НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. М. Натанзон

Введение в пучки, расслоения и классы Черна

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 515.176.3
ББК 22.15
Н33

Натанзон С. М.

Н33 Введение в пучки, расслоения и классы Черна. — М.: МЦНМО, 2010. — 48 с.

ISBN 978-5-94057-647-1

Пучки, расслоения и их инварианты — это фундаментальные понятия современной геометрии, позволяющие исследовать глобальные свойства многообразий.

Книга содержит основные определения и первые шаги этой теории. Подробно обсуждаются, в частности, когомологии со значениями в пучках и классы Черна расслоений.

Книга является записью курса лекций, которые автор неоднократно читал для студентов 2–4 курсов Независимого московского университета.

ББК 22.15

Сергей Миронович Натанзон

Введение в пучки, расслоения и классы Черна

Подписано в печать 05.07.2010 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография „САРМА“».

ISBN 978-5-94057-647-1

Содержание

§ 1. Введение

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например, голоморфности) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств позволяет исследовать явление в целом начиная с его локальных, обычно проще контролируемых свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков*. Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке*, и специальные элементы групп когомологий многообразия со значениями в постоянном пучке, называемые *классами Черна*. Группы когомологий и классы Черна определяют важнейшие фундаментальные свойства многообразия. Эти понятия являются основным языком всех разделов современной геометрии. Настоящий курс является введением в теорию пучков и связанных с ней структур.

Первая часть курса (§ 1—7) посвящена когомологиям со значениями в пучках. Мы даем несколько по виду совершенно непохожих друг на друга конструкций когомологий: с помощью ацикличных резольвент, через семейства покрытий (когомологии Чеха) и, для гладких многообразий, с помощью дифференциальных форм (когомологии де Рама) и сингулярных коцепей (сингулярные когомологии). Мы доказываем, что все эти конструкции приводят к одинаковым группам когомологий (теоремы Лере и де Рама). Более того, мы показываем, что когомологии реализуют единственный естественный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп, переводящий короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность групп.

Вторая часть курса посвящена самому «массовому» типу пучков — локально свободным пучкам, т. е. пучкам сечений локально тривиальных векторных расслоений. После описания категории таких пучков (§ 8) мы определяем и исследуем свойства эрмитовых связностей в расслоениях (§ 9). Далее (§ 10) мы определяем классы Черна как миноры матриц кривизны эрмитовых связностей, исследуем функториальные свойства классов Черна и обсуждаем другие определения классов Черна. В последних двух параграфах мы исследуем простейшие свойства пучков и расслоений на комплексных многообразиях. В § 11 мы определяем когомологии Дольбо и числа Ходжа. В § 12 мы доказываем, что первый класс Черна голоморфного расслоения ранга 1 описывается оператором Бокштейна и, таким образом, двойствен классу линейной эквивалентности дивизора мероморфного сечения расслоения.

Книга является записью курса, который автор неоднократно читал для студентов 2—4 курсов Независимого московского университета.

§ 2. Пучки

2.1. Основные определения. Напомним, что *топологическим пространством* называется множество X с такой системой подмножеств $\mathfrak{U}$, что

1) $X, \varnothing \in \mathfrak{U}$;

2) объединение $\bigcup U_\alpha$ произвольного числа подмножеств $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

3) пересечение $\bigcap U_\alpha$ конечного числа подмножеств $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Подмножества из $\mathfrak{U}$ называются *открытыми множествами*. Дополнение $X \setminus U$ к отрытому множеству $U \in \mathfrak{U}$ называется *замкнутым множеством.*

Предпучком $\mathcal{F}$ над топологическом пространством $(X, \mathfrak{U})$ называется

а) набор множеств $\{\mathcal{F}(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$, называемых *сечениями над* U;

б) набор отображений $\{r_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \mid U, V \in \mathfrak{U}, V \subset U\}$, называемых *ограничениями* и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $r_U^U = 1_U$ — тождественное отображение;

2) $r_W^U = r_W^V r_V^U$ при $W \subset V \subset U$.

Предпучок $\mathcal{F}$ называется *предпучком групп* (*колец, модулей* и т. п.), если все множества $\mathcal{F}(U)$ являются группами (соответственно кольцами, модулями и т. п.) и все отображения r_V^U являются гомоморфизмами соответствующих структур.

Пучком называется предпучок $\mathcal{F}$, в котором выполнены следующие аксиомы.

1. Пусть $U = \bigcup U_i$, $s, t \in \mathcal{F}(U)$ и $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t)$ для всех U_i. Тогда $s = t$.

2. Пусть $U = \bigcup U_i$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ и $r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ для всех i, j. Тогда существует такое $s \in \mathcal{F}(U)$, что $r_{U_i}^U(s) = s_i$.

Пример 2.1 (пучок отображений множества X в множество Y). Здесь $\mathcal{F}(U)$ — множество всех отображений множества U в множество Y, а r_V^U — ограничение отображения на подмножество. Если все множество Y является группой (соответственно кольцом, модулем и т. п.), то возникает пучок групп (соответственно колец, модулей и т. п.).

Пример 2.2. Если в предыдущем примере в качестве $\mathcal{F}(U)$ рассматривать лишь множество локально постоянных отображений, то возникает пучок, называемый *постоянным.*

Пример 2.3. Если в примере 2.1 считать, что Y — топологическое пространство и $\mathcal{F}(U)$ — множество непрерывных функций, то возникает пучок *непрерывных отображений.*

Пример 2.4. Если в предыдущем примере считать, что X — гладкое (соответственно комплексное) многообразие, Y — поле вещественных (соответственно комплексных) чисел и $\mathcal{F}(U)$ — множество гладких (соответственно голоморфных) функций, то возникает пучок *гладких* (соответственно *голоморфных*) *функций.*

Пример 2.5. Если, как и в предыдущем примере, считать, что X — гладкое или комплексное многообразие, а $\mathcal{F}(U)$ — множество тензорных полей на нем, то возникает пучок *тензорных полей.*

Упражнение 2.1. Докажите, что конструкции, описанные в примерах, действительно порождают пучки.

Упражнение 2.2. Придумайте предпучок, не являющийся пучком.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки на X. Их *морфизмом* $h\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется такой набор отображений $\{h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$, что $h_V r_V^U = r_V^U h_U$. Ядра и образы этих отображений порождают подпучки $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathcal{F}$ и $\mathrm{Im}(h) \subset \mathcal{G}$. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются предпучками групп, колец, модулей и т. п., то морфизмами таких предпучков считаются лишь морфизмы $\{h_U\}$, порождающие гомоморфизмы соответствующих структур. Морфизм называется *изоморфизмом*, если все отображения взаимно однозначны.

Упражнение 2.3. Будем считать, что в примере 2.5 множество $\mathcal{F}(U)$ состоит из гладких или голоморфных (когда X — комплексное многообразие) тензорных полей. Докажите, что такое множество $\mathcal{F}(U)$ также порождает пучок, называемый *пучком гладких* (соответственно *голоморфных*) *тензорных полей.* Докажите, что этот пучок мономорфно отображается в пучок всех тензорных полей из примера 2.5.

2.2. Накрытия. Сюръективный локальный гомеоморфизм топологических пространств $\pi\colon Y \to X$ назовем *накрытием* (это определение отличается от стандартного, но удобно для изучения пучков).

Наша ближайшая цель — сопоставить произвольному предпучку $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), r_V^U\}$ на X некоторое накрытие пространства X. Обозначим через $\mathcal{F}_x = \lim\limits_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ *индуктивный предел* множеств $\mathcal{F}(U)$ относительно отображений ограничения r_V^U. По определению множество $\mathcal{F}_x$ состоит из классов эквивалентности $\bigcup\limits_{U \ni x} \mathcal{F}(U)/\sim_x$, где $s \in \mathcal{F}(V) \sim_x t \in \mathcal{F}(W)$, если существует такое открытое множество $U \subset V \cap W$, что $r_U^V(s) = r_U^W(t)$.

Положим $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Пусть $s \in \mathcal{F}(U)$. Тогда каждой точке $x \in U$ отвечает класс эквивалентности $s_x \in \mathcal{F}_x$ сечения s. Объединение всех таких классов образует подмножество $s_U \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Зададим на $\widetilde{\mathcal{F}}$ топологию, считая, что открытыми являются все множества s_U и все объединения таких множеств.

Упражнение 2.4. Докажите, что описанная конструкция действительно задает структуру топологического пространства на $\widetilde{\mathcal{F}}$. Докажите, что отображение $\pi\colon \widetilde{\mathcal{F}} \to X$, где $\pi(\mathcal{F}_x) = x$, является накрытием.

Сечением накрытия $\pi\colon Y \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется такое отображение $s\colon U \to Y$, что $\pi s = 1_U$ — тождественное отображение. Обозначим через $\mathcal{F}(U)$ множество непрерывных сечений на $U \subset X$.

Упражнение 2.5. Докажите, что множества сечений $\{\mathcal{F}(U) \mid U \in \in \mathfrak{U}\}$ вместе с естественными отображениями ограничений сечений на подмножества образуют пучок. Он называется *пучком сечений накрытия.*

Таким образом, всякий предпучок $\mathcal{F}$ *порождает* пучок $\bar{\mathcal{F}}$ сечений накрытия $\pi\colon \widetilde{\mathcal{F}} \to X$. Если $\mathcal{F}$ является предпучком с алгебраической структурой (т. е. является предпучком групп, модулей и т. п.), то этой же структурой обладает и порожденный пучок. Сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ отвечает множество s_U, образующее сечение $\bar{s} \in \bar{\mathcal{F}}(U)$. Соответствие $s \mapsto \bar{s}$ порождает отображение $\tau_U\colon \mathcal{F}(U) \to \bar{\mathcal{F}}(U)$.

Упражнение 2.6. Докажите, что семейство отображений $\mathcal{F}(U) \to \to \bar{\mathcal{F}}(U)$ образует морфизм предпучков $\tau_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$. Более того, если $\mathcal{F}$ — пучок групп, то $\bar{\mathcal{F}}$ тоже пучок групп и $\tau_{\mathcal{F}}$ — морфизм пучков групп.

Упражнение 2.7. Докажите, что морфизм предпучков $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ естественно порождает непрерывное отображение $\tilde{h}\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$, которое, в свою очередь, естественно порождает такой морфизм предпучков $\bar{h}\colon \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$, что $\tau_{\mathcal{A}} h = \bar{h} \tau_{\mathcal{B}}$.

Теорема 2.1. *Если $\mathcal{F}$ — пучок, то $\tau\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ — изоморфизм пучков.*

Доказательство. 1. Докажем инъективность. Пусть $s', s'' \in \mathcal{F}(U)$ и $\tau_U(s') = \tau_U(s'')$. Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Тогда $r_x^U(s') = r_x^U(s'')$. Следовательно, существует такое содержащее точку x открытое множество $V^x \subset U$, что $r_{V^x}^U(s') = r_{V^x}^U(s'')$. Таким образом, существует такое покрытие $U = \bigcup\limits_{x \in X} V^x$, что $r_{V^x}^U(s') = r_{V^x}^U(s'')$. Согласно первой аксиоме пучка отсюда следует, что $s' = s''$.

2. Докажем сюръективность. Пусть $\sigma \in \bar{\mathcal{F}}(U)$. Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Тогда $\sigma(x)$ представляет собой класс эквивалентности сечения $s^x \in \mathcal{F}(V^x)$, где $x \in V^x \subset U$. Сечение s^x порождает сечение накрытия $\sigma^x = \tau_{V^x}(s^x) \in \bar{\mathcal{F}}(V^x)$. Сечения накрытия σ и σ^x совпадают в точке x и, следовательно, совпадают в некоторой окрестности $W^x \subset V^x$. Таким образом,

$$\sigma|_{W^x} = \sigma^x|_{W^x} = r_{W^x}^{V^x}(\tau_{V^x}(s^x)) = \tau_{W^x}(r_{W^x}^{V^x}(s^x)) = \tau_{W^x}(\hat{s}^x))\,,$$

где $\hat{s}^x = r_{W^x}^{V^x}(s^x)$.

Взяв такую окрестность W^x для каждой точки $x \in U$, получаем такое покрытие $U = \bigcup\limits_{x \in U} W^x$, что $\sigma|_{W^x} = \tau_{W^x}(\hat{s}^x)$. В частности, $\tau_{W^x}(\hat{s}^x) = \tau_{W^y}(\hat{s}^y)$ на $W^x \cap W^y$. Ввиду уже доказанной инъективности отсюда следует, что $r_{W^x \cap W^y}^{W^x}(\hat{s}^x) = r_{W^x \cap W^y}^{W^y}(\hat{s}^y)$. Таким образом, согласно второй аксиоме пучка существует такое сечение $\hat{s} \in \mathcal{F}(U)$, что $\hat{s}^x = r_{W^x}^U(\hat{s})$. Следовательно, $\tau_U(\hat{s})|_{W^x} = \tau_{W^x}(r_{W^x}^U(\hat{s})) = \tau_{W^x}(\hat{s}^x) = \sigma|_{W^x}$. $\square$

Следствие 2.1. *Каждый пучок изоморфен пучку непрерывных сечений некоторого накрытия.*

§ 3. Когомологии с коэффициентами в пучке

3.1. Каноническая резольвента пучка. Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки являются пучками коммутативных групп.

Говорят, что *пучок $\mathcal{A}$ является подпучком пучка $\mathcal{B}$* (и пишут $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$), если $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ для любого открытого множества U.

Упражнение 3.1. Докажите, что в этом случае соответствие $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$ порождает предпучок.

Пучок $\mathcal{C}$, порожденный предпучком $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$, называется *факторпучком.*

Говорят, что *последовательность гомоморфизмов групп $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ точна в B*, если $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$. Говорят, что *последовательность* *морфизмов* $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ *пучков групп над* X *точна в* $\mathcal{B}$, если для любого $x \in X$ последовательность групп $\mathcal{A}_x \xrightarrow{g} \mathcal{B}_x \xrightarrow{h} \mathcal{C}_x$ точна в $\mathcal{B}_x$.

Упражнение 3.2. Докажите, что естественное вложение подпучка в пучок вместе с естественной проекцией пучка на факторпучок порождают точную последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$.

Упражнение 3.3. Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на $\mathbb{C} \setminus 0$, рассматриваемый как группа по сложению, $\mathcal{Z}$ — подпучок постоянных целочисленных функций и $\mathcal{O}^*$ — пучок не обращающихся в 0 голоморфных функций на $\mathbb{C} \setminus 0$, рассматриваемый как группа по умножению. Докажите, что тогда последовательность пучков $0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$, точна, а последовательность гомоморфизмов групп $0 \to \mathcal{Z}(\mathbb{C} \setminus 0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus 0) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(\mathbb{C} \setminus 0) \to 0$ не точна.

Предыдущее упражнение дает пример точной последовательности пучков, порождающей последовательность сечений, которая не является точной. Неточности такого типа характеризуют пучок и являются, по существу, предметом *теории когомологий*.

