно является композицией вращения и параллельного переноса на вектор, параллельный оси вращения. Эта ось называется *осью винтового движения*.

В прямоугольных координатах, для которых ось Oz является осью винтового движения, это движение записывается формулами вида

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$

$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

$$z' = z + a,$$

где α — некоторый угол (обычно выбираемый в интервале $-\pi < \alpha \leqslant \pi$), а a — число. Угол α называется *углом винтового движения*, а число a — его *шагом*.

Если $a = 0$, то винтовое движение является вращением, а если $\alpha = 0$, то параллельным переносом.

Ясно, что при композиции винтовых движений с одной и той же осью их углы и шаги складываются. Следовательно, *множество всех винтовых движений с осью l является группой*. Эта группа содержит группу $\mathrm{Rot}_l(3)$ вращений с осью l и группу $\mathrm{Trans}_l(3)$ параллельных переносов на векторы, параллельные прямой l (и является их прямым произведением в смысле общей теории групп).

Подобно тому как вращениями и параллельными переносами исчерпываются все движения плоскости (см. предложение 2 лекции 25), винтовыми движениями исчерпываются все движения пространства.

Предложение 3. *Каждое движение Φ пространства является винтовым.*

Доказательство. Как мы знаем, $\Phi = T \circ \Omega$, где Ω — некоторое вращение, а T — параллельный перенос. Если угол α вращения Ω равен нулю, то $\Phi = T$ и доказывать нечего. Поэтому без ограничения общности мы можем предполагать, что $\alpha \neq 0$ (и, следовательно, что вращение Ω имеет вполне определенную ось l).

Пусть $\boldsymbol{b}$ — вектор переноса T и пусть

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c},$$

где вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен оси l вращения Ω, а вектор $\boldsymbol{a}$ ей параллелен. Тогда $T = T_1 \circ T_2$, где T_1 и T_2 — переносы на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ соответственно, и, значит,

$$\Phi = T_1 \circ T_2 \circ \Omega = T_1 \circ \Omega',$$

где $\Omega' = T_2 \circ \Omega$. Поэтому для доказательства предложения 3 достаточно установить, что *движение* Ω' *является вращением с осью, параллельной оси* l (и, значит, композиция $T_1 \circ \Omega'$ представляет собой винтовое движение).

Имея это в виду, запишем движение Ω' в координатах, для которых осью Oz является ось l. Тогда вектор $\boldsymbol{c}$ будет иметь координаты $(c_1, c_2, 0)$, а движение Ω' будет записываться формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + c_1, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + c_2, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{16}$$

Видно, что каждую плоскость $z = h$ движение Ω' переводит в себя и индуцирует на этой плоскости движение, задаваемое первыми двумя формулами (16). Но, согласно предложению 2 лекции 25, такое движение плоскости является вращением с некоторым центром (x_0, y_0) (напомним, что, по условию, $\alpha \neq 0$). Но тогда прямая $x = x_0$, $y = y_0$ будет, очевидно, состоять из неподвижных точек движения Ω' и это движение будет вращением вокруг этой прямой (на тот же угол α).

Тем самым предложение 3 полностью доказано. $\square$

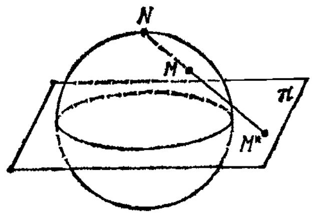
Лекция 27

Вращения сферы. — Стереографические координаты на сфере. — Вращения вокруг координатных осей. — Дробно-линейные преобразования. — Запись вращений сферы в виде дробно-линейных преобразований плоскости. — Примеры вращений. — Задание вращения сферы углом и полюсом. — Дальнейшие примеры вращений. — Самосовмещения куба.

Полученные в предыдущей лекции результаты, касающиеся группы $\mathrm{Rot}_O(3)$ (группы $\mathrm{SO}(3)$), хотя вполне удовлетворительно описывают ее элементы, но мало что дают в отношении ее алгебраического строения. В этой лекции мы рассмотрим еще один подход к описанию групп $\mathrm{Rot}_O(3)$, лишенный этого недостатка.

Пусть $\mathbf{S}$ — сфера радиуса 1 с центром в точке O. Каждое вращение Ω пространства с центром в точке O переводит сферу $\mathbf{S}$ в себя и потому определяет некоторое отображение Ω': $S \to S$, называемое *вращением сферы* $\mathbf{S}$, индуцированным вращением пространства Ω. Впрочем, поскольку по отображению Ω' вращение Ω, очевидно, однозначно восстанавливается, в большей части ситуаций нет нужды педантично различать Ω и Ω'. Поэтому, как правило, мы будем вместо Ω' писать просто Ω.

Чтобы иметь возможность записывать вращения сферы $\mathbf{S}$ формулами, нужно ввести в $\mathbf{S}$ координаты. С этой целью, выбрав в $\mathbf{S}$ произвольную точку N, рассмотрим плоскость π, проходящую через центр O сферы $\mathbf{S}$ перпендикулярно радиусу ON. Для любой точки M сферы $\mathbf{S}$, отличной от точки N, определена прямая NM, пересекающая плоскость π. Сопоставив также M точку пересечения M^* прямой NM с плоскостью π, мы получим биективное отображение $M \mapsto M^*$ (называемое *стереографической проекцией*) сферы $\mathbf{S}$ без точки N на плоскость π. Координаты x, y точки M^* плоскости π в некоторой системе



прямоугольных координат Oij называются *стереографическими координатами* точки M сферы $\mathbb{S}$. Они определены для любой точки сферы $\mathbb{S}$, отличной от точки N, и любая пара вещественных чисел (x, y) является парой стереографических координат некоторой такой точки.

Здесь удобно вместо пары чисел (x, y) рассматривать соответствующее комплексное число

$$z = x + iy.$$

Это число мы будем называть *комплексной стереографической координатой* точки M сферы $\mathbb{S}$.

Комплексная стереографическая координата обладает тем недостатком, что она не определена для точки N. Мы ликвидируем этот недостаток, условно считая, что комплексной стереографической координатой точки N является символ бесконечности ∞. Тогда эта координата будет определена для всех точек сферы $\mathbb{S}$, а ее значения будут принадлежать множеству

$$\mathbb{C}^{+} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Терминологическое замечание. Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел $z = x + iy$ естественным образом отождествляется с множеством пар (x, y) вещественных чисел, т. е. с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$. На этом основании множество $\mathbb{C}$ часто называют *плоскостью комплексных чисел* (употребляемое иногда название «комплексная плоскость» очень неудачно, поскольку этот термин занят для плоскости над полем $\mathbb{C}$, которая с «вещественной» точки зрения имеет размерность 4). В соответствии с этим множество $\mathbb{C}^{+}$ всех комплексных чисел с добавленным символом ∞ называется *пополненной плоскостью комплексных чисел*.

Таким образом, можно сказать, что *сфера $\mathbb{S}$ координатизируется в пополненной плоскости комплексных чисел $\mathbb{C}^{+}$*. В связи с этим пополненную плоскость $\mathbb{C}^{+}$ часто отождествляют со сферой $\mathbb{S}$. На это отождествление впервые указал замечательный немецкий математик XIX столетия Б. Риман, и потому плоскость $\mathbb{C}^{+}$ часто называют *сферой Римана*.

Выбрав в пространстве прямоугольную координатную систему $Oijk$, координатной плоскостью Oij которой является плоскость π и в которой точка N имеет координаты $(0, 0, 1)$ (ясно, что эти условия однозначно определяют систему $Oijk$), мы для любой точки M сферы $\mathbb{S}$ можем рассмотреть ее координаты ξ, η, ζ относительно этой системы (использовать для координат обычные обозначения x, y, z мы сейчас не можем, поскольку символ z у нас занят для обозначения комплексных чисел). Прямая NM, проходящая через точку N и произвольную точку M (ξ, η, ζ) сферы S, имеет канонические уравнения вида

$$\frac{X}{\xi}=\frac{Y}{\eta}=\frac{Z-1}{\zeta-1}$$

(«текущие» координаты точек прямой мы обозначаем здесь через X, Y, Z) и потому пересекает плоскость π в точке $\left(\frac{-\xi}{\zeta-1}, \frac{-\eta}{\zeta-1}, 0\right)$. Это означает, что точку M (ξ, η, ζ) стереографическая проекция переводит в точку плоскости π с координатами

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}, \tag{1}$$

т. е. что числа (1) являются стереографическими координатами точки M. Следовательно, *комплексная стереографическая координата точки M выражается формулой*

$$z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \tag{2}$$

(при $\xi=0, \eta=0$ и $\zeta=1$ условно считается, что $z=\infty$).

Таким образом, формула (2) описывает переход от прямоугольных координат точки M в пространстве к ее комплексной стереографической координате на сфере.

Чтобы получить формулы обратного перехода, мы заметим, что поскольку точка M принадлежит сфере радиуса 1 с центром в точке O, ее координаты ξ, η, ζ удовлетворяют соотношению

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1. \tag{3}$$

Вместе с (1) это дает возможность выразить ξ, η, ζ через x, y. Проделав соответствующие, вполне тривиальные вычисления, мы немедленно получим, что

$$\xi=\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta=\frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}, \tag{4}$$

т. е. что

$$\xi+i\eta=\frac{2z}{z\bar{z}+1}, \quad \zeta=\frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}. \tag{5}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, координаты ξ, η, ζ и координаты x, y (координата z) друг через друга однозначно выражаются.

Найдем теперь формулы, задающие в комплексной стереографической координате произвольное вращение Ω сферы S, т. е. формулы, выражающие для любой точки M сферы S координату z' точки $M' = \Omega(M)$ через координату z точки M.

Пусть сначала преобразование Ω является вращением на угол α вокруг оси Ok, т. е. пусть это преобразование переводит точку M с координатами ξ, η, ζ в точку M' с координатами

$$\xi' = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha,$$
$$\eta' = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha,$$
$$\zeta' = \zeta.$$

Тогда

$$\xi' + i\eta' = (\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha) + i(\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) = \\ = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\xi + i\eta),$$

т. е.

$$(\xi' + i\eta') = e^{i\alpha}(\xi + i\eta),$$

где

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$z' = \frac{\xi' + i\eta'}{1-\zeta'} = e^{i\alpha}\frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} = e^{i\alpha}z.$$

Таким образом, *в координате z вращение на угол α вокруг оси Ok записывается формулой*

(6) $$z' = e^{i\alpha}z.$$

В координатах x, y на плоскости π формула (6) превращается в две формулы

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

означающие, что *преобразование* (6) *плоскости π является вращением этой плоскости на угол α вокруг точки O.* Таким образом, стереографическая проекция переводит вращение пространства вокруг оси Ok во вращение плоскости π на тот же угол.

Пусть теперь Ω является вращением на угол α вокруг оси $O\xi$, т. е.

$$\xi' = \xi,$$

$$\eta' = \eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha,$$

$$\zeta' = \eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha.$$

Оказывается, что в этом случае координата z' точки $M' = \Omega(M)$ связана с координатой z точки M формулой

$$z' = \frac{z\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}}{iz\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{7}$$

Действительно, согласно этой формуле

$$z' = \frac{x\cos\frac{\alpha}{2} + i\left(y\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right) + ix\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\left[x\cos\frac{\alpha}{2} + i\left(y\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right) - ix\sin\frac{\alpha}{2}\right]}{\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right) + ix\sin\frac{\alpha}{2}\right]\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right) - ix\sin\frac{\alpha}{2}\right]} =$$

$$= \frac{x\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(y\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)x\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ i\,\frac{\left(y\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right) - x^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - y\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{x\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2y\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + (x^2+y^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ \frac{\left[y\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + (1 - x^2 - y^2)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right]}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2y\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + (x^2+y^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{x + i\left[y\cos\alpha - \frac{1}{2}(x^2+y^2-1)\sin\alpha\right]}{\frac{1}{2}(x^2+y^2+1) - y\sin\alpha - \frac{1}{2}(x^2+y^2-1)\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{2x}{x^2+y^2+1} + i\left[\frac{2y}{x^2+y^2+1}\cos\alpha - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\sin\alpha\right]}{1 - \frac{2y}{x^2+y^2+1}\sin\alpha - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\cos\alpha},$$

и, значит (см. формулы (4)),

$$z' = \frac{\xi + i(\eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha)}{1 - \eta\sin\alpha - \zeta\cos\alpha} = \frac{\xi' + i\eta'}{1-\zeta'},$$

как и должно быть. □

В отличие от преобразования (6) преобразование (7) принадлежит к новому для нас типу. Дадим соответствующее общее определение.

Определение 1. Преобразование сферы S (или пополненной плоскости $\mathbb{C}^+$), задаваемое формулой вида

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{8}$$

называется *дробно-линейным преобразованием*.

В формуле (8) числа a, b, c, d могут быть произвольными комплексными числами, подчиненными условию

$$ad - bc \neq 0. \tag{9}$$

(Если $ad - bc = 0$, то для любой точки z точка z' будет одной и той же точкой $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.)

При $z = \infty$, по определению, считается, что $z' = \frac{a}{c}$ (а если $c = 0$, то $z' = \infty$). Аналогично, при $z = -\frac{d}{c}$ считается, что $z' = \infty$. Эти соглашения обеспечивают биективность преобразования (8). При этом обратное преобразование будет задаваться формулой

$$z' = \frac{-dz+b}{cz-a} \tag{10}$$

(и, значит, также будет дробно-линейным преобразованием). Действительно, композиция преобразований (8) и (10) действует по формуле

$$z' = \frac{a\left(\dfrac{-dz+b}{cz-a}\right)+b}{c\left(\dfrac{-dz+b}{cz-a}\right)+d} = \frac{a(-dz+b)+b(cz-a)}{c(-dz+b)+d(cz-a)} = z$$

и потому является тождественным преобразованием.

Аналогичное вычисление показывает, что композиция любых двух дробно-линейных преобразований

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{и} \quad z' = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$$

действует по формуле

$$z' = \frac{(a_1a+b_1c)\,z+(a_1b+b_1d)}{(c_1a+d_1c)\,z+(c_1b+d_1d)} \tag{11}$$

и, значит, также является дробно-линейным преобразованием.

Мы видим, таким образом, что *дробно-линейные преобразования образуют группу.*

Преобразование (8), очевидно, не меняется при одновременном делении всех коэффициентов a, b, c, d на одно и то же число $\rho \neq 0$. Приняв за ρ квадратный корень из числа (9), мы получим преобразование (8), для которого

$$ad - bc = 1. \tag{12}$$

Таким образом, без ограничения общности можно всегда считать условие (12) выполненным. Запись (8) дробно-линейного преобразования, удовлетворяющую условию (12), мы будем называть *нормированной.*

Условие (12) означает, что комплексная матрица

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \tag{13}$$

унимодулярна. Все такие матрицы образуют группу по умножению, которую мы будем обозначать символом SL (2) (являющимся упрощенным вариантом более распространенного символа SL (2; $\mathbb{C}$)).

Согласно правилу умножения матриц,

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1a+b_1c & a_1b+b_1d \\ c_1a+d_1c & c_1b+d_1d \end{Vmatrix}.$$

Сравнив эту формулу с формулой (11), мы немедленно найдем, что отображение

(14) матрица (13) $\Rightarrow$ преобразование (8)

является гомоморфизмом группы SL (2) на группу дробно-линейных преобразований. Значит, последняя группа изоморфна некоторой факторгруппе группы SL (2). В связи с этим мы будем обозначать группу всех дробно-линейных преобразований сферы S символом PSL (2).

Ясно, что ядро гомоморфизма (14) состоит только из двух матриц E и $-E$ (т. е. только эти две матрицы определяют тождественное дробно-линейное преобразование). Это означает, что *группа дробно-линейных преобразований* PSL (2) *изоморфна факторгруппе* SL (2)/$\{E, -E\}$ *группы* SL (2) *по подгруппе второго порядка* $\{E, -E\}$.

Все это дает вполне удовлетворительное описание группы PSL (2).

Вернемся теперь к вращениям сферы.

Пусть Ω — произвольное вращение сферы и пусть φ, θ, ψ — его углы Эйлера. Тогда, как мы знаем (см. формулу (15) лекции 26),

$$\Omega = \Phi \circ \Theta \circ \Psi,$$

где Φ и Ψ — вращения вокруг оси Ok на углы φ и ψ соответственно, а Θ — вращение вокруг оси Oi на угол θ. Поэтому в стереографической координате z вращение Ω будет задаваться композицией дробно-линейных преобразований

$$z' = e^{i\psi}z, \quad z' = \frac{z\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{iz\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}, \quad z' = e^{i\varphi}z,$$

отвечающих преобразованиям Ψ, Θ и Φ (см. формулы (6) и (7)), т. е. преобразованием

$$z' = e^{i\varphi}\frac{ze^{i\psi}\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{ize^{i\psi}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{ze^{i(\varphi+\psi)}\cos\frac{\theta}{2} + ie^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}}{ize^{i\psi}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}},$$

нормированная запись которого имеет вид

$$(15)\qquad z' = \frac{ze^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} + ie^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}{ize^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} + e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Полагая

$$(16)\qquad a = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2},\qquad c = ie^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2},$$

мы можем это преобразование записать в следующем виде:

$$(17)\qquad z' = \frac{az-\bar{c}}{cz+\bar{a}}.$$

При этом, как легко видеть,

$$(18)\qquad a\bar{a}+c\bar{c}=1$$

(это равенство является не чем иным, как условием (12) нормированности преобразования (17)).

Обратно, любое дробно-линейное преобразование, записывающееся формулой (17) (при условии (18)), разлагается в композицию дробно-линейных преобразований (14), где углы φ, θ и ψ находятся из соотношений (16). Именно, если $|a|$ и $|c|$ — модули комплексных чисел a и c, а α и γ — их аргументы, то

$$\theta = 2\operatorname{arctg}\frac{|c|}{|a|},$$

(что однозначно определяет угол θ в интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) и

$$\varphi = \alpha-\gamma+\frac{\pi}{2},\qquad \psi = \alpha+\gamma-\frac{\pi}{2}$$

(что при $ac \neq 0$, т. е. при $\theta \neq 0, \pi$, однозначно определяет углы φ и ψ в интервалах $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ и $-\pi < \psi \leqslant \pi$). Следовательно, это преобразование отвечает вращению сферы с углами Эйлера φ, θ, ψ.

Тем самым доказано, что *в комплексной стереографической координате z вращения сферы представляются дробно-линейными преобразованиями вида*

$$(19)\qquad z' = \frac{az-\bar{c}}{cz+\bar{a}},\quad \textit{где}\ a\bar{a}+c\bar{c}=1.$$

Матрицы (13), отвечающие преобразованиям (19), имеют вид

(20) $$\begin{Vmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{Vmatrix}$$

и составляют группу, обозначаемую обычно символом SU (2). Группа же преобразований (19) обозначается символом PSU (2). Она связана с группой SU (2) эпиморфизмом

(21) матрица (20) $\Rightarrow$ преобразование (19),

ядро которого состоит из двух элементов E и $-E$.

Впрочем, поскольку, согласно доказанному, группа PSU (2) естественно изоморфна группе SO (3), ее обычно отождествляют с этой группой. В частности, отображение (21) рассматривают как эпиморфизм

(22) $$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3).$$

Все это можно подытожить, сказав, что *собственные ортогональные матрицы третьего порядка (элементы группы* SO (3)) *задаются (с точностью до знака однозначно определенными) комплексными матрицами второго порядка, имеющими вид* (20) *(элементами группы* SU (2)), *причем произведению матриц* (20) *отвечает произведение соответствующих ортогональных матриц.*

Это дает уже вполне удовлетворительное описание группы SO (3).

Замечание 1. Положив $a = x_1 + ix_2$, $c = x_3 + ix_4$, мы можем условие (18) записать в виде равенства

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

являющегося в четырехмерном евклидовом пространстве с координатами x_1, x_2, x_3, x_4 уравнением трехмерной сферы S^3 радиуса 1. Это означает, что *сфера* S^3 *является моделью группы* SU (2), и потому отображение (22) можно рассматривать как отображение

(23) $$S^3 \to \mathrm{SO}(3).$$

Поскольку при этом отображении в одну матрицу из SO (3) переходят, очевидно, диаметрально противоположные точки $\boldsymbol{x}$ и $-\boldsymbol{x}$ сферы S^3, мы получаем, следовательно, что моделью *группы* SO (3) *является сфера* S^3 *с отождествленными диаметрально противоположными точками.*

[В лекции 26 мы получили модель группы SO (3) (или, точнее, группы $\mathrm{Rot}_O(3)$, что, конечно, совершенно равносильно) в виде шара радиуса π с отождествленными диаметрально противоположными точками его граничной сферы. Ниже, в лекции 31, мы эту модель сравним с только что построенной, но читателю будет очень полезно попытаться произвести это сравнение немедленно.]

Рассмотрим теперь несколько конкретных вращений и соответствующих преобразований (19).

Как мы уже знаем (см. формулу (7)), вращение вокруг оси абсцисс Oi на угол α задается формулой

$$z' = \frac{z\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}}{iz\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ мы получаем (после сокращения на общий множитель), что *вращения вокруг оси абсцисс на углы* $\frac{\pi}{2}$, π *и* $\frac{3\pi}{2}$ *задаются, соответственно, формулами*

$$(24)\qquad z' = \frac{z+i}{iz+1}, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-i}{-iz+1}.$$

(Заметим, что, как и следовало ожидать, квадратом первого преобразования (24) является второе, кубом — третье, а четвертой степенью — тождественное преобразование.)

Чтобы получить вращения вокруг оси ординат Oj, нужно переставить x и y, т. е. от $z = x + iy$ перейти к $i\bar{z} = y + ix$ (и одновременно от z' к $i\bar{z}'$). Поэтому, в частности, *вращения вокруг оси ординат на углы* $\frac{\pi}{2}$, π *и* $\frac{3\pi}{2}$ *задаются, соответственно, формулами*

$$(25)\qquad z' = \frac{z+1}{z-1}, \quad z' = -\frac{1}{z}, \quad z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

(Например, преобразовав указанным образом первую из формул (24), мы получим формулу

$$i\bar{z}' = \frac{i\bar{z}+i}{-\bar{z}+1},$$

равносильную первой из формул (25).)

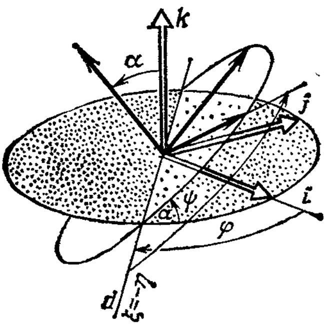
Что же касается вращений вокруг оси аппликат Ok, то, как мы знаем (см. формулу (6)), они записываются формулами вида

$$z' = e^{i\alpha} z$$

(обратим внимание, что эта запись не нормирована). В частности, *вращения вокруг оси аппликат на углы* $\frac{\pi}{2}$, π *и* $\frac{3\pi}{2}$ *задаются, соответственно, формулами*

$$(26, \qquad z' = iz, \quad z' = -z, \quad z' = -iz.$$

(Здесь также, конечно, квадратом первого преобразования будет второе, кубом — третье, а четвертой степенью — тождественное преобразование.)



Для вычисления вращений с другими осями нужно предварительно найти их углы Эйлера. Например, для вращения на угол α вокруг биссектрисы $\xi = \eta$ первого и третьего координатных квадрантов в координатной плоскости $\zeta = 0$ прямой d пересечения плоскостей Oij и $Oi'j'$ (см. доказательство предложения 2 лекции 26) является сама эта биссектриса. Поэтому его углы Эйлера выражаются (при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$) формулами

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \alpha, \; \psi = -\frac{\pi}{4},$$

и, значит, это вращение задается формулой

$$(27) \quad z' = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{ze^{-i\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\alpha}{2} + i \sin\frac{\alpha}{2}}{ize^{-i\frac{\pi}{4}} \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{z\cos\frac{\alpha}{2} + ie^{-i\frac{\pi}{4}} \sin\frac{\alpha}{2}}{ize^{-i\frac{\pi}{4}} \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}$$

(ср. с формулой (15)). В частности, при $\alpha = \pi$ мы получаем, что *вращение вокруг указанной биссектрисы на угол* π *задается формулой*

$$(28) \qquad z' = \frac{i}{z}.$$

Аналогично, углы Эйлера вращения на угол α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, вокруг биссектрисы $\xi = -\eta$ второго и четвертого координатных квадрантов в координатной плоскости $\zeta = 0$ выражаются формулами

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \theta = \alpha, \quad \psi = \frac{\pi}{4},$$

откуда следует, что *вращение вокруг этой биссектрисы на угол π задается формулой*

$$z' = -\frac{i}{z}. \tag{29}$$

Для вращения на угол π вокруг биссектрисы $\xi = \zeta$ первого и третьего координатных квадрантов в координатной плоскости $\eta = 0$ прямой d будет, как можно убедиться, ось Oj, а углы Эйлера будут выражаться формулами

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому это вращение будет задаваться формулой

$$z' = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{ze^{i\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}}{ize^{i\frac{\pi}{2}} \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}},$$

т. е. формулой

$$z' = \frac{z+1}{z-1}. \tag{30}$$

(Заметим, что запись преобразования (30) не нормирована.)

Последнее вычисление требует довольно хорошего пространственного воображения (чтобы найти углы Эйлера). Хотелось бы сделать его более автоматичным. С этой целью можно, например, рассуждать следующим образом.

Любое вращение Ω сферы S оставляет на месте две диаметрально противоположные точки пересечения сферы S с его осью. Левую из этих точек (по отношению к данной ориентации оси вращения) мы будем называть *полюсом* вращения Ω. Например, полюсом вращений вокруг оси Ok служит точка N' $(0, 0, -1)$ с комплексной стереографической координатой $z = 0$.

Ясно, что вращение Ω однозначно определяется его углом α и его полюсом M_0. Поэтому коэффициенты a и c

соответствующего дробно-линейного преобразования (19) должны выражаться через α и комплексную стереографическую координату z_0 точки M_0. Чтобы найти эти выражения, мы рассмотрим вращение Φ, задаваемое дробно-линейным преобразованием

$$z' = \frac{z + z_0}{-\bar{z}_0 z + 1}.$$

Так как это преобразование, очевидно, переводит 0 в z_0, то вращение Φ переводит точку N' в полюс M_0 вращения Ω. Поэтому полюсом вращения

$$\Omega' = \Phi^{-1} \circ \Omega \circ \Phi$$

будет точка N' и, значит, его осью — ось аппликат Ok (угол же этого вращения будет по-прежнему равен α). Следовательно, вращение Ω' задается формулой

$$z' = e^{i\alpha} z.$$

Поскольку $\Omega = \Phi \circ \Omega' \circ \Phi^{-1}$, а вращение Φ^{-1} задается дробно-линейным преобразованием

$$z' = \frac{-z + z_0}{-\bar{z}_0 z - 1} = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z + 1}$$

(см. формулу (10)), отсюда вытекает, что вращение Ω задается формулой

$$z' = \frac{e^{i\alpha} \dfrac{z - z_0}{\bar{z}_0 z + 1} + z_0}{-e^{i\alpha} \bar{z}_0 \dfrac{z - z_0}{\bar{z}_0 z + 1} + 1},$$

т. е. формулой

$$z' = \frac{(e^{i\alpha} + |z_0|^2) z + (1 - e^{i\alpha}) z_0}{(1 - e^{i\alpha}) \bar{z}_0 z + (1 + e^{i\alpha} |z_0|^2)}. \tag{31}$$

Подобно формуле (19), формула (31) дает общий вид дробно-линейных преобразований пополненной плоскости, представляющих вращения сферы (элементов группы PSU (2)). Преимущество этой формулы состоит в том, что ее коэффициенты выражены через числа, имеющие геометрический смысл (и легко определяемые на практике).

Заметим, что формула (31) дает ненормированные дробно-линейные преобразования. Так как

$$(e^{i\alpha} + |z_0|^2)(1 + e^{i\alpha} |z_0|^2) - (1 - e^{i\alpha})(1 - e^{i\alpha}) z_0 \bar{z}_0 =$$
$$= (1 + |z_0|^2)^2 e^{i\alpha},$$

то чтобы получить его нормированную запись, следует все коэффициенты формулы (31) умножить на

$$\lambda=\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{1+|z_0|^2}.$$

Проверим формулу (31) на уже известных нам вращениях.

Для вращения вокруг оси абсцисс полюсом является точка (—1, 0, 0), стереографическая координата которой равна —1. Поэтому, согласно формуле (31), это вращение задается формулой

$$z'=\frac{(e^{i\alpha}+1)z-(1-e^{i\alpha})}{-(1-e^{i\alpha})z+(1+e^{i\alpha})}.$$

Но, поскольку

$$(32)\qquad \begin{aligned} e^{i\alpha}+1&=2e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2}\right)=2e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2},\\ e^{i\alpha}-1&=2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}\right)=2ie^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2},\end{aligned}$$

эта формула, как и следовало ожидать, равносильна формуле (7).

При $z_0=0$ формула (31) переходит в формулу (6) для вращения вокруг оси Ok.

Более интересны вращения вокруг биссектрис координатных углов, когда преимущество формулы (31) проявляется ярче.

Для вращения вокруг биссектрисы $\xi=\eta,\ \ \zeta=0$ полюсом служит точка $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ со стереографической координатой $z_0=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}=-e^{i\frac{\pi}{4}}$. Поэтому, согласно формуле (31),

$$z'=\frac{(e^{i\alpha}+1)z-(1-e^{i\alpha})e^{i\frac{\pi}{4}}}{-(1-e^{i\alpha})e^{-i\frac{\pi}{4}}z+(1+e^{i\alpha})},$$

что, в силу формул (32), равносильна формуле (27).

Геометрически более трудный случай биссектрисы $\xi = \zeta$, $\eta = 0$ теперь никаких затруднений не вызывает (даже при любом α). Действительно, в этом случае полюсом служит точка $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, для которой $z_0 = = \frac{-1}{\sqrt{2}-1}$. Поэтому, согласно формуле (31),

$$z' = \frac{\left(e^{i\alpha} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right) z - \frac{1-e^{i\alpha}}{\sqrt{2}-1}}{-\frac{1-e^{i\alpha}}{\sqrt{2}-1} z + \left(1 + e^{i\alpha}\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\right)}.$$

При $\alpha = \pi$, т. е. при $e^{i\alpha} = -1$, эта формула приобретает вид

$$z' = \frac{(1-(\sqrt{2}-1)^2) z - 2(\sqrt{2}-1)}{-2(\sqrt{2}-1) z + ((\sqrt{2}-1)^2 - 1)},$$

ввиду тождества

$$(\sqrt{2}-1)^2 - 1 = 2(1-\sqrt{2})$$

равносильный формуле (30).

Аналогично показывается, что *вращения на угол* π *вокруг биссектрисы* $\xi = -\zeta$, $\eta = 0$, *биссектрисы* $\eta = \zeta$, $\xi = 0$ *и биссектрисы* $\eta = -\zeta$, $\xi = 0$ *выражаются, соответственно, формулами*

$$(33) \qquad z' = -\frac{z-1}{z+1}, \quad z' = i\frac{z+1}{z-i}, \quad z' = -i\frac{z-i}{z+i}.$$

Далее, если за ось вращения мы примем биссектрису $\xi = \eta = \zeta$ первого (положительного) координатного октанта, то полюсом будет точка $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, для которой $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-1}$. При любом угле α в этом случае, как и в предыдущем, получается довольно сложное и малоэстетичное выражение, но при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ после сокращения на $\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2i}$ получается формула

$$(34) \qquad z' = i\frac{z+1}{z-1},$$

а при $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ после сокращения на $\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}$ — формула

$$z' = i\frac{z+i}{z-i}. \tag{35}$$

Аналогично, если осью вращения является биссектриса $\xi = -\eta = -\zeta$ с полюсом $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, то $z_0 = \frac{-1+i}{\sqrt{3}-1}$, и при $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$ получаются преобразования

$$z' = -\frac{z+i}{z-i}, \quad z' = i\frac{z-1}{z+1}, \tag{36}$$

а если осью вращения является биссектриса $\xi = -\eta = \zeta$ или $\xi = \eta = -\zeta$, то для тех же α получаются преобразования

$$z' = \frac{z-i}{z+i}, \quad z' = -i\frac{z+1}{z-1}, \tag{37}$$

и

$$z' = -\frac{z-i}{z+i}, \quad z' = -i\frac{z-1}{z+1}. \tag{38}$$

Вращения, представленные дробно-линейными преобразованиями (24)—(26), (28)—(30), (33)—(38), характеризуются тем, что они переводят в себя вписанный в сферу куб $\left(\text{с вершинами в точках} \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$, т. е., как говорят, являются *самосовмещениями* этого куба.

Преобразования (24)—(26) представляют повороты куба на углы $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$ вокруг каждой из трех осей, соединяющих центры противоположных граней куба, преобразования (34)—(38) — повороты куба на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ вокруг каждой из четырех осей, соединяющих диаметрально противоположные вершины куба, и, наконец, преобразования (28)—(30) и (33) — повороты куба на угол π вокруг каждой из шести осей, соединяющих середины диаметрально противоположных ребер куба. К этим преобразованиям следует добавить еще тождественное преобразование, оставляющее все точки куба на месте. Таким образом, мы всего получаем $24 = 3 \times 3 + 4 \times 2 + 6 + 1$ самосовмещений куба. Легко доказывается (сделайте это!), что никаких других самосовмещений куб не имеет, т. е. что перечисленными 24 вращениями исчерпываются все его самосовмещения.

Преобразования (26) плюс тождественное преобразование мы можем записать единой формулой

$$z' = i^k z, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{39}$$

Аналогично второе преобразование (24), преобразование (28), второе преобразование (25) и преобразование (29) также могут быть записаны единой формулой

$$z' = \frac{i^k}{z}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{40}$$

Точно так же формула

$$z' = i^k \frac{z+1}{z-1}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{41}$$

дает преобразование (30), преобразование (34), первое преобразование (25) и второе преобразование (37); формула

$$z' = i^k \frac{z-1}{z+1}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{42}$$

дает третье преобразование (25), второе преобразование (36), первое преобразование (33) и второе преобразование (38); формула

$$z' = i^k \frac{z+i}{z-i}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{43}$$

дает преобразование (35), второе преобразование (33), первое преобразование (36) и первое преобразование (24); и, наконец, формула

$$z' = i^k \frac{z-i}{z+i}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{44}$$

дает первое преобразование (37), третье преобразование (24), первое преобразование (38) и третье преобразование (33).

Резюмируя, мы получаем следующее предложение:

Предложение 1. *Имеется точно* 24 *самосовмещения куба. На пополненной плоскости комплексных чисел они представляются дробно-линейными преобразованиями* (39)—(44). □

Аналогичным образом можно описать самосовмещения других правильных многогранников. Для тетраэдра имеется 12 самосовмещений, которые представляются преобразованиями (39), (40), (43) и (44) при $k = 0, 2$ и преобразованиями (41) и (42) при $k = 1,3$. Самосовмещения октаэдра совпадают с самосовмещениями куба, а икосаэдр (или, что равносильно, додекаэдр) допускает 60 самосовмещений, которые представляются дробно-линейными преобразованиями

$$z' = \zeta^k z, \quad z' = \frac{-\zeta^k}{z},$$

$$z' = \zeta^k \frac{(1+\zeta)\zeta^l z + 1}{\zeta^{l+1} z - (1+\zeta)}, \quad z' = -\zeta^k \frac{\zeta^l z - (1+\zeta)}{(1+\zeta)\zeta^{l-1} z + 1},$$

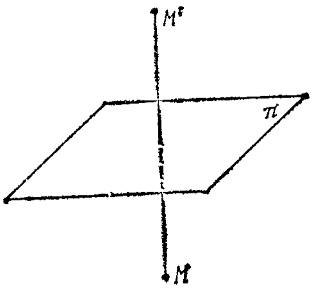
где $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, а $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$.

Лекция 28

Симметрии пространства. — Разложение ортогональных преобразований в композицию симметрий. — Скользящие симметрии и вращения с переворотом.

Обратимся теперь к несобственным (обращающим ориентацию) ортогональным преобразованиям пространства.

Пусть π — произвольная плоскость в пространстве. *Симметрией относительно плоскости* π называется преобразование S пространства, оставляющее все точки плоскости π на месте и переводящее любую точку M в такую точку M', что



а) прямая MM' перпендикулярна плоскости π;

б) точки M и M' находятся на одном и том же расстоянии плоскости π по разные ее стороны.

Ясно, что эти условия однозначно характеризуют точку M'. Плоскость π называется *осевой плоскостью* симметрии S.

В прямоугольных координатах x, y, z, для которых координатная плоскость Oyz является плоскостью π, симметрия S записывается формулами

$$
\begin{aligned}
x' &= -x,\\
y' &= y,\\
z' &= z.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(Действительно, по отношению к плоскости Oyz преобразование (1) обладает свойствами а) и б).) Следовательно, *каждая симметрия относительно плоскости является обращающим ориентацию ортогональным преобразованием пространства.*

По построению, это преобразование имеет целую плоскость неподвижных точек. И обратно, оказывается, что *любое нетождественное ортогональное преобразование S пространства, обладающее плоскостью неподвижных точек, является симметрией относительно этой плоскости* (и потому, в частности, никаких других неподвижных точек не имеет). Действительно, пусть плоскость неподвижных точек является плоскостью Oyz системы прямоугольных координат x, y, z и пусть в этих координатах преобразование S записывается формулами

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + b_1,$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + b_2,$$
$$z' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + b_3.$$

Тогда тождественно по y и z должны иметь место равенства

$$0 = c_{12}y + c_{13}z + b_1,$$
$$y = c_{22}y + c_{23}z + b_2,$$
$$z = c_{32}y + c_{33}z + b_3;$$

отсюда следует, что

$$\begin{Vmatrix} c_{12} & c_{13} & b_1 \\ c_{22} & c_{23} & b_2 \\ c_{32} & c_{33} & b_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ввиду ортогональности матрицы преобразования, это возможно (для нетождественного преобразования) только при

$$c_{11} = -1, \quad c_{21} = 0, \quad c_{31} = 0,$$

т. е. когда преобразование S выражается формулами (1) и, значит, является симметрией относительно плоскости Oyz. $\square$

Ясно (например, из формул (1)), что *каждая симметрия S является инволютивным преобразованием.*

Отсюда дословно так же, как на плоскости, вытекает, что *любое обращающее ориентацию ортогональное преобразование Φ пространства является композицией движения и произвольной симметрии S* (которую можно выбрать одной и той же для всех Φ).

Пусть π_1 и π_2 — две плоскости, пересекающиеся по прямой l и образующие угол $\alpha/2$. Тогда ясно, что если S_1 и S_2 — симметрии в этих плоскостях, то композиция $S_2 \circ S_1$ будет вращением вокруг прямой l на угол α. (Действительно, каждую плоскость π, перпендикулярную прямой l, преобразование $S_2 \circ S_1$ переводит в себя и индуцирует на ней преобразование $S_2' \circ S_1'$, где S_1' и S_2' — симметрии в прямых, высекаемых на π плоскостями π_1 и π_2, а, согласно результатам лекции 25, преобразование $S_2' \circ S_1'$ является вращением на угол α.) Аналогично показывается, что если плоскости π_1 и π_2 параллельны, то композиция $S_2 \circ S_1$ будет параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим плоскостям и имеющий длину, равную удвоенному расстоянию между плоскостями. Таким образом, *каждое движение пространства, являющееся вращением или параллельным переносом, является композицией двух симметрий* (которые к тому же можно выбирать с определенным произволом) и, значит, *любое винтовое движение — композицией четырех симметрий* (осевые плоскости двух из этих симметрий пересекаются по оси движения, а осевые плоскости остальных двух симметрий перпендикулярны этой оси).

Так же как для случая плоскости, эти разложения движений в композицию симметрий позволяют посредством простых геометрических построений находить композиции любых движений. Разбор всех возникающих здесь ситуаций довольно громоздок, и мы оставим его читателю.

Так как каждое движение является композицией не более чем четырех симметрий, то любое несобственное ортогональное преобразование будет композицией не более чем пяти симметрий. Однако на самом деле это число можно свести до трех, так что *любое несобственное ортогональное преобразование, не являющееся симметрией, является композицией трех симметрий.* Это утверждение является непосредственным следствием доказываемого ниже предложения 1, для формулировки которого нам нужно ввести еще два понятия.

Аналогично случаю плоскости мы будем называть *скользящей симметрией* пространства композицию произвольной симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный осевой плоскости симметрии.

Кроме того, — впервые теряя аналогию со случаем плоскости — мы будем называть *вращением с переворотом* композицию произвольной симметрии с вращением вокруг прямой, перпендикулярной осевой плоскости этой симметрии.

Ясно, что как скользящая симметрия, так и вращение с переворотом являются композициями *трех* симметрий.

Если осевой плоскостью симметрии является плоскость Oyz, а вектор параллельного переноса направлен по оси Oy, то скользящая симметрия выражается формулами

$$x' = -x,$$
$$(2) \qquad y' = y + a,$$
$$z' = z$$

и, значит, каждую плоскость $z = h$ переводит в себя, индуцируя в ней ее скользящую симметрию.

Отсюда, в частности, следует, что *при* $a \neq 0$, т. е. в случае, когда скользящая симметрия не вырождается в симметрию, *скользящая симметрия неподвижных точек не имеет.*

Аналогично, если осью вращения является ось абсцисс Ox (а плоскостью симметрии — по-прежнему плоскость Oyz), то вращение с переворотом будет выражаться формулами

$$x' = -x,$$
$$y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha,$$
$$z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha,$$

откуда, в частности, следует, что *при* $\alpha \neq 0$, т. е. в случае, когда оно не вырождается в симметрию, *вращение с переворотом имеет единственную неподвижную точку* (являющуюся точкой пересечения плоскости симметрии с осью вращения).

Неподвижные точки нетождественных ортогональных преобразований пространства

Тип преобразования	0 неподвижных точек	1 неподвижная точка	Прямая неподвижных точек	Плоскость неподвижных точек
Собственное	винтовое движение с шагом $a \neq 0$	—	вращение	—
Несобственное	скользящая симметрия с $a \neq 0$	вращение с переворотом на угол $\alpha \neq 0$	—	симметрия

Прочерк означает, что соответствующих преобразований нет.

Как показывает следующее предложение, являющееся аналогом предложения 3 лекции 25, преобразования в нижней строке этой таблицы исчерпывают все несобственные ортогональные преобразования пространства (что, в частности, и доказывает, что все они разлагаются в композицию трех симметрий).

Предложение 1. *Каждое обращающее ориентацию ортогональное преобразование* Φ *пространства является либо скользящей симметрией, либо вращением с переворотом.*

Доказательство. Согласно замечанию 1 лекции 26, преобразование Φ разлагается в композицию $T \circ \Psi$ центроаффинного преобразования Ψ и параллельного переноса T, причем, согласно замечанию 3 той же лекции, преобразование Ψ (будучи не только центроаффинным, но также ортогональным несобственным преобразованием) имеет в некоторой системе координат матрицу вида

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & C' \end{Vmatrix},$$

где C' — собственная ортогональная матрица второго порядка и, значит, является вращением с переворотом, т. е. выражается формулой $\Psi = S \circ \Omega$, где Ω — вращение, а S — симметрия относительно плоскости π, перпендикулярной оси l вращения Ω.

Перенос T может быть теперь разложен в композицию $T_2 \circ T_1$ переноса T_1 на вектор, параллельный оси l (и, значит, перпендикулярный плоскости π), и переноса T_2 на вектор, перпендикулярный этой оси (и, значит, параллельный плоскости π).

Но, поскольку плоскость π симметрии S перпендикулярна вектору переноса T_1, этот перенос может быть представлен в виде $T_1 = S' \circ S$, где S' — симметрия относительно некоторой плоскости π', параллельной плоскости π.

Кроме того, так как вектор переноса T_2 параллелен плоскости симметрии S', то преобразования T_2 и S' очевидным образом перестановочны, т. е.

$$T_2 \circ S' = S' \circ T_2.$$

Поэтому

$$\Phi = T_2 \circ T_1 \circ \Psi = T_2 \circ S' \circ S \circ S \circ \Omega = T_2 \circ S' \circ \Omega = \\ = S' \circ T_2 \circ \Omega.$$

В частности, отсюда следует, что если угол α вращения Ω равен нулю (т. е. это вращение является тождественным преобразованием), то $\Phi = S' \circ T_2$, и, значит, поскольку вектор переноса T_2 параллелен плоскости симметрии S', преобразование Φ является скользящей симметрией.

Если же $\alpha \neq 0$, то, как мы знаем (см. доказательство предложения 3 лекции 26), композиция $\Omega' = T_2 \circ \Omega$ будет вращением на угол α вокруг некоторой оси l', параллельной оси l. Следовательно, преобразование $\Phi = S' \circ \Omega'$ является в этом случае вращением с переворотом. □

Лекция 29

Координаты прямой. — Пучки прямых. — Собственные и несобственные пучки. — Расширенные плоскости. — Модели аффинно-проективной геометрии.—Однородные аффинные координаты. — Формулы преобразования однородных аффинных координат. — Уравнения прямых в однородных координатах. — Линии второго порядка на аффинно-проективной плоскости. — Окружности на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости.

До сих пор мы считали основным элементом геометрии точку. Но это совсем необязательно. Можно, например, строить геометрию, в которой основными элементами являются прямые. Мы рассмотрим сначала прямые на плоскости (аффинной).

Предполагая, что на плоскости фиксирована некоторая система аффинных координат x, y, мы можем любую прямую на этой плоскости охарактеризовать тремя числами A, B, C — коэффициентами ее уравнения

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Подобно тому, как координаты однозначно определяют точку, эти числа однозначно определяют прямую. Поэтому их естественно называть *координатами прямой*. Однако если точка однозначно определяет свои координаты, то для прямой это не так — ее координаты определены только с точностью до пропорциональности. Это свойство координат прямой называется их *однородностью*. Чтобы указать это в обозначениях, мы будем прямую с координатами A, B, C обозначать символом $(A : B : C)$.

Другое отличие координат прямых от координат точек состоит в том, что не любая тройка чисел A, B, C может быть тройкой координат прямой: для этого требуется, чтобы хотя бы одно из чисел A или B было отлично от нуля, тогда как на число C никаких ограничений не накладывается. Эта несимметричность координат (особая роль координаты C) приводит, как мы увидим ниже, к многочисленным оговоркам и осложнениям. Но пока мы вынуждены с ней мириться.

Если для прямой (1) коэффициент A отличен от нуля, то мы можем эту прямую охарактеризовать *неоднород-*

ными координатами $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, которые уже однозначно определены прямой. Поэтому прямые можно изображать точками плоскости, сопоставляя прямой (1) точку $\left(\frac{B}{A}, \frac{C}{A}\right)$. Однако при этом из рассмотрения исключаются прямые с $A = 0$. Однородные координаты тем и хороши, что они не предполагают никаких исключений.

Координаты точек $M\ (x, y)$ прямой, проходящей через две различные точки $M_0\ (x_0, y_0)$ и $M_1\ (x_1, y_1)$, выражаются, как мы знаем, формулами

$$x = (1 - t)\, x_0 + tx_1, \quad y = (1 - t)\, y_0 + ty_1.$$

По аналогии для любых двух различных прямых $(A_0 : B_0 : C_0)$ и $(A_1 : B_1 : C_1)$, имеющих неоднородные координаты $\left(\frac{B_0}{A_0}, \frac{C_0}{A_0}\right)$ и $\left(\frac{B_1}{A_1}, \frac{C_1}{A_1}\right)$, можно ввести в рассмотрение всевозможные прямые $(A : B : C)$, для которых

$$(2) \qquad \frac{B}{A} = (1 - t)\frac{B_0}{A_0} + t\,\frac{B_1}{A_1}, \qquad \frac{C}{A} = (1 - t)\frac{C_0}{A_0} + t\,\frac{C_1}{A_1}.$$

Множество всех этих прямых будет тогда аналогом прямой, проходящей через две точки.

Переписав равенства (2) в виде

$$\frac{B}{A} = \frac{(1 - t)\, A_1B_0 + tA_0B_1}{A_0A_1} = \frac{((1 - t)\, A_1)\, B_0 + (tA_0)\, B_1}{((1 - t)\, A_1)\, A_0 + (tA_0)\, A_1},$$

$$\frac{C}{A} = \frac{(1 - t)\, A_1C_0 + tA_0C_1}{A_0A_1} = \frac{((1 - t)\, A_1)\, C_0 + (tA_0)\, C_1}{((1 - t)\, A_1)\, A_0 + (tA_0)\, A_1},$$

мы получим для коэффициентов A, B, C следующие выражения:

$$A = ((1 - t)\, \rho A_1)\, A_0 + (t\rho A_0)\, A_1,$$

$$B = ((1 - t)\, \rho A_1)\, B_0 + (t\rho A_0)\, B_1,$$

$$C = ((1 - t)\, \rho A_1)\, C_0 + (t\rho A_0)\, C_1,$$

где ρ — произвольный множитель пропорциональности. Полагая

$$\mu = (1 - t)\, \rho A_1, \quad \nu = t\rho A_0,$$

мы можем эти формулы переписать в следующем виде:

$$(3)\qquad \begin{aligned} A &= \mu A_0 + \nu A_1, \\ B &= \mu B_0 + \nu B_1, \\ C &= \mu C_0 + \nu C_1. \end{aligned}$$

При выводе этих формул мы пользовались неоднородными координатами, т. е. предполагали все прямые не параллельными оси ординат. Однако формулы (3) имеют смысл для произвольных прямых $(A_0 : B_0 : C_0)$, $(A_1 : B_1 : C_1)$ и для любых допустимых значений параметров μ и ν (т. е. таких, что либо $A \neq 0$, либо $B \neq 0$) определяют некоторую прямую $(A : B : C)$. Впрочем, интересен только случай, когда прямые $(A_0 : B_0 : C_0)$ и $(A_1 : B_1 : C_1)$ различны, поскольку если $(A_0 : B_0 : C_0) = (A_1 : B_1 : C_1)$, то для любых μ и ν будет получаться одна и та же прямая $(A_0 : B_0 : C_0)$.

Все это мотивирует следующее определение:

Определение 1. Множество всех прямых $(A : B : C)$, получающихся по формулам (3) при всевозможных допустимых значениях параметров μ и ν, называется *пучком прямых*, определенным прямыми $(A_0 : B_0 : C_0)$ и $(A_1 : B_1 : C_1)$ (предполагаемыми различными).

Пучки прямых являются, таким образом, аналогами прямых в геометрии точек.

Если положить $f = A_0x + B_0y + C_0$ и $g = A_1x + B_1y + C_1$, то прямые пучка (3) будут иметь уравнения вида

$$(4)\qquad \mu f + \nu g = 0.$$

Такая запись пучка часто бывает удобна.

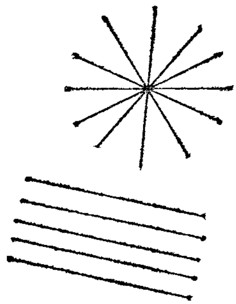
Вспомним теперь, что уравнение (4) у нас уже встречалось, — это в точности уравнение (13) лекции 5. Поэтому, согласно предложению 1 лекции 5 (и следующему за ним замечанию 1), *каждый пучок является множеством всех прямых, либо проходящих через данную точку плоскости, либо параллельных данной прямой.*

В первом случае пучок прямых называется *собственным*, а во втором — *несобственным*. Точка M_0, через которую проходят прямые собственного пучка, называется его *центром*.

Заметим, что для собственного пучка (3) имеет место соотношение

$$\frac{A_1}{A_0} \neq \frac{B_1}{B_0},$$

и потому для любых μ и ν мы получаем некоторую прямую $(A : B : C)$. Для несобственного же пучка имеются «запрещенные» пары (μ, ν), а именно пары, для которых $\mu : \nu = -A_1 : A_0$. Этим парам никакая прямая не соответствует.



Пучки прямых

Прямые на плоскости можно задавать не параметрическими уравнениями, а уравнениями вида (1). Соответствующим аналогом в геометрии прямых будут множества прямых $(A : B : C)$, выделяемые условиями вида

$$K\left(\frac{B}{A}\right) + L\left(\frac{C}{A}\right) + M = 0$$

или, в более общей форме (не предполагающей, что $A \neq 0$), вида

$$KB + LC + MA = 0,$$

где K, L, M — фиксированные числа. Мы будем последнее соотношение записывать в виде

$$AX + BY + CZ = 0, \tag{5}$$

где X, Y, Z — числа M, K и L соответственно. В точной аналогии с «точечным» случаем следовало бы предполагать, что хотя бы одно из чисел X, Y отлично от нуля. Однако мы несколько обобщим (и «симметризуем») постановку и будем лишь требовать, чтобы было отлично от нуля хотя бы одно из чисел X, Y, Z (в противном случае соотношение (5) будет удовлетворяться тождественно).