Точная (во всех членах) последовательность пучков вида

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$$

называется *резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

Упражнение 3.4. Докажите, что последовательность групп

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots,$$

индуцированная резольвентой $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$, удовлетворяет условиям $\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{n+1}\tilde{\alpha}_n = 0$ и $\operatorname{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \operatorname{Im}(\tilde{\alpha})$

Рассмотрим пучок $\mathcal{F}$ и изоморфный ему пучок $\bar{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi\colon Y \to X$. Рассмотрим пучок $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to Y \mid \pi s = 1\}$ всех сечений накрытия π. Естественное вложение непрерывных сечений в произвольные порождает точную в $\mathcal{F}$ последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(\mathcal{F})$.

Положим $\mathcal{F}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\operatorname{Im}(\alpha))$ и обозначим через $\alpha_0\colon \mathcal{F}^0 \to \to \mathcal{F}^0/\operatorname{Im}(\alpha) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\operatorname{Im}(\alpha)) = \mathcal{F}^1$ композицию естественных гомоморфизмов пучков. Мы получили последовательность гомоморфизмов $0 \to \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1$. Далее положим $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\operatorname{Im}(\alpha_{n-1}))$ и обозначим через $\alpha_n\colon \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n/\operatorname{Im}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\operatorname{Im}(\alpha_{n-1})) = \mathcal{F}^{n+1}$ композицию естественных гомоморфизмов пучков.

Упражнение 3.5. Докажите, что последовательность пучков
$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$$
является резольвентой.

Построенная резольвента $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *канонической резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

3.2. Когомологии. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над X, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1}$ $\xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — его каноническая резольвента и
$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$$
— индуцированная последовательность групп. Тогда группы
$$H^0(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_0) = \mathcal{F}(X), \quad H^n(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$$
называются *n-ми группами когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$*. Их прямая сумма $H^*(X,\mathcal{F})$ называется (*полной*) *группой когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.*

Это понятие позволяет сопоставить группу произвольному пучку и использовать методы алгебры для изучения геометрических объектов. Для простейших (и важнейших) пространств и пучков это соответствие (другими методами) было впервые построено А. Пуанкаре. Следующая теорема показывает, что соответствие является функториальным.

Теорема 3.1. *Морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ пучков над X порождает такие гомоморфизмы групп когомологий $h_n\colon H^n(X,\mathcal{A}) \to H^n(X,\mathcal{B})$, что*

1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ *— гомоморфизм глобальных сечений*;

2) *если h — тождественный морфизм, то h_n — тождественный гомоморфизм для любого n*;

3) *если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ — последовательность морфизмов пучков, то $(lh)_n = l_n h_n$.*

Доказательство. Рассмотрим накрытия $f\colon Y \to X$ и $g\colon Z \to X$, пучки непрерывных сечений которых изоморфны пучкам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Морфизм h порождает гомеоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

Диаграмма порождает морфизм $h_0(s) = hs$ пучков всех сечений накрытий. Этот морфизм замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[d, "h_0"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{B}^0 \end{tikzcd}$$

где α и β — вложения непрерывных сечений в произвольные. Рассмотрим накрытия $f^0\colon Y^0 \to X$ и $g^0\colon Z^0 \to X$ пучки непрерывных сечений которых изоморфны пучкам $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)$ и $\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$ соответственно. Морфизм h_0 порождает гомеоморфизм $\tilde{h}_0$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y^0 \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, "f^0"] & Z^0 \arrow[d, "g^0"] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

Эта диаграмма порождает морфизм h_1 пучков всех сечений накрытий, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h_0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[d, "h_1"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{B}^1 \end{tikzcd}$$

Продолжая процесс, получаем коммутативную диаграмму морфизмов пучков

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h_0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h_1"] & \ldots \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \mathcal{A}^n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "h_n"] & {} \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] & \mathcal{B}^1 \arrow[r, "\beta_1"] & \ldots \arrow[r, "\beta_{n-1}"] & \mathcal{B}^n \arrow[r, "\beta_n"] & {} \end{tikzcd}$$

Она порождает коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[d, "\tilde{h}_1"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\alpha}_{n-1}"] & \mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_n"] & {} \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_1"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\beta}_{n-1}"] & \mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_n"] & {} \end{tikzcd}$$

Если $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $\tilde{\beta}_n(b) = \tilde{\beta}_n(\tilde{h}(a)) = \tilde{h}_{n+1}(\tilde{\alpha}_n(a)) = 0$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\beta}_n)$. Кроме того, если $a \in \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ и

$b = \tilde{h}_n(a)$, то $a = \tilde{\alpha}_{n-1}(\hat{a})$ и $b = (\tilde{\beta}_{n-1}(\tilde{h}_{n-1}\hat{a})) \in \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$. Следовательно, гомоморфизм $\tilde{h}_n$ порождает гомоморфизм $h_n\colon H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B})$. Его свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определений. Для доказательства свойства 3 рассмотрим коммутативную диаграмму резольвент

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h^0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h^1"] & \ldots \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] & \mathcal{A}^n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "h^n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "l"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "l^0"] & \mathcal{B}^1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "l^1"] & \ldots \arrow[r, "\beta_{n-1}"] & \mathcal{B}^n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "l^n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, "\gamma_0"] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, "\gamma_1"] & \ldots \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] & \mathcal{C}^n \arrow[r, "\gamma_n"] & {}
\end{tikzcd}$$

порождающую коммутативную диаграмму групп

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[d, "\tilde{h}_1"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\alpha}_{n-1}"] & \mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "\tilde{l}"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_0"] \arrow[d, "\tilde{l}_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_1"] \arrow[d, "\tilde{l}_1"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\beta}_{n-1}"] & \mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_n"] \arrow[d, "\tilde{l}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \mathcal{C}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0"] & \mathcal{C}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\gamma}_{n-1}"] & \mathcal{C}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n"] & {}
\end{tikzcd}$$

Из наших определений непосредственно следует, что морфизм пучков $l^n h^n$ порождает произведение гомоморфизмов $\tilde{l}_n \tilde{h}_n$. □

§ 4. Точные последовательности

4.1. Мягкие пучки. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности. Покрытие замкнутыми множествами $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ называется *консервативным*, если для любого $B \subset A$ множество $\bigcup\limits_{\alpha \in B} U_\alpha$ замкнуто. Говорят, что покрытие $X = \bigcup\limits_{\gamma \in A} W_\gamma$ *вписано в покрытие* $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, если для любого U_α существует такое W_γ, что $W_\gamma \subset U_\alpha$. Хаусдорфово топологическое пространство X называется *паракомпактом*, если в любое его открытое покрытие можно вписать консервативное замкнутое покрытие. Для нас важно, что все метризуемые пространства и, в частности, топологические многообразия — паракомпакты. Топологическая структура пространства X порождает структуру топологического пространства на любом замкнутом подмножестве $S \subset X$. Открытые подмножества в S — это пересечения открытых подмножеств пространства X с S. Всякое замкнутое подмножество паракомпакта — паракомпакт.

Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства — паракомпакты.

Для любого пучка $\mathcal{F}$ над над топологическим пространством X и замкнутого подмножества $S \subset X$ определим множество $\mathcal{F}(S)$ как индуктивный предел $\varinjlim\limits_{S \subset U} \mathcal{F}(U)$ множеств $\mathcal{F}(U)$ относительно отображений ограничения r_S^U. Другими словами, множество $\mathcal{F}(S)$ состоит из классов эквивалентности $\bigcup\limits_{U \supset S} \mathcal{F}(U)/{\sim_S}$, где $s \in \mathcal{F}(V) \sim_S t \in \mathcal{F}(W)$, если существует такое открытое множество $U \subset V \cap W$, что $r_U^V(s) = r_U^W(t)$. Эта конструкция порождает отображения ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$.

Пучок $\mathcal{F}$ над топологическим пространством X называется *мягким*, если отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$ сюръективно для любого замкнутого подмножества $S \subset X$, т. е. любое сечение над S продолжается до сечения над X.

Упражнение 4.1. Докажите следующие утверждения.

1. Пучок $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ произвольных сечений накрытия мягкий.
2. Пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$ мягкий.
3. Пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}$ не мягкий.
4. Постоянный пучок (т. е. пучок локально постоянных функций) не мягкий.

Как и раньше, говоря о пучках, мы будем иметь в виду пучки над фиксированным пространством X.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — мягкий пучок и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{A}(X) \xrightarrow{g} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{h} \mathcal{C}(X) \to 0$ тоже точна.*

Доказательство. Точность в членах $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$ сразу следует из точности последовательности пучков в членах $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и аксиомы 2 пучка. Докажем точность в члене $\mathcal{C}(X)$. Пусть $c \in \mathcal{C}(X)$. Тогда для каждого $x \in X$ существуют такая окрестность $x \in U$ и такое сечение $b \in \mathcal{B}(U)$, что $h(b) = c|_U$. Покроем пространство X парами (U_j, b_j) такого типа. Рассмотрим консервативное покрытие $\{S_i\}$, вписанное в покрытие $\{U_i\}$. Оно порождает множество пар (S_i, s_i), где $s_i \in \mathcal{B}(S_i)$ и $h(s_i) = c|_{S_i}$.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{S}$ всех пар (S, s), где S — объединение множеств из $\{S_i\}$ и $h(s) = c|_S$. Введем на $\mathfrak{S}$ частичный порядок, считая, что $(S, s) \preceq (S', s')$, если $S \subset S'$ и $s'|_S = s$. Любая упорядоченная цепочка таких пар имеет верхнюю границу — объединение всех элементов цепочки. Следовательно, согласно лемме Цорна существует такая пара $(\bar{S}, \bar{s}) \in \mathfrak{S}$, что $(S, s) \preceq (\bar{S}, \bar{s})$ для всех $(S, s) \in \mathfrak{S}$. Осталось доказать, что $\bar{S} = X$. Пусть это не так. Тогда существует такая пара $(S_0, s_0) \in \mathfrak{S}$, что $S_0 \not\subseteq \bar{S}$ и $h(\bar{s} - s_0) = 0$ на $S_0 \cap \bar{S}$. Ввиду точности в члене $\mathcal{B}(X)$ отсюда следует, что существует такое сечение $a \in \mathcal{A}(S_0 \cap \bar{S})$, что $g(a) = \bar{s} - s_0$. Используя мягкость пучка $\mathcal{A}$, продолжим сечение a до $\tilde{a} \in \mathcal{A}(X)$. Рассмотрим сечение $\tilde{s} \in \mathcal{B}(S_0 \cup \bar{S})$, где $\tilde{s}|_{\bar{S}} = \bar{s}$ и $\tilde{s}|_{S_0} = s_0 + g(a)$. Тогда $(S_0 \cup \bar{S}, \tilde{s}) \in \mathfrak{S}$, что противоречит максимальности пары $(\bar{S}, \bar{s})$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — мягкие пучки и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда пучок $\mathcal{C}$ мягкий.*

Доказательство. Пусть $S \subset X$ — произвольное замкнутое множество и $c \in \mathcal{C}(S)$. Тогда согласно теореме 4.1 существует такое сечение $b \in \mathcal{B}(S)$, что $h(b) = c$. Используя мягкость пучка $\mathcal{B}$, продолжим сечение b до сечения $\tilde{b} \in \mathcal{B}(X)$ и положим $\tilde{c} = h(\tilde{b})$. Тогда $\tilde{c}|_S = c$. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — точная последовательность, состоящая из мягких пучков на X. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$ тоже точна.*

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}^0$ и $K^n = \operatorname{Ker}(\tilde{\alpha}_n)$ при $n > 0$. Тогда из теоремы 4.2 следует, что $0 \to K^n \to \mathcal{F}^n \to K^{n+1} \to 0$ — точная последовательность мягких пучков. Согласно теореме 4.1 последовательность групп $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$ тоже точна. Последовательность групп

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \ldots$$

является склейкой последовательностей

$$0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0.$$ $\square$

Следствие 4.1. *Если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Каноническая резольвента пучка $\mathcal{F}$ состоит из мягких пучков. $\square$

4.2. Длинная точная последовательность.

Теорема 4.4. *Точная последовательность пучков*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$$

порождает точную последовательность групп когомологий

$$0 \to H^0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} H^0(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} H^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0}$$
$$\xrightarrow{\delta_0} H^1(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} H^1(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} H^1(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} H^2(X,\mathcal{A}) \to \dots,$$

называемую длинной точной последовательностью.

Доказательство. Канонические резольвенты пучков порождают коммутативную диаграмму групп

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde\alpha"] \arrow[d, "\tilde h"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde\alpha_0"] \arrow[d, "\tilde h_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde\alpha_1"] \arrow[d, "\tilde h_1"] & \dots \arrow[r, "\tilde\alpha_{n-1}"] & \mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde\alpha_n"] \arrow[d, "\tilde h_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde\beta"] \arrow[d, "\tilde l"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde\beta_0"] \arrow[d, "\tilde l_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde\beta_1"] \arrow[d, "\tilde l_1"] & \dots \arrow[r, "\tilde\beta_{n-1}"] & \mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde\beta_n"] \arrow[d, "\tilde l_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d] & \mathcal{C}^0(X) \arrow[r, "\tilde\gamma_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^1(X) \arrow[r, "\tilde\gamma_1"] \arrow[d] & \dots \arrow[r, "\tilde\gamma_{n-1}"] & \mathcal{C}^n(X) \arrow[r, "\tilde\gamma_n"] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Ввиду теоремы 4.1 все столбцы начиная со второго точны. Построим отображение δ_n. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n)$. Ввиду точности столбца существует такой элемент $b \in B^n(X)$, что $\tilde l_n(b) = c$. Положим $b' = \tilde\beta_n b$. Тогда $\tilde l_{n+1} b' = \tilde l_{n+1}(\tilde\beta_n b) = \tilde\gamma_n(\tilde l_n b) = \tilde\gamma_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует такой элемент $a \in A^{n+1}(X)$, что $\tilde h_{n+1}(a) = b'$. Более того, $\tilde h_{n+2}(\tilde\alpha_{n+1} a) = \tilde\beta_{n+1}(\tilde h_{n+1} a) = \tilde\beta_{n+1} b' = \tilde\beta_{n+1}\tilde\beta_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde\alpha_{n+1} a = 0$, т. е. $a \in \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_{n+1})$. Элемент b' определен с точностью до $\mathrm{Ker}(\tilde l_n) = \mathrm{Im}(\tilde h_n)$. Таким образом, элемент a определен с точностью до $\mathrm{Im}(\tilde\alpha_n)$. Следовательно, соответствие $b \mapsto a$ порождает отображение $\tilde\delta_n \colon \mathrm{Ker}(\tilde\gamma_n) \to H^{n+1}(X,\mathcal{A})$.