Замечательно, что этот подход к понятию пучка приводит к тому же результату:

Предложение 1. *Множество прямых тогда и только тогда является пучком, когда принадлежащие ему прямые* $(A : B : C)$ *характеризуются соотношением вида* (5).

Доказательство. Если пучок (3) собственный и $M_0(x_0, y_0)$ — его центр, то прямые $(A : B : C)$ этих лучей характеризуются соотношением

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

вида (5) с $X = x_0$, $Y = y_0$, $Z = 1$.

Если же пучок (3) несобственный, то он состоит из всех прямых $(A : B : C)$, параллельных одному и тому же вектору $\boldsymbol{a}$ (l, m), т. е. таких, что

$$Al + Bm = 0.$$

Это — снова соотношение вида (5), но уже с $X = l$, $Y = m$, $Z = 0$.

Обратно, соотношение (5) при $Z \neq 0$ означает, что прямая $(A : B : C)$ проходит через точку M_0 с координатами

$$x_0 = \frac{X}{Z}, \quad y_0 = \frac{Y}{Z},$$

а при $Z = 0$ — что эта прямая параллельна вектору $\boldsymbol{a}$ с координатами $l = X$, $m = Y$.

Таким образом, в первом случае прямые $(A : B : C)$ будут составлять собственный пучок, а во втором случае — несобственный. □

На основании этого предложения соотношение (5) обычно называется *уравнением пучка.*

Подчеркнем, что при $Z \neq 0$ это уравнение определяет собственный пучок, а при $Z = 0$ — несобственный.

Многочисленные оговорки, которые нам выше пришлось делать, и неполная симметричность между точками и прямыми громко вопиют, чтобы их устранили. В свете всего сказанного выше довольно ясно, что причиной всему — отсутствие у несобственных пучков центров. Попробуем поэтому снабдить каждый несобственный пучок центром.

Поскольку все точки плоскости уже заняты под центры собственных пучков, для этого мы должны расширить плоскость и добавить к ней новые точки, которые уместно назвать «несобственными». Этих точек нужно добавить столько же, сколько имеется несобственных пучков, т. е. классов параллельных прямых. Если мы добавим меньше, то некоторые пучки останутся без центров, а если больше, то некоторые точки не будут центрами пучков. Тем самым мы приходим к следующему определению:

Определение 2. Множество $\mathscr{A}^+$ называется *расширенной плоскостью*, если оно содержит аффинную плоскость $\mathscr{A}$

и задано отображение $d \mapsto d^+$ множества всех прямых d плоскости $\mathscr{A}$ на дополнение $\mathscr{A}^+ \setminus \mathscr{A}$, обладающее следующими свойствами:

а) любой элемент из $\mathscr{A}^+ \setminus \mathscr{A}$ имеет вид d^+ для некоторой прямой d;

б) $d_1^+ = d_2^+$ тогда и только тогда, когда прямые d_1 и d_2 параллельны.

Расширенная плоскость $\mathscr{A}^+$ называется также *аффинно-проективной плоскостью*, а ее геометрия — *аффинно-проективной геометрией*.

Элементы множества $\mathscr{A}^+ \setminus \mathscr{A}$ называются *несобственными точками* аффинно-проективной плоскости $\mathscr{A}^+$, а точки из $\mathscr{A}$ — *собственными точками*.

Прямыми (собственными) плоскости $\mathscr{A}^+$ называются прямые d плоскости $\mathscr{A}$, к каждой из которых добавлена несобственная точка d^+. Эти прямые обозначаются теми же символами d, в связи с чем точку d^+ приходится называть несобственной точкой *прямой* d. Иногда, впрочем, в этом словосочетании под прямой удобно понимать и исходную прямую плоскости $\mathscr{A}$.

Таким образом, получается, что «нарост» $\mathscr{A}^+ \setminus \mathscr{A}$ обладает характеристическим свойством прямых, имея с каждой прямой d единственную общую точку. На этом основании уместно называть его *несобственной прямой* аффинно-проективной плоскости $\mathscr{A}^+$.

Пучками аффинно-проективной плоскости $\mathscr{A}^+$ называются собственные пучки плоскости $\mathscr{A}$ (конечно, подразумевается, что к каждой прямой пучка добавлена ее несобственная точка) и несобственные пучки плоскости $\mathscr{A}$, к которым добавлена несобственная прямая.

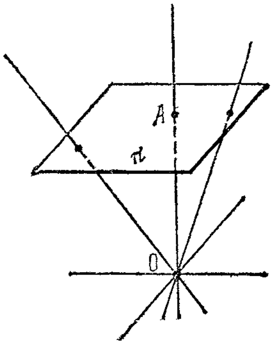
В соответствии с этим любой пучок на плоскости $\mathscr{A}^+$ состоит из всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку (собственную для собственных пучков и несобственную для несобственных). Эта точка называется *центром* пучка.

В аффинно-проективной геометрии, так же как в аффинной геометрии, через любые две различные точки проходит единственная прямая, но, кроме того (свойство, отсутствующее в аффинной геометрии), любые две различные прямые пересекаются в единственной точке.

В полной аналогии с этим, в аффинно-проективной геометрии две различные прямые определяют единственный пучок и (что неверно в аффинной геометрии) два различных пучка имеют единственную общую прямую.

Очень важно отметить, что в определении 2 не уточняется, над каким полем задана аффинная плоскость $\mathscr{A}$. Если эта плоскость является аффинной плоскостью над полем $\mathbb{K}$, то и аффинно-проективная плоскость $\mathscr{A}^+$ также называется плоскостью *над полем* $\mathbb{K}$. В частности, при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ мы получаем *комплексную аффинно-проективную плоскость*. Если $\mathscr{A}$ является вещественно-комплексной плоскостью, то $\mathscr{A}^+$ называется *вещественно-комплексной аффинно-проективной плоскостью*.

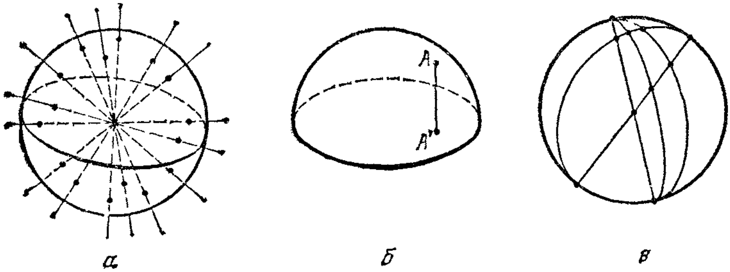
Более того, плоскость $\mathscr{A}$ в определении 2 мы вполне можем считать евклидовой плоскостью. Тогда получается *евклидово-проективная плоскость* $\mathscr{A}^+$, и даже в двух вариантах: вещественном и вещественно-комплексном.



Таким образом, мы имеем целый букет различных «плоскостей», а значит, и различных «геометрий». Относительно каждой геометрической конструкции и теоремы следует всегда отчетливо представлять себе, к какой, собственно, геометрии она относится, т. е. в какой плоскости выполняется. Хотя почти всегда это бывает ясно из контекста, но все же имеются ситуации, когда недостаточное внимание к этому обстоятельству может привести к ошибке.

Чтобы наглядно представить себе аффинно-проективную плоскость, рассмотрим в аффинном пространстве произвольную плоскость π и некоторую точку O, не принадлежащую этой плоскости. Пусть $\mathscr{A}$ — множество всех прямых, проходящих через точку O и пересекающих плоскость π. Это множество находится в биективном соответствии с множеством точек плоскости π (точке A плоскости отвечает прямая OA), и потому его также можно считать аффинной плоскостью (или, как предпочитают иногда говорить, *моделью*, или *интерпретацией* аффинной геометрии). В этой модели точками являются прямые вида OA, а прямыми — множества прямых вида OA, принадлежащих плоскостям, проходящим через точку O (и, конечно, не параллельным плоскости π). [На этом основании иногда говорят, что в рассматриваемой модели прямые изображаются плоскостями (проходящими через точку O и не параллельными плоскости π).]

Естественным расширением множества $\mathcal{A}$ является множество $\mathcal{A}_0$ всех прямых в пространстве, проходящих через точку O (такое множество называется *связкой прямых*). Пусть d — произвольная прямая в $\mathcal{A}$. Она изображается некоторой плоскостью в пространстве, проходящей через точку O. В этой плоскости существует единственная прямая, проходящая через точку O параллельно плоскости π. Мы примем эту прямую за несобственную точку прямой d. Ясно, что тем самым мы превратим



а — Модель на сфере, *б* — переход к модели в круге, *в* — модель в круге

связку $\mathcal{A}_0$ в аффинно-проективную плоскость. Эта плоскость называется моделью (интерпретацией) аффинно-проективной геометрии *в связке*.

Эта интерпретация имеет смысл над любым полем $\mathbb{K}$. В случае же поля $\mathbb{R}$, предполагая объемлющее пространство евклидовым и окружив точку O произвольной сферой (поверхностью шара), мы можем от прямых перейти к парам точек, которые они высекают на этой сфере. В получающейся интерпретации вещественной аффинно-проективной геометрии точки изображаются парами антиподальных (диаметрально противоположных) точек сферы, а прямые — большими кругами сферы (окружностями, высекаемыми на сфере плоскостями, проходящими через центр). Эта модель называется моделью *на сфере*.

Несобственная прямая в этой модели изображается большим кругом (экватором), параллельным плоскости π. Рассмотрим одну из полусфер, на которые этот экватор разбивает сферу. Каждая прямая, проходящая через точку O и пересекающая плоскость π (собственная точка модели $\mathcal{A}_0$), имеет с этой полусферой единственную общую точку. Ортогонально спроектировав эту точку на плоскость экватора, мы получим некоторую внутреннюю точку круга $\mathscr{E}$, ограниченного этим экватором (в проходящей через точку O плоскости, параллельной плоскости π). Таким образом, мы можем изображать собственные точки плоскости $\mathscr{A}_0$ внутренними точками круга $\mathscr{E}$. Что же касается ее несобственных точек, то их мы по-прежнему вынуждены изображать парами диаметрально противоположных точек граничной окружности круга $\mathscr{E}$. Полученная модель аффинно-проективной геометрии называется ее моделью *в круге* Имея в виду именно эту модель, иногда говорят, что *аффинно-проективная плоскость получается из круга отождествлением диаметрально противоположных точек его границы.*

Модель в круге, по-видимому, наиболее наглядна, хотя бы потому, что собственные точки в ней изображаются «настоящими» точками. Ее недостатком является то, что прямые в ней изображаются, вообще говоря, кривыми линиями (половинками эллипсов). Эти линии соединяют диаметрально противоположные точки граничной окружности, и, следовательно, любые две из них имеют общую точку. Таким образом, тот факт, что на аффинно-проективной плоскости две различные прямые имеют единственную общую точку, в модели на круге наглядно очевиден.

Пусть $\mathscr{A}^+$ — произвольная аффинно-проективная плоскость, $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^+$ — аффинная плоскость ее собственных точек и пусть в плоскости $\mathscr{A}$ задана аффинная координатная система Oe_1e_2. Как разумным образом ввести координаты точек плоскости $\mathscr{A}^+$?

Каждая (собственная или несобственная) точка плоскости является центром некоторого (собственного или несобственного) пучка, который однозначно характеризуется коэффициентами X, Y, Z его уравнения (5). Естественно поэтому принять эти коэффициенты за координаты рассматриваемой точки. Эти координаты определены с точностью до пропорциональности, т. е. являются о д н о р о д н ы м и к о о р д и н а т а м и.

Определение 3. Координаты X, Y, Z называются *однородными аффинными координатами*, определенными аффинной координатной системой Oe_1e_2.

Точка с координатами X, Y, Z обозначается символом $(X : Y : Z)$.

Из полученного выше описания уравнений собственных и несобственных пучков немедленно вытекает следующее предложение, которое дает правила явного вычисления однородных аффинных координат (и потому может служить другим их определением):

Предложение 2. *Точка* $(X : Y : Z)$ *тогда и только тогда является собственной точкой, когда* $Z \neq 0$. *В этом случае ее обычные (неоднородные) координаты* x, y *выражаются формулами*

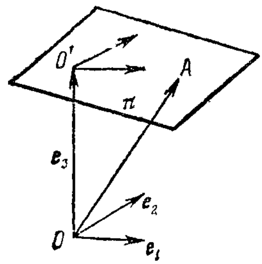
$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Несобственная точка $(X : Y : 0)$ *тогда и только тогда является несобственной точкой прямой с направляющим вектором* $\boldsymbol{a}(l, m)$, *когда*

$$X : Y = l : m. \quad \square$$

Заметим, что *любая тройка* $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ *является тройкой однородных аффинных координат некоторой точки аффинно-проективной плоскости.*

Наглядное описание однородных аффинных координат можно получить, пользуясь моделью в связке $\mathscr{A}_O$. Для такой модели аффинной плоскостью $\mathscr{A}$ является плоскость π и, значит, однородные координаты в $\mathscr{A}_O$ задаются некоторой аффинной координатной системой $O'\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ в π (буква O у нас уже занята). Но вместо того чтобы задавать точку O', можно задать ее радиус-вектор $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OO'}$, очевидно, линейно не выражающийся через векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и потому составляющий вместе с ними базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в пространстве. Обратно, любой базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, для которого конец O' вектора $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OO'}$ принадлежит плоскости π, а векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ параллельны этой плоскости, задает аффинную координатную систему $O'\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ на плоскости π и потому однородные аффинные координаты на плоскости $\mathscr{A}_O$.



Каждая точка плоскости $\mathscr{A}_O$, т. е. прямая в пространстве, однозначно определяется ее направляющим вектором. Если X, Y, Z — координаты этого направляющего вектора (в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) и $Z \neq 0$, то эта прямая пересекает плоскость π в точке с координатами $x = \frac{X}{Z}$ и $y = \frac{Y}{Z}$ (относительно координат системы $O'e_1e_2$), а если $Z = 0$, то эта прямая параллельна прямым на плоскости π, имеющим направляющий вектор с координатами X и Y (относительно базиса e_1, e_2). Согласно предложению 2 это означает, что определяемые базисом e_1, e_2, e_3 (т. е. соответствующей аффинной координатной системой $O'e_1e_2$) *однородные аффинные координаты на аффинно-проективной плоскости* $\mathcal{A}_0$ *являются не чем иным, как координатами* X, Y, Z *направляющих векторов точек этой плоскости, рассматриваемых как прямые в пространстве.*

В модели на сфере точка $(X : Y : Z)$ изображается поэтому двумя точками

$$(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) \quad \text{и} \quad (-\lambda X, -\lambda Y, -\lambda Z)$$

сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Переход к модели в круге означает, что точка $(X : Y : Z)$ при $Z \neq 0$ изображается точкой круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ с координатами

$$x = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad y = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

а при $Z = 0$ — парой точек (x, y) и $(-x, -y)$ (заметим, что при $Z = 0$ необходимо $x^2 + y^2 = 1$).

Интерпретация однородных аффинных координат как координат векторов в пространстве позволяет без всяких вычислений написать формулы перехода от одной системы однородных аффинных координат к другой. Действительно, это должны быть просто формулы перехода от координат векторов в одном базисе к координатам в другом. Как мы знаем, эти формулы имеют вид

$$\text{(6)} \quad \begin{aligned} \rho X' &= c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z, \\ \rho Y' &= c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z, \\ \rho Z' &= c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь мы ввели еще произвольный множитель пропорциональности ρ, чтобы подчеркнуть тот факт, что имеем дело с однородными координатами.

Однако тут следует учесть, что мы рассматриваем не произвольные базисы, а определенным образом связанные с плоскостью π (два первых вектора базиса должны быть параллельны плоскости π, а конец последнего должен принадлежать этой плоскости). Учтя эти требования, мы немедленно получим, что в формулах (6) коэффициенты c_{31} и c_{32} должны быть равны нулю, а коэффициент c_{33} — единице.

Тем самым мы доказали, что *две произвольные системы однородных аффинных координат $X : Y : Z$ и $X' : Y' : Z'$ на аффинно-проективной плоскости связаны формулами вида*

$$(7)\qquad \begin{aligned} \rho X' &= c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z, \\ \rho Y' &= c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z, \\ \rho Z' &= Z, \end{aligned}$$

где ρ — множитель пропорциональности, а

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Конечно, это утверждение справедливо для любой аффинно-проективной плоскости (а не только для плоскости $\mathscr{A}_0$). Его можно доказать и непосредственно, вспомнив формулы преобразования неоднородных аффинных координат и воспользовавшись предложением 2.

Согласно предложению 2 однородные координаты точек произвольной прямой $(A : B : C)$ на аффинной плоскости $\mathscr{A}$ удовлетворяют уравнению

$$A\left(\frac{X}{Z}\right) + B\left(\frac{Y}{Z}\right) + C = 0,$$

т. е. уравнению

$$(8)\qquad AX + BY + CZ = 0.$$

На аффинно проективной плоскости $\mathscr{A}^+$ это означает, что уравнению (8) удовлетворяют координаты собственных точек собственной прямой $(A : B : C)$. Но направляющий вектор прямой $(A : B : C)$ имеет, как мы знаем, координаты $B, -A$, откуда, в силу предложения 2, следует, что единственная несобственная точка этой прямой имеет однородные координаты $(B : -A : 0)$ и потому также удовлетворяет уравнению (8). Это означает, что *на аффинно-проективной плоскости уравнения вида* (8), *где либо* $A \neq 0$, *либо* $B \neq 0$, *представляют собой уравнения собственных прямых.*

Если же $A = 0$, $B = 0$, но $C \neq 0$ (иначе соотношение (8) будет удовлетворяться тождественно), то уравнению (8) будут удовлетворять все несобственные точки (и только они). Следовательно, *при* $A = 0$, $B = 0$ *уравнение* (8) *представляет собой уравнение несобственной прямой.*

Таким образом, на аффинно-проективной плоскости любое уравнение вида (8) с $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ является уравнением прямой. Иными словами, подобно тому как любая тройка чисел $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ является тройкой однородных координат некоторой точки, так и *любая тройка чисел* $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ *является тройкой однородных координат некоторой прямой.*

Мы видим, что введение несобственных точек восстанавливает полную симметрию между точками и прямыми. Аналитически эта симметрия проявляется в том, что одно и то же соотношение (8) является (при постоянных A, B, C и переменных X, Y, Z) уравнением прямой и (при переменных A, B, C и постоянных X, Y, Z) уравнением пучка, т. е. своеобразным «уравнением» его центра.

Обратим внимание, что на вещественно-комплексной плоскости несобственная прямая является вещественной прямой.

По аналогии мы можем теперь ввести следующее определение:

Определение 4. *Линией второго порядка* на аффинно-проективной (скажем, комплексной или вещественно-комплексной) плоскости называется множество всех ее точек, однородные координаты X, Y, Z которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0. \tag{9}$$

Аналогичным образом определяются на аффинно-проективной плоскости *алгебраические линии* произвольного порядка.

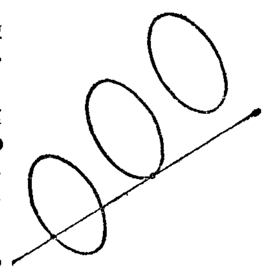
Если хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля, то собственные точки линии (9) составляют на аффинной плоскости линию второго порядка

$$(10)\quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Ее несобственные точки $(X : Y : 0)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0,$$

откуда видно, что они представляют собой несобственные точки асимптотических направлений линии (10). Таким образом, в рассматриваемом случае линия второго порядка (9) на аффинно-проективной плоскости получается из линии второго порядка (10) на аффинной плоскости добавлением несобственных точек ее асимптотических направлений.



Гипербола, парабола и эллипс на аффинно проективной плоскости

Отсюда следует, что если линия (10) является парой прямых, то линия (9) будет парой «тех же» прямых (т. е. с добавленными несобственными точками).

Линия (9) называется *эллипсом*, *параболой* или *гиперболой*, если, соответственно, эллипсом, параболой или гиперболой является линия (10). Таким образом, в аффинно-проективной (вещественной или вещественно-комплексной) плоскости эллипс, не имея вещественных неасимптотических направлений, не пересекает несобственную прямую в вещественных точках, парабола имеет с несобственной прямой одну точку — несобственную точку ее оси (говорят, что парабола *касается* несобственной прямой в этой точке), а гипербола имеет с несобственной прямой две общие точки.

В случае, когда $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, уравнение (9) имеет вид

$$2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0$$

и потому удовлетворяется точками несобственной прямой $Z = 0$ и прямой

$$2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33}Z = 0,$$

которая может быть собственной (если $a_{13} \neq 0$ или $a_{23} \neq 0$) или несобственной (если $a_{13} = 0$ и $a_{23} = 0$).

Резюмируя, мы получаем следующую теорему (которую для определенности сформулируем для ситуации $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$):

Теорема 1 (о классификации вещественных линий второго порядка на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости). *Каждая вещественная линия второго порядка на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости является одной из следующих одиннадцати линий:*

[1] *Действительный эллипс* ($X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$).

[2] *Мнимый эллипс* ($X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$).

[3] *Пара различных мнимых (комплексно-сопряженных) прямых, пересекающихся в собственной точке* ($X^2 + Y^2 = 0$).

[4] *Гипербола* ($X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$).

[5] *Пара различных вещественных собственных прямых, пересекающихся в собственной точке* ($X^2 - Y^2 = 0$).

[6] *Парабола* ($Y^2 - 2XZ = 0$).

[7] *Пара различных вещественных собственных прямых, пересекающихся в несобственной точке* ($Y^2 - Z^2 = 0$).

[8] *Пара различных мнимых (комплексно-сопряженных) прямых, пересекающихся в несобственной точке* ($Y^2 + Z^2 = 0$).

[9] *Пара совпадающих вещественных собственных прямых* ($Y^2 = 0$).

[10] *Пара прямых, состоящая из вещественной собственной прямой и несобственной прямой* ($YZ = 0$).

[11] *Пара совпадающих прямых, каждая из которых является несобственной прямой* ($Z^2 = 0$). □

В скобках здесь выписаны уравнения, получающиеся при соответствующем (каноническом) выборе однородных аффинных координат.

Аналогичные результаты справедливы, конечно, и в евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости. Мы не будем их формулировать (это было бы излишним повторением), а вместо этого рассмотрим более интересный вопрос о характеризации окружностей в евклидово-проективной геометрии

Естественно, что однородные координаты X, Y, Z на евклидово проективной плоскости мы будем считать *однородными прямоугольными координатами*, т. е. определенными координатной системой Oe_1e_2 с ортонормированными векторами e_1, e_2.

Определение 5. Окружностью на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости называется линия второго порядка, имеющая в однородных прямоугольных координатах X, Y, Z уравнение (9), в котором

$$a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad a_{12} = 0.$$

Положив

$$a = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad b = -\frac{a_{23}}{a_{22}}, \quad R^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}}{a_{11}},$$

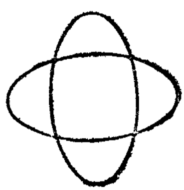
мы можем записать уравнение (9) такой линии в виде

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = R^2Z^2, \tag{11}$$

показывающем, что ее собственные точки составляют окружность радиуса R с центром в точке (a, b).

Несобственные же точки $(X : Y : 0)$ окружности (11) определяются из уравнения $X^2 + Y^2 = 0$, т. е. имеют вид $(\pm 1 : i : 0)$. Они называются *циклическими точками* евклидово-проективной плоскости.

Таким образом, мы видим, что при переходе от евклидовой к евклидово-проективной геометрии к каждой окружности прибавляются две новые точки, одновременно несобственные и мнимые.



Пересечение эллипсов

Поскольку циклические точки принадлежат к а ж д о й окружности, невозможно разумным образом ввести понятие их расстояния от собственных точек. Во всяком случае нет никаких причин считать это расстояние бесконечным. Это показывает несовершенство распространенной (особенно в прошлом) терминологии, в которой несобственные точки называются «бесконечно удаленными» (мы не говорим уже о том, что в рамках аффинной теории этот термин вообще не имеет права на существование).

Целесообразно причислять к окружностям еще и пары прямых, по крайней мере одна из которых является несобственной прямой (такие «окружности» характеризуются условиями $a_{11} = a_{22} = 0$ и $a_{12} = 0$). Тогда *среди* *всех вещественных линий второго порядка окружности будут характеризоваться тем, что они проходят через циклические точки.* Действительно, если уравнение (9) удовлетворяется при $X = \pm 1$, $Y = i$ и $Z = 0$, то

$$(a_{11} - a_{22}) \pm 2ia_{12} = 0,$$

откуда следует, что $a_{11} = a_{22}$ и $a_{12} = 0$. □

Тот факт, что все окружности проходят через циклические точки, объясняет многие особенности этих линий. Например, два эллипса пересекаются, вообще говоря, в четырех точках. Почему же окружности могут иметь только две общие точки? Ответ: другие две общие точки являются циклическими.

Лекция 30

Пучки плоскостей. — Связки плоскостей. — Аффинно-проективное пространство. — Проективная плоскость. — Линии второго порядка на проективной плоскости. — Координатные изоморфизмы линейных пространств. — Координатные изоморфизмы аффинных пространств. — Аффинно-проективные пространства. — Проективные пространства.

Все построения предыдущей лекции легко переносятся в пространство.

Предполагая, что в пространстве фиксирована некоторая система аффинных координат x, y, z, мы для любой плоскости в пространстве будем считать ее однородными координатами $(A : B : C : D)$ коэффициенты ее уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Пусть

$$\begin{gathered} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

— две различные плоскости в пространстве и пусть μ и ν — такие параметры (элементы поля $\mathbb{K}$), что среди первых трех чисел

$$\begin{aligned} A &= A_0\mu + A_1\nu, \\ B &= B_0\mu + B_1\nu, \\ C &= C_0\mu + C_1\nu, \\ D &= D_0\mu + D_1\nu \end{aligned} \tag{3}$$

имеются числа, отличные от нуля (и, значит, определена плоскость $(A : B : C : D)$).

Определение 1. Множество всех плоскостей $(A : B : C : D)$, получающихся по формулам (3), называется *пучком плоскостей*, определенным плоскостями (2).

Согласно предложению 3 лекции 11 (и следующему за ним замечанию 1) *каждый пучок является множеством всех плоскостей, либо проходящих через данную прямую в пространстве, либо параллельных данной плоскости.*

В первом случае пучок плоскостей называется *собственным*, а во втором — *несобственным*. Прямая, через которую проходят все плоскости собственного пучка, называется его *осью* (или *центральной прямой*).

Подобно пучкам прямых на плоскости пучки плоскости в пространстве являются аналогами прямых в геометрии точек.

Однако в пространстве возможны и аналоги плоскостей.