Пусть теперь $c \in \mathrm{Im}(\tilde{\gamma}_{n-1})$, т.е. $c = \tilde{\gamma}_{n-1}c''$ для некоторого элемента $c'' \in C^{n-1}(X)$. Ввиду точности столбца существует такой элемент $b'' \in B^{n-1}(X)$, что $\tilde{l}_{n-1}(b'') = c''$. Положим $b = \tilde{\beta}_{n-1}b''$. Ввиду коммутативности диаграммы $\tilde{l}_n b = c$. Используя этот элемент b в описанной выше конструкции, находим, что $\tilde{\delta}_n c = 0$ и, следовательно, $\tilde{\delta}_n$ порождает гомоморфизм $\delta_n \colon H^n(X, \mathcal{C}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Если $\tilde{h}_n a \in \mathrm{Ker}(\beta_n)$, то $\tilde{h}_{n+1}\alpha_n a = \tilde{\beta}_n \tilde{h}_n a = 0$ и, следовательно, $a \in \in \mathrm{Ker}(\alpha_n)$. Таким образом, точность длинной последовательности в члене $H^n(X, \mathcal{B})$ следует из точности столбцов диаграммы сечений пучков. Аналогично доказывается точность последовательности в члене $H^n(X, \mathcal{C})$. Пусть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{h}_{n+1})$. Тогда $\tilde{h}_{n+1}a \in \mathrm{Im}(\beta_n)$, т. е. $\tilde{h}_{n+1}a = \beta_n b$ для некоторого $b \in B^n(X)$. По определению это означает, что $a = \delta_n c$, где $c = \tilde{l}_n(b)$. □

Участвующие в длинной точной последовательности операторы δ_i называются *связывающими*.

Упражнение 4.2. Докажите, что морфизм (т. е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

порождает морфизм (т. е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{A}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{A}') & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{B}') & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{C}') & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{A}') & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

§ 5. Аксиоматическая теория когомологий

5.1. Ацикличные резольвенты. Резольвента

$$D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} \ldots\}$$

пучка $\mathcal{F}$ называется *ацикличной*, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0$, $m \geqslant 0$.

Свяжем с резольвентой $D_{\mathcal{F}}$ последовательность сечений

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathcal{D}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} \mathcal{D}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \mathcal{D}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_2} \ldots$$

Положим $H^0(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$ для $n > 0$.

Теорема 5.1. *Для произвольной резольвенты*

$$D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} \ldots\}$$

существуют естественные гомоморфизмы $\gamma^n \colon H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^n(X, \mathcal{F})$. *Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если* $D_{\mathcal{F}}$ *— ациклична резольвента.*

Доказательство. Положим $K^0 = \mathcal{F}$ и $K^n = \mathrm{Ker}(\delta_n)$ при $n > 0$. Тогда последовательность $0 \to K^{n-1} \to \mathcal{D}^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} K^n \to 0$ точна. Рассмотрим ее длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(X, K^{n-1}) \to H^0(X, \mathcal{D}^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n-1}} H^0(X, K^n) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_1^n}$$
$$\xrightarrow{\tilde{\gamma}_1^n} H^1(X, K^{n-1}) \to H^1(X, \mathcal{D}^{n-1}) \to \ldots$$

Согласно нашим определениям

$$H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}) = K^n(X)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}) = H^0(X, K^n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}).$$

Таким образом, гомоморфизм $\tilde{\gamma}_1^n$ порождает мономорфизм

$$\gamma_1^n \colon H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^1(X, K^{n-1}),$$

являющийся изоморфизмом при $H^1(X, \mathcal{D}^{n-1}) = 0$.

Повторяя эти рассуждения для точной последовательности

$$0 \to K^{n-r} \to \mathcal{D}^{n-r} \xrightarrow{\delta_{n-r}} K^{n-r+1} \to 0,$$

находим точную последовательность

$$\ldots \to H^{r-1}(X, \mathcal{D}^{n-r}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n-r}} H^{r-1}(X, K^{n-r+1}) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_r^n} H^r(X, K^{n-r}) \to$$
$$\to H^r(X, \mathcal{D}^{n-r}) \to \ldots$$

Она порождает гомоморфизм $\gamma_r^n \colon H^{r-1}(X, K^{n-r+1}) \to H^r(X, K^{n-r})$, являющийся изоморфизмом при $H^{r-1}(X, \mathcal{D}^{n-r}) = H^r(X, \mathcal{D}^{n-r}) = 0$. Таким образом, гомоморфизм

$$\gamma^n = \gamma^n_n \gamma^n_{n-1} \gamma^n_{n-2} \dots \gamma^n_1 \colon H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^1(X, K^{n-1}) \to \\ \to H^2(X, K^{n-2}) \to \dots \to H^n(X, K^0) = H^n(X, \mathcal{F})$$

является изоморфизмом, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0, m \geqslant 0$. $\square$

Ниже мы увидим, что многие важные пучки имеют естественные ацикличные резольвенты. В этих случаях теорема 5.1 дает эффективную возможность вычислять когомологии с коэффициентами в пучках.

5.2. Аксиоматический подход. Используя тот же подход, что и при доказательстве теоремы 5.1, можно доказать следующее утверждение

Упражнение 5.1. Докажите, что морфизм резольвент

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{B}^0 \arrow[r] & \mathcal{B}^1 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

порождает гомоморфизмы групп $\tilde{f}_n \colon H^n(X, A_{\mathcal{F}}) \to H^n(X, B_{\mathcal{F}})$. Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если f — изоморфизм пучков и обе резольвенты ацикличны.

Более того, в доказательстве теоремы 5.1 используются лишь доказанные нами общие свойства групп когомологий и не используется конструкция, с помощью которой мы их определяли. Это позволяет описать когомологии как аксиоматическую теорию.

Упражнение 5.2. Пусть $\mathcal{F} \mapsto \tilde{H}^*(X, \mathcal{F})$ — произвольное соответствие, сопоставляющее пучку абелевых групп $\mathcal{F}$ над топологическим пространством X семейство абелевых групп

$$\tilde{H}^*(X, \mathcal{F}) = \{\tilde{H}^n(X, \mathcal{F}) \mid n \geqslant 0\}$$

таким образом, что $\tilde{H}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ и выполняются утверждения следующих теорем, следствий и упражнений:

а) следствие 4.1 (нормировка);

б) теорема 3.1 (функториальность соответствия);

в) теорема 4.4 (длинная точная последовательность);

г) упражнение 4.2 (функториальность длинной точной последовательности).

Докажите, что тогда группы $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F})$ и $H^n(X,\mathcal{F})$ изоморфны.

Простота аксиоматики наводит на мысль о существовании других конструкций, приводящих к когомологиям. Важные примеры таких конструкций — приводимые ниже когомологии Чеха и когомологии де Рама (для постоянных пучков на гладких многообразиях).

§ 6. Когомологии Чеха

6.1. Когомологии покрытия. Пусть $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Любой упорядоченный набор с непустым пересечением из $q+1$ элементов этого покрытия $\sigma=(U_0,\ldots,U_q)$ назовем *q-симплексом* покрытия $\mathcal{U}$. Пересечение $|\sigma|=\bigcap\limits_{i=0}^{q}U_i$ назовем *носителем* симплекса σ. Отметим, что q-симплекс σ порождает $(q-1)$-симплексы $\sigma_i=(U_0,\ldots,U_{i-1},U_{i+1},\ldots,U_q)$.

Рассмотрим пучок абелевых групп $\mathcal{G}$ над топологическим пространством X. Отображение, сопоставляющее каждому q-симплексу σ сечение $f(\sigma)\in\mathcal{G}(|\sigma|)$ над его носителем, назовем *q-цепью покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$*. Множество всех q-цепей $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ образует абелеву группу. Используя отображения ограничения $r_V^U\colon\mathcal{G}(U)\to\mathcal{G}(V)$, определим *кограничный оператор* $\delta\colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})\to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G})$, считая, что $(\delta f)(\sigma)=\sum\limits_{i=0}^{q+1}(-1)^i r_{|\sigma|}^{|\sigma_i|}f(\sigma_i)$ для любого $f\in C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$.

Упражнение 6.1. Докажите, что $\delta^2=0$.

Положим $Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G})=\operatorname{Ker}(\delta\colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})\to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ и $B^q(\mathcal{U},\mathcal{G})=\operatorname{Im}(\delta\colon C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{G})\to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$. *$q$-ми когомологиями Чеха для покрытия $\mathcal{U}$* называется факторгруппа $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})=Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G})/B^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$.

Покрытие $\mathcal{V}=\{V_\alpha\}$ назовем *измельчением* покрытия $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$, если для любого $V_\alpha\in\mathcal{V}$ существует множество $U_\beta\in\mathcal{U}$, содержащее V_α. Рассмотрим соответствие F, сопоставляющее каждому симплексу $\varsigma=(V_0,V_1,\ldots,V_q)$ симплекс $\sigma(\varsigma)=(U_0,U_1,\ldots,U_q)$, где $V_i\subset U_i$ для всех i. Сопоставим коцепи $f\in C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ ее измельчение, т. е. такую коцепь $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(f)\in C^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$, что $\tilde{\varphi}^q_{\mathcal{F}}(f)(\varsigma)=r_{|\varsigma|}^{|\sigma(\varsigma)|}f(\sigma(\varsigma))$.

Можно доказать, что отображение $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}$ порождает гомоморфизм $\varphi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}\colon\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})\to\check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$, зависящий от покрытий $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$, но не зависящий от соответствия F.

Рассмотрим теперь объединение всех групп $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$, отвечающих всем открытым покрытиям $\mathcal{U}$ множества X. Введем между элементами этих групп отношение эквивалентности, считая, что элемент $u\in\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ эквивалентен элементу $v\in\check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$, если $\varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(u)=\varphi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(v)$ для некоторого измельчения $\mathcal{W}$ покрытий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. (Конструкция такого типа называется *индуктивным пределом* по множеству покрытий.) Классы эквивалентности образуют абелеву группу $\check{H}^q(X,\mathcal{G})$, называемую *$q$-группой когомологий Чеха пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$.*

Упражнение 6.2. Докажите, что когомологии Чеха $\check{H}^*(X,\mathcal{G})$ удовлетворяют аксиомам из упражнения 5.2 и, следовательно, изоморфны когомологиям $H^*(X,\mathcal{G})$.

6.2. Теорема Лере.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Тогда $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{G})=\mathcal{G}(X)$ и если $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений накрытия, то $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})=0$ при $q>0$.*

Доказательство. Согласно аксиоме 2 пучка из условия $f\in Z^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$ следует существование такого сечения $s\in\mathcal{G}(X)$, что $s|_U=f(U)$ для любого $U\in\mathcal{U}$. Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений некоторого накрытия, f — q-цепь, Σ^q — множество q-симплексов и $|\Sigma^q|$ — объединение их носителей. Рассмотрим произвольный $(q-1)$-симплекс σ^{q-1}. Как и в предыдущем рассуждении, из условия $f\in Z^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ следует существование такого сечения $s\in\mathcal{G}(|\sigma^{q-1}|\cap|\Sigma^q|)$, что $s|_{|\sigma^q|}=f(\sigma^q)$ для любого q-симплекса σ^q, получающегося из $(q-1)$-симплекса σ^{q-1} добавлением элемента покрытия $\mathcal{U}$. Рассмотрим теперь произвольное сечение $g(\sigma^{q-1})\in\mathcal{G}(|\sigma^{q-1}|)$, совпадающее с s на $|\sigma^{q-1}|\cap|\Sigma^q|$. Выбирая такое сечение для каждого $(q-1)$-симплекса, получаем такую $(q-1)$-цепь g, что $\delta(g)=f$. □

Теорема 6.1 (Лере). *Пусть $\mathcal{G}$ — пучок абелевых групп над X и покрытие $\mathcal{U}$ пространства X таково, что $H^q(|\sigma|,\mathcal{G})=0$ при $q>0$ для любого симплекса σ этого покрытия. Тогда $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})=H^q(X,\mathcal{G})$.*

Доказательство. Рассмотрим каноническую резольвенту

$$0\to\mathcal{G}\xrightarrow{\gamma}\mathcal{G}^0\xrightarrow{\gamma_0}\mathcal{G}^1\xrightarrow{\gamma_1}\mathcal{G}^2\xrightarrow{\gamma_2}\dots$$

пучка $\mathcal{G}$. Она порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{G}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{G}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\gamma}_{n-1}"] & \mathcal{G}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}^0"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0^0"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1^0"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\gamma}_{n-1}^0"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n^0"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}^1"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0^1"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1^1"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\gamma}_{n-1}^1"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n^1"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}^2"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^0) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0^2"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^1) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1^2"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{\gamma}_{n-1}^2"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{G}^n) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n^2"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
 & {} & {} & {} & & {} &
\end{tikzcd}$$

Условие $H^q(|\sigma|,\mathcal{G}) = 0$ означает, что последовательность

$$0 \to \mathcal{G}(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \mathcal{G}^0(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} \mathcal{G}^1(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_1} \mathcal{G}^2(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_2} \ldots$$

точна для любого симплекса σ покрытия $\mathcal{U}$. Отсюда следует точность всех строк диаграммы, кроме, быть может, первой. Из леммы 6.1 следует точность всех столбцов диаграммы, кроме, быть может, первого.

Сопоставим теперь элементу $f^q \in \operatorname{Ker}(\delta\colon C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ некоторый элемент из $\operatorname{Ker}(\tilde{\gamma}\colon \mathcal{G}^q(X) \to \mathcal{G}^{q+1}(X))$. Для этого положим $\tilde{f}^q = \tilde{\gamma} f^q$. Тогда $\delta\tilde{f}^q = \tilde{\gamma}\delta f^q = 0$. Используя точность столбца, находим такой элемент $f^{q-1} \in C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{G}^0)$, что $\delta f^{q-1} = \tilde{f}^q$. Положим $\tilde{f}^{q-1} = \tilde{\gamma} f^{q-1}$. Тогда $\delta\tilde{f}^{q-1} = \tilde{\gamma}^2 f^q = 0$. Используя точность столбца, находим такой элемент $f^{q-2} \in C^{q-2}(\mathcal{U},\mathcal{G}^1)$, что $\delta f^{q-2} = \tilde{f}^{q-1}$. Продолжая процесс, находим такой элемент $f \in \mathcal{G}^q(X)$, что $\delta\tilde{\gamma} f = 0$. Ввиду мономорфности отображения δ отсюда следует, что $\tilde{\gamma} f = 0$. Нетрудно проследить, что произвол в выборе элементов f^i не меняет когомологический класс $f + \operatorname{Im}(\tilde{\gamma}\colon \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ элемента f. Более того, наша конструкция переводит группу $\operatorname{Im}(\delta\colon C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ в группу $\operatorname{Im}(\tilde{\gamma}_{q-1}\colon \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to H^q(X,\mathcal{G})$.

Эпиморфность отображения доказывается полностью аналогичной «инверсной» конструкцией, позволяющей сопоставить элементу из

$\mathcal{G}^q(X)$ элемент из $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$. Группе $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma}_{q-1}\colon \mathcal{G}^{q-1}(X)\to\mathcal{G}^q(X))$ отвечает при этом группа $\mathrm{Im}(\delta\colon C^{q-1}(\mathcal{U},\mathcal{G})\to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$, и, следовательно, эпиморфизм является мономорфизмом. $\square$

Покрытия $\mathcal{U}$, удовлетворяющие условию $H^q(|\sigma|,\mathcal{G})=0$ для любого симплекса σ, называются *покрытиями Лере для пучка* $\mathcal{G}$. Такие покрытия имеют большинство важных для приложения пучков. В этом случае теорема Лере дает эффективный метод вычисления когомологий. Кроме того, ввиду упражнения 6.2 конструкция из доказательства теоремы дает явное описание изоморфизма когомологий Чеха и когомологий в нашем определении для пучков, допускающих покрытие Лере.