Пусть

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

— три плоскости в пространстве, не принадлежащие одному пучку (т. е. не проходящие через одну прямую и не параллельные), и пусть μ_0, μ_1, μ_2 — такие параметры, что среди первых трех чисел

$$(5)\qquad \begin{aligned} A &= A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + A_2\mu_2, \\ B &= B_0\mu_0 + B_1\mu_1 + B_2\mu_2, \\ C &= C_0\mu_0 + C_1\mu_1 + C_2\mu_2, \\ D &= D_0\mu_0 + D_1\mu_1 + D_2\mu_2 \end{aligned}$$

имеются числа, отличные от нуля (и, значит, определена плоскость $(A : B : C : D)$).

Определение 2. Множество всех плоскостей $(A : B : C : D)$, получающихся по формулам (5), называется *связкой плоскостей*, определенной плоскостями (4).

(Для плоскостей (4), принадлежащих одному пучку, все плоскости $(A : B : C : D)$ будут принадлежать этому пучку. Таким образом, в этом случае связка вырождается в пучок.)

Согласно предложению 4 лекции 11 (и следующему за ним замечанию 1) *каждая связка является множеством всех плоскостей, либо проходящих через данную точку, либо параллельных данной прямой.*

В первом случае связка называется *собственной*, а во втором — *несобственной*. Точка, через которую проходят плоскости собственной связки, называется ее *центром*.

Для связок имеет место следующий аналог предложения 1 предыдущей лекции:

Предложение 1. *Множество плоскостей тогда и только тогда является связкой, когда принадлежащие ему* *плоскости* $(A : B : C : D)$ *характеризуются соотношением вида*

$$(6) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0.$$

Доказательство. Если связка (4) собственная и $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ — ее центр, то ее плоскости $(A : B : C : D)$ характеризуются соотношением

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

вида (6) с $X = x_0$, $Y = y_0$, $Z = z_0$ и $T = 1$.

Если же связка (4) несобственная, то она состоит из всех плоскостей, параллельных одному и тому же вектору $\boldsymbol{a}\,(l, m, n)$, т. е. таких, что

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Это — снова соотношение вида (6), но уже с $X = l$, $Y = m$, $Z = n$ и $T = 0$.

Обратно, соотношение (6) при $T \neq 0$ означает, что плоскость $(A : B : C : D)$ проходит через точку M_0 с координатами

$$x_0 = \frac{X}{T}, \quad y_0 = \frac{Y}{T}, \quad z_0 = \frac{Z}{T},$$

а при $T = 0$ — что эта плоскость параллельна вектору $\boldsymbol{a}\,(l, m, n)$ с координатами

$$l = X, \quad m = Y, \quad n = Z.$$

Таким образом, в первом случае плоскости $(A : B : C : D)$ будут составлять собственную связку, а во втором случае — несобственную. □

Чтобы несобственные связки также имели центр, нужно каждую прямую дополнить несобственной точкой, каждую плоскость — несобственной прямой и считать, что несобственная точка прямой тогда и только тогда принадлежит несобственной прямой плоскости, когда эта прямая и плоскость параллельны.

Ясно, что для этого достаточно присоединить к каждой прямой по несобственной точке — одной и той же для всех параллельных прямых — и объявить множество несобственных точек прямых, параллельных некоторой плоскости, несобственной прямой этой плоскости. При этом несобственные прямые параллельных плоскостей будут, как и требуется, совпадать.

Множество всех присоединенных к пространству несобственных точек естественно считать плоскостью

Формальное описание получившегося *аффинно-проективного пространства* производится по образцу определения 2 лекции 29. Каждая точка такого пространства является центром некоторой (собственной или несобственной) связки с уравнением (6). Коэффициенты X, Y, Z, T этого уравнения называются *однородными аффинными координатами* данной точки (в рассматриваемой аффинной координатной системе $Oe_1e_2e_3$). (Ср. с определением 3 лекции 29.)

Для этих координат имеет место, конечно, аналог предложения 2 лекции 29, точную формулировку которого мы оставляем читателю.

Для построения моделей аффинно-проективного пространства необходимо выйти в четырехмерное пространство, что, конечно, в значительной степени лишает их наглядности.

Впрочем, аналог модели в круге можно построить, оставаясь в рамках трехмерной геометрии: достаточно каждой точке $(X : Y : Z : T)$ аффинно-проективного пространства (над полем $\mathbb{R}$) сопоставить точку шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ с координатами

$$x = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+T^2}}, \quad y = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+T^2}},$$

$$z = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2+T^2}},$$

а при $T = 0$ (когда $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) — также и диаметрально противоположную точку $(-x, -y, -z)$ его граничной сферы. В получающейся модели (называемой, естественно, *моделью в шаре*) вещественное аффинно-проективное пространство изображается шаром с отождествленными диаметрально противоположными точками его границы.

З а м е ч а н и е 1. Это модель вещественного аффинно-проективного пространства идентична (с точностью до величины радиуса шара) описанной в лекции 26 модели группы $\mathrm{Rot}_O(3) \approx \mathrm{SO}(3)$. Поэтому *модель аффинно-проективного пространства является также группа* $\mathrm{SO}(3)$.

Вернемся теперь к геометрии плоскости.

Выше мы уже подчеркивали полную симметричность (или, как обычно говорят, д в о й с т в е н н о с т ь) точек и прямых в аффинно-проективной плоскости. Однако на самом деле в стройной мелодии этой двойственности имеется неприятнейший диссонанс, связанный с различием собственных и несобственных точек и прямых. Действительно, на плоскости несобственных точек существует много, а несобственная прямая имеется только одна! Чтобы избавиться от этой последней шероховатости, надо проигнорировать различие между собственными и несобственными точками или прямыми и считать их полностью равноправными и взаимно заменяемыми.

Определение 3. Аффинно-проективная плоскость, в которой игнорируется различие между собственными и несобственными точками и прямыми, называется *проективной плоскостью*, а ее геометрия — *проективной геометрией* (плоскости).

Это определение равным образом годится для плоскостей над любым полем $\mathbb{K}$. Таким образом, мы получаем, в частности, *вещественную проективную плоскость* и *комплексную проективную плоскость*, а также, конечно, и *вещественно-комплексную проективную плоскость*.

Каждую проективную плоскость можно превратить в аффинно-проективную плоскость, произвольно выбрав на ней прямую и объявив точки этой прямой несобственными. Таким образом, одну и ту же проективную плоскость можно бесконечным (если основное поле $\mathbb{K}$ бесконечно) числом способов сделать аффинно-проективной плоскостью, тогда как каждая аффинно-проективная плоскость однозначно определяет соответствующую проективную плоскость.

Проще всего превратить в проективную плоскость модель в связке $\mathscr{A}_0$ (а не, скажем, модель в круге). Действительно, несобственными точками этой модели являются прямые в пространстве, параллельные плоскости π, и потому, чтобы превратить ее в проективную плоскость, достаточно просто забыть про плоскость π. Модель $\mathscr{A}_0$, рассматриваемую как проективную плоскость, мы будем обозначать символом $\mathscr{P}_0$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — произвольный базис в пространстве.

Определение 4. *Проективными координатами* точек проективной плоскости $\mathscr{P}_0$ называются координаты X, Y, Z в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ направляющих векторов этих точек как прямых в пространстве.

Проективные координаты, конечно, являются однородными координатами. Их отличие от однородных аффинных координат состоит в том, что участвующий в их определении базис e_1, e_2, e_3 совершенно произволен и ни с какой плоскостью π не связан.

Поскольку проективные координаты точек плоскости являются не чем иным, как координатами векторов в пространстве, *переход от одной системы проективных координат к другой описывается формулами* (6) *лекции* 29.

По аналогии с определением 1 лекции 25 *проективным преобразованием* проективной плоскости называется преобразование по равенству координат в двух различных системах проективных координат. Ясно (см. в лекции 25 аналогичное утверждение для аффинных преобразований), что *в произвольной системе проективных координат любое проективное преобразование записывается теми же формулами* (6) *лекции* 29.

По сравнению с преобразованиями однородных аффинных координат (задаваемых формулами (7) лекции 29) при преобразовании проективных координат мы обладаем существенно большей свободой. Это, в частности, позволяет существенно сократить число канонических уравнений линии второго порядка.

Например, перейдя в уравнении гиперболы $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ к новым координатам

$$X' = Y, \quad Y' = Z, \quad Z' = X$$

и умножив его на -1, мы получим (убрав штрихи) уравнение эллипса $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$. Аналогично, уравнение параболы $Y^2 = 2XZ$ в координатах

$$X' = Y, \quad Y' = X - Z, \quad Z' = X + Z$$

также совпадает с тем же уравнением эллипса. Это показывает, что на проективной вещественной (или комплексной) плоскости имеется только одна невырожденная (т. е. не распадающаяся на прямые) линия второго порядка. Если мы, введя несобственную прямую, превратим нашу плоскость в аффинно-проективную, то эта линия окажется эллипсом, если введенная прямая ее не пересекает, параболой, если эта прямая касается линии, и, наконец, гиперболой, если эта прямая пересекает линию в двух точках.

На вещественно-комплексной плоскости, кроме этой «действительной» линии, будет еще только «мнимая» линия $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, не имеющая вещественных точек.

Аналогичным образом сократится и число классов пар прямых.

Окончательная теорема имеет, очевидно, следующий вид

Теорема 1 (теорема классификации линий второго порядка на проективной плоскости). *На вещественно-комплексной проективной плоскости каждая вещественная линия второго порядка является одной из следующих пяти линий:*

[1] *Невырожденная действительная линия* ($X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$).

[2] *Невырожденная мнимая линия* ($X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$).

[3] *Пара вещественных различных прямых* ($X^2 - Y^2 = 0$).

[4] *Пара мнимых (комплексно-сопряженных) прямых* ($X^2 + Y^2 = 0$).

[5] *Пара совпадающих (вещественных) прямых* ($X^2 = 0$).

На комплексной проективной плоскости имеется только три линии второго порядка:

[1] *Невырожденная линия* ($X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$).

[2] *Пара различных прямых* ($X^2 + Y^2 = 0$).

[3] *Пара совпадающих прямых* ($X^2 = 0$). □

В скобках здесь выписаны канонические уравнения.

Обратим внимание, что определение 4 дает проективные координаты, собственно говоря, только для точек модели $\mathscr{P}_0$. В любой другой модели их проще всего определять как координаты X', Y', Z', связанные с некоторыми аффинно проективными координатами формулами (6) лекции 29. Хотя этот способ неуклюж и малоэстетичен, но в общем случае мы не имеем другого выхода, поскольку само понятие проективной плоскости мы определили через посредство аффинно-проективных плоскостей. Дать же этому понятию независимое определение совсем не так просто. Мы сделаем это, быть может, не самым элегантным, но, по-видимому, самым простым и идейно достаточно богатым способом.

Мы начнем с того, что дадим новое определение линейному пространству.

Заметим прежде всего, что для любого поля $\mathbb{K}$ и любого $n \geqslant 1$ формулы вида

$$\begin{aligned} y^1 &= c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \dots & c_n^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_1^n & \dots & c_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

задают биективные отображения множества $\mathbb{K}^n$ на себя. Эти отображения представляют собой изоморфизмы линеала $\mathbb{K}^n$ на себя (т. е. его *автоморфизмы*). Они называются *однородными линейными преобразованиями* и, очевидно, составляют группу. Эта группа обозначается символом $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ и называется *полной линейной группой*. Она изоморфна группе невырожденных матриц порядка n.

Для любого линейного пространства $\mathscr{V}$ размерности n над полем $\mathbb{K}$ его координатные изоморфизмы (см. лекцию 4) представляют собой биективные отображения

$$\alpha: \mathscr{V} \to \mathbb{K}^n, \tag{8}$$

обладающие следующими свойствами (запись $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathscr{V})$ означает, что α представляет собой координатный изоморфизм вида (8)):

Свойство 1. *Если* $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathscr{V})$ *и* $\varphi \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$, *то* $\varphi \circ \alpha \in \mathrm{Coor}(\mathscr{V})$.

Свойство 2. *Если* $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Coor}(\mathscr{V})$, *то* $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in$ $\in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$.

Свойство 2 утверждает попросту, что координаты в двух различных базисах связаны формулами вида (7), а свойство 1 — что если $x^1, \dots, x^n$ — координаты, то $y^1, \dots$ $\dots, y^n$ — для любого преобразования (7) — тоже координаты (но, конечно, в другом базисе).

Оказывается (и это для нас новый факт), что свойства 1 и 2 полностью характеризуют координатные изоморфизмы:

Предложение 2. *Если для некоторого множества* $\mathscr{V}$ *задано множество* $\mathrm{Coor}(\mathscr{V})$ *его биективных отображений* $\mathscr{V} \to \mathbb{K}^n$, *обладающее свойствами* 1 *и* 2 (*достаточно даже только свойства* 2), *то в* $\mathscr{V}$ *можно единственным образом ввести структуру линейного пространства так, чтобы отображения из* $\mathrm{Coor}(\mathscr{V})$ *стали координатными изоморфизмами* (*всеми, если выполнено свойство* 1).

Доказательство. Выбрав произвольное отображение $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathscr{V})$, перенесем с его помощью линейные операции из $\mathbb{K}^n$ в $\mathscr{V}$, т. е. положим

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \alpha^{-1}(\alpha(\boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{y})),$$
$$k\boldsymbol{x} = \alpha^{-1}(k\alpha(\boldsymbol{x}))$$

для любых элементов $x, y \in \mathscr{V}$ и любого числа $k \in \mathbb{K}$. Ясно, что тем самым мы превратим $\mathscr{V}$ в линеал, а α — в координатный изоморфизм (соответствующий базису $\alpha^{-1}(e_1), \ldots, \alpha^{-1}(e_n)$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис линейного пространства $\mathbb{K}^n$). Поэтому для доказательства предложения 2 достаточно установить, что эти операции не зависят от выбора α. Но это непосредственно следует из свойства 2 и из того, что однородные линейные преобразования являются автоморфизмами пространства $\mathbb{K}^n$. Действительно, если $\alpha' = \varphi \circ \alpha$, где $\varphi \in GL(n; \mathbb{K})$, то

$$\alpha'^{-1}(\alpha'(x) + \alpha'(y)) =$$
$$= \alpha^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(\alpha(x)) + \varphi(\alpha(y)))) = \alpha^{-1}(\alpha(x) + \alpha(y))$$

и

$$\alpha'^{-1}(k\alpha'(x)) = \alpha^{-1}(\varphi^{-1}(k\varphi(\alpha(x)))) = \alpha^{-1}(k\alpha(x))$$

для любых элементов $x, y \in \mathscr{V}$ и любого числа $k \in \mathbb{K}$. Единственность структуры линеала на $\mathscr{V}$ очевидна. $\square$

Мы видим, что предложение 2 дает нам совсем новую аксиоматику линейных пространств. Основными неопределяемыми понятиями в ней являются отображения (8), а свойства 1 и 2 представляют собой аксиомы.

Совершенно аналогично можно аксиоматически определять и аффинные пространства. Здесь следует начинать с группы Aff $(n; \mathbb{K})$ всех автоморфизмов множества $\mathbb{K}^n$ как аффинного пространства, т. е. *неоднородных линейных преобразований* вида

$$\begin{aligned} y^1 &= c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n + b^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n + b^n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_1^n & \ldots & c_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для любого аффинного пространства $\mathscr{A}$ над полем $\mathbb{K}$ множество Coor $(\mathscr{A})$ его координатных изоморфизмов

$$\alpha: \mathscr{A} \to \mathbb{K}^n$$

обладает теми же свойствами 1 и 2 (в которых, конечно, Coor $(\mathscr{V})$ надо заменить на Coor $(\mathscr{A})$, а $GL(n; \mathbb{K})$ — на Aff $(n; \mathbb{K})$). Имеет место и аналог предложения 2:

Предложение 3. Если для некоторого множества $\mathscr{A}$ задано множество $\mathrm{Coor}\,(\mathscr{A})$ *его биективных отображений $\mathscr{A} \to \mathbb{K}^n$, обладающих свойствами* 1 *и* 2 *(по отношению к группе* $\mathrm{Aff}\,(n;\ \mathbb{K})$*), то в $\mathscr{A}$ можно единственным образом ввести структуру аффинного пространства над полем $\mathbb{K}$ так, чтобы отображения из* $\mathrm{Coor}\,(\mathscr{A})$ *стали координатными изоморфизмами.*

Доказательство. Выбрав в $\mathscr{A}$ некоторую точку O, обозначим через $\mathrm{Coor}^0\,(\mathscr{A})$ подмножество множества $\mathrm{Coor}\,(\mathscr{A})$, состоящее из всех отображений $\alpha \in \mathrm{Coor}\,(\mathscr{A})$, переводящих O в точку $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$. Легко видеть, что, положив $\mathscr{V} = \mathscr{A}$ и $\mathrm{Coor}\,(\mathscr{V}) = \mathrm{Coor}^0\,(\mathscr{A})$, мы удовлетворим всем условиям предложения 2. Тем самым множество $\mathscr{V}$ оказывается линеалом. Определим теперь отображение $A, B \mapsto \overrightarrow{AB}$, положив

$$\overrightarrow{AB} = \alpha^{-1}(\alpha(B) - \alpha(A)),$$

где $\alpha \in \mathrm{Coor}^0\,(\mathscr{A})$. Легко проверяется, что вектор $\overrightarrow{AB} \in \mathscr{V}$ не зависит от выбора α и что тем самым множество $\mathscr{A}$ наделяется структурой аффинного пространства с ассоциированным линеалом $\mathscr{V}$. Его единственность очевидна.

Чтобы тем же методом получить аффинно проективные пространства (мы не будем ограничиваться случаем $n = 2$ и дадим общее определение; аффинно проективные плоскости получатся при $n = 2$), надо предварительно определить аффинно проективный аналог пространства $\mathbb{K}^n$. Совершенно ясно, как это можно сделать.

Рассмотрим подмножество $\mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ линейного пространства $\mathbb{K}^{n+1}$, состоящее из всех отличных от нуля векторов $(x^0, x^1, \ldots, x^n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Отношение пропорциональности:

$$(x^0, x^1, \ldots, x^n) \sim (y^0, y^1, \ldots, y^n),$$

если существует такое число $k \neq 0$, что

$$y^0 = kx^0, \quad y^1 = kx^1, \ \ldots, \quad y^n = kx^n,$$

является на этом подмножестве отношением эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий вектор $(x^0, x^1, \ldots$ $\ldots, x^n)$, мы будем обозначать символом

$$(x^0 : x^1 : \ldots : x^n). \tag{9}$$

(Эти классы суть не что иное, как прямые пространства $\mathbb{K}^{n+1}_{\text{афф}}$, проходящие через точку $(0, 0, \ldots, 0)$.)

Определение 5. Множество всех классов эквивалентности (9) обозначается символом $\mathbb{K}P^n$ и называется *арифметическим проективным пространством размерности n над полем* $\mathbb{K}$.

На этом пространстве действует группа Pr-Aff $(n, \mathbb{K})$, элементами которой являются однородные линейные преобразования вида

$$\begin{aligned}
\rho y^0 &= x^0,\\
\rho y^1 &= c_0^1 x + c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\rho y^n &= c_0^n x^0 + c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_1^n & \ldots & c_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как абстрактная группа эта группа изоморфна группе Aff $(n; \mathbb{K})$.

В частности, при $n = 2$ мы имеем группу Pr-Aff $(2; \mathbb{K})$, преобразования которой (после простого переобозначения $x^0 = Z$, $x^1 = X$, $x^2 = Y$) могут быть записаны в знакомом нам виде:

$$\begin{aligned}
\rho X' &= c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z,\\
\rho Y' &= c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z,\\
\rho Z' &= Z,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{32} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определение 6. *Аффинно-проективным пространством размерности n над полем* $\mathbb{K}$ называется произвольное множество $\mathscr{A}$, для которого задано такое множество Coor $(\mathscr{A})$ биективных отображений

$$\alpha\colon \mathscr{A} \to \mathbb{K}P^n,$$

что выполнены следующие аксиомы:

Аксиома 1. Если $\alpha \in$ Coor $(\mathscr{A})$ и $\varphi \in$ Pr-Aff $(n; \mathbb{K})$, то $\varphi \circ \alpha \in$ Coor $(\mathscr{A})$.

Аксиома 2. Если $\alpha, \alpha' \in$ Coor $(\mathscr{A})$, то $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in$ $\in$ Pr-Aff $(n, \mathbb{K})$.

Точки $A \in \mathscr{A}$, для которых $\alpha(A)$ имеет вид $(0 : x^1 : \ldots$ $\ldots : x^n)$ хотя бы при одном отображении $\alpha \in \operatorname{Coor}(\mathscr{A})$ (а значит, и при всех таких отображениях), называются *несобственными точками* аффинно-проективного пространства $\mathscr{A}$. Остальные его точки называются *собственными*.

В свете всего сказанного выше совершенно ясно, что двумерные аффинно-проективные пространства $\mathscr{A}$ в смысле этого определения совпадают с аффинно-проективными плоскостями в смысле определения 2 лекции 29. Для любого же n они совпадают с аффинно-проективными пространствами, которые получаются в порядке очевидного обобщения определения 2 лекции 29 (в частности, при $n = 3$ получается рассмотренное выше трехмерное аффинно-проективное пространство, возникающее при добавлении несобственных точек к обычному аффинному пространству).

Теперь уже абсолютно понятно, как следует определять проективные пространства.

Пусть $\operatorname{Proj}(n; \mathbb{K})$ — группа всех преобразований пространства $\mathbb{K}P^n$, действующих по формулам вида

$$\begin{aligned} \rho y^0 &= c_0^0 x^0 + c_1^0 x^1 + \ldots + c_n^0 x^n, \\ \rho y^1 &= c_0^1 x^0 + c_1^1 x^1 + \ldots + c_n^1 x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho y^n &= c_0^n x^0 + c_1^n x^1 + \ldots + c_n^n x^n, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{vmatrix} c_0^0 & c_1^0 & \ldots & c_n^0 \\ c_0^1 & c_1^1 & \ldots & c_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0^n & c_1^n & \ldots & c_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как абстрактная группа эта группа изоморфна фактор-группе группы всех невырожденных матриц порядка $n + 1$ по нормальному делителю, состоящему из скалярных матриц.

Определение 7. *Проективным пространством размерности n над полем* $\mathbb{K}$ называется произвольное множество $\mathscr{P}$, для которого задано такое множество $\operatorname{Coor}(\mathscr{P})$ биективных отображений

$$\alpha\colon \mathscr{P} \to \mathbb{K}P^n,$$

что выполнены следующие аксиомы:

Аксиома 1. Если $\alpha \in \mathrm{Coor}\,(\mathscr{P})$ и $\varphi \in \mathrm{Proj}\,(n;\ \mathbb{K})$, то $\varphi \circ \alpha \in \mathrm{Coor}\,(\mathscr{P})$.

Аксиома 2. Если $\alpha,\ \alpha' \in \mathrm{Coor}\,(\mathscr{P})$, то $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Proj}\,(n;\ \mathbb{K})$.

Отображения $\alpha \in \mathrm{Coor}\,(\mathscr{P})$ называются *координатными изоморфизмами*, и для каждой точки $A \in \mathscr{P}$ числа $x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n$, удовлетворяющие соотношению

$$\alpha\,(A) = (x^0 : x^1 : \ldots : x^n),$$

называются *проективными координатами* точки A, отвечающими изоморфизму α.

Ясно, что при $n = 2$ мы получаем проективные плоскости в смысле определения 1 и проективные координаты, как они были выше определены.

Проективным преобразованием проективного пространства $\mathscr{P}$ называется преобразование по равенству координат в двух координатных системах α и α', т. е. отображение $\alpha^{-1} \circ \alpha' : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$. В произвольных проективных координатах $x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n$ оно записывается формулами вида (10).

Лекция 31

Теорема Дезарга. — Теорема Паппа — Паскаля. — Теорема Фано. — Принцип двойственности. — Модели проективной плоскости. — Модели проективной прямой и проективного пространства.

В проективной геометрии имеется отношение между точками и прямыми, состоящее в том, что точка принадлежит прямой, а прямая проходит через точку. Чтобы подчеркнуть симметричность этого отношения, пользуются специальным термином *инцидентность* и говорят, что точка инцидентна прямой, а прямая инцидентна точке.

Несмотря на кажущуюся бедность этого отношения, оно позволяет формулировать и доказывать трудные и красивые теоремы. Примером может служить знаменитая теорема Дезарга (исторически бывшая первой теоремой проективной геометрии):

Теорема 1 (теорема Дезарга). *Пусть для попарно различных точек* **1, 2, 3, 4, 5, 6** *прямые* **14, 25** *и* **36** *инцидентны одной точке, отличной от точек* **1—6**. *Тогда точки* **13·46, 35·62, 51·24** *инцидентны одной прямой.*

Здесь, скажем, символом **13** обозначается прямая, проходящая через точки **1** и **3**, а символом **13·46** — точка пересечения прямых **13** и **46**. В аффинной плоскости эта теорема неверна, так как прямые не всегда пересекаются.

Доказательство теоремы Дезарга, как и других подобных теорем, проще всего вести в проективной плоскости $\mathcal{P}_O$, точками которой являются всевозможные прямые пространства, проходящие через точку O. Каждая такая прямая задается ее направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, определенным с точностью до пропорциональности. Поэтому вместо этих прямых можно рассматривать их направляющие векторы. Другими словами, точки проективной плоскости $\mathcal{P}_O$ мы можем интерпретировать как отличные от нуля векторы в пространстве, рассматриваемые с точностью до пропорциональности.

Точки прямой, проходящей через точки $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, будут тогда иметь вид $\mu\boldsymbol{a}+\nu\boldsymbol{b}$, где $(\mu, \nu)\neq(0, 0)$.

В этой интерпретации теорема Дезарга принимает следующий «векторный» вид:

Пусть для попарно не коллинеарных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ *пространства существуют такие отличные от нуля числа* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, *что*

$$(1) \qquad \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_4\mathbf{a}_4 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_5\mathbf{a}_5 = \alpha_3\mathbf{a}_3 + \alpha_6\mathbf{a}_6.$$

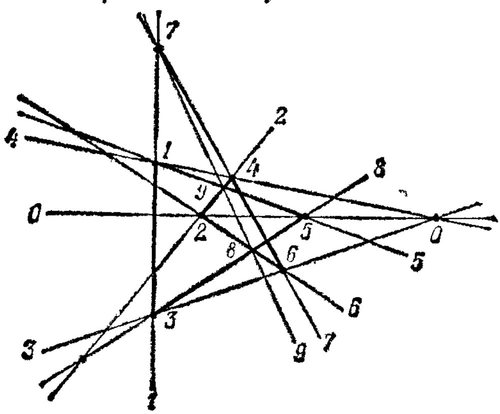
Тогда существуют такие наборы чисел $(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6)$, $(\gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_2)$, $(\delta_5, \delta_1, \delta_2, \delta_4)$, *каждый из которых содержит хотя бы одно отличное от нуля число, что имеют место равенства*

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_3\mathbf{a}_3 = \beta_4\mathbf{a}_4 + \beta_6\mathbf{a}_6,$$

$$\gamma_3\mathbf{a}_3 + \gamma_5\mathbf{a}_5 = \gamma_6\mathbf{a}_6 + \gamma_2\mathbf{a}_2,$$

$$\delta_5\mathbf{a}_5 + \delta_1\mathbf{a}_1 = \delta_2\mathbf{a}_2 + \delta_4\mathbf{a}_4$$

и эти три вектора компланарны.



Конфигурация Дезарга

В этом виде мы ее и будем доказывать.

Поскольку векторы $\mathbf{a}_{1-6}$ нам заданы только с точностью до пропорциональности и поскольку ни одно из чисел α_{1-6} не равно нулю, мы можем каждый вектор $\mathbf{a}_i$ заменить вектором $\alpha_i\mathbf{a}_i$. Тогда (1) приобретет вид

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_6,$$

откуда немедленно вытекает, что

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_6,$$

$$\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_6 + \mathbf{a}_2,$$

$$\mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4.$$

Поскольку

$$(a_1 - a_3) + (a_3 - a_5) + (a_5 - a_1) = 0,$$

этим теорема Дезарга доказана. □

Доказательство получилось короче формулировки!

В теореме Дезарга, кроме точек **1—6**, участвуют еще четыре точки:

$$\mathbf{14 \cdot 25 = 14 \cdot 36,\ 13 \cdot 46,\ 35 \cdot 62,\ 51 \cdot 24.}$$

Обозначим эти точки (в указанном порядке) цифрами 0, **7**, **8**, **9**. Тогда десять точек **0—9** будут лежать на десяти прямых:

25, 37, 49, 06, 01, 19, 28, 64, 35, 78.

Если мы обозначим эти прямые (в указанном порядке) цифрами от 0 до 9, то теорему Дезарга можно будет переформулировать в следующем виде:

(*) *Если каждая из точек* **1**—**8** *инцидентна прямой, обозначенной той же цифрой, то точка* **9** *также инцидентна прямой* 9.

Эти десять точек и десять прямых образуют так называемую *конфигурацию Дезарга*. В этой конфигурации любая точка инцидентна точно трем прямым и любая прямая — точно трем точкам.

Два треугольника называются *перспективными*, если их вершины попарно расположены на трех прямых, пересекающихся в одной точке (*центре перспективы*). Например, в конфигурации Дезарга треугольники **135** и **246** перспективны с центром перспективы **0**. В этой терминологии теорема Дезарга утверждает, что *точки пересечения соответственных сторон перспективных треугольников лежат на одной прямой* (которая называется их *дезарговой прямой*).

Замечательным фактом является то обстоятельство (обнаруживаемое перебором всех десяти точек и десяти прямых), что *в конфигурации Дезарга все точки и прямые равноправны*: любая ее точка (прямая) является центром перспективы (дезарговой прямой) однозначно определенной пары перспективных треугольников.

В случае, когда тройки точек **1**, **3**, **5** и **2**, **4**, **6** коллинеарны, теорема Дезарга вырождается в тривиальность (все три точки **7**, **8**, **9** совпадают). Зато для таких точек имеет место следующая теорема:

Теорема 2 (теорема Паппа—Паскаля). *Если из шести различных точек* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *точки* 1, 3, 5 *инцидентны одной прямой и точки* 2, 4, 6 *также инцидентны одной прямой (отличной от первой), причем ни одна из этих точек не лежит на обеих прямых одновременно, то три точки* 14·23, 45·36, 52·61 *инцидентны одной прямой.*

Доказательство. В «векторной» интерпретации эта теорема утверждает, что *если*

1) *векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6$ *попарно не коллинеарны,*

2) *векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$, *а также векторы* $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$ *компланарны,*

3) *ни один из векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ *не компланарен векторам* $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$ *и ни один из векторов* $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$ *не компланарен векторам* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$,

то векторы $\boldsymbol{a}_7, \boldsymbol{a}_8, \boldsymbol{a}_9$, *выражающиеся формулами*

$$\boldsymbol{a}_7 = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_4\boldsymbol{a}_4 = \nu_2\boldsymbol{a}_2 + \nu_3\boldsymbol{a}_3,$$
$$\boldsymbol{a}_8 = \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \mu_5\boldsymbol{a}_5 = \nu_1\boldsymbol{a}_1 + \nu_6\boldsymbol{a}_6,$$
$$\boldsymbol{a}_9 = \mu_3\boldsymbol{a}_3 + \mu_6\boldsymbol{a}_6 = \nu_4\boldsymbol{a}_4 + \nu_5\boldsymbol{a}_5,$$

компланарны.

Пусть $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ — такие векторы, что

$$\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

(см. предложения 1 и 2 лекции 9). Ясно, что векторы $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ линейно независимы и векторы $\boldsymbol{a}_{1-6}$ через них линейно выражаются. При этом в выражении векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ (векторов $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6$) через векторы $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ коэффициент при векторе $\boldsymbol{e}_2$ (при векторе $\boldsymbol{e}_1$) равен нулю, а при векторе $\boldsymbol{e}_1$ (при векторе $\boldsymbol{e}_2$) отличен от нуля. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_{1-6}$ нам заданы только с точностью до коллинеарности, то без ограничения общности мы можем поэтому предполагать, что

$$\boldsymbol{a}_1 = k_1\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = k_2\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{a}_3 = k_3\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_4 = k_4\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{a}_5 = k_5\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_6 = k_6\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_2,$$

где k_{1-6} — некоторые числа. Подставив эти выражения в формулу для вектора $\boldsymbol{a}_7$, мы немедленно получим, что

$$\boldsymbol{a}_7 = (\mu_1k_1 + \mu_4k_4)\,\boldsymbol{e}_0 + \mu_1\boldsymbol{e}_1 + \mu_4\boldsymbol{e}_2 =$$
$$= (\nu_2k_2 + \nu_3k_3)\,\boldsymbol{e}_0 + \nu_3\boldsymbol{e}_1 + \nu_2\boldsymbol{e}_2.$$

Так как векторы e_0, e_1, e_2 линейно независимы, это равенство может иметь место только тогда, когда $\mu_1 = \nu_3$, $\mu_4 = \nu_2$ и $\mu_1 k_1 + \mu_4 k_4 = \nu_2 k_2 + \nu_3 k_3$. Следовательно,

$$\mu_1 (k_1 - k_3) = \mu_4 (k_2 - k_4).$$

Поскольку вектор a_7 нам задан также лишь с точностью до коллинеарности, мы можем считать, что $\mu_1 = k_2 - k_4$ (очевидно, что $k_2 \neq k_4$) и, следовательно, что $\mu_4 = k_1 - k_3$. Таким образом,

$$a_7 = [(k_2 - k_4) k_1 + (k_1 - k_3) k_4] e_0 + (k_2 - k_4) e_1 + (k_1 - k_3) e_2 = (k_1 k_2 - k_3 k_4) e_0 + (k_2 - k_4) e_1 + (k_1 - k_3) e_2.$$

Аналогично показывается, что

$$a_8 = (k_1 k_2 - k_5 k_6) e_0 + (k_2 - k_6) e_1 + (k_1 - k_5) e_2,$$
$$a_9 = (k_3 k_4 - k_5 k_6) e_0 + (k_4 - k_6) e_1 + (k_3 - k_5) e_2.$$

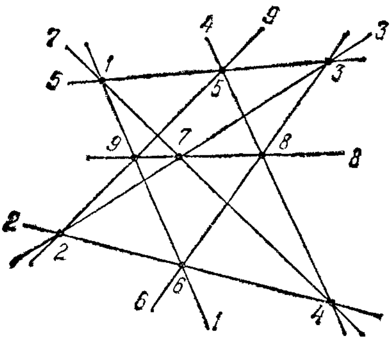
Но тогда $a_7 + a_9 = a_8$, и потому векторы a_7, a_8, a_9 компланарны. □

Кроме точек 1—6, в теореме Паппа—Паскаля участвуют еще точки $7 = 14 \cdot 23$, $8 = 45 \cdot 36$ и $9 = 52 \cdot 61$, а также девять прямых

69, 46, 27, 58, 13, 38, 14, 78, 25.

Обозначив эти прямые (в указанном порядке) цифрами от 1 до 9, мы можем теорему Паппа—Паскаля переформулировать следующим образом:

(*) *Если каждая из точек* 1—8 *инцидентна прямой, обозначенной той же цифрой, то точка* 9 *также инцидентна прямой* 9.

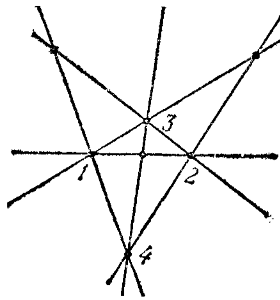


Конфигурация Паппа

Таким образом, теорема Паппа—Паскаля допускает дословно ту же формулировку, что и теорема Дезарга! Отличие их состоит только в том, какие прямые как обозначены. Оказывается, что формулировку типа (*) (но, вообще говоря, с другим числом точек и прямых) допускает целая группа теорем. Эти теоремы называются *конфигурационными теоремами*.

Теоремы Дезарга и Паппа—Паскаля являются среди них простейшими и одновременно важнейшими.

Получающаяся в теореме Паппа—Паскаля конфигурация из девяти точек и девяти прямых называется *конфигурацией Паппа*. Как и в конфигурации Дезарга, в конфигурации Паппа через любую точку проходят три прямых и на любой прямой лежат три точки. Кроме того, в конфигурациях Паппа также имеет место равноправие всех точек и прямых.



Теорема Фано

Примером неконфигурационной теоремы проективной геометрии является следующая теорема:

Теорема 3 (т е о р е м а Ф а н о). *Если никакие три из четырех точек* 1, 2, 3, 4 *не коллинеарны, то точки*

$$12 \cdot 34, \quad 13 \cdot 24, \quad 14 \cdot 23$$

также не коллинеарны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы должны показать, что если из четырех векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ никакие три не компланарны, то векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ вида

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 = \alpha_3\mathbf{a}_3 + \alpha_4\mathbf{a}_4, \\ \mathbf{b} &= \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_3\mathbf{a}_3 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_4\mathbf{a}_4, \\ \mathbf{c} &= \gamma_2\mathbf{a}_2 + \gamma_3\mathbf{a}_3 = \gamma_1\mathbf{a}_1 + \gamma_4\mathbf{a}_4 \end{aligned} \tag{2}$$

также не компланарны.

Но, действительно, согласно этим равенствам

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 - \alpha_3\mathbf{a}_3 - \alpha_4\mathbf{a}_4 &= 0, \\ \beta_1\mathbf{a}_1 - \beta_2\mathbf{a}_2 + \beta_3\mathbf{a}_3 - \beta_4\mathbf{a}_4 &= 0, \\ \gamma_1\mathbf{a}_1 - \gamma_2\mathbf{a}_2 - \gamma_3\mathbf{a}_3 + \gamma_4\mathbf{a}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ по условию не компланарны (т. е. линейно независимы), эти равенства возможны только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны. Таким образом, существуют такие числа $k \neq 0$ и $l \neq 0$, что

$$\beta_1 = k\alpha_1, \quad \beta_2 = -k\alpha_2, \quad \beta_3 = -k\alpha_3, \quad \beta_4 = k\alpha_4,$$

$$\gamma_1 = l\alpha_1, \quad \gamma_2 = -l\alpha_2, \quad \gamma_3 = l\alpha_3, \quad \gamma_4 = -l\alpha_4.$$

С другой стороны, первые из равенств (2) означают, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеют в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ координаты

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ 0),\quad (\beta_1,\ 0,\ \beta_3),\quad (0,\ \gamma_2,\ \gamma_3).$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 = -2kl(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \neq 0,$$

то эти векторы не компланарны. □

Появление в последней формуле двойки означает, что теорема Фано справедлива только тогда, когда характеристика основного поля $\mathbb{K}$ *отлична от двух*. В то же время теоремы Дезарга и Паппа—Паскаля справедливы для *любого* основного поля $\mathbb{K}$.

Мы пользовались в доказательствах предыдущих теорем векторами только для упрощения и сокращения выкладок. При желании можно было бы провести те же самые, по существу, рассуждения в произвольной системе проективных координат.

Как мы знаем, в проективной геометрии плоскости точки и прямые играют совершенно симметричные роли. Аналитически это находит выражение в том, что условие инцидентности

$$AX + BY + CZ = 0 \tag{3}$$

точки $(X : Y : Z)$ и прямой $(A : B : C)$ абсолютно симметрично по отношению к координатам точки и прямой. Поэтому, если каждой точке (прямой) мы сопоставим прямую (точку) с теми же координатами, то инцидентность между точками и прямыми не нарушится, т. е., например, точки, инцидентные некоторой прямой, перейдут в прямые, инцидентные точке, отвечающей этой прямой. Этим доказан следующий общий принцип:

Принцип двойственности для проективной плоскости. *Если в некотором верном предложении о точках, прямых и об инцидентностях между ними всюду поменять местами слова «точка» и «прямая», то получится снова верное предложение.*

Это новое предложение называется *двойственным* исходному.

Заметим, что этот принцип **не является** теоремой проективной геометрии, поскольку он говорит не о точках и прямых, а о теоремах.

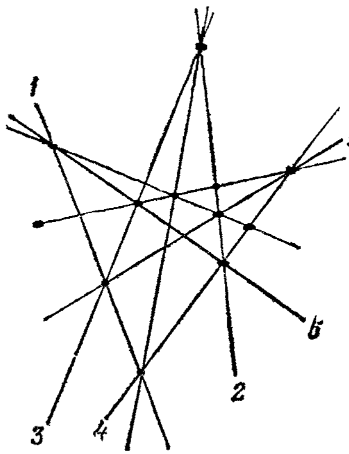
Утверждению «любые две точки инцидентны одной прямой» двойственно утверждение «любые две прямые инцидентны одной точке». Заметим, что в аффинной геометрии первое утверждение верно, а второе — нет.

Более интересный пример мы получим, рассмотрев теорему, двойственную теореме Паппа—Паскаля. Она называется теоремой Паппа—Брианшона.

Теорема 4 (теорема Паппа—Брианшона). *Если из шести различных прямых* **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** *прямые* **1**, **3**, **5** *инцидентны одной точке и прямые* **2**, **4**, **6** *также инцидентны одной точке* (*отличной от первой*), *причем ни одна из этих прямых не содержит одновременно обеих точек, то три прямые*

14·23, 45·36, 52·61

инцидентны одной точке. □



Теорема Паппа—Брианшона

Здесь, скажем, **14** обозначает точку пересечения прямых **1** и **4**, а **14·23**—прямую, проходящую через точки **14** и **23**.

Подобно теореме Паппа—Паскаля, теорема Паппа—Брианшона тоже утверждает существование некоторой конфигурации. Замечательно, что *при этом получается та же конфигурация Паппа.*

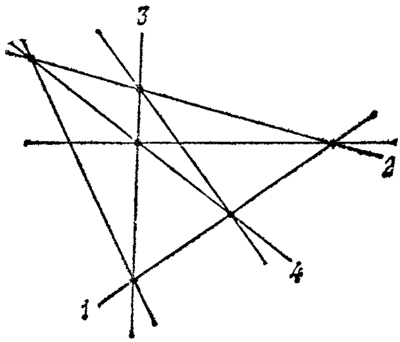
Действительно, теорема, двойственная к формулировке (∗), совпадает, очевидно, с ней самой (как говорят, эта формулировка *сама себе двойственна*). Теорема Паппа—Паскаля обеспечивает построение этой конфигурации, начиная с двух троек точек, а теорема Паппа—Брианшона — начиная с двух троек прямых. □

По той же причине теорема, двойственная теореме Дезарга (конечно, не совпадающая с этой теоремой и даже, более того, как можно легко убедиться, обратная к ней), обеспечивает построение той же конфигурации Дезарга из десяти точек и десяти прямых.

Теорема, двойственная теореме Фано, утверждает, что для любой четверки прямых 1, 2, 3, 4, из которых никакие три не проходят через одну точку, прямые $12\cdot34$, $13\cdot24$, $14\cdot23$ («обобщенные диагонали четырехугольника») также не проходят через одну точку.

Рассмотрим в заключение вопрос о наглядном представлении моделей вещественной проективной плоскости.

Модель «в круге» представляет собой круг, диаметрально противоположные точки которого отождествлены («склеены»). К сожалению, это склеивание нельзя произвести в трехмерном пространстве, даже представляя себе круг сделанным из тонкой резины и разрешая его как угодно изгибать и растягивать. Положение изменится, если мы вырежем в круге меньший круг, оставив кольцо, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки внешней окружности.

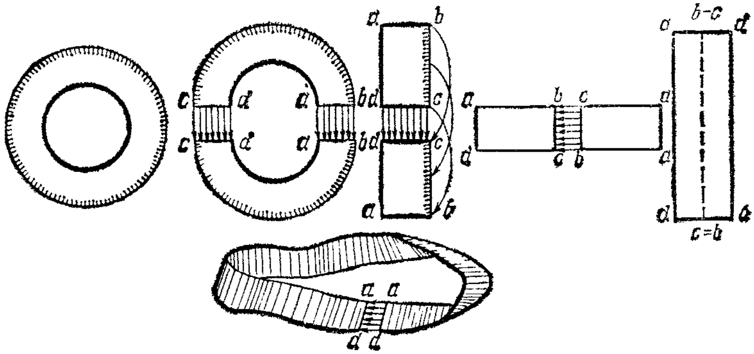


Теорема, двойственная теореме Фано

Разрезав это кольцо по двум радиусам ab и cd, мы получим два прямоугольника, для которых нужное склеивание осуществить уже не представляет труда. После склеивания получится прямоугольник, две противоположные стороны которого состоят из краев радиальных разрезов. Склеив эти стороны, для чего прямоугольник придется перекрутить (и предварительно вытянуть), мы получим в пространстве поверхность, которая называется *листом Мёбиуса*.

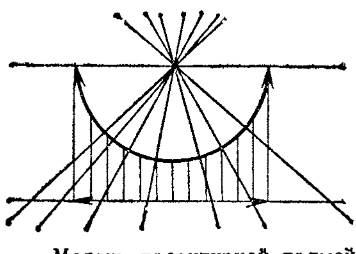
Лист Мёбиуса имеет край, являющийся окружностью (это — край вырезанного вначале из проективной плоскости круга). Поэтому, чтобы снова получить проективную плоскость, достаточно заклеить лист Мёбиуса кругом по его граничной окружности. Однако без самопересечений это сделать в трехмерном пространстве нельзя. Это можно сделать только в четырехмерном пространстве, выбрав произвольную точку (вне трехмерного пространства, содержащего лист Мёбиуса) и построив над краем листа Мёбиуса конус с вершиной в этой точке.

Замечательные свойства листа Мёбиуса (например, его односторонность) всем известны из книг по занимательной математике. Поэтому мы их описывать заново не будем.



Последовательное переклеивание проективной плоскости «с дырой» в лист Мебиуса

Аналогичное представление проективной прямой (одномерного вещественного проективного пространства) никаких затруднений не вызывает. Ее моделью, аналогичной модели проективной плоскости «в связке», служит пучок прямых на плоскости с центром в некоторой точке O. Рассмотрев полуокружность с центром в O и «разогнув» ее в отрезок, мы получим в качестве модели проективной прямой (аналогичной модели «в круге») отрезок (т. е. «одномерный круг»), концевые точки которого отождествлены. Произведя это отождествление, мы получим из отрезка окружность. Таким образом, *моделью проективной прямой является окружность.*



Модель проективной прямой

Для (трехмерного) проективного пространства аналогом модели «в круге» является уже известная нам модель «в шаре». В этой модели точки проективного пространства изображаются внутренними точками шара и парами диаметрально противоположных точек его граничной сферы.

Перейдя от шара к группе SO (3) (см. замечание 1 лекции 30), мы получим, что *множество* SO (3) *собственных ортогональных матриц третьего порядка является моделью трехмерного вещественного проективного пространства.*

Отсюда, в частности, следует, что матрицы из SO (3) можно параметризовать четверками $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ вещественных чисел, заданных с точностью до пропорциональности (точками пространства $\mathbb{R}P^3$). Впрочем, эта параметризация нам фактически уже знакома. Именно, рассматривая элементы группы SO (3) как вращения сферы S (см. лекцию 27), мы получим биективное отображение $\mathbb{R}P^3 \to SO(3)$, сопоставив произвольной точке $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ пространства $\mathbb{R}P^3$ вращение сферы S, заданное (ненормированным!) дробно-линейным преобразованием

$$z' = \frac{az - \bar{c}}{cz + \bar{a}},$$

где $a = a_0 + ia_1$, $c = a_2 + ia_3$ (ср. с формулой (19) лекции 27).

Лекция 32

Комплексная проективная прямая и ее проективные преобразования. — Линейные преобразования. — Инверсия. — Инверсия и дробно-линейные преобразовавания. — Два свойства дробно-линейных преобразований. — Неподвижные точки дробно-линейных преобразований. — Параболические, эллиптические, гиперболические и локсодромические дробно-линейные преобразования. — Теорема о трех точках. — Множитель дробно-линейного непараболического преобразования. — Классификация дробно-линейных преобразований. — Дробно-линейные преобразования, задающие вращения сферы.

Наглядное описание комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ возможно только при $n = 1$ (поскольку уже комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$ имеет вещественную размерность 4 и потому наглядно непредставима). Что же касается комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, то, по определению, она является множеством классов пропорциональности $(z_0 : z_1)$ пар комплексных чисел (z_0, z_1). При $z_0 \neq 0$ каждый такой класс однозначно характеризуется комплексным числом $z = \frac{z_1}{z_0}$, а при $z_0 = 0$ он существует только один — $(0 : 1)$. Обозначая последний класс символом ∞, мы получаем таким образом (см. лекцию 27), что *моделью комплексной проективной прямой является пополненная плоскость комплексных чисел* $\mathbb{C}^+$ (*и, значит, сфера* S).

Проективные преобразования комплексной проективной прямой записываются формулами (5) лекции 30 с $n = 1$, т. е., с точностью до обозначений, формулами вида

$$\begin{aligned} \rho z_0' &= cz_0 + dz_1, \\ \rho z_1' &= az_0 + bz_1, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как, перейдя в этих формулах к неоднородным координатам $z = \frac{z_1}{z_0}$ и $z' = \frac{z_1'}{z_0}$, мы получим дробно-линейное преобразование

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

то, следовательно, *дробно-линейные преобразования* (1) — *это в точности проективные преобразования комплексной проективной прямой* $\mathbb{C}^+$.

Это определяет значение преобразований (1) в общей схеме проективной геометрии.

Изучим преобразования (1) подробнее.

При $a = d = 1$ и $c = 0$ мы имеем преобразование

$$z' = z + b. \tag{2}$$

Интерпретируя комплексное число $b = b_1 + ib_2$ как вектор (с координатами b_1 и b_2), мы видим, что это преобразование представляет собой параллельный перенос на вектор b.

Пусть $d = 1$, $b = c = 0$ и, значит,

$$z' = az. \tag{3}$$

При $|a| = 1$, т. е. когда $a = e^{i\alpha}$, преобразование (3) имеет вид

$$z' = e^{i\alpha}z \tag{4}$$

и представляет собой поворот на угол α (чтобы усмотреть это, достаточно записать преобразование (4) в прямоугольных координатах $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$; см. в лекции 27 текст после формулы (6)). При $a = r > 0$ вещественном и положительном преобразование (3) представляет собой гомотетию с коэффициентом r. В общем случае $a = re^{i\alpha}$ преобразование (3) является композицией вращения на угол $\alpha = \arg a$ и гомотетии с коэффициентом $r = |a|$.

Преобразования (2) и (3) оба являются частными случаями дробно-линейных преобразований вида

$$z' = az + b, \tag{5}$$

получающихся при $c = 0$ и $d = 1$. Такие преобразования называются *линейными*.

Каждое линейное преобразование является композицией параллельного переноса (2) и преобразования (3). В частности, при $|a| = 1$ линейное преобразование является движением (и обратно, любое движение плоскости является линейным преобразованием (5) с $|a| = 1$). Отсюда следует, что *линейные преобразования — это в точности преобразования подобия.*

Заметим, что запись (5) линейных преобразований не нормирована (при $a \neq 1$).

Пусть T — произвольная окружность радиуса R и M_0 — ее центр. Точки M и N (отличные от точки M_0) называются *симметричными относительно окружности* T, если

а) эти точки лежат на одном луче, исходящем из точки M_0;

б) имеет место равенство

$$|M_0M|\cdot|M_0N| = R^2.$$

Точка M_0, по определению, считается симметричной точке ∞.

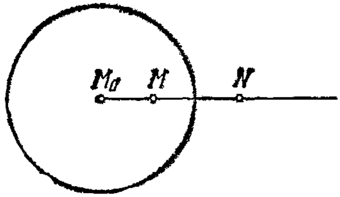
Если точки M_0, M и N изображаются комплексными числами z_0, z и z', то условия а) и б) могут быть сформулированы следующим образом:

а) аргументы обоих чисел $z - z_0$ и $z' - z_0$ одинаковы:

$$\arg\,(z - z_0) = \arg\,(z' - z_0);$$

б) для их модулей имеет место равенство

$$|z - z_0|\cdot|z' - z_0| = R^2.$$



Точки, симметричные относительно окружности

Согласно условию б), комплексные числа $z' - z_0$ и $\dfrac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}$ имеют одинаковые модули, а согласно условию а) — и одинаковые аргументы. Следовательно, эти числа равны:

$$z' - z_0 = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \tag{6}$$

Таким образом, точки, изображающие комплексные числа z и z' (или, как обычно короче говорят, точки z и z'), тогда и только тогда симметричны относительно окружности радиуса R с центром в точке z_0, когда выполнено соотношение (6).

Можно считать, что формула (6) задает некоторое преобразование $z \mapsto z'$ пополненной плоскости $\mathbb{C}^*$ комплексных чисел.

Определение 1. Преобразование (6) плоскости $\mathbb{C}^*$, переводящее каждую точку z в точку z', симметричную относительно окружности T, называется *инверсией* относительно окружности T.

Центр z_0 этой окружности оно переводит в точку ∞ и, наоборот, точку ∞ — в центр z_0.