§ 7. Когомологии де Рама

7.1. Пучки модулей. Кроме пучков групп мы будем рассматривать пучки колец и пучки модулей над пучками колец. Для того чтобы наделить пучок $\mathcal{M}$ структурой пучка модулей над пучком колец $\mathcal{R}$, надо наделить структурой модуля над $\mathcal{R}(U)$ множества сечений $\mathcal{M}(U)$ и потребовать, чтобы эти структуры были согласованы с ограничениями сечений пучков.

Упражнение 7.1. Дайте полное определение пучка модулей над пучком колец.

Пример 7.1. 1. Пучок произвольных функций на X со значениями в кольце $\mathbb{K}$ (например, в кольце вещественных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$) является пучком колец.

2. Подпучок локально постоянных функций со значениями в кольце $\mathbb{K}$ (постоянный пучок) также является пучком колец и будет обозначаться той же буквой $\mathbb{K}$.

3. Пучок $\mathcal{E}$ гладких функций на гладком многообразии X является пучком колец. Пучки гладких тензорных полей фиксированного типа являются пучками модулей над $\mathcal{E}$. Важным для нас примером будет пучок $\mathcal{E}^p$ вещественных дифференциальных форм степени p.

Топологическое пространство X называется нормальным, если выполнена следующая аксиома отделимости. Для любых непересекающихся замкнутых подмножеств $S,T\subset X$ существуют содержащие их непересекающиеся открытые множества $X\supset U\supset S$, $X\supset V\supset T$. Нормальными являются, в частности, топологические многообразия. Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства X нормальны.

Теорема 7.1. *Пучок модулей над мягким пучком колец $\mathcal{R}$ с единицей является мягким.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — пучок модулей над $\mathcal{R}$. Рассмотрим произвольное сечение $s \in \mathcal{M}(S)$ над замкнутым множеством $S \subset X$. Рассмотрим открытое множество $U \supset S$ и продолжим сечение s до сечения $\tilde{s} \in \mathcal{M}(U)$. Рассмотрим замкнутое множество $T = X \setminus U$ и непересекающиеся открытые множества $W \supset S$ и $V \supset T$. Положим $K = X \setminus W$. Рассмотрим сечение $f \in \mathcal{R}(S \cup K)$, принимающее значение 1 на S и значение 0 на K. Ввиду мягкости пучка $\mathcal{R}$ оно продолжается до сечения $\tilde{f} \in \mathcal{R}(X)$. Но тогда произведение $\tilde{f}\tilde{s}$ порождает сечение $\bar{s} \in \mathcal{M}(X)$, продолжающее s. □

Следствие 7.1. *Пучки тензорных полей на гладком многообразии мягкие.*

Доказательство. Согласно теореме 7.1 нам достаточно доказать, что пучок гладких функций на гладком многообразии мягок. Это следует из классической теоремы математического анализа: для непересекающихся замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и компакта $B \subset \mathbb{R}^n$ существует такая гладкая функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $\varphi(A) = 1$ и $\varphi(B) = 0$. □

7.2. Теорема де Рама. *Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки определены над гладким многообразием.* Покажем, что когомологии с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{R}$ над гладким многообразием X совпадают с когомологиями де Рама и сингулярными когомологиями. Для этого, следуя нашим определениям, построим соответствующие резольвенты пучка $\mathbb{R}$ и докажем их ацикличность.

Обозначим через $d^p\colon \mathcal{E}^p \to \mathcal{E}^{p+1}$ оператор дифференцирования дифференциальных форм. Тогда $d^{p+1}d^p = 0$. Более того, согласно лемме Пуанкаре условие $d(f) = 0$ локально эквивалентно условию $f = d(g)$. Таким образом, последовательность пучков $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$ является резольвентой. Последовательность сечений

$$0 \to \mathbb{R}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{\tilde{d}^0} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{\tilde{d}^1} \mathcal{E}^2(X) \xrightarrow{\tilde{d}^2} \dots$$

порождает факторгруппы $H^n_{\mathrm{dR}}(X, R) = \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{d}_{n-1})$, которые называются *когомологиями де Рама.* Рассмотренная резольвента пучков является мягкой ввиду следствия 7.1. Таким образом, она ациклична (следствие 4.1) и, значит, порождает когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ (теорема 5.1), т. е. $H^n(X, \mathbb{R}) = H^n_{Dr}(X, \mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь другую резольвенту пучка $\mathbb{R}$. Опишем *пучок сингулярных коцепей* $\mathcal{L}^p$ на гладком многообразии X, играющий важную роль в топологии. Обозначим p-мерный симплекс с упорядоченными вершинами через Δ^p. Сингулярной цепью степени p на $U \subset X$ называется конечная формальная линейная комбинация с вещественными коэффициентами кусочно гладких отображений $\sum\limits_i r_i\{(f_i : \Delta^p \to U)\}$. Они образуют векторное пространство $\mathcal{L}_p$. Сингулярной коцепью степени p на $U \subset X$ называется вещественный линейный функционал на $\mathcal{L}_p$. Пучок $\mathcal{L}^p$ порождается предпучком, сопоставляющим открытому подмножеству $U \subset X$ множество всех его сингулярных коцепей. Стандартная в топологии операция, сопоставляющая симплексу $\Delta^p = \{1, 2, \ldots, p\}$ линейную комбинацию симплексов $\sum\limits_i (-1)^i\{1, 2, \ldots, \hat{i}, \ldots, p\}$ (где $\hat{}$ означает пропуск вершины), задает оператор $\delta^{p-1}\colon \mathcal{L}^{p-1} \to \mathcal{L}^p$. Легко доказать, что $\delta^{p+1}\delta^p = 0$. Таким образом, мы получили последовательность пучков $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} \ldots$, порождающую последовательность сечений $0 \to \mathbb{R}(X) \xrightarrow{\delta} \mathcal{L}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}^0} \mathcal{L}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}^1} \mathcal{L}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}^2} \ldots$ Фактор-группы $H^n_{\sin}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$ дают одно из известных в топологии определений *сингулярных когомологий.*

Легко доказать, что для шара S группы $H^n_{\sin}(S, \mathbb{R})$ равны 0 при $n > 0$. Отсюда следует точность последовательности пучков $\mathcal{L}^p$. Эти пучки мягкие, поскольку всякую сингулярную коцепь на $U \subset X$ можно рассматривать как сингулярную коцепь на X. Согласно следствию 4.1 и теореме 5.1 отсюда следует, что $H^n(X, \mathbb{R}) = H^n_{\sin}(X, \mathbb{R})$.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 7.2 (де Рам). *Когомологии де Рама изоморфны сингулярным когомологиям.*

Упражнение 7.2. Используя упражнение 5.1, докажите, что изоморфизм, о котором идет речь в теореме, порождается интегрированием дифференциальных форм по сингулярным цепям.

§ 8. Векторные расслоения

8.1. Определения и примеры. Гладкое отображение гладких многообразий $\pi\colon E \to X$ называется *локально тривиальным векторным расслоением ранга* r, если

1) *слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности r;

2) для каждой точки $p \in X$ существуют такая окрестность $U \subset X$ и такое гладкое отображение $h\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, называемое *локальной*

тривиализацией, что отображение $h|_{E_p}\colon E_p \to p \times \mathbb{R}^r$ является изоморфизмом векторных пространств.

Многообразия E и X называются соответственно *пространством* и *базой* расслоения. Далее мы будем для краткости опускать слова «локально тривиальное».

Пара тривиализаций $h_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $h_\beta\colon \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ порождает отображение $h_\alpha h_\beta^{-1}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$, эквивалентное гладкому отображению $g_{\alpha\beta}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$, называемому *функцией перехода*.

Лемма 8.1. *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Upsilon\}$ — покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Тогда семейство гладких отображений $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) \mid \alpha, \beta \in \Upsilon\}$, где $g_{\alpha\alpha} = 1$, является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения $\pi\colon E \to X$, если и только если $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$.*

Доказательство. Равенство $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода векторного расслоения очевидно. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим такое семейство гладких отображений $\mathcal{G}$, что $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Рассмотрим $\tilde{E} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Upsilon} E_\alpha$, где $E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Точки $(p, v) \in E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p, w) \in E_\beta = U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать эквивалентными, если $v = g_{\alpha\beta} w$. Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает нужное нам расслоение с локальными тривиализациями $h_\alpha(p, v) = (p, v)$. □

Таким образом, мы можем задавать векторные расслоения над X, указывая покрытие многообразия X и семейство функций перехода, удовлетворяющее лемме 8.1.

Пример 8.1. 1. Тривиальное расслоение $\pi\colon X \times \mathbb{R}^r \to X$.

2. Универсальное расслоение над проективным пространством. Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ — это множество всех одномерных подпространств пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, \ldots, x_n)\}$. Оно покрывается множествами $U_i = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid x_i \neq 0\}$. Пары (U_i, f_i), где $f_i(x_0, \ldots, x_n) = \left(\dfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^n$, образуют гладкий атлас на $\mathbb{R}P^n$. *Универсальным расслоением* называется отображение $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее вектору $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ порожденное им подпространство $[v] = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Линейное отображение, порожденное соответствием $\pi^{-1}[(x_0, \ldots, x_n)] \mapsto ([v], x_i)$, порождает локаль-

ную тривиализацию для точек из U_i. Функции перехода между U_i и U_j равны $g_{ij} = \dfrac{x_i}{x_j}$.

3. Касательное расслоение $\pi\colon TX \to X$ над произвольным гладким многообразием X. Рассмотрим атлас локальных карт

$$\{(f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^r) \mid \alpha \in \Upsilon\}$$

многообразия X. Пересечению $U_\alpha \cap U_\beta$ отвечает отображение

$$f_\beta f_\alpha^{-1}\colon f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)\,.$$

Зададим расслоение $\pi\colon TX \to X$, рассматривая матрицы Якоби функций $f_\beta f_\alpha^{-1}$ в качестве функций перехода этого расслоения.

Морфизмом векторного расслоения $\pi\colon E \to X$ в векторное расслоение $\tilde\pi\colon \tilde E \to \tilde X$ называется пара таких гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde X$ и $\varphi_E\colon E \to \tilde E$, что $\tilde\pi\varphi_E = \varphi_X\pi$ и ограничение $\varphi_E|_p$ отображения φ_E на каждый слой $E|_p = \pi^{-1}(p)$ является изоморфизмом.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi_E"] \arrow[d, "\pi"] & \tilde E \arrow[d, "\tilde\pi"] \\ X \arrow[r, "\varphi_X"] & \tilde X \end{tikzcd}$$

Как обычно, обратимый в классе морфизмов морфизм расслоений называется *изоморфизмом расслоений.* При $X = \tilde X$ и тождественном отображении φ_X изоморфизм называется *эквивалентностью расслоений.*

Упражнение 8.1. Докажите, что семейства переходных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde g_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует такое семейство гладких отображений $l_\alpha\colon U_\alpha \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$, что $\tilde g_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1}$. Докажите, что касательное расслоение, зависящее в нашем определении от атласа локальных карт, переходит в эквивалентное при замене атласа.

Лемма 8.2. *Для любого векторного расслоения $\tilde\pi\colon \tilde E \to \tilde X$ и любого гладкого отображения $\varphi_X : X \to \tilde X$ существуют такое векторное расслоение $\pi\colon E \to X$ и такие отображения $\varphi_E\colon E \to \tilde E$, что (φ_X, φ_E) — морфизм расслоений.*

Доказательство. Определим расслоение $\pi\colon E \to X$ и отображение $\varphi_E\colon E \to \tilde E$, считая, что $\pi^{-1}(p) = \tilde\pi^{-1}(\varphi_X(p))$. Определим гладкую структуру на E, считая, что φ_E — гладкое отображение. $\square$

Векторное расслоение $\pi\colon E \to X$, удовлетворяющее требованиям леммы 8.2, называется *обратным образом расслоения* $\tilde{\pi}\colon \tilde{E} \to \tilde{X}$.

Упражнение 8.2. Докажите, что обратный образ расслоения определен однозначно с точностью до эквивалентности.

На векторные расслоения над X распространяются все операции между векторными пространствами. Прямая сумма $\pi_1 \oplus \pi_2\colon E_1 \oplus E_2 \to \to X$ расслоений $\pi_1\colon E_1 \to X$ и $\pi_2\colon E_2 \to X$ определяется, например, условием $(\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$. Расслоение $\pi^*\colon E^* \to X$ называется *сопряженным* к расслоению $\pi\colon E \to X$, если слои E_p и E_p^* сопряжены, т. е. $\pi^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R}_X)$, где $\mathbb{R}_X$ — тривиальное расслоение ранга 1. Расслоение, сопряженное к касательному расслоению, называется *кокасательным*.

Упражнение 8.3. Дайте точные определения и найдите переходные функции расслоений $E_1 \oplus E_2 \to X$, $E_1 \otimes E_2 \to X$, $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to X$, $S^n E \to X$ (симметричная тензорная степень), $\Lambda^n E \to X$ (антисимметричная тензорная степень), $E^* \to X$ и кокасательного расслоения.

Сечением векторного расслоения $\pi\colon E \to X$ называется такое гладкое отображение $s\colon X \to E$, что πs — тождественное отображение. Множество сечений над $U \subset X$ будет обозначаться $E(U)$. Нетрудно видеть, что соответствие $U \mapsto E(U)$ и очевидные функции ограничения порождают пучок $\mathcal{E}_E$, называемый *пучком сечений векторного расслоения* $\pi\colon E \to X$. Пучки, получающиеся таким способом из векторных расслоений, и изоморфные им пучки называются *локально свободными*.

Пример 8.2. Пучок сечений антисимметричной тензорной степени $\Lambda^p T^* X$ кокасательного расслоения $\pi\colon T^*X \to X$ изоморфен пучку $\mathcal{E}^p$ дифференциальных p-форм.

Локально свободные пучки являются пучками модулей над мягким пучком гладких функций. Следовательно, согласно теореме 7.1 все они мягкие.

Упражнение 8.4. По аналогии с определением морфизмов расслоений дайте определение морфизмов пучков над не совпадающими топологическими пространствами. Определите обратный образ пучка и докажите его единственность. Как связаны морфизмы локально свободных пучков и морфизмы отвечающих им векторных расслоений?

8.2. Универсальные расслоения. *Грассмановым многообразием* $\mathbb{K}G_{r,n}$ *над полем* $\mathbb{K}$ называется множество всех r-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{K}^n$. Мы будем рассматривать лишь вещественные ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) и комплексные ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) грассмановы многообразия.

Универсальным расслоением называется расслоение $\pi_{r,n}\colon E \to \mathbb{K}G_{r,n}$ ранга r, слой которого E_p над точкой $p \in \mathbb{K}G_{r,n}$ совпадает с подпространством в $\mathbb{K}^n$, представляющим p.