В частном случае, когда T является *единичной окружностью* (радиуса 1 с центром в точке $z_0 = 0$), формула (6) приобретает вид

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}. \tag{7}$$

Из этой формулы следует, что, скомпонировав это преобразование с преобразованием $z \mapsto \bar{z}$, мы получим дробно-линейное преобразование

$$z' = \frac{1}{z}. \tag{8}$$

Преобразование $z \to \bar{z}$ является симметрией относительно оси абсцисс $y = 0$. Таким образом, мы видим, что дробно-линейное преобразование (8) является композицией симметрии относительно прямой и инверсии относительно окружности.

В теории дробно-линейных преобразований целесообразно все прямые причислять к окружностям. Формально-аналитическим основанием этого может служить тот факт, что уравнение

$$E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

при $E \neq 0$ (и при $A^2 + B^2 > 4EC$) дает окружность, а при $E = 0$ — прямую. Соответственно этому *инверсией относительно прямой* целесообразно называть симметрию в этой прямой. В этой терминологии мы можем, таким образом, сказать, что *дробно-линейное преобразование* (8) *является композицией двух инверсий.*

Инверсия относительно окружности радиуса R и с центром в точке $z_0 = 0$ выражается формулой

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Поэтому ее композиция с инверсией (7) имеет вид

$$z' = R^2 z,$$

т. е. является гомотетией с коэффициентом R^2. Поскольку любое положительное вещественное число мы можем представить в виде R^2, этим, в частности, доказано, что *любая гомотетия является композицией двух инверсий.*

Как мы знаем (см. лекцию 26), любое движение плоскости также является композицией двух инверсий (симметрий относительно прямых). Следовательно, *любое линейное преобразование (преобразование подобия) является композицией четырех инверсий.*

Формула

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}-\frac{1}{c(cz+d)}$$

(мы предполагаем, что $ad-bc=1$) показывает, что при $c\neq 0$ дробно-линейное преобразование (1) является композицией линейного преобразования $z\longmapsto cz+d$, преобразования $z\longmapsto \frac{1}{z}$ и линейного преобразования $z\longmapsto -\frac{1}{c}z+\frac{a}{c}$. Вместе со сказанным выше это доказывает следующее предложение:

Предложение 1. *Любое дробно-линейное преобразование является композицией четного числа инверсий.* □

Поскольку

$$z\bar{z}=x^2+y^2,\quad x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

мы можем уравнение (9) окружности (или прямой) записать в следующем виде:

$$Ez\bar{z}+A\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+B\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+C=0,$$

т. е. в виде

$$Ez\bar{z}+\bar{P}z+P\bar{z}+C=0, \tag{10}$$

где E и C — вещественные числа, а $P=\frac{A}{2}-i\frac{B}{2}$ — некоторое комплексное число.

Преобразование (8) переводит эту окружность в кривую с уравнением

$$E+\bar{P}\bar{z}+Pz+Cz\bar{z}=0,$$

т. е. снова в окружность (являющуюся при $C=0$ прямой). Поскольку, как выше было замечено, любое дробно-линейное преобразование является либо линейным преобразованием, т. е. преобразованием подобия (заведомо переводящим любую окружность в окружность), либо композицией преобразования (8) и двух линейных преобразований, мы получаем отсюда, что *любое дробно-линейное преобразование переводит окружность или прямую в окружность или прямую.*

Это свойство дробно-линейных преобразований обычно называется их **круговым свойством**.

Так как любая инверсия (6) отличается от дробно-линейного преобразования некоторой симметрией, то *круговым свойством обладает и каждая инверсия.*

Лемма 1. *Две окружности (или прямые)*

$$E(x^2 + y^2) + Ax + By + C = 0 \tag{11}$$

и

$$E_1(x^2 + y^2) + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{12}$$

тогда и только тогда ортогональны (пересекаются под прямым углом), когда

$$AA_1 + BB_1 = 2(EC_1 + E_1C). \tag{13}$$

Доказательство. При $E \neq 0$ центр окружности (11) имеет координаты $\left(-\frac{A}{2E}, -\frac{B}{2E}\right)$, а квадрат R^2 ее радиуса выражается формулой

$$R^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4EC}{4E^2}. \tag{14}$$

Аналогично, при $E_1 \neq 0$ центр окружности (12) имеет координаты $\left(-\frac{A_1}{2E_1}, -\frac{B_1}{2E_1}\right)$, а квадрат R_1^2 ее радиуса выражается формулой

$$R_1^2 = \frac{A_1^2 + B_1^2 - 4E_1C_1}{4E_1^2}. \tag{15}$$

С другой стороны, очевидное элементарно-геометрическое рассуждение показывает, что окружности (11) и (12) тогда и только тогда ортогональны, когда сумма $R^2 + R_1^2$ квадратов их радиусов равна квадрату расстояния между их центрами, т. е. когда

$$R^2 + R_1^2 = \left(\frac{A}{2E} - \frac{A_1}{2E_1}\right)^2 + \left(\frac{B}{2E} - \frac{B_1}{2E_1}\right)^2.$$

Подставив в это соотношение выражения (14) и (15), мы после упрощений получим условие (13).

Когда $E_1 = 0$, т. е. когда окружность (12) является на самом деле прямой $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, утверждение об ортогональности этой прямой и окружности (11) означает, что прямая проходит через центр окружности (11), т. е. что

$$A_1\left(-\frac{A}{2E}\right) + B_1\left(-\frac{B}{2E}\right) + C_1 = 0.$$

После упрощений мы снова получаем условие (13) (с $E_1 = 0$).

Наконец, при $E = 0$ и $E_1 = 0$ условие (13) превращается в известное нам условие $AA_1 + BB_1 = 0$ перпендикулярности двух прямых. □

В случае, когда уравнения (11) и (12) записаны в форме (10), т. е. имеют вид

$$Ez\bar{z} + \bar{P}z + P\bar{z} + C = 0$$

и

$$E_1z\bar{z} + \bar{P}_1z + P_1\bar{z}_1 + C_1 = 0,$$

условие (13) приобретает вид

$$P\bar{P}_1 + \bar{P}P_1 = EC_1 + E_1C. \tag{16}$$

Как выше было показано, преобразование (8) переводит окружность (11) в окружность, для которой роль коэффициента E играет коэффициент C, роль коэффициента C — коэффициент E, а коэффициент P заменяется комплексно-сопряженным числом $\bar{P}$.

В условных, но понятных обозначениях:

$$E \Rightarrow C, \quad C \Rightarrow E, \quad P \Rightarrow \bar{P}. \tag{17}$$

Аналогично для окружности (12)

$$E_1 \Rightarrow C_1, \quad C_1 \Rightarrow E_1, \quad P_1 \Rightarrow \bar{P}_1. \tag{18}$$

Но ясно, что при заменах (17) и (18) соотношение (16) остается инвариантным (переходит само в себя). Этим доказано, что дробно-линейное преобразование (8) сохраняет ортогональность окружностей, т. е. переводит ортогональные окружности в ортогональные.

Поскольку любое дробно-линейное преобразование является композицией линейных преобразований и преобразования (8), отсюда следует, что и *любое дробно-линейное преобразование сохраняет ортогональность окружностей* (ибо линейные преобразования, являясь преобразованиями подобия, этим свойством обладают).

Замечание 1. На самом деле дробно-линейные преобразования сохраняют любые (а не только прямые) углы между окружностями (являются, как говорят, конформными преобразованиями). Действительно, этим свойством обладают линейные преобразования и (докажите!) преобразование (8).

Из элементарно-геометрической теоремы о квадрате длины касательной к окружности непосредственно вытекает, что точки M и N тогда и только тогда симметричны относительно окружности T, когда любая окружность, проходящая через эти точки, ортогональна окружности T. Ясно, что это утверждение остается справедливым и когда T является прямой. Поскольку каждое дробно-линейное преобразование Φ ортогональные окружности (прямые) переводит в ортогональные окружности (прямые), отсюда следует, что *точки M и N, симметричные относительно окружности T, каждое дробно-линейное преобразование Φ переводит в точки $M' = \Phi(M)$ и $N' = \Phi(N)$, симметричные относительно окружности $T' = \Phi(T)$.*

Точка, которую дробно-линейное преобразование (1) оставляет на месте, называется *неподвижной точкой* этого преобразования. Неподвижные точки определяются из уравнения

$$z = \frac{az + b}{cz + d},$$

т. е. из уравнения

$$cz^2 + (d - a) z - b = 0. \tag{19}$$

Поскольку квадратное уравнение имеет не более двух корней, отсюда следует, что *нетождественное дробно-линейное преобразование имеет не более двух неподвижных точек.*

Так как в силу условия нормировки $ad - bc = 1$ имеет место равенство

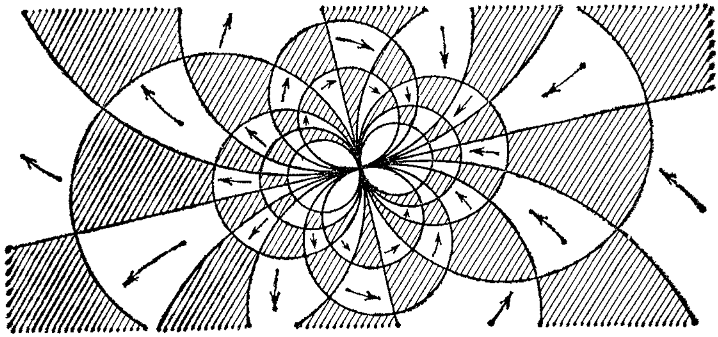
$$(d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4,$$

то *неподвижные точки нормированного дробно-линейного преобразования* (1) *выражаются формулой*

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}. \tag{20}$$

При $c = 0$ (для линейного преобразования) одной неподвижной точкой является точка ∞, а другой — точка $\frac{b}{d-a}$ (при $d = a$, т. е. для параллельного переноса, также являющаяся точкой ∞).

Дробно-линейное преобразование называется *параболическим*, если оно имеет только одну неподвижную точку. Из формулы (20) следует, что *нормированное преобразование* (1) *тогда и только тогда является параболическим преобразованием, когда число $a + d$ вещественно и равно* ± 2.

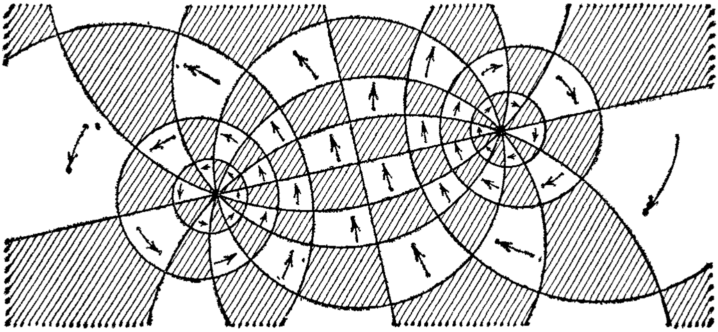


Параболическое преобразование с конечной неподвижной точкой. Каждая заштрихованная область переходит в следующую в направлении, указанном стрелкой

Параболические преобразования с неподвижной точкой ∞ — это параллельные переносы и только они.

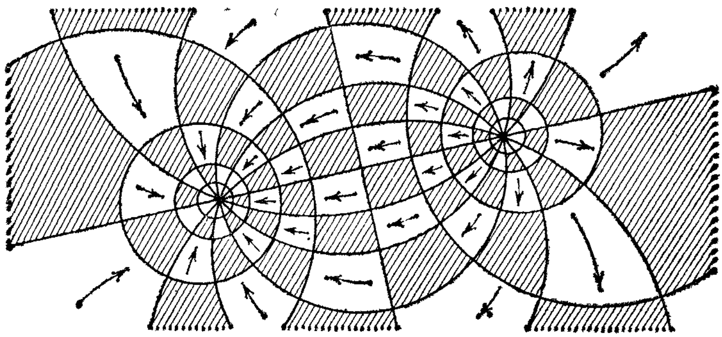
Пусть дробно-линейное преобразование (1) имеет две неподвижные точки z_1 и z_2. Рассмотрим семейство $\mathscr{K}$ окружностей, проходящих через эти точки, и семейство $\mathscr{H}$ окружностей, ортогональных всем окружностям семейства $\mathscr{K}$. Из кругового свойства дробно-линейных преобразований непосредственно вытекает, что преобразование (1) каждую окружность семейства $\mathscr{K}$ переводит в окружность того же семейства, а так как это преобразование, кроме того, сохраняет ортогональность окружностей, то и каждую окружность семейства $\mathscr{H}$ оно переводит в окружность того же семейства.

Может случиться, что под действием преобразования (1) каждая окружность семейства $\mathscr{H}$ переходит сама в себя, т. е. любая ее точка переходит в (вообще говоря, другую) точку той же окружности. Такое дробно-линейное преобразование называется *эллиптическим*. Под воздействием эллиптического преобразования каждая точка двигается по окружности семейства $\mathscr{H}$, которой она принадлежит.



Эллиптическое преобразование с конечными неподвижными точками

Примером эллиптического преобразования является вращение с неподвижными точками 0 и ∞. Семейство $\mathscr{H}$ состоит из концентрических окружностей с центрами в точке 0, а семейство $\mathscr{K}$ — из прямых, проходящих через эту точку.



Гиперболическое преобразование с конечными неподвижными точками

Преобразование (1) называется *гиперболическим*, если, наоборот, оно переводит в себя каждую окружность семейства $\mathscr{K}$ и даже каждую из дуг, на которые окружности из $\mathscr{K}$ разбиваются неподвижными точками.

Примером гиперболического преобразования является гомотетия $z' = az$, $a > 0$, с неподвижными точками 0 и ∞. Семейства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ для этой гомотетии те же, что и для вращения $z' = e^{i\alpha}z$.

Вообще говоря, дробно-линейное преобразование с двумя неподвижными точками не будет ни гиперболическим, ни эллиптическим. Такое преобразование называется *локсодромическим*. Примером является композиция гиперболического и эллиптического преобразования с одними и теми же неподвижными точками (скажем, композиция гомотетии и поворота).

Предложение 2. *Для любых двух троек (z_1, z_2, z_3) и (z_1', z_2', z_3') различных точек плоскости $\mathbb{C}^*$ существует единственное дробно-линейное преобразование Φ, переводящее первую тройку во вторую.*

Доказательство. Единственность преобразования Φ очевидна. Действительно, если существует другое дробно-линейное преобразование Ψ, переводящее тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (z_1', z_2', z_3'), то преобразование $\Psi^{-1} \circ \Phi$ будет оставлять на месте три точки z_1, z_2, z_3, что для нетождественного дробно-линейного преобразования, как мы знаем, невозможно.

Что же касается существования, то его достаточно доказать лишь для частного случая, когда $(z_1', z_2', z_3') = (0, \infty, 1)$, поскольку, если Φ переводит (z_1, z_2, z_3) в $(0, \infty, 1)$, а Ψ переводит (z_1', z_2', z_3') в $(0, \infty, 1)$, то $\Psi^{-1} \circ \Phi$ будет переводить (z_1, z_2, z_3) в (z_1', z_2', z_3').

С другой стороны, легко непосредственно подобрать дробно-линейное преобразование, переводящее (z_1, z_2, z_3) в $(0, \infty, 1)$. Действительно, для такого преобразования числитель должен обращаться в нуль при $z = z_1$, знаменатель — в нуль при $z = z_2$, а при $z = z_3$ числитель и знаменатель должны принимать одинаковые значения. Ясно, что этим условиям удовлетворяет преобразование

$$z' = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad \square \tag{21}$$

Замечание 2. В формуле (21) все точки z_1, z_2, z_3 предполагаются конечными (отличными от точки ∞). При $z_1 = \infty$ следует положить

$$z' = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2},$$

и, соответственно,

$$z' = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \quad \text{при} \quad z_2 = \infty,$$

$$z' = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \text{при} \quad z_3 = \infty.$$

Каждая из этих формул получается из общей формулы (21) вычеркиванием двух множителей, содержащих ∞.

Замечание 3. Изложенное доказательство предложения 2 позволяет для дробно-линейного преобразования, переводящего тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (z_1', z_2', z_3'), сразу написать формулу, связывающую z и z'. Действительно, ясно, что такая формула имеет вид

$$\frac{z' - z_1'}{z' - z_2'} \cdot \frac{z_3' - z_2'}{z_3 - z_1'} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{22}$$

Чтобы получить явное выражение (4) точки z' через точку z, нужно это уравнение решить относительно z'.

Конечно, если среди точек z_1, z_2, z_3 или точек z_1', z_2', z_3' есть точка ∞, формулу (22) следует видоизменить в соответствии с замечанием 2.

Формулу (22) можно рассматривать как соотношение, которому должны удовлетворять две четверки (z_1, z_2, z_3, z) и (z_1', z_2', z_3', z') точек плоскости $\mathbb{C}^+$, чтобы вторая получалась из первой каким-то (согласно предложению 2, единственным) дробно-линейным преобразованием. Обозначая для единообразия z через z_4, а z' через z_4' и называя число

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

двойным отношением точек z_1, z_2, z_3, z_4, мы можем этот факт сформулировать в виде следующего предложения:

Предложение 3. *Четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 плоскости $\mathbb{C}^+$ тогда и только тогда можно некоторым дробно-линейным преобразованием перевести в точки z_1', z_2', z_3', z_4', когда двойные отношения этих точек одинаковы.* $\square$

Теперь мы можем без труда написать общий вид дробно-линейных преобразований Φ с данными неподвижными точками z_1, z_2. Действительно, пусть z_3 — любая другая точка и пусть $z_3' = \Phi(z_3)$. Тогда Φ можно описать как дробно-линейное преобразование, переводящее тройку (z_1, z_2, z_3) в тройку (z_1, z_2, z_3'), и, значит, задать формулой

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2}\cdot\frac{z_3'-z_2}{z_3'-z_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Положив

$$K=\frac{z_3'-z_1}{z_3'-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \tag{23}$$

мы можем эту формулу переписать в следующем виде:

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2}. \tag{24}$$

Такова общая формула, задающая дробно-линейное преобразование Ф с неподвижными точками z_1, z_2 (отличными от точки ∞; если, скажем, $z_2=\infty$, то формула приобретает вид $z'-z_1=K(z-z_1)$).

Число K из формулы (24) называется *множителем* дробно-линейного преобразования Ф (с двумя неподвижными точками, т. е. не параболического). Оно может быть любым (отличным от нуля) комплексным числом.

Значение множителя K состоит в том, что по нему можно определить тип преобразования Ф (т. е. является оно эллиптическим, гиперболическим или локсодромическим).

Предложение 4. *Непараболическое преобразование Ф тогда и только тогда эллиптично, когда $|K|=1$, и тогда и только тогда гиперболично, когда K вещественно и положительно.*

Доказательство. Введем в рассмотрение дробно-линейное преобразование

$$\Omega\colon z\mapsto\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

и дробно-линейное преобразование

$$\mathrm{K}\colon z\mapsto Kz. \tag{25}$$

Тогда формула (24) будет равносильна равенству

$$\Omega\circ\Phi=\mathrm{K}\circ\Omega,$$

т. е. равенству

$$\Phi=\Omega^{-1}\circ\mathrm{K}\circ\Omega,$$

означающему на языке теории групп, что преобразование Ф **сопряжено** в группе всех дробно-линейных преобразований преобразованию K посредством преобразования Ω.

Преобразование Ω переводит точки z_1 и z_2 в точки 0 и ∞ соответственно, и, значит, окружности семейства $\mathscr{K}$ — в прямые, проходящие через точку 0, а окружности семейства $\mathscr{H}$ — в концентрические окружности с центром в точке 0. Преобразование K при $K > 0$ двигает точки по этим прямым, переставляя окружности, а при $|K| = 1$, наоборот, — двигает каждую точку по окружностям, переставляя прямые. Затем преобразование Ω^{-1} снова прямые переводит в окружности семейства $\mathscr{K}$, а концентрические окружности — в окружности семейства $\mathscr{H}$. Поэтому при $K > 0$ преобразование Ф двигает точки плоскости по окружностям семейства $\mathscr{K}$, переставляя окружности семейства $\mathscr{H}$, т. е. является гиперболическим преобразованием, а при $|K| = 1$, наоборот, — двигает точки плоскости по окружностям семейства $\mathscr{H}$, переставляя окружности семейства $\mathscr{K}$, т. е. является эллиптическим преобразованием. При K невещественном и $|K| \neq 1$ преобразование Ф локсодромично. □

Это рассуждение можно представить в более компактном виде, заметив, что оно фактически доказывает, что *для любых дробно-линейных преобразований* Ω *и* K *преобразование* $\Omega^{-1} \circ \mathrm{K} \circ \Omega$ *имеет тот же тип, что и преобразование* K. После этого нужно лишь вспомнить, что преобразование (25) гиперболично при $K > 0$, эллиптично при $|K| = 1$ и локсодромично при всех других K.

Для того чтобы вычислить множитель K непосредственно по (предполагаемой нормированной) записи (1) дробно-линейного преобразования Ф, мы воспользуемся формулой (23), применив ее к случаю, когда $z_3 = \infty$ и, значит, $z_3' = a/c$ (ясно, что левая часть этой формулы от выбора z_3 не зависит). Согласно этой формуле,

$$K = \frac{a - cz_1}{a - cz_2},$$

где z_1, z_2 — корни (20) квадратного уравнения (19). Так как, согласно формулам Виета,

$$z_1 + z_2 = -\frac{d - a}{c}, \quad z_1 z_2 = -\frac{b}{c},$$

и потому

$$z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=\frac{(d-a)^2+2bc}{c^2},$$

то

$$K+\frac{1}{K}=\frac{a-cz_1}{a-cz_2}+\frac{a-cz_2}{a-cz_1}=\frac{(a-cz_1)^2+(a-cz_2)^2}{(a-cz_1)(a-cz_2)}=$$

$$=\frac{2a^2-2ac(z_1+z_2)+c^2(z_1^2+z_2^2)}{a^2-ac(z_1+z_2)+c^2z_1z_2}=$$

$$=\frac{2a^2+2a(d-a)+(d-a)^2+2bc}{a^2+a(d-a)-bc}=$$

$$=\frac{(a+d)^2-2(ad-bc)}{ad-bc}=(a+d)^2-2.$$

Этим доказано, что *множитель K является корнем квадратного уравнения*

$$K+\frac{1}{K}=(a+d)^2-2. \tag{26}$$

(Заметим, что множитель K дробно-линейного преобразования с двумя неподвижными точками зависит от нумерации этих точек; при другой нумерации он заменяется обратной величиной. Поэтому-то уравнение (26) имеет два корня K и K^{-1}.)

Из уравнения (26) непосредственно вытекает (достаточно написать явную формулу для его корней), что K вещественно и положительно (и, следовательно, преобразование (1) гиперболично) тогда и только тогда, когда число $a+d$ вещественно и $|a+d|>2$. Аналогично, $|K|=1$ (и, следовательно, преобразование (1) эллиптично) тогда и только тогда, когда $a+d$ вещественно и $|a+d|<2$. Поэтому преобразование (1) тогда и только тогда локсодромично, когда число $a+d$ невещественно (напомним, что при $|a+d|=2$ мы выходим из класса дробно-линейных преобразований с двумя неподвижными точками, получая параболические, т. е. имеющие только одну неподвижную точку преобразования).

Этим доказана следующая окончательная теорема:

Теорема 1 (о классификации дробно-линейных преобразований). *Дробно-линейное преобразование* (1) *в нормированной записи тогда и только тогда нелоксодромично, когда число $a+d$ вещественно. При выполнении этого условия оно тогда и только* *тогда*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{гиперболично,}\\ \textit{параболично,}\\ \textit{эллиптично}\end{array}\right\},\quad \textit{когда}\quad \left\{\begin{array}{l}|a+d|>2,\\ |a+d|=2,\\ |a+d|<2.\quad \square\end{array}\right.$$

Рассмотрим, в частности, дробно-линейное преобразование

$$z'=\frac{az-\bar{c}}{cz+\bar{a}},\quad a\bar{a}+c\bar{c}=1, \tag{27}$$

задающее произвольное вращение Φ сферы S^3. Для такого преобразования число $a+d=a+\bar{a}=2\operatorname{Re}a$ вещественно, а так как

$$(\operatorname{Re}a)^2\leqslant a\bar{a}\leqslant a\bar{a}+c\bar{c}=1,$$

то $|a+d|<2$. Таким образом, *каждое преобразование* (27) *эллиптично.*

З а м е ч а н и е 4. Ясно, что в классе эллиптических преобразований преобразования (27), отвечающие вращениям сферы S^3, характеризуются тем, что их неподвижные точки z_1 и z_2 являются образами при стереографической проекции диаметрально противоположных точек сферы S^3 и, значит (докажите!), связаны соотношением

$$z_1\bar{z}_2=-1.$$

Как мы знаем (см. формулу (31) лекции 27 и следующий за этой формулой текст), если z_0 — полюс вращения Φ, а α — его угол, то

$$a=\lambda(e^{i\alpha}+|z_0|^2),\quad \text{где } \lambda=\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{1+|z_0|^2}$$

(и $c=\lambda(1-e^{i\alpha})\bar{z}_0$). Поэтому

$$a+\bar{a}=e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$$

и, значит (см. уравнение (26)),

$$K+\frac{1}{K}=4\cos^2\frac{\alpha}{2}-2=2\cos\alpha.$$

С другой стороны, так как преобразование (27) эллиптично, то

$$K = e^{i\theta}$$

и, значит,

$$K + \frac{1}{K} = 2\cos\theta.$$

Этим доказано, что при соответствующей нумерации неподвижных точек преобразования (27) (т. е. полюса z_0 и диаметрально противоположной точки) *множитель преобразования* (27) *равен* $e^{i\alpha}$, *где* α *— угол вращения* Φ.

Лекция 33

Первая группа аксиом Гильберта. — Вторая группа аксиом. — Третья группа аксиом. — Четвертая группа аксиом. — Пятая группа аксиом. — Непротиворечивость аксиоматики Гильберта. — Неевклидовы геометрии. — Геометрия Лобачевского. — Модель Пуанкаре.

В лекции 1 мы уже упоминали о возможности аксиоматического построения геометрии, основывающегося на понятиях точки, прямой и плоскости. В несовершенной форме — без явного указания всех аксиом — такое построение было осуществлено еще Евклидом, но логически безупречно это было сделано только в конце XIX века. Наибольшую известность приобрела аксиоматическая система, предложенная знаменитым немецким математиком Д. Гильбертом. Мы изложим эту систему в несколько усовершенствованной форме, ограничиваясь для простоты лишь аксиомами геометрии плоскости (планиметрии).