Структура гладкого (соответственно комплексного) многообразия определяется на $\mathbb{K}G_{r,n}$ и E следующим образом. Рассмотрим множество $E = M_{r,n}$ всех матриц размера $r \times n$ ранга r с элементами из $\mathbb{K}$. Строки матрицы $m \in M_{r,n}$ будем интерпретировать как векторы пространства $\mathbb{K}^n$. Они образуют базис подпространства $[m] \in \mathbb{K}^n$. Группа $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ действует на $M_{r,n}$ умножением слева, переводя строки матрицы $M_{r,n}$ в их линейные комбинации и тем самым меняя базис пространства $[m]$. Это позволяет отождествить подпространство $[m] \in \mathbb{K}G_{r,n}$ с орбитой матрицы m под действием группы $\mathbb{K}G_{r,n}$. Положим $\pi_{r,n}(m) = [m]$ и $E_{[m]} = \pi_{r,n}^{-1}([m])$.

Матрице $m \in M_{r,n}$ и набору чисел $\alpha = \{1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_r \leqslant n\}$ отвечает матрица $m_\alpha \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$, составленная из столбцов α. Обозначим через E_α множество всех таких матриц $m \in M_{r,n}$, что матрица m_α невырожденна. Их орбиты $[m]$ образуют открытое множество $[E_\alpha] \subset \mathbb{K}G_{r,n}$. Совокупность всех таких множеств является покрытием многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$. Сопоставим матрице $m \in E_\alpha$ матрицу $m_{\bar{\alpha}} \in M_{r,n-r}$, получающуюся из матрицы $m_\alpha^{-1}m$ исключением столбцов α. Матрицу $m_\alpha^{-1}m$ можно рассматривать как вектор $f_\alpha([m])$ пространства $\mathbb{K}^{r\times(n-r)}$. Пары $([E_\alpha], f_\alpha)$ образуют гладкий атлас многообразия E.

Для $m \in E_\alpha$ обозначим через $l_\alpha\colon E_{[m]} \to \mathbb{K}^r$ линейный оператор, переводящий строки матрицы m_α в стандартный базис пространства $\mathbb{K}^r$. Тогда соответствие $m \mapsto ([m], l_\alpha(m))$ порождает тривиализацию $\pi_{r,n}^{-1}(E_\alpha) \to E_\alpha \times \mathbb{K}^r$.

Упражнение 8.5. Найдите функции перехода между этими тривиализациями.

Термин «универсальное расслоение» объясняется следующим фактом:

Теорема 8.1. *Всякое векторное расслоение $\pi\colon E \to X$ ранга r над компактным гладким многообразием X изоморфно обратному образу универсального расслоения $\pi_{r,N}\colon M_{r,N} \to \mathbb{R}G_{r,N}$ для некоторого гладкого отображения $\Phi\colon X \to \mathbb{R}G_{r,N}$.*

Доказательство. Обозначим через $l_1, \ldots, l_r$ такой базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^r)^*$, что $l_i(x_1, \ldots, x_r) = x_i$. Покроем X конечной системой тривиализаций $h_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ расслоения $\pi\colon E \to X$.

Функционалы $l_1, \dots, l_r$ порождают сечения $l_1^\alpha, \dots, l_r^\alpha$ ограничения сопряженного расслоения $\pi^*\colon E^* \to X$ на U_α. Впишем в открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ замкнутое покрытие $\{V_\beta\}$. Рассмотрим ограничения $l_1^\beta, \dots, l_r^\beta$ сечений $l_1^\alpha, \dots, l_r^\alpha$ на элементы покрытия $\{V_\beta\}$. Используя мягкость пучка, продолжим сечения $l_1^\beta, \dots, l_r^\beta$ до глобальных сечений $\tilde{l}_1^\beta, \dots, \tilde{l}_r^\beta$ расслоения $\pi^*\colon E^* \to X$. Проделав эту процедуру для всех элементов покрытия $\{V_\beta\}$, находим набор глобальных сечений $(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_N) = \bigcup\limits_\alpha (\tilde{l}_1^\alpha, \dots, \tilde{l}_r^\alpha)$ расслоения $\pi^*\colon E^* \to X$, имеющий ранг r в любой точке $p \in X$.

Сопоставим теперь базису $e_1, \dots, e_r$ в слое $E_p = \pi^{-1}(p)$ матрицу $W_p = \{w_{ij}\}$, где $w_{ij} = \tilde{l}_j(e_i)$. Обозначим через $[W_p] \subset \mathbb{R}^N$ векторное пространство, порожденное строками этой матрицы. Замена базиса $e_1, \dots, e_r$ эквивалентна умножению матрицы W_p слева на невырожденную матрицу. Поэтому подпространство $[W_p] \in \mathbb{R}G_{r,N}$ не зависит от выбора базиса. Таким образом, мы построили гладкое отображение $\Phi\colon X \to \mathbb{R}G_{r,N}$, где $\Phi(p) = [W_p]$. Отображение, сопоставляющее базису $e_1, \dots, e_r$ строки матрицы W_p, порождает изоморфизм между расслоением $\pi\colon E \to X$ и ограничением универсального расслоения $\pi_{r,N}\colon M_{r,N} \to \mathbb{R}G_{r,N}$ на подмножество $\Phi(X)$. $\square$

Замечание 8.1. Можно доказать, что всякое векторное расслоение с не обязательно компактной базой может быть покрыто конечной системой тривиализаций. Таким образом, теорема 8.1 верна для произвольного гладкого, не обязательно компактного многообразия.

§ 9. Связности в расслоениях

9.1. Связности и метрики. Расслоение, каждый слой которого имеет структуру комплексного векторного пространства, называется $\mathbb{C}$—*расслоением.* Далее мы будем рассматривать только такие расслоения, не оговаривая это специально. Такой подход удобен для исследования комплексных многообразий. С другой стороны, большинство свойств $\mathbb{C}$-расслоений сохраняются и для произвольных гладких расслоений после очевидных модификаций.

Пусть $\pi\colon E \to X$ — расслоение ранга r над гладким многообразием X. Тогда сечения расслоения $\bigwedge^p T^*X \otimes_{\mathbb{R}} E$ называются *дифференциальными формами степени p с коэффициентами в E*. Они порождают пучок $\mathbb{C}$-векторных пространств и пучок модулей над пучком колец гладких комплекснозначных функций $\mathcal{E}^0$, которые мы будем обозначать одинаково: $\mathcal{E}^p_E$.

В локальной тривиализации $f\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ эти сечения имеют вид $\xi^\sigma e_\sigma$, где $e_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^r$ и $\xi^\sigma(x) \in \mathcal{E}^p(U)$ — дифференциальные формы степени p. Здесь и далее используется стандартное соглашение о суммировании по одинаковым индексам. Положим $d(\xi^\sigma e_\sigma) = d(\xi^\sigma)e_\sigma$

Морфизм пучков $\mathbb{C}$-векторных пространств $\nabla\colon \mathcal{E}^0_E \to \mathcal{E}^1_E$, удовлетворяющий условию $\nabla(\varphi\xi) = d\varphi\xi + \varphi\nabla(\xi)$ при $\varphi \in \mathcal{E}^0$ и $\xi \in \mathcal{E}^1$, называется *связностью* в расслоении $\pi\colon E \to X$.

В локальной тривиализации $f\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ связность определяется *матрицей связности* $\theta = \theta(\nabla, f) = \{\theta^\rho_\sigma\}$, где $\nabla(1 \cdot e_\sigma) = \theta^\rho_\sigma e_\rho$ и $\theta^\rho_\sigma \in \mathcal{E}^1(U)$. Действительно,

$$\nabla(\xi) = \nabla(\xi^\sigma e_\sigma) = d\xi^\sigma e_\sigma + \xi^\sigma \nabla(1 \cdot e_\sigma) = (d\xi^\rho + \xi^\sigma \theta^\rho_\sigma)e_\rho = (d+\theta)\xi\,.$$

Замена тривиализации $f\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ на $\tilde{f}\colon \pi^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ переводит базис сечений $e = (e_1, \dots e_r)$ над $U \cap \tilde{U}$ в базис сечений $\tilde{e} = eg$, где $g\colon U \cap \tilde{U} \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Упражнение 9.1. Докажите, что $\theta(\nabla, \tilde{f}) = g^{-1}\theta(\nabla, f)g + g^{-1}dg$.

Продолжим оператор связности ∇ до оператора $\nabla\colon \mathcal{E}^p_E \to \mathcal{E}^{p+1}_E$, заданного в выбранной тривиализации формулой $\nabla(\xi) = d\xi + \theta \wedge \xi$.

Упражнение 9.2. Докажите, что это определение не зависит от выбора тривиализации.

Отображение $(\cdot,\cdot)\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *эрмитовой метрикой на векторном пространстве* V, если оно линейно по первому аргументу и удовлетворяет условиям $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Пример 9.1. Для векторов $x = (x^1, \dots, x^r)$, $y = (y^1, \dots, y^r) \in \mathbb{C}^r$ положим $(x, y) = \sum\limits_i^r x^i \overline{y^i}$.

Эрмитовой метрикой на расслоении $\pi\colon E \to X$ называется такая эрмитова метрика $(\cdot,\cdot)_p$ на каждом его слое E_p, что функция (ξ, η) является гладкой на U для любых сечений $\xi, \eta \in \mathcal{E}_E(U)$. Локальной тривиализации $f\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ отвечают базис сечений $e = (e_1, \dots, e_r) \subset \mathcal{E}_E(U)$ и *матрица эрмитовой метрики* $h = h(f) = \{h_{e_i,e_j}\}$, где $h_{e_i,e_j} = (e_i, e_j)$. Замена тривиализации $f\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ на $\tilde{f}\colon \pi^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ переводит базис сечений $e = (e_1, \dots, e_r)$ над $U \cap \tilde{U}$ в базис сечений $\tilde{e} = eg$, где $g\colon U \cap \tilde{U} \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Расслоение, наделенное эрмитовой метрикой, называется *эрмитовым расслоением.*

Упражнение 9.3. Докажите, что при замене локальной тривиализации $f \mapsto \tilde{f}$ с помощью матрицы $g \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ матрица эрмитовой метрики $h(f)$ переходит в матрицу $h(\tilde{f}) = gh(f)\overline{g^{\mathbf{t}}}$, где $\mathbf{t}$ означает транспонирование матрицы.

Эрмитова метрика на расслоении $\pi\colon E \to X$ порождает оператор $(\,\cdot\,,\cdot\,)\colon \mathcal{E}^p_E(U) \times \mathcal{E}^q_E(U) \to \mathcal{E}^{p+q}(U)$, где $(\omega \otimes \xi, \omega' \otimes \xi') = \omega \wedge \omega'(\xi, \xi')$ для $\omega \in \bigwedge^p T^*X(U)$, $\omega' \in \bigwedge^q T^*X(U)$, $\xi, \xi' \in \mathcal{E}_E(U)$. Связность ∇ называется *согласованной с эрмитовой метрикой* $(\,\cdot\,,\cdot\,)$, если $d(\xi,\xi') = (\nabla(\xi), \xi') + (\xi, \nabla(\xi'))$. Такая связность называется также *эрмитовой связностью.*

Упражнение 9.4. Докажите, что в локальной тривиализации условие согласованности имеет вид $dh = h\theta + \overline{\theta}^{\mathbf{t}} h$, где h и θ — матрицы метрики и связности.

Теорема 9.1. *Всякое расслоение допускает эрмитову метрику и согласованную с ней эрмитову связность.*

Доказательство. Рассмотрим систему тривиализаций, базы которых образуют локально конечное покрытие. В локальной тривиализации $f^\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ с базисом сечений $e = (e_1, \ldots, e_r) \subset \mathcal{E}_E(U)$ зададим эрмитову метрику матрицей $h^\alpha(e) = \{h^\alpha_{e_i,e_j}\} = \delta_{ij}$ и зададим согласованную с ней связность ∇^α, порожденную матрицей $\theta(e) = 0$. Далее, используя подчиненное покрытию разбиение единицы ρ_α, «склеим» метрики и связности различных тривиализаций в глобальные эрмитову метрику $(\,\cdot\,,\cdot\,) = \sum \rho_\alpha(\,\cdot\,,\cdot\,)^\alpha$ и связность $\nabla = \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha$. Проверка согласованности остается в качестве упражнения. $\square$

9.2. Кривизна связности. Матрица 2-форм $K = K(\nabla, f) = d\theta + \theta \wedge \theta$ (т. е. $K^\rho_\sigma = d\theta^\rho_\sigma + \theta^\rho_\alpha \wedge \theta^\alpha_\sigma$, где $\theta = \theta(\nabla, f)$) называется *матрицей кривизны связности* ∇ в тривиализации f.

Упражнение 9.5. Докажите, что при замене тривиализации $\tilde{e} = eg$ матрица кривизны связности преобразуется по закону

$$K(\nabla, \tilde{f}) = g^{-1} K(\nabla, f) g.$$

Связность ∇ в расслоении $\pi\colon E \to X$ порождает *сопряженную связность* ∇^* в сопряженном расслоении $\pi^*\colon E^* \to X$ по следующей схеме. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E^*(U) \times E(U) \to \mathcal{E}(U)$ спаривание сечений расслоений E^* и E. Локальной тривиализации $f^*\colon (\pi^*)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ с базисом сечений $e^*(f) = (e^*_1, \ldots, e^*_r)$ отвечает сопряженная тривиализация $f\colon (\pi)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ с базисом сечений $e(f) = (e_1, \ldots, e_r)$, где $\langle e^*_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Положим $\theta^*(\nabla, f^*) = -(\theta(\nabla, f))^{\mathbf{t}}$, где $\mathbf{t}$ означает транспонирование матрицы.

Упражнение 9.6. Докажите, что матрицы $\theta^*(\nabla, f^*)$ являются матрицами некоторой связности ∇^*. Докажите, что матрица кривизны этой связности имеет вид $K(\nabla^*, f^*) = -(K(\nabla, f))^{\mathbf{t}}$. Докажите, что $d\langle\omega, \xi\rangle = \langle\nabla^*\omega, \xi\rangle + \langle\omega, \nabla\xi\rangle$ и это соотношение однозначно определяет связность ∇^*.

Согласно упражнению 9.5 отображение

$$f^{-1}K(\nabla, f)f\colon \pi^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U)$$

порождает не зависящие от тривиализации линейные операторы

$$E_p \to E_p \ (p \in U)\,.$$

Таким образом, матрица кривизны определяет сечение расслоения $K = K(\nabla) \in \mathcal{E}^2_{\mathrm{Hom}(E,E)}(X)$, называемое *тензором кривизны связности* ∇. Умножение на тензор кривизны задает гомоморфизм

$$K\colon \mathcal{E}^p_E(U) \to \mathcal{E}^{p+2}_E(U).$$

При этом $\nabla^2 = K$, поскольку

$$(d+\theta)(d+\theta)\xi = d^2\xi + \theta\, d\xi + d(\theta\xi) + \theta\wedge\theta\xi = \\ = \theta\, d\xi + d\theta\xi - \theta\, d\xi + \theta\wedge\theta\xi = K\xi\,.$$

Определим *скобку Ли* $[\chi, \psi] \in \mathcal{E}^{p+q}_{\mathrm{Hom}(E,E)}(U)$ между операторными полями $\chi \in \mathcal{E}^p_{\mathrm{Hom}(E,E)}(U)$ и $\psi \in \mathcal{E}^q_{\mathrm{Hom}(E,E)}(U)$. В произвольной тривиализации f расслоения E поля χ и ψ представляются матрицами $\chi(f)$ и $\psi(f)$ с элементами из $\mathcal{E}^p(U)$ и $\mathcal{E}^q(U)$ соответственно. Используя умножение матриц, положим $[\chi, \psi](f) = \chi(f)\wedge\psi(f) - (-1)^{pq}\psi(f)\wedge\chi(f)$.

Упражнение 9.7. Докажите, что это определение не зависит от выбора тривиализации.

Лемма 9.1 (тождество Бьянки). *Выполнено равенство* $dK(f) = [K(f), \theta(f)]$.

Доказательство. Опуская для удобства (f), находим

$$dK = d(d\theta + \theta\wedge\theta) = d\theta\wedge\theta - \theta\wedge d\theta$$

и

$$[K, \theta] = [d\theta + \theta\wedge\theta, \theta] = d\theta\wedge\theta + \theta\wedge\theta\wedge\theta - (-1)^2(\theta\wedge d\theta + \theta\wedge\theta\wedge\theta). \quad \square$$

§ 10. Классы Черна

10.1. Инвариантные однородные формы. Функция $\varphi\colon M_{r,r} \to \mathbb{C}$ на множестве матриц размера $r \times r$ называется *многочленом*, если она представляется многочленом от матричных элементов. Многочлен φ называется *однородной формой степени* m, если $\varphi(\lambda A) = \lambda^m \varphi(A)$, и *инвариантной формой*, если $\varphi(gAg^{-1}) = \varphi(A)$ для всех $A \in M_{r,r}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $G \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Функция $\tilde{\varphi}\colon M_{r,r} \times \ldots \times M_{r,r} \to \mathbb{C}$, линейная по всем m аргументам, называется *m-линейной формой*. Такая форма называется *инвариантной*, если $\tilde{\varphi}(gA_1g^{-1}, \ldots, gA_mg^{-1}) = \varphi(A_1, \ldots, A_m)$.

Упражнение 10.1. Докажите, что всякая инвариантная однородная форма φ степени m имеет вид $\varphi(A) = \tilde{\varphi}(A, \ldots, A)$, где $\tilde{\varphi}$ — инвариантная m-линейная форма.

Лемма 10.1. *Пусть $\tilde{\varphi}$ — инвариантная m-линейная форма. Тогда $\sum_{j=1}^{m} \tilde{\varphi}(A_1, \ldots, [A_j, B], \ldots, A_m) = 0$ для любых $A_i, B \in M_{r,r}$.*

Доказательство. При $m = 2$ имеем

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\varphi}(e^{-tB}A_1e^{tB}, e^{-tB}A_2e^{tB}) - \tilde{\varphi}(A_1, A_2) = \\
&= \tilde{\varphi}(e^{-tB}A_1e^{tB}, e^{-tB}A_2e^{tB}) - \tilde{\varphi}(e^{-tB}A_1e^{tB}, A_2) + \\
&\quad + \tilde{\varphi}(e^{-tB}A_1e^{tB}, A_2) - \tilde{\varphi}(A_1, A_2) = \\
&= \tilde{\varphi}(e^{-tB}A_1e^{tB}, (e^{-tB}A_2e^{tB} - A_2)) + \tilde{\varphi}((e^{-tB}A_1e^{tB} - A_1), e^{-tB}A_2e^{tB}) = \\
&= \tilde{\varphi}(e^{-tB}A_1e^{tB}, t[A_2, B]) + O(|t^2|)) + \tilde{\varphi}(t[A_1, B] + O(|t^2|), A_2) = \\
&= \tilde{\varphi}(A_1, t[A_2, B]) + \tilde{\varphi}(t[A_1, B], A_2) + O(|t^2|) = \\
&= t(\tilde{\varphi}(A_1, [A_2, B]) + \tilde{\varphi}([A_1, B], A_2)) + O(|t^2|)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}(A_1, [A_2, B]) + \tilde{\varphi}([A_1, B], A_2)) = 0$. Общий случай получается аналогичной конструкцией. □

Любая m-линейная форма $\tilde{\varphi}$ на числовых матрицах продолжается на матрицы, где в качестве коэффициентов участвуют дифференциальные формы на многообразии X. Она определяется как такая m-линейная над $\mathbb{C}$ функция со значениями в $\mathcal{E}^*(X)$, что

$$\tilde{\varphi}(\omega_1 A_1, \ldots, \omega_m A_m) = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m \tilde{\varphi}(A_1, \ldots, A_m)$$

для числовых матриц A_i.

Упражнение 10.2. Пусть $\tilde{\varphi}$ — m-линейная форма и A_i, B — матрицы, в которых в качестве коэффициентов участвуют дифференциальные формы степеней $\deg A_i$ и $\deg B$ соответственно. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{f(j)}\tilde{\varphi}(A_1,\ldots,[A_j,B],\ldots,A_m)=0$$

и

$$d\tilde{\varphi}(A_1,\ldots,A_m)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{g(j)}\tilde{\varphi}(A_1,\ldots,dA_j,\ldots,A_m)\,,$$

где $f(j)=\deg B\sum_{i<j}\deg A_i$ и $g(j)=\sum_{i<j}\deg A_i$

Теорема 10.1. *Пусть $\pi\colon E\to X$ — расслоение ранга r над гладким многообразием X со связностью $\nabla\colon \mathcal{E}^0_E\to\mathcal{E}^1_E$, порождающей матрицу кривизны $K(\nabla,f)=d\theta+\theta\wedge\theta$. Пусть φ — инвариантная однородная форма степени m на $M_{r,r}$. Тогда дифференциальная форма $\varphi(K(\nabla,f))$ порождает элемент группы когомологий $\varphi(E)\in H^{2m}(X,\mathbb{C})$, который не зависит от выбора базиса f и связности ∇.*

Доказательство. При замене базиса f матрица $K(\nabla,f)$ переходит в сопряженную и, следовательно, дифференциальная форма $\varphi(K(\nabla,f))\in\mathcal{E}^{2m}(X)$ не меняется. Положим $K=K(\nabla,f))$ и рассмотрим m-линейную форму $\tilde{\varphi}$, порождающую φ. Используя тождество Бьянки, лемму и упражнения из этого пункта, находим, что

$$d\varphi(K)=d\tilde{\varphi}(K,\ldots,K)=\sum\tilde{\varphi}(K,\ldots,dK,\ldots,K)=$$
$$=\sum\tilde{\varphi}(K,\ldots,[K,\theta],\ldots,K)=0.$$

Таким образом, дифференциальная форма $\varphi(K)$ порождает элемент группы когомологий $\varphi(K(\nabla,f))\in H^{2m}(X,\mathbb{C})$.

Нам осталось доказать, что класс когомологий $\varphi(K(\nabla,f))$ не зависит от связности ∇. Пусть ∇_0 и ∇_1 — связности с матрицами кривизны $K_0=K(\nabla_0,f)$ и $K_1=K(\nabla_1,f)$. Рассмотрим семейство связностей $\nabla_t=t\nabla_1+(1-t)\nabla_0$. Ему отвечают матрицы связности $\theta_t=\theta(\nabla_t,f)$ и кривизны $K_t=K(\nabla_t,f)$. Положим $\dot{\nabla}_t\colon\mathcal{E}\to\mathcal{E}^1$, где $\dot{\nabla}_t(\xi)=\dfrac{\partial}{\partial t}(d\xi+\theta_t\xi)=\dot{\theta}_t\xi$. Рассмотрим функцию $\hat{\varphi}(\xi,\eta)=\sum\limits_{\alpha=1}^{m}\tilde{\varphi}(\xi,\ldots,\xi,\eta,\xi,\ldots,\xi)$, где α — место, на котором стоит η. Докажем, что $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(K_t)=d\hat{\varphi}(K_t,\dot{\nabla}_t)$. Для краткости будем опускать индекс t. Тогда

$$d\hat{\varphi}(K,\dot{\nabla}) = d\hat{\varphi}(K,\dot{\theta}) = d\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\tilde{\varphi}(K,\ldots,\dot{\theta},\ldots,K)\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m}\left(\sum_{i<\alpha}\tilde{\varphi}(K,\ldots,dK,\ldots,\dot{\theta},\ldots,K) + \tilde{\varphi}(K,\ldots,d\dot{\theta},\ldots,K) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i>\alpha}\tilde{\varphi}(K,\ldots,\dot{\theta},\ldots,dK,\ldots,K)\right),$$

где α — место, на котором стоит θ, и i — место, на котором стоит dK.

Дифференцируя соотношение $K = d\theta + \theta\wedge\theta$ и используя тождество Бьянки, находим, что

$$d\hat{\varphi}(K_t,\dot{\nabla}_t) = \sum_{\alpha=1}^{m}\left(\sum_{i<\alpha}\tilde{\varphi}(K,\ldots,[K,\theta],\ldots,\dot{\theta},\ldots,K) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\varphi}(K,\ldots,\dot{K}-[\dot{\theta},\theta],\ldots,K) - \sum_{i>\alpha}\tilde{\varphi}(K,\ldots,\dot{\theta},\ldots,[K,\theta],\ldots,K)\right) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m}\tilde{\varphi}(K,\ldots,\dot{K},\ldots,K) + \sum_{\alpha=1}^{m}\left(\sum_{i<\alpha}\tilde{\varphi}(K,\ldots,[K,\theta],\ldots,\dot{\theta},\ldots,K) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\varphi}(K,\ldots,-[\dot{\theta},\theta],\ldots,K) - \sum_{i>\alpha}\tilde{\varphi}(K,\ldots,\dot{\theta},\ldots,[K,\theta],\ldots,K)\right).$$

Последняя сумма равна 0 согласно упражнению 10.2.

Таким образом,

$$d\hat{\varphi}\,(K_t,\dot{\nabla}_t) = \sum_{\alpha=1}^{m}\tilde{\varphi}(K_t,\ldots,\dot{K}_t,\ldots,K_t) = \frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{\varphi}(K_t,\ldots,K_t) = \frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(K_t).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(K_1) - \varphi(K_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\varphi(K_t)\,dt = \int_0^1 d\hat{\varphi}(K_t,\dot{\nabla}_t)\,dt = d\omega,$$

где $\omega = \int_0^1 \hat{\varphi}(K_t,\dot{\nabla}_t)\,dt \in \mathcal{E}^{2m-1}(X)$. Поэтому связности ∇_0 и ∇_1 порождают один и тот же класс когомологий. □

10.2. Классы Черна. Пусть $\pi\colon E\to X$ — расслоение ранга r над гладким многообразием X. Рассмотрим произвольную связность $\nabla\colon \mathcal{E}^0_E \to \mathcal{E}^1_E$, ее кривизну $K(\nabla,f) = d\theta + \theta\wedge\theta$ и порожденную кривизной дифференциальную форму $c(\nabla,f) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}K(\nabla,f)\right) \in \mathcal{E}^*(X)$.

Далее мы докажем, что $c(\nabla, f)$ порождает элемент группы когомологий $c(E) \in H^*(X, \mathbb{R})$, который не зависит от выбора базиса f и связности ∇. Ввиду теоремы 9.1 это позволяет сопоставить всякому расслоению $\pi\colon E \to X$ элемент группы когомологий $c(E) \in H^*(X, \mathbb{R})$, называемый *полным классом Черна расслоения* $\pi\colon E \to X$. Более того, $c(E) = c_1(E) + \ldots + c_n(E)$, где $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$. Элементы $c_i(E)$ называются *i-ми классами Черна* расслоения $\pi\colon E \to X$ в честь американского математика китайского происхождения Черна (S. S. Chern). В русскоязычной математической литературе классы Черна называют также *классами Чженя*, транскрибируя китайский вариант его фамилии. Классы Черна комплексификации векторного $\mathbb{R}$-расслоения называются также *классами Понтрягина*.

Теорема 10.2. *Полный класс Черна $c(E)$ расслоения $\pi\colon E \to X$ принадлежит группе $H^*(X, \mathbb{R})$ и не зависит от выбора связности ∇ и ее базиса.*

Доказательство. Дифференциальная форма

$$\det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f)\Big) \in \mathcal{E}^*(X)$$

является линейной комбинацией значений однородных форм различных степеней от матрицы $K(\nabla, f)$. Согласно теореме 10.1 она порождает класс когомологий $c(E) \in H^*(X, \mathbb{C})$. Рассматривая эрмитову связность (теорема 9.1) и используя упражнение 9.6, находим, что

$$\begin{aligned}\overline{\det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f)\Big)} &= \det\Big(I - \frac{i}{2\pi} \overline{K}(\nabla, f)\Big) = \\ &= \det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K^*(\nabla, f)\Big) = \det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f)\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, класс когомологий $c(E)$ представляется вещественной дифференциальной формой и, следовательно, принадлежит группе $H^*(X, \mathbb{R})$. $\square$

Классы Черна обладают рядом замечательных свойств.

Теорема 10.3. 1. *Справедливо соотношение $c_0(E) = 1$.*

2. *Если E — тривиальное расслоение и $j > 0$, то $c_j(E) = 0$.*

3. *Изоморфные расслоения имеют одинаковые классы Черна.*

4. *Классы Черна сопряженных расслоений E и E^* связаны соотношением $c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$.*

5. *Справедливо соотношение $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \wedge c(E_2)$.*

Доказательство. Утверждение 1 сразу следует из определения. Утверждение 2 следует из существования на тривиальном расслоении связности с нулевой матрицей кривизны в некоторой тривиализации. Изоморфизм расслоений порождает изоморфизм между связностями на них. Отсюда следует утверждение 3. Утверждение 4 следует из соотношения $K(\nabla^*, f^*) = -(K(\nabla, f))^{\mathbf{t}}$ для сопряженных связностей сопряженных расслоений (упражнение 9.6). Связности ∇_1 и ∇_2 в расслоениях E_1 и E_2 порождают связность ∇ в расслоении $E_1 \oplus E_2$. Ее матрица кривизны имеет вид $K(\nabla, f) = \begin{pmatrix} K(\nabla_1, f_1) & 0 \\ 0 & K(\nabla_2, f_2) \end{pmatrix}$. Поэтому

$$c(E_1 \oplus E_2) = \det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla, f)\Big) =$$
$$= \det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla_1, f_1)\Big) \det\Big(I + \frac{i}{2\pi} K(\nabla_2, f_2)\Big) = c(E_1) \wedge c(E_2). \quad \square$$

Упражнение 10.3. Гладкое отображение многообразий $\varphi\colon X \to Y$ порождает гомоморфизм пучков $\hat{\varphi}\colon \Lambda^* T^* Y \to \Lambda^* T^* X$, который, в свою очередь, порождает гомоморфизм когомологий $\check{\varphi}\colon H^*(Y, \mathbb{R}) \to H^*(X, \mathbb{R})$.

Теорема 10.4. *Справедливо равенство* $c(\tilde{\varphi} E) = \check{\varphi} c(E)$, *где* $\tilde{\pi}\colon \tilde{\varphi} E \to X$ *— обратный образ расслоения* $\pi\colon E \to Y$ *при отображении* $\varphi\colon X \to Y$.

Доказательство. Рассмотрим связность ∇ в векторном расслоении $\pi\colon E \to Y$. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ сопоставляет локальной тривиализации $f\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$ расслоения $\pi\colon E \to Y$ локальную тривиализацию $\tilde{f}\colon \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ расслоения $\tilde{\pi}\colon \tilde{\varphi} E \to X$, где $\tilde{U} = \varphi^{-1}(U)$. Отображение $\hat{\varphi}$ сопоставляет матрице дифференциальных форм $\theta(\nabla, f) \in \mathcal{E}^2_E(U)$ матрицу $\tilde{\theta}(\nabla, \tilde{f}) = \hat{\varphi}(\theta(\nabla, f)) \in \mathcal{E}^2_{\tilde{\varphi} E}(\tilde{U})$. Прямым вычислением нетрудно проверить, что при замене тривиализации $\tilde{f}$ эта матрица преобразуется как матрица некоторой связности $\tilde{\nabla}$ в расслоении $\tilde{\pi}\colon \tilde{\varphi} E \to X$. Таким образом,

$$K(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) = d\theta(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) + \theta(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) \wedge \theta(\tilde{\nabla}, \tilde{f}) =$$
$$= \hat{\varphi}(d\theta(\nabla, f) + \theta(\nabla, f) \wedge \theta(\nabla, f)) = \hat{\varphi}(K(\nabla, f)),$$

и, следовательно, $c(\tilde{\varphi} E) = \check{\varphi} c(E)$. $\square$

Теоремы 10.4 и 8.1 позволяют описать классы Черна другим способом, на первый взгляд совершенно не похожим на предыдущее определение, способом. Сначала нужно дать независимое определение классов Черна для универсального расслоения, что делается относительно несложно, а затем определить классы Черна произвольного расслоения как обратный образ универсального расслоения при подходящем отображении базы расслоения в грассманово многообразие. Классы Черна универсального расслоения можно определить таким образом, чтобы они являлись целочисленными, т. е. принадлежали $H^*(\cdot, \mathbb{Z})$. Подход через универсальные расслоения позволяет определить целочисленные классы Черна для произвольного расслоения.

Еще одно определение классов Черна для расслоений ранга 1 будет описано в § 12. Оно основано на теории пучков и также позволяет определить классы Черна как классы целочисленных когомологий. Существуют конструкции, позволяющие представить произвольное расслоение в виде прямой суммы расслоений ранга 1 с модифицированной базой. Это позволяет определить целочисленные классы Черна произвольных $\mathbb{C}$-векторных расслоений в терминах теории пучков.

Особенно важной характеристикой гладкого многообразия X является полный класс Черна—Понтрягина $p(X) \in H^*(X, \mathbb{Z})$ комплексификации его касательного расслоения. Из наших определений следует, что этот класс зависит не только от топологии многообразия X, но и от структуры гладкого многообразия на нем. И действительно, существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные гладкие многообразия с не совпадающими целочисленными классами $p(X)$. Тем более удивительным является результат С. П. Новикова, утверждающий, что образ класса $p(X)$ в группе когомологий с рациональными коэффициентами $H^*(X, \mathbb{Q})$ зависит лишь от топологии многообразия. За этот результат С. П. Новиков первым среди российских математиков был удостоен филдсовской премии.

§ 11. Комплексные многообразия

11.1. Дифференциальные формы. Комплексное векторное пространство V порождает вещественное векторное пространство $V_{\mathbb{R}}$, где $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$. Умножение на i в пространстве V порождает линейный оператор $J\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$. Сопоставим базису $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V базис $(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)$ пространства $V_{\mathbb{R}}$, где $f_i = ie$. Тогда $J(e_k) = f_k$, $J(f_k) = -e_k$.

Рассмотрим теперь комплексное векторное пространство

$$V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{\alpha^k e_k + \beta^k f_k \mid \alpha^k, \beta^k \in \mathbb{C}\}.$$

Обозначим через $Q\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$-линейный оператор

$$Q(\alpha^k e_k + \beta^k f_k) = \bar{\alpha}^k e_k - \bar{\beta}^k f_k\,.$$

Упражнение 11.1. Докажите, что оператор Q не зависит от выбора базиса $(e_1, \ldots, e_n)$.

Продолжим J до $\mathbb{C}$-линейного оператора $J_{\mathbb{C}}\colon V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Тогда далее $J^2 = -1$. Комплексное пространство $V_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму комплексных подпространств $V^{1,0} \oplus V^{0,1}$, где $V^{1,0} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid J_{\mathbb{C}}v = iv\}$, $V^{0,1} = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid J_{\mathbb{C}}v = -iv\}$ и $Q(V^{1,0}) = V^{0,1}$. Проекция $I\colon V_{\mathbb{C}} \to V$, где $I(e_k) = e_k$, $I(f_k) = 0$, порождает $\mathbb{C}$-изоморфизм $I\colon V^{1,0} \to V$.

Обозначим через $\Lambda^{p,q}V \subset \Lambda^{p+q}V_{\mathbb{C}}$ подпространство, порожденное внешними формами вида $u \wedge v$, где $u \in \Lambda^p V^{1,0}$, $v \in \Lambda^q V^{0,1}$. Тогда $\Lambda^r V_{\mathbb{C}} = \sum\limits_{p+q=r} \Lambda^{p,q}V$.

Рассмотрим теперь комплексное многообразие X. Кокасательное пространство T_z^* в точке $z \in X$ является комплексным векторным пространством. Применяя к нему предыдущую конструкцию, находим разложение комплексного векторного пространства $\Lambda^r(T_z^*)_{\mathbb{C}} = \sum\limits_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(T_z^*)$. Сечения $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U)$ порожденного им расслоения $\Lambda^r T_{\mathbb{C}}^* \to X$ называются *комплекснозначными дифференциальными формами полной степени r.*

Рассмотрим естественные проекции $\pi_{p,q}\colon \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ и операторы

$$\partial = \pi_{p+1,q} d\colon \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(U),$$
$$\bar{\partial} = \pi_{p,q+1} d\colon \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(U).$$

Упражнение 11.2. Докажите, что $Q\,\partial Q = \bar{\partial}$.

Опишем теперь действие этих операторов в локальной карте $z\colon U \to \mathbb{C}^n$. Комплексные локальные координаты $z = (z^1, \ldots, z^n)$ порождают вещественные локальные координаты $z^k = x^k + iy^k$. Дифференциалы координатных функций образуют ковекторные поля $(dz^1, \ldots, dz^n)$, $(dx^1, \ldots, dx^n, dy^1, \ldots, dy^n)$. Обозначим через

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^n}\Big), \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big)$$

двойственные им векторные поля. Тогда

$$dz^k = dx^k + i\,dy^k \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - i\,\frac{\partial}{\partial y^k}\,.$$

Положим $d\overline{z^k} = dx^k - i\,dy^k$ и $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z^k}} = \dfrac{\partial}{\partial x^k} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y^k}$.

Упражнение 11.3. Докажите, что векторы $\Big\{\dfrac{\partial}{\partial z^k} \;\Big|\; k = 1, \ldots, n\Big\}$ и $\Big\{\dfrac{\partial}{\partial \overline{z^k}} \;\Big|\; k = 1, \ldots, n\Big\}$ образуют базисы пространств $(T_z)^{1,0}$ и $(T_z)^{0,1}$ соответственно, а ковекторы $\{dz^k \mid k=1,\ldots,n\}$ и $\{d\overline{z^k} \mid k=1,\ldots,n\}$ образуют базисы пространств $(T_z^*)^{1,0}$ и $(T_z^*)^{0,1}$ соответственно.

Лемма 11.1. *Справедливы соотношения*

$$\partial = dz^k\wedge\frac{\partial}{\partial z^k},\quad \bar\partial = d\overline{z^k}\wedge\frac{\partial}{\partial\overline{z^k}},\quad d=\partial+\bar\partial,\quad \partial^2=\bar\partial^2=\partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0\,.$$

Доказательство. Пусть $\xi\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$, $\sum\limits_1 = dz^k\wedge\dfrac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\sum\limits_2 = d\overline{z^k}\wedge\dfrac{\partial}{\partial\overline{z^k}}\xi$. Тогда $d\xi=\sum\limits_1+\sum\limits_2$, причем $\sum\limits_1\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(U)$ и $\sum\limits_2=\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(U)$. Таким образом, $\partial\xi=\pi_{p+1,q}d\xi=\sum\limits_1=dz^k\wedge\dfrac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\bar\partial\xi=\pi_{p,q+1}d\xi=\sum\limits_2=d\overline{z^k}\wedge\dfrac{\partial}{\partial\overline{z^k}}\xi$. Следовательно, $\partial=dz^k\wedge\dfrac{\partial}{\partial z^k}$ и $\bar\partial=d\overline{z^k}\wedge\dfrac{\partial}{\partial\overline{z^k}}$ и $d=\partial+\bar\partial$. Поскольку $d^2=0$, отсюда следует, что $0=(\partial+\bar\partial)^2\xi=\partial^2\xi+\bar\partial^2\xi+(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)\xi$, причем $\partial^2\xi\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+2,q}(U)$, $\bar\partial^2\xi\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+2}(U)$ и $(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)\xi\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q+1}(U)$. Таким образом, $\partial^2=\bar\partial^2=\partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0$. $\square$

Следующая лемма аналогична лемме Пуанкаре и доказывается по той же схеме.

Лемма 11.2 (Дольбо). *Пусть $\omega\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ и $z\in U$. Тогда в некоторой окрестности V точки p:* 1) *условия $\partial\omega=0$ и $\omega\in\partial\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p-1,q}(V)$ эквивалентны*; 2) *условия $\bar\partial\omega=0$ и $\omega\in\bar\partial\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(V)$ эквивалентны.*

11.2. Когомологии Дольбо. Голоморфное отображение комплексных многообразий $\pi\colon E\to X$ называется *голоморфным векторным расслоением ранга r*, если

1) слой $E_z=\pi^{-1}(z)$ каждой точки $z\in X$ наделен структурой комплексного векторного пространства размерности r;

2) для каждой точки $z\in X$ существуют такая окрестность $z\in U\in X$ и такое голоморфное отображение $h\colon \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^r$, называемое *локальной тривиализацией*, что отображение $h|_{E_z}\colon E_z\to z\times\mathbb{C}^r$ является изоморфизмом комплексных векторных пространств.

Кокасательное расслоение T^*X к комплексному многообразию X имеет естественную структуру комплексного расслоения. Внешняя степень $\Omega^p=\Lambda^p\Omega$ пучка его голоморфных сечений Ω называется пучком *голоморфных дифференциальных форм степени p*. Другими словами,

$$\Omega^p(U)=\{\omega\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0}(U)\mid\bar\partial\omega=0\}=$$
$$=\Big\{\omega=\sum a_{i_1\ldots i_p}dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_p}\;\Big|\;\frac{\partial a_{i_1\ldots i_p}}{\partial\bar z^{i_j}}=0\Big\}.$$

Упражнение 11.4. Докажите, что последовательность пучков

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{\partial} \Omega^1 \xrightarrow{\partial} \Omega^2 \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \Omega^n \xrightarrow{\partial} 0$$

является точной.

Теорема 11.1 (Дольбо). *Имеет место равенство*

$$H^q(X, \Omega^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(X))/\mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X))$$

Доказательство. Последовательность пучков

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,n} \xrightarrow{\bar\partial} 0$$

является резольвентой ввиду леммы Дольбо. Она ациклична ввиду мягкости пучков $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}$ (следствия 7.1 и 4.1). Поэтому утверждение теоремы Дольбо следует из теоремы 5.1. □

Для компактного многообразия размерности когомологий

$$h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$$

конечны и называются *числами Ходжа.*

Пусть теперь $\pi\colon E \to X$ — голоморфное расслоение ранга r над комплексным многообразием X и $\mathcal{E}_E$ — пучок его голоморфных сечений. Тогда голоморфные сечения Ω_E^p расслоения $(\Lambda^p T^*X) \otimes_{\mathbb{C}} E$ называются *голоморфными дифференциальными формами степени p с коэффициентами в E*. Сечения пучка $\mathcal{E}_E^{p,q} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_E$ называются *дифференциальными (p,q)-формами с коэффициентами в E*. Рассмотрим такой оператор $\bar\partial_E\colon \mathcal{E}_E^{p,q} \to \mathcal{E}_E^{p,q+1}$, что $\bar\partial_E(\omega \otimes e) = \bar\partial\omega \otimes e$.

Упражнение 11.5. Докажите, что оператор $\bar\partial_E$ корректно определен для любого голоморфного расслоения E, в то время как оператор $\partial_E(\omega \otimes e) = \partial\omega \otimes e$ — лишь для одномерного тривиального расслоения.

Повторяя рассуждения теоремы Дольбо, получаем следующий результат.

Теорема 11.2. *Имеет место равенство*

$$H^q(X, \Omega_E^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_E^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{E}_E^{p,q+1}(X))/\mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar\partial_E} \mathcal{E}_E^{p,q}(X)).$$

§ 12. Линейные расслоения

12.1. Каноническая связность. Пусть $\pi\colon E \to X$ — голоморфное векторное расслоение. Комплексная структура на многообразиях E и X порождает на них структуру гладкого многообразия. Это позволяет рассматривать голоморфное векторное расслоение как $\mathbb{C}$-расслоение и рассматривать на нем связности, эрмитовы метрики и классы Черна. Голоморфная структура наделяет эти связности и метрики дополнительными свойствами. В частности, связность $\nabla\colon \mathcal{E}_E \to \mathcal{E}_E^1$ разлагается в сумму $\nabla = \nabla' + \nabla''$, где $\nabla' = \pi_{1,0}\nabla\colon \mathcal{E}_E \to \mathcal{E}_E^{1,0}$ и $\nabla'' = \pi_{0,1}\nabla\colon \mathcal{E}_E \to \mathcal{E}_E^{0,1}$.

Пусть $\pi\colon E \to X$ — эрмитово голоморфное векторное расслоение ранга r. В локальной тривиализации f с голоморфным базисом сечений $e = (e_1, \ldots, e_r) \subset \mathcal{E}_E(U)$ эрмитова метрика описывается матрицей $h(f)$.

Лемма 12.1. *Матрица* $\theta(f) = h(f)^{-1}\partial h(f)$ *является матрицей связности* $\nabla = d + h^{-1}\partial h$, *называемой* канонической.

Доказательство. Согласно упражнению 9.3 при голоморфной замене локальной тривиализации $f \mapsto \tilde{f}$ матрица связности $h(f)^{-1}\partial h(f)$ меняется на $h(\tilde{f})^{-1}\partial h(\tilde{f}) = (gh(f)\bar{g}^t)^{-1}(d(gh(f)\bar{g}^t) + (g\,\partial h(f)\bar{g}^t)) = g^{-1}dg + gh(f)^{-1}\partial h(f)g^{-1}$, т. е. преобразуется так же, как матрица связности. Следовательно, матрицы $h(f)^{-1}\partial h(f)$ являются матрицами некоторой связности. □

Упражнение 12.1. Пусть ∇ — каноническая связность эрмитова голоморфного расслоения. Докажите, что она согласована с эрмитовой метрикой расслоения, т. е. $\nabla' = \partial + h(f)^{-1}\partial h(f)$ и $\nabla'' = \bar{\partial}$.

Лемма 12.2. *Пусть* θ *и* K *— матрица и кривизна канонической связности* ∇. *Тогда* $K \in \mathcal{E}_E^{1,1}$, $\partial\theta = -\theta \wedge \theta$, $K = \bar{\partial}\theta$, $\partial K = [K, \theta]$ *и* $\bar{\partial}K = 0$.

Доказательство. Поскольку $0 = \partial 1 = \partial(hh^{-1}) = \partial h h^{-1} + h\,\partial h^{-1}$, находим, что $\partial h^{-1} = -h^{-1}\partial h h^{-1}$. Таким образом,

$$\partial\theta = \partial(h^{-1}\partial h) = \partial h^{-1} \wedge \partial h = -h^{-1}\partial h h^{-1} \wedge \partial h = \\ = -h^{-1}\partial h \wedge h^{-1}\partial h = -\theta \wedge \theta\,.$$

Следовательно, $K = d\theta + \theta \wedge \theta = \partial\theta + \bar{\partial}\theta - \partial\theta = \bar{\partial}\theta$. Поэтому $\bar{\partial}K = \bar{\partial}^2\theta = 0$, и ввиду тождества Бьянки $\partial K = (\partial + \bar{\partial})K = dK = [K, \theta]$. □

Используем каноническую связность для вычисления первого класса Черна комплексного универсального расслоения над проективным пространством $\pi\colon F \to \mathbb{C}P^{n-1}$. Векторы $\{(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{C}^n \mid \xi^i \neq 0\}$ порождают карту $E_i = \{[\xi^1, \ldots, \xi^n]\} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ и тривиализацию $f_i\colon \pi^{-1}(E_i) \to E_i \times \mathbb{C}$, где $f_i(\pi^{-1}([\xi^1, \ldots, \xi^n]))$ порождено парами $([\xi^1, \ldots, \xi^n], \xi^i)$. Положим $h = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^j \bar{\xi}^j$.

Упражнение 12.2. Докажите, что определенные для тривиализаций f_i матрицы $(e,e)=h$ порождают эрмитову метрику.

Лемма 12.3. *Первый класс Черна комплексного универсального расслоения $\pi\colon F\to\mathbb{C}P^{n-1}$ представляется дифференциальной формой*

$$c_1=\frac{1}{2\pi i}\frac{h\sum\limits_{i=1}^{n}d\xi^i\wedge d\bar\xi^i-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\bar\xi^i\xi^j d\xi^i\wedge d\bar\xi^j}{h^2}.$$

Доказательство. Согласно лемме 12.2 имеем

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{-1}c_1=K=\bar\partial\theta=\bar\partial(h^{-1}\partial h)=\bar\partial h^{-1}(\partial h)+h^{-1}\bar\partial\partial h=-\frac{\bar\partial h\wedge\partial h-h\bar\partial\,\partial h}{h^2},$$

где $h=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi^j\bar\xi^j$. □

Упражнение 12.3. Найдите класс Черна касательного расслоения к сфере Римана $\mathbb{C}P^1$. Докажите, что любое гладкое поле касательных векторов на сфере S^2 обращается в 0 хотя бы в одной точке.

Согласно теореме 3.1 вложение $\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ порождает гомоморфизм $H^*(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{i}H^*(X,\mathbb{C})$. Обозначим через $\tilde H^*(X,\mathbb{Z})$ образ этого гомоморфизма. Другими словами, $\tilde H^*(X,\mathbb{Z})$ — это целочисленные когомологии по модулю кручения. Комплексные расслоения ранга 1 называются также *линейными расслоениями.*

Теорема 12.1. *Первый класс Черна линейного расслоения принадлежит $\tilde H^2(X,\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Согласно теоремам 8.1 и 10.4 утверждение теоремы 12.1 достаточно доказать для комплексного универсального расслоения над проективным пространством. Для этого согласно теореме де Рама достаточно доказать целочисленность интеграла по двумерным циклам из $H^2(X,\mathbb{Z})$ от дифференциальной формы, представляющей первый класс Черна расслоения. Группа $H^2(X,\mathbb{Z})$ одномерна и порождается элементом, отвечающим циклу $P_1=\pi(\{(\xi,0,\dots,0,1)\mid\xi\in\mathbb{C}\})$. С другой стороны, согласно лемме 12.3 мы поучаем

$$\int\limits_{P_1}c_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{(\xi\bar\xi+1)\,d\xi\wedge d\bar\xi-\bar\xi\xi\,d\xi\wedge d\bar\xi}{(\xi\bar\xi+1)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{d\xi\wedge d\bar\xi}{(\xi\bar\xi+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\wedge dy}{(|z|^2+1)^2}=-2\int\limits_0^\infty\frac{r\,dr}{(r^2+1)^2}=-1.\quad\square$$

12.2. Пучки и классы Черна. С комплексным многообразием X связана точная последовательность пучков $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\mathbb{Z}$ — подпучок локально постоянных целочисленных функций, $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на X, $\mathcal{O}^*$ — пучок не обращающихся в 0 голоморфных функций на X, рассматриваемый как группа по умножению, и $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$. В этом пункте мы докажем, что умноженный на -1 второй связывающий оператор, порожденный этой последовательностью, совпадает с первым классом Черна. Этот оператор называется *оператором Бокштейна.*

Теорема 12.2. *Между классами эквивалентности голоморфных линейных расслоений над X и элементами группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие Лере для пучка $\mathcal{O}^*$. Очевидным образом модифицируя лемму 8.1, находим, что семейство голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ задает линейное голоморфное расслоение над X, если и только если $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Аналогично согласно упражнению 8.1 семейства голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует такое семейство голоморфных функций $\{l_{\alpha,\beta}\} \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}$. Таким образом, утверждение теоремы 12.2 следует из теоремы Лере. $\square$

Упражнение 12.4. Докажите, что $c_1(H^1(X, \mathcal{O}^*)) \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

Согласно теореме 4.4 точная последовательность пучков

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

порождает длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{h_0} H^0(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{l_0} H^0(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_0} H^1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{h_1}$$
$$\xrightarrow{h_1} H^1(X, \mathcal{O}) \xrightarrow{l_1} H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \to \dots$$

со связывающими гомоморфизмами b_i. Положим $b = -b_1$.

Теорема 12.3. *Гомоморфизм $H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} \tilde{H}^2(X, \mathbb{Z})$ сопоставляет линейному голоморфному расслоению E его первый класс Черна.*

Доказательство. Следуя предыдущей теореме, сопоставим расслоению E представляющий его коцикл Чеха $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ относительно покрытия Лере $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$. Сопоставим коциклу $g = \{g_{\alpha,\beta}\}$ его образ относительно оператора Бокштейна, следуя алгоритму, приведенному в теореме 4.4. Для этого, выбирая произвольную ветвь логарифма, рассмотрим коцепь Чеха $\tau_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi i}\ln g_{\alpha,\beta} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$ и коцикл $\delta\tau \in Z^2(\mathcal{U},\mathcal{O})$. Тогда

$$(\delta\tau)_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta}) \in -bg \in \check{H}^2(X,\mathbb{Z}).$$

Найдем теперь класс Черна расслоения E. Для этого рассмотрим эрмитову метрику, задаваемую функциями $\{h_\alpha\}$ в тривиализации с функциями перехода $\{g_{\alpha,\beta}\}$. Тогда $h_\beta = g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}h_\alpha$. Согласно леммам 12.1 и 12.2 имеем $c_1(E) = \frac{i}{2\pi}\,\bar\partial h_\alpha^{-1}\partial h_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\,\partial\bar\partial \ln h_\alpha$. Осталось доказать, что коциклу Чеха $\delta\tau$ отвечает дифференциальная форма $-\frac{1}{2\pi i}\,\partial\bar\partial\ln h_\alpha$. Положим $\mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\,\partial\ln h_\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}(\delta\mu)_{\alpha,\beta} = \mu_\beta - \mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\,\partial\ln\frac{h_\beta}{h_\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\,\partial\ln(g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}) = \\ = \frac{1}{2\pi i}(\partial\ln g_{\alpha,\beta} + \partial\ln\bar{g}_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi i}\,d\ln g_{\alpha,\beta} = d\tau_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Согласно алгоритму, приведенному в теореме 6.1, отсюда следует, что коциклу Чеха $\delta\tau$ отвечает дифференциальная форма

$$d\mu_\alpha = d\frac{1}{2\pi i}\,\partial\ln h_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\,\bar\partial\partial\ln h_\alpha = -\frac{1}{2\pi i}\,\partial\bar\partial\ln h_\alpha\,. \qquad \square$$

Рассмотренная выше конструкция применима и для произвольных $\mathbb{C}$-векторных расслоений, если заменить пучки $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$ на пучки гладких функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$. В этом случае ввиду мягкости пучка $\mathcal{E}$ гомоморфизм Бокштейна устанавливает изоморфизм $H^1(X,\mathcal{E}^*) \to H^2(X,\mathbb{Z})$. Таким образом, линейное $\mathbb{C}$-векторное расслоение с точностью до изоморфизма определяется своим целочисленным (возможно, с кручением) классом Черна.

Можно доказать, что первый класс Черна голоморфного линейного расслоения двойствен дивизору его мероморфного сечения в следующем смысле. Пусть $\pi\colon E \to X$ — голоморфное линейное расслоение над компактным комплексным многообразием X комплексной размерности n. Рассмотрим глобальное мероморфное сечение $s\colon X \to E$. Его дивизор $D(s) \subset X$ порождает гомологический класс $e(s) \in H_{2n-2}(X,\mathbb{C})$ (гомологический класс подмногообразия нулей минус гомологический класс подмногообразия полюсов сечения s). Согласно теореме де Рама класс $e(s)$ порождает линейный функционал $l_s\colon H^{2n-2}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Тогда $l_s(\omega) = \int\limits_X c_1(\pi)\wedge\omega$. Доказательство основано на интерпретации дивизоров как сечений расслоения $\mathcal{M}/\mathcal{O}^*$, где $\mathcal{M}$ — пучок мероморфных функций на X. Детали доказательства составляют заключительное упражнение курса.

Аналогичная естественная интерпретация существует и для полного класса Черна голоморфного расслоения произвольного ранга.

ДРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ КУРСОВ НЕЗАВИСИМОГО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Хованский А. Г. Комплексный анализ. — М: МЦНМО, 2004. — 48 с.

В этой брошюре содержатся задачи к начальному полугодовому курсу комплексного анализа, который читался для второкурсников весной 2003 года в НМУ.

Вот некоторые из тем, которые обсуждались в курсе: формула Стокса в ослабленных предположениях гладкости, содержащая как частный случай теорему Коши; геометрия преобразования инверсии и геометрия Лобачевского, связь этих геометрий с ТФКП; теорема Римана вместе с теоремой о продолжаемости отображения Римана до границы; римановы поверхности аналитических функций; принцип симметрии Римана—Шварца и теорема Пикара.

Львовский С. М. Лекции по комплексному анализу. — М: МЦНМО, 2004. — 136 с.

Эта брошюра представляет собой расширенный вариант курса лекций, прочитанного автором на втором курсе Независимого московского университета в весеннем семестре 2002 года. Помимо традиционного материала, приведены сведения о компактных римановых поверхностях; обсуждаются такие результаты, как теорема Римана—Роха и (отчасти) теорема Абеля, а в первом нетривиальном случае (для эллиптических кривых) приводятся и доказательства.

Парамонова И. М., Шейнман О. К. Задачи семинара «Алгебры Ли и их приложения». — М: МЦНМО, 2004. — 48 с.

В сборнике, в форме задач, дается последовательное изложение основ теории алгебр Ли, включая нильпотентные, разрешимые и полупростые алгебры Ли, классификацию конечных систем корней, универсальные обертывающие алгебры, элементы теории когомологий алгебр Ли, введение в аффинные алгебры Каца—Муди, элементы теории представлений включая формулу характеров Вейля—Каца, некоторые приложения к интегрируемым системам и тождествам Макдональда. Предполагается знание математики в объеме первых трех семестров математических факультетов.

Шейнман О. К. Основы теории представлений. — М: МЦНМО, 2004. — 64 с.

Книга представляет собой семестровый вводный курс теории представлений конечных и важнейших компактных групп. Предназначается для студентов математических и физических специальностей, начиная со второго курса.

Прасолов В. В. Задачи по топологии. — М.: МЦНМО, 2008. — 40 с.

В этой брошюре содержатся задачи к трехсеместровому курсу топологии, который неоднократно читался для студентов первого и второго курса НМУ.

В первом семестре обсуждаются топологические пространства, фундаментальная группа и накрытия, во втором семестре — CW-комплексы, многообразия, гомотопические группы и расслоения, в третьем — гомологии и когомологии.

Агранович М. С. Обобщенные функции. — М.: МЦНМО, 2008. — 128 с.

Вводный курс по теории обобщенных функций (распределений), написанный на основе лекций, прочитанных автором в Независимом московском университете. Доступен старшекурсникам механико-математических и физико-математических факультетов университетов. Рассчитан в первую очередь на тех из них, кто специализируется по уравнениям в частных производных или уравнениям математической физики, но может быть полезен также начинающим математикам других направлений, включая прикладников, а также физикам и инженерам. В курс включены краткий очерк общей теории уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ и теорема Шварца о ядре.

Львовский С. М. Математический анализ. — М.: МЦНМО, 2008. — 296 с.

Книга представляет собой записки продвинутого курса анализа, прочитанного автором в 2006/07 годах в Независимом московском университете. В курсе на раннем этапе вводится понятие гладкого многообразия и уделяется много внимания векторным полям, дифференциальным формам, ориентациям и прочему материалу, лежащему между курсами анализа и дифференциальной геометрии. Из менее традиционных тем отметим пример Уитни и доказательство (в ослабленном варианте) теоремы регулярности для эллиптических систем.

Америк Е. Ю. Гиперболичность по Кобаяси: некоторые алгебро-геометрические аспекты. — М.: МЦНМО, 2010. — 48 с.

Брошюра представляет собой записки цикла лекций для старшекурсников и аспирантов, прочитанных автором в Независимом московском университете осенью 2006 года. Обсуждается понятие гиперболичности по Кобаяси в алгебро-геометрическом контексте; в частности, много внимания уделяется вопросам (не)существования рациональных, эллиптических и целых кривых на алгебраических многообразиях (на эту тему представлены результаты Вуазен, Богомолова, Макквиллена, Демайи и др.).

Пирковский А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. — М: МЦНМО, 2010. — 176 с.

Книга представляет собой записки семестрового курса лекций по спектральной теории, прочитанного автором в Независимом московском университете в весеннем семестре 2003 г. Ее можно рассматривать как дополнение к стандартному университетскому курсу функционального анализа. Особое внимание уделяется построению функциональных исчислений (от голоморфного до L^∞-исчисления) и доказательству спектральной теоремы в ее различных формулировках. Включено также изложение теории кратности в терминах измеримых гильбертовых расслоений. Для книги характерен алгебраический подход, при котором линейные операторы трактуются как представления функциональных алгебр.

Для студентов и аспирантов математических и физических специальностей.