По Гильберту, построение геометрии плоскости начинается с задания двух множеств, элементы которых называются, соответственно, *точками* и *прямыми*. Предполагается, что точки и прямые связаны некоторым отношением, которое называется *отношением принадлежности* (или *инцидентностью*). Словами это отношение может быть выражено многими способами, которые все считаются эквивалентными. Например, можно сказать, что точка A принадлежит прямой a, точка A лежит на прямой a, прямая a проходит через точку A, точка A инцидентна прямой a и т. д., и т. п. По определению, все эти утверждения означают одно и то же.

Отношение принадлежности должно удовлетворять следующим трем аксиомам:

Первая группа аксиом

I_1. *Через любые две различные точки A и B проходит одна и только одна прямая AB.*

I_2. *На каждой прямой лежит не менее двух точек.*

I_3. *Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.*

Заметим, что в принципе прямая должна рассматриваться как нечто отличное от множества ее точек. Однако, как непосредственно следует из аксиом I_1 и I_2, если двум прямым принадлежат одни и те же точки, то эти прямые совпадают. Иными словами, *каждая прямая однозначно характеризуется множеством своих точек*. Поэтому, не теряя реально общности, каждую прямую можно отождествлять с множеством ее точек. Тогда отношение принадлежности превращается в теоретико-множественное отношение $\in$ между множеством и его элементом. Однако это не всегда удобно.

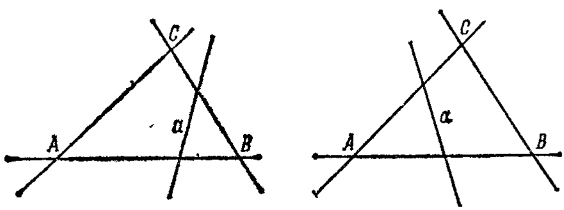
Кроме отношения принадлежности, в геометрии имеется еще одно отношение, связывающее тройки *коллинеарных* (принадлежащих одной прямой) различных точек. Это отношение называется *отношением порядка*. В случае, когда три точки A, B, C связаны этим отношением, говорят, что точка B лежит *между* точками A и C.

Вторая группа аксиом

II_1. *Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит также между точками C и A.*

II_2. *Из любых трех различных коллинеарных точек не более одной точки лежит между двумя другими.*

II_3. *Для любых двух различных точек A и C на прямой AC существует такая точка D, что точка C лежит между точками A и D.*



Две возможности в аксиоме Паша II_4

II_4 (аксиома Паша). *Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой и пусть a — прямая, не проходящая ни через одну из этих точек и такая, что на прямой a существует точка прямой AB, лежащая между точками A и B. Тогда на прямой a существует либо точка прямой AC, лежащая между точками A и C, либо точка прямой BC, лежащая между точками B и C.*

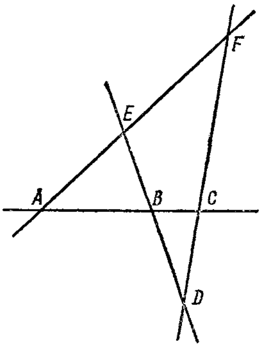
Наглядно аксиома Паша II_4 утверждает, что если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она обязательно пересекает вторую сторону.

Совокупность всех точек прямой AC, лежащих между точками A и C, к которой добавлены точки A и C, обозначается символом $\overline{AC}$ и называется *отрезком* с *концами* A и C. Так как согласно аксиоме II_2 предусмотренная аксиомой II_3 точка D не может лежать между точками A и C, то *отрезок $\overline{AC}$ не исчерпывает всех точек прямой AC*.

Аксиомы II_{1-4} мы сформулировали в наиболее экономном (минимальном) виде. Например, в них не утверждается, что между любыми двумя точками A и C существует хотя бы одна точка B, т. е. что отрезок $\overline{AC}$ не исчерпывается точками A и C. Точно так же в них не утверждается, что из трех различных коллинеарных точек хотя бы одна лежит между двумя другими (аксиома II_2 утверждает единственность, но не существование такой точки) и что прямая не может пересекать всех трех сторон треугольника. Тем не менее оказывается, что все эти утверждения верны. Таким образом,

а. *Для любых двух различных точек A и C на прямой AC существует точка B, лежащая между A и C (и более того, таких точек бесконечно много).*

б. *Из трех различных коллинеарных точек A, B и C одна и только одна точка лежит между двумя другими.*



в. *Для любых трех неколлинеарных точек A, B, C каждая прямая, пересекающая отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, не пересекает отрезка $\overline{BC}$.*

Приведем, для примера, доказательство утверждения **а** (в части, касающейся существования хотя бы одной точки B). По аксиоме I_3 существует точка E вне прямой AC, а по аксиоме II_3 на прямой AE существует такая точка F, что точка E лежит между точками A и F, и на прямой FC — такая точка D, что точка C лежит между точками F и D. Рассмотрим прямую ED. Если эта прямая пересекает отрезок $\overline{FC}$ (согласно аксиоме II_2 не содержащий точки D), то по аксиоме II_1 прямые ED и FC будут совпадать и, значит, вопреки предположению, точки A, C и E будут коллинеарны. Следовательно, прямая ED не может пересекать отрезок $\overline{FD}$. Но тогда по аксиоме II_4 (примененной к точкам A, C, F и прямой ED) на прямой ED будет существовать точка прямой AC, лежащая между точками A и C. Эта точка B и будет искомой. □

[Докажите аналогичным образом утверждения **б** и **в**.]

Как мы видим, доказательство утверждения **а** совсем не просто. То же самое относится к утверждениям **б** и **в**. Поэтому, если не гнаться за минимальностью аксиом, то, учитывая наглядную очевидность этих утверждений, проще всего включить их в список аксиом (что многие авторы и делают).

В случае, когда точка O прямой AB не лежит между точками A и B, говорят также, что точки A и B на прямой $a = AB$ *не разделены* точкой O. Из аксиом легко следует (докажите!), что отношение неразделенности является на множестве всех точек прямой a, отличных от точки O, отношением эквивалентности, разбивающим это множество точно на два класса. Эти классы называются *лучами* (или *полупрямыми*) прямой a с *вершиной* O. Таким образом, точки A и B прямой a тогда и только тогда принадлежат одному лучу с вершиной O, когда отрезок $\overline{AB}$ не содержит точки O. Луч, содержащий точку A, обозначается символом OA (хотя это обозначение совпадает с обозначением прямой OA, к недоразумениям это не приводит).

Задание на прямой a луча OA определяет на a *отношение предшествования* $\prec$. По определению, для двух различных точек B и C прямой a отношение $B \prec C$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено одно (и только одно) из следующих условий:

1°. Точка C принадлежит лучу OA, а точка B — дополнительному лучу OA'.

2°. Точка C принадлежит лучу OA, а точка B совпадает с точкой O.

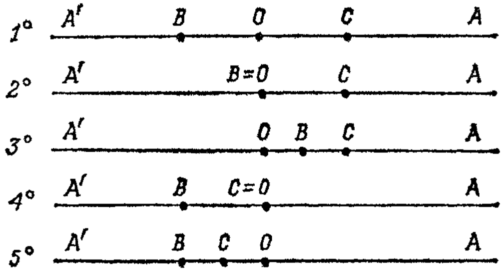
3°. Точка C принадлежит лучу OA, а точка B лежит между точками O и C.

4°. Точка C совпадает с точкой O, а точка B принадлежит лучу OA'.

5°. Точка C принадлежит дополнительному лучу OA' и лежит между точками B и O. (См. рис. на стр. 394.)

Легкая, хотя и несколько утомительная, проверка показывает, что отношение $\prec$ является отношением порядка в общеалгебраическом смысле (обладает *свойством транзитивности*: если $B \prec C$ и $C \prec D$, то $B \prec D$). Заменив луч OA дополнительным лучом OA', мы получим на прямой *a обратный порядок* $\prec'$ (в котором $B \prec' C$ тогда и только тогда, когда $C \prec B$).

В конструкции порядков $\prec$ и $\prec'$ участвует точка O. Однако оказывается, что на самом деле *порядки* $\prec$ *и* $\prec'$ *от выбора точки O не зависят*, т. е. любой другой выбор



этой точки даст нам те же порядки $\prec$ и $\prec'$. [Доказательство — сводящееся к тривиальному рассмотрению многочисленных частных случаев — мы предоставим читателю.] Таким образом, на каждой прямой a существует два (и только два!) взаимно обратных отношения предшествования. Они называются также *направлениями* на прямой a. Прямая, на которой выбрано направление, называется *ориентированной прямой* или *осью*.

Аналогично лучам, на прямой, на плоскости для любой прямой a определяются *полуплоскости*, на которые прямая a делит плоскость (точнее, множество всех точек плоскости, не принадлежащих прямой a). По определению, две точки A и B тогда и только тогда принадлежат одной полуплоскости, когда отрезок $\overline{AB}$ не пересекает прямую a (ср. определение 3 лекции 5; конечно, доказательство того, что это определение задает точно две полуплоскости, проведенное в лекции 5 аналитически, нужно теперь получить на основе аксиом).

Для любых двух различных прямых OA и OB, имеющих общую точку O, пересечение полуплоскости ограниченной прямой OA и полуплоскости, ограниченной прямой OB, непусто и называется *углом с вершиной* O. В зависимости от выбора полуплоскостей существуют для данных прямых OA и OB четыре угла с вершиной O. Каждый из них характеризуется выбором на этих прямых по лучу с вершиной O (в связи с чем угол часто определяется как пара таких лучей; угол в нашем смысле называется тогда *внутренней областью* угла). Угол, характеризующейся лучами OA и OB, обозначается символом OAB.

Углы между прямыми OA и OB, отличающиеся выбором одного луча на этих прямых, называются *смежными*, а отличающиеся обоими лучами, — *вертикальными*.

Фигура, состоящая из точки O, луча OA с вершиной в O и полуплоскости, ограниченной прямой OA, называется *флагом*. Флаг обозначается символом OAB, где B — произвольная точка полуплоскости флага. (Из контекста всегда ясно, обозначает ли OAB угол или флаг.)

Дальнейшее развитие геометрии требует введения понятия ортогонального преобразования (или, что равносильно, отношения конгруэнтности фигур).

Мы предполагаем, что задано некоторое множество преобразований множества точек плоскости, которые называются *ортогональными преобразованиями*.

Третья группа аксиом

III_1. *Все ортогональные преобразования образуют группу* (т. е. композиция ортогональных преобразований и преобразование, обратное к ортогональному преобразованию, являются ортогональными преобразованиями).

III_2. *Каждое ортогональное преобразование* Ф *сохраняет отношение порядка* (т. е. если точки A, B, C коллинеарны и точка B лежит между точками A и C, то точки

$$A' = \Phi(A), \quad B' = \Phi(B), \quad C' = \Phi(C)$$

также коллинеарны и точка B' лежит между точками A' и C').

Из этой аксиомы следует, что каждую прямую, полупрямую или полуплоскость ортогональное преобразование Ф переводит соответственно в прямую, полупрямую или полуплоскость. (Здесь, конечно, прямая трактуется как множество точек. В противном случае формулировку следует очевидным образом изменить.) Поэтому и каждый угол или флаг преобразование Ф переводит соответственно в угол или флаг.

III_3. *Для любых двух флагов существует единственное ортогональное преобразование, переводящее первый флаг во второй.*

К этим трем аксиомам мы добавим еще две дополнительные аксиомы (основания, почему эти аксиомы характеризуются как дополнительные, объясняются доказываемой ниже теоремой 1).

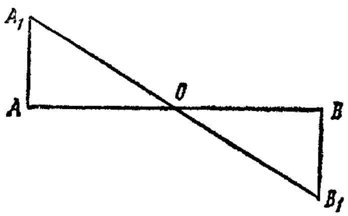
III_4. *Для любых двух различных точек существует ортогональное преобразование, переводящее первую точку во вторую, а вторую — в первую.*

III_5. *Для любых двух различных лучей с общей вершиной существует ортогональное преобразование, переводящее первый луч во второй, а второй — в первый.*

Две фигуры называются *конгруэнтными* (или *равными*), если существует ортогональное преобразование, переводящее первую фигуру во вторую. Из аксиомы III_1 следует, что отношение конгруэнтности фигур является эквивалентностью.

Угол называется *прямым*, если он равен смежному с ним углу. Прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Теперь легко доказываются практически все теоремы школьной геометрии о конгруэнтных фигурах (например, три признака равенства треугольников) и о возможности тех или иных построений (например, о том, что из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить единственный перпендикуляр на эту прямую, или о том, что из всякой точки прямой можно восставить единственный перпендикуляр к этой прямой). При этом, как правило, сохраняются и известные из школы доказательства. [Исключением является, пожалуй, лишь теорема о существовании для произвольного отрезка единственной середины (точки, делящей отрезок на два равных отрезка), которая в школе доказывается с помощью свойств окружности, не вытекающих из аксиом групп II—III. Вместо этого, чтобы разделить отрезок $\overline{AB}$ пополам, можно восставить в его концах перпендикуляры к прямой AB и отложить на этих перпендикулярах по разные стороны



от прямой равные отрезки AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 будет тогда пересекать отрезок AB в его середине O.]

Отрезки (и углы) можно сравнивать по величине, и не вводя понятия длины. Говорят, что отрезок $\overline{AB}$ *меньше* (или *короче*) отрезка $\overline{CD}$, если на отрезке $\overline{CD}$ существует такая точки $E \neq D$, что отрезок $\overline{CE}$ равен отрезку $\overline{AB}$. Аналогично определяется отношение $<$ и для углов.

Угол называется *острым*, если он меньше прямого, и *тупым*, если он больше прямого.

Обычным образом доказываются теперь теоремы о внешнем угле треугольника (он больше любого внутреннего, с ним не смежного), о сравнении углов треугольников (если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то $BC < B_1C_1$ тогда и только тогда, когда угол ABC меньше угла $A_1B_1C_1$), о перпендикуляре (он короче наклонной), о биссектрисе угла при вершине равнобедренного треугольника (она является одновременно медианой и высотой) и т. д., и т. п.

Заметим, что, как непосредственно следует из теоремы о внешнем угле треугольника, в каждом треугольнике по крайней мере два угла острые и, значит, два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются (в противном случае образовался бы треугольник с двумя прямыми углами).

Следующая группа аксиом состоит только из одной аксиомы.

Четвертая группа аксиом

IV_1 (аксиома Дедекинда). *Пусть все точки ориентированной прямой разбиты на два непустых класса, обладающие тем свойством, что каждая точка первого класса предшествует каждой точке второго класса. Тогда либо в первом классе существует последняя точка, либо во втором классе первая.*

Эта аксиома подробно рассматривается в курсе анализа в связи с теорией вещественных чисел, и потому мы на ней останавливаться не будем. Заметим только, что она эквивалентна двум другим аксиомам (Архимеда и Кантора), которые многими авторами и лекторами предпочитаются аксиоме Дедекинда.

На аксиому IV_1 опирается теория измерений, основная теорема которой утверждает, что на множестве всех отрезков существует единственная положительная функция

$$\mu\colon \overline{AB} \longmapsto \mu(\overline{AB}),$$

обладающая следующими свойствами:

а. Если отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ конгруэнтны, то $\mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{CD})$.

б. Если точка B лежит между точками A и C, то

$$\mu(\overline{AC}) = \mu(\overline{AB}) + \mu(\overline{BC}).$$

в. На данном отрезке $\overline{A_0B_0}$ (называемым *эталоном длины*) значение функции μ равно единице:

$$\mu(\overline{A_0B_0}) = 1.$$

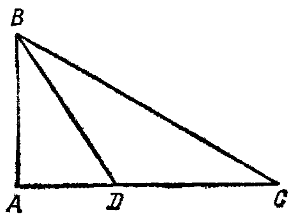
Число $\mu(\overline{AB})$ называется *длиной* отрезка $\overline{AB}$ (при эталоне длины $\overline{A_0B_0}$) и обычно обозначается через $|AB|$.

Доказательство этой теоремы сводится к точному формальному описанию известного из школьного курса геометрии процесса измерения отрезков.

Аналогичная теорема имеет место, конечно, и для углов.

Аксиома IV_1 необходима также для доказательства целого ряда наглядно очевидных теорем существования. Например, с ее помощью можно легко доказать (сделайте это!), что для любого отрезка $\overline{PQ}$, удовлетворяющего неравенствам

$$\overline{AB} < \overline{PQ} < \overline{BC},$$



на катете $\overline{AC}$ прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом в вершине A) существует такая точка D, что $\overline{BD} = \overline{PQ}$. Аналогично доказывается, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку круга (например, его центр), обязательно пересекает его граничную окружность, а также что две окружности с радиусами r и R пересекаются, если расстояние d между их центрами удовлетворяет неравенствам

$$|R - r| < d < R + r.$$

Более интересна следующая довольно неожиданная теорема:

Теорема 1. *Аксиомы* III_4 *и* III_5 *вытекают из предшествующих аксиом* I_{1-3}, II_{1-4}, III_{1-3} *и аксиомы* IV_1.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая простая лемма:

Лемма 1. *Для каждого сохраняющего отношение порядка инъективного отображения* φ *отрезка* $\overline{AB}$ *в себя существует неподвижная точка* O *(обладающая тем свойством, что* $\varphi(O) = O$).

Доказательство. Выбрав ориентацию прямой AB, в которой $A \prec B$, разобьем все точки этой прямой на два класса, относя к первому классу, во-первых, все точки C, предшествующие точке A (а также точку A), и, во-вторых, те и только те точки C отрезка $\overline{AB}$, отличные от точки A, которые обладают тем свойством, что $C' \prec \varphi(C')$ для любой точки C' отрезка AC. Все остальные точки прямой AB мы отнесем ко второму классу.

Ясно, что если точка C принадлежит первому классу, то и любая предшествующая точка $D \prec C$ также принадлежит первому классу. Поэтому построенные классы удовлетворяют условиям аксиомы IV_1, и, значит, согласно этой аксиоме существует точка O, являющаяся либо последней точкой первого класса, либо первой точкой второго класса.

В обоих случаях $A \leqslant O \leqslant B$, и потому либо $\varphi(A) \leqslant \varphi(O) \leqslant \varphi(B)$, либо $\varphi(B) \leqslant \varphi(O) \leqslant \varphi(A)$. Пусть для определенности

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(O) \leqslant \varphi(B).$$

Если $\varphi(O) \prec O$, то каждая точка C, лежащая между точками $\varphi(O)$ и O, принадлежит первому классу и потому $C \prec \varphi(C)$. Следовательно,

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(O) \prec C \prec \varphi(C).$$

С другой стороны, так как заведомо $A \leqslant \varphi(O)$, то $A \prec C \prec O$ и, значит,

$$\varphi(A) \prec \varphi(C) \prec \varphi(O).$$

Таким образом, одновременно $\varphi(O) \prec \varphi(C)$ и $\varphi(C) \prec \varphi(O)$. Это противоречие доказывает, что предположение $\varphi(O) \prec O$ невозможно.

Аналогично, если $O \prec \varphi(O)$, то любая точка, лежащая между точками O и $\varphi(O)$, будет точкой второго класса и потому найдется такая точка C, что $O \prec C \prec \varphi(O)$ и

$\varphi(C) \leqslant C$. Но так как заведомо $\varphi(O) \leqslant B$, то $O \prec C \leqslant$ $\leqslant B$ и, значит, $\varphi(O) \prec \varphi(C) \leqslant C$. Таким образом, одновременно $C \prec \varphi(O)$ и $\varphi(O) \leqslant C$. Следовательно, предположение $O \prec \varphi(O)$ также невозможно.

Поэтому $\varphi(O) = O$.□

Доказательство теоремы 1. Аксиома III_4 утверждает, что для любых двух различных точек A и B существует переставляющее их ортогональное преобразование. Пусть E — произвольная точка, лежащая вне прямой AB. Тогда определены флаг ABE и флаг BAE. Согласно аксиоме III_3 существует ортогональное преобразование Φ, переводящее флаг ABE в флаг BAE (и, в частности, такое, что $\Phi(A) = B$). Пусть $\Phi(B) = C$. Если $C = A$, то все доказано. Пусть $C \neq A$ и пусть точка A лежит между точками B и C (т. е. $C \prec A$ в ориентации прямой AB, в которой $A \prec B$).

Так как $\Phi(A) = B$, то $\Phi^2(A) = C$. Пусть $D =$ $= \Phi^3(A) = \Phi^2(B)$. Так как точка A лежит между точками $B = \Phi(A)$ и $C = \Phi^2(A)$, то точка $B = \Phi(A)$ лежит между точками $C = \Phi(B)$ и $D = \Phi(C)$, и, значит,

$$C \prec A \prec B \prec D.$$

Случай $C \prec A$

Случай $A \prec C$

Это показывает, что отрезок $\overline{AB}$ является частью отрезка $\overline{CD}$.

Рассмотрим ортогональное преобразование Φ^{-2}. Это преобразование переводит точки C, D в точки A, B и, следовательно, отображает отрезок $\overline{CD}$ на отрезок $\overline{AB}$ (и, значит, в отрезок $\overline{CD}$). Так как оно сохраняет отношение порядка, то согласно лемме 1 на отрезке $\overline{CD}$ существует неподвижная точка O преобразования Φ^{-2} (а значит, и преобразования Φ^2).

При $A \prec C$ аналогично доказывается, что

$$A \prec C \prec D \prec B,$$

откуда следует, что и в этом случае преобразование Φ^2 имеет неподвижную точку O (но уже принадлежащую отрезку $\overline{AB}$, который это преобразование отображает на его часть $\overline{CD}$).

Таким образом, мы доказали, что преобразование Φ^2 всегда имеет хотя бы одну неподвижную точку O. Кроме того, оно переводит полуплоскость, содержащую точку E, в себя (этим свойством, по условию, обладает даже преобразование Φ). Рассмотрим луч OA. Так как $\Phi^2(A) = C$, то преобразование Φ^2 переводит этот луч в луч OC. С другой стороны, при $C \prec A$ точка O принадлежит отрезку $\overline{AB}$ (ибо $\Phi^2(O) = O$, а $\Phi^2(\overline{CD}) = \overline{AB}$), а при $A \prec C$ — отрезку $\overline{CD}$. Следовательно, в обоих случаях точки C и A не разделяются точкой O и, значит, лучи OA и OC совпадают. Этим доказано, что преобразование Φ^2 флаг OAE переводит в себя и, значит, в силу утверждения единственности из аксиомы III_3 — является тождественным преобразованием (которое флаг OAE также переводит в себя). Поэтому $\Phi^2(A) = A$, т. е. $\Phi(B) = A$.

Аксиома III_5 доказывается аналогично. $\square$

Система следствий аксиом I—IV называется, по Бойяи, *абсолютной геометрией*. Кроме указанных выше утверждений, к ней принадлежит также утверждение, что для любой прямой a и любой лежащей вне a точки A существует (на рассматриваемой плоскости) прямая, проходящая через точку A и не пересекающаяся с прямой a. (Такой прямой будет, например, перпендикуляр, восставленный в точке A к перпендикуляру, опущенному из точки A на прямую a). Однако, как мы увидим, единственность этой прямой не может быть выведена из аксиом I—IV (не является фактом абсолютной геометрии) и должна быть предметом специальной аксиомы (которую мы также выделим в отдельную группу).

Пятая группа аксиом

V_1. *Для любой прямой a и любой не принадлежащей ей точки A существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающейся с прямой a.*

Об этой прямой говорят, что она *параллельна* прямой a.

Аксиомой V_1 завершается список аксиом планиметрии в духе Евклида—Гильберта. Очевидно, что евклидовы плоскости в смысле лекции 12 удовлетворяют всем этим аксиомам (т. е. являются моделями рассматриваемой аксиоматики), и, обратно, каждая модель аксиом I—V будет евклидовой плоскостью в смысле лекции 12.

В этом смысле аксиомы I—V эквивалентны нашим аксиомам 1°—15°.

В частности, это доказывает, что *аксиомы* I—V *полны* (любые две их модели изоморфны).

Система аксиом (или, более общо, некоторая математическая теория) называется *непротиворечивой*, если из нее нельзя вывести двух противоположных утверждений, одно из которых является отрицанием другого. Примером непротиворечивой теории считается арифметика (теория вещественных чисел). Это доказано всей практикой математики, хотя формальное доказательство непротиворечивости арифметики до сих пор вызывает определенные трудности (обсуждаемые в курсе математической логики).

Теорема 2. *Система аксиом* I—V *непротиворечива.*

Доказательство. Согласно сказанному выше, аксиомы I—V имеют модель $\mathbb{R}^2$, точками которой являются пары (x, y) вещественных чисел, а прямыми — множества точек (x, y), удовлетворяющих уравнениям вида

$$Ax + By + C = 0, \text{ где } A^2 + B^2 \neq 0.$$

Поэтому любое следствие аксиом I—V может быть интерпретировано как некоторое высказывание о вещественных числах (или, точнее, их парах). Значит, каждое противоречие в аксиомах I—V дало бы нам противоречие в арифметике. Следовательно, такого противоречия быть не может. □

Это доказательство демонстрирует общий принцип, заключающийся в том, что *теория непротиворечива, если она имеет арифметическую модель* (или, более общо, — модель в некоторой другой теории, о которой уже известно, что она непротиворечива). Трудности, связанные с формальным доказательством непротиворечивости арифметики, объясняются тем, что к самой арифметике этот принцип не применим.

Наши геометрические представления заимствованы из практики обитания в окружающем нас «физическом» пространстве и являются плодом теоретического осмысления этой практики. Однако, вопреки распространенному мнению, это отнюдь не фиксирует жестко геометрических понятий и их свойств. Например, для установления параллельности двух прямых необходимо, вообще говоря, проследить их на сколь угодно длинных интервалах, что физически невозможно. Поэтому не исключено, что на больших («галактических») расстояниях геометрию физического пространства лучше описывает не евклидова геометрия, а другая геометрия, в которой вместо аксиомы V справедливо ее отрицание. Впервые это соображение было высказано в начале XIX века русским математиком Н. И. Лобачевским, в честь которого эта новая геометрия (детально развитая Лобачевским в обстановке почти полного непонимания и равнодушия) называется обычно **геометрией Лобачевского**.

Удивительно, что аксиому о параллельных V_1 (правда, в другой, но эквивалентной форме; см. ниже) явно выделял еще сам Евклид. Почему он это делал, до сих пор неясно (обычное объяснение, что причиной-де была сложность евклидовой формулировки этой аксиомы, не выдерживает критики; по-видимому, наоборот, Евклид сознательно дал ей усложненную формулировку, чтобы подчеркнуть ее особую роль). Как бы то ни было, но со времен Евклида и до XIX века аксиома о параллельных была одной из самых популярных геометрических тем. Гипотеза состояла в том, что эта аксиома вытекает на самом деле из остальных аксиом (является теоремой абсолютной геометрии), и требовалось эту гипотезу доказать. Тем не менее, несмотря на бездну труда, затраченного математиками, и изобретательность, ими проявленную, все попытки вывода этой аксиомы из других аксиом оказались тщетными; в каждом предложенном «доказательстве» обнаруживалась хотя бы одна ссылка на утверждение, доказательство которого само требовало аксиомы о параллельных. Все же эта деятельность не была полностью бесполезна, поскольку каждая такая попытка обнаруживала утверждение, *эквивалентное* этой аксиоме (которое могло заменить в списке аксиом аксиому V_1).

Вот неполный, но достаточно впечатляющий список утверждений, эквивалентных аксиоме о параллельных, составленный проф. Н. В. Ефимовым:

1°. Если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых. (Это — формулировка самого Евклида. Заметим, что указание на сторону, с которой пересекаются прямые, на самом деле излишне.)

2°. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. (В абсолютной геометрии можно лишь доказать, что эта сумма не больше двух прямых.)

3°. Сумма внутренних углов треугольника одна и та же для всех треугольников.

4°. Точки, расположенные по одну сторону от данной прямой на одном и том же расстоянии, образуют прямую.

5°. Если две прямые не пересекаются, то расстояния от точек одной прямой до другой ограничены в совокупности (т. е. существует такое число K, что для любой точки A одной прямой на другой прямой найдется точка B, находящаяся от точки A на расстоянии, меньшем K).

6°. Существует треугольник с произвольно большой площадью.

7°. Существуют подобные треугольники (не конгруэнтные треугольники с попарно равными углами).

8°. Через любую точку внутри угла проходит прямая, пересекающая обе стороны угла.

9°. Через любые три неколлинеарные точки плоскости проходит окружность (т. е., иными словами, для любого треугольника существует описанная окружность).

10°. Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.

Читатель может посостязаться с математиками прошлого в попытках вывести из этих утверждений аксиому V_1 (некоторые из этих выводов весьма изощренны и отыскать их самостоятельно совсем не просто).

В геометрии Лобачевского все эти утверждения не верны. Таким образом, хотя термины и названия фигур в геометрии Лобачевского остаются те же самые, что и в геометрии Евклида, но с этими терминами фактически связываются совершенно другие понятия, а свойства фигур на плоскости Лобачевского зачастую прямо противоположны свойствам евклидовых фигур Это делает понимание (и изложение) геометрии Лобачевского очень трудным, поскольку, изучая эту геометрию, мы должны постоянно бороться с привычной геометрической интуицией и, смотря на чертеж, должны видеть совсем не то, что на нем изображено.

Частично это объясняет, почему математики XVIII века, занимавшиеся теорией параллельных (Саккери, Ламберт и др.), хотя и очень близко подошли к открытию неевклидовой геометрии, но не смогли сделать последнего решающего шага. Первым, кто осознал логическую возможность такой геометрии, был, по-видимому, знаменитый немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, но опасаясь, как он писал в своих письмах, «ос, которые, если Вы их потревожите, полетят Вам на голову», ничего по этому поводу не публиковал. Несколько позже к тем же мыслям пришел молодой венгерский математик Янош Бойяи (в старой транскрипции — Больяи), опубликовавший в 1832 г. краткое, но достаточно полное изложение новой геометрии (текст которого был им фактически написан еще в 1826 г.). Работа Бойяи прошла совершенно незамеченной, и лишь Гаусс одобрительно откликнулся на нее в личном письме к отцу Бойяи.

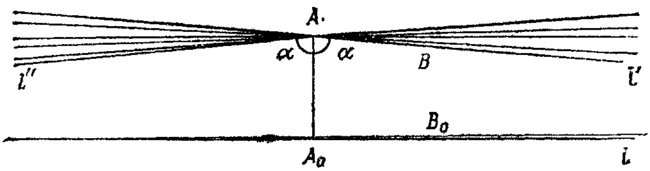
Н. И. Лобачевский впервые публично изложил основные принципы неевклидовой геометрии в 1826 г., а полное ее изложение опубликовал в 1829 г. Хотя его работа была встречена полным непониманием и даже глумлением, Лобачевский до конца своей жизни упорно боролся за признание новой геометрии и написал еще пять книг на эту тему, последняя из которых вышла в свет в 1855 г. перед самой его смертью.

Непризнание геометрии Лобачевского было связано не только с парадоксальностью ее результатов и отсутствием для нее наглядных моделей, но и с нерешенностью вопроса о ее непротиворечивости. Наглядную модель плоскости Лобачевского (или, точнее, некоторой области этой плоскости) впервые построил в 1868 г. итальянский геометр Э. Бельтрами. Через три года (в 1871 г.) модель всей плоскости Лобачевского построил, основываясь на идеях английского математика А. Кэли, немецкий математик Ф. Клейн (фактически эта модель была построена самим Кэли, но Кэли не осознал, что, собственно, он сделал, хотя, как ни странно, с работами Лобачевского был знаком). Еще через десять лет (в 1882 г.) замечательный французский математик А. Пуанкаре, найдя интерпретацию геометрии Лобачевского на полуплоскости комплексных чисел, положил ее в основу теории так называемых фуксовых функций. С этого времени геометрия Лобачевского получила полное признание и начала оказывать все возрастающее влияние на ход развития науки.

Физически непроверяемо не только утверждение о единственности параллельных, но и неявно скрытое в аксиомах группы II представление о прямой как бесконечной незамкнутой линии, по которой можно удаляться в бесконечность в двух противоположных направлениях. На возможность геометрии, в которой прямые являются замкнутыми линиями конечной длины, впервые указал немецкий математик Б. Риман в 1854 г. (опубликовано в 1868 г.). Все три геометрии (Евклида, Лобачевского и Римана) укладываются в единую схему Кэли—Клейна. В рамках этой схемы геометрия Лобачевского характеризуется как *гиперболическая геометрия*, геометрия Римана — как *эллиптическая геометрия*, а геометрия Евклида — как *параболическая геометрия*.

Чтобы дать представление о геометрии Лобачевского, мы изложим сейчас более или менее систематически, но из-за недостатка места в основном без доказательств, ее основные теоремы.

Пусть l — произвольная прямая и A — точка вне ее. По аксиоме Лобачевского (являющейся отрицанием аксиомы V_1), через точку A проходит по крайней мере две прямые, не пересекающиеся с прямой l. Отсюда легко следует (с помощью аксиомы Дедекинда IV_1), *что все прямые, проходящие через точку A и не пересекающиеся с прямой l, заполняют два вертикальных угла (вместе с их сторонами) с вершиной в A.*



Параллельные и расходящиеся прямые в геометрии Лобачевского

Стороны этих углов называются *параллельными* (по Лобачевскому) прямой l. Таким образом, в геометрии Лобачевского через точку A проходят *две* прямые l' и l'', параллельные прямой l. Все остальные прямые, проходящие через точку A и не пересекающиеся с прямой l, называются *расходящимися с l*.

Каждая параллельная прямая образует с перпендикуляром AA_0, опущенным из точки A на прямую l, два смежных угла. Для обеих параллельных прямых эти углы одинаковы. (Фигура, составленная из обеих параллельных прямых, симметрична, как легко видеть, относительно прямой AA_0.) Острый из этих углов называется *углом* *параллельности* α. Он зависит только от длины a отрезка AA_0 и обозначается символом $\Pi(a)$. По определению,

$$0 < \Pi(a) < \frac{\pi}{2}.$$

Из-за наличия двух параллельных удобно вместо них рассматривать их лучи с вершиной A (а также лучи прямой l с вершиной A_0). При этом луч AB параллельной прямой l' называется *параллельным* лучу A_0B_0 прямой l, если точки B и B_0 находятся по одну сторону от прямой AA_0 и луч AB образует с лучом AA_0 острый угол. Оказывается, что *на множестве всех лучей плоскости отношение параллельности симметрично и транзитивно* (и, значит, если мы условимся одинаковые лучи считать параллельными, является отношением эквивалентности).

О прямой l' с лучом AB говорят, что эта прямая параллельна прямой l *в направлении* AB (или что направление AB является *направлением параллелизма* прямых l и l').

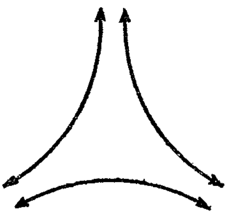
По определению, свойство прямой l' быть параллельной прямой l относится к ее точке A. Однако оказывается, что на самом деле это свойство от точки A не зависит, т. е. *для любой точки* A' *прямой* l' *эта прямая является проходящей через точку* A' *прямой, параллельной прямой* l (и при том в том же направлении).

В геометрии Евклида пары параллельных прямых отличаются расстояниями между прямыми и потому, вообще говоря, не конгруэнтны. Напротив, в геометрии Лобачевского *любая пара параллельных прямых конгруэнтна любой другой паре*! С этим тесно связан тот факт, что расстояние от точки прямой до параллельной прямой уменьшается при движении точки в направлении параллелизма и увеличивается при движении в обратном направлении (принимая при этом все значения из интервала $(0, \infty)$). Таким образом, в геометрии Лобачевского параллельные прямые неограниченно сближаются в направлении параллелизма и неограниченно расходятся в противоположном направлении.

В геометрии Евклида общий перпендикуляр существует у параллельных прямых, и таких перпендикуляров бесконечно много (целый пучок). В геометрии же Лобачевского, для того чтобы у двух прямых существовал общий перпендикуляр, необходимо и достаточно, чтобы эти прямые были расходящимися, и когда общий перпендикуляр существует, он единственен.

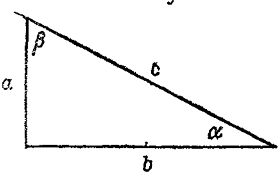
В частности, отсюда следует, что в геометрии Лобачевского не существует прямоугольников (четырехугольников с четырьмя прямыми углами).

Как мы уже знаем, в геометрии Лобачевского сумма $\alpha + \beta + \gamma$ углов произвольного треугольника строго меньше π. Разность $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ называется *дефектом* треугольника. Оказывается, что *дефект пропорционален площади треугольника*. Отсюда следует, что *в геометрии Лобачевского существует естественный эталон площади* (по отношению к которому дефект равен площади). За такой эталон можно принять произвольный *вырожденный треугольник*, стороны которого параллельны друг другу (в соответствующих направлениях). Все вырожденные треугольники конгруэнтны и их дефект равен π. Площадь произвольного треугольника не превосходит площади вырожденного.



Вырожденный треугольник

Тригонометрия геометрии Лобачевского (т. е. совокупность формул, связывающих углы и стороны треугольников) имеет по сравнению с евклидовой геометрией более сложный вид. Например, в прямоугольном треугольнике гипотенуза c связана с катетами a и b не формулой Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, а формулой



$$\operatorname{ch}\frac{c}{r} = \operatorname{ch}\frac{a}{r}\operatorname{ch}\frac{b}{r},$$

где r — некоторая универсальная константа зависящая от выбора эталона длины (ch — так называемый *гиперболический косинус*, определяемый формулой

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$-\infty < x < +\infty$) а катет a, прилегающий угол β и противоположный угол α связаны формулой

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{r}\sin\beta.$$

Предельный переход (при $b \to \infty$, $\alpha \to 0$ и $\beta \to \Pi(a)$) позволяет получить из последней формулы соотношение

$$\operatorname{ch}\frac{a}{r}\cdot\sin\Pi(a) = 1,$$

из которого следует, что

$$(1)\qquad \Pi(a) = 2\operatorname{arctg} e^{-a/r}.$$

Из этих формул, в частности, вытекает, что *на каждой плоскости Лобачевского существует и естественный эталон длины* (при котором $r = 1$). Этот эталон называется *радиусом кривизны* плоскости Лобачевского.

Окружность с центром O определяется в геометрии Лобачевского так же, как в геометрии Евклида, и так же, как в последней, *каждая окружность с центром O является ортогональной траекторией пучка прямых с центром в O*, т. е. пересекает все прямые этого пучка под прямым углом.

Однако кроме пучков, состоящих из прямых, проходящих через данную точку, в геометрии Лобачевского имеются еще *пучки расходящихся прямых*, состоящие из прямых, перпендикулярных данной прямой, и *пучки параллельных прямых*, состоящие из прямых, параллельных друг другу в данном направлении. Ортогональные траектории пучка расходящихся прямых, перпендикулярных прямой l, называются *эквидистантами* (или *гиперциклами*) с базой l, а ортогональные траектории пучка параллельных прямых — *орициклами*.

Каждая эквидистанта состоит из всех точек, отстоящих от ее базы l на данное расстояние d (называемое *высотой* эквидистанты), и при $d = 0$ совпадает со своей базой.

Подобно окружностям, все орициклы и все эквидистанты (с $d \neq 0$) являются кривыми линиями, обладающими *свойством полной подвижности* (состоящим в том, что, во-первых для любых двух точек A и B каждой из этих линий существует ортогональное преобразование плоскости переводящее линию в себя, а точку A в точку B, а, во-вторых, для любой точки A линии существует ось симметрии линии проходящая через точку A). Обратно, *любая линия на плоскости Лобачевского, обладающая свойством полной подвижности, является либо окружностью, либо орициклом либо эквидистантой* (при $d = 0$ являющейся прямой). Окружности различаются своими радиусами, а эквидистанты высотами. Что же касается орициклов, то *любые два орицикла конгруэнтны.*

Все эти утверждения геометрии Лобачевского можно вывести из аксиом. Однако это не всегда является легкой задачей и требует определенной изобретательности. Более простой путь состоит в том, чтобы построить для геометрии Лобачевского арифметическую модель, точками которой являются пары (x, y) вещественных чисел, и доказывать все теоремы более или менее автоматическими вычислениями в этой модели. Другими словами, этот путь состоит в применении к геометрии Лобачевского общего координатного метода аналитической геометрии. Кроме того (см. выше замечания, следующие за теоремой 2), предъявление арифметической модели сразу же обнаружит непротиворечивость геометрии Лобачевского и, тем самым, докажет независимость аксиомы V_1 от аксиом абсолютной геометрии и тщетность попыток ее доказательства.

Оказывается, что наиболее удобно строить арифметическую модель геометрии Лобачевского из пар (x, y) вещественных чисел или, — что, конечно, равносильно, — из комплексных чисел $z = x + iy$, для которых $y > 0$. Эта модель называется *моделью Пуанкаре* (или *моделью на верхней полуплоскости*).

Прямыми в модели Пуанкаре являются вертикальные полупрямые $x = \text{const}$, $y > 0$, и полуокружности

(2) $$(x-a)^2 + y^2 = r^2, \quad y > 0,$$

ортогональные оси абсцисс $y = 0$ (которая, заметим, в модель Пуанкаре не входит). Отношение порядка на этих прямых — то же, что и в евклидовой геометрии. Ортогональными преобразованиями модели Пуанкаре являются, во-первых, все дробно-линейные преобразования

(3) $$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1,$$

имеющие в нормированной записи **вещественные** коэффициенты a, b, c, d (они играют в модели Пуанкаре роль движений), и, во-вторых, все преобразования вида

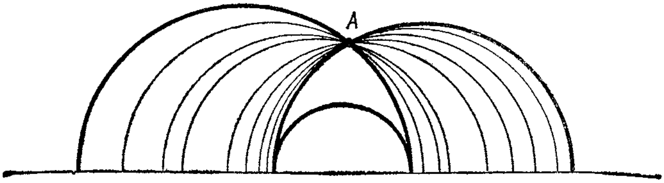
(4) $$w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

с вещественными коэффициентами a, b, c, d, удовлетворяющими соотношению $ad - bc = -1$. (К преобразованиям (4) принадлежит, в частности, симметрия $w = -\bar{z}$ относительно оси ординат, и каждое преобразование (4) является композицией этой симметрии и движения (3).)

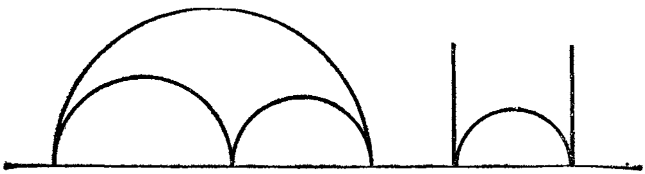
Выполнение аксиом I—IV в модели Пуанкаре проверяется автоматически.

Что же касается аксиомы V_1, то в модели Пуанкаре она очевидным образом не выполнена.

Пусть l — произвольная ориентированная прямая модели Пуанкаре. В случае, когда l является полуокружностью (2), она встречается с осью абсцисс в двух точках. В порядке, определяемом данной ориентацией прямой, мы обозначим их через l_∞^- и l_∞^+. Для прямой $x = x_0$, $y > 0$, мы будем принимать за эти точки точку x_0 и точку ∞. Тогда легко видеть (например, из чертежа), что



Параллельные и расходящиеся прямые в модели Пуанкаре



Вырожденные треугольники в модели Пуанкаре

две ориентированные прямые тогда и только тогда параллельны (в направлении их ориентации), когда точки l_∞^- и l_∞^+ для них одинаковы. Это делает совершенно прозрачными все свойства параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

Немногим трудней доказываются на модели Пуанкаре формулы тригонометрии Лобачевского. В качестве примера мы докажем формулу (1) для угла параллельности.

Для этого нам нужно предварительно научиться измерять на модели Пуанкаре углы и длины.

Впрочем, в отношении углов никакой проблемы нет, так как евклидова мера углов, сохраняясь при преобразованиях (3) и (4) (см. замечание 1 лекции 32), очевидно, будет мерой углов и на плоскости Пуанкаре.

Чтобы научиться вычислять длины, мы для любых двух различных точек A и B плоскости Лобачевского введем в рассмотрение точки l_∞^- и l_∞^+ прямой $l = AB$ (ориентированной от A к B) и двойное отношение

$$W(A, B) = \frac{z_2 - l_\infty^-}{z_2 - l_\infty^+} : \frac{z_1 - l_\infty^-}{z_1 - l_\infty^+},$$

где z_1 и z_2 — комплексные числа, изображающие в модели Пуанкаре точки A и B.

Оказывается, что *для расстояния* $|AB|$ *между точками* A, B *плоскости Лобачевского имеет место формула*

$$|AB| = R \ln W(A, B), \tag{5}$$

где $R \geqslant 0$ — некоторое число, зависящее от выбора эталона длины.

Чтобы доказать формулу (5), нам достаточно доказать, что число

$$\mu(A, B) = |AB|$$

1° вещественно и положительно;

2° обладает свойствами **а** и **б** из основной теоремы теории измерений (см. выше).

Но свойство **а** немедленно следует из того (см. предложение 3 лекции 32), что при дробно-линейных преобразованиях двойное отношение четырех точек сохраняется, а свойство **б** — из того, что если точки A, B, C на прямой l коллинеарны и расположены на прямой в порядке $A < B < C$, то для всех трех отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ точки l_∞^- и l_∞^+ одни и те же, и, значит,

$$W(A, B)W(B, C) = \left(\frac{z_2 - l_\infty^-}{z_2 - l_\infty^+} : \frac{z_1 - l_\infty^-}{z_1 - l_\infty^+}\right)\left(\frac{z_3 - l_\infty^-}{z_3 - l_\infty^+} : \frac{z_2 - l_\infty^-}{z_2 - l_\infty^+}\right) =$$

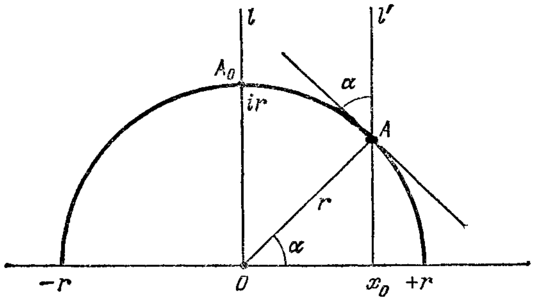
$$= \frac{z_3 - l_\infty^-}{z_3 - l_\infty^+} : \frac{z_1 - l_\infty^-}{z_1 - l_\infty^+} = W(A, C).$$

Поэтому нам нужно только доказать утверждение 1°. При этом в силу уже доказанного свойства **а** мы без ограничения общности можем считать, что точки A и B находятся на вертикальной полупрямой $x = 0$, $y > 0$, ориентированной снизу вверх, т. е. что $l_\infty^- = 0$, $l_\infty^+ = \infty$ и $z_1 = iy_1$, $z_2 = iy_2$, где $y_1 < y_2$. Но тогда $W(A, B) = \frac{y_2}{y_1} > 1$, что все и доказывает. □

[Другое — более конструктивное — доказательство формулы (5) мы дадим во втором семестре; см. лекцию II. 12в.]

Теперь мы уже можем доказать формулу (1).

Пусть l — произвольная прямая, A — точка, лежащая вне этой прямой, A_0 — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l, и α — угол между перпендикуляром A_0A и прямой l', проходящей через точку A параллельно прямой l. Без ограничения общности мы можем считать, что в модели Пуанкаре прямая l изображается полупрямой $x = 0$, $y = 0$, а точка A — числом



$z_0 = x_0 + iy_0$ с $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и, значит, прямая l' — полупрямой $x = x_0$, $y > 0$, точка A_0 — числом ir, а перпендикуляр AA_0 — полуокружностью $x^2 + y^2 = r^2$, $y > 0$, где $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ (т. е. $r = |z_0|$). Так как эта полуокружность встречает ось абсцисс в точках $\pm r$, то

$$W(A_0, A) = \frac{z_0 + r}{z_0 - r} : \frac{ir + r}{ir - r} = i\,\frac{z_0 + r}{z_0 - r}.$$

С другой стороны, угол α является по определению углом между прямой l' и касательной к окружности A_0A в точке A и, значит, равен углу, образованному радиус-вектором точки A с положительным направлением оси абсцисс, т. е. равен аргументу числа z_0. Следовательно, $z_0 = re^{i\alpha}$ и, значит,

$$W(A_0, A) = i\,\frac{e^{i\alpha} + 1}{e^{-i\alpha} - 1} = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2} : \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i} =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому, если $a = |A_0A|$, т. е. $e^{a/r} = W(A_0, A)$, то $e^{a/r} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, что равносильно формуле (1) (ибо $\alpha = \Pi(a)$). □

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиома Дедекинда 397
— Лобачевского 406
— Паша 391
Аксиомы Гильберта 390—401
—, эквивалентные аксиоме о параллельных 403
Асимптота 225
Ассоциированный линеал 43

Базис линеала 34
— ортонормированный 151
Бивектор 88

Вектор, дополнительный к бивектору 162
—, параллельный бивектору 106
Векторы коллинеарные 30
— компланарные 30
—, линейная комбинация 23
— ортогональные 143
Вращение 297
Высота эквидистанты 409

Геометрия абсолютная 401
— гиперболическая 406
— Лобачевского 403
— параболическая 406
— эллиптическая 406
Гипербола 190
— аффинная 202
Гиперболоид двуполостный 254
— однополостный 255

Движение 276
— винтовое 305
Двойное отношение четырех точек 384
Дефект треугольника 408
Деформация базисов линеала 71
Диаметр 227
Диаметры сопряженные 232
Длина вектора 103, 140

Изоморфизм евклидовых линейных пространств 154
— координатный 40, 45
— линеалов 39, 44

Инверсия 375
Инцидентность 362

Касательная 223
Конус действительный 262
— мнимый 253
Конфигурация Дезарга 364
— Паппа 367
Координаты вектора 36
— полярные 198
— проективные 353
— стереографические 308
Косинус гиперболический 408
Коэффициенты Фурье 149

Линеал 15
— евклидов 140
Линия алгебраическая n-го порядка 203
— второго порядка 204
— — (не)центральная 219
Лист Мёбиуса 370
Луч (полупрямая) 393

Матрица 60
— ортогональная 155
— перехода 66
Модель аффинной геометрии 338

Направление асимптотическое 222
— главное 244
— на прямой 394
— параллелизма прямых 407
— сопряженное 232
— хордальное 230
Неравенство Бесселя 149
— Коши—Буняковского 141
— треугольника 142

Образующая прямолинейная 257
Объем тривектора 159
Окружность 249
Определитель Грама пары векторов 169
— — тройки векторов 170
Ориентация 72
Орицикл 409

Ось (ориентированная прямая) 394
Отношение предшествования 393

Парабола 181
— аффинная 202
Параболоид гиперболический 265
— эллиптический 265
Перенос параллельный 277
Плоскость аффинно-проективная 337
—, задаваемая точкой и бивектором 115
— расширенная 336
Площадь бивектора 103, 161
Подмножество, линейно (не)зависимое 24
Полуплоскости, определенные прямой 59
Полуплоскость 394
Полупространства, определенные плоскостью 134
Порядок обратный на прямой 394
Преобразование ортогональное 395
Преобразования аффинные 277
— дробно-линейные 312
— — гиперболические 382
— — локсодромические 383
— — параболические 381
— — эллиптические 382
— ортогональные 277
— элементарные 75
Принцип двойственности 368
Проекция стереографическая 307
Произведение векторное 163
— — двойное 168
— внешнее векторов 87
— скалярное векторов 137
— смешанное векторов 160
Пространство аффинное 42
— — вещественно-комплексное 209
— аффинно-проективное 359
— проективное 360
— трансляций 43
Процесс ортогонализации Грама—Шмидта 153
Прямая 47
Прямые перпендикулярные 396
—, расходящиеся с данной прямой 406
Пучок плоскостей 349
— прямых 334

Радиус кривизны плоскости Лобачевского 409

Свойство полной неподвижности 409
Связка плоскостей 350
Семейство векторов ортонормированное 149
— — полное 33
Сечения конические 197
Система координат аффинная 45
— прямоугольных координат 151
Сумма бивекторов 107
Сфера 251

Теорема Пифагора 143
Тождество Лагранжа 170
Точки комплексно-сопряженные 210
— циклические 347
Тривектор 88

Углы вертикальные 395
— смежные 395
— Эйлера 303
Угол острый 397
— параллельности 406, 407
— прямой 396
— с вершиной O 394
— тупой 397
Умножение скалярное на линеале 139
Уравнение векторное параметрическое прямой 50
— плоскости нормальное 175
— прямой каноническое 52, 123
Уравнения линий второго порядка аффинно-канонические 205

Фигуры конгруэнтные 396
Флаг 395
Форма метрическая данного базиса 147
Формулы преобразования координат 69, 158

Центр линии 216
Цилиндр 271

Эквидистанта (гиперцикл) 409
Эллипс 185
— аффинный 202
Эллипсоид 251
— мнимый 253

Михаил Михайлович ПОСТНИКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лекции по геометрии. Часть I

Учебное пособие

Издание третье,
исправленное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru
www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Подписано в печать 22.10.08.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 25,20. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru