Государственный научный центр Российской Федерации
Федеральное государственное унитарное предприятие
«Центральный научно-исследовательский институт химии и механики»

КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СМЕЩЕННЫХ ОЦЕНОК В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

В.С. МИХАЙЛОВ

В.С. МИХАЙЛОВ КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СМЕЩЕННЫХ ОЦЕНОК В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Государственный научный центр Российской Федерации
Федеральное государственное унитарное предприятие
«Центральный научно-исследовательский институт
химии и механики»

В.С. Михайлов

КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СМЕЩЕННЫХ ОЦЕНОК В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Научное издание

Москва
2024

УДК 519.248:62 – 192

ББК 22.17

М69

Р е ц е н з е н т ы:

доктор технических наук, профессор, почетный работник высшего профессионального образования РФ
Б.В. Папков,
доктор технических наук, профессор, почетный работник науки и техники РФ
В.А. Богатырев

М69 **В.С. Михайлов**

Критерий эффективности смещенных оценок в теории надежности. М.: Изд-во ФГУП «ЦНИИХМ», 2024. 260 с.

ISBN 978-5-904586-16-4

Целью данной работы является ознакомление широкого круга читателей с основными принципами построения критерия эффективности смещенных оценок, а также с результатами получения эффективных смещенных оценок, чья эффективность доказана (или выбрана в качестве таковой) в достаточно широком классе смещенных оценок на основе построенного критерия эффективности смещенных оценок.

Данная книга представляет собой монографию, посвященную процедуре получения эффективных смещенных оценок в задачах, относящихся к теории надежности, и предназначена прежде всего для инженеров, аспирантов и студентов старших курсов технических специальностей.

УДК 519.248:62 – 192

ББК 22.17

ISBN 978-5-904586-1

9 785904 586164

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная монография разделена на части, каждую из которых можно читать независимо от других. Тем не менее именно в такой последовательности, как расположены части и главы книги, следует ее изучать.

Книга не предназначена для беглого просмотра, а требует от читателя значительного внимания. Представленный материал предполагает наличие определенных знаний в области основ математической статистики и классической теории надежности. Книга является итогом многолетних исследований построения эффективных смещенных оценок и естественным продолжением ранее изданных монографий: Михайлов В.С., Юрков Н.К. «Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты», основанной на классической математической статистике; Михайлов В.С. «Смещенные оценки в теории надежности», где совершена попытка отойти от классических представлений о критерии эффективности смещенных оценок, что позволило ответить на многие вопросы, связанные с неоднозначностью выбора эффективной смещенной оценки. Основой таких построений является критерий эффективности, поиск которого осуществляется в данной книге. Появившиеся за последнее время новые знания гармонично встроились в структуру изложения, оставляя приоритет за собой. Это свидетельство того, что новое – это хорошо забытое старое.

Монография может быть использована и для справок по эффективным смещенным оценкам показателей надежности различных планов испытаний.

Пользуясь случаем, благодарю всех, кто помог своими предложениями, советами, замечаниями. В первую очередь рецензентов профессора Б.В. Папкова и профессора В.А. Богатырева, которые внимательно прочитали рукопись книги и сделали целый ряд полезных критических замечаний, и они были учтены при редакторской обработке рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проявляется повышенный интерес к смещенным статистическим оценкам среди специалистов в области прикладной теории надежности. Однако смещенное оценивание не является общепринятым среди теоретиков (чистых математиков) в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности использования смещенных оценок при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что они допускают смещение относительно оцениваемого параметра, что ведет к потере эффективности. В теории математики стремятся получить несмещенные оценки, которые и являются всегда эффективными оценками [1, 2]. Любой математик, получив смещенную оценку, стремится найти способ сделать ее несмещенной и, как правило, эффективной, минимизируя дисперсию. Однако не следует забывать, что неудач нахождения несмещенных оценок значительно больше, чем удач. То незначительное количество полученных несмещенных оценок по разным причинам не в полной мере устраивает испытателей [3]. В большинстве случаев несмещенных оценок не существует и на передний план выдвигаются смещенные оценки, что подтверждается практикой. Возникает задача – научиться сравнивать смещенные оценки по их эффективности.

В математической статистике разработаны различные методы для построения точечных оценок параметров законов распределений вероятностей случайных величин: метод моментов, метод максимального правдоподобия и метод минимума расстояний [1, 2]. На практике, используя эти методы, не всегда удается построить несмещенную и эффективную оценку, если таковая существует. В общем случае правила нахождения несмещенных оценок в настоящее время не существует, и их определение требует своего рода искусства. В ряде случаев найденные несмещенные и эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [3]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок, т.е. не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценками, с точки зрения близости к оцениваемому показателю и строгой монотонности по всем своим параметрам, в том числе и от параметров плана испытаний, таких как число испытуемых изделий или времени испытаний. Требование к строгой монотонности является следствием зависимости от механизма развития процесса необратимой деградации, которая неминуемо приводит к появлению отказа в группе испытуемых изделий. Существующая проблема поиска эффективных смещенных оценок вполне решаема классическими методами с помощью интегрального оценивания, основанного на суммировании среднеквадратичных смещений или уклонений статистических оценок от оцениваемого параметра для всех возможных величин, принимаемых параметрами плана испытаний, т.е. суммирование проводится как по всем величинам оцениваемого параметра, так и по параметрам, от которых зависит сама оценка.

Однако на практике часто бывает полезным подобрать несколько различных моделей для исследуемой задачи. И затем можно быть удовлетворенным, если будет наблюдаться разумное согласие между выводами, полученными в рамках различных моделей. Именно такой подход и использовался при написании данной монографии.

Коротко о постановке задачи. Рассматриваются две основные задачи. Первая связана с неоднородной продукцией, где заранее (априори) известны закон и границы распределения определяемого параметра, т.е. определяемый параметр – случайная величина, а в случае вырождения закона распределения, границы этого распределения вырождаются в точку, о количественном значении которой известно все, т.е. искомая величина известна и нет смысла определять ее величину. И задача, где неизвестен закон и границы распределения, как и степень их вырождения, т.е. определяемый параметр является случайной величиной и в случае вырождения. Чаще всего в производстве имеют дело с однородной продукцией, степень вырождения которой неизвестна. Именно с такими задачами будем встречаться в этой книге. То есть в монографии рассматриваются смещенные оценки, предназначенные для использования в задачах однородной продукции. Оценки, предназначенные для использования в рамках представления неоднородной продукции (байесовские оценки), анализируются только в целях сопоставления их эффективности в сравнении с рассматриваемыми оценками в рамках представления об однородной продукции.

Термины, используемые в данной монографии, определены в приложении Г.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

1.1. Методы построения статистических оценок

Для определенности, не нарушая общности рассуждений, будем в основном рассматривать биномиальные испытания (план типа $NБ\tau$) и испытания с ограниченным временем и восстановлением (план типа $NВ\tau$), где N – число испытуемых однотипных изделий ($N = n$ – число первоначально выставленных изделий); τ – наработка (одинаковая для каждого изделия); $В$ – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается; $Б$ – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается [4, 5]. При этом там, где это необходимо, будем считать, что наработка на отказ изделий подчиняется экспоненциальному закону распределений (далее – з.р.) вероятностей случайных величин (с.в.) с параметром t, где последний совпадает со средней наработкой на отказ (СНДО). Тогда величина вероятности безотказной работы (ВБР) одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством:

$$P_0 = \exp\{-\tau/t\}\ . \qquad (1.1)$$

Известный статист Бокс пишет[1]: *«Все модели неправильные, но некоторые из них полезны».* Не всегда просто установить адекватность модели, поэтому именно полезность определяет наш выбор! Предполо-

[1] Лонер Р.Л., Уилкинсон Г.Н. Устойчивые статистические методы оценки данных / пер. с англ. под ред. Н.Г. Волкова. М.: Машиностроение, 1984. С. 3.

жение экспоненциальности слишком удобно, однако это не означает, что оно (предположение) истинно, но полезность экспоненциальной модели распределения очевидна.

Заметим, что плану испытаний типа $NB\tau$ соответствует распределение Пуассона [4, 5], а плану типа $NБ\tau$ соответствует биномиальное распределение [4, 5].

Обозначим случайное число отказов через R, тогда для плана испытаний типа $NB\tau$ достаточной статистикой является число наблюдаемых отказов (R = r) [1–5]. Для плана испытаний типа $NB\tau$ случайная величина R имеет пуассоновское распределение Пу$(r;\Delta)$ с параметром Δ = $N\tau/t$ [1, 2]. Тогда, по определению, r – реализация с.в. R. С другой стороны, R – сумма с.в. X_i, каждая из которых есть случайное число отказов одного из N изделий ($1 \leq i \leq N$), поставленных на испытания. Случайные величины X_i имеют пуассоновское распределение с параметром Δ/N, а их сумма определяет пуассоновское распределение Пу$(r;\Delta)$ суммарного потока отказов [1, 2]:

$$\text{Пу}(r;\Delta) = \sum_{i=0}^{X_1+\dots+X_N=r} e^{-\Delta}\frac{\Delta^i}{i!}. \quad (1.2)$$

Для биномиальных испытаний (план типа $N\text{Б}\tau$) достаточной статистикой является число наблюдаемых отказов $(R = r)$ и суммарная наработка $S(R = r, \tau, s_i)$ [1–5], где R – случайное число отказов, s_i – моменты отказов, $i = 1, 2, \dots, r$. Для биномиальных испытаний с.в. R имеет биномиальное распределение $b_N(r)$ [2, ф. 1.4.55] с параметрами N и p, $0 \leq p \leq 1$, т.е. с.в. R, равная числу успехов в серии из N независимых опытов, принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \dots, N$ с вероятностями:

$$b_N(r) = C_N^r \text{p}^r (1-p)^{N-r}. \quad (1.3)$$

Функция распределения $F_R(r, N, p)$ биномиальной с.в. R примет вид:

$$F_R(r, N, p) = \sum_{k=0}^{r} b_N(k). \qquad (1.4)$$

Функция распределения $F_R(\mathrm{R} \leq r, N, p)$ вычисляется через неполную бета-функцию $I_p(x, y)$ по формуле [2, ф. 1.4.57]:

$$F_R(r, N, p) = 1 - I_p(r+1, N-r) = I_{1-p}(N-r, r+1). \qquad (1.5)$$

Вероятности $b_N(k)$ вычисляются через неполную бета-функцию $I_p(x, y)$ по формуле [2, ф. 1.4.58]:

$$b_N(k) = I_p(k, N-k+1) - I_p(k+1, N-k). \qquad (1.6)$$

Заметим, что традиционная оценка параметра p биномиального з.р. $\hat{p}(R, N) = R/N$ является несмещенной и эффективной оценкой [2, пример 2.4.20]. Оценка $\hat{p}$ также является и оценкой максимального правдоподобия [2, пример 2.10.7]. Под оценкой понимается статистика, используемая для оценивания параметра. Статистика – полностью определенная функция случайных величин.

Точечное оценивание – это одна из наиболее употребительных форм статистических выводов. Для описания качества оценивания неизвестного параметра t, истинную величину которого исследователь никогда не узнает, используются такие общие понятия, как несмещенность, состоятельность, достаточность, эффективность.

Привлекательным приближением для истинного (количественного) значения оцениваемого параметра t, чьи величины принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$, является такая оценка θ, для которой минимальна сумма математического ожидания от квадрата разностей между возможной реализацией θ и оцениваемым параметром t (оценивание по методу наименьших квадратов) [1, 2]. Именно Гаусс (1821) в качестве меры потерь и неточности предложил квадрат ошибки. Как писал Гаусс, если кто-либо будет возражать против такого выбора, как произвольного, то я полностью с ним соглашусь. Свой выбор он защищал, апеллируя к математической простоте и удобству [45].

Другой подход состоит в том, чтобы найти величину параметра t, исходя из суммы математического ожидания от разности между возможной реализацией $\theta = x_i$ и оцениваемым параметром t при условии, что эта сумма равна нулю, так что положительные и отрицательные разности сбалансированы $\sum(Ex_i - t) = 0$. При этом реализации от N независимых с.в. имеют общее распределение, зависящее от оцениваемого параметра t [45]. *«Несмещенность – это привлекательное условие, но после того, как наилучшая несмещенная оценка найдена, ее качества должны быть исследованы, и не исключена возможность, что существует оценка с небольшим смещением и значительно меньшим риском»* [45]. В качестве функции риска обычно рассматривают квадратичную ошибку, определенную в предыдущем абзаце.

Существуют и другие подходы, но в настоящее время не существует единственного убедительного определения оптимальности поиска эффективных оценок.

Определим кратко наиболее часто встречающиеся критерии эффективности оценок [1, 2] и их отличия. В основе этих критериев лежит среднеквадратический подход сравнения оценок. Пусть t не является с.в. и принадлежит множеству вещественных значений $t \in G$. Для функции от параметра $\theta(t)$ оценка $\hat{\theta}_0(R)$ называется эффективной оценкой в классе оценок $\hat{\theta}_0 \in \Theta$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}_0(R)$ из этого класса выполняется неравенство:

$$E(\hat{\theta}_0(R) - \theta(t)\,)^2 \leq E(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2, \qquad (1.7)$$

где E – математическое ожидание, соответствующее з.р. числа отказов для параметра $t \in G$. То есть сравниваются две оценки, одна из которых после их сравнения признается эффективнее другой.

1.2. Минимаксный подход

Оценка называется минимаксной $\hat{\theta}_0(R)$, если для любой другой оценки $\hat{\theta}(R)$ неслучайного параметра $t \epsilon G$ выполняется неравенство [1, 2] $\sup_{t \epsilon G} E_t(\hat{\theta}_0(R) - \theta(t))^2 \leq \sup_{t \epsilon G} E_t(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2$.

Из минимаксного подхода следует, что всегда найдется вариант, когда минимаксная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ является лучшей только в ближайшем диапазоне $t_0 \in [t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon]$ минимизации самого худшего случая уклонения от оцениваемого параметра $\theta(t)$, который составляет небольшую долю рабочего диапазона $t \in [t_1,\ t_2]$. И в то же время уклонения минимаксной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ могут превышать уклонения других оценок $\hat{\theta}(R)$ в более обширном рабочем диапазоне вещественных значений оцениваемого параметра $t_0 \notin [t_1,\ t_2]$ (НЕ максимального уклонения). Хотя уклонения этих оценок $\hat{\theta}(R)$ и превышают худший случай минимаксной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ в ближайшем диапазоне $t_0 \in [t_0 - \varepsilon,\ t_0 + + \varepsilon]$ ($t_0 \notin [t_1,\ t_2]$), но зато минимаксная оценка проигрывает в другом более обширном рабочем диапазоне, где ее уклонения превышают уклонения оценок $\hat{\theta}(R)$, и в этом диапазоне (НЕ максимального уклонения) минимаксная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ теряет свою эффективность.

1.3. Байесовский подход

Суть байесовского подхода состоит в том, что неизвестный (оцениваемый) параметр t (или функция от параметра $\theta(t)$) рассматривается как случайная величина с некоторой плотностью распределения $q(t)$, где t – реализация с.в. t [1, 6]. Плотность $q(t)$ называется априорной, т.е. данной до эксперимента. Байесовский подход предполагает, что неизвестный параметр t был выбран случайным образом из распределения с плотностью $q(t)$.

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного (после эксперимента) распределения имеет вид [1]:

$$q(t/R) = \frac{f_\Delta(r)q(t)}{f(r)}, \tag{1.8}$$

где $f(r) = \int f_\theta(r)q(t)dt$.

Апостериорное распределение параметра $\theta(T_0)$ будем обозначать через Q_R. Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид:

$$\hat{\theta}_Q(R) = E(\theta(T_0)|\mathrm{R}) = \int \theta(t)q(t|\mathrm{R})dt = \int \theta(t)Q_R(dt). \tag{1.9}$$

В силу свойств условного математического ожидания байесовская оценка минимизирует среднеквадратическое уклонение $E(\hat{\theta}_Q(R) - - \theta(T_0))^2$. При сравнении байесовской оценки на множестве других оценок $\hat{\theta}(R)$ всегда выполняется неравенство:

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 \leq E(\hat{\theta}(R) - \theta(T_0))^2 = \\ = \int E_t(\hat{\theta}(R) - \theta(t))^2 q(t)dt. \tag{1.10}$$

Отметим еще раз, что для байесовской оценки безусловное среднеквадратическое уклонение согласно формуле (1.10)

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 = \int E_t(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(t))^2 q(t)dt \tag{1.11}$$

принимает наименьшее возможное вещественное значение. Соотношение (1.9) показывает, что байесовская оценка минимизирует среднее количественное значение. Недостатком байесовского подхода является обязательное знание плотности априорного з.р. случайного параметра T_0 в соответствии формулам (1.8) – (1.11). С одной стороны, эти заложенные в правило предварительные знания несут в себе однократные финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [6], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества [6].

1.4. Классический интегральный подход в процессе поиска эффективных оценок в классе смещенных оценок

Классическое определение эффективной оценки [7]: *«Оценка параметра, имеющая наименьшее математическое ожидание квадрата ее отклонения от оцениваемого параметра для любого значения параметра, называется эффективной».* Классическая теория математической статистики [7] замечает, что в классе всех возможных оценок параметра эффективной оценки не существует! Поэтому автор источника [7] далее пишет: *«Необходимо наложить некоторые ограничения на множество оценок, в котором мы ищем наилучшую эффективную оценку. Естественным сужением класса оценок является класс так называемых несмещенных оценок параметра».* В этом случае эффективная оценка скалярного параметра является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В некоторых случаях узнать наилучшую несмещенную оценку помогают неравенства Рао–Крамера [2, 7]: если оценка эффективная, то она и наилучшая в указанном выше смысле, т.к. имеет наименьшую возможную дисперсию.

Идеальным вариантом в задачах оценивания является использование несмещенной оценки с минимальным уклонением (дисперсией), если такая оценка существует. Для этого в классе несмещенных оценок следует с целью выявления эффективной оценки аналитически провести доказательство выполнения неравенства Рао–Крамера для этой оценки.

Следует отметить, что неравенство Рао–Крамера должно выполняться для всех значений оцениваемых параметров. Но даже для экспоненциальных семейств распределений, для которых только и существуют эффективные оценки, эффективно оценить с помощью неравенства Рао–Крамера можно лишь одну какую-то функцию от параметра. Вопрос тем более открыт для семейств распределений, не являющихся экспоненциальными. Если такое доказательство сложно провести аналитически, то следует провести вычисление суммы уклонений для всех значений оцениваемого параметра. Для эффективной несмещенной оценки сумма уклонений должна быть минимальной.

В настоящее время нет инструментов получения несмещенных оценок (если они существуют!). Например, полученная методом максимального правдоподобия (план испытаний $NB\tau$) оценка средней наработки на отказ $\tilde{t}$=(суммарная наработка)/(число отказов) является сильно смещенной. Такое положение дел не может устроить тех кто занимается решением прикладных задач. Эффективными несмещенными оценками пользуются всегда, когда они существуют. Если невозможно найти эффективную несмещенную оценку в смысле среднеквадратического уклонения, то следует научиться сравнивать смещенные оценки. Подавляющее большинство задач связано с оценками, имеющими смещение [8–10].

В классе смещенных оценок следует искать оценки с минимальным смещением, а среди них – с минимальным уклонением. Именно такие оценки следует называть в классе смещенных оценок эффективными смещенными оценками или просто эффективными [9], что не противоречит классическому определению, а лишь расширяет его. Такой процесс поиска гарантирует получение оценок с хорошими точностными характеристиками [8–10]. Заметим, что опыт построения эффективных оценок показывает, что полученная несмещенная эффективная оценка не всегда будет обладать минимальным уклонением. Скорее наоборот, всегда найдется смещенная оценка, обладающая минимальным уклонением в сравнении с несмещенной оценкой. Во всех случаях, когда существует эффективная (несмещенная) оценка, существует смещенная оценка более точная, чем эффективная, т.е. с меньшим квадратом ошибки [11, с. 284]. Этот факт свидетельствует в пользу смещения как первичного фактора при построении критерия эффективности оценок. Для определения эффективной по смещению оценки следует провести вычисление сумм смещений и уклонений для всех значений оцениваемого параметра. Для эффективной смещенной оценки каждая из сумм должна быть минимальной. Такое определение эффективной оценки в некотором выделенном классе смещенных оценок не противоречит определению эффективной оценки в классе несмещенных оценок. Наоборот, определение эффективной оценки в классе несмещенных оценок является частым случаем определения эффективной оценки в некотором выделенном классе смещенных оценок, включающим подкласс несмещенных оценок [9].

Почему именно интегральный подход? При сравнении классическим методом, когда уклонение должно быть минимальным сразу для всех значений параметра, получаем, что одна из сравниваемых смещенных оценок будет обладать меньшим уклонением в одной части значений параметра, а другая – в оставшейся, при сравнимом смещении, и наоборот. Причем эта зависимость изменяется с изменением величин параметров плана испытаний N, τ. Для их сравнения и требуется суммирование всех уклонений и смещений по всем параметрам, включая параметры плана испытаний. Суммы смещений и уклонений определяют критерий эффективности [9].

Интегральный подход отработан в теории надежности в основном для планов испытаний типа $N\text{В}\tau$ [8, 9, 12–17] , $N\text{Б}\tau$ [9, 18–22] и плана испытаний с добавлением [9, 10, 23].

В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(R)$, заданного на сумме величин относительных смещений оценок $\hat{\theta}(R)$ от функции над параметром з.р. $\theta(T_0 = t)$, а именно $b(\theta(t)) = E\left(\hat{\theta}(R)\right) - \theta(t)$. В этом случае самым разумным является построение критерия выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ на множестве оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau) \epsilon \Theta$, основанном на суммарном квадрате относительных смещений математического ожидания исследуемых оценок $E\hat{\theta}(R, N, \tau)$ от функции над параметром $\theta(T_0)$ для всех возможных величин, принимаемых переменными параметрами T_0, N и τ.

Например, на основе изложенного для плана испытаний типа $NB\tau$ [8, 9, 12–17] в качестве критерия получения эффективной оценки можно построить функционал (далее – $A(\hat{\theta})$):

$$A(\hat{\theta}) = \int_0^{\infty} \left(\frac{b(\theta)}{T_0}\right)^2 \partial\Delta, \tag{1.12}$$

где $\Delta = N\tau/T_0$ – параметр пуассоновского з.р., характеризующий поток отказов [1]; $T_0 = N\tau/\Delta,\ b(\theta) = \left\{E\hat{\theta}(R, N, \tau) - T_0\right\}$ – смещение, $t \in [t_1,\ t_2]$. В данном случае проведена нормировка подынтегрального выражения на параметр T_0 с целью ограничения величины интеграла и удобства вычисления, хотя для параметров, отличных от T_0, нормировка не требуется.

Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром Δ, определим формулу математического ожидания оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau)$ [1]:

$$E\hat{\theta}(R, N, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\theta}(k, N, \tau) e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}. \tag{1.13}$$

Эффективная оценка $\hat{\theta}_0(R)$ должна обладать минимальной величиной функционала $A(\hat{\theta}_0)$. Из определения интегральной оценки следует, что ее выбор основан на минимизации суммы квадратов относительных усредненных смещений от оцениваемого параметра (или функции от параметра) на всем диапазоне величин, принимаемых этим параметром, и на всем диапазоне величин, которые могут принимать количество испытуемых изделий N и время испытаний τ.

Таким образом, интегральный подход учитывает все факторы, влияющие на выбор эффективной оценки. Интегральный подход наиболее интересен в случае, когда оценки $\hat{\theta}(R, N, \tau)$ принадлежат классу смещенных оценок $b \geq 0$. Эффективные оценки, полученные минимизацией функционала (1.12), будем называть интегральными эффективными смещенными оценками или просто – эффективными оценками, когда поиск осуществляется в классе смещенных оценок, а это почти всегда так [9]. Для несмещенных оценок существует классический вариант поиска эффективных оценок – по уклонению оценки параметра от его истинной величины [1, 2].

Дополнительным критерием поиска эффективных оценок, использующим интегральный подход, является минимизация функционала ($B(\hat{\theta})$), основанного на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau)$ от функции над параметром $\theta(T_0)$ для всех возможных величин, принимаемых параметрами T_0, N и τ, а именно [9]:

$$B(\hat{\theta}) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{T_0}\right)^2 E\left\{\hat{\theta}(R, N, \tau) - T_0\right\}^2 \partial\Delta \,. \qquad (1.14)$$

Отличие оценок, эффективных по уклонению (например, байесовские оценки ($\hat{\theta}_Q(R)$), от интегральной оценки, эффективной по смещению, выражено равенством [1]:

$$E(\hat{\theta}_Q(R) - \theta(T_0))^2 = D\left(\hat{\theta}_Q(R)\right) + b^2,$$

где $D\left(\hat{\theta}_Q(R)\right)$ – дисперсия. То есть байесовская оценка $\hat{\theta}_Q(R)$ минимизирует среднеквадратическое уклонение за счет минимальной суммы дисперсии и квадрата смещения.

При решении задач интегрального оценивания смещенных оценок важно (первично) не минимальное уклонение этих оценок от параметра, а минимальное смещение. Таким образом, классические оценки (несмещенные и эффективные в смысле минимизации уклонения) и интегральные оценки (эффективные в смысле минимизации смещения и уклонения) решают задачи, в основе решения которых лежит одна и та же числовая характеристика точности оценки – среднеквадратическое отклонение. Совместное решение задач минимизации смещения и уклонения осуществляет поиск эффективных оценок [9].

Рассмотрим общий случай. Из построения формул (1.12) и (1.14) следует, что для различных планов испытаний на множестве количественных значений переменных $N \in [1; 10]$ и $\tau \in [\tau_1;\ \tau_2]$ минимизация функционалов $A(\hat{\theta}(R, N, \tau_i))$ и $B(\hat{\theta}(R, N, \tau_i))$ даст множество частных эффективных оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau_i)$. Чтобы найти усредненную эффективную оценку, необходимо ее поиск осуществлять минимизацией расширенных функционалов следующего вида:

$$A_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big) = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_\tau \to 0} \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} A_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big); \tag{1.15}$$

$$B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big) = \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_\tau \to 0} \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} B_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big), \tag{1.16}$$

где

$$A_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2}\left\{E\hat{\theta}(R, N, \tau_i) - \theta\right\}^2 \partial\theta;$$

$$B_{N,\tau_i}\big(\hat{\theta}\big) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^2} E\left\{\hat{\theta}(R, N, \tau_i) - \theta\right\}^2 \partial\theta;$$

δ_τ – шаг суммирования;

$I = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\delta_\tau}$ – число шагов суммирования.

Так как величины функционалов $A_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ с изменением объема испытаний и границ интервала τ_1 и τ_2 могут стремиться к бесконечности, то следует ограничиваться их рабочим диапазоном. Реальное время испытаний может колебаться в пределах от 500 до 100 000 ч, а объем N – от 1 до 10 изделий, в зависимости от сложности и надежности испытуемого объекта. Именно этот фиксированный интервал следует рассматривать в качестве эталона при вычислении (минимизации) функционалов $A_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$.

На практике шаг суммирования δ_τ следует выбирать конечной величиной, достаточной для получения величин функционалов с приемлемой точностью. Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется [9].

Идеальным вариантом в задачах оценивания является использование несмещенной оценки с минимальным уклонением, если такая оценка существует. В противном случае следует искать оценки с минимальным смещением, а среди них – с минимальным уклонением [9, 12–23]. Такой процесс поиска гарантирует получение оценок с хорошими точностными характеристиками [29]. Поэтому в общем случае построения эффективных смещенных оценок не следует ориентироваться на смещенные оценки, построенные минимизацией только функционала вида $B_{10}\big(\hat{\theta}(R, N, \tau)\big)$ согласно формуле (1.16). Заметим, что опыт построения эффективных оценок показывает, что полученная несмещенная эффективная оценка не всегда будет обладать минимальным уклонением [9, 12–23]. Скорее наоборот, всегда найдется смещенная оценка, обладающая минимальным уклонением в сравнении с несмещенной оценкой. Этот факт свидетельствует в пользу смещения как первичного фактора при построении критерия эффективности оценок.

Однако при таком определении эффективной смещенной оценки всегда найдется вариант сравниваемых оценок, когда суммарное смещение одной оценки незначительно превалирует над суммарным смещением другой оценки, и то же самое происходит над суммарными уклонениями этих оценок, но уже в другом порядке. В такой постановке задачи формальный выбор эффективной смещенной оценки становится невозможным и имеет произвольный характер, т.е. выбор эффективной смещенной оценки принимается испытателем по интуиции. В этом случае выбор испытателя может стать неверным. Поэтому возникает задача построения критерия эффективности, на основании которого выбор эффективной смещенной оценки становится формальностью.

1.5. Построение критерия эффективности смещенных оценок

Обозначим через $A(\theta)$ суммарное смещение оценки θ от оцениваемого параметра t, а через $L(\theta)$ – суммарное уклонение оценки θ от оцениваемого параметра t. Заметим, что суммирование происходит в рабочем диапазоне как по всем значениям оцениваемого параметра t, так и по всем значениям параметров плана испытаний и иных параметров (например, время, за которое оценивается ВБР).

Для нужд построения критерия эффективности смещенных оценок будем произвольную статистическую оценку θ характеризовать смещением и дисперсией. Обозначим через $b = E(\theta) - t$ смещение оценки θ от параметра t, где E – математическое ожидание, а через D – дисперсию оценки θ. Тогда уклонение (в среднем квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t выражается формулой [1, 2, 7]:

$$L(\theta) = E(\theta - t)^2 = D + b^2.$$

Заметим, что уклонение $L(\theta)$, как характеристика эффективности, при изменении дисперсии тоже изменяется на эту величину, т.е. ее изменение происходит без учета зависимости от конкретной величины смещения оценки. В добавок к этому заметим, что величины дисперсии и квадрата смещения не равнозначны по отношению друг к другу, т.е. отношение этих характеристик может иметь значительную величину. Например, пусть имеется группа оценок, которые по своим свойствам близки к эффективной несмещенной оценке (именно с такими оценками имеет смысл работать), т.е. $b^2 \approx 0$ и $D >> b^2$, откуда $L(\theta) \approx D$, тогда даже при значительном изменении квадрата смещения b^2 уклонение $L(\theta) \approx D$ не способно выделить эффективную смещенную оценку среди оценок с одинаковой дисперсией D.

Попытаемся связать дисперсию и квадрат смещения так, чтобы при изменении дисперсии уклонение менялось с учетом смещения. Учтем, что смещение является первичным фактором при выборе эффективной смещенной оценки. И потребуем от вновь построенной характеристики $C(\theta)$, чтобы при изменении дисперсии на величину δD для небольших смещений $b \approx 0 + \delta$ учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был незначительным, и наоборот, для больших смещений $b >> 0$ учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был значительным. И потребуем, чтобы изменение характеристики $C(\theta)$ было линейным относительно характеристик D и b^2. Этим требованиям наиболее полно подходит произведение характеристик D и b^2:

$$C(\theta) = D \cdot b^2. \qquad (1.17)$$

Из формулы (1.17) следует, что с изменением дисперсии на величину δD характеристика $C(\theta) = (D + \delta D)\cdot b^2 = D\cdot b^2 + \delta D\cdot b^2$ изменяется на величину, которая учитывает величину квадрата смещения линейно. Верна и обратная ситуация, т.е. с изменением квадрата смещения на некоторую величину характеристика $C(\theta)$ изменяется на величину, которая учитывает величину дисперсии линейно. Фигурально выражаясь, отображением характеристики $C(\theta)$ на прямоугольные оси координат D и b^2 является прямоугольник с площадью $D\cdot b^2$. Любое незначительное изменение характеристик D и b^2 приводит к изменению площади или конфигурации прямоугольника. Таким образом, при незначительных отличиях характеристик D и b^2 следует в качестве эффективной в классе смещенных оценок выбирать оценку с минимальной характеристикой $C(\theta)$ (площадью). При равенстве характеристик $C(\theta)$ (площадей) следует выбирать в качестве эффективной в классе смещенных оценок оценку с наименьшей величиной смещения. Напомним, что построение критерия осуществлялось только для смещенных оценок. В случае несмещенных оценок такой характеристикой (критерием) служит уклонение $L(\theta) = D + b^2 = D$. Заметим, что для несмещенных оценок их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон. При формулировании критерия эффективности в классе смещенных оценок следует потребовать от смещенных оценок аналогичных качеств.

Сформулируем требования к процессу выбора эффективных смещенных оценок [24, 25]:

– предлагаемые оценки должны быть строго монотонны по всем своим параметрам;

– выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$ или близкие к таковым. Если в процессе выбора из числа предложенных оценок оказалась единственная несмещенная оценка, то она и является эффективной. Для того чтобы эта оценка оказалась эффективной в классе несмещенных оценок, необходимо доказать неравенство Рао–Крамера для этой оценки [2, 7];

– выбираются оценки, для которых выполняется неравенство $D/A>4$, т.е. оценки, для которых их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон; исключаются оценки, для которых выполняется неравенство $A = b^2 > D$, т.е. смещение превалирует над дисперсией этой оценки;

– среди оставшихся выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$. В случае единственной выбранной оценки с минимальным смещением A – эта оценка признается эффективной в классе смещенных оценок;

– в случае с равными суммарными смещениями A в качестве эффективной в классе смещенных оценок выбирается оценка с минимальной дисперсией D.

В качестве критерия эффективности в классе смещенных оценок устанавливается характеристика $C(\theta)=D\cdot b^2$ [24, 25], т.е. в основе сравнения эффективности оценок параметров надежности лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться обязательное соотношение $D > 4A$.

1.6. Построение простого критерия эффективности смещенных оценок

В данном разделе предлагается подход, который является наиболее простым при определении эффективности смещенных оценок.

Понятия балансировки и абсолютного суммарного смещения. В данном разделе под смещением b будем понимать математическое ожидание от разности между возможной реализацией некоторой оценки θ и оцениваемым параметром t, т.е. под смещением понимается случайная функция от случайного числа отказов R вида $b(R;N,\tau)$ = = $E\theta(R;N,\tau) - t$. Чтобы не усложнять изложение, в данной работе формула вида *минус* $b(R;N,\tau) = t - E\theta(R;N,\tau)$ не используется.

Под суммарным смещением B понимается суммирование смещений по всем возможным величинам параметра $t \in T$:

$$B\big(\theta(R;N,\tau)\big) = \int_{t\in T} \{E\theta(R;N,\tau) - t\}\,dt = \int_{t\in T} b\,dt\,,$$

где T – множество всех возможных величин параметра t.

Сформулируем понятие балансировки для оценки параметра t, а именно:

$$A\big(\theta(R;N,\tau)\big) = /B(\theta(R;N,\tau))/ = /\int_{t\in T} \{E\theta(R;N,\tau) - t\}\,dt\,/ = /\int_{t\in T} b\,dt\,/\,,$$

где /*/ – абсолютная величина, суммирование смещений ведется по всем возможным величинам оцениваемого параметра, которые принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$. Балансировка характеризует сбалансированность разностей реализаций оценки θ от оцениваемого параметра t в целом по всевозможным величинам, которые может принимать этот параметр t.

Обозначим через:

$K_{>0}(\theta) = \int_{\{\}>0} \{E\theta(R;N,\tau) - t\}\,dt = \int_{b(t)>0} b\,dt = B_{>0}$ – положительное суммарное смещение, где суммирование ведется по тем величинам параметра t, для которых выполняется условие $E(\theta) - t>0$;

$K_{<0}(\theta) = /\int\limits_{\{\}<0} \{E\theta(R;N,\tau) - t\} dt/ = /\int\limits_{b(t)<0} bdt/ = -B_{<0} = /B_{<0}/$ – отрицательное суммарное смещение, взятое по абсолютной величине, где суммирование ведется по тем величинам параметра *t,* для которых выполняется условие $E(\theta) - t<0;$ $W(\theta) = \int\limits_{t\in T} /E\theta(R;N,\tau) - t/dt = \int\limits_{t\in T} /b/dt$ – абсолютное суммарное смещение, где суммирование смещений, взятых по абсолютной величине, ведется по всем возможным величинам оцениваемого параметра, которые принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$.

Тогда $A = /K_{>0} - K_{<0}/ = / B_{>0} + B_{<0}/$. Заметим, что для оценки θ балансировка, равная нулю $A = 0$ (или сбалансированность оценки θ), не означает симметрию распределения вероятностей реализаций оценки $\theta(R)$.

Так как величины $K_{>0} \geq 0$ и $K_{<0} \geq 0$, то для сбалансированной оценки $A = 0$ выполняется соотношение $K_{>0} = K_{<0}$.

Абсолютное суммарное смещение можно выразить через элементы разности балансировки ($K_{>0}; K_{<0}$) следующим образом:

$$W = K_{>0} + K_{<0} = B_{>0} - B_{<0}.$$

Одновременно к правой части формулы $W = K_{>0} + K_{<0}$ прибавим и отнимем элемент $K_{<0}$, тогда получим:

$$W = K_{>0} - K_{<0} + 2K_{<0} = B + 2K_{<0},$$

где $K_{>0} - K_{<0} = B_{>0} + B_{<0} = B$ – суммарное смещение или величина балансировки, взятая из под знака абсолютной величины. Аналогично предыдущему, одновременно к правой части формулы $W = K_{>0} + K_{<0}$ прибавим и отнимем элемент $K_{>0}$, тогда получим:

$$W = K_{<0} - K_{>0} + 2K_{>0} = - B + 2K_{>0},$$

где $K_{>0} - K_{<0} = B_{>0} + B_{<0} = B$ – суммарное смещение или величина балансировки, взятая из под знака абсолютной величины. Окончательно получаем $W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$.

Заметим, что определение суммарного уклонения (аналог классического уклонения в среднеквадратичном смысле) совпадает с определением суммарного смещения, т.к.

$$\int_{t\in T} E(\theta - t)dt = \int_{t\in T} (E\theta - t)dt = \int_{t\in T} bdt = B(\theta).$$

Обозначим через *E/θ(R)–t/ = /Eθ(R)–t/ =* /b/ абсолютное уклонение, а через *G(θ)* абсолютное суммарное уклонение:

$$G(\theta) = \int_{t\in T} E\,/\,\theta - t\,/\,dt = /\int_{b(t)>0} bdt - \int_{b(t)<0} bdt/ = B_{>0} - B_{<0} = K_{>0} + K_{<0} = W(\theta).$$

То есть абсолютное суммарное уклонение *G* совпадает с абсолютным суммарным смещением *W*.

Суммарная дисперсия (аналог классической дисперсии в среднеквадратичном смысле) определяется следующим образом:

$$\int_{t\in T} E(\theta - E\theta)dt = \int_{t\in T} (E\theta - EE\theta)dt = \int_{t\in T} (E\theta - E\theta)dt = 0,$$

и поэтому неинтересна. Определим аналог абсолютной суммарной дисперсии *D(θ)* оценки *θ* как

$$D(\theta) = \int_{t\in T} E\,/\,\theta - E\theta\,/\,dt = \int_{/*/>0} (E\theta - E\theta)dt - \int_{/*/<0} (E\theta - E\theta)dt = 0.$$

Аналог абсолютной суммарной дисперсии *D(θ),* как и классическая суммарная дисперсия *D,* является характеристикой поведения оценки *θ* относительно ее математического ожидания *Eθ*, т.е. определяет точность этой оценки. Однако наиболее интересно поведение оценки *θ* относительно оцениваемого параметра *t*, поэтому дисперсия как неинформативная характеристика в данной работе не рассматривается и по этой причине. В этом случае понятие точности оценки заменило абсолютное суммарное смещение *W*.

Класс всех оценок, для которых выполнимо условие $W = K_{>0} + K_{<0}$ (именно с такими оценками следует работать испытателю), можно подразделить на подклассы, для которых выполняется условие $W = K_{>0} + K_{<0} = x$, где некоторое фиксированное произвольное вещественное число.

Пусть выделен некоторый подкласс оценок $\theta(R)$, на котором абсолютное суммарное смещение постоянно и равно некоторому вещественному числу x, т.е. $W = K_{>0} + K_{<0} = x$, тогда характеристика $K_{>0}$ этого подкласса оценок $\theta(R)$ при $K_{<0} = 0$ принимает максимальную величину $K_{>0} = x$, и наоборот. Заметим, что $K_{>0} \geq 0$ и $K_{<0} \geq 0$ по определению. Аналогичное верно и для балансировки $A = /K_{>0} - K_{<0}/$, которая в этом подклассе оценок $\theta(R)$ принимает максимальную величину $A = K_{>0} = x$ при $K_{<0} = 0$. И наоборот $A = K_{<0} = x$ при $K_{>0} = 0$. Таким образом, условия $K_{>0} = x$ при $K_{<0} = 0$ (и наоборот $K_{<0} = x$ при $K_{>0} = 0$) определяют подклассы оценок $W = K_{>0} + K_{<0} = x$, в которых величины $A(R)$ и $W(R)$ максимальны и равны $A(R) = W(R) = x$.

Сбалансированные оценки. Если в некотором классе оценок их характеристика A принимает величину, равную нулю $A = 0$, то в этом случае будем говорить, что оценка обладает полной балансировкой или сбалансирована в этом классе оценок и опускать саму величину балансировки. Рассмотрим подкласс сбалансированных оценок $A(\theta(R)) = /K_{>0} - K_{<0}/ = 0$, что эквивалентно $K_{>0} = K_{<0}$. Тогда для этого подкласса оценок $\theta(R)$ абсолютное суммарное смещение $W = K_{>0} + K_{<0} = x$ можно выразить формулой $W = 2K_{>0} = 2K_{<0} = x$. Следовательно, для подкласса сбалансированных оценок $A(\theta(R)) = /K_{>0} - K_{<0}/ = 0$ выполняется равенство $K_{>0} = K_{<0} = x/2$, которое является условием сбалансированности.

Полностью разбалансированные оценки. Оценки $\theta(R)$ называются полностью разбалансированными, если они принадлежат подклассу оценок $\theta(R)$, у которых характеристика $K_{<0}$ (или $K_{>0}$) принимает минимальную величину $K_{<0} = 0$ (или $K_{>0} = 0$) или близкую к ее минимальному количественному значению на этом подклассе оценок $\theta(R)$ $K_{<0} \approx 0$ (или $K_{>0} \approx 0$); или характеристика $K_{>0}$ (или $K_{<0}$) принимает максимальную величину или близкую к ее максимальному количественному значению на этом подклассе оценок $\theta(R)$. Для таких оценок условие полной разбалансировки эквивалентно соизмеримости балансировки и абсолютного суммарного смещения $A = W = x$ $(A \approx W = x)$. В этом случае будем говорить о полной разбалансировки оценки ($A = W = x$) или близкой к полной разбалансировке $(A \approx W = x)$.

Предпосылки к построению простого критерия эффективности смещенных оценок. Рассмотрим недостатки существующих критериев эффективности смещенных оценок. В классическом случае критерием смещенных оценок является уклонение $L(\theta)$ (в квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t, выражаемое равенством $L(\theta) = E(\theta - t)^2 = D + b^2$. Заметим, что уклонение $L(\theta)$ как характеристика эффективности при изменении дисперсии тоже изменяется на эту величину, т.е. ее изменение происходит без учета зависимости от конкретной величины смещения оценки. Вдобавок к этому заметим, что величины дисперсии и квадрата смещения не равнозначны по отношению друг к другу, т.е. отношение этих характеристик может иметь значительную величину. Например, пусть имеется группа оценок, которые по своим свойствам близки к эффективной несмещенной оценке (именно с такими оценками имеет смысл работать), т.е. $b^2 \approx 0$ и $D >> b^2$, откуда $L(\theta) \approx D$, тогда даже при значительном изменении квадрата смещения b^2 уклонение $L(\theta) \approx D$ не способно выделить эффективную смещенную оценку среди оценок с одинаковой дисперсией D.

В работах [24, 25] была попытка построить критерий эффективности смещенных оценок, у которого при выборе эффективной оценки влияние неравнозначности величин дисперсии и квадрата смещения скомпенсировано. Для этого попытались связать дисперсию и квадрат смещения так, чтобы при изменении дисперсии уклонение менялось с учетом смещения. Заметим, что смещение является первичным фактором при выборе эффективной смещенной оценки. При построении критерия с некоторой характеристикой $C(\theta)$ потребовалось, чтобы при изменении дисперсии на величину δD для небольших смещений $b \approx 0 + \delta$ учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был незначительным, и наоборот, для больших смещений $b >> 0$ учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был значительным. И для простоты критерия потребовалось, чтобы изменение характеристики $C(\theta)$ было линейным относительно характеристик D и b^2. Заметим, что для несмещенных оценок их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон. При формулировании критерия эффективности в классе смещенных оценок следует потребовать от смещенных оценок аналогичных качеств. Поэтому в качестве критерия эффективности в классе смещенных оценок устанавливается характеристика $C(\theta)=D\cdot b^2$ [24, 25], т.е. в основе сравнения эффективности смещенных оценок θ параметров надежности t лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R)) = b^2(\theta(R)) \bullet D\theta(R)$ на предложенных оценках $\theta(R)$ при условии, что должно выполняться обязательное соотношение $D > 4b^2$.

Однако в процессе исследования стало понятным, что выполнение обязательного соотношения $D > 4b^2$ не полностью отражает смысл эффективной оценки, т.к. дисперсия выражает степень разброса самой оценки относительно математического ожидания этой оценки (от ее среднего, а не от оцениваемого параметра). При принятии положительного решения об эффективности смещенной оценки важнее научиться учитывать разброс смещенной оценки от оцениваемого параметра без влияния дисперсии (и без обязательного условия выполнения соотношения $D > 4b^2$), которая для смещенных оценок может быть близкой к нулю при конечном смещении.

Формулировка простого критерия эффективности смещенных оценок. Выразим через характеристики A и W простой критерий эффективности смещенных оценок как некоторую характеристику $Q = (A+1) \bullet W$, минимизация которой на предложенных оценках определяет эффективную смещенную оценку. Компоненты построенного критерия легко вычислить через компоненты балансировки $K_{>0}$, $K_{<0}$, а именно: $Q = (/K_{>0} - K_{<0}/ + 1) \bullet (K_{>0} + K_{<0})$. Добавление единицы дает гарантию того, чтобы сбалансированная оценка не стала автоматически абсолютно эффективной, а единица не меняет результат умножения. Таким образом, для сбалансированных оценок или близких к таковым и даже для оценок, примерно равных по сбалансированности $(A+1) \approx s$, на передний план выходит сравнение абсолютных суммарных смещений $W = x$ этих оценок, что является справедливым шагом при сравнении оценок на эффективность. Заметим, что неотъемлемым условием при решении функционала $Q = (A(\theta(R))+1) \bullet W(\theta(R))$ является строгая монотонность найденных эффективных оценок $\theta(R,n,\tau)$ по всем своим параметрам R,n,τ.

Абсолютно эффективная оценка имеет суммарное смещение, равное нулю $W = 0$ (и как следствие $A = 0$), а следовательно простой критерий эффективности смещенных оценок $Q = (A+1) \bullet W = 0$.

В том случае, когда характеристика A в классе, определяемом величиной $W = x$, принимает максимальную величину $A = W = x$ при $K_{<0} = 0$ (или при $K_{>0} = 0$) – случай наихудшей оценки в этом классе, то и простой критерий эффективности смещенных оценок принимает максимальную величину, равную $Q = (A+1) \bullet W = A^2 + A = W^2 + W = (x+1)x = x^2 + x$ на этой наихудшей оценке из рассматриваемого класса.

В том случае, когда характеристика A в классе, определяемым величиной $W = x$, принимает минимальную величину $A = 0$ при $K_{<0} = x/2$ и $K_{>0} = x/2$ (сбалансированная оценка), то и простой критерий эффективности смещенных оценок принимает минимальную величину, равную $Q = (A+1) \bullet W = (0+1)x = W = x$ на этой сбалансированной оценке, которая в рассматриваемом классе является эффективной.

Из вида абстрактной формулы абсолютного суммарного смещения $W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$ можно сделать вывод, что балансировка $A(\theta) = /B/ = /K_{>0} - K_{<0}/ = /B_{>0} + B_{<0}/$ уже неявно учтена в формуле для абсолютного суммарного смещения $W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$, поэтому играет вспомогательную роль при выборе эффективных оценок. Однако она позволяет увидеть через величину баланса, насколько оценка имеет тенденцию к улучшению в своем классе оценок, а множитель $(A+1)$ в формуле $Q = (A+1) \bullet W$ не позволяет скрыть несбалансированность оценки, адекватно увеличивая величину характеристики Q критерия эффективности смещенных оценок. Понятно, что смещенная оценка должна быть сбалансирована в своем классе, прежде чем она станет ближе к эффективной. Для сбалансированной оценки всегда выполняется равенство $W = 2K_{<0} = 2K_{>0} = Q$.

Сформулированный простой критерий эффективности смещенных оценок оперирует только двумя родственными понятиями (балансировка и абсолютное суммарное смещение), основой которых является такое понятие, как смещение, не зависим от дополнительных условий и является простым с точки зрения вычислений, что дает ему неоспоримое преимущество в сравнении с другими критериями. В силу этих причин именно на простом критерии построено основное изложение данной книги.

Заметим, что сбалансированные оценки $A = 0$ являются эффективными только в подклассе, которому принадлежат, но не являются эффективными в более широком классе. Например, рассмотрим два подкласса, для которых выполняется условие $W = x > W = y$, тогда сбалансированная оценка в классе, для которого выполняется условие $W = x$, является эффективной в этом классе $Q = (A + 1)\bullet W = x$, но не является эффективной в классе, для которого выполняется условие $W = y$, т.к. $Q = (A + 1) \bullet W = y < x$.

Важно помнить, что существует множество локальных минимумов функционала $Q = (A + 1)\bullet W$ при поиске эффективной смещенной оценки на выделенных классах оценок.

Принцип сбалансированности: оценки $\theta(R)$, близкие по своей эффективности $Q \approx 0$ ($W \approx 0$) к абсолютно эффективной оценке $Q = 0$ ($W = 0$), должны обладать сбалансированностью, близкой к полной сбалансированности $A \approx 0$. Для этого нужно, чтобы выполнялось условие сбалансированности $K_{>0} \approx K_{<0} \approx x/2$ ($x \approx 0$).

Поэтому при построении оценок следует в первую очередь следить за их сбалансированностью $A = 0$. Однако это не гарантирует их эффективность $Q > 0$ ($W > 0$)!

1.7. Понятие центрируемой оценки и ее определение

На практике, как уже отмечалось выше, в качестве оценок выбирается результат, полученный методами: моментов, максимального правдоподобия и минимума расстояний [1, 2]. В соответствии с определением оценка – это статистика, используемая для оценивания параметра совокупности. Статистика – это функция от выборочных значений [24]. Поэтому, когда говорят об оценке показателя надежности, то понимают, что будет предложена некоторая функция от выборочных значений, с помощью которой имеется возможность получать количественные значения, по которым оценивается истинная величина исследуемого параметра (действительное количественное значение, воспринимаемое как истинное), например, СНДО или ВБР.

Центрируемая оценка. Введем понятие центрируемой оценки на основе биномиальных испытаний: пусть оценка вероятности отказа (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию $F_R(r; n, \tilde{v}(R, n) \approx p) =$ $= \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{v})$, где $P_n\,(k, \hat{v})$ – вероятность возникновения ровно $R = r$ отказов относительно предельных границ изменения ее величин [9, 15–23]. Это означает, что каждый из случайных односторонних интервалов $[0;\ \hat{v}]$ и $[\hat{v}; 1]$, чьи совместные границы равны количественным значениям этой оценки, с вероятностью 0,5 накрывают оцениваемый параметр p. Такие оценки будем называть центрируемыми (не путать с центральными доверительными интервалами, центральными статистиками [2]). То есть центрируемая оценка $\hat{v}$ находится из выражения:

$$F_R(r; N, \hat{v}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{v}) = 0{,}5.$$

Заметим, что центрируемые оценки $\hat{v}$ для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [9, 15–23]. Заметим также, что закон распределения статистики $\hat{v}$ определяется законом распределения случайной величины R, что позволяет строить односторонние доверительные границы относительно истинной величины параметра p, если функция распределения $F_R(r;n,p)$ является строго монотонной и непрерывной относительно параметра p [2].

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) одностороннюю доверительную границу (НДГ и

ВДГ) случайного интервала, накрываемый неизвестный параметр p с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}5$ (или уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$). С другой стороны, любую НДГ (ВДГ) случайного интервала, накрываемого неизвестный параметр p, можно трактовать как точечную оценку этого параметра p с сильным смещением вниз (вверх). Свойство этих точечных оценок – быть собственно границей доверительного интервала – проявляется совместно с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}5$. Одностороннюю НДГ (далее – $\hat{p}_{\text{н}}$) или ВДГ (далее – $\hat{p}_{\text{в}}$) интервала, накрываемого неизвестный параметр p с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, вычисляют по формулам (случай монотонного убывания) [2, 4]:

$$F_R(r; n, \hat{p}_{\text{н}}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{p}_{\text{н}}) = \gamma = 1 - \alpha = 0{,}5; \qquad (1.18)$$

$$F_R(r; n, \hat{p}_{\text{в}}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{p}_{\text{в}}) = \alpha = 0{,}5. \qquad (1.19)$$

Для того чтобы решение любого из этих уравнений существовало и было единственным, необходимо проверять строгую монотонность $F_R(r;n,p)$ относительно переменной p для различных планов испытаний [2, 4]. В случае монотонного возрастания вероятностной функции $F_R(r;n,p)$ неизвестные параметры $\hat{p}_{\text{н}}$ и $\hat{p}_{\text{в}}$ в формулах (1.18) и (1.19) меняются местами [2].

Заметим, что доверительная граница ($\alpha \leq 0{,}5$) представляет собой точечную оценку с сильным смещением относительно оцениваемого параметра. Односторонний доверительный интервал с ростом уровня значимости $\alpha \geq 0{,}5$ (или с уменьшением доверительной вероятности $\gamma < 0{,}5$) перестает считаться таковым, так как с большой вероятностью $\alpha > 0{,}5$ не накроет оцениваемый параметр.

Если полученный интервал, образованный оценками $\hat{p}_{\text{н}}$ и $\hat{p}_{\text{в}}$, свести в точку (случай $\alpha = 0{,}5$), то доверительные границы этого интервала совпадут, т.е. $\hat{p}_н$ станет равной $\hat{p}_в$. Это определит точечную оценку $\hat{v} = \hat{p}_н = \hat{p}_в$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\beta = 1 - \alpha = \alpha = 1 - \gamma = \gamma = 0{,}5$, что доказывает единственность оценки $\hat{v}$. Таким образом, центрируемая оценка $\tilde{v}(\beta{=}0{,}5)$ всегда находится внутри доверительного интервала с уровнем значимости, изменяющимся в пределах $0 < \alpha < 0{,}5$. Действительно для $0 < \alpha < 0{,}5$ в силу строгой монотонности вероятностной функции $F_R(r; n, \hat{p}_н)$ относительно параметра p для НДГ выполняется неравенство $\hat{p}_н < \tilde{v}(\beta = 0{,}5)$. Аналогично для ВДГ.

В нашем случае центрируемая оценка $\tilde{v}(\beta{=}0{,}5)$ находится из выражения $F_R(r; n, \hat{v}(R)) = \sum_{k=0}^{r} P_n\,(k, \hat{v}) = \beta = 0{,}5$, где β уже не несет в себе смысл доверительной вероятности. Заметим также, что символ β в выражении $\tilde{v}(\beta{=}0{,}5)$ не несет в себе смысл независимой переменной, а является маркером, который выделяет оценку среди множества подобных по методу построения.

Центрируемые оценки иногда называют медианными [45], но такое определение может привести к заблуждению, т.к. медиану всегда связывают с симметрией плотности распределения вероятностей [31], что в общем случае далеко не так.

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [9, 15–23] и что, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра p, т.к. $A(\hat{v}(R, n; \beta = 0{,}5)) > 0$, где A – функционал, определяемый критерием эффективности смещенных оценок. Однако это смещение можно уменьшить и, следовательно, улучшить эффективность оценок [9, 15–23]. Для этого достаточно минимизировать функционал $A(\tilde{v}(R, n))$, варьируя величиной вероятности $\beta = 0{,}5 + x$ в выражении $F_R(r;n, \tilde{v}(r,n)) = \beta = 0{,}5 + x$, где x – некоторое положительное вещественное число из интервала

$0 < x < 0{,}5$. Полученная таким образом оценка (далее – $\tilde{v}(\beta = 0{,}5 + x)$) уже не является центрируемой, но имеет меньшее смещение в сравнении с центрируемой оценкой $\tilde{v}(\beta = 0{,}5)$, а следовательно, от оценки $\tilde{v}(\beta = 0{,}5 + x)$ можно ожидать и большую эффективность.

Потребуем, чтобы функция $F_R(r;n,p)$ была монотонной с ростом p, тогда уравнение $F_R(r;n,p) = \beta = 0{,}5 + x$ имеет единственное решение $\tilde{v}(R,n)$ относительно p. Заметим еще раз, что вероятность β уже не несет в себе смысл доверительной вероятности. Вероятность β является маркирующим параметром, который выделяет оценку среди множества подобных по методу построения $\beta \geq 0{,}5$. А множество смещенных оценок $\tilde{v}(\beta = 0{,}5 + x)$, $0 < x < 0{,}5$ с маркирующим параметром β становится потенциальным носителем эффективной оценки.

Такое рассуждение подвело к новой постановке задачи по поиску эффективной оценки параметра p. Пусть критерием получения эффективной оценки параметра p для биномиального плана испытаний с фиксированным объемом $N = n$ является функционал $A(\tilde{v})$, который, не нарушая общности рассуждений в классическом случае, можно представить в виде $A(\tilde{v}) = \int\{E\tilde{v}(\beta;R,n) - p\}^2 dp$.

И пусть $F_R(r;n,p) = \beta$ – вероятностная функция соответствующая биномиальному плану испытаний, где $\beta \in [0;\ 1]$ – одно (некоторое) из множества величин, которые принимает вероятностная функция. Решая это уравнение относительно неизвестного параметра p, получаем неявно заданную функцию $\tilde{v}(\beta;R,n) = F_R^{-1}(F_R(r;n)=\beta)$, которая определяет оценку $\tilde{v}(\beta;R,n)$ параметра p или $\tilde{v}(R,n) = \tilde{v}(\beta;R,n)$.

Заметим, что в силу монотонности вероятностной функции $F_R(r;n,p)$ относительно переменной p (монотонно убывает для биномиального плана испытаний) это решение существует и оно единственно [1, 2]. Оценки параметра p, полученные таким образом, обладают всеми свойствами вероятностной меры, определяемой как вероятностная сигма-аддитивная функция, изменяющаяся от нуля до единицы [1, 2]. Все предлагаемые оценки (ВБР) в рамках проводимых испытаний, в том числе и биномиальных испытаний, должны в обязательном порядке подвергаться проверке на выполнение этих свойств, в противном случае невыполнение этих условий приведет к ошибочным результатам и в конечном итоге – к заблуждениям.

Тогда задача по поиску эффективной оценки параметра p принимает следующий вид $A(\tilde{v}(R,n)) = \int\{E\tilde{v}(R,n) - p\}^2 dp \to inf_\beta\, A(\tilde{v}(R,n))$, с условием, что искомая оценка $\tilde{v}(R,n) = F_R^{-1}(F_R(r;n)=\beta)$ параметра p должна удовлетворять свойствам вероятностной сигма-аддитивной функции, изменяющейся от нуля до единицы (случай биномиальных испытаний), т.е. оценка $\tilde{v}(R,n)$ должна быть строго монотонной по всем своим параметрам R,n.

Если сказанное рассматривать относительно СНДО, то оценка СНДО должна быть строго монотонной еще и для параметра плана испытаний τ.

Именно в такой постановке следует осуществлять начальный поиск эффективных оценок в классе смещенных оценок.

Варьируя переменной β, получают все возможные варианты $\tilde{v}(R,n)$, удовлетворяющие вероятностной функции $F_R(r;n, \tilde{v}(R)) = \beta$, а следовательно и все возможные варианты оценок параметра p для исходного биномиального плана испытаний. Неявно заданные оценки $\tilde{v}$, определяемые только величиной β: $F_R(r;n, \tilde{v}) = \beta$, сужают поиск, поэтому на множестве таких оценок и следует в первую очередь искать эффективную оценку, минимизирующую функционал $A(\tilde{v})$.

При поиске эффективных оценок параметра p (вероятность отказа) следует избегать оценок, которые определяют события как достоверные или невозможные, что противоречит предположениям о случайности событий возникновения отказов. В противном случае модель отказов приобретает вид детерминированной модели, которая требует физической интерпретации, что не затрагивается в данной работе. Аналогично и для оценок СНДО, реализации которых не могут принимать экстремальные значения (нуль и бесконечность), что будет противоречить здравому смыслу.

Заметим, что аналогичные рассуждения можно провести в рамках понятия двусторонних доверительных интервалов (на основании понятия «центральная статистика») [2]. В этом случае центрируемая оценка $\tilde{v}(\beta)$ получается из уравнений:

$$F_R(r; n, \hat{p}_{н}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\left(k, \hat{p}_{н}\right) = \gamma = 1 - \frac{\beta}{2}; \beta = 1;$$

$$F_R(r; n, \hat{p}_{В}) = \sum_{k=0}^{r} P_n\left(k, \hat{p}_{в}\right) = \frac{\beta}{2} = 0{,}5.$$

А множество оценок $\tilde{v}(\beta = 1 + x)$, $0 < x < 1$ с маркирующим параметром $\beta>1$ становится потенциальным носителем эффективной оценки.

В дальнейшем в качестве основного уравнения как один из возможных вариантов по поиску эффективной смещенной оценки будем использовать уравнение (1.19):

$$F_R(r;n, \tilde{v}) = \beta = 0{,}5 + x,\ 0 < x < 0{,}5.$$

Выводы к разделу 1

Построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(R)$ требует учета всех возможных величин, принимаемых параметрами плана испытаний и функции распределения. К таковым в первую очередь следует отнести объем испытаний N, время испытаний τ, время s за которое учитывается вероятность отказа, а для биномиального плана – параметр p

(вероятность отказа); и для экспоненциального закона распределения – параметр T_0 (СНДО). При построении критерия эффективности смещенных оценок и поиске самих эффективных смещенных оценок суммирование по всем возможным параметрам является основным инструментом.

2. ПЛАН ИСПЫТАНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ И ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

2.1. Доказательство эффективности оценки средней наработки на отказ в достаточно широком классе смещенных оценок

Будем искать эффективные оценки СНДО в классе смещенных оценок, представленных в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau) = N\tau\varphi(R)$, куда входит и традиционная оценка $\hat{T}_0 = N\tau/R$ [4, 25]. Учитывая, что с.в. R распределена в соответствии с пуассоновским з.р., то формула (1.15) после подстановки в нее $\hat{\theta}(R, N, \tau) = N\tau\varphi(R)$ и удаления лишних членов представится с учетом формул (1.12) и (1.13) в виде задачи на минимум ($\Delta = N\tau/t$):

$$A(\hat{\theta}) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\left\{E\hat{\theta} - \mathrm{t}\right\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}\Delta\varphi(\mathrm{k}) - 1\right\}^2 \partial\Delta \to inf_{\hat{\theta}} A(\hat{\theta}). \quad (2.1)$$

Поиск эффективной оценки СНДО путем минимизации функционала в соответствии с формулой (2.1) упрощается, если искать эффективную оценку в классе смещенных оценок, представленных в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$, тогда функционал (2.1) примет вид:

$$A(\hat{\theta}) = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}\Delta\left(\frac{1}{k+1} + f(k)\right) - 1\right\}^2 \partial\Delta. \quad (2.2)$$

Остается минимизировать функционал $A(\hat{\theta})$ в соответствии с формулой (2.2). В работах [9, 12] строго математически доказано, что оценка:

$$T_{01} = 2N\tau \text{ при } R = 0 \text{ и } T_{01} = \frac{N\tau}{R+1} \text{ при } R > 0 \tag{2.3}$$

доставляет минимум функционалу $A(T_{01}) = 0{,}25$ в соответствии с формулой (2.2).

Приведем доказательство этого факта в сокращенном виде. Математическое ожидание оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$ в соответствии с формулой (1.13) будет иметь следующий вид:

$$E\hat{\theta}(R, N, \tau) = t(1 - e^{-\Delta}) + te^{-\Delta} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k)\Delta^k / k! \tag{2.4}$$

Обозначим через $B = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k)\Delta^k / k!$. После подстановки выражения (2.4) в формулу (2.2) получаем:

$$A(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \textstyle\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} (B-1)^2 \partial\Delta = B_2 - 2B_1 + 1/2, \tag{2.5}$$

где $B_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(i)f(k)0,5^{i+k+3}(i+k+2)!/i!\,k!$,

$$B_1 = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)0,5^{k+2}(k+1).$$

Докажем формулу (2.5). Воспользуемся известными формулами работы [26, с. 200, ф. 860.06]:

$$(B-1)^2 = B^2 - 2B + 1 \text{ и } \textstyle\int_0^{\infty} e^{-n\Delta} \Delta^k \partial\Delta = k!/n^{k+1}.$$

Тогда интеграл в формуле (2.5) представим в виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} (B-1)^2 \partial\Delta = \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B^2 \partial\Delta - 2\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B \partial\Delta + \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \partial\Delta .$$

Заметим, что в последнем интеграле $n = 2, k = 0$, тогда

$$\textstyle\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \partial\Delta = 1/2.$$

Далее после подстановки $B = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(k)\Delta^k / k!$ в подынтегральные выражения получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B\partial\Delta = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)}{k!} \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \Delta^{k+1}\partial\Delta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(k+1)\, 0,5^{k+2} = B_1;$$

$$B^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^{i+1}}{i!} f(i) f(k) \frac{\Delta^{k+1}}{k!};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\Delta} B^2 \partial\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(i) f(k) \int_0^{\infty} e^{-2\Delta} \frac{\Delta^{k+i+2}}{k!\, i!} \partial\Delta =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f(i) f(k) \frac{0{,}5^{i+k+3}(i+k+2)!}{i!\, k!} = B_2.$$

Тем самым формула (2.5) доказана.

Найдем нижнюю границу функционала (2.5), для чего представим

$$B_2 = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) 0,5^{i+1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) 0,5^{k+2} (k+1)(k+2) \cdots (k+i+2)/i!$$

и заметим, что

$$(k+2) \cdots \frac{(k+i+2)}{i!} =$$

$$= \left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{3}+1\right) \cdots \frac{\left(\frac{k}{i+2}+1\right)}{i!} \cdot 2 \cdot 3 \cdots (i+1)(i+2) =$$

$$= \left(\frac{k}{2}+1\right)\left(\frac{k}{3}+1\right) \cdots \left(\frac{k}{i+2}+1\right)(i+1)(i+2) \geq 2(i+1).$$

С учетом того, что $B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) 0,5^{k+2}(k+1)$, получаем

$$B_2 \geq \sum_{i=0}^{\infty} f(i) 0,5^{i+1} 2(i+1) \sum_{k=0}^{\infty} f(k) 0,5^{k+2}(k+1) = \frac{2}{0{,}5} B_1 \cdot B_1 = 4{B_1}^2;$$

подставляя правую часть неравенства в формулу (2.5), получаем

$$A\left(\hat{\theta}(R, N, \tau)\right) \geq 4{B_1}^2 - 2B_1 + 1/2.$$

Беря производную от правой части по B_1 и приравнивая ее нулю, находим нижнюю границу $A\hat{\theta}(R, N, \tau) \geq 0{,}25$.

Определим составную оценку, принадлежащую рассматриваемому классу, в виде: $\hat{T}_{01} = 2N\tau$ при $R = 0$ и $\hat{T}_{01} = \frac{N\tau}{R+1}$ при $R > 0$. Из общего вида класса оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$ следует, что *f(R) = 1* при $R = 0$ и $f(R) = 0$ при $R > 0$. Легко заметить, что в этом случае B_2 = 0,25 и $B_1 = 0{,}25$. Подставляя полученные величины в формулу (2.5), получаем $A(\hat{T}_{01}) = 0{,}25$, т.е. оценка $\hat{T}_{01}$ доставляет функционалу $A(\hat{T}_{01})$ минимум, равный 0,25.

Таким образом, оценка $\hat{T}_{01}$ является эффективной в классе смещенных оценок, представленных в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$.

Этот класс смещенных оценок является достаточно широким. Например, классическая оценка СНДО $\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$ и оценка $\hat{T}_{03} = \frac{N\tau}{R+1}$ принадлежат этому классу [9, 12, 14]. Дополнительным преимуществом оценки $\hat{T}_{01}$ является возможность получения результата оценки в виде конечной величины на основании испытаний, не давших отказов.

Заметим, что для плана испытаний типа $N\text{В}\tau$ $(N = 1)$ невозможно получить несмещенную точечную оценку СНДО [1], поэтому смещенные точечные оценки – необходимый инструмент при оценивании СНДО.

2.2. Построение центрируемой оценки средней наработки на отказ. Построение эффективной смещенной оценки СНДО с использованием классической процедуры

Будем строить центрируемую оценку, заданную в неявном виде, используя приемы построения доверительных интервалов. Вероятностная функция $\text{Пу}(R \leq r; \Delta)$ убывает по Δ, и, следовательно, для построения одностороннего доверительного интервала $P(T_{0н}(\frac{1}{\Delta_в}) < t)$ или $P(T_{0в}\left(\frac{1}{\Delta_н}\right) > t)$ можно воспользоваться рекомендациями работы [2, ф. 2.14.14], а именно:

$$\text{Пу}(r; \varDelta_н) = 1 - \alpha = \gamma; \quad (2.6)$$

$$\text{Пу}(r; \varDelta_в) = \alpha = 1 - \gamma, \quad (2.7)$$

где γ – доверительная вероятность; α – уровень доверия.

Решение уравнений (2.6) и (2.7) позволяет найти доверительные границы ($\varDelta_н$ и $\varDelta_в$). Доверительное оценивание позволяет определить вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного количественного значения [4]. Вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного количественного значения вместе с доверительными границами служит уровнем доверия к результатам испытаний.

Если полученный интервал ($\varDelta_н$ и $\varDelta_в$) свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т.е. $\varDelta_н$ станет равной $\varDelta_в$. Что определит точечную оценку $\hat{\varDelta} = \varDelta_н = \varDelta_в$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$, что доказывает единственность оценки $\hat{\varDelta}$.

Воспользуемся определением функции пуассоновского распределения в соответствии с формулой (1.2) и изучим свойства оценки $\hat{\varDelta}$, получаемой из уравнений:

$$\text{Пу}(r; \Delta) = \sum_{k=0}^{r} e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!} = 0{,}5; \quad (2.8)$$

или

$$\varepsilon(\Delta) = \ln(2) + \ln\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k}{k!}\right) - \Delta. \quad (2.9)$$

Минимизируя абсолютную величину $\varepsilon(\Delta)$ формулы (2.9), с необходимой точностью получим искомую точечную оценку параметра Пуассона $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}(R)$. Имея оценку $\hat{\Delta}$, легко получить оценку СНДО $\hat{T} = N\tau/\hat{\Delta}$ или оценку ВБР $\hat{P}(\tau) = e^{(-\tau/\hat{T})} = e^{\left(-\frac{\hat{\Delta}}{N}\right)}$ одного изделия. Количественные значения $\hat{\Delta}$ приведены в приложении А. Используя изложенное, можно найти более эффективную смещенную оценку, чем оценка $\hat{T}_{01}$. Рассмотрим класс оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau) \epsilon Z$, представленных в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau) = N\tau\varphi(R)$, и более узкий класс оценок $\hat{\theta}(R, N, \tau) \epsilon Y \subset Z$, представленных в виде $\hat{\theta}(R, N, \tau) = \frac{N\tau}{R+1} + N\tau f(R)$. Достаточно в качестве представителя взять неявно заданную оценку $\hat{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{N}\tau}{\hat{\Delta}(\mathrm{R})}$ из выражения [15] и представить ее в следующем измененном виде:

$$\begin{cases} \bar{T} = \frac{1,5 * N\tau}{\hat{\Delta}(R)}, R = 0, \\ \bar{T} = \frac{N\tau}{\hat{\Delta}(R) + 0,5}, R > 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда $A\left(\bar{T}(R, N, \tau)\right) = 0,2344$, что меньше величины функционала для эффективной оценки $A(\hat{T}_{01}(R, N, \tau)) = 0,25$ [9, 12, 15]. Такое возможно потому, что оценка $\bar{T}$, заданная неявным способом, принадлежит классу оценок $\bar{T} \epsilon X$, $X \subset Z$, $X \cap Y = 0$ – пустое множество, т.е. класс X находится вне класса Y (по построению $\mathrm{X} + \mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$). Этим показано, что поиск эффективных оценок следует искать и в классе оценок, заданных неявно вне класса Y, которому принадлежат оценки $\hat{\theta}(\mathrm{R}, \mathrm{N}, \tau) = \frac{\mathrm{N}\tau}{\mathrm{R}+1} +$ $+ \mathrm{N}\tau\mathrm{f}(\mathrm{R})$. Важно заметить, что оценки выбираемого класса, предназначенного для поиска эффективных смещенных оценок, должны соблюдать строгую монотонность относительно всех своих параметров (*R*, *τ*, *n*).

Полученную оценку $\bar{T}$ можно рекомендовать в качестве эффективной оценки наравне с оценкой $\hat{T}_{01}$, которая является абсолютно эффективной в классе оценок, представленных в виде $\hat{\theta}(R,N,\tau)=\frac{N\tau}{R+1}+$ $+N\tau f(\mathrm{R})$ [9, 12, 15].

Результаты подстановки в функционалы $A(\hat{\theta})$ и $B(\hat{\theta})$ формул (1.12) – (2.2) оценок $\hat{T},\bar{T},\hat{T}_{01},\hat{T}_{02},\hat{T}_{03}$ приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Результаты подстановки в функционалы вида $A(\hat{\theta})$ и $B(\hat{\theta})$ оценок $\hat{T},\bar{T},T_{01},T_{02},T_{03}$

Вид оценки	$A(\hat{\theta}(R,N,\tau))$	$B(\hat{\theta}(R,N,\tau))$
$\hat{T}=N\tau/\hat{\Delta}$	0,370	6,47
$\bar{T}=\frac{1{,}5*N\tau}{\hat{\Delta}(R)}$, $R=0$, $\bar{T}=\frac{N\tau}{\hat{\Delta}(R)+0{,}5}$, $R>0$	0,234	9,50
$\hat{T}_{01}=2N\tau$, $R=0$, $\hat{T}_{01}=\frac{N\tau}{R+1}$, $R>0$	0,25	8,63
$\hat{T}_{02}=\frac{N\tau}{R}$, доопределена в нуле величиной $2N\tau$	1,437	12,84
$\hat{T}_{03}=N\tau/(R+1)$	0,5	4,64

Как показано в таблице 2.1, смещение оценки $\bar{T}$ больше смещения оценок $\hat{T}$, $\hat{T}_{01}$ и $\hat{T}_{03}$. Поэтому оценка $\hat{T}_{01}$, как более простая в сравнении с $\hat{T}$, продолжает играть свою роль эффективной смещенной оценки. Из таблицы 2.1 также следует, что оценка $\hat{T}_{03}$ является эффективной оценкой по уклонению в сравнении с предложенными оценками, однако ее сильная смещенность позволяет сомневаться в ее хороших свойствах. Наихудшими свойствами обладает классическая оценка $\hat{T}_{02}$. Из рассмотренных вариантов смещенных оценок однозначно выбрать эффективную (классическим методом) не удается. В этом случае следует выбирать оценки с минимальным смещением. Изложение в последующих разделах подтверждает эффективность выбранной стратегии, а именно: в случае со смещенными оценками наиболее эффективными являются оценки, обладающие минимальным смещением.

Заметим, что величину функционала $A(\hat{\theta})$ на оценках $\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$ (доопределена в нуле величиной $2N\tau$) и $\hat{T}_{03} = N\tau/(R+1)$ легко вычислить непосредственным взятием интеграла (2.1), а именно:

$$A(\hat{T}_{03}) = \int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{t}^2}\{E\hat{T}_{03} - \mathrm{t}\}^2 \partial\Delta = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=0}^\infty e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!(k+1)}\Delta - 1\right\}^2 \partial\Delta.$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^\infty \frac{\Delta^k}{k!(k+1)}\Delta = e^{-\Delta}\sum_{k=0}^\infty \frac{\Delta^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-\Delta}\sum_{k=1}^\infty \frac{\Delta^k}{\mathrm{k}!} =$ $= e^{-\Delta}(e^{\Delta} - 1) = 1 - e^{-\Delta}$, тогда выражение для функционала можно переписать в виде $A(\hat{T}_{03}) = \int_0^\infty \{1 - e^{-\Delta} - 1\}^2 \partial\Delta = \int_0^\infty e^{-2\Delta}\partial\Delta$.

Воспользуемся известной формулой работы [26, с. 200, ф. 860.06]:

$$\int_0^\infty e^{-n\Delta}\Delta^k \partial\Delta = \frac{k!}{n^{k+1}}, k > 0 .$$

И заметим, что в последнем интеграле $n = 2, k = 0$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-2\Delta}\partial\Delta = 1/2.$$

Таким образом $A(\hat{T}_{03}) = 0{,}5$, что совпадает с машинным вычислением таблицы 2.1.

Аналогично вычисляется величина функционала $A(\hat{\theta})$ на оценке $\hat{T}_{02} = \frac{N\tau}{R}$ (доопределена в нуле величиной $2N\tau$), а именно:

$$E\hat{T}_{02} = 2N\tau e^{-\Delta} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\Delta}\frac{\Delta^k N\tau}{k!k}.$$

Заметим, что $N\tau = \Delta\mathrm{T}_0$, тогда

$$E\hat{T}_{02} = 2\Delta\mathrm{T}_0 e^{-\Delta} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\Delta}\frac{\Delta^k \Delta\mathrm{T}_0}{k!k} = \Delta\mathrm{T}_0 e^{-\Delta}(2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\Delta^k}{k!k}).$$

Откуда следует, что

$$A(\hat{T}_{02}) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\{E\hat{T}_{02} - t\}^2 \partial\Delta = \int_0^\infty \left\{e^{-\Delta}\left(2\Delta + \sum_{k=1}^\infty \frac{\Delta^{k+1}}{k!k}\right) - 1\right\}^2 \partial\Delta ,$$

$$A(\hat{T}_{02}) > \int\limits_0^\infty \left\{e^{-\Delta}\left(2\Delta + \sum_{k=2}^\infty \frac{\Delta^k}{k!}\right) - 1\right\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_0^\infty \{e^{-\Delta}(2\Delta + e^{\Delta} - 1 - \Delta) - 1\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_0^\infty \{2\Delta e^{-\Delta} + 1 - e^{-\Delta} - \Delta e^{-\Delta} - 1\}^2 \partial\Delta =$$

$$= \int_0^\infty \{\Delta e^{-\Delta} - e^{-\Delta}\}^2 \partial\Delta = \int_0^\infty \Delta^2 e^{-2\Delta} \partial\Delta - 2\int_0^\infty \Delta e^{-2\Delta} \partial\Delta + \int_0^\infty e^{-2\Delta} \partial\Delta =$$

$$= 1/4 - 1/4 + 1/2 = 1/2.$$

Таким образом, оценка $\hat{T}_{02}$ проигрывает по эффективности всем предложенным оценкам (таблица 2.1), т.к. обладает наибольшим смещением $A(\hat{T}_{02}) > \frac{1}{2}$, что согласуется с машинным вычислением. Можно произвести точные выкладки, после которых можно убедиться, что суммируемое смещение $A(\hat{T}_{02}) = 1{,}437$. Но из-за громоздкости, эти построения не приводятся [8].

Для испытаний, не давших отказов, эффективные оценки $\bar{T}$ и $\hat{T}_{01}$ можно применять как для плана типа $N\text{В}\tau$, так и для плана типа $N\text{Б}\tau$ (Б – без восстановления).

2.3. Получение эффективной смещенной оценки СНДО с использованием критерия эффективности смещенных оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок СНДО однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того, предложенные в предыдущем подразделе оценки СНДО обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность при выборе классическим методом эффективной оценки легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. подраздел 1.6). Заметим, что в классе всех возможных оценок параметра эффективной оценки не существует [7]! Поэтому с целью получения эффективной смещенной оценки СНДО сузим поисковый класс оценок до линейного для параметров плана испытаний N и τ (далее – линейные оценки), а именно:

$(1/t)\bullet\ \theta(R;m) = \theta(R;m/t)$, где $m = N\tau$, $t > 0$ – некоторый параметр экспоненциального закона распределения наработки на отказ в соответствии с формулой (1.1).

Рассмотрим следующие линейные оценки СНДО:

– неявно заданная оценка $T_5 = N\tau / U(\alpha=0{,}5) = m / U(\alpha=0{,}5)$, где U – точечная оценка параметра Пуассона, полученная путем решения уравнения (2.9);

– $T_1(R = 0) = 2m$, $T_1(R > 0) = m / (R + 1)$;

– $T_2(R = 0) = 2m$, $T_2(R > 0)= m / R$;

– $T_3 = m / (R + 1)$;

– $T_4(R = 0) = 6m$, $T_4(R > 0) = m / (R + 0{,}5)$;

– $T_6(R = 0) = 1{,}5m / U$, $T_6(R > 0) = m / (U + 0{,}5)$;

– $T_7 = m / (R + 1) + me^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8];

– $T_8 = m / (R + 1) + m10^{-(R+0{,}5)} / (R + 0{,}5)$;

– $T_9 = m / (R + \beta(R))$ при $\beta = 0{,}7$;

– $T_{10}(R = 0) = 2{,}1m$, $T_{10}(R > 0) = m / (R + 1{,}2)$;

– $T_{11}(R = 0) = 2{,}2m$, $T_{11}(R > 0) = m / (R + 1 + 1 / R)$;

– $T_{\text{В}}(R = 0) = 2{,}4m + 0{,}24\tau$, $T_{\text{В}}(R > 0) = m / (R + 0{,}8 + 1{,}8 / R)$;

– $T_{\text{В2}}(R = 0) = 2{,}5m$, $T_{\text{В2}} = m / (R + 1 + 2{,}3 – 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$,

$T_{\text{В2}}(R > 5) = m / (R + 1)$.

Здесь и далее по тексту данной книги предложенные линейные оценки являются смещенными эффективными оценками в соответствующих классах. Например, оценка $T_{10} = 2{,}1m$ при $R = 0$ и $T_{10} = m / (R + 1{,}2)$ при $R > 0$ является эффективной в классе оценок $T_{10} = \alpha m$ при $R = 0$ и $T_{10} = m / (R + \beta)$ при $R > 0$.

В основе сравнения эффективности этих линейных оценок лежит функционал $C = A(\theta(m;R)) \bullet D(\theta(m;R))$ [12, 24], где $A\big(\theta(m;R)\big) = \int\limits_0^\infty \left\{E\theta(m/t;R)-1\right\}^2 d\Delta = \int\limits_0^\infty \left\{E\theta(\Delta;R)-1\right\}^2 d\Delta$ – нормированное суммируемое смещение (в квадрате), где подынтегральное выражение в правой части уже не зависит в явном виде от параметров плана испытаний, что значительно упрощает вычисления. Аналогично $D\big(\theta(m;R)\big) = \int\limits_0^\infty E\left\{\theta(\Delta;R) - E\theta(\Delta;R)\right\}^2 d\Delta$ – нормированная суммируемая дисперсия. Шаг суммирования выбирается исходя из возможности вычислительных мощностей.

В таблице 2.2 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(m;R))$, $D(\theta(m;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$ [25].

Таблица 2.2

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО
в функционалы $A(\theta(m;R))$, $D(\theta(m;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	A	D	D/A	$C=D\cdot A$
$T_{В2}(R = 0) = 2{,}5m$, $T_{В2} = m / (R + 1 + 2{,}3 – 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$, $T_{В2}(R > 5) = m / (R + 1)$	0,188	3,931	20,82	0,742
$T_{В}(R = 0) = 2{,}4m + 0{,}24\tau$, $T_{В}(R > 0) = m / (R + 0{,}8 + 1{,}8 / R)$	0,200	3,83	19,14	0,767
$T_{11}(R = 0) = 2{,}2m$, $T_{11}(R > 0) = m / (R + 1 + 1 / R)$	0,214	3,93	18,36	0,841
$T_{10}(R = 0) = 2{,}1m$, $T_{10}(R > 0) = m / (R + 1{,}2)$	0,234	3,89	16,62	0,910
$T_6(R = 0) = 1{,}5m / U$, $T_6(R > 0) = m / (U + 0{,}5)$	0,234	3,98	17,00	0,931
$T_1(R = 0) = 2m$, $T_1(R > 0) = m / (R + 1)$	0,25	4,12	16,48	1,03
$T_8 = m / (R + 1) + m10^{-(R+0{,}5)} / (R + 0{,}5)$	0,28	4,00	14,28	1,134
$T_7 = m / (R + 1) + me^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8]	0,34	4,1	12,05	1,394
$T_9 = m / (R+0{,}7)$	0,364	4,43	12,17	1,61
$T_5 = m / U$	0,37	4,51	12,18	1,66
$T_3 = m / (R + 1)$	0,500	3,72	7,44	2,30
$T_2(R = 0) = 2m$, $T_2(R > 0) = m / R$	1,437	7,94	5,52	11,40
$T_4(R = 0) = 6m$, $T_4(R > 0) = m / (R + 0{,}5)$	5,36	10,21	1,90	54,72

Из таблицы 2.2 следует, что в соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок [24] в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $T_{В2}$ с минимальной величиной характеристики $C = 0{,}742$ [25]. Заметим, что оценка $T_3 = m / (R + 1)$, обладающая наименьшей дисперсией $D = 3{,}72$ среди предложенных оценок, в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок является одной из самых худших оценок $C = 2{,}30$.

Заметим, что в разделе 2.1 [9, 12] приведено доказательство того факта, что в классе оценок $T_R = m / (R + 1) + mf(R)$ оценка $T_1 = 2m$ при $R = 0$ и $T_1 = m / (R + 1)$ при $R > 0$ доставляет минимум функционалу $A = 0{,}25$. Докажем, что оценка $T_9 = m / (R + \beta(R))$, где $\beta(R) \ne 2$, $\beta(R) \ne 1$ и

$\beta(R) \neq 0$ не принадлежит классу оценок T_R, для этого достаточно представить оценку T_9 в виде $T_9 = m(R + 2) / (R + 1)(R + \beta(R)) – m / (R + 1)(R + \beta(R))$, откуда и следует утверждение.

Только три оценки из класса T_9 принадлежат классу оценок T_R, т.е. оценки вида $T_9(\beta(R) = 2)$, $T_9(\beta(R) = 1)$ и $T_9(\beta(R) = 0)$. Докажем этот факт. Для этого класс оценок $T_9(\beta(R))$ представим в виде:

$$T_9(\beta(R)) = m / (R + \beta(R)) =$$
$$= m(R + 2) / (R + 1)(R + \beta(R)) – m / (R + 1)(R + \beta(R)).$$

После подстановки в $T_9(\beta(R))$ величину параметра $\beta(R) = 2$ получаем:

$$T_9(\beta(R) = 2) = m(R + 2) / (R + 1)(R + 2) – m / (R + 1)(R + 2) =$$
$$= m / (R + 1) – m / (R + 1)(R + 2),$$

где легко заметить, что $mf(R) = – m / (R + 1)(R + 2)$, т.е. оценка $T_9(\beta(R) = 2)$ принадлежит классу $T_R = m / (R + 1) + mf(R)$.

При $\beta(R) = 1$ оценка $T_9(\beta(R))$ принимает вид $T_9(\beta(R) = 1) = m / (R + 1)$, т.е. принадлежит классу $T_R = m / (R + 1) + mf(R)$ при $mf(R) = 0$.

При $\beta(R) = 0$ оценка $T_9(\beta(R) = 0)$ принимает вид (при $R = 0$ оценка $T_9(\beta(R=0) = 0)$ не определена) $T_2 = m / R = m / (R + 1) + m / R(R + 1)$ при $R > 0$, т.е. принадлежит классу $T_R = m / (R + 1) + mf(R)$ при $mf(R) = m / R(R + 1)$.

Но уже при $\beta(R) = 3$ оценка T_9 имеет вид:

$$T_9(\beta(R) = 3) = m(R + 2) / (R + 1)(R + 3) – m / (R + 1)(R + 3) =$$
$$= (m / (R + 1))\bullet((R + 2)/(R + 3)) – 1/(R + 3),$$

т.е. принимая во внимание, что $(R + 2) /(R + 3) > 1$, то можно сделать вывод, что оценка $T_9(\beta(R) = 3)$ не принадлежит классу оценок $T_R = m / (R + 1) + mf(R)$.

Аналогично рассуждая при $\beta(R) > 3$, приходим к выводу, что оценки вида $T_9(\beta(R) > 3)$ не принадлежат классу оценок $T_R = m / (R + 1) + mf(R)$.

Подобные рассуждения с тем же конечным результатом можно провести и для оценок $T_9(1<\beta(R)<2)$ и $T_9(0<\beta(R)<1)$.

Поэтому появление величин функционала $A(T_6) = 0{,}234 < 0{,}25$ на оценке T_6 и далее до $A(T_{В2}) = 0{,}188 < 0{,}25$ на оценке $T_{В2}$ вполне оправдано [24].

2.4. Получение эффективной смещенной оценки вероятности безотказной работы классическим способом

Если оценка параметра з.р. (или функции от параметра) дополнительно зависит от некоторого параметра (далее – s), то вид преобразованных функционалов $A_{10}\big(\hat{\theta}(R,N,\tau)\big)$ и $B_{10}\big(\hat{\theta}(R,N,\tau)\big)$ в соответствии с формулами (1.15) и (1.16) можно представить в виде:

$$A_{10}\left(\hat{\theta}(R,N,\tau,s)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_s \to 0} \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \lim_{\delta_\tau \to 0} \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} A\big(\hat{\theta}(R,N,\tau_i,s_j)\big); \qquad (2.11)$$

$$B_{10}\left(\hat{\theta}(R,N,\tau,s)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{N=1}^{10} \lim_{\delta_s \to 0} \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \lim_{\delta_\tau \to 0} \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} B\big(\hat{\theta}(R,N,\tau_i,s_j)\big), \qquad (2.12)$$

где A_{10} – смещение; B_{10} – уклонение; δ_s – шаг суммирования по параметру $s \in [\, s_1; s_2 \,], J = (s_2 - s_1)/\delta_s$ – число шагов суммирования.

Рассмотрим оценки ВБР за временной отрезок s вида

$$\hat{P}(R,N,\tau,s) = e^{-s/\hat{T}(R,N,\tau)},$$

где $\hat{T}(R, N, \tau)$ – некоторая оценка СНДО. Время ВБР s не превышает пределов от $s_1 = 1000$ ч до $s_2 = 100000$ ч, в зависимости от сложности и надежности испытуемого объекта.

К ранее введенным для сравнения оценкам СНДО (таблица 2.1) добавим следующие оценки:

$\hat{T}_{04} = 6N\tau$ при $R = 0$ и $\hat{T}_{04} = N\tau/(R + 0{,}5)$ при $R > 0$;

$\hat{T}_U = 4N\tau/U(R)$ при $R = 0$ и $\hat{T}_U = N\tau/U(R)$ при $R > 0$.

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР (как функция от СНДО) в функционалы $A_{10}\left(\hat{P}(R, N, \tau, s)\right)$ и $B_{10}\left(\hat{P}(R, N, \tau, s)\right)$ в соответствии с формулами (2.11) и (2.12) приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Результаты подстановки в функционалы $A_{10}(\hat{P})$ и $B_{10}(\hat{P})$ оценок ВБР в соответствии с формулами (2.11) и (2.12)

Вид оценки ВБР	$A_{10}\left(\hat{P}(R, N, \tau, s)\right)$	$B_{10}\left(\hat{P}(R, N, \tau, s)\right)$
$P(s, T_5)$, $T_5 = m/U$	0,0410	0,0876
$P(s, T_U)$, $T_U = 4m/U(\mathrm{R})$ при $R = 0$, $T_U = m/U(\mathrm{R})$ при $R > 0$	0,0157	0,1486
$P(s, T_1)$, $T_1 = 2m$ при $R = 0$, $T_1 = m/(R + 1)$ при $R > 0$	0,0346	0,0987
$P(s, T_2)$, $T_2 = 2m$ при $R = 0$, $T_2 = m/R$ при $R > 0$	0,0300	0,1066
$P(s, T_3)$, $T_3 = m/(R + 1)$	0,0641	0,0740
$P(s, T_4)$, $T_4 = 6m$ при $R = 0$, $T_4 = m/(\mathrm{R}+0{,}5)$ при $R > 0$	0,0156	0,1501

Из таблицы 2.3 следует, что оценки $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$ и $\hat{P}(s, \hat{T}_{04})$ являются эффективными смещенными оценками из числа предложенных. Из таблицы 2.2 также следует, что смещенная и неявно заданная оценка $\hat{P}(s, T_5)$ обладает минимальным смещением. Однако, несмотря на то, что оценка $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$ уступает ей в этом показателе, именно оценку $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$

следует считать эффективной по смещению. С другой стороны, оценка $\hat{P}(s, \hat{T}_{04})$ лишь незначительно уступает оценке $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$ и как более простая в сравнении с $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$ может также считаться эффективной оценкой. Как и в случае с оценкой СНДО (см. раздел 2.2), из рассмотренных вариантов смещенных оценок ВБР однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается.

При вычислениях функционалов $A_{10}\left(\hat{P}(R, N, \tau, s)\right)$ и $B_{10}\left(\hat{P}(R, N, \tau, s)\right)$ шаг суммирования по времени испытаний $\tau \epsilon [1\text{E} + 3; 1\text{E} + 5]$ и величине времени ВБР $s \epsilon [1\text{E} + 3; 1\text{E} + 5]$ производился по степеням с шагом, равным единице, а именно: $1\text{E} + 03$, $1\text{E} + 04, 1\text{E} + 05$.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

В качестве эффективной оценки ВБР всегда следует использовать традиционную несмещенную оценку [4], а именно:

$$\hat{P}(R, N, \tau, s) = \left(1 - \frac{s}{N\tau}\right)^R \text{ при } \frac{s}{N\tau} < 1,$$

кроме испытаний, в процессе которых отказы обнаружены не были. В этом случае следует использовать смещенную, эффективную и неявно заданную оценку ВБР $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$. Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$ можно применять как для плана типа $N\text{В}\tau$, так и для плана типа $N\text{Б}\tau$. Однако оценка ВБР $\hat{P}(s, \hat{T}_{04})$ является более привлекательной, так как является простой и совсем незначительно проигрывает оценке $\hat{P}(s, \hat{T}_U)$ по эффективности.

2.5. Получение эффективной смещенной оценки вероятности безотказной работы с использованием критерия эффективности смещенных оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок ВБР однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того предложенные в предыдущем подразделе оценки ВБР обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность при выборе классическим методом эффективной оценки легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. раздел 1.6).

Введем обозначение $m=n\tau$. Рассмотрим оценки ВБР за временной отрезок g вида $\theta(m,g;R)=exp\{-g/T_i\}$, где T_i – некоторая оценка СНДО.

В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [24], где $A(\theta)=\frac{1}{x}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\left\{E\theta\left(R;m,g\right)-\exp\left(-g/t\right)\right\}^2 d\Delta =$

$=\frac{1}{x}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty \frac{\Delta^2}{m^2}\left\{E\theta\left(R;m,g\right)-\exp\left(-g\Delta/m\right)\right\}^2 d\Delta$ – усредненное нормированное смещение (в квадрате). Аналогично $D(\theta)=$

$=\frac{1}{x}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty \frac{\Delta^2}{m^2}E\left\{\theta\left(R;m,g\right)-E\theta\left(R;m,g\right)\right\}^2 d\Delta$ – усредненная нормированная дисперсия.

Усреднение x по суммам производится исходя из соизмеримости результатов с единицей.

В таблице 2.4 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР $\theta(m,g;R)=exp\{-g/T_i\}$ в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$ (см. разделы 2.3 и 2.4).

Таблица 2.4

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид оценки ВБР	A	D	D/A	$C=D\cdot A\cdot 10^3$
$P(g, T_5)$, $T_5 = m/U$	0,0410	0,0876	2,13	35,91
$P(g, T_U)$,T_U= $4m/U$ (R) при $R = 0$, $T_U = m/U$ (R) при $R > 0$	0,0157	0,1486	9,46	2,333
$P(g, T_1)$, $T_1 = 2m$ при $R = 0$, $T_1 = m / (R + 1)$ при $R > 0$	0,0346	0,0987	2,85	3,415
$P(g, T_2)$, $T_2 = 2m$ при $R = 0$, $T_2 = m / R$ при $R > 0$	0,0300	0,1066	3,55	3,198
$P(g, T_3)$, $T_3 = m / (R + 1)$	0,0641	0,0740	1,15	47,43
$P(g, T_4)$, $T_4 = 6m$ при $R = 0$, $T_4 = m/(R+0,5)$ при $R > 0$	0,0156	0,1501	9,62	2,341

Из таблицы 2.4 следует, что оценки $P(g, T_4) = e^{-g/T_4}$ и $P(g, T_U) = e^{-g/T_U}$ имеют примерно одинаковые смещения. Их величины характеристики A отличаются на (0,0157 – 0,0156)•100/0,0157 = 0,63%. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку e^{-g/T_U} с минимальной величиной характеристики C = 2,333.

2.6. Улучшение эффективной смещенной оценки вероятности безотказной работы с использованием критерия эффективности смещенных оценок

Представленные в разделе 2.5 эффективные смещенные оценки все же обладают достаточно большим смещением, которое можно значительно уменьшить. После улучшения эти оценки приобретут некоторую специализацию при их использовании. С этой целью рассмотрим следующую составную оценку [25]:

$$P_v(g;T_v(R)) = e^{-g/T_v(R>0)},$$

где $T_v(R=0) = k\cdot m$, $T_v(R>0) = m / (R + 0,5)$, $0 < k < \infty$.

В таблице 2.5 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$. При вычислениях функционалов $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ диапазон суммирования по времени и объему испытаний был несколько изменен в сравнении с предыдущим материалом, поэтому величины результатов изменились, что не отразилось на сути вещей.

Таблица 2.5

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид оценки ВБР	A	D	D/A	$C=D\cdot A\cdot 1000$
Оценки, предложенные для плана испытаний типа $NB\tau$ в работах [24, 25]				
$P_U(T_U) = e^{-g/T_U}$, где $T_U(R=0) = 4m / U(R)$, $T_U(R>0) = m / U(R)$	0,01251	0,15496	12,38	1,93
$P_4(T_4) = e^{-g/T_4}$, где $T_4(R=0) = 6m$, $T_4(R>0) = m / (R+0,5)$	0,01200	0,15665	13,05	1,87
$P_v(g;T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}$, где $T_v(R=0) = 200\cdot m$, $T_v(R>0) = m / (R + 0,5)$, для $\tau = g$	0,00232	0,19017	81,9	0,44

Из таблицы 2.5 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $P_v(T_v)$ с минимальной величиной характеристики $C = 0{,}44$.

Оценку P_v возможно использовать при прогнозировании ВБР или по результатам государственных испытаний, которые, как правило, проводятся за время τ меньшее, чем оценочное время g. Так же оценку P_v используют, когда необходимо получить консервативную оценку параметра показателя надежности. Оценка ВБР P_v сравнима с оценками ВБР, полученными для биномиального плана, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и отражено в части 3 данной книги.

2.7. Получение эффективных смещенных оценок показателей надежности для плана *NBτ* с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок

Вид балансировки и абсолютного суммарного смещения на оценках СНДО для плана испытаний типа *NBτ*. Заметим, что в классе всех возможных оценок параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения (впрочем, как и для любого закона распределения) эффективной оценки не существует [7]! Поэтому с целью получения эффективной смещенной оценки СНДО сузим поисковый класс оценок до линейного для параметров плана испытаний N и τ (далее – линейные оценки), а именно: $(1/t)\bullet\ \theta(R;m) = \theta(R;m/t)$, *где* $m = N\tau$, $t > 0$ – параметр экспоненциального закона распределения наработки на отказ согласно формуле (1.1).

В соответствии с разделом 1.6 балансировка на линейных оценках для плана *NBτ* имеет вид:

$$A\big(\theta(m,R)\big)=/\int_0^\infty \tfrac{1}{t}\{E\theta(m,R)-t\}\,d\Delta/=/\int_0^\infty \{E\theta(m/t,R)-1\}\,d\Delta/=/\int_0^\infty \{E\theta(\Delta,R)-1\}\,d\Delta/,$$

где $\Delta = N\tau/t = m/t$ – параметр пуассоновского потока отказов. Нормировка $1/t$ потребовалась с целью ограничить величину интеграла ($t = m / \Delta$), что в конечном итоге упростило выражение для балансировки $A(\theta)$ на линейных оценках до одного суммирования по параметру Δ, т.е. суммирование (с усреднением) по объединенному параметру *m* плана испытаний не потребовалось. Аналогично, абсолютное суммарное смещение на линейных оценках представлено в виде:

$$W\big(\theta(m,R)\big)=\int_0^\infty \tfrac{1}{t}/\,E\theta(m,R)-t\,/\,d\Delta=\int_0^\infty /E\theta(\Delta,R)-1/\,d\Delta\,.$$

Построение сбалансированной оценки параметра *t* для плана испытаний *NBτ*. Найдем сбалансированную оценку параметра *t* для плана испытаний *NBτ*. Для этого рассмотрим класс линейных оценок, представленных в виде $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$, тогда балансировка $A(\theta)$ для плана испытаний NBτ после подстановки оценок класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид:

$$A(\theta)=/\int_0^\infty \tfrac{1}{t}\{E\theta-t\}\,d\Delta/=/\int_0^\infty (e^{-\Delta}\sum_{r=0}^\infty \frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!}+e^{-\Delta}\sum_{r=0}^\infty f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!}-1)\partial\Delta/\,.$$

Аналогично и для абсолютного смещения, а именно:

$$W(\theta)=\int_0^\infty \tfrac{1}{t}/\,E\theta-t\,/\,d\Delta=\int_0^\infty /e^{-\Delta}\sum_{r=0}^\infty \frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!}+e^{-\Delta}\sum_{r=0}^\infty f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!}-1/\,\partial\Delta\,.$$

Заметим, что первая часть суммы под интегралом для $A(\theta)$ или $W(\theta)$ равна $e^{-\Delta}\sum_{r=0}^\infty \frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!}=e^{-\Delta}(e^{\Delta}-1)=1-e^{-\Delta}$.

Рассмотрим различные варианты *f(R)* и воспользуемся известной формулой $\int\limits_0^{\infty} e^{-n\Delta}\Delta^k \partial\Delta = k!/n^{k+1}$ для расчета величины функционала *A(θ)* на оценках, соответствующих выбранному варианту *f(R)*.

Для того чтобы *A(θ)* равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{r=0}^{\infty} f(r)\dfrac{\Delta^{r+1}}{r!} = 1$. Необходимость и достаточность этого условия доказывается непосредственно подстановкой в функционал *A(θ)* вместо указанной суммы единицы. Действительно, в этом предположении функционал *A(θ)* приобретает величину, равную нулю, а именно:

$$A(\theta) = /\int\limits_0^{\infty}(e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!} + e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!} - 1)\partial\Delta / = /\int\limits_0^{\infty}(1 - e^{-\Delta} + e^{-\Delta} - 1)\partial\Delta / = 0.$$

Сузим множество решений уравнения $\sum\limits_{r=0}^{\infty} f(r)\dfrac{\Delta^{r+1}}{r!} = 1$ относительно *f(R)*. Пусть *f(r≥2) = 0*, тогда $\sum\limits_{r=0}^{\infty} f(r)\dfrac{\Delta^{r+1}}{r!} = f(r=0)\Delta + f(r=1)\Delta^2$. С целью упрощения вида полученного выражения переобозначим *f(R=0) = a*, *f(R=1) = b*. Тогда из *A(θ) = 0* следует $a + 2b = 1$. Действительно,

$$A(\theta) = /\int\limits_0^{\infty}(e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!} + e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!} - 1)\partial\Delta / = /\int\limits_0^{\infty}(1 - e^{-\Delta} + e^{-\Delta}(a\Delta + b\Delta^2) - 1)\partial\Delta / = 0,$$

тогда $A(\theta) = /\int\limits_0^{\infty}(-e^{-\Delta} + a\Delta e^{-\Delta} + b\Delta^2 e^{-\Delta})\partial\Delta / = /-1 + a + 2b/ = 0$. Откуда следует равенство $a + 2b = 1$. Решение этого уравнения относительно переменных a и b содержит различные их варианты, а именно ($a = 1 - 2b$):

– пусть $a = 0$, тогда $b = 0{,}5$, что эквивалентно *f(R=0) = 0*, *f(R>1) = 0* и *f(R=1) = 0,5*. Тогда искомая оценка T_S класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид:

$T_S = N\tau + 0 \bullet N\tau = N\tau$ при $R = 0$,

$T_S = 0{,}5N\tau + 0{,}5N\tau = N\tau$ при $R = 1$,

$T_S = N\tau/(R+1)$ при $R > 1$;

– пусть $a = 1$, тогда $b = 0$, что эквивалентно $f(R=0) = 1$, $f(R\geq 1) = 0$. Тогда искомая оценка T_1 класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид:

$T_1 = N\tau + N\tau = 2N\tau$ при $R = 0$,

$T_1 = N\tau/(R+1)$ при $R > 0$;

– пусть $a = 1,2$, тогда $b = -0,1$, что эквивалентно $f(R=0) = 1,2$, $f(R=1) = -0,1$, $f(R>1) = 0$. Тогда искомая оценка T_A класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид:

$T_A = N\tau + 1,2N\tau = 2,2N\tau$ при $R = 0$,

$T_A = 0,5N\tau - 0,1N\tau = 0,4N\tau$ при $R = 1$,

$T_A = N\tau/(R+1)$ при $R > 1$;

– пусть $a = 1,3$, тогда $b = -0,15$, что эквивалентно $f(R=0) = 1,3$, $f(R=1) = 0,15$, $f(R>1) = 0$. Тогда искомая оценка T_B класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид:

$T_B = N\tau + 1,3N\tau = 2,3N\tau$ при $R = 0$,

$T_B = 0,5N\tau - 0,15N\tau = 0,35N\tau$ при $R = 1$,

$T_B = N\tau/(R+1)$ при $R > 1$.

Заметим, что оценка T_S нарушает принцип строгой монотонности и поэтому в дальнейшем рассматриваться не будет.

Задача нахождения величины функционала W решается прямым взятием интеграла, образующим функционал W. Для этого следует рассмотреть различные варианты $f(R)$.

При $f(r\geq 0) = 0$ искомая оценка имеет вид $T_3 = N\tau/(R+1)$, тогда величина балансировки равна $A(T_3) = /\int_0^\infty (1 - e^{-\Delta} - 1)\partial\Delta / = 1$. Величина абсолютного суммарного смещения для оценки $T_3 = N\tau/(R+1)$ вычисляется аналогично $W\left(T_3\right)=\int_0^\infty /1-e^{-\Delta}-1/\,\partial\Delta=\int_0^\infty e^{-\Delta}\partial\Delta=1$. В соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок величина эффективности оценки $T_3 = N\tau/(R+1)$ вычисляется по формуле $Q = (A+1) \bullet W$ и равна двум ($Q = 2$).

Изложение этой задачи возможно иным способом. В соответствии с разделом 1.6 $A\left(T_3\right)=/\int_0^\infty(1-e^{-\Delta}-1)\partial\Delta/=/-\int_0^\infty e^{-\Delta}\partial\Delta/=K_{<0}=1$, а с другой стороны, $A(T_3) = /K_{>0} - K_{<0}/$, то $K_{>0} = 0$, т.е. оценка T_3 является полностью разбалансированной. Поэтому в соответствии с разделом 1.6 $W = A = = K_{<0} = 1$ и $Q = A^2 + A = 2$.

При $f(R=0)=1$, $f(R>0)=0$ искомая оценка имеет вид: $T_1 = N\tau + N\tau = = 2N\tau$ при $R = 0$ и $T_1 = N\tau/(R+1)$ при $R > 0$. Заметим, что правая (вторая) часть суммы под интегралом, образующим функционал $A(T_1)$, равна $e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!}=e^{-\Delta}\Delta$. Тогда величина балансировки равна:

$$A\left(T_1\right)=/\int_0^\infty(1-e^{-\Delta}+\Delta e^{-\Delta}-1)\partial\Delta/=/\int_0^\infty -e^{-\Delta}\partial\Delta+\int_0^\infty e^{-\Delta}\Delta\partial\Delta/=/-1+1/=0.$$

Следовательно оценка $T_1 = 2N\tau$ при $R = 0$ и $T_1 = N\tau/(R+1)$ при $R > 0$ обладает нулевой балансировкой $A(T_1) = 0$ (сбалансированная оценка). Заметим, что нулевая балансировка $A(T_1) = 0$ для сбалансированной оценки T_1 не означает симметричность ее распределения. Напротив, симметричность распределения оценки означает ее сбалансированность, что не гарантирует ее эффективность. Попробуем вычислить величину абсолютного суммарного смещения для полученной оценки T_1:

$$W\left(T_1\right)=\int_0^\infty /1-e^{-\Delta}+\Delta e^{-\Delta}-1/\,\partial\Delta/=\int_0^\infty /e^{-\Delta}(\Delta-1)/\,\partial\Delta=\int_0^1 e^{-\Delta}(1-\Delta)\partial\Delta+\int_1^\infty e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta.$$

Или иначе $W\left(T_1\right)=K_{<0}+K_{>0}=-\int\limits_0^1 e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta+\int\limits_1^\infty e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta$.

Далее одновременно к правой части функционала *W(T₁)* прибавим и отнимем выражение $\int\limits_0^1 e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta=-K_{<0}$. Тогда после простых преобразований, с учетом, что полученная оценка является сбалансированной, т.е. $A\left(T_1\right)=/\int\limits_0^\infty e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta/=0$, получим:

$$W\left(T_1\right)=2K_{<0}+B=2K_{<0}+\int\limits_0^\infty e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta=2\int\limits_0^1 e^{-\Delta}(1-\Delta)\partial\Delta+0=2\int\limits_0^1 e^{-\Delta}\partial\Delta-2\int\limits_0^1 e^{-\Delta}\Delta\partial\Delta.$$

Первый интеграл равен $2\int\limits_0^1 e^{-\Delta}\partial\Delta=2(-e^{-1}+e^{-0})=2-\frac{2}{e}=1{,}264241$. Разложим в ряд Тейлора функцию $e^{-\Delta}=1-\Delta+\frac{\Delta^2}{2!}-\frac{\Delta^3}{3!}+\frac{\Delta^4}{4!}-\frac{\Delta^5}{5!}+...+\frac{\Delta^m}{m!}+...$.

Тогда второй интеграл выразится следующей формулой:

$$2\int\limits_0^1 e^{-\Delta}\Delta\partial\Delta=2(\frac{\Delta^2}{2}-\frac{\Delta^3}{3*1!}+\frac{\Delta^4}{4*2!}-\frac{\Delta^5}{5*3!}+\frac{\Delta^6}{6*4!}-\frac{\Delta^7}{7*5!}+...)\approx 0{,}528175,$$

где $\Delta = 1$.

Подставляя полученные результаты в последнее выражение для функционала $W(T_1)$, получим $W\left(T_1\right)=2K_{<0}=1{,}264241-0{,}528175=0{,}736067$.

Рассматривая полученную в разделе 1.6 формулу для функционала $W = 2K_{<0} + B$, приходим к выводу об их идентичности для сбалансированных оценок $B = 0$.

Можно сделать вывод, что полученная сбалансированная оценка $T_1 = 2N\tau$ при $R = 0$ и $T_1 = N\tau/(R+1)$ при $R > 0$ является эффективной в классе смещенных оценок, обладающих абсолютным суммарным смещением с величиной, равной $W(T_1) = 0{,}736067$. В соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок величина эффективности оценки T_1 вычисляется по формуле $Q = (A+1) \bullet W$ и равна $Q = 0,736$. Решение этой задачи возможно иным способом.

В соответствии с разделом 1.6

$$A(T_3) = /\int_0^{\infty} e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta / = /K_{>0} - K_{<0}/ = \int_1^{\infty} e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta - /\int_0^{1} e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta / .$$

$K_{>0}(T_3) = \int_1^{\infty} e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta = 0,368$, $K_{<0} = /\int_0^{1} e^{-\Delta}(\Delta-1)\partial\Delta / = 0,368$. Тогда $A = 0$, т.е. оценка T_3 является сбалансированной. Поэтому в соответствии с разделом 1.6 $W = K_{<0} + K_{<0} = 0,368 + 0,368 = 0,736$ и $Q = W = 0,736$.

При $f(R=0)=1,3$, $f(R=1)= -0,15$, $f(R>1)= 0$ искомая оценка имеет вид: $T_B = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R) = 2,3N\tau$ при $R = 0$, $T_B = 0,5N\tau - 0,15N\tau = 0,35N\tau$ при $R = 1$ и $T_B = N\tau/(R+1)$ при $R>1$. Правая часть суммы под интегралом для $A(T_B)$ равна $e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!} = 1,3e^{-\Delta}\Delta - 0,15e^{-\Delta}\Delta^2$. Тогда величина функционала $A(T_B)$ равна:

$$A(T_B) = /\int_0^{\infty}(1-e^{-\Delta}-1+1,3\Delta e^{-\Delta}-0,15\Delta^2 e^{-\Delta})\partial\Delta/ = /-1+1,3-2\bullet 0,15/ = 0 .$$

Абсолютное суммарное смещение для оценки T_B имеет вид:

$$W(T_B) = \int_0^{\infty} /1-e^{-\Delta}-1+1,3\Delta e^{-\Delta}-0,15\Delta^2 e^{-\Delta}/\partial\Delta = \int_0^{\infty} /e^{-\Delta}(-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1)/\partial\Delta .$$

Уравнение $-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1=0$ имеет два положительных решения, равных 0,853231 и 7,813. Тогда функционал $W(T_B)$ можно представить в следующем виде:

$$W(T_B) = \int_0^{\infty} e^{-\Delta}/-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1/\partial\Delta =$$

$$= \int_0^{0,853} e^{-\Delta}(0,15\Delta^2-1,3\Delta+1)\partial\Delta + \int_{0,853}^{7,813} e^{-\Delta}(-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1)\partial\Delta + \int_{7,813}^{\infty} e^{-\Delta}(0,15\Delta^2-1,3\Delta+1)\partial\Delta .$$

Далее одновременно к правой части равенства прибавим и отнимем выражение $K_{>0}(T_B)=\int\limits_{0,853}^{7,813} e^{-\Delta}(-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1)\partial\Delta>0$, что представляет из себя положительную часть балансировки *A(T_B)*. После подстановки получаем сформированный на отрезке [0; ∞] интеграл, который представляет ничто иное, как

$$\int\limits_0^\infty e^{-\Delta}(-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1)\partial\Delta=0,15*2-1,3+1=-A(T_B)=B(T_B)=0.$$

Остается вычислить $K_{>0}=\int\limits_{0,853}^{7,813} e^{-\Delta}(-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1)\partial\Delta=0,318$. Расчеты проводились в системе Mathcad. В итоге получаем формулу $W(T_B)=2K_{>0}$, что соответствует ранее выведенной формуле:

$W(T_B) = 2K_{>0} - B = 0,318 \cdot 2 - 0 = 0,636$ (см. раздел 1.6).

В соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок величина эффективности оценки $T_B = 2,3N\tau$ при $R = 0$, $T_B = 0,35N\tau$ при $R = 1$ и $T_B = N\tau/(R+1)$ при $R>1$ вычисляется по формуле $Q = (A+1) \cdot W$ и равна $Q = (0+1) \cdot 0,636 = 0,636$.

Решение этой задачи возможно иным способом. В соответствии с разделом 1.6 $A(T_B)=/K_{>0}-K_{<0}/=/\int\limits_0^\infty e^{-\Delta}(1,3\Delta-1-0,15\Delta^2)\partial\Delta/$. Остается выделить положительную и отрицательную части балансировки.

$$K_{>0}=\int\limits_{0,853}^{7,813} e^{-\Delta}(-0,15\Delta^2+1,3\Delta-1)\partial\Delta=0,318;$$

$$K_{<0}=\int\limits_{0}^{0,853} e^{-\Delta}(0,15\Delta^2-1,3\Delta+1)\partial\Delta+\int\limits_{7,813}^{\infty} e^{-\Delta}(0,15\Delta^2-1,3\Delta+1)\partial\Delta=0,318.$$

Следовательно $A = 0$, т.е. оценка T_B является сбалансированной. Поэтому в соответствии с разделом 1.6

$W = K_{<0} + K_{<0} = 0,318 + 0,318 = 0,636$ и $Q = W = 0,636$. Выбор, каким способом решать задачу, остается за испытателем.

При $f(R=0)=1,2$, $f(R=1)= – 0,1$, $f(R>1)=0$ искомая оценка имеет вид $T_A = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$:

$T_A = N\tau + 1,2N\tau = 2,2N\tau$ при $R = 0;$

$T_A = 0,5N\tau – 0,1N\tau = 0,4N\tau$ при $R = 1;$

$T_A = N\tau/(R+1)$ при $R > 1.$

Правая часть суммы под интегралом для функционала $A(T_A)$ равна $e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!} = 1,2e^{-\Delta}\Delta - 0,1e^{-\Delta}\Delta^2$. Тогда величина функционала $A(T_A)$ равна

$$A(T_A) = /\int_0^{\infty}(1 - e^{-\Delta} - 1 + 1,2\Delta e^{-\Delta} - 0,1\Delta^2 e^{-\Delta})\partial\Delta/ =$$

$$= / -0,1\int_0^{\infty} e^{-\Delta}\Delta^2\partial\Delta + 1,2\int_0^{\infty} e^{-\Delta}\Delta\partial\Delta - \int_0^{\infty} e^{-\Delta}\partial\Delta / = / -0,1*2 + 1,2 - 1/ = 0 .$$

Что свидетельствует о сбалансированности оценки T_A , т.е. суммарное смещение тоже вырождается в нуль $A(T_A) = B(T_A) = 0$. Абсолютное суммарное смещение для оценки T_A имеет вид:

$$W(T_A) = \int_0^{\infty} /1 - e^{-\Delta} - 1 + 1,2\Delta e^{-\Delta} - 0,1\Delta^2 e^{-\Delta} / \partial\Delta = \int_0^{\infty} /e^{-\Delta}(-0,1\Delta^2 + 1,2\Delta - 1) / \partial\Delta .$$

Уравнение $-0,1\Delta^2 + 1,2\Delta - 1 = 0$ имеет два положительных решения с величинами Δ = 0,90098 и Δ = 11,09902. Тогда правую часть равенства функционала $W(\theta)$ можно представить в следующем виде:

$$W(T_A) = \int_0^{\infty} /e^{-\Delta}(-0,1\Delta^2 + 1,2\Delta - 1) / \partial\Delta =$$

$$= \int_0^{0,90098} e^{-\Delta}(1 + 0,1\Delta^2 - 1,2\Delta)\partial\Delta + \int_{0,90098}^{11,09902} e^{-\Delta}(-0,1\Delta^2 + 1,2\Delta - 1)\partial\Delta + \int_{11,09902}^{\infty} e^{-\Delta}(1 + 0,1\Delta^2 - 1,2\Delta)\partial\Delta.$$

Далее одновременно к правой части функционала $W(T_A)$ прибавим и отнимем его положительную часть $K_{<0} = \int_{0,90098}^{11,09902} e^{-\Delta}(0,1\Delta^2 - 1,2\Delta + 1)\partial\Delta$, после подстановки получаем сформированный на отрезке [0; ∞] составной интеграл, который представляет ничто иное, как

$$\int_0^{\infty} e^{-\Delta}(1+0,1\Delta^2-1,2\Delta)\partial\Delta = A(T_A) = B(T_A) = 0.$$

Положительная часть функционала *A(T*$_A$*)* позволяет представить формулу для функционала *W(T*$_A$*)* в виде $W = 2K_{>0} - B$. Тогда после простых преобразований получим:

$$W(T_A) = \int_0^{\infty} / e^{-\Delta}(-0,1\Delta^2+1,2\Delta-1) / \partial\Delta = 2K_{>0} - B = 2\int_{0,90098}^{11,09902} e^{-\Delta}(-0,1\Delta^2+1,2\Delta-1)\partial\Delta - 0 \cdot$$

Остается вычислить интеграл $\int_{0,90098}^{11,09902} e^{-\Delta}(-0,1\Delta^2+1,2\Delta-1)\partial\Delta = 0,333 \cdot$

Расчеты проводились в системе Mathcad. Тогда величина абсолютного суммарного смещения для оценки T_A равна $W(T_A) = 2K_{>0} - B = 2\cdot 0,333 = 0,666$.

Заметим, что оставшиеся два интеграла, составляющие функционал *W(T*$_A$*)*, есть ничто иное, как его отрицательная часть, а именно:

$$K_{<0} = \int_0^{0,90098} e^{-\Delta}(1+0,1\Delta^2-1,2\Delta)\partial\Delta + \int_{11,09902}^{\infty} e^{-\Delta}(1+0,1\Delta^2-1,2\Delta)\partial\Delta \cdot$$

Аналогично предыдущему, с учетом, что для сбалансированной оценки выполняется равенство $K_{<0} = K_{>0}$, величина абсолютного суммарного смещения для оценки T_A равна:

$$W(T_A) = 2K_{<0} + B = 2\cdot 0,333 + 0 = 0,666.$$

В соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок величина эффективности оценки

$T_A = 2,2N\tau$ при $R = 0$, $T_A = 0,4N\tau$ при $R = 1$ и $T_A = N\tau/(R+1)$ при $R>1$ вычисляется по формуле $Q = (A+1) \bullet W$ и равна:

$$Q = (0 + 1) \bullet 0,666 = 0,666.$$

Заметим, что из абстрактной формулы $W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$ следует, что для сбалансированной оценки $A = 0$ ($B = 0$) для вычисления величины абсолютного суммарного смещения W достаточно вычислить величину $K_{<0}$ или $K_{>0}$. В представленных выше примерах приведено расширенное (более подробное) решение этой задачи. Выбор, каким способом решать задачу, остается за испытателем.

Полученные результаты эффективности предложенных линейных смещенных оценок согласуются с прямым вычислением их эффективности на ЭВМ.

Получение эффективной смещенной оценки СНДО по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом типа *NBτ,* с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок. В соответствии с предыдущим разделом балансировка для плана испытаний типа *NBτ* на линейных оценках имеет вид:

$$A\big(\theta(m,R)\big) = /\int_0^{\infty}\{E\theta(\Delta,R)-1\}d\Delta/,$$

где $\Delta = m/t$, $m = N\tau$ – параметр пуассоновского потока отказов. Аналогично абсолютное суммарное смещение представимо в виде:

$$W\big(\theta(m,R)\big) = \int_0^{\infty}/E\theta(\Delta,R)-1/\,d\Delta.$$

Эффективная оценка ищется среди предложенных линейных оценок [25] с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок, а именно:

$Q = (A+1) \bullet W = (/K_{>0} - K_{<0}/ + 1) \bullet (K_{>0} + K_{<0})$;

$$K_{>0} = \int_{\{\}>0}\{E\theta(\Delta,R)-1\}d\Delta,\ K_{<0} = /\int_{\{\}<0}\{E\theta(\Delta,R)-1\}d\Delta/.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	A	W	$Q=(A+1)\bullet W$	C
$T_{B2}(R = 0) = 2{,}5N\tau$, $T_{B2} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$, $T_{B2}(R > 5) = N\tau / (R + 1)$	0,186	0,560	0,664	0,742
$T_{11}(R = 0) = 2{,}2N\tau$, $T_{11}(R > 0) = N\tau / (R + 1 + 1 / R)$	0,486	0,790	1,175	0,841
$T_6(R = 0) = 1{,}5N\tau / U(R,\alpha=0{,}5)$, $T_6(R > 0) = n\tau / (U(R,\alpha=0{,}5) + 0{,}5)$	0,466	1,080	1,584	0,931
$T_1(R = 0) = 2N\tau$, $T_1(R > 0) = N\tau / (R + 1)$	0	0,736	0,736	1,03
$T_8 = N\tau / (R + 1) + N\tau 10^{-(R+0,5)} / (R + 0{,}5)$	0,321	0,656	0,867	1,134
$T_7 = N\tau / (R + 1) + N\tau e^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8]	0,418	0,771	1,094	1,394
$T_9 = N\tau / (R+0{,}7)$	0,711	1,801	3,084	1,61
$T_5 = N\tau / U(R,\alpha=0{,}5)$	0,906	1,969	3,752	1,66
$T_3 = N\tau / (R + 1)$	1	1	2	2,30
$T_2(R = 0) = 2N\tau$, $T_2(R > 0) = N\tau / R$	5,054	5,675	34,35	11,40
$T_4(R = 0) = 6N\tau$, $T_4(R > 0) = N\tau / (R + 0{,}5)$	6,223	6,409	46,29	54,72

Из таблицы 2.6 следует, что в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок наиболее сбалансированная оценка ($A = 0$) $T_1(R = 0) = 2N\tau$, $T_1(R > 0) = N\tau / (R + 1)$ не является наиболее эффективной, что и ожидалось. Заметим, что более сбалансированные оценки имею шанс стать и более эффективными. В связи с этим и произошла перестановка по эффективности в сравнении с предложенным вариантом работы [25] по величинам C, где C – величина критерия эффективности смещенных оценок в среднеквадратичном смысле. С другой стороны, разбалансированные оценки (например, T_2, T_3) обладают наихудшей эффективностью, каждая в своем классе оценок $A = W = x$, которую можно значительно улучшить, варьируя оценками из близких классов таким образом, чтобы $A(\theta) < x$, $W(\theta) = x \pm \Delta x$. Воспользуемся принципом сбалансированности и получим оценки, близкие по своей эффективности к наилучшим оценкам. Полученные результаты приведены в таблице 2.7.

Таблица 2.7

Результаты подстановки откорректированных оценок СНДО
в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	A	W	$Q=(A+1)\bullet W$
$T_{\text{В2н}}(R = 0) = 2{,}7N\tau$, $T_{\text{В2н}} = N\tau \,/\, (R + 1 + 2{,}3 – 0{,}6R)$ при $1 \leq R \leq 5$, $T_{\text{В2н}}(R > 5) = N\tau \,/\, (R + 1)$	0,0132	0,632	0,641
$T_{11\text{н}}(R = 0) = 2{,}3N\tau$, $T_{11\text{н}}(R > 0) = N\tau \,/\, (R + 1 + 0{,}5 \,/\, (R+1))$	0,0018	0,794	0,795
$T_{d2}(R = 0) = 2{,}4N\tau$, $T_{d2}(R = 1) = 0{,}33N\tau$, $T_{d2}(R = 2) = 0{,}3133\underline{3}N\tau$, $T_{d2}(R > 2) = N\tau \,/\, (R + 1)$	0	0,617	0,617
$T_{d1}(R = 0) = 2{,}4N\tau$, $T_{d1}(R = 1) = 0{,}345N\tau$, $T_{d1}(R = 2) = 0{,}3033\underline{3}N\tau$, $T_{d1}(R > 2) = N\tau \,/\, (R + 1)$	0	0,623	0,623
$T_{d}(R = 0) = 2{,}4N\tau$, $T_{d}(R = 1) = 0{,}35N\tau$, $T_{d}(R = 2) = 0{,}3N\tau$, $T_{d}(R > 2) = N\tau \,/\, (R + 1)$	0	0,624	0,624
$T_B = 2{,}3N\tau$ при $R = 0$, $T_B = 0{,}35N\tau$ при $R = 1$ и $T_B = N\tau/(R+1)$ при $R>1$	0	0,635	0,635
$T_C = 2{,}25N\tau$ при $R = 0$, $T_C = 0{,}375N\tau$ при $R = 1$ и $T_C = N\tau/(R+1)$ при $R>1$	0	0,65	0,65
$T_A = 2{,}2N\tau$ при $R = 0$, $T_A = 0{,}4N\tau$ при $R = 1$ и $T_A = N\tau/(R+1)$ при $R>1$	0	0,665	0,665
$T_1(R = 0) = 2n\tau$, $T_1(R > 0) = n\tau \,/\, (R + 1)$	0	0,736	0,736

Из таблиц 2.6 и 2.7 следует, что в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок наиболее эффективной оказалась сбалансированная в соответствии с принципом сбалансированности смещенная оценка $T_d(R = 0) = 2{,}4N\tau$, $T_d(R = 1) = 0{,}35N\tau$, $T_d(R = 2) = 0{,}3N\tau$, $T_d(R > 2) = N\tau \,/\, (R + 1)$, $A = 0$. При выборе оценки T_d в качестве эффективной смещенной оценки кроме строгой монотонности учитывалась ее простота. Более эффективные оценки T_{d1} и T_{d2} не могут быть признаны в качестве эффективных смещенных оценок, т.к. удовлетворяют строгой монотонности только формально (величины их соседних по R реализаций $T_{d2}(R = 1) = 0{,}33N\tau$ и $T_{d2}(R = 2) = 0{,}3133\underline{3}N\tau$, $T_{d1}(R = 1) = 0{,}345N\tau$ и $T_{d1}(R = 2) = 0{,}3033\underline{3}N\tau$ имеют незначительные отличия). Остальные сбалансированные оценки приведены для сравнения.

Разберем в качестве примера процедуру получения сбалансированности оценки $T_{d.}$ Рассмотрим функционал *A(θ)*. Сузим множество решений уравнения $\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!}=1$ относительно *f(R)*. Пусть *f(r≥3) = 0*, тогда $\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!}=f(r=0)\Delta+f(r=1)\Delta^2+f(r=2)\Delta^3$. С целью упрощения вида полученного выражения переобозначим *f(R=0) = a*, *f(R=1) = b*, *f(R=2) = = –0,033$\underline{3}$*.

Тогда из *A(θ) = 0* следует *a* + 2*b* = 1 + 0,1. Действительно

$$A(\theta)=/\int_0^{\infty}(e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!}+e^{-\Delta}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)\frac{\Delta^{r+1}}{r!}-1)\partial\Delta/=$$

$$=/\int_0^{\infty}(1-e^{-\Delta}+e^{-\Delta}(a\Delta+b\Delta^2-0,33\underline{3}\Delta^3)-1)\partial\Delta/=0\text{, тогда}$$

$$A(\theta)=/\int_0^{\infty}(-e^{-\Delta}+a\Delta e^{-\Delta}+b\Delta^2e^{-\Delta}-0,033\underline{3}\Delta^3e^{-\Delta})\partial\Delta/=/-1+a+2b-0,1/=0.$$

Откуда следует равенство *a* + 2*b* = 1,1. Решение этого уравнения относительно переменных *a* и *b* содержит различные их варианты, а именно:

– пусть *a = 1,4*, тогда *b = – 0,15*, что эквивалентно *f(R=0) = 1,4*, *f(R=1) = – 0,15* и *f(R=2) = – 0,033$\underline{3}$*. Тогда искомая оценка T_d класса *θ = (Nτ/(R+1)) + Nτf(R)* имеет вид:

$T_d = N\tau + 1,4N\tau = 2,4N\tau$ при $R = 0$;

$T_d = 0,5N\tau – 0,15N\tau = 0,35N\tau$ при $R = 1$;

$T_d = 0,33\underline{3}N\tau – 0,033\underline{3}N\tau = 0,3N\tau$ при $R = 2$;

$T_d = N\tau/(R+1)$ при $R > 2$. Остальные построения аналогичны рассмотренным примерам выше.

Балансировка для оценки T_d имеет вид:

$$A\left(T_d\right)=/\int_0^{\infty}1-e^{-\Delta}-1+1,4\Delta e^{-\Delta}-0,15\Delta^2e^{-\Delta}-0,033\underline{3}\Delta^3e^{-\Delta}\partial\Delta/=$$

$$=/\int_0^{\infty}e^{-\Delta}(-0,033\underline{3}\Delta^3-0,15\Delta^2+1,4\Delta-1)\partial\Delta/.$$

Уравнение $\frac{1}{30}\Delta^3+0,15\Delta^2-1,4\Delta+1=0$ эквивалентно уравнению $\Delta^3+4,5\Delta^2-42\Delta+30=0$. Уравнение $\Delta^3+4,5\Delta^2-42\Delta+30=0$ имеет два положительных решения: Δ = *0,79368233415042436113* и Δ = = *4,0467577163734140517*. Тогда функционал *W* на сбалансированной оценке T_d можно представить в следующем виде:

$$Q=W=2K_{>0}=2/\int_{0,79368233415042436113}^{4,0467577163734140517}e^{-\Delta}(-\frac{1}{30}\Delta^3-0,15\Delta^2+1,4\Delta-1)\partial\Delta/=2\bullet0,312=0,624\,.$$

Получение эффективной смещенной оценки вероятности безотказной работы по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом типа *NBτ*, с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок. Введем обозначения $m=N\tau$, $t=m/\Delta$, $1/t=\Delta/m$, $P=exp\{-g/t\}=exp\{-g\Delta/m\}$ – вероятность безотказной работы (ВБР) за временной отрезок *g* для некоторого параметра *t* (СНДО). Рассмотрим оценки ВБР вида $\theta(R;m,g)=\exp\{-g/T_i\}$, где T_i – некоторая оценка параметра *t* (СНДО) из числа предложенных в работе [25] и таблиц 2.6 и 2.7. Тогда балансировка и абсолютное суммарное смещение на оценках вероятности безотказной работы за временной отрезок *g* имеет вид соответственно:

$$A(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}/\int_0^{\infty}(E\theta-e^{-g\Delta/m})\partial\Delta/,\; W(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^{\infty}/E\theta-e^{-g\Delta/m}/\partial\Delta.$$

В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида

$Q(\theta)=(A(\theta)+1)\bullet W(\theta)=(/K_{>0}-K_{<0}/+1)\bullet(K_{>0}+K_{<0})$ на предложенных оценках $\theta(R)$, где $\Delta\in\{0;\infty\}$,

$$K_{>0}(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_{\{\}>0}\left\{E\theta-e^{-g\Delta/m}\right\}\partial\Delta,\; K_{<0}(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\sum_{g=10^3}^{10^5}/\int_{\{\}<0}\left\{E\theta-e^{-g\Delta/m}\right\}\partial\Delta/,$$

где $m = N\tau$, $\Delta = N\tau/t = m/t$, $t = m/\Delta$. Усреднение по сумме с индексом g не производилось с целью получения величины результата вычисления Q, близкой к единице. Усреднение по сумме с индексом m производилось в обычном порядке (множитель 1/3).

Рассмотрим оценки ВБР – за временной отрезок g – вида $\theta(m,g;R)=exp\{g/\theta_i\}$, где θ_i – некоторая оценка СНДО, $g = \tau$. В таблице 2.8 приведены результаты подстановки предложенных в работе [25] (таблицы 2.6 и 2.7) оценок ВБР в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа $NB\tau$.

Таблица 2.8

Результаты подстановки предложенных оценок ВБР
в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид оценки ВБР, $g = \tau$	A	W	$Q=(A+1)\bullet W$	C
$P_9(T_9) = exp\{-g/T_9\}$, где $T_9(R=0) = 4N\tau / U(R,\alpha=0{,}5)$, $T_9(R>0) = N\tau / U(R,\alpha=0{,}5)$	0,092	0,320	0,350	1,93
$P_v(g;T_v(R)) = exp\{-g/T_V\}$, где $T_v(R=0) = 200\cdot N\tau$, $T_v(R>0) = N\tau / (R + 0{,}5)$	0,114	0,280	0,312	0,44

В том случае, когда при условии $g/m<1$, то в качестве эффективной оценки ВБР всегда следует использовать традиционную несмещенную оценку $(1-g/m)^R$ [4], в ином случае следует использовать эффективную смещенную оценку P_v, полученную с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок.

Воспользуемся принципом сбалансированности и откорректируем предложенные оценки. Результаты откорректированных оценок ВБР представлены в таблице 2.9.

Таблица 2.9

Результаты подстановки откорректированных оценок ВБР
в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид оценки ВБР, $g = \tau$	A	W	$Q=(A+1)\cdot W$
$P_9(T_9) = exp\{-g/T_9\}$, где $T_9(R=0) = 4N\tau / U(R,\alpha=0,99)$, $T_9(R>0) = N\tau / U(R,\alpha=0,5)$	0,095	0,295	0,324
$P_{\text{vн}}(g;T_{\text{vн}}(R)) = exp\{-g/T_{Vн}\}$, где $T_{\text{vн}}(R=0) = 110\cdot N\tau$, $T_{\text{vн}}(R>0) = N\tau / (R + 0,6)$	0,072	0,284	0,305

Как следует из таблиц 2.8 и 2.9, наиболее эффективной в соответствии с простым критерием эффективности является составная оценка

$$P_{\text{vн}}(g;T_{\text{vн}}(R)) = exp\{-g/T_{Vн}\},$$

где $T_{\text{vн}}(R=0) = 110\cdot N\tau$, $T_{\text{vн}}(R>0) = N\tau / (R + 0,6)$. При прогнозировании эта же оценка также является эффективной ($\tau < g$).

Полученные новые оценки параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения вероятностей и ВБР по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом испытаний типа $NB\tau$, по сути своей – это откорректированные в соответствии с принципом сбалансированности эффективные смещенные оценки, предложенные в предыдущих разделах книги части 2, т.е. наблюдается разумное согласование между эффективными смещенными оценками в рамках различных критериев. Так как наиболее простое и непротиворечивое решение по поиску эффективных смещенных оценок предлагает простой критерий смещенных оценок, то именно его следует использовать в качестве основного при поиске эффективных смещенных оценок параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения вероятностей и ВБР для различных планов испытаний. Как тут не вспомнить известный тезис «критерий истины есть практика».

2.8. Получение эффективной смещенной оценки гамма-процентной наработки

В современном производстве высоконадежных, уникальных, сложных изделий стала обычной ситуация, в которой необходимо получить оценку гамма-процентного срока сохраняемости (ГПСС) или гамма-процентной наработки на отказ (ГПНДО) на основе испытаний, не давших отказы.

Под ГПНДО понимается наработка, в течение которой отказ не возникнет с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах [27]. Аналогично, под ГПСС понимается календарная продолжительность хранения изделия, в течение и после которой изделие способно выполнять требуемую функцию с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах [27]. При условии подчинения наработки на отказ экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 – СНДО величина ГПНДО (далее – t_γ) вычисляется по формуле:

$$t_\gamma = -T_0 ln(\gamma).$$

С целью построения оценки ГПНДО t_γ вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0 воспользоваться традиционной оценкой средней наработки на отказ, построенной для экспоненциального распределения [4, 5]:

$$T_{02} = N\tau/R \text{ при } R > 0.$$

Однако полученная таким образом оценка ГПНДО имеет существенные недостатки, а именно:

— оценка является смещенной;

— оценка является неэффективной;

— оценка не позволяет получать количественные значения ГПНДО t_γ по результатам испытаний, не давшим отказов.

Для решения упомянутой выше задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку, если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок.

В качестве инструмента при нахождении эффективной оценки будем использовать простой критерий эффективности смещенных оценок [46] с характеристикой $Q = (A+1)\bullet W$ (см. разделы 1.6 и 2.7). Аналогично разделу 2.7 построим функционалы $W(\hat{t}_\gamma)$ и $A(\hat{t}_\gamma)$, в основе которых лежит абсолютное суммарное смещение оценки $t_\gamma = T_0 ln(\gamma)$ от истинного количественного значения t_γ для всех возможных величин, принимаемых параметрами T_0, N и τ:

$$W(\hat{t}_\gamma) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{T_0} / E\hat{t}_\gamma - T_0 ln(\gamma) / \partial\Delta,$$

где переменная интегрирования T_0 – параметр з.р. СНДО; T_0 – нормирующий множитель; $\hat{t}_\gamma = -\hat{T}_0 ln(\gamma)$, а член $T_0 ln(\gamma)$ в подынтегральном выражении равен $T_0\, ln(\gamma) = t_\gamma$.

Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром Δ [4, 5] найдем:

$$E\hat{t}_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} -\hat{T}_0 \ln(\gamma) e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}.$$

Эффективная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ должна обладать минимальной величиной функционала $W(\hat{t}_{\gamma 1})$.

Вынесем из-под знака интеграла $(-ln(\gamma))$, что вполне обосновано, т.к. выполняются неравенства: $\gamma < 1$; $-\ln(\gamma) > 0$. Тогда функционал $W(\hat{t}_\gamma)$ примет вид:

$$W(\hat{t}_\gamma) = -\ln(\gamma) \int\limits_0^\infty \frac{1}{T_0} / E\hat{T}_0 - T_0 / \partial\Delta.$$

Для балансировки $A(\hat{t}_\gamma)$ все построения аналогичны и в этом случае скобки абсолютной величины заменяем на обычные скобки. В соответствии с разделом 2.7 и работой [46] функционал $Q(\hat{t}_\gamma)$ принимает минимальную величину, если в качестве оценки параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок.

Для плана испытаний типа $N\text{В}\tau$ в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок эффективной смещенной оценкой СНДО является сбалансированная оценка $T_\text{d}(R = 0) = 2{,}4N\tau$, $T_\text{d}(R = 1) = 0{,}35N\tau$, $T_\text{d}(R = 2) = 0{,}3N\tau$, $T_\text{d}(R > 0) = N\tau / (R + 1)$ при $R > 2$.

Тогда эффективная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$, построенная в достаточно широком классе оценок [12], примет вид:

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) 2{,}4 n\tau \text{ при } R = 0;$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) 0{,}35 n\tau \text{ при } R = 1;$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) 0{,}3 n\tau \text{ при } R = 2;$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma) N\tau \,/\, (R + 1) \text{ при } R > 2. \qquad (2.13)$$

Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{t}_{\gamma 1}$ можно применять и для плана типа $N\text{Б}\tau$. Полученная таким образом оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– является эффективной в достаточно широком классе оценок [12];

– позволяет получать количественное значение ГПНДО t_γ по результатам испытаний, не давшим отказов и проводимым по плану типа $N\text{Б}\tau$ или $N\text{В}\tau$.

Все сказанное в этом разделе о нахождении эффективной оценки ГПНДО следует отнести и к эффективной оценке ГПСС.

2.9. Получение эффективной смещенной оценки остаточного гамма-процентного ресурса

Под остаточным ресурсом понимается: суммарная наработка объекта от момента контроля его технического состояния до момента достижения его предельного состояния [27]. То есть остаточный ресурс – ресурс, который исчисляется от количественного значения наработки $t_н$ в текущий момент времени. В основе понимания долговечности изделия (его ресурса) лежит понимание модели надежности [27], которая описывает закон распределения отказов. Внезапные отказы, носящие случайный характер, обычно довольно хорошо описываются экспоненциальным законом. Напротив, отказы, носящие название постепенных, во многих случаях довольно хорошо описываются нормальным законом [4]. У реального изделия часто совмещаются оба типа отказов. Изделие находится в работоспособном состоянии до первого из этих отказов. Пусть $P_1(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет внезапный отказ, а $P_2(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет постепенный отказ. В предположении, что отказы возникают независимо друг от друга и совместны, ВБР будет равна $P_0(s) = P_1(s)P_2(s)$. ВБР $P_0(s)$ имеет сложное аналитическое выражение [4], что значительно затрудняет проведение расчетов. Однако на практике в большинстве случаев на относительно коротком временном промежутке составляющей $P_2(s)$ можно пренебречь, поэтому ВБР $P_0(s) = P_1(s)$ и $P_1(s)$ имеет экспоненциальный характер по предположению.

Покажем это на примере изделий электронной техники. Электрорадиоизделия (ЭРИ) характеризуются минимальной наработкой (далее – t_{min}), величина которой находится в пределах 15–25 лет. Минимальной наработке t_{min} соответствует гамма-процентный ресурс (ГПР) ЭРИ при

$\gamma = 0{,}999$, т.е. вероятность постепенного отказа ЭРИ на относительно коротком временном участке, равном минимальной наработке, близка к нулю, что соответствует пологому участку плотности нормального закона распределения. Поэтому интенсивность отказов ЭРИ на начальном пологом участке плотности нормального з.р. приближенно можно выразить формулой $\lambda_2(s) \cong \lambda_2 = const$, следовательно $P_2(s) = e^{-\lambda_2 s}$, где $\lambda_2 \ll \lambda_1$ – приближение константой интенсивности отказов на пологом участке кривой нормального закона распределения. Заметим, что величина характеристики γ = 0,95 является критерием соответствия выбранной экспоненциальной модели распределения на определенном формулой $P_2(s) > 0{,}95$ пологом участке [0; s]. С другой стороны, для экспоненциального закона распределения вероятность отказа высоконадежного изделия выражается формулой $P_1\ (t) = e^{-\lambda_1 s}$. Исходя из полученных приближений и равенства $P_0(s) = P_1(s)P_2(s) \cong e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \cong e^{-\lambda_1 s}$, получаем, что на пологом временном участке ВБР определяется с хорошим приближением экспоненциальным законом. В этом случае гамма-процентная наработка на отказ совпадает с гамма-процентным ресурсом.

Все сказанное можно отнести и к более сложному изделию, состоящему из большого количества ЭРИ.

Чаще всего в качестве показателя долговечности используется гамма-процентный ресурс, и совсем редко – средний ресурс. Это объясняется тем, что за время, равное среднему ресурсу, откажет половина изделий, а с точки зрения безопасности и экономичности такая эксплуатация является неоправданной. В соответствии с работой [27] ГПР – суммарная наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах. Аналогично определяется остаточный гамма-процентный ресурс (ОГПР), а именно: ОГПР – суммарная наработка объекта, исчисляемая от момента контроля его технического состояния, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах.

Для невосстанавливаемых сложных изделий ГПР не превышает минимальной наработки любого ЭРИ, входящего в состав этого сложного изделия, а вероятность γ обычно задают в пределах от 0,95 до 0,999. Такой выбор величин вероятности разграничивает временной промежуток использования изделия на интервалы, где начальный интервал ограничен величиной ГПР ($\gamma \geq 0{,}95$). Такое разграничение позволяет считать, что в пределах этого начального интервала (15–25 лет) модель надежности невосстанавливаемых сложных изделий $P_0(s) = P_1(s)$ находится в рамках влияния экспоненциального закона. Этот факт позволяет делать прогнозы величины ГПР (ОГПР) невосстанавливаемых сложных изделий в пределах установленных ограничений (≤25 лет).

Модель надежности. На интервале [0; 25] лет, ограниченном величиной минимальной наработки ЭРИ t_{min}, наработка на отказ невосстанавливаемых сложных изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (СНДО). Величина ВБР (далее – $P_0(s)$) за заданное время (далее – s, $s \leq t_{min}$) будет определяться равенством $P_0(s) = e^{-s/T_0}$.

Из этого выражения легко выводится расчетная формула для ГПР

$$(\gamma_{\text{н}} = P_0(s = t_{\text{н}})) \colon t_{\text{н}} = -T_{01} ln(\gamma_{\text{н}}).$$

Начальную (нормированную) величину ГПР $t_{\text{н}}$ устанавливают по факту (в техническом задании).

Устанавливая (нормируя) величину вероятности ($\gamma_{\text{п}}$) для продленного ресурса (далее – $t_{\text{п}}, \gamma_{\text{п}}(t_{\text{п}}) < \gamma_{\text{н}}(t_{\text{н}})$), легко рассчитать ОГПР изделия (далее – $t_{\text{ост.}\gamma}$):

$$t_{\text{ост.}\gamma} = t_{\text{п}} - t_{\text{н}} = -T_0 \ln\big(\gamma_{\text{п}}(t_{\text{п}})\big) - \Big(-T_0 \ln\big(\gamma_{\text{н}}(t_{\text{н}})\big)\Big) =$$

$$= T_0 \ln(\gamma_{\text{н}}) - T_0 \ln(\gamma_{\text{п}}). \qquad (2.14)$$

Из формул (2.13), (2.14) легко рассчитать вероятность для ОГПР $t_{\text{ост.}\gamma}$, а именно: $\gamma = e^{-t_{\text{ост.}\gamma}/T_0}$.

Устанавливая (нормируя) величину вероятности $\gamma_{\text{п}}$ для продленного ресурса $t_{\text{прогноз}}$: $\gamma_{\text{п}}(t_{\text{п}}) = 0{,}95 = \gamma_{\text{прогноз}}(t_{\text{прогноз}})$, можно прогнозировать ОГПР изделия в соответствии с формулой (2.14), а именно:

$$t_{\text{прогноз.ост.}\gamma} = T_0 \ln(\gamma_{\text{н}}) - T_0 \ln\big(\gamma_{\text{прогноз}} = 0{,}95\big).$$

Как и в предыдущем разделе 2.8, строится простой критерий выбора эффективной смещенной оценки на множестве оценок $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, N, t)$ (см. разделы 1.6 и 2.7) $Q = \big(A\big(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\big) + 1\big) \bullet W(\hat{t}\text{ост.}_{\gamma})$, тогда

$$W\big(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\big) = \int_0^{\infty} \frac{1}{T_0} / E\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} - T_0(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})) / \partial\Delta\,,$$

где T_0 – параметр з.р. СНДО; $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} = -\hat{T}_0\big(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})\big)$, а член в подынтегральном выражении $T_0(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})) = t_{\text{ост.}\gamma}$;

$$E\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} (\widehat{T_0}(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})) e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}\,.$$

Эффективная оценка ОГПР должна обладать минимальной величиной функционала $Q = \big(A\big(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\big) + 1\big) \bullet W(\hat{t}\text{ост.}_{\gamma})$. Вынесем из-под знака интеграла $(ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{п}}))$, что вполне обосновано, т.к. выполняются неравенства: $\gamma < 1$; $-\ln(\gamma) > 0$; $\gamma_{\text{н}} > \gamma_{\text{п}}$; $\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}}) > 0$. Тогда функционал $W\big(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\big)$ примет вид:

$$W\big(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}\big) = (\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}}))^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{T_0} / E\hat{T}_0 - T_0 / \partial\Delta\,.$$

Для балансировки $A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma})$ все построения аналогичны и в этом случае скобки абсолютной величины заменяем на обычные скобки. В соответствии с разделом 2.7 и работой [46] функционал $Q(\hat{T}_0) = (A(\hat{T}_0) + 1) \bullet W(\hat{T}_0)$ принимает минимальную величину (а вместе с ним и сам функционал $Q(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}) = (A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}) + 1) \bullet W(\hat{t}\text{ост.}_{\gamma}))$, если в качестве оценки параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок. Для плана испытаний типа NВτ эффективной смещенной оценкой СНДО является сбалансированная смещенная оценка

$$T_d(R = 0) = 2{,}4N\tau,\ T_d(R = 1) = 0{,}35N\tau,\ T_d(R = 2) = 0{,}3N\tau,$$

$$T_d(R > 0) = N\tau / (R + 1) \text{ при } R > 2.$$

Таким образом, в формулу $t_\gamma = - T_0 Ln(\gamma)$ следует подставлять вместо параметра T_0 его эффективную смещенную оценку T_d.

Тогда эффективная оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$, построенная в достаточно широком классе смещенных оценок [17], примет вид:

$$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} = \begin{cases} (\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})) \cdot 2{,}4n\tau, \text{при } R = 0, \\ (\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})) \cdot 0{,}35n\tau, \text{при } R = 1, \\ (\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})) \cdot 0{,}3n\tau, \text{при } R = 2, \\ (\ln(\gamma_\text{н}) - \ln(\gamma_\text{п})) \cdot \frac{N\tau}{(R+1)}, \text{при } R > 2, \\ \gamma_\text{п} \geq 0{,}95, \gamma = \frac{\gamma_\text{п}}{\gamma_\text{н}}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ можно применять и для плана типа *NБτ*. Полученная таким образом оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– оценка является эффективной в достаточно широком классе смещенных оценок [12];

– оценка позволяет получать количественные значения ОГПР $t_{\text{ост.}\gamma}$ по результатам испытаний, не давшим отказов и проводимых по плану типа *NБτ* или $NB\tau$.

Пример 2.1. В качестве показателя надежности изделия используется ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(\gamma=0{,}95)$, которая не должна быть менее 10000 ч. По результатам испытаний 10 изделий в течение 10000 ч отказы не возникали $R = 0$. Требуется сделать прогноз ГПР(ГПНДО) $t_\gamma(\gamma=0{,}95)$ и проверку соответствия изделия требованиям к надежности.

Заметим, что в данном примере наработка 10000 ч не определяет предельное состояние изделия как невосстанавливаемого (отказов всех изделий не было), так и восстанавливаемого. Поэтому $\gamma=0{,}95$ является минимальным пределом для того, чтобы при этой наработке выполнялось приближенное равенство ГПР ≈ ГПНДО.

Непосредственно из формулы $t_\gamma = -T_0 Ln(\gamma)$, после подстановки T_d вместо T_0, следует, что прогнозируемая величина ГПР (ГПНДО) составит:

$T_\text{d} = 2{,}4n\tau = 2{,}4\cdot 10\cdot 10000 = 240000$ ч,

$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_d Ln(\gamma) = -240000 Ln(\gamma=0{,}95) = 12310$ ч.

По результатам прогнозирования величины ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(0{,}95)$ можно сделать вывод о соответствии изделия требованиям к ГПР (ГПНДО). Время, в течение которого откажет не более 5% изделий, составит $\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = 12310$ ч, что соответствует требованиям к надежности изделия ($t_\gamma(0{,}95) = 10000$ ч).

Традиционное решение примера.

Традиционно для испытаний, в процессе которых отказы не возникали, оценку ГПР $\hat{t}_{\gamma\text{н}}$ оценивают по нижней доверительной границе средней наработки на отказ с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}9$ (не путать с вероятностью «гамма»), при этом результат оценивают в соответствии с работой [25]:

$$T_{01н} = \frac{2\tau N}{\chi^2(1-\propto; 2R+2)} = \frac{2\cdot 10\cdot 10000}{2{,}71} = 73800 \text{ ч},$$

где $\chi^2(1-\propto; 2R+2)$ – квантиль χ^2- распределения с $(2R+2)$-й степенью свободы (для плана испытаний $NB\tau$); $r = 0$ – реализация с.в. R, $\alpha =$

$1 - \gamma = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ – уровень значимости согласно ГОСТ Р 50779.26–2007; $\hat{t}_{\gamma н} = -\ln(\gamma) T_{01н} = -\ln(0{,}95) \cdot 73800 = 3785$ ч. Что не соответствует требованиям к надежности.

Пример 2.2. По результатам эксплуатации, в процессе которой отказы не возникали $R = 0$, группы из 10 однотипных аппаратов в течение нормативного срока работы, равного одному году (8760 ч), было принято решение продолжить эксплуатацию этих аппаратов еще в течение года с целью определения ОГПР. По результатам продолженной эксплуатации отказы обнаружены не были.

Требуется сделать оценку ОГПР аппаратов $\hat{t}_\gamma$ (и рассчитать соответствующую ей вероятность γ) и распространить сделанную оценку ОГПР на всю партию аппаратов, чьи наработки в эксплуатации не превысят нормативный срок работы. Сделать прогноз ОГПР при γ=0,95.

Решение. $T_d = 2{,}4 n\tau = 2{,}4 \cdot 10 \cdot 17520 = 420480$ ч,

$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_d Ln(\gamma) = -420480 Ln(\gamma = 0{,}95) = 21567$ ч.

Тогда прогнозируемая величина ОГПР составит:

$\tilde{t}_{ост.\gamma}(0{,}95) = \tilde{t}_\gamma(0{,}95) - 10000 = 11567$ ч при $\gamma = Exp\{-11567/T_d\} = 0{,}973$.

В соответствии с разделом 2.7 делаем оценку ВБР группы аппаратуры за первичную (или продолженную) наработку, равную 8760 ч, по результатам продолженной эксплуатации, в процессе которой отказы не возникали, в течение 17520 ч по формуле $P(g; T_d(R)) = exp\{-g/T_d\}$:

$$\gamma_н(t_Н) = e^{\left(-\frac{8760}{420480}\right)} = 0{,}979.$$

То есть первичная или продолженная наработка, равная 8760 ч, соответствует ГПР группы аппаратов при $\gamma = 97{,}9\%$.

По результатам оценки $\hat{t}_\gamma$ можно сделать вывод, что продолженный ОГПР группы аппаратов составил 8760 ч при $\gamma = 97{,}9\%$. То есть аппатары, чьи сроки эксплуатации достигнут 8760 ч, смогут проработать еще 8760 ч с ВБР, равной 0,979, т.е. при этом ожидается, что откажет не более 2,1% из их общего числа.

Пример 2.3. В отличие от примера 2.2, только девять аппаратов отработали в течение нормативного срока работы, равного одному году (8760 ч), а один (эталонный) отработал два срока. Требуется определить ОГПР этого эталонного аппарата, т.е. найти $\hat{t}_\gamma$ (и рассчитать соответствующую ей вероятность γ) и распространить сделанную оценку ОГПР на оставшиеся девять аппаратов, находящихся в эксплуатации с наработкой, равной $t_н = 8760$ ч.

Решение. $T_d = 2{,}4n\tau = 2{,}4 \cdot 11 \cdot 8760 = 231264$ ч,

$\tilde{t}_\gamma(0{,}95) = -T_d Ln(\gamma) = -231264 Ln(\gamma{=}0{,}95) = 11862$ ч.

В соответствии с разделом 2.7 и работой [46] делаем оценку ВБР группы аппаратов за первичную или продолженную наработку, равную 8760 ч, по результатам продолженной эксплуатации, в процессе которой отказы не возникали, в течение 17520 ч по формуле $P(T_d(R>0)) = e^{-g/T_d(R>0)}$:

$$\gamma_н(t_Н) = e^{\left(-\frac{8760}{231264}\right)} = 0{,}962.$$

То есть первичная (или продолженная) наработка, равная 8760 ч, соответствует ГПР группы аппаратов при $\gamma = 96{,}2\%$.

По результатам оценки $\hat{t}_\gamma$ можно сделать вывод, что продолженный ОГПР группы аппаратов составил 8760 ч при $\gamma = 96{,}2\%$. То есть аппараты, чьи сроки эксплуатации достигнут 8760 ч, смогут проработать еще 8760 ч с ВБР, равной 0,962, т.е. при этом ожидается, что откажет не более 3,8% из их общего числа.

Выводы к разделу 2

1. Для плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением в качестве эффективных смещенных оценок следует признать:

– оценку СНДО $T_d(R = 0) = 2{,}4N\tau$, $T_d(R = 1) = 0{,}35N\tau$, $T_d(R = 2) = 0{,}3N\tau$, $T_d(R > 0) = N\tau / (R + 1)$ при $R > 0$;

– оценку для прогнозирования ВБР $P_{\text{vн}}(g;T_{\text{vн}}(R)) = exp\{-g/T_{Vн}\}$, где $T_{\text{vн}}(R=0) = 110\cdot N\tau$, $T_{\text{vн}}(R>0) = N\tau / (R + 0{,}6)$;

– оценку гамма-процентной наработки (ресурса) $\gamma \geq 0{,}95$:

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma)2{,}4n\tau \text{ при } R = 0,$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma)0{,}35n\tau \text{ при } R = 1$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma)0{,}3n\tau \text{ при } R = 2,$$

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -\ln(\gamma)N\tau \,/\, (R + 1) \text{ при } R > 2 \;;$$

– оценку остаточного гамма-процентного ресурса $\gamma_{\text{п}} \geq 0{,}95$:

$$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma} = \begin{cases} \big(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})\big) \cdot 2{,}4n\tau, \text{при } R = 0, \\ \big(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})\big) \cdot 0{,}35n\tau, \text{при } R = 1, \\ \big(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})\big) \cdot 0{,}3n\tau, \text{при } R = 2, \\ \big(\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}})\big) \cdot \dfrac{N\tau}{(R + 1)}, \text{при } R > 2, \\ \gamma_{\text{п}} \geq 0{,}95, \gamma = \dfrac{\gamma_{\text{п}}}{\gamma_{\text{н}}}. \end{cases}$$

2. По результатам исследования, проведенного в данной второй части книги, можно отметить, что наблюдается разумное согласие между статистическими оценками, полученными в рамках предложенных критериев эффективности смещенных оценок.

3. Простой критерий эффективности смещенных оценок можно выбрать в качестве основного критерия в силу своей простоты и достаточности.

4. Статистические оценки показателей надежности, полученные в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок, как и сам простой критерий, имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации однородной продукции различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.

3. БИНОМИАЛЬНЫЙ ПЛАН ИСПЫТАНИЙ

При проведении биномиальных испытаний на надежность исследователь сталкивается с проблемой оценки результатов испытаний, когда в процессе испытаний отказы изделий получены не были ($R: r = 0$). Тогда оценка показателя надежности по результатам испытаний либо невозможна, либо результат оценки свидетельствует о достоверном событии (вероятность безотказной работы равна единице). В этом случае исследователь традиционно в качестве оценки параметра выбирает ее нижнюю доверительную границу, что занижает надежность изделия и увеличивает риски. В этом случае вполне естественным становится желание исследователя получить такую формулу оценки, чтобы она адекватно оценивала нормируемый показатель надежности при любом исходе испытаний.

3.1. Выбор эффективной оценки вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний

План действий. Для испытаний, не давших отказы, оценка ВБР приобретает величину, равную единице ВБР $= 1 - \hat{p}(R = 0, n) = 1$, где $\hat{p}(R = 0, n) = R/n = 0/n = 0$ – традиционная оценка вероятности отказа для биномиального плана испытаний. То есть формально из результатов испытаний, не давших отказов, всегда следует, что изделия из оцениваемой партии $N = n$ являются безотказными. Такой вывод противоречит здравому смыслу.

Очевидно, что в процессе испытаний, не давших отказов, для исследователя желаемым является результат, сравнимый с количественными значениями требований к показателям надежности, т.е. при положительном исходе испытаний, а отсутствие отказов свидетельствует об этом, оценка как минимум должна быть равной нормируемой величине (далее – норма) показателя надежности. Этот минимум и должен определять величину желаемой оценки при испытаниях, не давших отказов, а ее вид согласно словесной формуле представляет собой составную оценку, а именно:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{\text{норма}}(R) = 1 - \text{ВБР норма}, R = 0, \\ \quad \hat{\theta}_{\text{норма}}(R, N) = \dfrac{R}{N}, \qquad R > 0. \end{cases}$$

Для испытаний, не давших отказов, оценка $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R = 0, n)$ не зависит от объема испытаний: количества испытуемых изделий $N = n$ и времени испытаний, так как в этом случае не зависит от объема испытаний и традиционная оценка $\hat{p}(R = 0, n) = R/n = 0/n = 0$. Величина оценки $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R = 0, n)$ (испытания проведены без отказов) формируется в зависимости от величины нормируемого значения ВБР, которая всегда отлична от единицы, т.е. какое требование к ВБР – такая и оценка вне зависимости от объема испытаний. Оценку $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R, n)$ следует признать эффективной среди смещенных оценок. В принципе оценку $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R, n)$ можно сколь угодно близко приближать по своей эффективности к эффективной и несмещенной оценке $\hat{p}(R, n) = R/n$, приближая нормированную величину к единице. Чем больше нормируемая величина ВБР, тем эффективнее оценка $\hat{\theta}_{\text{норма}}(R, n)$. Вычисления с шагом $\partial p = 1E - 03$ уже для $\text{ВБР}_{\text{норма}} = 0{,}999$ дают величины функционала, близкие к количественным значениям функционала на $\hat{p}(R, n) = R/n$, а именно:

$$L(\hat{\theta}_{\text{норма}}) = 1E - 07 \ \approx \ L(\hat{p}) = 6E - 33.$$

Построенная таким образом оценка $\hat{\theta}_{\text{норма}}$ позволит уйти от недостатков традиционной оценки $\hat{p}$ по результатам испытаний, в процессе которых отказы обнаружены не были. Однако свойство оценок $\hat{p}$ и $\hat{\theta}_{\text{норма}}$ не зависеть от количества испытуемых изделий $N = n$ при $R = 0$ приводит к казусу, когда необходимо определить количество испытуемых изделий. Это количество может выражаться любым числом, в том числе и единицей. Пользоваться в этом случае оценкой $\hat{\theta}_{\text{норма}}$ невозможно.

Построим оценки вероятности отказа (далее – $\hat{p}_i(R, n)$), которые адекватно зависят от количества испытуемых изделий, и на их основе построим оценки ВБР и СНДО (далее – $\hat{T}_i$). И, наоборот, на основе выбранных оценок СНДО построим оценки вероятности отказа. На оценки введем ограничения по строгой монотонности:

– для оценок вероятности отказа – $\hat{p}_i(R, n) < \hat{p}_i(R + 1, n)$, $\hat{p}_i(R, n + 1) < \hat{p}_i(R, n)$;

– для СНДО – $\hat{T}_i(R, n) > \hat{T}_i(R + 1, n), \hat{T}_i(R, n + 1) > \hat{T}_i(R + 1, n)$.

Вполне естественным становится введение ограничения на изменения величин оценок вероятности отказа от нуля до единицы. Такие ограничения позволяют резко ограничить множество оценок, на котором ведется поиск.

При выборе эффективных оценок особое место занимают оценки, заданные неявно.

3.2. Построение точечной оценки вероятности безотказной работы, заданной в неявном виде

Будем строить точечную оценку, заданную в неявном виде, используя приемы построения доверительных интервалов.

Пусть случайная величина R имеет биномиальное распределение $b_n(r)$ согласно работе [2, ф. 1.4.55] с параметрами n и $p, 0 \leq p \leq 1$, т.е. с.в. $R = r$, равная числу успехов в серии из n независимых опытов, принимает целочисленные величины $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями: $b_n(r,p) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$.

Функция вероятности биномиального плана испытаний F_R имеет вид согласно формуле (1.4):

$$F_R(r, N, p) = F_R(\mathrm{R} \leq r, N, p) = \sum_{k=0}^{r} b_N(k,p)\,.$$

Функция F_R убывает по p, следовательно для построения одностороннего доверительного интервала $P(p_{\text{н}}) < p$ или $P(p_{\text{в}}) > p$, где P – вероятность накрыть неизвестный параметр p односторонним интервалом, можно воспользоваться рекомендациями работы [2, ф. 2.15.37] и решить уравнения, а именно:

$$F_R(r, N, p_{\text{н}}) = 1 - \alpha = \gamma$$
$$\text{или } F_R(r, N, p_{\text{в}}) = 1 - \gamma = \alpha, \tag{3.1}$$

где γ – доверительная вероятность; α – уровень доверия.

Решение уравнений (3.1) позволяет найти доверительные границы $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$. Доверительное оценивание является дополнительным инструментом, который позволяет оценивать вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного количественного значения [1].

Если полученный интервал $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т.е. $p_{\text{н}}$ станет равной $p_{\text{в}}$, что определит точечную оценку $\hat{v} = p_{\text{н}} = p_{\text{в}}$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}5$, что доказывает единственность оценки $\hat{v}$.

Воспользуемся формулой (3.1), тогда неявно заданная оценка $\hat{v}$ получается из уравнения:

$$F_R(r, N, p) = \sum_{k=0}^{r} b_N(k, \hat{v}) = C_N^r \hat{v}^r (1 - \hat{v})^{N-r} = 0{,}5. \qquad (3.2)$$

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний F_R монотонно убывает с ростом p [1, 2, 9], а следовательно уравнение имеет единственное решение. Величины, принимаемые оценкой $\hat{v}(R, n, \alpha = 0{,}5)$, представлены в приложении Б.

3.3. Построение критерия выбора эффективности смещенной оценки для вероятности отказа (классическая процедура построения)

Критерий выбора эффективности смещенной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(R, n)$ основан на суммарном квадрате смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(R, n)$ от вероятности отказа p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, n.

Для выбора эффективной смещенной оценки вероятности отказа (или ВБР) потребуется только понятие абсолютно эффективной оценки по смещению и ограничение на изменение параметра p в пределах $1 \leq p \leq 0$. Поэтому для простоты в качестве критерия получения эффективной смещенной оценки $\hat{\theta}_0(R, n)$ строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(R, n))$) на ограниченном множестве $n = 1, \dots, N$; [18–22] согласно формулам (1.12) – (1.16):

$$L\left(\hat{\theta}(R,n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 \left\{E\hat{\theta}(R,n) - p\right\}^2 \partial p\ . \qquad (3.3)$$

Оценка $\hat{\theta}_0(R,n)$, минимизирующая функционал $L\left(\hat{\theta}(R,n)\right)$ на заданном множестве оценок, называется эффективной смещенной оценкой в заданном множестве смещенных оценок. Среди оценок, доставляющих примерно один и тот же минимум функционалу $L\left(\hat{\theta}(R,n)\right)$, следует выбрать оценку, которая имеет минимальное уклонение в среднеквадратическом смысле (классическое определение эффективной оценки [1]). Данную оценку будем называть более эффективной в сравнении с выбранными.

Для выбора оценок, обладающих минимальным уклонением, строится функционал (далее – $M\left(\hat{\theta}(R,n)\right)$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов уклонений оценок $\hat{\theta}(R,n)$ от параметра p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, n [18–22] согласно формулам (1.12) – (1.16):

$$M\left(\hat{\theta}(R,n)\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1 E\left\{\hat{\theta}(R,n) - p\right\}^2 \partial p. \qquad (3.4)$$

Оценку, которая доставляет нуль функционалу $L(\hat{\theta}_0(R,n)) = 0$ (несмещенная оценка) и минимум функционалу $M\left(\hat{\theta}_0(R,n)\right)$, будем называть абсолютно эффективной в классе смещенных оценок (или просто – эффективной). Математическое ожидание $E\hat{\theta}(R,n)$ имеет вид:

$$E\hat{\theta}(R,n) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{b}_n(r)\hat{\theta}(r,n).$$

Ограничим объем испытаний $1 \le n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (3.3) примет вид:

$$L\left(\hat{\theta}(R,n)\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 \left\{E\hat{\theta}(R,n) - p\right\}^2 \partial p\ .$$

А формула (3.4) примет вид:

$$M\left(\hat{\theta}(R,n)\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E\left\{\hat{\theta}(R,n) - p\right\}^2 \partial p\,.$$

В качестве эталона сравнения оценок вероятности отказа будем рассматривать традиционную оценку $\hat{p}(R,n) = R/n$, которая является несмещенной и эффективной оценкой параметра p согласно работе [2, пример 2.4.20], и неявно заданную оценку вероятности отказа для биномиального плана испытаний (далее – $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$) [9, 18]. Оценка $\hat{p}(R,n) = R/n$ также является и оценкой максимального правдоподобия [2, пример 2.10.7].

3.4. Преимущество составных оценок вероятности отказа (или ВБР) для биномиального плана испытаний

Оценки вероятности отказа $\hat{p}_i$, предлагаемые для сравнения, строятся по общей формуле:

$$\hat{p}_i(R,n) = \begin{cases} f_i(R = 0, n), R = 0\,, \\ \dfrac{R}{n}, \qquad R > 0\,, \end{cases}$$

где f_i – некоторая функция от R, n, τ, не нарушающая принцип строгой монотонности и аддитивности по случайной переменной R. Эти оценки обслуживают случай, когда распределение наработки на отказ не конкретизируется, и в этом их преимущество.

Знания о распределении параметра дают некоторое преимущество для оценок, основанных на этих знаниях. Далее предполагается, что вероятность отказа p является функцией от параметра СНДО и наработка на отказ имеет экспоненциальную зависимость распределения вероятностей. Тогда оценки параметра p можно представить через оценки СНДО:

$$\hat{p}_i(R,n,\tau) = e^{(-\tau/\hat{T}_i)},$$

где $\hat{T}_i$ – некоторые выбранные оценки СНДО.

Имея неявно заданную оценку ВБР $\hat{V} = 1 - \hat{v}$ за время, равное времени испытаний τ, легко получить оценку СНДО $\hat{T}_{\hat{v}} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{v}(R,n,\gamma=0{,}5))}$ для биномиального плана испытаний. Аналогично, для оценки ВБР $\hat{P} = 1 - \hat{p}(R,n) = 1 - \frac{R}{n}$ оценка СНДО примет вид: $\hat{T}_{\hat{p}} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{p}(R,n))}$.

Количественные значения оценки $\hat{v}(R,n,\beta = 0{,}5)$ представлены в приложении Б.

Оценка СНДО для биномиального плана испытаний NБτ в соответствии с работой [4, с. 188] имеет вид: $\hat{T}_2 = \frac{S(R,\tau,s_i,\mathrm{n})}{R}$, где s_i – моменты отказов, $i = 1,2,\dots,R > 0$; S $-$ суммарная наработка.

Доопределим оценку $\hat{T}_2$ при $R = 0$ величиной $\hat{T}_2 = S(R,\tau,n) = n\tau$.

Чтобы уйти от деления на ноль для оценки СНДО, подобной $\hat{T}_2$, представим ее в виде $\hat{T}_1 = S(R,\tau,s_i,n)/(R+1)$.

Будем рассматривать простой случай и сократим число переменных для оценок $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$. Для этого будем предполагать, что разброс наработок на отказ s_i происходит симметрично относительно времени испытаний $\tau/2$. Это выполнимо для высоконадежных изделий $\tau/T_0 < 0{,}1$ [4, с. 188]. Поэтому $S(R,\tau,n) = (n-R)\tau + R\tau/2$. Соответственно изложению оценки ВБР за время, равное времени испытаний τ, будут иметь вид:

$$\hat{P}_1(R,\tau,\mathrm{n}) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1(\mathrm{R,n,\tau})}\right) \text{ и } \hat{P}_2(R,\tau,\mathrm{n}) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_2(\mathrm{R,n,\tau})}\right).$$

Или оценки вероятности отказа за время, равное времени испытаний τ, будут иметь вид: $\hat{p}_1(R,\tau,\mathrm{n}) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1}\right)$ и

$$\hat{p}_2(R, \tau, \mathrm{n}) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_2}\right).$$

Выбранные составные оценки параметра p имеют вид:

$$\hat{p}_3(R, N) = \begin{cases} \hat{v}(R = 0, N, \beta = 0{,}5), R = 0\,, \\ \dfrac{R}{N}, \;\; R > 0\,. \end{cases}$$

В таблице 3.1 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(R, n))$ и $M(\hat{\theta}(R, n))$ в соответствии с формулами (3.3) и (3.4) следующих оценок вероятности отказа: $\hat{v}, \hat{p}, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$. Вычисления проводились с шагом $\partial p = 1E - 3$.

Таблица 3.1

Результаты подстановки оценок вероятности отказа
для биномиального плана испытаний
в функционалы $L\left(\hat{\theta}(R, n)\right)$ и $M\left(\hat{\theta}(R, n)\right)$

Вид функционала	$\hat{v}(\beta = 0{,}5)$	$\hat{p} = R/n$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	$\hat{p}_3$
$L\left(\hat{\theta}(R, n)\right)$	0,0175	6E-33	0,0272	0,0186	0,0113
$M\left(\hat{\theta}(R, n)\right)$	0,0286	0,0488	0,0216	0,0200	0,0301

Из таблицы 3.1 следует, что составная оценка $\hat{p}_3$ по своей эффективности превосходит все предложенные оценки, но является смещенной и уступает эталонной несмещенной и эффективной оценке $\hat{p} = R/n$. Из таблицы 3.1 также следует, что по величине уклонения оценка $\hat{p}_2$ превосходит все предложенные оценки в смысле минимального количественного значения. Однако составная оценка $\hat{p}_3$ обладает примерно равным с оценкой $\hat{p}_2$ уклонением и, обладая минимальным смещением, имеет преимущество. Поэтому составную оценку $\hat{p}_3$ можно принять в качестве искомой эффективной оценки среди предложенных. Заметим, что решение об эффективности составной оценки $\hat{p}_3$ принималось по величине смещения, т.е. интуитивно, т.к. критерий по уклонению не адекватен (см. разделы 3.6 и 3.7).

Построенная составная оценка $\hat{p}_3$ позволяет уйти от казуса, когда оцениваем ситуацию как достоверное событие при отсутствии отказов на испытаниях. Для испытаний, когда отсутствуют отказы высоконадежных изделий, истина о величине оценки ВБР всегда ближе к единице, чем к нулю [9, 13]. Поэтому построенная составная оценка $\hat{p}_3$ позволяет сделать вывод, что по результатам испытаний, в которых отсутствуют отказы, ВБР будет не менее оценочной величины $(1 - \hat{p}_3)$.

Пример 3.1. В процессе испытаний на надежность одного изделия в течение 1000 ч отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, если нормируемая величина ВБР равна 0,999.

Результаты расчета:

$1 - \hat{v}$	$\hat{P} = 1 - R/n$	$1 - \hat{p}_1$	$1 - \hat{p}_2$	$1 - \hat{p}_3$
0,5	1	0,368	0,368	0,5

Пример 3.2. В процессе испытаний на надежность десяти изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, если нормируемая величина ВБР равна 0,999.

Результаты расчета:

$1 - \hat{v}$	$\hat{P} = 1 - R/n$	$1 - \hat{p}_1$	$1 - \hat{p}_2$	$1 - \hat{p}_3$
0,933	1	0,905	0,905	0,933

Пример 3.3. В процессе испытаний на надежность одного изделия возник отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$\hat{P}=1-R/n$	$1-\hat{p}_1$	$1-\hat{p}_2$	$1-\hat{p}_3$
0	0	0,018	0,0135	0

Пример 3.4. В процессе испытаний на надежность десяти изделий возник отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$\hat{P}=1-R/n$	$1-\hat{p}_1$	$1-\hat{p}_2$	$1-\hat{p}_3$
0,837	0,900	0,810	0,9	0,9

3.5. Улучшение эффективности центрируемой оценки вероятности безотказной работы

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам согласно работам [9, 18–20] и что, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta=0{,}5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L(\hat{v}(R,n,\beta=0{,}5))>0$. Однако это смещение можно уменьшить, а значит и улучшить эффективность. Для этого достаточно минимизировать функционал $L\big(\tilde{v}(n;R)\big)$, варьируя величиной вероятности $0{,}5+x$ в выражении $F_R(\tilde{v})=\sum_r b_n\,(r,\tilde{v})=0{,}5+x$, где x – некоторое вещественное число. Полученная таким образом оценка уже не является центрируемой, но имеет меньшую величину функционала $L(\tilde{v}(n;R))$ (смещение) в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta=0{,}5)$. А следовательно, от оценки $\tilde{v}$ можно ожидать и большую эффективность.

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний F_R монотонно убывает с ростом p [2], а следовательно, уравнение

$$F_R(r,\tilde{v}) = \sum_r b_n\,(r,\tilde{v}) = \beta = 0{,}5 + x$$

имеет единственное решение.

Расчеты показывают, что оценке $\tilde{v}$, минимизирующей функционал $L(\tilde{v}(n;R))$, соответствует вероятность $\beta = 0{,}5 + x = 0{,}81$:

$\sum_{k=0}^{r} C_n{}^k \tilde{v}^k (1-\tilde{v})^{n-k} = \beta = 0{,}81.$

В таблице 3.2 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n;R))$ и $M(\hat{\theta}(n;R))$ в соответствии с формулами (3.3) и (3.4) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$:

$\hat{p} = \frac{R}{n}, \hat{v}(\beta = 0{,}5), \tilde{v}(\beta = 0{,}81), \hat{p}_3, \tilde{p}$ [9, 20] и $\bar{\bar{p}} = \frac{R+1}{n+2}$ [9, 20],

где $\tilde{p} = \begin{cases} \tilde{v}(0,n,\beta = 0{,}81)\,, R = 0, \\ \quad R/n,\ R > 0. \end{cases}$

Таблица 3.2

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа для биномиального плана испытаний в функционалы $L\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$ и $M\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$

Вид функционала	$\hat{v}(\beta = 0{,}5)$	$\tilde{v}(\beta = 0{,}81)$	$\hat{p}_3$	$\tilde{p}$	$\bar{\bar{p}} = \dfrac{R+1}{n+2}$	$\hat{p} = \dfrac{R}{n}$
$L\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$	0,0175	0,0032	0,0113	0,0026	0,0104	6E-33
$M\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$	0,0286	0,0382	0,0301	0,0385	0,0166	0,0488

Количественные значения оценок $\hat{v}(R,n,\beta = 0{,}5)$ и $\tilde{v}(R,n,\beta = 0{,}81)$ представлены в приложении Б.

Вычисления величин функционалов $L\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$ и $M\big(\hat{\theta}(n;R)\big)$ проводились с шагом $\partial p = 1E - 03$. А вычисления величин неявно заданных оценок $\tilde{v}$ и $\hat{v}$ проводились с точностью $(1E - 04)$.

Из таблицы 3.2 следует, что составная оценка $\tilde{p}$, построенная на основе оценки $\tilde{v}$ и классической (несмещенной) оценки $\hat{p} = R/n$, обладает минимальным смещением из всех предложенных оценок (за исключением классической оценки (несмещенной и эффективной) $\hat{p} = R/n$ (таблица 3.1). Как и следовало ожидать, оценка $\tilde{v}(\beta = 0{,}81)$ обладает минимальным смещением в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$.

Из таблицы 3.2 также следует, что оценка $\tilde{p}$ уступает оценке $\bar{\bar{p}}$ по уклонению и соизмерима в этом качестве с остальными предложенными оценками. Поэтому оценку $\tilde{p}$ можно принять в качестве искомой оценки, эффективной среди предложенных смещенных оценок, не считая оценки $\hat{p} = R/n$. Из рассмотренных вариантов смещенных оценок вероятности отказа однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Классическая оценка биномиального плана испытаний $\hat{p} = R/n$ (несмещенная и эффективная) обладает минимальной дисперсией среди несмещенных оценок [1, 2]. Однако всегда можно найти смещенную оценку, обладающую меньшим уклонением (и это с учетом смещения) в сравнении с несмещенными оценками, что и отражено в таблице 3.2 – оценка $\bar{\bar{p}}$. Однако оценка $\hat{p} = R/n$ незначительно проигрывает по уклонению среди предложенных оценок (таблица 3.1).

Оценка $\bar{\bar{p}} = (R+1)/(n+2)$ приведена для сравнения (таблица 3.2), так как обладает свойствами $L(\bar{\bar{p}}) = 0{,}103$, близкими по эффективности к лучшим оценкам $L\big(\tilde{v}(\beta = 0{,}81)\big) = 0{,}0032$ и $L\big(\tilde{p}(\beta = 0{,}81)\big) = 0{,}0026$, и даже превосходит некоторые из них $L\big(\hat{v}(\beta = 0{,}5)\big) = 0{,}175$ и $L\big(\hat{p}(\beta = 0{,}5)\big) = 0{,}113$. Кроме того, оценка $\bar{\bar{p}}$ обладает наименьшим уклонением $M(\bar{\bar{p}}) = 0{,}0166$ в сравнении с представленными оценками, что делает ее эффективной по уклонению. Однако последнее преимущество для этой оценки, как следует из разделов 3.6 и 3.7, не позволяет сделать однозначный вывод о ее эффективности.

Оценка $\bar{\bar{p}}$ является байесовской оценкой и представляет тривиальный случай. Чтобы получить оценку $\bar{\bar{p}}$, следует предположить, что величина параметра p равномерно распределена в интервале [0; 1]. Это допущение соответствует полному отсутствию данных о надежности изделия, т.е. максимальной неопределенности относительно интервала величин, принимаемых параметром p. Такая модель приемлема только для неоднородной продукции. Априорная плотность равномерного з.р. параметра p на отрезке $p = t \epsilon [t_1, t_2]$ имеет вид:

$$q(\mathrm{t}) = \frac{1}{t_2 - t_1}. \tag{3.5}$$

В соответствии с формулами (1.8) и (1.9) плотность совместного распределения случайных величин параметра p и числа отказов R для биномиальных испытаний выражается формулой $(t_2 = 1, t_1 = 0)$ согласно работе [2, с. 54]:

$$f(R = r, p = t\ ) = f(r|p = t\ )q(t) = (t_2 - t_1)^{-1} C_n^r t^r (1 - t)^{n-r}.$$

Тогда в соответствии с формулой (1.9) имеем:

$$f(r) = \int f(r|p = t\ )q(t)\partial t\ = (t_2 - t_1)^{-1} \int_0^1 C_n^r t^r (1 - t)^{n-r} \partial t.$$

Условная плотность апостериорного распределения для биномиального плана испытаний примет вид:

$$q(t|R = r) = \frac{f(r|p = t)q(t)}{f(r)} = \frac{t^r (1-t)^{n-r}}{\int_0^1 C_n^r t^r (1-t)^{n-r} \partial t}.$$

Учтем, что $\int_0^1 C_n^r t^r (1 - t)^{n-r} \partial t = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(n+2)}$ согласно работе [2, ф. 1.4.35], тогда условная плотность апостериорного распределения с.в. p для биномиального плана испытаний $q(p = t|R =$

$= r)$ подобна плотности бета-распределения $f_p(t, a, b)$ с параметрами $p = t, a = r + 1, b = n - r + 1$, а именно [2, ф. 1.4.31]:

$$q(t|R = r) = f_p(t, r + 1, n - r + 1) = \frac{\Gamma(n + 2)}{\Gamma(r + 1)\Gamma(n - r + 1)} t^r (1 - t)^{n-r}.$$

Для бета-распределения с параметрами $a = r + 1, b = n - r + 1$ математическое ожидание случайной величины p выражается через параметры a и b по формуле [2, ф. 1.4.37]:

$$E(p) = a/(a + b) = (r + 1)/(n + 2).$$

Заметим, что $E(p)$ является усреднением количественных значений случайной величины p, что может служить ее апостериорной оценкой по результатам испытаний при $R = r$, а именно:

$$\bar{\bar{p}}(R, n) = (R + 1)/(n + 2).$$

В случае байесовского подхода, когда априорная плотность параметра p имеет равномерный з.р. на отрезке [0; 1], оценка $\bar{\bar{p}}(R, n)$ является тривиальной. Однако в случае полного отсутствия априорных данных о надежности изделий оценка $\bar{\bar{p}}(R, n)$ является хорошим инструментом исследователя неоднородной продукции. Однако, несмотря на свою простоту и близость к эффективным смещенным оценкам, пользоваться оценкой $\bar{\bar{p}}(R, n)$ при исследовании однородной продукции по результатам испытаний, проводимых по схеме Бернулли (плану биномиальных испытаний), не следует (см. разделы 3.6, 3.7 и 4).

Пример 3.5. В процессе испытаний на надежность по биномиальному плану одного изделия в течение назначенного времени отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1 - \hat{v}$	$1 - \tilde{v}$	$1 - \hat{p}_3$	$1 - \tilde{p}$
0,5	0,81	0,5	0,81

Пример 3.6. В рамках примера 3.5 в процессе испытаний на надежность десяти изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$1-\hat{v}$	$1-\tilde{v}$	$1-\hat{p}_3$	$1-\tilde{p}$
0,933	0,974	0,933	0,974

Рассмотрим эффективную (в классе смещенных оценок) точечную оценку ВБР за время s, равное времени испытаний τ, полученную для плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем в соответствии с критерием эффективности интегральных оценок [9, 14, 15], а именно:

$\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{(-t/6N\tau)}$ при $R = 0$ и $\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{(-t*(R+0,5)/N\tau)}$ при $R > 0$.

Оценка ВБР $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ (s) является эффективной по критерию интегральных смещенных оценок [9, 14, 15].

Исходя из логики построения биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний, оценки $\hat{P}_{NB\tau}(t)$ и $1-\tilde{v}$ должны быть приблизительно равными для испытаний, не давших отказов.

Пример 3.7. В рамках примера 3.5 в процессе испытаний на надежность ряда из $1, \ldots, 10$ изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний.

Результаты расчета:

n	$1-\tilde{v}$, $\beta = 0{,}81$	$\hat{P}_{NB\tau}(t) = e^{\left(-\frac{t}{6N\tau}\right)}$, $t = \tau$	$1-\bar{\bar{p}} = \dfrac{R+1}{n+2}$	$1-\hat{v}$, $\beta = 0{,}5$
1	0,810	0,846	0,667	0,500
2	0,900	0,920	0,750	0,707
3	0,932	0,946	0,800	0,794
4	0,949	0,959	0,833	0,841
5	0,959	0,967	0,857	0,871
6	0,965	0,973	0,875	0,891
7	0,970	0,976	0,889	0,906
8	0,974	0,979	0,900	0,917
9	0,977	0,982	0,909	0,926
10	0,979	0,983	0,917	0,933

Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

3.6. Получение эффективной смещенной оценки ВБР для биномиального плана с использованием критерия эффективности смещенных оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок вероятности отказа однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того предложенные в предыдущем подразделе оценки вероятности отказа обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность при выборе классическим методом эффективной оценки легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. раздел 1.6). Здесь и далее воспользуемся результатами работы [24]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий. Ограничим объем испытаний $0 < n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула усредненного суммируемого смещения примет вид:

$$A(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 (E\theta(n;R) - p)^2\, dp .$$

Формула для усредненной суммируемой дисперсии имеет вид:

$$D(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E(\theta(n;R) - E\theta(n;R))^2\, dp .$$

В таблице 3.3 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок вероятности отказа: v, w, $p_0 = n / R$, p_1, p_2, p_3 согласно работе [24] и $u = (R + 1)/(n + 2)$, где

$p_1 = v(0{,}5;n)$, $R = 0$ и $p_1 = n / R$, $R > 0$; $p_2 = w(0{,}81;n)$, $R = 0$ и $p_2 = n / R$, $R > 0$; $p_3 = w(0{,}81;n)$, $R = 0$ и $p_3 = u$, $R > 0$.

Вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial p = 10^{-3}$, а вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью 10^{-4}.

Таблица 3.3

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки	A	D	D / A	$C = D \cdot A \cdot 10^4$
$v(\gamma = 0{,}5)$	0,0176	0,0270	1,53	4,752
$w(\gamma = 0{,}81)$	0,0037	0,0402	10,86	1,4874
$p_1(\gamma = 0{,}5)$	0,0113	0,0288	2,54	3,2544
$P_2(\gamma = 0{,}81)$	0,0015	0,0401	26,73	0,6015
$P_3(\gamma = 0{,}81)$	0,0070	0,0226	3,22	1,595
$u = (R + 1)/(n + 2)$	0,0104	0,0162	1,55	1,6848
$p_0 = n / R$	0	0,0488	∞	0

Здесь и далее при построении таблицы использовался вариант вычисления характеристики $C = D \cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D \cdot A$.

Заметим, что вычисление характеристики C напрямую как функционала

$$C(\theta(n;R)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E\{\theta(n;R) - E\theta(n;R)\}^2 \cdot \{E\theta(n;R) - p\}^2 dp$$

сталкивается с большими вычислительными трудностями, связанными с ограниченной величиной характеристики разрядной сетки электронно-вычислительной машины, что в процессе вычисления приводит к обнулению значимых величин для суммирования. Что в последующем итоге и отражается на конечном результате.

Несмещенную оценку $p_0 = n / R$, приведенную для сравнения, из рассмотрения в качестве эффективной в классе смещенных оценок исключаем, хотя именно она является эффективной.

Из таблицы 3.3 следует, что из рассмотрения необходимо исключить оценки v, p_1, p_3, u, для которых не выполняется неравенство $D / A > 4$. Тогда из таблицы 3.3 также следует, что минимальными и соизмеримыми смещениями обладают оценки w и p_2. Их величины отличаются на максимальные $(0{,}0037 - 0{,}0015) \cdot 100 / 0{,}0037 = 59\%$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной следует однозначно считать оценку p_2. Из построения следует, что построенный критерий на основе характеристики $C = D \cdot A$ однозначно определяет эффективную смещенную оценку без проведения предыдущих в абзаце большинства рассуждений.

Предложенные оценки v, w, p_1, p_2 для биномиального плана испытаний имеют смещение, которое можно уменьшить, при этом вид оценок несколько изменится, а именно:

$$\hat{v} = v(0{,}5;n,R) - 0{,}4 / ((R + 1)n); \ \hat{w} = w(0{,}81;n,R) - 0{,}1/((R+1)n);$$

$$p_{10}(R = 0) = \hat{v}(0{,}5;n),\ p_{10}(R > 0) = n / R;\ p_{20}(R = 0) = \hat{w}(0{,}81;n),$$

$$p_{20}(R > 0) = n / R.$$

В таблице 3.4 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок вероятности отказа: $\hat{v}$, $\hat{w}$, p_{10}, p_{20}.

Таблица 3.4

Результаты подстановки оценок вероятности отказа $\hat{v}$, $\hat{w}$, p_{10}, p_{20} в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки	A	D	D / A	$C = D \cdot A \cdot 10^4$
$\hat{v}(\gamma = 0{,}5)$	0,0034	0,0356	10,47	1,210
$\hat{w}(\gamma = 0{,}81)$	0,0030	0,0427	14,23	1,280
$p_{10}(\gamma = 0{,}5)$	0,000680	0,0425	62,5	0,289
$P_{20}(\gamma = 0{,}81)$	0,000355	0,0443	124,7	0,157

Из таблицы 3.4 следует, что для всех предложенных оценок выполняется неравенство $D / A > 4$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной следует однозначно считать оценку p_{20}.

3.7. Улучшение эффективной смещенной оценки ВБР для биномиального плана с использованием критерия эффективности смещенных оценок

Улучшение эффективности смещенных оценок различных планов испытаний однородной продукции [4] основано на использовании критерия эффективности смещенных оценок $C(\theta) = A(\theta) \bullet D(\theta)$ [24, 25].

Заметим, что оценки вероятности безотказной работы (вероятности отказа), предлагаемые для сравнения в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок, должны быть: строго монотонны по всем своим параметрам, строго больше нуля и строго меньше единицы, что соответствует случайной модели отказа изделий. Оценки, которые при $R = 0$ и любом объеме n реализуются константой $\theta(R,n)$ = Constant (например, нулем или единицей), не соответствуют случайной модели отказа изделий и, как не имеющие физической интерпретации, вызывают большие сомнения в своей эффективности при нулевом исходе. В качестве предлагаемых оценок следует использовать составные оценки, состоящие из двух частей: первая часть соответствует $R = 0$, вторая часть – $R > 0$. Именно такие составные оценки, как правило, в своем классе доставляют функционалу $A(\theta)$ минимум. В качестве примера можно привести эффективную смещенную оценку средней наработки на отказ для плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий ($NB\tau$), где N – число испытуемых изделий, В – признак восстановления изделий, τ – время испытаний [1]: $\tilde{\tilde{T}}_{ср}(R=0) = 2N\tau$, $\tilde{\tilde{T}}_{ср}(R>0) = N\tau/(R + 1)$ [12]. Оценка $\tilde{\tilde{T}}_{ср}$ в классе смещенных оценок вида $\tilde{\tilde{\theta}}(N, R, \tau) = N\tau / (R + 1) + N\tau f(R)$, где $f(R)$ – произвольная функция, доставляющая функционалу $A(\theta)$ минимум $A(\theta) = 0{,}25$. А, следовательно, оценка $\tilde{\tilde{T}}_{ср}$ в этом классе смещенных оценок является эффективной. Дальнейшее улучшение свойств оценок, эффективных в данном классе смещенных оценок, приводит к расширению класса, например, $^\wedge\theta(N, R, \tau) = N\tau / (R + \beta(R))$ [24]. Легко доказать, что класс смещенных оценок $^\wedge\theta(N, R, \tau)$ не принадлежит классу $^\approx\theta(N, R, \tau)$ [24].

В работе [24] приведены оценки параметра p плана биномиальных испытаний:

$$^\wedge w = w(\beta=0{,}81;n,R) - 0{,}1 / ((R+1)n);$$

$$p_{20} = {}^\wedge w(\beta=0{,}81;n),\ R = 0 \text{ и } p_{20} = R / n\ ,\ R > 0,$$

имеющие меньшее смещение в сравнении с оценками v, w. Однако можно получить более эффективные смещенные оценки. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки, а именно:

$$^\approx w(R=0) = w(\beta=0{,}993;n,R),\ ^\approx w(R>0) = w(\beta=0{,}75;n,R);$$

$$^\approx p_{20}(R=0) = {}^\approx w,\ ^\approx p_{20}(R>0) = R / n\ ;$$

$$^\approx v(\beta,R=0) = w(\beta = 0{,}9999;n,R),\ ^\approx v(\beta,R>0) = w(\beta = 0{,}68;n,R);$$

$$^\approx p_\tau(g;T_p(R,\tau,n)) = 1 - exp(-g / T_p(R,\tau,n)),$$

$$T_p(R=0,\tau,n) = 110\cdot n\tau,\ T_p(R>0,\tau,n) = (n\tau - R\tau/2)/(R+0{,}35),$$

где $g = \tau$ – время, за которое рассматривают вероятность, τ – время испытаний. В таблице 3.5 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$для биномиального плана испытаний. Вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью, равной 10^{-4}. Расчеты функционалов проводились до третьей значащей цифры.

Здесь и далее при построении таблиц использовался вариант вычисления характеристики $C = D\cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D\cdot A$. При построении предложенных смещенных оценок учитывалось, что их вторая часть близка к несмещенной оценке $p_0 = (R>0)\ / n$. Близость второй части предложенных составных оценок к классической, несмещенной и эффективной оценке $p_0 = R / n$ гарантирует их эффективность в классе смещенных оценок, что и отражено в таблице 3.5. При вычислении функционалов $A(\tilde{p}_\tau)$ и $D(\tilde{p}_\tau)$ учитывалось дополнительно еще одно усреднение (суммирование) по времени ($g = \tau$), за которое рассматривают вероятность ($\tilde{p}_\tau(g=\tau; T_p(R,\tau,n))$) и одновременно проводят испытание.

Таблица 3.5

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки	A	D	D / A	$C = D \cdot A \cdot 10000$
Оценки, предложенные для биномиального плана испытаний в работе [24]				
$\hat{w} = w(\beta=0{,}81;n,R) - 0{,}1 / ((R+1)n)$	0,00303	0,0427	14,23	1,293
$\tilde{p}_2(R=0) = \tilde{w}$, $\tilde{p}_2(R>0) = R / n$	0,000355	0,0443	124,7	0,157
Оценки, предлагаемые для биномиального плана испытаний в работе [25]				
$\tilde{w}(R=0) = w(\beta=0{,}993;n,R)$, $\tilde{w}(R>0) = w(\beta=0{,}75;n,R)$	0,000731	0,0480	65,6	0,035
$\tilde{v}(R=0) = w(\beta = 0{,}9999;n,R)$, $\tilde{v}(R>0) = w(\beta = 0{,}68;n,R)$	0,000159	0,0483	303,6	0,0768
$\tilde{p}_\tau(g;T_p(R,\tau,n)) = 1 - exp(-g / T_p)$, $T_p(R=0) = 110n\tau$, где $g = \tau$, $T_p(R>0) = (n\tau - R\tau/2)/(R+0{,}35)$	0,00180	0,0402	22,33	0,723
$\tilde{p}_{20}(R=0) = \tilde{w}$, $\tilde{p}_{20}(R>0) = R\ / n$	2E-06	0,0484	1E+04	0,00097
$p_0 = R / n$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0,0488	∞	0

Из таблицы 3.5 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок эффективной среди предложенных является составная оценка $\tilde{p}_{20}$ с минимальной величиной характеристики

C = 0,00097. Несмещенную оценку $p_0 = R / n$, приведенную для сравнения, из рассмотрения в качестве эффективной среди предложенных смещенных оценок исключаем, хотя именно она является абсолютно эффективной, однако ее свойство (в случае $R = 0$ при любом $n > 0$) реализоваться нулем не соответствует случайной модели отказа изделий и, как не имеющая физической интерпретации, вызывает большие сомнения в своей эффективности при нулевом исходе.

Заметим, что все предлагаемые оценки θ должны пройти проверку на строгую монотонность при любом объеме и количестве отказов (для вероятности отказа) на выполнение $\theta(R + 1, n) > \theta(R, n)$, $\theta(R, n + 1) < \theta(R, n)$. В противном случае оценки, не прошедшие проверку на строгую монотонность, должны отвергаться, например, классическая оценка $p_0 = R / n$ в части событий «$R = 0$».

Для любого варианта составной оценки $\tilde{v}(\beta,R=0,n) = w(\beta,R=0,n)$ и $\tilde{v}(\beta,R>0,n) = w(\beta=0{,}68,R>0,n)$, служащей для подстановки в функционалы $A(\tilde{v})$ и $D(\tilde{v})$, где β в первом члене варианта этой составной оценки при $R = 0$ варьируется от *0,9999 до 0,99999,* величина функционала A (суммарного смещения) уменьшается на величину меньше, чем *0,001%*. Такое изменение функционала A можно считать несущественным, поэтому оценки $\tilde{v}(\beta>0{,}9999,R,n)$ должны быть отвергнуты.

Аналогично, для составной оценки:

$$\tilde{p}_\tau(g=\tau;T_p(R,\tau,n)) = 1 - exp(-(g=\tau) / T_p(R,n,\tau)),$$

где $T_p(R=0) = xn\tau$, $T_p(R>0) = (n\tau - R\tau/2)/(R+0{,}35)$ – некоторый вариант составной оценки СНДО, служащий для подстановки в функционалы A и D, x – переменная в первом члене варианта этой составной оценки, изменяющаяся от *110* до *10000* при $R = 0$, величина функционала A (суммарного смещения) уменьшается на величину меньше *0,0001%*. Поэтому в двух последних случаях $\tilde{v}$ и $\tilde{p}_\tau$ ограничились составными оценками, первый член которых имеет вид: $\tilde{\tilde{v}}(\beta,R=0,n))$ = $= w(\beta=0{,}9999,R=0,n)$ и $\tilde{\tilde{p}}_\tau(g=\tau;T_p(R=0) = 110\ n\tau)$, чье влияние на изменение величины функционала $A(\tilde{\tilde{v}}) = 0{,}000159$ или $A(\tilde{\tilde{p}}_\tau) = 0{,}00180$ ограничено шестой значащей цифрой, определяющей целесообразную для практики точность вычисления суммарного смещения.

Отметим одно свойство оценок ВБР биномиального плана испытаний, а именно их величины при $R = 0$ близки к единице, например, при $n = 1$:

$1 - \tilde{\tilde{v}}(\beta,R=0,n=1) = 1 - w(\beta=0{,}9999,R=0,n=1) = 0{,}9999,$

$1 - \tilde{\tilde{w}}(\beta,R=0,n=1) = 1 - w(\beta=0{,}993, R=0,n=1) = 0{,}993,$

$1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau(g=\tau;T_p(R=0,\tau=g,n=1)) = exp(-\tau/\ 110(n=1)\tau) =0{,}99095,$

$1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau(g=\tau;T_p(R=0,\tau=g,n=1)) = exp(-\tau/\ 1000(n=1)\tau) \approx 1$ (оценка исключена из дальнейшего рассмотрения).

С ростом $n > 1$ величины этих оценок возрастают, стремясь к единице. Т.е. в этом факте эти оценки близки по своим свойствам к несмещенной оценке $p_0 = R / n$.

Заметим тот факт, что для эффективных смещенных оценок $\tilde{\tilde{w}}$ и $\tilde{\tilde{p}}_{20}$ не только величина суммарного смещения близка к нулю, но и величина их суммарной дисперсии (*0,0480* и *0,0484*) близка к суммарной дисперсии классической, эффективной и несмещенной оценки $p_0 = R / n$ (*0,0488*), что соответствует неравенству Рао – Крамера [2, 7].

В тех задачах, когда по результатам испытаний n изделий необходимо сделать прогноз величины ВБР за более или менее длительный временной интервал g, чем время испытаний τ (в пределах 30%), то следует использовать оценку ВБР $P_g = 1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R,\tau,n))$. Оценка ВБР $P_g = 1 - \tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R,\tau,n))$ сравнима с оценкой ВБР $P_{\text{vн}}$, полученной для плана испытаний типа $NB\tau$, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и отражено в части 2 данной книги.

Пример 3.8. В процессе испытаний на надежность из ряда 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$.

Результаты расчета ВБР примера 3.8 ($\tau = g$, $R = 0$)

$N = n$	$1-\tilde{\tilde{p}}_\tau(g;T_p(R=0,\tau,n))=$ $= exp(-g/T_p)$, где $T_p(R=0) = 110\, n\tau$	$1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}(R=0) =$ $= 1 - \tilde{\tilde{w}}(\beta=0,993;R=0)$	$P_{vн}(T_{vн}) =$ $= \exp\{-g/110\, n\tau\}$, $g = \tau$, $R = 0$
	Биномиальный план испытаний		План испытаний типа $NB\tau$
1	0,9910	0,9930	0,9910
2	0,9955	0,9950	0,9955
3	0,9970	0,9966	0,9970
4	0,9977	0,9975	0,9977
5	0,9982	0,9980	0,9982
6	0,9985	0,9983	0,9985
7	0,9987	0,9986	0,9987
8	0,9989	0,9987	0,9989
9	0,9990	0,9988	0,9990
10	0,9991	0,9990	0,9991

Из примера 3.8 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3.8 результаты эффективных смещенных оценок $1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}$ и $P_{vн}(T_{vн})$ различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

Пример 3.9. В рамках примера 3.8 возник один отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$.

Результаты расчета ВБР примера 3.9 ($\tau = g$, $R = 1$)

$N = n$	$1 - \approx p_\tau(g=\tau;T_p(R=1)) = \exp(-g=\tau/T_p)$, где $T_p(R=1) = (n\tau - \tau/2)/1{,}35$	$1 - \approx p_{20}(R=1) = 1 - \approx w(\beta=0{,}75; R=1)$	$1 - p_0 \times (R=1) = 1 - (R=1)/n$	$P_{vн}(T_{\text{vн}}) = e^{-g(R+0{,}6)/n\tau}$, $g = \tau$, $R = 1$
	Биномиальный план испытаний			План испытаний типа $NB\tau$
1	0,067	0,000	0,000	0,202
2	0,407	0,500	0,500	0,449
3	0,583	0,673	0,666	0,587
4	0,680	0,756	0,750	0,670
5	0,741	0,806	0,800	0,726
6	0,782	0,839	0,833	0,766
7	0,812	0,862	0,857	0,796
8	0,835	0,879	0,875	0,819
9	0,853	0,893	0,888	0,837
10	0,868	0,903	0,900	0,852

Из примера 3.9 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3.9 результаты эффективных смещенных оценок различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

3.8. Построение критерия получения эффективной смещенной оценки СНДО для биномиального плана испытаний (классическая процедура построения)

В качестве критерия получения эффективной смещенной оценки СНДО строится функционал (далее – $V(\hat{\theta})$), основанный на усреднении и суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\hat{\theta}(R,n,\tau)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных величин, принимаемых параметрами t, n, τ [9, 18–20] в соответствии с формулами (1.12)–(1.16):

$$V(\hat{\theta}(R,n,\tau)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}(E\hat{\theta}(R,n,\tau=10^i)-t)^2\partial t. \quad (3.6)$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра СНДО $T_0 = t\,\epsilon\,[1;\infty]$, а суммирование – по времени $\tau\,\epsilon\,[10^3;10^5]$ и объему испытаний n.

Строится функционал (далее – $H(\hat{\theta})$), основанный на усреднении и суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R,N)$ от параметра t (СНДО) экспоненциального з.р. для всех возможных количественных значений t, n [18–20] согласно формулам (1.12)–(1.16):

$$H(\hat{\theta}(R,n,\tau)) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}E(\hat{\theta}(R,n,\tau=10^i)-t)^2\partial t. \quad (3.7)$$

Задачей функционала $H(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ является определение степени уклонения предложенных оценок СНДО. Оценка СНДО, минимизирующая предлагаемые функционалы, является эффективной среди предложенных оценок.

3.9. Выбор эффективных смещенных оценок средней наработки на отказ

С целью сравнения рассмотрим следующие смещенные оценки СНДО:

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R,\tau,\mathrm{n})}{R+1},\ \hat{T}_2 = \begin{cases} \frac{S(R,\tau,\mathrm{n})}{R>0}, \\ S(R=0,\tau,\mathrm{n}), \end{cases} \quad \hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{v}(R=0,N,\beta=0,6))}, \\ \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{p}(R>0,N))}, \end{cases}$$

$$\hat{T}_{\beta=0,6} = \frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{v}(R,n,\beta=0,6))},\ \hat{T}_{\beta=0,5} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{v}\,(R,n,\beta=0,5))}.$$

Количественные значения смещенных оценок $\hat{v}\,(R,n,\beta=0{,}5)$ и $\tilde{v}(R,n,\beta=0{,}6)$ представлены в приложении Б.

В таблице 3.6 приведены результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ и $H(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ в соответствии с формулами (3.6) и (3.7) следующих оценок СНДО: $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$, $\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$, $\hat{T}_{\beta=0,5}$, $\hat{T}_{\beta=0,6}$. Вычисления проводились с шагом $\partial p = 1E-3$.

Таблица 3.6

Результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(R,n,\tau))$
и $H(\hat{\theta}(R,n,\tau))$ в соответствии с формулами (3.6) и (3.7)
следующих оценок СНДО: $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$, $\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$, $\hat{T}_{\beta=0,5}$, $\hat{T}_{\beta=0,6}$

Вид функционала	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
$V(\hat{\theta}(R,N,\tau))$	1513	2364	11,26	11,01	10,59
$H(\hat{\theta}(R,N,\tau))$	238	302	595	538	1035

Из таблицы 3.6 следует, что эффективной смещенной оценкой СНДО для биномиального плана следует признать оценку $\hat{T}_{\beta=0,6}$, так как в соответствии с построенным критерием оценка СНДО

$\hat{T}_{\beta=0,6} = -\tau/ln(1-\tilde{v}(R,n,\beta = 0{,}6))$ показала небольшое преимущество перед оценкой

$$\hat{T}_{\beta=0,5} = -\tau/ln(1-\hat{v}(R,n,\beta = 0{,}5))\ [9, 20],$$

а именно:

$$V(\hat{T}_{\beta=0,6}) = 10{,}59 < V(\hat{T}_{\beta=0,5}) = 11{,}01,$$

$$H(\hat{T}_{\beta=0,6}) = 1035 > H(\hat{T}_{\beta=0,5}) = 538.$$

Несмотря на то что оценка $\hat{T}_{\beta=0,6}$ имеет несколько большее уклонение, именно оценку $\hat{T}_{\beta=0,6} = -\frac{\tau}{\ln(1-\tilde{v}(R,n,\beta=0{,}6))}$ следует признать более эффективной в сравнении с оценкой $\hat{T}_{\beta=0,5} = -\tau/\ln(1-\hat{v}(R,n,\beta = = 0{,}5))$ (в силу приоритета влияния на эффективность смещения). Из этого факта следует, что приоритет при принятии решения об эффективности смещенной оценки отдается оценкам, имеющим минимальное смещение, а не минимальное уклонение (что соответствует классическому определению эффективности оценки). Из рассмотренных вариантов смещенных оценок СНДО однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается.

Пример 3.10. В процессе испытаний на надежность в течение 1000 ч одного изделия отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
1000	1000	1957	1442	1957

Пример 3.11. В процессе испытаний на надежность в течение 1000 ч десяти изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
10000	10000	19576	14426	19576

Пример 3.12. В процессе испытаний на надежность в течение 1000 ч одного изделия произошел один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
500	1000	0	0	0

Пример 3.13. В процессе испытаний десяти изделий на надежность в течение 1000 ч произошел один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий.

Результаты расчета:

$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$	$\hat{T}_{\hat{p},\beta=0,6}$	$\hat{T}_{\beta=0,5}$	$\hat{T}_{\beta=0,6}$
5000	10000	6895	5658	6895

Пример 3.14. В процессе испытаний на надежность в течение 10000 ч ряда из $1, \ldots, 10$ изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний.

Рассмотрим эффективную (смещенную) точечную оценку СНДО, полученную для плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний [12] в соответствии с классическим критерием эффективности интегральных оценок [14], а именно:

$$\hat{T}_{01} = 2N\tau, R = 0 \text{ и } \hat{T}_{01} = N\tau/(R+1), R > 0.$$

Эта оценка СНДО является эффективной по критерию интегральных оценок в достаточно широком классе оценок [9, 12, 14].

Результаты расчета:

n	$\hat{T}_{\beta=0,6} = \dfrac{\tau = 1000}{-\ln(1-\tilde{v}(R=0,N,\beta=0,6))}$	$T_{01} = 2N\tau$ при $R = 0, \tau = 1000$
1	1958	2000
2	3923	4000
3	5855	6000
4	7823	8000
5	9788	10000
6	11748	12000
7	13698	14000
8	15660	16000
9	17611	18000
10	19576	20000

Из примера следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний оценки $\hat{T}_{\beta=0,6}$ и $\hat{T}_{01}$ приблизительно равны для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и следовало ожидать. Этот факт лишний раз подтверждает сделанные выводы об эффективности оценки $\hat{T}_{\beta=0,6}$. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

3.10. Нахождение эффективной смещенной оценки СНДО с использованием критерия эффективности смещенных оценок

Из предыдущего подраздела следует, что из рассмотренных вариантов смещенных оценок СНДО однозначно выбрать классическим методом эффективную оценку не удается. Кроме того, предложенные в предыдущем подразделе оценки СНДО обладают достаточно большим смещением. Однако это смещение можно несколько уменьшить, а неоднозначность при выборе классическим методом эффективной оценки легко устранить использованием критерия эффективности смещенных оценок (см. раздел 1.6). Будем считать, что наработка на отказ изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей з.р. с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой на отказ СНДО. Время испытаний каждого из N изделий обозначим через τ.

В качестве критерия получения эффективной смещенной оценки СНДО строится функционал, основанный на усреднении и суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\theta(R,n)$ от параметра t экспоненциального з.р. СНДО для всех возможных значений $N = n, \tau, T_0 = t$

$$A(\theta(n;R)) = \tfrac{1}{3}\sum_{\tau=1E+3}^{1E+5}\tfrac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_1^{\infty}\tfrac{1}{t^2}\{E\theta(n;R,\tau)-t\}^2 dt\,.$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра СНДО t из $[1;\infty]$.

Формула для усредненной суммируемой дисперсии D имеет вид:

$$D(\theta(n;R)) = \tfrac{1}{3}\sum_{\tau=1E+3}^{1E+5}\tfrac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_1^{\infty}\tfrac{1}{t^2}E\{\theta(n;R,\tau)-E\theta(n;R,\tau)\}^2 dt\,.$$

В таблице 3.7 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок СНДО:

$$T_1 = ((n-R)\cdot\tau + R\cdot\tau/2)/(R+1),$$

$$T_2 = -\tau/Ln(1-(R+1)/(n+1)),$$

$$T_3 = -\tau/Ln(1-p_1),$$

$$T_4 = -\tau/Ln(1-p_4),$$

где $p_4 = u = (R+1)/(n+2)$, $R=0$ и $p_4 = p_0 = R/n$, $R>0$,

$$T_5 = -\tau/Ln(1-\nu(R,n,\gamma=0{,}5),$$

$$T_6 = -\tau/Ln(1-\nu(R,n,\gamma=0{,}62).$$

Таблица 3.7

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО
в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$
для биномиального плана испытаний

Вид функционала	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
A	1513	11,27	11,26	11,09	11,01	10,59
D	1,962	3,679	7,402	7,534	4,983	9,157
D/A	≈0,01	0,32	0,65	0,67	0,45	0,86
$C=D\cdot A$	2968	41,4	83,3	83,6	54,8	96,9

Из таблицы 3.7 следует, что в соответствии с построенным критерием эффективности смещенных оценок все оценки следует исключить из рассмотрения, т.к. для них выполняется критичное условие $D/A<4$. Однако из-за необходимости сделать выбор оценку $T_6= -\tau/Ln(1 - (R,n,\gamma=0{,}62)$ с минимальным смещением и максимальной характеристикой $D/A=0{,}86$ следует однозначно признать условно эффективной среди предложенных.

Предложенные оценки СНДО для биномиального плана испытаний сильно смещены, однако это смещение можно уменьшить, при этом вид оценок несколько изменится, а именно:

$$T_{10} = 400 + 0{,}015\cdot\tau + \tau\cdot(n - R + R{*}0{,}02)/(R+0{,}5));$$

$$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/Ln(1-(R+0{,}4)/(n+0{,}4));$$

$$T_{30} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7 - \tau/Ln(1-p_1);$$

$$T_{40} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/Ln(1-p_4),$$

где $p_4(R=0) = u = (R+1)/(n+2)$, $p_4(R>0) = p_0 = R/n$;

$$T_{50} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau/Ln(1-\nu(R,n,\gamma=0{,}5);$$

$$T_{60} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}75/Ln(1-\nu(R,n,\gamma=0{,}62).$$

Варианты предложенных оценок с меньшим смещением представлены в таблице 3.8.

Таблица 3.8

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид функционала	T_{10}	T_{20}	T_{30}	T_{40}	T_{50}	T_{60}
A	5,67	4,62	5,34	5,27	5,03	4,85
D	9,65	7,06	3,62	3,69	4,98	5,47
D/A	1,70	1,52	0,67	0,70	0,99	1,12
$C=D\cdot A$	54	32,61	19,33	19,44	25,04	26,52

Из таблицы 3.8 следует, что в соответствии с построенным критерием эффективности смещенных оценок все оценки следует исключить из рассмотрения, т.к. для них выполняется критичное условие $D/A<4$. Однако из-за необходимости сделать выбор оценку $T_{20}=400 + 0{,}015 \times \times \tau - \tau\cdot 0{,}7/Ln(1 - (R+0{,}4)/(n+0{,}4))$ с минимальным смещением следует признать условно эффективной среди предложенных.

В данном разделе приведены условно эффективные смещенные оценки параметра СНДО:

$$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4));$$

$$T_{60} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}75/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0{,}62).$$

Однако, применяя составные оценки, можно получить более эффективные смещенные оценки. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки, а именно:

$$T_\tau(R=0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_\tau(R>0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2));$$

$$T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R>0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2)) -$$

$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2)).$$

В таблице 3.9 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n,\tau;R))$ и $D(\theta(n,\tau;R))$ для биномиального плана испытаний.

Здесь и далее вычисления функционалов $A(\theta(n,\tau;R))$ и $D(\theta(n,\tau;R))$ проводились с шагом $\partial t = 10^{k=3,\dots,6}$. А вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью 10^{-4}. При построении таблиц использовался вариант вычисления характеристики $C = D{\cdot}A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D{\cdot}A$.

Таблица 3.9

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n,\tau;R))$ и $D(\theta(n,\tau;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра СНДО	A	D	$D\,/\,A$	$C = D{\cdot}A{\cdot}10000$
Оценки параметра СНДО, предложенные для биномиального плана испытаний в работе [24]				
$T_{20} = 400 + 0{,}015{\cdot}\tau - \tau{\cdot}0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4))$	4,62	7,06	1,52	32,61
$T_{60} = 400 + 0{,}015{\cdot}\tau - \tau{\cdot}0{,}75/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0{,}62)$	4,85	5,47	1,12	26,52
Оценка, предлагаемая для биномиального плана испытаний в работе [25]				
$T_\tau(R{=}0) = 400 + 0{,}015{\cdot}\tau - \tau{\cdot}0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$, $T_\tau(R{>}0) = 400 + 0{,}015{\cdot}\tau - \tau{\cdot}0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$	4,33	11,69	2,70	50,88
$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau{\cdot}0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$, $T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01{\cdot}\tau - \tau{\cdot}0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) - \tau^2{\cdot}2{\cdot}10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$	2,43	72,46	29,86	176,0

Из таблицы 3.9 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $T_{\tau 2}$ с величиной характеристики $C = 176$, т.к. остальные оценки, обладающие меньшими величинами характеристики C, как не удовлетворяющие критерию отбора $D > 4A$, не могут рассматриваться в качестве эффективных среди предложенных.

Дальнейшее уменьшение смещения на выделенном классе оценок является довольно сложной задачей. В данном случае решением задачи уменьшения смещения является поиск на более широком классе оценок, включающим класс несмещенных оценок или близкий к таковым. Заметим, что чем ближе оценка к несмещенной (характеристика A стремится к нулю), если таковая существует, ее дисперсия увеличивается (таблица 3.1), стремясь снизу к дисперсии несмещенной оценки, или уменьшается, стремясь сверху к дисперсии несмещенной оценки, что вынуждает их реализации группироваться вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон, подобно реализациям несмещенных оценок. Этот факт следует непосредственно из неравенства Рао–Крамера для смещенных оценок согласно работе [2, ф. 2.14.14]. Поэтому для оценок близких по смещению к нулю всегда будет выполняться условие $D/A>4$. Важно заметить, что оценки выбираемого класса, предназначенного для поиска эффективных смещенных оценок, должны соблюдать строгую монотонность относительно всех своих параметров (R, τ, n).

Пример 3.15. В процессе испытаний на надежность из ряда 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний равно $\tau = 1000$ ч. Результаты расчета приведены в таблице 3.10.

Таблица 3.10

Результаты расчета СНДО примера 3 ($\tau = 1000$ ч, $R = 0$)

$N = n$	$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau -$ $- \tau \cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)) =$ $= 1000 - 600/\mathrm{Ln}(1 - 0{,}3/(n + 0{,}3))$	$T_{B2}(R = 0) = 2{,}5n\tau = 2500n$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа $NB\tau$
1	3287	2500
2	5293	5000
3	7295	7500
4	9296	10000
5	11297	12500
6	13298	15000
7	15298	17500
8	17298	20000
9	19298	22500
10	21299	25000

Из таблицы 3.10 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3.15 результаты эффективных в классе смещенных оценок $T_{\tau 2}$ и T_{B2} различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

Пример 3.16. В рамках примера 3.15 возник один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Результаты расчета приведены в таблице 3.11.

Таблица 3.11

Результаты расчета СНДО примера 4 ($\tau = 1000$ ч, $R = 1$)

$N = n$	$T_{\tau 2}(R{=}1) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}1) + 2)/(n + 2)) - \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}1) + 2)/(n + 2)) = 410 - 400/\mathrm{Ln}(1-3/(n+2))$	$T_{B2} = n\tau/(R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R) = 1000n/3{,}7$, при $R = 1$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа $NB\tau$
1	410	270
2	699	541
3	847	811
4	987	1081
5	1125	1351
6	1261	1622
7	1397	1892
8	1531	2162
9	1666	2432
10	1800	2703

Из таблицы 3.11 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3.16 результаты эффективных в классе смещенных оценок $T_{\tau 2}$ и T_{B2} различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

3.11. Получение эффективных смещенных оценок показателей надежности для биномиального плана испытаний с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок

Здесь и далее воспользуемся результатами работы [25] и раздела 3.7. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний N изделий. В соответствии с разделом 1.6 балансировка для биномиального плана имеет вид:

$$A\big(\theta(R;N)\big) = \sum_{n=1}^{N} / \int_0^1 (E\theta(R;n) - p)dp \,/\,,$$

где $p \in [0;\ 1]$ – параметр биномиального плана испытаний – вероятность отказа. Абсолютное суммарное смещение представимо в виде:

$$W\left(\theta(R;N)\right)=\sum_{n=1}^{N}\int_{0}^{1}/E\theta(R;n)-p\,/\,dp\,.$$

Эффективная оценка ищется среди предложенных в работе [25] с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок:

$$Q = (A+1) \bullet W = (/K_{>0} - K_{<0}/ + 1) \bullet (K_{>0} + K_{<0})\,,$$

$K_{>0}(\theta)=\sum\limits_{n=1}^{N}\int\limits_{\{\}>0}\left\{E\theta(R;n)-p\right\}\partial p$, $K_{<0}(\theta)=\sum\limits_{n=1}^{N}/\int\limits_{\{\}<0}\left\{E\theta(R;n)-p\right\}\partial p\,/$, где $p \in [0;\ 1]$.

Усреднение в сумме по N не производилось с целью получения величины результата вычисления Q близким к единице. Результаты расчетов приведены в таблице 3.12.

Таблица 3.12

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки	A	W	$Q=(A+1)\bullet W$	C
$\hat{w} = w(\beta=0{,}81;N,R) - 0{,}1\,/\,((R+1)N)$	0,447263	0,485555	0,702727	1,293
$\tilde{p}_2(R=0) = w(\beta=0{,}81;N,R) - 0{,}1/N$, $\tilde{p}_2(R>0) = R/N$	0,087258	0,087258	0,094872	0,157
$\tilde{w}(R=0) = w(\beta=0{,}993;N,R)$, $\tilde{w}(R>0) = w(\beta=0{,}75;N,R)$	0,209622	0,210012	0,254035	0,035
$\tilde{v}(R=0) = w(\beta = 0{,}9999;N,R)$, $\tilde{v}(R>0) = w(\beta = 0{,}68;N,R)$	0,082038	0,095704	0,103555	0,0768
$\tilde{p}_\tau(g;T_p(R,\tau,N)) = 1 - exp(-g\,/\,T_p)$, где $g = \tau$, $T_p(R=0) = 110N\tau$, $T_p(R>0) = (N\tau - R\tau/2)/(R+0{,}35)$	0,096340	0,332740	0,364796	0,723
$\tilde{p}_{20}(R=0) = w(\beta=0{,}993;N,R)$, $\tilde{p}_{20}(R>0) = R\,/\,N$	0,006370	0,006370	0,006410	0,00097
$\tilde{p}_{30}(g;T_p(R=0,\tau,N)) = 1 - exp(-g\,/\,T_p)$, где $g = \tau$, $T_p(R=0) = 110N\tau$, $\tilde{p}_{30}(R>0) = R\,/\,N$	0,008238	0,008238	0,008305	–
$p_0 = R\,/\,N$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0	0	0
Байесовская оценка при $\alpha=1,\ \beta=1$ $p_7 = (R+1)/(N+2)$ [44, 47]	0,001601	0,800003	0,801285	–
Байесовская оценка при $\alpha=2,\ \beta=94$ $\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$ [44, 47]	4,526639	4,530498	25,037302	–

Как следует из таблицы 3.12 наиболее эффективной стала оценка $\tilde{\tilde{p}}_{20}(R=0) = w(\beta=0{,}993;N,R)$, $\tilde{\tilde{p}}_{20}(R>0) = R\ / N$. Оценка p_7 является байесовской, полученной для случая полной неопределенности [44], и приведена для сравнения с целью подтверждения их плохих свойств, т.к. ее характеристика $Q = 0{,}801285$ является наихудшей. Оценка $\tilde{\tilde{\theta}}_Q(R)$ также является байесовской, которая обладает еще более худшей эффективностью $Q = 25{,}037302$.

Для байесовской апостериорной оценки $\varphi=(\alpha+R)/(\alpha+\beta+N)$ в случае биномиального плана испытаний и априорном бета-распределении известно [44, 45], что при больших α и β реализации оценки φ концентрируются около $\alpha/(\alpha+\beta)$, а дисперсия стремится к нулю, так что количественное значение p, по сути, известно и величина R на него не влияет. *«Не смущайте меня этими фактами!»,* – пишет автор в работе [45]. Далее автор поясняет [45], что, с другой стороны, если α и β фиксированы, но N стремится к бесконечности, из вида оценки $\varphi=(\alpha+R)/(\alpha+\beta+N)$ следует, что φ по существу совпадает с R/N. *«Это тот случай, когда содержавшаяся в R информация подавляет априорную информацию»* – объясняет автор работы [45]. Возникает вопрос. В каких случаях несмещенная оценка может быть байесовской. На этот вопрос можно однозначно ответить – ни одна несмещенная оценка не может быть байесовской, за исключением случая, когда уклонение этой оценки равно нулю согласно работе [45, теорема 1.2, с. 223]. Отсюда следует и обратная задача – ни одна байесовская оценка не может быть несмещенной, а следовательно и эффективной в задачах однородной продукции.

Оценку $\tilde{\tilde{p}}_{30}$ как более простую в сравнении с другими оценками тоже можно использовать в качестве эффективной смещенной оценки на практике.

Воспользоваться принципом балансировки и откорректировать предложенные оценки не удалось, таким образом эффективные оценки ВБР для биномиального плана остались прежними.

Биномиальный план испытаний. Средняя наработка на отказ. Будем считать, что наработка на отказ изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей с параметром t, где последний совпадает со средней наработкой на отказ (СНДО). Время испытаний каждого из $N = n$ изделий обозначим через τ. Здесь и далее ограничим объем испытаний $0 < n \leq 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат.

Здесь и далее воспользуемся результатами работы [44]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний N изделий. Эффективная оценка ищется среди предложенных в работе [44] с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок, а именно:

$$Q = (A+1) \bullet W = (/K_{>0} - K_{<0}/ + 1) \bullet (K_{>0} + K_{<0}),$$

$$K_{>0}(\theta) = \frac{1}{x} \sum_{\tau=10^3}^{10^5} \sum_{N=1}^{10} \int_{\{\}>0} \frac{1}{t} \{E\theta - t\} dt, \; K_{<0}(\theta) = \frac{1}{x} \sum_{\tau=10^3}^{10^5} \sum_{N=1}^{10} / \int_{\{\}<0} \frac{1}{t} \{E\theta - t\} dt /,$$

где $t \in \{1; \infty\}$, x – количество слагаемых в суммах.

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) t из $[1; \infty]$. В таблице 3.13 приведены результаты подстановки предложенных в работе [44] оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний.

Таблица 3.13

Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра СНДО	*A*	*W*	*Q=(A+1)•W*	*C*
$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4))$	4,600	8,130	45,537	32,61
$T_{60} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}75/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0{,}62))$	4,756	8,328	47,940	26,52
$T_{\tau}(R=0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1- ((R=0) + 0{,}3) / (n + 0{,}3))$, $T_{\tau}(R>0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2))$	4,408	7,882	42,634	50,88
$T_{\tau 2}(R=0) = 400+0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1- ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$, $T_{\tau 2}(R>0) = 400+0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1- ((R>0)+2)/(n+2)) - \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2))$	3,798	5,622	26,979	176,0

Из таблицы 3.13 следует, что в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $T_{\tau 2}$ с величиной характеристики $Q = 26{,}979$.

Воспользуемся простым критерием смещенных оценок и откорректируем предложенные оценки. Результаты откорректированных оценок СНДО представлены в таблице 3.14.

Таблица 3.14

Результаты подстановки откорректированных оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра СНДО	*A*	*W*	*Q=(A+1)•W*
$T_{\tau}(R=0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}75/\mathrm{Ln}(1- ((R=0) + 0{,}3) / (n + 0{,}3))$, $T_{\tau}(R>0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2))$	4,102	7,868	40,146
$T_{\tau 2}(R=0) = 400+0{,}7\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1- ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$, $T_{\tau 2}(R>0) = 400+0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1- ((R>0)+2)/(n+2)) - \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2))$	3,733	5,630	26,651

Пример 3.17. В процессе испытаний на надежность ряда из 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$. Результаты расчета приведены в таблице 3.15.

Таблица 3.15

Результаты расчета ВБР примера 1 ($\tau = g$, $R = 0$)

$N = n$	$1 - \tilde{\tilde{p}}_{\tau}(g=\tau; T_p(R=0,\tau,n)) =$ $= exp(-g=\tau/ T_p)$, где $T_p(R=0) = 110n\tau$	$1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}(R=0) =$ $= 1 - \tilde{\tilde{w}}(\beta=0{,}993; R=0)$	$P_{vн}(T_{\text{vн}}) =$ $= \exp\{-g/110n\tau\}$, $g = \tau$, $R = 0$
	Биномиальный план испытаний		План испытаний типа $NB\tau$
1	0,9909	0,9930	0,9909
2	0,9954	0,9950	0,9954
3	0,9969	0,9966	0,9969
4	0,9977	0,9975	0,9977
5	0,9981	0,9980	0,9981
6	0,9984	0,9983	0,9984
7	0,9987	0,9986	0,9987
8	0,9988	0,9987	0,9988
9	0,9989	0,9988	0,9989
10	0,9990	0,9990	0,9990

Из примера 3.17 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 1 результаты эффективных смещенных оценок $1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}$ и $P_{\text{vн}}(T_{\text{vн}})$ различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

Пример 3.18. В процессе испытаний на надежность ряда из 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний равно $\tau = 1000$ ч. Результаты расчета приведены в таблице 3.16.

Таблица 3.16

Результаты расчета СНДО примера 2 ($\tau = 1000$ ч, $R = 0$)

$N = n$	$T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0{,}7\tau -$ $- \tau \cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$	$T_{\mathrm{d}}(R = 0) = 2{,}4N\tau$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа $NB\tau$
1	3386	2400
2	5393	4800
3	7395	7200
4	9396	9600
5	11397	12000
6	13397	14400
7	15397	16800
8	17398	19200
9	19398	21600
10	21398	24000

Из примера 3.18 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 2 результаты эффективных смещенных оценок $T_{\tau 2}$ и T_{d} различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

Полученные новые оценки параметра p и параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения вероятностей по результатам испытаний, проводимых в соответствии с биномиальным планом, по сути своей, – это откорректированные в соответствии с принципом сбалансированности эффективные смещенные оценки, предложенные в предыдущих разделах книги части 3, т.е. наблюдается разумное согласование между эффективными смещенными оценками в рамках различных критериев. Так как наиболее простое и непротиворечивое решение по поиску эффективных смещенных оценок предлагает простой критерий смещенных оценок, то именно его следует использовать в качестве основного при поиске эффективных смещенных оценок параметра p и параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения вероятностей по результатам испытаний, проводимых в соответствии с различными планами испытаний.

3.12. Нахождение эффективной смещенной оценки гамма-процентной наработки на отказ (ресурса, срока сохраняемости) для биномиального плана испытаний

Постановка задачи. При условии подчинения наработки на отказ экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (средняя наработка на отказ) величина ГПНДО (далее – t_γ) вычисляется по формуле:

$$t_\gamma = -T_0 \ln(\gamma), \gamma \geq 0{,}95. \qquad (3.8)$$

С целью построения оценки ГПНДО ($\hat{t}_\gamma$) вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0 воспользоваться традиционной оценкой средней наработки на отказ, построенной для экспоненциального распределения [4, 5, 25]:

$$\hat{T}_{02} = \frac{S(R,n,\tau,s_i)}{R} \approx \frac{(n-R)\tau + R\tau/2}{R}, r > 0,$$

где S – суммарная наработка изделий; s_i – моменты отказов изделий.

Однако полученная таким образом оценка $\hat{t}_{\gamma 02} = -\hat{T}_{02} ln(\gamma)$ имеет существенные недостатки, а именно:

– является смещенной [21];

– является неэффективной [21];

– не позволяет получать количественные значения параметра t_γ по результатам испытаний, не давших отказов.

Для решения упомянутой выше задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку ($\hat{t}_{\gamma эф}$), если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок, в который входят и все оценки, полученные методом подстановки, включая и метод максимального правдоподобия, т.е. содержит в себе оценки с любым смещением, в том числе и с фиксированным – в виде функции от параметра или константы [2]. В ряде случаев найденные несмещенные эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [3]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок и не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценкам с точки зрения близости к оцениваемому показателю [9, 18].

Методы исследования и результаты. Рассмотрим класс оценок, представимых в виде $\hat{t}_\gamma = -\hat{T}_0 ln(\gamma)$, где $\hat{T}_0$ – некоторая оценка СНДО для биномиального плана испытаний, которая не имеет сильной зависимости от наступления моментов отказов s_i, что характерно для высоконадежных изделий [4, 5].

Тогда в качестве инструмента для нахождения эффективной оценки будем использовать характеристику W или балансировку A (см. разделы 1.6 и 3.11). Построим функционал $W(\hat{t}_\gamma)$, в основе которого лежит абсолютное суммарное смещение на оценке $\hat{t}_\gamma(R, n, \tau)$ от параметра $t_\gamma = -T_0\, ln(\gamma)$ по всем возможным величинам, принимаемым параметрами $T_0 = t \in [0; \infty]$, γ, n и τ:

$$W(\hat{t}_\gamma) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_1^\infty \frac{1}{t} / E\hat{t}_\gamma\big(\tau = 10^i\big) + tln(\gamma)/\partial t, \qquad (3.9)$$

где переменная интегрирования t – параметр з.р. СНДО; t – нормирующий множитель; $\hat{t}_\gamma\big(R, n, \tau = 10^i\big) = -\hat{T}_0\big(R, n, \tau = 10^i\big)ln(\gamma)$, а член в подынтегральном выражении определяется равенстовм $t\, ln(\gamma) = -t_\gamma$. В соответствии с формулой (3.8) математическое ожидание $E\hat{t}_\gamma(R, n, \tau)$ имеет вид:

$$E\hat{t}_\gamma(R, n, \tau) = \sum_{k=0}^{n} \hat{t}_\gamma b_n(k, p) = -\sum_{k=0}^{n} \hat{T}_0\, ln(\gamma)\, b_n(k, p).$$

Для балансировки $A(\hat{t}_\gamma)$ все построения аналогичны и в этом случае скобки абсолютной величины заменяем на обычные скобки.

Эффективная оценка ГПНДО должна обладать минимальной величиной функционала $Q = \big(A\big(\hat{t}_\gamma\big) + 1\big) \bullet W(\hat{t}_\gamma)$. Вынесем из-под знака интеграла выражение $(-ln(\gamma))$, что вполне обосновано, т.к. $\gamma < 1$ и $-\ln(\gamma) > 0$. Тогда формула (3.9) примет вид:

$$W\big(\hat{t}_\gamma\big) = ln(\gamma)W\big(\hat{T}_0\big), \qquad (3.10)$$

где $W(\hat{T}_0) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\int_1^\infty \frac{1}{t} / E\hat{T}_0(R, n, \tau = 10^i) - t/\partial t.$

Для балансировки $A(\hat{t}_\gamma)$ все построения аналогичны.

Заметим, что функционал $Q\big(\hat{T}_0\big) = \big(A\big(\hat{T}_0\big) + 1\big) \bullet W\big(\hat{T}_0\big)$ принимает минимальную величину (а вместе с ним и функционал $Q\big(\hat{t}_\gamma\big) =$ $= \big(A\big(\hat{t}_\gamma\big) + 1\big) \bullet W(\hat{t}_\gamma)$, если в качестве оценки параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок.

Для биномиального плана испытаний эффективной в классе смещенных оценок СНДО является

$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}7\tau - \tau \cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$

$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01 \cdot \tau - \tau \cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$

$– \tau^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 – ((R>0) + 2)/(n + 2))$.

Тогда эффективная смещенная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$, построенная в достаточно широком классе оценок [21], примет вид:

$$\hat{t}_{\gamma 1} = -ln\,(\gamma) T_{\tau 2}. \qquad (3.11)$$

Для испытаний, не давших отказов, оценку $\hat{t}_{\gamma 1}$ можно применять и для плана типа NВτ. Полученная таким образом оценка $\hat{t}_{\gamma 1}$ количественного значения ГПНДО t_γ имеет существенные преимущества, а именно:

– является эффективной в достаточно широком классе смещенных оценок [21];

– позволяет получать количественные значения t_γ по результатам испытаний, не давших отказов и проводимых по планам испытаний типа NБτ или $NB\tau$.

Проведенную работу уместно сравнить с другими работами, например, работа [21].

Пример 3.19. В качестве показателя надежности изделия используется ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(\gamma=0{,}95)$, который не должен быть менее 1500 ч. По результатам биномиальных испытаний одного изделия в течение 10000 ч отказы не возникали $R = 0$. Требуется сделать оценку $t_\gamma(\gamma=0{,}95)$ и проверку соответствия изделия требованиям к надежности.

Заметим, что в данном примере наработка 10000 ч не определяет предельное состояние изделия как невосстанавливаемого (отказов всех изделий не было), так и восстанавливаемого. Поэтому γ=0,95 является минимальным пределом для того, чтобы при этой вероятности выполнялось приближенное равенство ГПР ≈ ГПНДО.

Непосредственно из формулы $t_\gamma = – T_0 Ln(\gamma)$ следует, что прогнозируемая величина ГПР (ГПНДО) $\tilde{t}_\gamma(0{,}95)$ составит:

$T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0{,}7\tau – \tau \cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 – ((R=0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)) =$

$= 400+0,7*10000-10000/Ln(1–0,3/(1+0,3) = 45514$ ч.

$\tilde{t}_\gamma(0,95) = – T_0Ln(\gamma) = – 45514Ln(0,95) = 2334$ ч.

По результатам оценки величины ГПР (ГПНДО) $t_\gamma(0,95)$ можно сделать вывод о соответствии изделия требованиям к ГПР (ГПНДО). Время, в течение которого откажет не более 5% изделий, составит $\tilde{t}_\gamma(0,95) = 2334$ ч, что соответствует требованиям к надежности изделия ($t_\gamma(0,95) = 1500$ ч).

3.13. Нахождение эффективной смещенной оценки остаточного гамма-процентного ресурса для биномиального плана испытаний. Прогнозирование остаточного ресурса по результатам биномиальных испытаний, не давших отказов

Под остаточным ресурсом понимается суммарная наработка объекта от момента контроля его технического состояния до момента достижения его предельного состояния [27]. То есть остаточный ресурс – это ресурс, который исчисляется от величины наработки $t_н$ в текущий момент времени. В основе понимания долговечности изделия (его ресурса) лежит модель надежности [27], которая описывает закон распределения отказов. Внезапные отказы, носящие случайный характер, обычно довольно хорошо описываются экспоненциальным законом. Напротив, отказы, носящие название постепенных, во многих случаях довольно хорошо описываются нормальным законом [4]. У реального изделия часто совмещаются оба типа отказов. Изделие находится в работоспособном состоянии до первого из этих отказов. Пусть $P_1(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет внезапный отказ, а $P_2(s)$ – вероятность того, что за время s не произойдет постепенный отказ. В предположении, что отказы возникают независимо, вероятность безотказной работы будет равна $P_0(s) = P_1(s)P_2(s)$. ВБР $P_0(s)$ имеет сложное аналитическое выражение [4], что значительно затрудняет проведение расчетов. Однако на практике для большинства случаев составляющей $P_2(s)$ можно пренебречь, поэтому ВБР $P_0(s) = P_1(s)$ и $P_1(s)$ имеет экспоненциальный характер по предположению. Далее покажем, в каких случаях это происходит.

Чаще всего в качестве показателя долговечности используется гамма-процентный ресурс, совсем редко – средний ресурс. Это объясняется тем, что за время, равное среднему ресурсу, откажет половина изделий; с точки зрения безопасности и экономичности такая эксплуатация является неоправданной. В соответствии с работой [27] ГПР (t_γ) – суммарная наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах. Аналогично определяется остаточный гамма-процентный ресурс, а именно: ОГПР ($t_{\text{ост.}\gamma}$) – суммарная наработка объекта, исчисляемая от момента контроля его технического состояния, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах.

Изделия электронной техники характеризуются минимальной наработкой (далее – t_{min}), величина которой находится в пределах от 15 до 25 лет. Минимальной наработке t_{min} соответствует ГПР ЭРИ при $\gamma = 0{,}999$, т.е. вероятность постепенного отказа ЭРИ на относительно коротком временном участке, равном минимальной наработке, близка к нулю, что соответствует пологому участку нормального закона распределения.

Поэтому интенсивность отказов на начальном пологом участке нормального з.р. приближенно можно выразить формулой $\lambda_2(s) \cong \lambda_2 = const$, следовательно $P_2(s) = e^{-\lambda_2 s}$, где $\lambda_2 \ll \lambda_1$ – приближение константой интенсивности отказов на пологом участке кривой нормального закона распределения. Причем на этом пологом участке $P_2(s) > 0{,}95$ (определяет критерий соответствия выбранной экспоненциальной модели распределения). С другой стороны, для экспоненциального закона распределения вероятность отказа высоконадежного изделия выражается формулой $P_2(t) = e^{-\lambda_1 s}$. Из полученных приближений и равенства $P_0(s) = P_1(s)P_2(s) \cong e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \cong e^{-\lambda_1 s}$ получаем, что на пологом временном участке ВБР определяется с хорошим приближением экспоненциальным законом. В этом случае гамма-процентная наработка на отказ совпадает с гамма-процентным ресурсом.

То же самое относится и к сложному изделию, состоящему из большого количества ЭРИ.

Для невосстанавливаемых сложных изделий ГПР не превышает минимальную наработку любого ЭРИ, составляющих это сложное изделие, а вероятность γ обычно выбирают в пределах от 0,95 до 0,999. Такой выбор величин вероятности γ разграничивает временной промежуток использования изделия на интервалы, где начальный интервал ограничен величиной ГПР ($\gamma \geq 0{,}95$). Такое разграничение позволяет считать, что в пределах этого начального интервала (15–25 лет) модель надежности невосстанавливаемых сложных изделий $P_0(s) = P_1(s)$ находится в рамках влияния экспоненциального закона. Этот факт позволяет делать прогнозы величины ГПР (ОГПР) невосстанавливаемых сложных изделий в пределах установленных ограничений (≤25 лет).

Модель надежности. На интервале [0; 25] лет, ограниченном величиной минимальной наработки ЭРИ t_{min}, наработка на отказ невосстанавливаемых сложных изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (средняя наработка на отказ). Величина ВБР (далее – $P_0(s)$) за заданное время (далее – $s, s \leq t_{min}$) находится из выражения:

$$P_0(s) = e^{\left(-\frac{s}{T_0}\right)}. \qquad (3.12)$$

Из формулы (3.12) легко выводится расчетная формула для ГПР ($\gamma_{н} = P_0(s = t_{н})$):

$$t_{Н} = -T_0 \ln(\gamma_{н}), \gamma \geq 0{,}95. \qquad (3.13)$$

Начальную (нормированную) величину ГПР $t_{Н}$ устанавливают по факту (в техническом задании). Устанавливая (нормируя) величину вероятности ($\gamma_{п}$) для продленного ресурса (далее $- t_{п}, \gamma_{п}(t_{п}) < \gamma_{н}(t_{н})$), легко рассчитать ОГПР изделия (далее $- t_{ост.\gamma}$):

$$t_{ост.\gamma} = t_{п} - t_{н} = -T_0 \ln(\gamma_{п}) - \left(-T_0 \ln(\gamma_{н})\right) = T_0 \ln(\gamma_{н}) - T_0 \ln(\gamma_{п}). \qquad (3.14)$$

Из формул (3.12)–(3.14) легко рассчитать вероятность γ для ОГПР $t_{ост.\gamma}$, а именно: $\gamma = e^{\left(-\frac{t_{ост.\gamma}}{T_0}\right)}$.

Устанавливая (нормируя) величину вероятности $\gamma_{п}$ для продленного ресурса $t_{п} = t_{Прогноз}$: $\gamma_{п}(t_{п}) = 0{,}95 = \gamma_{Прогноз}(t_{Прогноз})$, можно прогнозировать ОГПР изделия в соответствии с формулой (3.14), а именно:

$$t_{Прогноз.ост.\gamma} = T_0 \left(ln(\gamma_{н}) - ln\left(\gamma_{Прогноз}\right)\right).$$

Рассмотрим случай проведения испытаний в соответствии с планом NБτ.

С целью построения оценки ОГПР (далее – $\hat{t}_{ост.\gamma}$) вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0, воспользоваться традиционной точечной оценкой СНДО, построенной для экспоненциального распределения [4, 28]:

$$\widehat{m} = \frac{\text{Т}^*}{R} \text{ при } R > 0,$$

где T^*– суммарная наработка; R – количество отказов.

Однако полученная таким образом оценка имеет существенные недостатки, а именно:

– является смещенной;

– является неэффективной;

– не позволяет получать количественные значения $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ по результатам испытаний, не давших отказов.

Для решения упомянутой выше задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку ОГПР ($\hat{t}_{\text{ост.}\gamma\text{эф}}$), если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок. Следует отметить, что класс состоятельных оценок, в который входят и все оценки, полученные методом подстановки, включая и метод максимального правдоподобия, содержит в себе оценки с любым смещением, в том числе и с фиксированным – в виде функции от параметра или константы [1].

В ряде случаев найденные несмещенные эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [3]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок и не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценками с точки зрения близости к оцениваемому показателю.

Методы и решения. В качестве инструмента для нахождения эффективной оценки будем использовать характеристику $Q = (A+1)W$ (см. разделы 1.6 и 3.11). Построим критерий выбора эффективной оценки на множестве оценок $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, N, \tau)$, основанном на абсолютном суммировании смещений от параметра $t_{ост.\gamma} = T_0\ (ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п))$ для всех возможных величин, принимаемых параметрами биномиальных испытаний $(T_0, s) = 1 - e^{\left(-\frac{s}{T_0}\right)}$ и N. Как и в предыдущем разделе, строятся функционалы W и A:

$$W\left(\hat{t}_{ост.\gamma}\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\frac{\sum_{i=3}^{5}\int_1^{\infty}\frac{1}{t}}{E\hat{t}_{ост.\gamma}(R,n,\tau=10^i)} - t(ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п))/\partial t. \quad (3.15)$$

где переменная интегрирования t – параметр з.р. СНДО, t – нормирующий множитель, $\hat{t}_{ост.\gamma}\left(R, n, \tau = 10^i\right) = \hat{T}_0\left(R, n, \tau = 10^i\right)(ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п))$, а член в подынтегральном выражении определяется равенством:

$$t(ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п)) = t_{ост.\gamma}.$$

Для балансировки $A(\hat{t}_{ост.\gamma})$ все построения аналогичны и в этом случае скобки абсолютной величины заменяем на обычные скобки.

В соответствии с формулой (3.14) оценку $\hat{t}_{ост.\gamma}$ можно представить в виде:

$$\hat{t}_{ост.\gamma} = \hat{T}_0(ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п)),$$

где $\hat{T}_0$ – некоторая оценка СНДО. Воспользовавшись свойствами биномиального распределения с параметром p [1, 2], найдем

$$E\hat{t}_{ост.\gamma}\left(R, n, \tau = 10^i\right) = \left(ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п)\right)E\hat{T}_0\ .$$

Эффективная оценка ОГПР должна обладать минимальной величиной функционала $Q = \left(A\left(\hat{t}_{ост.\gamma}\right) + 1\right) \bullet W(\hat{t}ост._{\gamma})$. Вынесем из-под знака интеграла $(ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п))$, что вполне обосновано, т.к. выполняются неравенства: $\gamma < 1$; $-\ln(\gamma) > 0$; $\gamma_н > \gamma_п$; $\ln(\gamma_н) - \ln(\gamma_п) > 0$. Тогда формула (3.15) с учетом (3.14) примет вид:

$$W(\hat{t}_{ост.\gamma}) = (\ ln(\gamma_н) - ln(\gamma_п))W(\hat{T}_0), \quad (3.16)$$

где $W(\hat{T}_0) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3}\ \sum_{i=3}^{5}\int_1^{\infty}\frac{1}{t}/E\hat{T}_0(R, n, \tau = 10^i) - t/\partial t.$

Для балансировки $A(\hat{t}_{ост.\gamma})$ все построения аналогичны и в этом случае скобки абсолютной величины заменяем на обычные скобки. В соответствии с разделом 3.11 функционал $Q(\hat{T}_0) = \left(A(\hat{T}_0) + 1\right) \bullet W(\hat{T}_0)$ принимает минимальную величину, а вместе с ним и функционал $Q(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}) = \left(A(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}) + 1\right) \bullet W(\hat{t}\text{ост.}_{\gamma})$, если в качестве оценки параметра $\hat{T}_0$ подставить его эффективную оценку, построенную в достаточно широком классе смещенных оценок.

Для биномиального плана испытаний эффективной в классе смещенных оценок СНДО является:

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}7\tau - \tau \cdot 0{,}6/\text{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01 \cdot \tau - \tau \cdot 0{,}2/\text{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$$
$$- \tau^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}/\text{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)).$$

Тогда эффективная смещенная оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$, построенная в достаточно широком классе смещенных оценок [9, 12, 20], примет вид:

$$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, n, \tau) = (\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}}))T_{\tau 2}, \gamma_{\text{п}} \geq 0{,}95. \quad (3.17)$$

Полученная таким образом оценка $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ доставляет минимум функционалу $Q(\hat{t}_{\text{ост.}\gamma})$ в достаточно широком классе смещенных оценок СНДО (см. раздел 3.11) и по определению является эффективной оценкой ОГПР в этом классе оценок. Оценка $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ имеет существенные преимущества в сравнении с традиционными оценками ОГПР, а именно:

– является эффективной в достаточно широком классе смещенных оценок [9, 12, 20];

– позволяет делать оценку ОГПР по результатам испытаний, не давших отказов.

Пример 3.20. По результатам безотказной эксплуатации десяти изделий в течение 10000 ч было принято решение продолжить эксплуатацию этих изделий еще в течение 10000 ч с целью определения прогнозной величины ОГПР $t_{\text{Прогноз.ост.}\gamma}$ при $\gamma_{\text{прогноз}}$ = 95%. По результатам проведенной эксплуатации отказы обнаружены не были.

Решение. В качестве оценки СНДО T_0 в формуле $t_\gamma(0,95)$ = = – $T_0 Ln(\gamma)$ следует применять эффективную смещенную оценку при R = 0 $T_{\tau 2}(R=0)$ = 400 + 0,7τ – τ·0,6/Ln(1 – ((*R=0)* + 0,3)/(*n* + 0,3)) = 400 + + 0,7·20000 –20000·0,6/Ln(1 – 0,3)/(*10* + 0,3)) = 691017 ч.

Тогда прогнозируемая величина ГПР $t_\gamma(0,95)$ составит:

$$\tilde{t}_\gamma(0,95) = -\,T_{\tau 2} Ln(\gamma) = -\,691017 \cdot Ln(0,95) = 35444 \text{ ч.}$$

Следовательно, изделия, чьи наработки в эксплуатации не превышают 10000 ч, смогут проработать еще $t_{ост.\gamma}$ = $\tilde{t}_\gamma(0,95)$ – 10000 = = *35444 – 10000 = 25444* ч с вероятностью γ = exp{–25444/ $T_{\tau 2}$ } = 0,963.

Эту задачу можно решить другим способом, если вычислить вероятность $\gamma_н$ за 10000 ч, т.е. $\gamma_н$ = exp{–10000/ $T_{\tau 2}$ } = 0,9856.

$$\hat{t}_{\text{Прогноз.ост.}\gamma} = (ln(\gamma_{\text{н}}) - ln(\gamma_{\text{критерий}} = 0{,}95))T_{\tau 2} =$$

$$= \left(ln(0{,}9856) - ln(0{,}95)\right) * 691017 = 25444 \text{ ч;}$$

Заметим, что продолженная наработка, равная 25444 ч, имеет статус остаточного ресурса при γ = 0,963, т.е. можно сделать вывод, что продолженный ОГПР составил 25444 ч при $\gamma = 96{,}3\%$. То есть продолженный ОГПР изделий, чьи сроки эксплуатации достигнут 10000 ч, смогут безотказно проработать еще 25444 ч с высокой вероятностью, равной 0,963.

По результатам прогноза $t_{\text{Прогноз.ост.}\gamma}$ можно сделать вывод, что прогнозируемый ОГПР составил 25444 ч при $\gamma = 96{,}3\%$.

Приведем для сравнения традиционное решение примера 1.

Традиционно для испытаний, не давших отказов, оценку ВБР за первичную наработку, равную 20000 ч, оценивают параметр T_0 (вместо точечной оценки) по нижней доверительной границе СНДО с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}9$ (не путать с вероятностью «гамма»), то результат в соответствии с работой [28] составит:

$$T_{01н} = \frac{2t_{\Sigma}}{\chi^2(1-\alpha;2r+1)} = (2 \cdot 10 \cdot 20000)/2{,}71 = 147601 \text{ ч}],$$

где t_{Σ} − суммарная наработка изделия; $\chi^2(1-\alpha;2r+1)$ – квантиль χ^2-распределения с $(2r+1)$-й степенью свободы (для плана испытаний NБτ); $(\alpha = 1-\gamma = 1 - 0{,}9 = 0{,}1)$ − уровень значимости; согласно ГОСТ Р 50779.26–2007 в соответствии с работой [28]:

$$\gamma_н(t_н) = exp\left\{-\frac{s = 10000}{T_{01н} = 147601}\right\} = 0{,}934 < 0{,}95.$$

То есть первичная (или продолженная) наработка, равная 10000 ч, соответствует ГПР группы изделий при $\gamma = 93{,}4$ %, что ниже требуемых 0,95%, поэтому следует продолжить эксплуатацию. Осуществлять прогнозирование в рамках заложенных ограничений невозможно.

Выводы к разделу 3

1. Полученные эффективные составные оценки:

– ВБР:

$$– \tilde{p}_{20}(R=0) = \tilde{w},\ \tilde{p}_{20}(R>0) = R / n,$$

где $\tilde{w}(R=0) = w(0{,}993;n,R)$, $\tilde{w}(R>0) = w(0{,}75;n,R)$;

$$– \tilde{p}_{\tau}(g;T_p(R,\tau,n)) = 1 – exp(–g/ T_p),$$

где g – время, за которое рассматривают вероятность, τ – время испытаний, $T_p(R=0) = 110 \cdot n\tau$, $T_p(R>0) = (n\tau – R\tau/2)/(R+0{,}35)$. Применяется там, где необходимо знать зависимость от времени испытаний τ и времени, за которое оценивается вероятность, в том числе при прогнозировании величины ВБР, но не более чем на 30 – 50%;

– СНДО:

$$T_{\tau 2}(R=0) = 400 + 0{,}7\tau – \tau \cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 – ((R=0) + 0{,}3)/(N + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R>0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(N + 2)) -$$
$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(N + 2));$$

– оценку гамма-процентной наработки (ресурса) $\gamma \geq 0{,}95$

$\hat{t}_{\gamma 1} = -ln\,(\gamma)T_{\tau 2}$;

– оценку остаточного гамма-процентного ресурса $\gamma \geq 0{,}95$

$\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, n, \tau) = (\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}}))T_{\tau 2}\,, \gamma_{\text{п}} \geq 0{,}95.$

Предложенные оценки являются эффективными в достаточно широком классе смещенных оценок для биномиального плана испытаний.

2. Для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний оценки СНДО $T_{\tau 2}$ и T_d (см. раздел 2.7) приблизительно равны между собой для случая, когда в процессе испытаний отказы не возникали, что и следовало ожидать. Выбор, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

3. Полученная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1} = -ln\,(\gamma)T_{\tau 2}$ является простой и более эффективной по сравнению с традиционной и уступает незначительно оценке $\hat{t}_{\gamma\text{эф}}$ в случае ее существования с точки зрения близости к t_γ при использовании биномиального плана испытаний.

Полученная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– является эффективной в достаточно широком классе оценок [21];

– позволяет получать количественное значение t_γ по результатам испытаний, не давших отказов.

Полученная оценка ГПНДО $\hat{t}_{\gamma 1}$ рекомендуется для испытаний, не давших отказов, проводимых по биномиальному плану.

4. Полученная оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}(R, n, \tau) = (\ln(\gamma_{\text{н}}) - \ln(\gamma_{\text{п}}))T_{\tau 2}$ согласно формуле (3.18) является простой и более эффективной по сравнению с традиционной, но уступает незначительно оценке $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma\ \text{эф}}$ в слу-

чае ее существования с точки зрения близости к t_γ при использовании биномиального плана испытаний.

Полученная оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ имеет существенные преимущества, а именно:

– является эффективной в достаточно широком классе смещенных оценок;

– позволяет получать количественные значения $t_{\text{ост.}\gamma}$ по результатам испытаний, не давших отказов.

Предлагаемый метод прогнозирования и полученная эффективная оценка ОГПР $\hat{t}_{\text{ост.}\gamma}$ имеют направленность практического применения при безотказной эксплуатации изделий.

5. По результатам исследования, проведенного в данной третьей части книги, можно отметить, что наблюдается разумное согласие между статистическими оценками, полученными в рамках предложенных критериев эффективности смещенных оценок.

6. Простой критерий эффективности смещенных оценок можно выбрать в качестве основного критерия в силу своей простоты и достаточности.

7. Статистические оценки показателей надежности, полученные в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок, как и сам простой критерий, имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации однородной продукции различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.

4. СОСТАВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

4.1. Байесовские оценки. Введение

В настоящее время проявляется повышенный интерес к байесовской теории среди специалистов в области прикладной теории надежности. Однако байесовский подход не является общепринятым среди специалистов в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности его применения при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что он допускает использование субъективных вероятностей [6]. То есть в байесовских методах предполагается, что априорное распределение известно до начала наблюдений и не предлагается конструктивных способов его выбора. В байесовском подходе предполагается, что случайность есть мера нашего незнания, т.е. предварительные знания о случайном событии позволяют предсказать его с «большей» вероятностью. В противовес этому, в частотном подходе предполагается, что случайность есть объективная неопределенность, т.е. единственным возможным средством анализа является проведение серии испытаний [1, 2].

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного распределения имеет вид [1]:

$$q(x|t) = f_\theta(x)q(t)/f(x), \tag{4.1}$$

где t – реализация случайного параметра θ с некоторой (априорной) плотностью распределения $q(t), t \epsilon \Theta$; $f_\theta(x) = f(x|\theta\ =)$ – условная плотность распределения случайной величины X,

$$f(x) = \int f_\theta(x)q(t)dt\,.$$

Само апостериорное распределение параметра θ будем обозначать через Q_x. Тогда байесовская оценка, соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид:

$$\hat{\theta}_Q(X) = E(\theta|x) = \int tq(t|X)dt = \int tQ_x(dt). \qquad (4.2)$$

Из формулы (4.2) следует, что результат байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ ограничен выбранным априорным распределением как неизменным постулатом [6]. Ряд авторов исследует вопросы выбора априорного распределения, оставаясь в рамках априорного подхода [6]. Однако свойства байесовской оценки остаются ограниченными данным выбором. Примером могут служить сопряженные априорные распределения [6, с. 46].

С одной стороны, эти заложенные в правило предварительные знания несут в себе однократные (или нет) финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [6], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества [6]. В этих условиях вполне естественно возникает вопрос – есть ли необходимость в байесовских оценках в практических задачах надежности. Чтобы ответить на этот вопрос необходимо разобраться в частностях.

Рассмотрим пример [6, 30, 31]. Пусть процесс Бернулли с параметром $\theta = p$ и выборкой объема N имеет априорное бета-распределение с параметрами α и β. Тогда условная плотность $q(p|X)$, где X – случайное число отказов, $X = R$, выразится формулой

$$q(p|R) = \frac{\Gamma(R+\alpha+\beta)}{\Gamma(R+\alpha)\Gamma(N-R+\beta)} p^{R+\alpha-1}(1-p)^{N-R+\beta-1} \qquad (4.3)$$

где Г() – гамма-функция.

Из формулы (4.3) следует, что апостериорное распределение является тоже бета-распределением с параметрами $(R+\alpha)$ и $(N-R+\beta)$. Байесовская оценка случайного параметра p равна математическому ожиданию $E(p|R)$, т.е.

$$\hat{\theta}_Q(X) = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}. \qquad (4.4)$$

Заметим, что математическое ожидание априорного бетараспределения, т.е. априорная оценка параметра p до наблюдения, равна $\hat{p}_\alpha = {}^{\alpha}/_{\alpha + \beta}$ согласно работе [4], а оценка по наблюдению (классическая оценка [3, с. 19]), игнорирующая априорное распределение, равна $\hat{p} = \frac{R}{N}$ согласно работе [1].

4.2. Формулировка составной байесовской оценки

В рамках биномиальных испытаний байесовская оценка $\hat{\theta}_Q(X) = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}$ группируется вблизи установленного предела *β/(α+β)*, т.е. дает результаты, не выходящие за рамки дозволенного, определенного выбором вида распределения и его параметров α и β по результатам испытаний изделий предыдущих партий. Такая модель поведения оценки не отражает реальный мир и обслуживает период стабильной ситуации. Как только устанавливаются границы, в пределах которых ведется рассуждение, то выход уже за эти границы ($\alpha \pm \varepsilon$; $\beta \pm \varepsilon$) становится невозможным при любом исходе в процессе испытаний. Однако смыслом оценки (статистической оценки) и поставленной задачи как раз и является заметить этот выход за установленные границы и откорректировать их ($\alpha = \alpha \pm \varepsilon$; $\beta = \beta \pm \varepsilon$), т.е. изменить постановку задачи по результатам испытаний с целью получения адекватного решения. То есть в байесовском подходе не верна сама постановка, поэтому и задача оценки истинной величины показателя надежности при такой постановке не имеет адекватного решения [9, 44]. Вполне естественно требовать от оценки адекватные реакции на изменение внешних условий, влияющих на надежность, таких как нарушение в технологическом процессе, изменение условий эксплуатации и т.п.

Зададимся вопросом – насколько сдерживается чувствительность байесовской оценки к нарушению стабильности в зависимости от априорной оценки $\hat{p}_{\alpha} = {}^{\alpha}/_{\alpha + \beta}$.

На практике, как правило, рассматривают модели однородной продукции, т.е. каждое из изделий оцениваемой партии характеризуют одинаковой величиной выбранного параметра надежности. В случае байесовского метода статистического оценивания рассматривается уже модель неоднородной продукции, однако в процессе стабильного производства не считается нормальным выпуск изделий с различной надежностью, что ставит под сомнение адекватность применения методов байесовского статистического оценивания.

Рассмотрим крайние модели, основанные на методах байесовского статистического оценивания. Приведем пример, когда плотность априорного распределения параметра p одинаково максимальна и равномерна, что соответствует модели максимальной неоднородности выпускаемой продукции. Для этого рассмотрим биномиальный план испытаний и предположим, что величина параметра p равномерно распределена в интервале [0; 1]. Это допущение соответствует полному отсутствию данных о надежности изделия, т.е. максимальной неопределенности относительно интервала величин, принимаемых параметром p. Согласно разделу 3.2 байесовская оценка в этом случае имеет вид: $\bar{\bar{p}}(R, n) = (R + 1)/(n + 2)$, т.е. соответствует апостериорной байесовской оценке при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ в соответствии с формулой (4.4).

Рассмотрим другой экстремальный пример, когда плотность априорного распределения параметра p максимально вырождена в одной точке или в небольшой области, что соответствует модели однородной продукции. В этом случае для биномиального плана следует использовать классическую оценку $\hat{p} = \frac{R}{N}$.

В таблице 4.1 приведены сравнительные результаты байесовской и классической оценок [3, с. 19] на примере априорного бета-распределения. Для однородной продукции наиболее подходит априорное бета-распределение с параметрами α << β, что и взято за основу при сравнении в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Сравнительные результаты байесовской и классической оценок

$\hat{\theta}_Q(X) = \\ = \frac{R+\alpha}{N+\alpha+\beta}$	$\hat{p}_\alpha = \\ = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\hat{p} = \frac{R}{N}$	$\bar{\bar{p}}(R,n) = \\ = \frac{R+1}{n+2}$, α = 1, β = 1	R	N	α	β
11/16=0,6875	0,8333	0,25	2/6=0,333	1	4	10	2
12/16=0,75	0,8333	0,5	3/6=0,5	2	4	10	2
13/16=0,8125	0,8333	0,75	4/6=0,666	3	4	10	2
9/16=0,562	0,6666	0,25	2/6=0,333	1	4	8	4
10/16=0,625	0,6666	0,5	3/6=0,5	2	4	8	4
11/16=0,687	0,6666	0,75	4/6=0,666	3	4	8	4

Из таблицы 4.1 следует, что результаты байесовской оценки при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $\hat{p}_\alpha = {}^{\alpha}/_{\alpha+\beta}$, в то время как классическая оценка $\hat{p} = \frac{R}{N}$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Аналогичные результаты получены в работе [30]. Заметим еще раз, что в данном случае рассматриваются модели однородной продукции [4]. Не следует в моделях однородной продукции использовать байесовские оценки, предназначенные для моделей неоднородной продукции, что и отражено в таблице 4.1.

Моделируя различные ситуации окружающего мира, следует помнить о его постоянной изменчивости. Так, различные партии изделий имеют различные величины параметров априорного распределения, а в случае нарушения технологической дисциплины эти различия становятся еще сильнее.

Однако заметить эти отличия не позволяет не только зафиксированный выбор вида априорного распределения, но и зафиксированный выбор величин параметров этого распределения, осуществленный на выборках различных партий изделий еще до выпуска контролируемой партии. То есть этот выбор основан на опыте стабильного выпуска предыдущих партий. Таким образом, байесовская оценка контролируемой партии напрямую зависит не только от вида априорного распределения, исхода испытаний и объема выборки N, но и от выбранных параметров априорного распределения.

На практике наиболее часто встречающийся случай – это двухпараметрическое априорное распределение. Поэтому дальнейшее изложение, не нарушая общности рассуждений, проведем для двухпараметрического случая $q(t, \alpha, \beta)$.

Проблему неадекватной реакции на изменения, произошедшие в технологическом процессе контролируемой партии изделий, удастся решить, если искомую байесовскую оценку показателя надежности каждой контролируемой партии изделий искать в новой постанове задачи, а именно в виде составной оценки, характеризующейся априори установленным распределением (или установленными распределениями), параметры которых заранее определены в зависимости от результатов будущих испытаний изделий этой партии. То есть параметры α, β должны определять не весь технологический процесс, а только контролируемую партию в зависимости от результата испытаний. Для описанного примера составную байесовскую оценку следует представлять в виде $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_i, \beta_i)$, где $i = 0,1,2.., N$ и при $R = r, i = r$; а получаемую плотность составного априорного бета-распределения – в виде $q(t, \alpha_i, \beta_i)$, где α_i, β_i – набор параметров. Данная модель позволит по результатам составной байесовской оценки определять реальные изменения, а не стабильность ситуации.

Ясно, что подбор параметров α_i, β_i зависит от конкретного плана испытаний и вероятности возникновения исхода испытаний $P(r, N, p)$, которую необходимо выбирать максимальной $P_{max} = P(r, N, p_{max})$ для данного плана испытаний и исхода с целью получения оценки $\hat{p} = p_{max}$ параметра p, что одновременно определяет априорную оценку достигнутого уровня надежности контролируемой партии $\hat{p}_\alpha$, т.е. $\hat{p} = \hat{p}_\alpha = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}$. Заметим, что априори известная плотность распределения получается не по результатам испытаний различных партий изделий, а по известным зависимостям вероятности возникновения исходов для конкретного плана испытаний, что нивелирует ошибки, зависящие от свойств используемой оценки искомых (истинных) параметров α, β в классическом случае.

Заметим еще раз, что параметры α_i, β_i не являются в чистом виде априорными, а являются выбранными вариантами из заранее определенного набора параметров в зависимости от результатов испытаний контрольной партии. Определенная таким образом пара параметров α_r, β_r из уже определенного набора вариантов, определенных по правилу максимальной вероятности возникновения событий (отказов) конкретного плана испытаний, характеризует надежность контролируемой партии изделий. Априорной информацией можно считать само распределение (например, бета-распределение параметра p – рандомизированного параметра биномиального распределения).

Составная байесовская оценка не зависит от вида испытуемых изделий, а зависит только от известной зависимости вероятности возникновения исхода испытаний, которая определяется конкретным планом испытаний и в силу выбора вероятности по правилам максимизации вероятности возникновения отказа не изменится. Это и является основным преимуществом составной байесовской оценки – она определяется для конкретного плана испытаний однократно по правилам максимизации вероятности возникновения отказа.

4.3. Построение составной байесовской оценки на примере априорного бета-распределения

Пусть процесс испытаний Бернулли с параметром $\theta = p$ проводится над изделиями с выборкой объема $N = 4$. Для этого плана испытаний задано априорное составное бета-распределение с параметрами α_r и β_r. В соответствии с формулами (4.2) и (4.3) байесовская оценка примет вид согласно работам [6; 31, с. 107] и формуле (4.4):

$$\hat{\theta}_Q(R = r, N, \alpha_r, \beta_r) = \int tq(t|X)dt =$$

$$= \int_0^1 p \frac{\Gamma(r + \alpha_r + \beta_r)}{\Gamma(r + \alpha_r)\Gamma(N - r + \beta_r)} p^{r+\alpha_r-1}(1 - p)^{N-r+\beta_r-1}\, dp =$$

$$= \frac{r + \alpha_r}{N + \alpha_r + \beta_r},$$

где $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – случайное число отказов; $r -$ реализация с.в. R; с.в. R_i подчиняется закону Бернулли с параметром $p, 0 \leq p \leq 1$, т.е. R_i – дискретная с.в., принимающая всего лишь два целых значения 0 и 1 с вероятностями $P(R_i = 1|p) = p$ и $P(R_i = 0|p) = 1 - p = q$; $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$ – статистика, которая подчиняется биномиальному закону распределения $b(r, N, p) = C_N^r p^r (1 - p)^{N-r}$ с параметрами N и p, C_N^r – число сочетаний r из N элеменов.

Решим классическую задачу определения максимума функции $b(r,N,p)=C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$ относительно переменной p. Для этого прологарифмируем функцию $b(r,N,p)=C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$, возьмем производную и приравняем ее нулю. Решение полученного уравнения дает известную классическую оценку вероятности отказа для биномиального распределения $\hat{p}=\frac{R}{N}$ согласно работе [3, с. 19] (несмещенную и эффективную).

Ясно, что классическая оценка $\hat{p}=\frac{R}{N}$ доставляет максимум функции $b(r,N,p)=C_N^r p^r (1-p)^{N-r}$ и определяет достигнутый уровень надежности и величину априорной оценки в зависимости от исхода испытаний, т.е. $\hat{p}=\frac{R}{N}\cong\hat{p}_\alpha=\frac{\alpha_r}{\alpha_r+\beta_r}$.

В таблице 4.2 приведены сравнительные результаты составной байесовской оценки с набором параметров $\alpha_r\left(\hat{p}=\frac{r}{N}\right)$, $\beta_r\left(\hat{p}=\frac{r}{N}\right)$ и классической (эффективной и несмещенной), где вероятность возникновения исхода $b(r,N,p), r=0,1,2..,N$ выбиралась максимальной для конкретных плана и исхода испытаний, что определило априорную оценку $\hat{p}_\alpha$ параметра p до наблюдения, т.е. $\hat{p}=\frac{R}{N}\cong\hat{p}_\alpha=\frac{\alpha_r}{\alpha_r+\beta_r}$.

Таблица 4.2

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_r, \beta_r)$ с набором параметров $\alpha_r(\hat{p} = \frac{r}{N})$, $\beta_r\left(\hat{p} = \frac{r}{N}\right)$ и классической оценки $\hat{p} = \frac{R}{N}$

$\hat{\theta}_Q = = \dfrac{(R = r) + \alpha_r}{N + \alpha_r + \beta_r}$	$\hat{p} = \dfrac{R}{N}$	$\hat{p}_\alpha = \dfrac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}$	R	N	α_r	β_r	$b()$
1/29=0,034	0	1/25=0,04	0	4	1	24	0,85
3/12=0,25	0,25	2/8=0,25	1	4	2	6	0,42
7/14=0,5	0,5	5/10=0,5	2	4	5	5	0,37
9/12=0,75	0,75	6/8=0,75	3	4	6	2	0,42
29/30=0,96	1	25/26=0,96	4	4	25	1	0,84

Из таблицы 4.2 следует, что апостериорная оценка (составная байесовская оценка) $\hat{\theta}_Q$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Такая оценка близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{\theta}_Q \cong \hat{p} = \frac{R}{N}$ при условии, что каждая составная часть априорной оценки определена максимальной вероятностью возникновения исхода.

Докажем этот факт:

$$\hat{\theta}_Q(R = r, N, \alpha_r, \beta_r) = \frac{r + \alpha_r}{N + \alpha_r + \beta_r} =$$

$$= \frac{\frac{r}{\alpha_r + \beta_r} + \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta_r}}{1 + \frac{N}{\alpha_r + \beta_r}} \cong \frac{\frac{r}{\alpha_r + \beta_r} + \frac{r}{\mathrm{N}}}{1 + \frac{N}{\alpha_r + \beta_r}} =$$

$$= \frac{\frac{r \cdot r}{N} + \frac{r \cdot \alpha_r}{\mathrm{N}}}{r + \alpha_r} = \frac{r}{N} \cdot \frac{r + \alpha_r}{r + \alpha_r} = \frac{r}{N}.$$

Еще одним преимуществом составной байесовской оценки является возможность оценивать показатели надежности изделий величиной, отличной от нуля и единицы.

Следует заметить, что для целочисленных значений $R = 0$ и $R = N$ исходов биномиальных испытаний априорные вероятности возникновения отказа $\hat{p}_\alpha(0)$ и $\hat{p}_\alpha(N)$ следует ограничить вещественными значениями, отличными от нуля и единицы (таблица 4.2). В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка совпадет с классической $\hat{p} = \frac{R}{N}$. Что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной.

Так как составную байесовскую оценку можно сколь угодно близко приблизить к классической и сделать ее практически несмещенной и эффективной, то нет смысла сравнивать по эффективности составную байесовскую оценку с произвольной байесовской оценкой. Проигрыш по эффективности любой байесовской оценки, построенной для исследуемого плана испытаний, очевиден.

Неоднозначность выбора коэффициентов α_r и β_r можно отрегулировать минимизацией дисперсии бета-распределения согласно работе [2, п. 2.16].

В силу неоднозначного выбора параметров α_r и β_r можно построить несколько составных байесовских оценок $\hat{\theta}_Q$ примерно равнозначных. Формально, когда сравниваемые оценки являются смещенными и имеют одинаковую минимальную сумму квадрата относительных смещений математического ожидания этих оценок от параметра p [30], следует дополнительно рассматривать функционал, основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}_Q$ от параметра p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, N, r. В этом случае оценку с минимальной суммой математических ожиданий квадратов относительных уклонений от параметра p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p, N, r, следует признать более эффективной [9, 20].

Заметим еще раз, что адекватная постановка байесовской оценки (составная байесовская оценка) в конечном итоге приводит к классической несмещенной и эффективной оценке $\hat{p} = \frac{R}{N}$, т.е. к частотному подходу в задачах однородной продукции, что делает необходимость в байесовской оценке для биномиального плана испытаний ничтожной.

4.4. Точечная составная оценка как альтернатива байесовской оценки на примере априорного бета-распределения

Разумной альтернативой классической оценки, а следовательно и составной байесовской оценки в части биномиальных испытаний, в процессе которых отказы не возникали, может служить смещенная точечная составная оценка вероятности отказа изделия. Для биномиального плана испытаний можно в качестве эффективной в классе смещенных оценок выбрать составную оценку вида (см. раздел 3):

$$\tilde{P}_4 = 1 - p_4,\ p_4 = w(0{,}993;n,R=0) \text{ и } p_4 = R/n,\ R>0,$$

где w(0,993;n,R) – решение уравнения

$$F_R(r;n,w) = \sum_{k=0}^{r} P_n(k,w) = 0{,}5+x,$$

где $P_n(k, w) = C_n^r w^r (1 - w)^{n-r}$ [25].

Оценка p_4 обладает аналогичными с составной байесовской оценкой $\hat{\theta}_Q$ свойствами, а именно:

– оценка $\tilde{p}$ близка к классической (эффективной и несмещенной) $\hat{p} = \frac{R}{N} \cong \hat{\theta}_Q$;

– величина оценки p_4 для испытаний, не давших отказов, отлична от нуля.

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q(R, N, \alpha_r, \beta_r)$ с составной оценкой p_4 при $R = r$ приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Сравнительные результаты составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ с набором параметров $\alpha_r\left(\hat{p} = \frac{R}{N}\right)$, $\beta_r\left(\hat{p} = \frac{R}{N}\right)$ и составной оценкой p_4

$\hat{\theta}_Q = \dfrac{(R = r) + \alpha_r}{N + \alpha_r + \beta_r}$	$\hat{p} = \dfrac{R}{N}$	p_4	R	N	α_r	β_r	$b()$
1/29=0,034	0	0,007	0	4	1	24	0,85
3/12=0,25	0,25	0,25	1	4	2	6	0,42
7/14=0,5	0,5	0,5	2	4	5	5	0,37
9/12=0,75	0,75	0,75	3	4	6	2	0,42
29/30=0,96	1	1	4	4	25	1	0,84

Из сказанного следует, что использование байесовских оценок является ошибочным и необходимости их использования в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для групп однородной продукции, не имеется.

Оптимальным вариантом замены байесовским оценкам служат интегральные смещенные оценки [24, 25], которые наилучшим образом помогают избежать неопределенность при $R=0$.

В таблице 4.4 приведены сравнительные результаты байесовских $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_3$, классической $\tilde{P}_2$ и интегральной $\tilde{P}_4$ оценок на примере априорного бета-распределения. Для однородной продукции наиболее подходит априорное бета-распределение с параметрами $\beta >> \alpha$, что и взято за основу при сравнении в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Сравнительные результаты байесовских,
классической и интегральной оценок

R	N	β	α	$1-\tilde{\tilde{p}}_\alpha = \beta/(\alpha+\beta)$	$\tilde{\tilde{P}}_1$	$\tilde{\tilde{P}}_3$	$\tilde{\tilde{P}}_2$	$\tilde{\tilde{P}}_4$
0	4	94	2	94/96=0,979	98/100=0,98	5/6=0,833	1	0,993
1	4	94	2	94/96=0,979	97/100=0,97	4/6=0,666	0,75	0,75
2	4	94	2	94/96=0,979	96/100=0,96	3/6=0,5	0,5	0,5
3	4	94	2	94/96=0,979	95/100=0,95	2/6=0,333	0,25	0,25
4	4	94	2	94/96=0,979	94/100=0,94	1/6=0,166	0	0
0	4	20	2	20/22=0,909	24/26=0,9230	5/6=0,833	1	0,993
1	4	20	2	20/22=0,909	23/26=0,8846	4/6=0,666	0,75	0,75
2	4	20	2	20/22=0,909	22/26=0,8461	3/6=0,5	0,5	0,5
3	4	20	2	20/22=0,909	21/26=0,8076	2/6=0,333	0,25	0,25
4	4	20	2	20/22=0,909	20/26=0,7692	1/6=0,166	0	0

Из таблицы 4.4 следует, что апостериорная оценка $\tilde{\tilde{P}}_1$ соответствующая априорному бета-распределению с параметрами β >> α (модель однородной продукции) неадекватно оценивает ВБР, т.е. ее реализации при любых исходах близко группируются возле величины математического ожидания в рамках догмата, основанного на виде априорного распределения, что наглядно показано в сравнении с интегральной оценкой $\tilde{\tilde{P}}_4$.

Обоснуем сделанные выводы, используя простой критерий эффективности смещенных оценок (см. разделы 1.6 и 3.11), для этого воспользуемся результатами работы [46] и сравним предложенные оценки по эффективности [44]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий по схеме Бернулли (биномиальный план испытаний). В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $Q(\theta(R,n)) = (A(\theta(R,n)) + 1) \bullet W(\theta(R,n))$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$, где $A(\theta(R;N)) = \sum_{n=1}^{N} / \int_0^1 (E\theta(R;n) - p)dp /$ – балансировка, $W(\theta(R;N)) =$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 / E\theta(R;n) - p / dp$$ – абсолютное суммарное смещение.

В таблице 4.5 приведены результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $W(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний [44].

Таблица 4.5

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $W(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра p	A	W	$Q = (A+1)\cdot W$
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=94$	4,526639	4,530498	25,037302
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=20$	3,301787	3,368639	14,491170
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=3$	0,514345	1,342262	2,032649
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R+\alpha)/(N+\alpha+\beta)$, $\alpha=8$, $\beta=4$	1,177552	1,956327	4,260005
$\tilde{p}(R) = (R+1)/(N+2)$	0,001601	0,800003	0,801285
$\tilde{p}_4(R=0) = w(\beta=0,993;N,R)$, $\tilde{p}_4(R>0) = R / N$	0,006370	0,006370	0,006410
$p_0 = N / R$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0	0

Из таблицы 4.5 следует, что байесовские оценки ($\tilde{\theta}_Q(R)$, $\tilde{p}(R)$), имеющие большую величину характеристики Q, в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок не могут являться эффективными. Заметим, что простой критерий эффективности смещенных оценок никак не связан с построением сравниваемых оценок, а соответствующая этому критерию характеристика является объективной величиной и дает объективную числовую оценку сравниваемым смещенным оценкам.

Из вида байесовской формулы апостериорной оценки ВБР $\tilde{P}_1 = (N+\beta-R)/(N+\alpha+\beta)$ непосредственно следует, что с ростом β и α оценка перестает практически зависеть от числа отказов R. То есть с вырождением дисперсии оценки $\tilde{P}_1$, когда для неоднородной модели разброс значений параметра p стягивается в точку ($\beta > \alpha$, $\beta >> N$), оценка практически находится в пределах догмата $\tilde{P}_1 \approx (N+\beta)/(N+\alpha+\beta) \approx \beta/(\alpha+\beta)$, приближаясь к априори известной величине, но не истине. В такой постановке дисперсия стремится к нулю с ростом β [6]:

$S_{\tilde{P}1}^2 = [(N+\alpha-R)(\beta+R)]/[(N+\alpha+\beta)^2(N+\alpha+\beta+1)] \approx 1/(N+\alpha+\beta) \approx 1/(\alpha+\beta)$.

Такое поведение оценки неприемлемо. По сути этого вопроса однозначно высказался Леман Э. [45]: *«Для байесовской апостериорной оценки $\varphi=(\alpha+R)/(\alpha+\beta+N)$ в случае биномиального плана испытаний и априорном бета-распределении известно [45], что при больших α и β реализации оценки φ концентрируются около $\alpha/(\alpha+\beta)$, а дисперсия стремиться к нулю, так что значение p, по сути, известно и значение R на него не влияет. Не смущайте меня этими фактами»*. Далее автор пишет, что, с другой стороны, если α и β фиксированы, но N стремится к бесконечности, из вида оценки $\varphi=(a+R)/(\alpha+\beta+N)$ следует, что φ по существу совпадает с R/N. Это тот случай, когда содержавшаяся в R информация подавляет априорную информацию [45].

Возникает вопрос. В каких случаях несмещенная оценка может быть байесовской. На этот вопрос можно однозначно ответить – ни одна несмещенная оценка не может быть байесовской, за исключением случая, когда уклонение этой оценки равно нулю согласно работе [45, теорема 1.2, с. 223]. Отсюда следует и обратная задача – ни одна байесовская оценка не может быть несмещенной.

Заметим еще раз, что в данном случае рассматриваются модели однородной продукции [4], поэтому использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для групп однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется. Попытка использования байесовских методов в рамках моделей однородной продукции приводит к сильной смещенности апостериорных оценок ($\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_3$) и к вырождению их дисперсий, что не позволяет реализациям этих оценок группироваться вокруг истинной величины оцениваемого параметра в отличие от несмещенной классической оценки ($\tilde{P}_2$) и интегральной смещенной оценки ($\tilde{P}_4$), поэтому не следует в моделях однородной продукции использовать байесовские оценки, предназначенные для моделей неоднородной продукции, что и отражено в таблицах 4.1–4.5. Преимущество интегральных смещенных оценок состоит в том, что эти оценки можно использовать по результатам испытаний, в процессе которых отказы не возникают. В этом случае отпадает необходимость в привлечении математических моделей доверительного оценивания, которые по своей эффективности проигрывают точечным оценкам, внося дополнительные риски [4, с.106]

Напрашивается вопрос, когда байесовская модель реализуется на практике. Воспользуемся примером работы [4, с. 106] и предположим, что интенсивность отказов λ изделий одного типа различных заводов неоднородной продукции заранее известна и априори распределена на отрезке $[0, \infty]$ по закону $F(\lambda)$. Тогда апостериорная вероятность безотказной работы в целом партии неоднородных изделий равна:

$$P(t) = \int exp(-\lambda t)dF(\lambda),$$

где суммирование ведется от нуля до бесконечности, а сама вероятность безотказной работы имеет вид апостериорной байесовской оценки согласно формуле (1.9). Заметим, что в теории надежности множество задач, связанных с байесовским подходом, весьма ограничено. Действительно, в теории надежности в основном рассматриваются модели однородной продукции, где главной целью является достоверное выявление факта отклонения стабильного производственного процесса от нормы, причем байесовские оценки, примененные в задачах однородной продукции, на такое неспособны.

Выводы к разделу 4

Из изложенного и приведенного примера следует:

– составная байесовская оценка $\hat{\theta}_Q$ близка к классической $\hat{p} = \frac{R}{N}$ при условии, что каждая составная часть априорной оценки определена максимальной вероятностью возникновения заданного числа отказов, и, следовательно, адекватно (подобно классической) реагирует на любые внешние изменения параметров технологического процесса изготовления изделий;

– составная байесовская оценка не зависит от вида испытуемых изделий, а зависит только от известной (доказанной) зависимости вероятности возникновения исхода испытаний. Это и является основным преимуществом составной байесовской оценки – она определяется однократно для конкретного плана испытаний;

– для целочисленных значений $R = 0$ и $R = N$ исходов биномиальных испытаний априорные вероятности возникновения отказа $\hat{p}_\alpha(0)$ и $\hat{p}_\alpha(N)$ следует ограничить вещественными значениями, отличными от нуля и единицы (таблица 4.1). В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка совпадет с классической. Что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной;

– для биномиальных испытаний разумной альтернативой составной байесовской оценки $\hat{\theta}_Q$ в задачах надежности, которые используют модели однородной продукции, может служить составная точечная оценка вероятности отказа изделия p_4;

– реализации байесовских оценок при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $1-\tilde{\tilde{p}}_\alpha = 1-\alpha/(\alpha+\beta)$, в то время как классическая несмещенная $\tilde{\tilde{P}}_2 = 1 - R/N$ и интегральная смещенная оценки ($\tilde{\tilde{P}}_4$) адекватно реагируют на любые внешние изменения. Использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется;

– ни одна несмещенная оценка не может быть байесовской. Отсюда следует и обратная задача – ни одна байесовская оценка не может быть несмещенной;

– байесовские оценки следует использовать только для групп неоднородной продукции.

5. ПЛАН ИСПЫТАНИЙ С ДОБАВЛЕНИЕМ

5.1. Формулировка плана испытаний с добавлением

На практике часто приходится сталкиваться с задачей определения величин показателей надежности (точечное оценивание). Обычно в качестве показателя надежности выбирают вероятность безотказной работы. Исходя из экономических соображений для определительных испытаний на надежность высоконадежных и дорогостоящих изделий выставляют минимум изделий, планируя получить безотказные испытания (приемочное число $q = 0$) или испытания с одним отказом ($q = 1$), тем самым минимизируя количество испытуемых изделий. Наиболее интересен последний случай. Выбирая конкретные величины приемочного числа q и количества испытуемых изделий, испытатель делает предварительную оценку планируемой ВБР, а выбирая $q = 1$, испытатель минимизирует риски от возникновения маловероятного случайного отказа. Однако с ростом величины q растет и количество испытуемых изделий, что делает испытания дорогостоящими. Поэтому сокращение количества изделий при испытаниях на надежность является проблемой номер один.

Будем рассматривать биномиальные испытания (первоначальная выборка) [1, 2, 4, 23] с добавлением одного изделия (дополнительная выборка) на испытания при отказе любого из первоначально выставленных испытуемых изделий. Испытания заканчиваются, когда заканчиваются испытания всех выставленных изделий с любым исходом (в первичной и дополнительной выборках). Здесь и далее имеется в виду, что время испытаний одно и то же для всех изделий.

Испытания с приемочным числом отказов больше нуля ($Q > 0$), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

5.2. Построение оценок вероятности безотказной работы для плана испытаний с добавлением

Пусть n – число испытуемых однотипных изделий, первоначально выставленных на испытания, а $R = r$ – число отказавших изделий, включающее k отказов из n первоначально выставленных на испытания изделий и m отказов из k вторично выставленных на испытания изделий, т.е. $r = k + m$. Тогда число испытуемых изделий составит $N = n + k$. Пусть отказы являются независимыми событиями, тогда вероятность возникновения ровно r отказов за испытания (далее – $P_n(R = r)$) легко выразить посредством производящей функции, для этого следует воспользоваться свойствами производящей функции [31].

Производящая функция (далее – $\psi_R(z)$) – математическое ожидание от степенной функции вида z^R, т.е. для плана испытаний с добавлением [31] $\psi_R(z) = Ez^R = \sum_{i=0}^{2n} z^i P_n(R = i)$.

Для случая, когда первоначальная выборка состоит из одного изделия $n = 1$, производящая функция примет вид [31]:

$$\psi_R(z) = Ez^R = \sum_{i=0}^{2} z^i P_1(R = i) = q + qpz + p^2 z^2.$$

Тогда для случая, когда первоначальная выборка состоит из n изделий, производящая функция примет вид [31]:

$$\psi_{n;R}(z) = (q + qpz + p^2 z^2)^n.$$

Вероятность получить ноль отказов за испытания первоначальной выборки объема n [31]:

$$P_n(R=0)=\psi_{n;R}(z)=(q+qpz+p^2z^2)^n|_{z=0}=q^n.$$

Математическое ожидание случайной величины R находят из выражения [31] $ER=\psi_{n;R}^{(1)}(z=1)$.

А вероятность получить ровно r отказов находят из выражения [31]:

$$P_n(R=r)=\psi_{n;R}^{(r)}(z=0)/r!$$

Построим первую производную производящей функции

$$\psi_{n;R}^{(1)}(z)=n(q+qpz+p^2z^2)^{n-1}(2p^2z+pq).$$

Откуда непосредственно следует, что среднее число отказов за испытания составит:

$$ER=\psi_{n;R}^{(1)}(z=1)=n(q+qp+p^2)^{n-1}(2p^2+pq)=np(1+p).$$

Тогда вероятность получить один отказ за испытания вычисляется по формуле $P_n(R=1)=\psi_{n;R}^{(1)}(z=0)=nq^{n-1}pq=npq^n$.

Построение производных высших порядков имеет громоздкий вид и поэтому не приводится.

Полученные результаты являются не лучшим вариантом для ведения расчетов, поэтому построим более удобную формулу для вероятности возникновения ровно $R=r$ отказов за испытания, которая получается из следующей процедуры построения ($n\ \geq k\ \geq m;\ r=k+m\ \leq\ 2\cdot n$):

$$P_k(m):=C_k^m p^m q^{k-m};$$

$$P_n(k):=C_n^k p^k q^{n-k}\sum_{m=0}^{k}P_k(m)=C_n^k p^k q^{n-k};$$

где $q=1-p, p$ – вероятность отказа; C_n^k – число сочетаний k из n элементов;

$$P_n(k,m):=\ P_n(k)P_k(m)=C_n^k\ C_k^m\ p^{k+m}\ q^{n-m};$$

$$P_n(r=0)=P_n(k=0,m=0)=q^n;$$

$$P_n(r=1)=P_n(k=1,m=0);$$

$$P_n(r=2;\ r\ \leq\ n)\ =P_n(k=1,m=1)\ +P_n(k=2,m=0);$$

$$P_n(r=3;\ r\ \leq\ n)=P_n(k=2,m=1)+P_n(k=3,m=0);$$

$$P_n(r = 4;\ r\ \le\ n) = P_n\ (k = 2, m = 2) +$$
$$+P_n\ (k = 3, m = 1) + P_n\ (k = 4, m = 0);$$
$$P_n(r = 5;\ r\ \le\ n) = P_n\ (k = 3, m = 2) +$$
$$+P_n\ (k = 4, m = 1) + P_n\ (k = 5, m = 0);$$
$$P_n(r = 6;\ r\ \le\ n) = P_n(k = 3, m = 3) + P_n(k = 4, m = 2) +$$
$$+P_n(k = 5, m = 1) + P_n(k = 6, m = 0);$$
$$P_n(r = 7;\ r\ \le\ n) = P_n(k = 4, m = 3) + P_n(k = 5, m = 2) +$$
$$+P_n(k = 6, m = 1) + P_n(k = 7, m = 0)$$

…

$$P_n(R = r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m:m+k=r, m\ \le k} P_n(k, m)$$

…

$$P_n(r = 2n) = P_n(k = n, m = n) = p^{2n}.$$

Из логики построения получаем искомую формулу для вероятности возникновения ровно $R = r$ отказов:

$$P_n(R = r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m:m+k=r, m\ \le\ k} P_n(k, m),$$

$$r = k + m = 0,1,2, \ldots, 2n\ ;\ k = 0,1,2, \ldots, n;\ m: m + k = r, m\ \le\ k.$$

Из определения вероятности

$$P_n(k = x, m = y) = P_n(k = x) P_n(m = y),$$

где $x, y\ = 0, 1, 2, \ldots, n$ и $P_n(R = r)$, легко получить вероятностную функцию плана испытаний с добавлением:

$$P_{n\sum}(k\ \le\ x, m\ \le\ y) = \sum_{k=0}^{x} \sum_{m:m+k\ \le\ x+y, m\ \le\ k, m\ \le\ y} P_n(k, m), \qquad (5.1)$$

которая на всем множестве событий $R : r = k + m = 0, 1, 2, \ldots, 2n$ должна быть равна единице. Проверим этот факт.

Вероятностную функцию на всем множестве событий можно представить в виде суммы произведений каждого члена основного многочлена на многочлен, где многочлены имеют биномиальные коэффициенты, а именно:

$$P_{n\Sigma}(n,n) = \sum_{r=0}^{2n} P_n(r) = \sum_{k+m=0}^{2n} P_n(k)P_k(m) =$$

$$= \sum_{k+m=0}^{2n} C_n^k p^k q^{n-k} C_k^m p^m q^{k-m} =$$

$$= q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} \sum_{m=0}^{1} C_1^m p^m q^{1-m} + \dots +$$

$$+ C_n^k p^k q^{n-k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m p^m q^{k-m} + \ldots + p^n \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

Сокращенно это можно представить в виде:

$$P_{n\Sigma}(n,n) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

Более простым способом можно найти выражение для ER: так среднее число испытуемых изделий за время испытаний с добавлением состоит из количества первоначально выставленных на испытания изделий и среднего числа отказавших из первоначально выставленных на испытания изделий, т.е. $N = n + np$. Тогда среднее число отказавших изделий за время испытаний с добавлением составит:

$$E(R,n) = Np = E(k,n) + E(m,n) = np + np \cdot p =$$

$$= (n + np)p = np(1 + p).$$

Заметим, что именно вероятность $P_n(k,m)$ определяет шансы на исход испытаний (k,m), поэтому в качестве оценки параметра p следует выбирать оценку, которая доставляет максимум вероятности $P_n(k,m)$.

Решим классическую задачу определения максимума функции

$$b(r,p,k,n) = P_n(k,m) = C_n^k C_k^m p^{k+m} q^{n-m}$$

относительно переменной p. Для этого прологарифмируем функцию $b(r,p,k,n)$, возьмем производную относительно переменной p, приравняем полученный результат нулю и решим полученное уравнение относительно переменной p. Полученная оценка $\hat{p} = (R = r)/(n+k) = = r/(n+r-m)$доставляет максимум функции $b(r,p,k,n)$. Изучим свойства полученной оценки $\hat{p} = R/(n+k)$ и, как следствие, и оценки ВБР:

$$\hat{P} = 1 - \hat{p} = 1 - R/(n+k) = (n-m)/(n+k).$$

Пусть $k+m=r>1$, тогда для различных $k_1 > k_2, m_1 < m_2$ выполняется неравенство:

$$\hat{p}(k_1,m_1) = \frac{r}{n+k_1} < \hat{p}(k_2,m_2) = \frac{r}{n+k_2}. \tag{5.2}$$

То есть надежность контролируемой партии изделий (ВБР: $\hat{P}(k_1,m_1) = 1 - \hat{p}(k_1,m_1)$) по результатам испытаний выборки, в которой количество отказавших из первоначально выставленных испытуемых изделий k_1 больше, чем в выборке сравниваемой партии изделий k_2 при одном и том же количестве отказов r, всегда будет выше $\hat{P}(k_1,m_1) > \hat{P}(k_2,m_2)$, чем у этой сравниваемой партии изделий. То есть при сравнении результатов двух окончательно сформированных выборок (при равенстве в количестве отказов) приоритет в надежности отдается изделиям, чьи отказы в основном произошли в первоначально выставленной выборке, а не в дополнительной. И в этом смысле дополнительная выборка дает шанс на реабилитацию при неудачных первичных испытаниях. И в этом преимущество плана испытаний с добавлением.

5.3. Нахождение несмещенных оценок вероятности безотказной работы

Найдем математическое ожидание оценки $\hat{p}(n;k,m) = (R = r)/(n+k)$: $E(\hat{p}(n;k,m)) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{r}{n+k} P_n(r)$.

Можно доказать, что оценка $E(\hat{p}(n;k,m))$ в общем виде смещенная. Чтобы доказать этот факт, достаточно показать это в частом случае.

Найдем математическое ожидание оценки $\hat{p}(n=1) = (R + r)/(1+k)$:

$$n = 1: E(\hat{p}(n=1)) = \sum_{r=0}^{2} \frac{r}{1+k} P_1(r) =$$

$$= 0P_1(k=0, m=0) + \frac{1}{2} P_1(k=1, m=0) + 1P_1(k=1, m=1) =$$

$$= \frac{1}{2} pq + p^2 = 0{,}5(p + p^2).$$

Следовательно, оценка $\hat{p}(n=1) = (R=r)/(1+k)$ – смещенная.

Оценка $\hat{p}(n=1)$ представлена в виде:

$$\hat{p}(n=1) = \frac{R=r}{1+k} \equiv \begin{cases} 0, r = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/2, r = 1, k = 1, m = 0, \\ 1, r = 2, k = 1, m = 1. \end{cases}$$

Приравнивая математическое ожидание неизвестной оценки $\widehat{w}_1(n=1;k,m)$ параметру p, легко получить несмещенную оценку вероятности отказа $\widehat{w}_1$ для случая $n=1$; p_0, p_1, p_2 – неизвестные вероятности:

$$E(\widehat{w}_1) = \sum_{r=0}^{2} \frac{r}{1+k} \widehat{w}_1 P_1(r) = p_0(1-p) + p_1(p - p^2) + p_2 p^2 = p;$$

$$p^0: p_0\, p^0 = p_0 * 1 = 0 \Rightarrow p_0 = 0;\ p^1: p_1 p^1 = p \Rightarrow p_1 = 1;$$

$$p^2: -p^2 p_1 + p^2 p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = p_1 = 1;$$

$$\widehat{w}_1 \equiv \begin{cases} 0\,, r\ = 0, k = 0, m = 0, \\ 1\,, r\ = 1, k = 1, m = 0, \\ 1\,, r\ = 2, k = 1, m = 1. \end{cases}$$

Несмещенная оценка представляет собой индикаторную функцию, т.е. в случае появления отказов оценка $\widehat{w}_1$ становится равной единице, в противном случае – нулю. Вариант, когда $n = 1$, для практики неинтересен, так как совпадает с биномиальным планом, и поэтому в настоящей работе далее рассматриваться не будет.

Найдем математическое ожидание оценки $\hat{p}(n = 2) = (R = = r)/(2 + k)$:

$$n = 2: E(\hat{p}(n = 2)) \ = \sum_{r=0}^{4} \frac{r}{2 + k} P_2(r) \ =$$

$$= 0P_2\ (k = 0, m = 0) + \left(\frac{1}{3}\right) P_2(k = 1, m = 0) +$$

$$+(2/3)P_2(k = 1, m = 1) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right) P_2(k = 2, m = 0) + \left(\frac{3}{4}\right) P_2(k = 2, m = 1) +$$

$$+ 1 \cdot P_2(k = 2, m = 2) =$$

$$= 0q^2 + \left(\frac{1}{3}\right) 2p^1q^2 + \left(\frac{2}{3}\right) 2p^2q + \left(\frac{1}{2}\right) p^2q^2 +$$

$$+(3/4)2q^3q\ \ + 1 \cdot p^4 =$$

$$= 2p\ (1 - p)\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)p + \left(\frac{2}{3}\right)p + \left(\frac{1}{4}\right)p - \left(\frac{1}{4}\right)p^2\right) +$$

$$+(3/2)p^3 - (3/2)p^4\ \ + p^4 =$$

$$= 2p(1 - p)\left(\frac{1}{3} + \left(\frac{7}{12}\right)p - \left(\frac{1}{4}\right)p^2\right) + \left(\frac{3}{2}\right)p^3 - \left(\frac{3}{2}\right)p^4\ \ + p^4 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)p + \left(\frac{7}{6}\right)p^2 - \left(\frac{1}{2}\right)p^3 - \left(\frac{2}{3}\right)p^2 - \left(\frac{7}{6}\right)p^3 + \left(\frac{1}{2}\right)p^4 +$$

$$+\left(\frac{3}{2}\right)p^3 - \left(\frac{3}{2}\right)p^4\ \ + p^4 =$$

$$= (2/3)\,p + (1/2)p^2 - (1/6)p^3\,,$$

$$p = 0{,}5\colon E(\hat{p}(n=2)) = 1/3 + 1/8 - 1/(6 \cdot 8) = 21/48.$$

Следовательно, оценка $\hat{p}(n=2) = (R = r)/(2+k)$ – смещенная. Оценка $\hat{p}(n=2)$ представлена в виде:

$$\hat{p}(n=2) \equiv \begin{cases} 0, r = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/3, r = 1, k = 1, m = 0, \\ 2/3, r = 2, k = 1, m = 1, \\ 1/2, r = 2, k = 2, m = 0, \\ 3/4, r = 3, k = 2, m = 1, \\ 1, r = 4, k = 2, m = 2. \end{cases}$$

Заметим, что для полученных результатов $\hat{p}(r = 2, k = 1, m = = 1) = 2/3$ и $\hat{p}(r = 2, k = 2, m = 0) = 1/2$ надежность контролируемой партии изделий, у которой некоторые изделия в выборке отказали только в первоначальном испытании, выше, чем у изделий, чьи отказы возникали при повторном испытании и при одном и том же количестве отказов. Это соответствует свойству оценки $\hat{p}$, выражаемому формулой (5.2).

Легко получить несмещенную оценку $\hat{s}_2$ для параметра p:

$$\hat{s}_2 \equiv \begin{cases} 0, r = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/2, r = 1, k = 1, m = 0, \\ 5/8, r = 2, k = 1, m = 1, \\ 6/8, r = 2, k = 2, m = 0, \\ 7/8, r = 3, k = 2, m = 1, \\ 1, r = 4, k = 2, m = 2. \end{cases}$$

Для этого следует математическое ожидание предполагаемой несмещенной оценки с неизвестными вероятностями p_{ik} приравнять параметру p и провести необходимые преобразования:

$$E(\hat{p}(n=2) = \sum_{r=0}^{4} \hat{p}(n=2) P_2(r) = [p_{00} = 0;\ p_{22} = 1] =$$

$$= p_{00} q^2 + p_{10} 2pq^2 + p_{11} 2p^2 q + p_{20} p^2 q^2 + p_{21} 2p^3 q + p^4 =$$

$$= 2p_{10}\, p - 2p_{10} 2p^2 + 2p_{10}\, p^3 + 2p_{11} p^2 - 2p_{11} p^3 + p_{20} p^2 -$$

$$-2p_{20} p^3 + p_{20} p^4 + p_{21} 2p^3 - p_{21} 2p^4 + p_{22}\, p^4 =$$

$$= 2p_{10} p - 4p_{10} p^2 + 2p_{11} p^2 + p_{20} p^2 + 2p_{10} p^3 - 2p_{11} p^3 - 2p_{20} p^3 +$$

$$+p_{21}2p^3 + p_{20}p^4 - p_{21}2p^4 + p_{22}p^4 = p.$$

Для того чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы коэффициенты при различных степенях параметра p равнялись нулю, за исключением первой степени, при которой коэффициент должен быть равен единице, а именно:

$$p^1: 2p_{10}p^1 = p => p_{10} = 1/2;$$

$$p^2: -4p_{10}p^2 + 2p_{11}p^2 + p_{20}p^2 = 0 => \ 2p_{11} + p_{20} =$$

$$= 2 => \ 2p_{11} = 2 - p_{20},$$

$$p^3: 2p_{10}p^3 - 2p_{11}p^3 - 2p_{20}p^3 + 2p_{21}p^3 =$$

$$= 0 => 2p_{11} + 2p_{20} - 2p_{21} = 1 =>$$

$$=> 2 - p_{20} + 2p_{20} - p_{20} - 1 = 1 => p_{20} = 6/8 => p_{11} = 5/8;$$

$$p^4: p_{20}p^4 - p_{21}2p^4 + p_{22}p^4 = 0 => [p_{22} = 1]:$$

$$2p_{21} - p_{20} = p_{22} => 2p_{21} = p_{20} + 1 => p_{21} = 7/8.$$

Данная неоднородная система линейных уравнений всегда разрешима и имеет бесконечное множество подобных решений (число переменных больше, чем число уравнений):

$$p_{00} = 0;\ p_{10} = \frac{1}{2};\ p_{11} = \frac{5}{8};\ p_{20} = \frac{6}{8};\ p_{21} = \frac{7}{8};\ p_{22} = 1.$$

Заметим, что вероятности отказов должны удовлетворять нестрогому неравенству $0 \le p_{ij} \le 1$. Заметим также, что на практике для двух контролируемых партий изделий и при одном и том же количестве отказов в сформированных выборках для полученных результатов $p_{20} = 6/8$ и $p_{11} = 5/8$ надежность первой контролируемой партии изделий $1 - p_{20} = 1 - -6/8 = 2/8$, у которой некоторые изделия в первоначальной и дополнительной выборках отказали только в первоначальном испытании ($k = 2, m = 0$), следует считать ниже, чем у изделий второй контролируемой партии $1 - p_{11} = 1 - 5/8 = 3/8$, чьи отказы возникали и при повторном испытании в дополнительной выборке. Такой эффект противоречит свойству формулы (5.2) смещенной оценки $\hat{p}(r = k + m, k, m) = (R = r)/(n + k)$ и вносит неопределенность при выборе эффективной оценки.

В дальнейшем, чтобы избежать противоречий при поиске новых оценок вероятности отказа будем исходить из того, что величины оценок для одного и того же количества отказов не зависят от того, в какой выборке (первичной или дополнительной) произошли отказы. Следовательно, этот принцип по поиску новых оценок вероятности отказа $\widehat{w}(n; k, m)$ можно записать следующим образом:

$$\widehat{w}(k_1 + m_1 = r, k_1, m_1) = \widehat{w}(k_2 + m_2 = r, k_2, m_2). \qquad (5.3)$$

То есть отказываемся от свойства оценки $\hat{p}$, выражаемого формулой (5.2).

Аналогично предыдущим рассуждениям, продемонстрируем этот способ поиска новых оценок:

$$\widehat{w}_2(0) \coloneqq p_0;\ \widehat{w}_2(1) \coloneqq p_1;\ \widehat{w}_2(2) \coloneqq p_2;\ \widehat{w}_2(3) \coloneqq p_3; \widehat{w}_2(4) := p_4\ ;$$

$$E(\widehat{w}_2) = \sum_{r=0}^{4} \widehat{w}_2(r) P_2(r) = p_0 q^2 + p_1 2pq^2 + p_2 2p^2 q +$$

$$+p_2 p^2 q^2 + p_3 2p^3 q + p_4 p^4 =$$

$$= 2p_1 p - 2p_1 2p^2 + 2p_1 p^3 + 2p_2 p^2 - 2p_2 p^3 + p_2 p^2 -$$

$$-2p_2 p^3 + p_2 p^4 + p_3 2p^3 - p_3 2p^4 + p_4 p^4 =$$

$$= 2p_1 p - 4p_1 p^2 + 2p_2 p^2 + p_2 p^2 + 2p_1 p^3 - 2p_2 p^3 - 2p_2 p^3 +$$

$$+p_3 2p^3 + p_2 p^4 - p_3 2p^4 + p_4 p^4.$$

Для того чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы коэффициенты при различных степенях равнялись нулю, за исключением первой степени, при которой коэффициент должен быть равен единице:

$$p^0 \colon p_0 p^0 = p_0 * 1 = 0 \Rightarrow p_0 = 0;$$

$$p^1 \colon 2p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = 1/2;$$

$$p^2 \colon -4p_1 p^2 + 2p_2\, p^2 + p_2\, p^2 = 0 \Rightarrow -2 + 3p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 2/3;$$

$$p^3: 2p_1p^3 - 2p_2p^3 - 2p_2p^3 + p_3 2p^3 = 0 => 1 - \frac{8}{3} + 2p_3 =$$

$$= 0 => p_3 = 5/6;$$

$$p^4: p_2p^4 - p_3 2p^4 + p_4p^4 = 0 => 2/3 - 10/6 + p_4 = 0 => p_4 = 1;$$

$$p_0 = 0; p_1 = 1/2;\ p_2 = 2/3;\ p_3 = 5/6;\ p_4 = 1\ .$$

Данная неоднородная система линейных уравнений всегда разрешима и имеет единственное решение (число переменных $2n$ равно рангу (числу линейно независимых уравнений) [32]), которое и будет принято за оценку $\widehat{w}_2$!

Аналогично предыдущему примеру (случай $n = 2$), найдем математическое ожидание оценки $\hat{p}(n = 3) = r/(3 + k)$:

$$E\big(\hat{p}(n = 3)\big) = \sum_{r=0}^{6} \frac{r}{3 + k} P_3(r).$$

Произведя последовательно все необходимые манипуляции (они не приводятся из-за громоздкости выражений), приходим к выводу, что оценка $\hat{p}(n = 3) = r/(3 + k)$ – смещенная.

Оценка $\hat{p}(n = 3) = r/(3 + k)$ представлена в виде:

$$\hat{p}(n = 3) = \frac{r}{3 + k} \equiv \begin{cases} 0, r = 0, k = 0, m = 0, \\ 1/4, r = 1, k = 1, m = 0, \\ 1/2, r = 2, k = 1, m = 1, \\ 2/5, \mathrm{r} = 2, k = 2, m = 0, \\ 3/5, r = 3, k = 2, m = 1, \\ 4/5, r = 4, k = 2, m = 2, \\ 1/2, r = 3, k = 3, m = 0, \\ 2/3, r = 4, k = 3, m = 1, \\ 5/6, r = 5, k = 3, m = 2, \\ 1, r = 6, k = 3, m = 3. \end{cases}$$

Найдем несмещенную оценку вероятности отказа для случая $n = 3$ ($\widehat{w}_3(r)$), используя принцип, выражаемый формулой (5.3). Определение величин вероятностей этой оценки проводится через ее математическое ожидание, которое должно равняться оцениваемому параметру p:

$$\widehat{w}_3(0) \coloneqq p_0;\ \widehat{w}_3(1) \coloneqq p_1;\ \widehat{w}_3(0) \coloneqq p_2;\ \widehat{w}_3(3) \coloneqq p_3;$$

$$\widehat{w}_3(4) \coloneqq p_4;\ \widehat{w}_3(5) \coloneqq p_5;\ \widehat{w}_3(6) := p_6;$$

$$E\big(\widehat{w}_3(r)\big) = p_0q^3 + p_1 3pq^3 + \ 3p_2\,(p^2q^2 + p^2q^3) +$$

$$+p_3\,(6p^3q^2 + p^3q^3\,) + p_4\,(3p^4q + 3p^4q^2\,) + p_5 3p^5q +$$

$$+p_6p^6 3p_1(p - 3p^2 + 3p^3 - p^4\,) + 3p_2\,(p^2 - 2p^3 + p^4\,) +$$

$$+3p_2(p^2 - 3p^3 + \ 3p^4 - p^5) + \ 6p_3\,(p^3 - 2p^4 + p^5) + p_3\,(p^3 -$$

$$-3p^4 + 3p^5 - p^6\,) + 3p_4\,(p^4 - p^5\,) +$$

$$+3p_4\,(p^4 - 2p^5 + p^6) + 3p_5\,(p^5 - p^6) + p_6p^6;$$

$$p^0\colon p_0p^0 = p_0 1 = 0; p_0 = 0;$$

$$p^1\colon 3p_1 = 1;\ p_1 = 1/3;$$

$$p^2\colon -9p_1 + 3p_2 + 3p_2 = 0 => 6p_2 = 3 => p_2 = 1/2;$$

$$p^3\colon 9p_1 - 6p_2 - 9p_2 + 6p_3 + p_3 = 0 => 6p_2 + 9p_2 - 6p_3 - p_3 =$$

$$= 3 => p_3 = 9/14;$$

$$p^4\colon -3p_1 + 3p_2 + 9p_2 - 12p_3 - 3p_3 + 3p_4 + 3p_4 = 0 =>$$

$$=> 12p_2 - 15p_3 + 6p_4 = 1 => p_4 = 65/84;$$

$$p^5\colon -3p_2 + 6p_3 + 3p_3 - 3p_4 - 6p_4 + 3p_5 = 0 => p_5 = 75/84;$$

$$p^6\colon -p_3 + 3p_4 - 3p_5 + p_6 = 0 => p_6 = 1;$$

$$\widehat{w}_3(r) \equiv \begin{cases} 0, r\ = 0, \\ 1/3, r\ = 1, \\ 1/2, r\ = 2, \\ 9/14, r\ = 3, \\ 65/84, r\ = 4, \\ 75/84, r\ = 5, \\ 1, r\ = 6. \end{cases}$$

Аналогичный поиск несмещенных оценок для случаев $n = 4$ и $n = 5$ к успеху не привел, так как полученные результаты величин вероятностей превысили единицу, что неприемлемо. Из этого следует, что для $n > 3$ построение несмещенной оценки по правилу $\hat{p}(k_1 + m_1 = = r, k_1, m_1) = \ \hat{p}(k_2 + m_2 = r, k_2, m_2)$ проблематично!

5.4. Построение центрируемой оценки вероятности безотказной работы

Здесь и далее будем исходить из того, что статистика $\hat{p}(n; k, m) = (R = r)/(n + k)$ имеет функцию распределения, равную $P_{n\sum}$, т.е. закон распределения статистики $\hat{p}$ определяется законом распределения случайных величин k, m, что позволяет строить доверительные границы [2].

Введем новое понятие, а именно: пусть оценка вероятности отказа (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию $P_{n\sum}$ относительно предельных границ изменения ее вещественных значений. Это означает, что интервалы $[0; \hat{v}]$ и $[\hat{v}; 1]$ величин этих оценок с вероятностью, равной 0,5, накрывают оцениваемый параметр p. Такие оценки будем называть центрируемыми (не путать с центральными [2]). Заметим, что центрируемые оценки для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [9, 18, 20]. В нашем случае центрируемая оценка $\hat{v}$ находится из выражения (заменяем p на $\hat{v}$ в формуле (5.1)):

$$P_{n\sum}(k \le x, m \le y, \hat{v}) = \sum_{k=0}^{x} \sum_{m: m+k \le x+y, m \le k, m \le y} P_n(k, m, \hat{v}) = 0{,}5.$$

Чтобы решение этого уравнения существовало и было единственным, необходимо проверить монотонность $P_{n\sum}$ относительно переменной p [33].

Напомним, что $P_n(k, m) := C_n^k\, C_k^m\, p^{k+m}\, q^{n-m}$ и $r = k + m$.

Беря производную от $P_{n\sum}$ по параметру p, получаем:

$$(P_{n\sum}(k \le x, m \le y, p))'_p =$$

$$= \sum_{k=0}^{x} \sum_{m: m+k \le x+y, m \le k, m \le y} C_n^k\, C_k^{r-k}\, (r p^{r-1}\, q^{n-r+k} - (n - r + k) p^r q^{n-r+k-1}.$$

Из-за громоздкости полученного выражения не удается доказать или опровергнуть монотонность $P_{n\sum}$. Однако для наиболее интересных для практики случаев $R: r = 0, r = 1$ и $r = 2$ это удается. Рассмотрим эти случаи:

$$r = 0: (P_{n\sum}(n, p, k = 0, m = 0))'_p =$$
$$= C_n^0\, C_0^{0-0}\, [(0 + 0)\, p^{-1} q^n - np^0 q^{n-1}] = -nq^{n-1} < 0;$$
$$r = 1: (P_{n\sum}(n, p, k = 1, m = 0))'_p =$$
$$= C_n^1 C_1^0 [(1 + 0) p^0 q^n - npq^{n-1}] - C_n^0 C_0^0 nq^{n-1} =$$
$$= nq^n - n^2 pq^{n-1} - nq^{n-1} = nq^{n-1}(1 - p - np - 1) =$$
$$= -pn(n + 1)q^{n-1} < 0;$$
$$r = 2: (P_{n\sum}\ \ (n, p, k = 1, m = 1))'_p =$$
$$= C_n^1 C_1^1 [(1 + 1)\, pq^{n-1} - (n - 1)p^2 q^{n-2}] +$$
$$+ C_n^1 C_1^0 [(1 + 0) p^0 q^n - - npq^{n-1}] - C_n^0 C_0^0 nq^{n-1} =$$
$$= 2npq^{n-1} - n(n - 1)p^2 q^{n-2} + nq^n - n^2 pq^{n-1} - nq^{n-1} =$$
$$= npq^{n-2}(2(1 - p) - (n - 1)p) - pn(n + 1)q^{n-1} =$$
$$= npq^{n-2}(2 - p - np) - pn(n + 1)q^{n-1} = npq^{n-2}(2 - n - 1) \leq 0;$$
$$r = 2: (P_{n\sum}(n, p, k = 2, m = 0))'_p = = C_n^2 C_2^0 [(2 + 0)\, pq^n - np^2 q^{n-1}] +$$
$$+ C_n^1 C_1^0 [(1 + 0)\, p^0 q^n - np^1 q^{n-1}] - C_n^0 C_0^0 nq^{n-1} =$$
$$= n(n - 1)pq^n - 0{,}5n^2(n - 1)p^2 q^{n-1} + nq^n - n^2 pqq^{n-1} -$$
$$- nq^{n-1} = n(n - 1)pq^{n-1}(1 - p - 0{,}5np) - pn(n + 1)q^{n-1} =$$
$$= npq^{n-2}(0{,}5np - n) \leq 0.$$

Следовательно, для случаев $R: r = 0, r = 1, r = 2$ вероятностная функция $P_{n\sum}$ монотонно убывает с ростом параметра p, а следовательно, центрируемая оценка $\hat{v}$ параметра p для плана испытаний с добавлением является единственной.

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) доверительную границу интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью $\gamma\ = 0{,}5$ или уровнем значимости $\alpha = 0{,}5$. С другой стороны, любую оценку НДГ (ВДГ) интервала неизвестного параметра p можно трактовать как точечную оценку параметра p с сильным смещением (вниз – для НДГ и вверх – для ВДГ). Односторонние НДГ (далее – $\hat{p}_{\text{н}}$) и ВДГ (далее – $\hat{p}_{\text{в}}$) интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью $\gamma\ = 1 -\ \alpha$ вычисляют соответственно по формулам: $P_{n\sum}(x, y, \hat{p}_{\text{н}}) = \gamma, P_{n\sum}(x, y, \hat{p}_{\text{в}}) = \alpha$.

Границы центрального доверительного интервала вычисляют по формулам [2]: $P_{n\sum}(x, y, \hat{p}_{\text{н}}) = 1 - \alpha/2, P_{n\sum}(x, y, \hat{p}_{\text{в}}) = \alpha/2$.

В таблицах 5.1–5.3 приведены соответственно величины, принимаемые НДГ, ВДГ и центрируемой оценкой $\hat{v}$, для наиболее реальных для практики объемов испытаний и событий возникновения отказа (см. приложение В).

Таблица 5.1

Количественные значения односторонней НДГ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали) при $\gamma = 0{,}8$

	n:	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	*m*=0	0,199	0,105	0,071	0,054	0,043	0,036	0,031	0,027
k=1	*m*=0	0,445	0,287	0,212	0,168	0,139	0,119	0,104	0,092
k=1	*m*=1	1	0,445	0,287	0,212	0,168	0,139	0,119	0,104

Таблица 5.2

Количественные значения односторонней ВДГ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали) при $\alpha = 0{,}2$

	n:	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	m=0	0,800	0,552	0,415	0,331	0,275	0,235	0,205	0,182
k=1	m=0	0,894	0,710	0,582	0,488	0,422	0,370	0,330	0,297
k=1	m=1	1	0,894	0,710	0,582	0,488	0,422	0,370	0,330

Таблица 5.3

Количественные значения центрируемой оценки $\hat{v}$ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали)

	n:	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	m=0	0,292	0,206	0,159	0,129	0,108	0,094	0,082	0,074
k=1	m=0	0,707	0,5	0,384	0,313	0,264	0,226	0,201	0,179
k=1	m=1	1	0,707	0,5	0,384	0,313	0,264	0,226	0,201

5.5. Исследование оценок вероятности безотказной работы для плана испытаний с добавлением

Сформулируем критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР), построим на основе сформулированного критерия улучшенную (но смещенную) оценку вероятности отказа (и, следовательно, оценку ВБР) для плана испытаний с добавлением для n>3 и выберем среди предложенных оценок эффективную.

Простой критерий эффективности смещенных оценок для ВБР. Простой критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(n; k, m)$ основан на абсолютном и прямом суммарном смещении математического ожидания этих оценок $E\hat{\theta}(n;k,m)$ от вероятности отказа p для всех возможных величин, принимаемых параметрами p,n (см. раздел 1.6). Для получения конечного результата в качестве критерия получения эффективной смещенной оценки $\hat{\theta}_0(n;k,m)$ строится функционал $Q\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = (A(\hat{\theta}(n;k,m)) + 1) \bullet W(\hat{\theta}(n;k,m))$ на ограниченном множестве $n = 1,\dots,N$:

$$A\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = \sum_{1 \le n \le N} / \int_0^1 \left(E\hat{\theta}(n;k,m) - p\right)dp/; \quad (5.4)$$

$$W\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = \sum_{1 \le n \le N} \int_0^1 /E\hat{\theta}(n;k,m) - p/dp. \quad (5.5)$$

Ограничим объем испытаний $n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат.

В таблице 5.4 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $W(\hat{\theta}(n;k,m))$ в соответствии с формулами (5.4) и (5.5) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p},\hat{p}_2,\widehat{w}_2,\widehat{w}_3,\hat{v}$. Вычисления проводились с шагом $dp = 1E-03$.

Таблица 5.4

Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $W(\hat{\theta}(n;k,m))$

Функционал	$\hat{p}_2(n=2)$	$\widehat{w}_2(n=2)$	$\widehat{w}_3(n=3)$	$\hat{p}(n>3)$	$\hat{v}(n>3)$
$A(\hat{\theta}(n;k,m))$	0	0	0	0,088987	0,082182
$W(\hat{\theta}(n;k,m))$	0	0	0	0,088987	0,183407
$Q(\hat{\theta}(n;k,m))$	0	0	0	0,096906	0,198480

Из таблицы 5.4 следует, что для вариантов $n > 3$ оценка $\hat{p}$ более эффективна в сравнении с оценкой $\hat{v}$. Оценки $\hat{p}_2$, $\widehat{w}_2$ и $\widehat{w}_3$ являются несмещенными и, как следствие, эффективными для вариантов соответственно: $n = 2$ и $n = 3$.

Отметим важный факт, что при вычислениях варьирование шагом суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Пример 5.1. Изделия входят в состав агрегата и применяются по схеме с резервированием. Требуется сделать точечную оценку ВБР изделий по результатам испытаний на надежность. В соответствии с требованиями технического задания ВБР должна быть не менее 0,83. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия возможен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. В процессе испытаний допустимы два исхода: испытания без возникновения отказов и испытания с одним отказом (планируемые). В случае испытаний, не давших отказов, отпадает необходимость в испытаниях дополнительной выборки.

Рассмотрим эти варианты:

1. Испытания с добавлением $R = 0$:

$\hat{P} = 1 - \hat{p}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - \frac{R=0}{n+k} = 1 - \frac{0}{5+0} = 1;$

$\hat{V} = 1 - \hat{v}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - 0{,}108 = 0{,}892\ .$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ составила (таблица 5.2):

$\hat{P}_{н}(n = 5, R = 0) = 1 - \hat{p}_{в}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - 0{,}275 = 0{,}725.$

2. Биномиальные испытания $R = 0$:

$$\hat{P}(n = 5, R = 0) = 1 - R/n = 1 - 0/6 = 1.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, R = 0, \gamma = 0{,}8$ (находится решением уравнения, составленного по правилу Клоппера–Пирсона [2]) составила: $\hat{P}_{\text{н}}(n = 5, R = 0) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{5}} = 0{,}724$.

Испытания с одним отказом:

1. Испытания с дополнением и с одним отказом:

$$\hat{P} = 1 - \hat{p}(n = 5, k = 1, m = 0) = 1 - \frac{R = r}{n + k} = 1 - \frac{1}{5 + 1} = 0{,}83;$$

$$\hat{V} = 1 - \hat{v}(n = 5, k = 1, m = 0) = 1 - 0{,}264 = 0{,}736.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, \gamma = 1 - \alpha = 1 — 0{,}2 = 0{,}8$ составила:

$$\hat{P}_{\text{н}}(n = 5, R = 1) = 1 - -\hat{p}_{\text{в}}(n = 5, k = 1, m = 0) = 1 - 0{,}422 = 0{,}588\,.$$

2. Биномиальные испытания с одним отказом:

$$\hat{P} = 1 - R/n = 1 - 1/5 = 0{,}8.$$

Требуются повторные испытания.

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, R = 1, \gamma = 0{,}8$ (находится решением уравнения, составленного по правилу Клоппера–Пирсона [2]) и составила: $\hat{P}_{\text{н}}(n = 5, R = 1) = 0{,}375$.

5.6. Улучшение эффективности центрируемой оценки вероятности отказа (вероятности безотказной работы) для плана испытаний с добавлением

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [9, 18–20] и, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L(\hat{v}(R, n, \beta = 0{,}5)) > 0$. Однако это смещение можно уменьшить, а значит и улучшить эффективность. Для этого достаточно минимизировать функционал $W\big(\tilde{v}(n,\beta;R)\big)$, варьируя величиной вероятности $(\beta = 0{,}5 + x)$ в выражении $P_{n\sum}(r,m,\tilde{v}) = 0{,}5 + x$, где x – некоторое вещественное число, R = r. Полученная таким образом оценка уже не является центрируемой, но имеет меньшую величину функционала $W(\tilde{v}(n;R))$ (смещение) в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta = 0{,}5)$. А следовательно, от оценки $\tilde{v}$ можно ожидать и большую эффективность.

Заметим, что функция вероятности плана испытаний с добавлением $P_{n\sum}$ должна быть монотонной с ростом параметра p [2], чтобы уравнение $P_{n\sum}$ $(k,m,\tilde{v}) = \beta = 0{,}5 + x$ имело единственное решение относительно $\hat{v}(\beta = 0{,}5 + x)$ при заданном x.

Ограничим объем испытаний $4 \le n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Проведенные расчеты показали, что оценке $\hat{v}(\beta = 0{,}5 + x\ )$, минимизирующей функционал $W(\hat{\theta}(n;k,m))$, соответствует $\beta = 0{,}5 + x = 0{,}5$, т.е. $x = 0{,}37$.

В таблице 5.5 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $W(\hat{\theta}(n;k,m))$ в соответствии с формулами (5.4) и (5.5) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p}$, $\overline{p}$, $\hat{v}$, где

$$\bar{p} = \begin{cases} \hat{v}(0,n,\beta = 0{,}87\ )\ , R = 0, \\ \dfrac{R}{n+k}, R > 0. \end{cases}$$

Вычисления функционалов $A(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $W(\hat{\theta}(n;k,m))$ проводились с шагом $(dp = 1E - 03)$. А вычисление неявно заданных оценок $\hat{v}$ и $\overline{p}$ проводилось с точностью $1E - 04$ (случай $4 \le n \le 10$).

Таблица 5.5

Результаты подстановки в функционалы $A(\hat{\theta}(n;k,m))$
и $W(\hat{\theta}(n;k,m))$ оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p}$, $\overline{p}$, $\hat{v}$
(случай $4 \le n \le 10$)

Вид функционала	$\tilde{v}(\beta = 0{,}5)$ $4 \le n \le 10$	$\hat{p} = \dfrac{R}{n+k}$ $4 \le n \le 10$	$\bar{p}(\tilde{v}(\beta = 0{,}87))$ $4 \le n \le 10$
$A(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,082182	0,088987	0,067197
$W(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,183407	0,088987	0,081558
Q=(A + 1)•W	0,198480	0,096906	0,087038

Из таблицы 5.5 следует, что для объема испытаний $4 \le n \le 10$ в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок оценку

$$\bar{p} = \begin{cases} \hat{v}(0, n, \beta = 0{,}87\ ), R = 0, \\ \qquad \frac{R}{n+k}, R > 0 \end{cases},$$

обладающую минимальной величиной функционала Q = 0,087038, можно принять в качестве искомой оценки, т.е. эффективной среди предложенных оценок, когда объем испытаний $n > 3$. Однако, когда необходимо оценить неизвестный параметр p величиной, отличной от нуля и единицы, следует использовать оценку $\bar{p}$.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования $(\partial\, p = 1E - 03)$ приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Пример 5.2. Изделия входят в состав агрегата и применяются по схеме с резервированием. Требуется сделать точечную оценку ВБР изделий по результатам биномиальных испытаний на надежность этих изделий. При планировании определительных испытаний на надежность испытатель при расчете объема выборки $(N = n + k = 5)$ учел один отказ ($q = k = 1$), минимизируя риски от возникновения этого маловероятного случайного отказа.

Для вычисления величин ВБР, для биномиального плана испытаний, была использована эффективная в классе смещенных оценок составная оценка [25] (см. раздел 3.11):

$$\tilde{P} = \begin{cases} 1 - \tilde{v}(0, N, \beta = 0{,}993)\,, R = 0, \\ 1 - \dfrac{R}{N}, R > 0. \end{cases}$$

где $\tilde{v}(0, N, \beta = 0{,}993)$ – неявно заданная оценка биномиального плана испытаний [25]. Поскольку за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. В процессе испытаний допустимы два исхода: безотказные испытания и испытания с одним отказом (планируемые). В случае испытаний, не давших отказов, отпадает необходимость в испытаниях дополнительной выборки.

Результаты испытаний $R = r$:

В процессе испытаний отказы не возникали $r = 0$:

ВБР (испытания с добавлением)			ВБР (биномиальные испытания)
$r = k = 0, n = 4, N = n + k = 4 + 0 = 4, q = = 1$			$r = 0, N = n = 4, q = 0$
$1 - \tilde{v}$, $\beta = 0{,}5$	$1 - \hat{p} = 1 - \dfrac{R = r}{n + k}$	$1 - \bar{p}(\tilde{v})$, $\beta = 0{,}87$	$\tilde{P} = 1 - \tilde{v}(0, N, \beta = = 0{,}993)$
0,840	1	0,965	0,9975

В процессе испытаний возник один отказ r = 1:

ВБР (испытания с добавлением)			ВБР (биномиальные испытания, необходимы повторные)
$\mathrm{m} = 0, r = k = 1, n = 4, N = n + k = 5, q = 1$			$r = 1, N = n = 4, q = 0$
$1 - \tilde{v}$, $\beta = 0{,}5$	$1 - \hat{p} = 1 - \dfrac{R = r}{n + k}$	$1 - \bar{p}(\tilde{v})$, $\beta = 0{,}87$	$\tilde{P} = 1 - \frac{R=r}{N}, r>0$
0,735	0,8	0,8	0,75

Заметим, что если в случае проведения биномиальных испытаний по сокращенной выборке $N = n = 4, q = 0$ возникнет один отказ $R = 1$, то по правилам потребуется проведение повторных испытаний по тем же правилам, так как $1 - \tilde{p} = 1 - (R = r)/n = 1 - 3/4 = 0{,}75 < 0{,}8$ [5]. Причем в повторном биномиальном испытании отказы не допускаются.

В этом и есть преимущество испытаний с добавлением, которые позволяют сделать вывод о соответствии ТЗ по результатам только одних испытаний с различными исходами:
$N = n + k = 4, R = 0$ и $N = n + k = 5,\ R = 1$ (без проведения повторных испытаний в том же объеме $N = n + k = 4,\ R = 0$, как в случае биномиальных испытаний, где допустим один исход $q = 0$).

Пример 5.3. В рамках примера 5.2 испытатель при расчете объема выборки ($N = 4$) учел один отказ ($q = k = 1$). В соответствии с требованиями ТЗ ВБР должна быть не менее 0,75. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия возможен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. Результаты испытаний $R = r$:

В процессе испытаний отказы не возникали r = 0

ВБР (испытания с добавлением)				ВБР (биномиальные испытания)
$r = 0, k = 0, n = 3, N = n + k = 3 + 0 = 3$, q = 1				$r = 0, N = n = 3$, q = 0
$1 - \tilde{v}$, $\beta = 0{,}5$	$1 - \hat{p}$	$1 - \widehat{w}_3(0)$	$1 - \bar{p}(\tilde{v})$, $\beta = 0{,}87$	$\tilde{P} = 1 - \tilde{v}(0, N, \beta = 0{,}993)$
0,841	1	1	0,954	0,997

В процессе испытаний возник один отказ r = 1

ВБР (испытания с добавлением)				ВБР (биномиальные испытания)
$r = k = 1, n = 3, N = n + k = 4$, q = 1				$r = 1, N = n = 3$, q = 1
$1 - \tilde{v}$, $\beta = 0{,}5$	$1 - \hat{p}$	$1 - \widehat{w}_3(0)$	$1 - \bar{p}(\tilde{v})$, $\beta = 0{,}5$	$\tilde{P} = 1 - \frac{R=r}{N}$, r>0
0,615	0,75	0,642	0,75	0,633

5.7. Построение эффективной оценки средней наработки на отказ

Классический критерий выбора эффективной оценки для СНДО. Будем считать, что наработка на отказ изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей с параметром t, где последний совпадает с СНДО. Тогда величина ВБР одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством

$$P_0(\tau) = e^{\left(-\frac{\tau}{t}\right)}.$$

В качестве критерия получения эффективной оценки СНДО выбирается простой критерий эффективности смещенных оценок с характеристикой $Q\left(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\right) = \left(A\left(\hat{\theta}\right) + 1\right) \bullet W(\hat{\theta})$ (см. раздел 1.6) и согласно работе [46]:

$$A\left(\hat{\theta}(k, m, n, \tau)\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5} \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10} / \int_1^{\infty} \frac{1}{t}\left\{E\hat{\theta}\left(k, m, n, \tau = 10^i\right) - t\right\}\partial t /. \quad (5.6)$$

$$W\left(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t}/E\hat{\theta}(k,m,n,\tau=10^{i}) - t/\partial t. \quad (5.7)$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра $t \in [1;\infty]$ СНДО.

Выбор эффективной оценки СНДО. Определим оценку СНДО ($\hat{T}_2$) для плана испытаний с добавлением как

$$\hat{T}_2 = \frac{S(k,m,\tau,s_i,n)}{R},$$

где s_i – моменты отказов, $i = 1,2,\dots,R > 0; S$ – суммарная наработка. Доопределим оценку $\hat{T}_2$ при $R = 0$ величиной $\hat{T}_2 = S(k,m,\tau,n)$.

Другой вариант. Чтобы уйти от деления на ноль для оценки СНДО $\hat{T}_2$ представим ее в виде:

$$\hat{T}_3 = \frac{S(k,m,\tau,s_i,n)}{R+1}.$$

Будем рассматривать простой случай и сократим число переменных для оценок $\hat{T}_2$ и $\hat{T}_3$. Для этого будем предполагать, что разброс s_i происходит симметрично относительно $\tau/2$. Это выполнимо для высоконадежных изделий $\tau/t < 0{,}1$ [4], поэтому $S(k,m,\tau,n) = (n-k)\tau + (k+m)\tau/2$.

Определим следующие оценки СНДО для плана испытаний с добавлением как $\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{v}(k,m,n,\beta=0{,}6))}$, $R = k + m = 0$;

$\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1-R/(n+k))}$, $R > 0$;

$\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\bar{p}(k,m,n,\beta=0{,}65))}$, $R = k + m = 0$;

$\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-R/(n+k))}$, $R > 0$.

Вычисления функционалов $A\left(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\right)$ и $W\left(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\right)$ проводились с шагом $\partial p = 1E-03$. А вычисления неявно заданных оценок $\hat{v}$ и $\bar{p}$ проводились с точностью $(1E-04)$.

В таблице 5.6 приведены результаты подстановки в функционалы $A\big(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\big)$ и $W\big(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\big)$ в соответствии с формулами (5.6) и (5.7) следующих оценок СНДО $\hat{\theta}$: $\hat{T}_0$, $\hat{T}_3$, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$.

Таблица 5.6

Результаты подстановки в функционалы $A\big(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\big)$ и $W\big(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\big)$ следующих оценок СНДО $\hat{\theta}$: $\hat{T}_0$, $\hat{T}_3$, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$

Вид функционала	$\hat{T}_0(\tilde{v},\beta=0{,}6)$	$\hat{T}_1(\bar{p},\beta=0{,}65)$	$\hat{T}_2=\frac{S}{R}$	$\hat{T}_3=\frac{S}{R+1}$
$A\big(\hat{\theta}(\tau;n;k,m)\big)$	8,981	8,748	102,48	89,59
$W\big(\hat{\theta}(\tau;n;k,m)\big)$	13,845	13,604	103,48	91,36
$Q=(A+1)\bullet W$	138,203	132,618	10708,45	8276,83

Из таблицы 5.6 следует, что в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок оценка СНДО $\hat{T}_1=\frac{\tau}{-\ln(1-\bar{p}k,m,n,\beta=0{,}65))}$ является эффективной среди предложенных оценок Q = 132,618.

Пример 5.4. В рамках примера 5.2 изделия испытывались 10000 ч. Воспользуемся классической эффективной оценкой СНДО

$$\hat{T}=\frac{\tau}{-\ln(1-\hat{b}(R=r,n))},\hat{b}(r,n)=\frac{R=r}{n}$$

для биномиального плана [9, 18] и эффективной оценкой СНДО [9, 20]

$$\hat{T}_b=\frac{\tau}{-\ln\Big(1-\tilde{b}(R=0,N,\gamma=0{,}6)\Big)}.$$

И построим на их основе следующую составную оценку СНДО для биномиальных испытаний:

$$\hat{T}_{\text{БИ}} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{-\ln(1-\hat{b})}, R > 0, \\ \dfrac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R,n,\beta=0{,}6)\right)}, R = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{b}(R,n,\beta=0{,}6)$ – неявно заданная оценка вероятности отказа биномиального плана испытаний [9, 20].

В соответствии с требованиями ТЗ СНДО должна быть не менее 40000. Поскольку за время испытаний отказ изделия возможен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек.

Результаты испытаний $R = r$:

В процессе испытаний отказы не возникали $r = 0$:

СНДО (испытания с добавлением)	СНДО (биномиальные испытания)
$r=0, k=0, n=4,$ $N=n+k=4+0=4,$ Q = 1 $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\bar{p}(k=0,m=0,n,\beta=0{,}65))},$ $R = k + m = 0;$ $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-R/(n+k))}, R > 0$	$r=0, N=n=4,$ Q=0 $\hat{T}_{\text{БИ}} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1-\frac{\text{R}=\text{r}>0}{n})} \\ \frac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R=0,n,\beta=0{,}6)\right)} \end{cases}$
$\frac{10000}{-\ln(1-\tilde{v}(k=0,m=0,n=4,\beta=0{,}65))} = 72411$	$\frac{10000}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R=0,n=4,\beta=0{,}6)\right)} = 78304$

В процессе испытаний возник один отказ R: $r = 1$

СНДО (испытания с добавлением)	СНДО (биномиальные испытания)
$r=1, k=1, n=4,$ $N=n+k=4+1=5,$ Q = 1 $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\bar{p}(k=0,m=0,n,\beta=0{,}65))},$ $R = k + m = 0;$ $\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1-R/(n+k))}, R > 0$	$r=1, N=n=4, Q=0$ $\hat{T}_{\text{БИ}} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1-\frac{\text{R}=\text{r}>0}{n})} \\ \frac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R=0,n,\beta=0{,}6)\right)} \end{cases}$
$\frac{10000}{-\ln(1-\frac{\text{k}+\text{m}}{n+k})} = 44814$	$\frac{10000}{-\ln(1-\frac{1}{4})} = 34760$, требуются повторные испытания

Выводы к разделу 5

1. Проведено построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением. Для варианта $n > 3$ составная оценка $\hat{V} = 1 - \bar{p}(\hat{v}(\beta = 0{,}87))$ в сравнении с оценкой $\hat{P} = 1 - \hat{p} = 1 - \frac{k+m}{n+k}$ является более эффективной.

2. Испытания с приемочным числом отказов больше нуля ($q > 0$), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

3. Оценки вероятности отказа $\hat{w}_2$ и $\hat{w}_3$ являются несмещенными и, как следствие, эффективными для вариантов соответственно
$n = 2$ и $n = 3$.

4. Оценку $\hat{p} = \frac{k+m}{n+k}$ наравне с составной оценкой $\bar{p}(\hat{v}(\beta = 0{,}87))$ можно принять в качестве искомой оценки вероятности отказа эффективной среди предложенных, когда объем испытаний $n > 3$. Однако когда необходимо оценить неизвестный параметр p величиной, отличной от нуля и единицы, следует использовать составную оценку
$\bar{p}(\hat{v}(\beta = 0{,}87))$.

5. Составную оценку СНДО $\hat{T}_1$ можно принять в качестве эффективной оценки среди предложенных.

6. Полученные составные оценки $\bar{p}$ и $\hat{T}_1$ имеют направленность практического применения для безотказных испытаний, проводимых по плану испытаний с добавлением.

6. СОКРАЩЕНИЕ ОБЪЕМОВ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ИСПЫТАНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ ОТКАЗОВ

Для проведения испытаний на надежность сложных и высоконадежных изделий требуется выставлять большое число испытуемых изделий. С целью сокращения объема испытаний оценку показателей надежности проводят расчетно-экспериментальным методом [27, 34]. Под расчетно-экспериментальным методом понимают:

- Расчетно-экспериментальный метод [27]: метод оценки надежности объекта путем расчета, при котором показатели надежности всех или некоторых составных частей объекта определены экспериментально.
- Расчетно-экспериментальный метод [34]: оценка показателей надежности при наличии основной информации о составных частях объекта и информации о его структуре.

Следует заметить, что в основе расчетно-экспериментального метода лежат методы точечного и интервального оценивания [28, 34], а сами планы испытаний относят к определительным [27].

Следующим шагом по сокращению объема испытаний является сокращение учитываемых отказов. В большинстве случаев допустимое число отказов в процессе испытаний сводят к нулю. Все эти шаги позволяют минимизировать затраты на проведение испытаний на надежность. Однако затраты на проведение испытаний остаются все еще большими, что заставляет разработчика и производителя изделий искать иные подходы к формированию выборки и оценке результатов испытаний на надежность.

Как правило, план испытаний относят к плану типа NБτ (биномиальные испытания) или NВτ (испытания с ограниченной продолжительностью и восстановлением), где N – число испытуемых однотипных изделий; τ – наработка (одинаковая для каждого изделия); Б (В) – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается (восстанавливается) [4]. Для результатов испытаний, не давших отказов, эти планы следует считать эквивалентными.

Предлагаемые в настоящее время методы оценки величин параметров надежности основываются на стандартах, основы которых закладывались на протяжении предыдущего столетия. В частности, в качестве точечной оценки показателей надежности по результатам испытаний, не давших отказов, принимается соответствующая этой оценке нижняя доверительная граница.

Наиболее успешными в этом направлении работами являются методы байесовского статистического оценивания [6, 35, 36].

Примером может служить оценка вероятности безотказной работы, проводимая по результатам испытаний типа NБτ. В качестве точечной оценки ВБР по результатам испытаний, не давших отказов, принимается ее НДГ ($R_{\text{НДГ}}$), величина которой определяется по формуле [6] (байесовская нижняя доверительная граница – случай равномерного априорного распределения – тривиальная априорная информация):

$$R_{\text{НДГ}} = \sqrt[(N+1)]{1-\gamma}\,, \tag{6.1}$$

где γ – доверительная вероятность.

Заметим, что формулу (6.1) с хорошим приближением можно применять и для плана испытаний NБτ в случае, когда в процессе испытаний отказы не возникают.

Существенным недостатком методов байесовского статистического оценивания является ограничение, накладываемое выбранным априорным распределением как неизменным постулатом [30, 37]. Поэтому, несмотря на достигнутые впечатляющие результаты, методы байесовского статистического оценивания остаются ограниченными выбранным априорным распределением и дают результаты, не выходящие за рамках дозволенного, которое определено выбором вида распределения и его параметров по результатам испытаний изделий предыдущих партий. Такая модель поведения байесовской оценки не отражает реальный мир и обслуживает период стабильной ситуации. Так, различные партии изделий имеют различные величины параметров априорного распределения, а в случае нарушения технологической дисциплины эти различия становятся еще сильнее. Однако заметить эти отличия не позволяет не только зафиксированный выбор вида априорного распределения, но и зафиксированный выбор величин параметров этого распределения, осуществленный на выборках различных партий изделий еще до выпуска контролируемой партии. То есть этот выбор основан на опыте стабильного выпуска предыдущих партий. Таким образом, байесовская оценка контролируемой партии напрямую зависит не только от вида априорного распределения, исхода испытаний и объема выборки N, но и от выбранных параметров априорного распределения [27, 30].

В сильной степени устранить эти недостатки может составная байесовская оценка, приведенная в [37] для биномиального плана испытаний. Однако для целочисленных значений $r = 0$ и $r = N$ исходов биномиальных испытаний априорные вероятности возникновения отказа ограничены величинами, отличными от нуля и единицы. В этом заключен некоторый произвол, однако в противном случае составная байесовская оценка вероятности отказа совпадет с классической оценкой ($\hat{p} =$

R/N), что делает необходимость в байесовской оценке биномиальных планов испытаний ничтожной [37], превращая изложенные преимущества байесовского оценивания в миф.

Поэтому байесовская оценка $R_{\text{НДГ}} = \sqrt[(N+1)]{1-\gamma}$ в данной работе рассматривается не как эталон, а как инструмент сравнения лучших классических оценок с современными по результатам испытаний, не давших отказов.

Разумной альтернативой классической оценки $\mathrm{R}_{\text{НДГ}} = \sqrt[(N+1)]{1-\gamma}$, а следовательно и составной байесовской оценки, в части биномиальных испытаний, не давших отказов, может служить неявно заданная точечная оценка вероятности отказа изделий, приведенная в [9, 18–23].

В основе предлагаемого метода решения проблемы сокращения количества испытуемых изделий для испытаний, не давших отказов, лежит использование в качестве расчетных формул выражения для точечных оценок показателей надежности (вместо НДГ), полученных за последнее время [9, 12–23].

Здесь и далее в качестве основной модели надежности рассматривается экспоненциальный закон распределения наработки на отказ [5]. Ниже приводятся расчетные оценки объемов испытаний, в течение которых отказы не возникают. Подчеркнем еще раз, что приводимые расчетные оценки объемов испытаний верны исключительно для испытаний, не дающих отказов, проводимые в соответствии с планами типа $N\text{Б}\tau$ или $N\text{В}\tau$, которые для этого случая эквивалентны.

6.1. Сокращение объемов в случае оценки вероятности безотказной работы при планировании испытаний без возникновения отказов

Проведем расчет объема выборки испытаний для числа отказов $R = 0$ исходя из оценок [9, 18–20, 24, 25, 38].

В классическом случае для испытаний, не давших отказов, определение объема выборки (N) рассматривают исходя из равенства НДГ $R_{\text{НДГ}}$ нормируемой величине ВБР ($P_{\text{норма}}$), т.е. исходят из равенства $R_{\text{НДГ}} = P_{\text{норма}}$. В качестве эталона сравнения объемов выборки испытаний, рассчитанных исходя из различных оценок, возьмем формулу (6.1), которая определяет байесовскую НДГ. Тогда объем выборки (для испытаний при $R = 0$) $N_{\text{Байес}}$ рассчитывают по формуле:

$$N_{\text{Байес}} = \frac{Ln(1-\gamma)}{Ln(R_{\text{НДГ}}=\text{Р}_{\text{норма}})} - 1. \quad (6.2)$$

Полученная расчетная формула (6.2) объема выборки для испытаний при $R = 0$ является традиционной. Заметим, что оценка НДГ ВБР, полученная решением уравнения Клоппера–Пирсона [4], проигрывает байесовской оценке согласно формуле (6.1), поэтому в сравнительном анализе рассматриваться не будет.

Биномиальный план испытаний. Для испытаний (при $R = 0$), проводимых по биномиальному плану, рассмотрим точечную оценку ВБР [25]

$$\tilde{p}_\tau(g;T_p(R=0,\tau,N)) = 1-exp(-g/\ T_p),\ \text{где}\ \ T_p(R=0) = 110N\tau \quad (6.3)$$

за время τ. Оценка не является эффективной [25], так как таковой является традиционная несмещенная и эффективная оценка $\hat{P}(R,N) = 1 -$

$-\hat{p} = 1 - \frac{R}{N}$. Однако возможность оценивать ВБР величиной, отличной от нуля и единицы, делает ее весьма привлекательной. Приравняем 1 – $\tilde{\tilde{p}}_\tau$ норме $P_{норм}$, тогда объем выборки при g = τ следует рассчитывать по формуле:

$$N_{NБτ} = -1/110Ln(P_{норм}). \tag{6.4}$$

План испытаний типа $NB\tau$. Для плана испытаний типа NВτ рассмотрим эффективную точечную оценку ВБР за время $g = \tau$ [25], полученную в соответствии с критерием эффективности интегральных оценок [25], а именно:

$$P_v(T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}, \tag{6.5}$$

где $T_v(R{=}0) = 110n\tau$, $T_v(R{>}0) = n\tau\,/\,(R + 0{,}6)$, для $\tau = g$.

Приравняем P_v в формуле (6.5) норме $P_{норм}$, тогда объем выборки при $g = \tau$ следует рассчитывать по формуле:

$$N_{NB\tau} = -1/110Ln(P_{норм}). \tag{6.6}$$

Из формул (6.4) и (6.6) следует, что объем выборки не зависит от γ – доверительной вероятности согласно формуле (6.1), так как вывод этих формул основан на точечных оценках.

Результаты объемов испытаний N, рассчитанных в соответствии с формулами (6.2), (6.4) и (6.6) для планов испытаний, не давших отказов, типа NБτ и NВτ, приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Результаты объемов испытаний N,
рассчитанных в соответствии с формулами (6.2), (6.4) и (6.6)
для планов испытаний, не давших отказов, типа $N\text{Б}\tau$ и $N\text{В}\tau$

Нормируемая величина ВБР	$N_{Байес}$ (γ = 0,8), шт.	$N_{NБ\tau}$, шт.	$N_{NВ\tau}$, шт.
0,999	1608	9	9
0,99	159	1	1
0,95	30	1	1
0,9	14	1	1

Из таблицы 6.1 следует, что объемы испытаний имеют тенденцию к резкому снижению для выбранного ряда оценок.

6.2. Сокращение объемов в случае оценки средней наработки на отказ при планировании испытаний без возникновения отказов

Если в качестве оценки СНДО рассматривать традиционную оценку $\hat{T}_0$ [4, 28]:

$$\hat{T}_0 = \frac{N\tau}{R}, R > 0,$$

где R – случайное число отказов, то объем выборки, как и величину реализации оценки $\hat{T}_0$, для испытаний, не давших отказов, рассчитать невозможно. Поэтому в этом случае традиционно в качестве оценки СНДО выбирают ее НДГ [4, 28], например, для биномиального плана испытаний, а именно:

$$T_{01\text{н}} = \frac{2t_{\Sigma}}{x^2(1-\propto;2r+1)},$$

где $t_{\Sigma} = N\tau\ (R: r = 0) -$ суммарная наработка изделия; $x^2(1-\propto; 2r + 1)$ – квантиль x^2-распределения с $(2r + 1)$-й степенью свободы (для плана испытаний NБτ); $(\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}9 = 0{,}1)$ – уровень значимости согласно ГОСТ Р 50779.26–2007 [28] (здесь оценка НДГ СНДО с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}9$ (не путать с вероятностью «гамма»)).

Аналогично для плана испытаний типа NВτ получаем:

$$T_{01\text{н}} = \frac{2t_{\Sigma}}{x^2(1-\propto;\ r+2)}.$$

Пусть в качестве нормируемой величины СНДО $T_{01\text{н}}$ выбирается величина, равная $T_{01\text{н}} = T_{\text{норма}}$, тогда объем выборки для биномиального плана испытаний следует рассчитывать по формуле:

$$N = T_{\text{норма}} \frac{x^2(1-\propto; 1)}{2\tau}.$$

А для плана испытаний типа NВτ – по формуле:

$$N = T_{\text{норма}} \frac{x^2(1-\propto; 2)}{2\tau}.$$

Точечная оценка СНДО для плана испытаний типа NВτ. Для плана испытаний типа NВτ рассмотрим точечную оценку СНДО [25] (см. раздел 2), полученную в соответствии с критерием эффективности оценок [24], а именно:

$T_{\text{В2}}(R = 0) = 2{,}5n\tau$, $T_{\text{В2}} = n\tau / (R + 1 + 2{,}3 - 0{,}6R)$ при $1 \le R \le 5$,

$T_{\text{В2}}(R > 5) = n\tau / (R + 1)$.

Тогда относительный выигрыш от минимизации объема выборки при $R = 0$ для плана NВτ следует рассчитывать по формуле:

$$\text{Выигрыш} = x^2(1-\propto; 2) \cdot 1{,}15.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}2$ относительный выигрыш от минимизации объема выборки составит 3,6 раза, а для $\alpha = 0{,}1$ – 5,1 раза.

Точечная оценка СНДО для биномиального плана испытаний. Для биномиального плана испытаний рассмотрим точечную эффективную оценку СНДО [24], полученную в соответствии с критерием эффективности оценок [25], а именно:

$$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)),$$

$$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) -$$

$$- \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)).$$

Поскольку для испытаний, не давших отказов, планы испытаний типа $N\text{Б}\tau$ и $N\text{В}\tau$ примерно эквивалентны, то все сказанное для плана испытаний типа $N\text{В}\tau$ примерно верно и для плана испытаний типа $N\text{Б}\tau$, и наоборот.

$$T_{\text{норма}} = T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3)).$$

Обозначим через $t = -1 + (T_{\text{норма}} - 400)/0{,}6\tau$, тогда

$t = -1/\mathrm{Ln}(1 - 0{,}3/(n + 0{,}3))$, следовательно $\mathrm{Ln}(1 - 0{,}3/(n + 0{,}3)) = -1/t$.

Откуда $1 - 0{,}3/(n + 0{,}3) = \exp\{-1/t\} \approx 1 - 1/t$, следовательно

$0{,}3/(n + 0{,}3) \approx 1/t$, откуда $0{,}3t = n + 0{,}3$ или

$n = 0{,}3(t - 1) = 0{,}3(-2 + (T_{\text{норма}} - 400)/0{,}6\tau)) = -0{,}6 + (T_{\text{норма}} - 400)/2\tau$.

Учтем, что время испытаний $\tau \approx T_{\text{норма}}$, а $400/2\tau \approx 0$. Тогда

$n = -0{,}6 + T_{\text{норма}}/2\tau$, следовательно

Выигрыш $= N/n \approx \chi^2(1 - \alpha;1)/(1 - 0{,}3) = 7\chi^2(1 - \alpha;1)$.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}3$ относительный выигрыш от минимизации объема выборки составит 7 раз, а для $\alpha = 0{,}1$ – 16 раз.

В заключение раздела следует заметить, что рассмотренные оценки, в отличие от традиционной $\hat{T}_0$, позволяют рассчитывать точечную оценку СНДО по результатам испытаний, не давших отказов.

Выводы к разделу 6

Использование приведенных в данной работе оценок параметров надежности позволяет минимизировать объем выборки при проведении испытаний на надежность, которые были запланированы как безотказные, что в сильной степени решает проблему минимизации объема выборки. Такое стало возможным потому, что эти оценки дают возможность проводить точечное оценивание по результатам испытаний, не давших отказов, что, в свою очередь, не позволяет занижать реальный показатель надежности.

7. АНАЛИЗ СМЕЩЕНИЯ ОЦЕНОК СТАЦИОНАРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАНОВ ИСПЫТАНИЙ

7.1. Введение

Любой процесс разработки технических изделий должен включать проведение испытаний на надежность. Если в процессе эксплуатации нормой является восстановление изделия после наступившего отказа, то в качестве планов испытаний на надежность обычно используют планы испытаний типа NBt и NBR, где N – число испытуемых однотипных изделий; t – время испытаний каждого из N изделий; R – число отказов; B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается [4, 5, 39]. Обычно символы NBt и NBR обозначают, что в процессе испытаний отказы восстанавливаются мгновенно. Чтобы не путать планы NBt и NBR с планами испытаний с длительным временем восстановления, будем последние обозначать соответственно символами $NB!t$ и $NB!R$ [40].

Упростим постановку задачи и потребуем для планов испытаний типа $NB!t$ и $NB!R$ выполнение условия $D = R$, где D – число восстановлений, т.е. после окончания испытаний в момент времени t восстановление изделий продолжается пока не восстановится последнее из R отказавших изделий. Для плана испытаний типа $NB!t$ добавим условие, что все изделия должны иметь суммарную наработку, равную t. Такие планы испытаний будем обозначать соответственно $NB!t(D{=}R)$ и

$NB!R(D{=}R)$. В качестве модели надежности принимается экспоненциальное распределение.

Для восстанавливаемых изделий обычно в качестве комплексного показателя надежности устанавливают стационарный коэффициент готовности (КГ). Стационарный КГ определяется как вероятность того, что изделие окажется в работоспособном состоянии в данный момент времени, достаточно удаленный от начала испытаний [27].

Формула для стационарного КГ ($K_г$), используемая на практике, имеет вид [4, 5, 41, 42]:

$$K_г = T / (T + H) = 1 / (1 + H / T),$$

где $T = 1 / \lambda$ – средняя наработка на отказ изделия, где λ – интенсивность отказов изделия; $H = 1 / h$ – среднее время восстановления (замены) изделия, где h – интенсивность восстановлений (замен) изделия. В качестве оценки КГ используется общая формула:

$$G = \check{T} / (\check{T} + \hat{H}) = 1 / (1 + \hat{H} / \check{T}),$$

где $\check{T}$ – оценка средней наработки на отказ, полученная по результатам испытаний изделий; $\hat{H}$ – оценка среднего времени восстановления, полученная по результатам испытаний изделий. Из вида оценки G следует, что существует бесконечное множество оценок стационарного КГ ($K_г$). Например, для планов испытаний типа NBt и NBR в качестве $\check{T}$ можно выбрать оценку[2] соответственно $\check{T} = Nt /(R + 1)$, $R \geq 1$ и $\check{T} = Nt /R$, $R \geq 1$ [4, 5, 39]. В качестве формулы для $\hat{H}$ традиционно выбирают $\hat{H} = V / D = R$, где $R \geq 1$, V – суммарное время восстановления. Нахождение эффективных оценок является одной из основных задач теории надежности. За последнее время, начиная с 60-х годов прошлого столе-

[2] ГОСТ Р 50779.26–2007 Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения. М.: Стандартинформ, 2008. 27 с.

тия, в отечественной научной литературе было представлено ничтожно мало исследований, касающихся свойств оценок стационарного КГ. Наиболее известная работа по исследованию оценок стационарного КГ для плана испытаний типа *NBR* представлена в [41]. Данная работа восполняет указанный пробел [40].

Чтобы из бесконечного множества оценок стационарного КГ $K_г$ выявить эффективную оценку, сначала следует построить критерий сравнения по эффективности этих оценок.

Построим простой критерий эффективности смещенных оценок стационарного КГ для планов испытаний с длительным временем восстановления ($N \geq 1$) и определим на основе построенного критерия эффективную смещенную оценку из числа предложенных [40].

7.2. Построение критерия эффективности оценок стационарного коэффициента готовности для плана испытаний типа *NB!t(D=R)*

Рассмотрим план испытаний типа *NB!t*(*D*=*R*). Такие испытания предназначены прежде всего для оценки стационарного КГ [4, 5, 40, 41] (определительные испытания). В процессе испытаний наработка на отказ и время восстановления изделия являются случайными величинами и подчиняются экспоненциальному закону распределения вероятностей [4, 5, 39]. В процессе испытаний изделие всегда может находиться в одном из двух состояний: работоспособном и неработоспособном. В случае отказа изделие восстанавливается, причем ресурс изделия восстанавливается полностью (путем замены или ремонта), что в процессе испытаний позволяет считать неизменными параметры законов распределения.

Упростим задачу и будем рассматривать в процессе проведения испытаний типа *NBt* только одно изделие $N = 1$, тогда в рамках этой задачи наблюдается пуассоновский поток отказов с интенсивностью λ [4, 5, 39].

Таким образом, испытание системы, состоящей из одного изделия, в соответствии с планом $NB!t(D=R)$, $N = 1$ можно представить в виде двух совокупностей испытаний, проводимых по классическим планам *NBt*, где восстановление можно считать мгновенным, и $NB(D=R)$, где отказы системы возникают мгновенно, т.е. соответственно план с восстановлением и ограниченным временем испытаний и план с ограниченным числом восстановлений (*R* является случайной величиной).

Введем обозначения:

$S = t$ – суммарная наработка системы, состоящей из одного изделия;

V – суммарное время восстановлений этой системы.

Можно предложить множество вариантов оценок $G(D=R,R,S,V)$. Для их сравнения по эффективности следует построить критерий эффективности смещенных оценок стационарного КГ (см. раздел 1.6). С этой целью воспользуемся опытом подобных построений, изложенным в предыдущих частях данной книги. В соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок оценка *G* считается более эффективной в сравнении с другими смещенными оценками, если ее математическое ожидание *EG* имеет наименьшее абсолютное смещение от истинного стационарного КГ $K_г$, который всегда зависит от параметров законов распределения λ, *h*. Смещение (*m*) в большинстве случаев определяют как отклонение *EG* от принимаемых значений КГ, а именно:

$$m(G, K_г) = /EG - K_г/.$$

В принципе вид оценок G стационарного КГ системы может иметь любой функциональный вид: $G(N,S,V,D, R, \ldots)$, $N = 1, S = Nt, D = R$.

В данной работе следует ограничиться оценками с простым видом, а именно:

$$G_1 = \frac{1}{1+\frac{V}{S}\cdot\frac{R}{D=R}} \text{ (традиционная оценка), } G_2 = \frac{1}{1+\frac{V}{S}\cdot\frac{R+1}{D=R}},\ G_3 = \frac{1}{1+\frac{V}{S}\cdot\frac{R}{R+1}}.$$

Тогда в предположении независимости с.в. V и R следует, что $EG(V, R) = E_R(E_V(G|R))$ [43].

Для каждого из R отказов изделия плотность функции вероятности суммы V независимых одинаково распределенных случайных величин времен восстановлений с плотностью распределения he^{-ht} имеет вид специального распределения Эрланга [4, 5]:

$$\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}.$$

Тогда условное математическое ожидание E_V оценки G стационарного КГ изделия имеет вид:

$$E_V(G \mid R, D=R, h) = \int_0^{\infty} G\,\frac{h(hV)^{(D-1)}e^{-hV}}{(D-1)!}\,dV.$$

Поток отказов представляет собой пуассоновский поток с функцией распределения $Пу(r) = \sum_{k=0}^{r} e^{-\Delta}\frac{\Delta^k}{k!}$, ($\Delta = \lambda t$, $N=1$). Математическое ожидание EG вычисляется по формуле [4, 5, 39]:

$$EG = E_R\left(E_V G\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(E_V G\right)\cdot e^{-\Delta}\frac{\Delta^r}{r!}.$$

Смещение $m(G)$, как и $K_г$, тоже зависит от параметров выбранных законов распределения (T, H). Для построения простого критерия эффективности смещенных оценок стационарного КГ изделия следует просуммировать абсолютные смещения по всем параметрам выбранных законов распределения (T, H) и плана испытаний (R=r, t, N=1):

$$W(G) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{T_1}^{T_2}\int_{H_1}^{H_2} /m(G)/\, dHdTdt\,. \qquad (7.1)$$

Заметим, что обычно при построении подобных функционалов проводится усреднение, однако в данном случае усреднение приводит к мизерным величинам, поэтому усреднение заменено на суммирование. Если не ограничивать суммирование, то величина построенного функционала $W(G)$ для большинства оценок всегда будет равна бесконечности. Поэтому пределы суммирования (выраженные в часах) ограничивают разумными интервалами величин параметров (T, H, t, V) и R = 20.

Среди оценок, обладающих минимальным суммарным абсолютным смещением $W(G)$, эффективной следует считать оценку с минимальной балансировкой. С этой целью строится функционал

$$A(G) = \int_{t_1}^{t_2} / \int_{T_1}^{T_2}\int_{H_1}^{H_2} y(G)dHdTdt\, / \,, \qquad (7.2)$$

где $y(G)$ = ($E_R(E_V(G|R))$ – $K_г$) [43].

Непосредственное вычисление функционалов $W(G)$ и $A(G)$ формул (7.1) и (7.2) весьма затруднительно, т.к. требует больших вычислительных мощностей. Поэтому формулы (7.1) и (7.2) следует упростить и привести к более практичному виду соответственно (R ограничим величиной 20 вместо бесконечности):

$$W_1 = \sum_{k=3}^{5}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7} /\,C\,/\,,\quad A_1 = \sum_{k=3}^{5} / \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7}\left(C\right)/\,, \qquad (7.3)$$

где $C = \left[\sum_{r=1}^{20} E_V G\left(D=r, R=r, H=10^j, t=10^k\right) \cdot e^{-\frac{t=10^k}{T=10^i}} \frac{\left(-t=10^k\right)^r}{\left(T=10^i\right)^r r!}\right] - \frac{10^i}{10^i+10^j}$, В основе сравнения эффективности смещенных оценок СНДО лежит минимизация функционала вида $Q(G) = (A(G) + 1) \cdot W(G)$ на предложенных оценках $G(D=R, R, S=Nt, V)$.

Результаты подстановки в формулу (7.3) предложенных оценок стационарного КГ изделия для плана испытаний типа $NB!t(D=R)$, $N=1$ представлены в таблице 7.1. Расчет проводился в системе «Mathcad».

Таблица 7.1

Результаты подстановки в формулу (7.3) предложенных оценок стационарного КГ системы для плана испытаний типа $NB!t(D=R)$, $N=1$

Вид оценки $K_г$	A	W	$Q = (A+1) \cdot W$
$G_1 = (1 + VR / SR)^{-1}$	36,805	36,805	1391,41
$G_2 = (1 + V(R+1) / SR)^{-1}$	37,055	37,055	1410,12
$G_3 = (1 + VR / S(R+1))^{-1}$	36,596	36,596	1375,86

Из таблицы 7.1 следует, что для плана испытаний типа $N=1B!t(D=R)$ оценка $G_3 = (1 + VR / S(R+1))^{-1}$, обладающая минимальной характеристикой Q = 1375,86, в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок является эффективной среди предложенных оценок.

Заметим, что если число однотипных изделий N, поставленных на испытания, превышает единицу $N > 1$, то в предположении подчинения распределения наработки на отказ экспоненциальному закону (простейший поток отказов [4, 5]) вместо системы, представимой в виде одного изделия $N = 1$ и одного временного отрезка испытаний системы $S_1 = t$, следует рассматривать систему, состоящую из $N > 1$ раз сосредоточенных однотипных изделий, и последовательную временную структуру системы, как продолжение предыдущей временной структуры $S = S_1 = t$, на $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$, состоящую из N временных отрезков испытаний изделий, каждое из которых работает независимо, а наступление событий в виде отказов и восстановлений происходит совместно на суммарном временном интервале S. То есть подобную систему всегда можно представить в виде одного изделия, которое последовательно испытывают в течение времени $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$. Такое возможно, так как однородный процесс Пуассона является простейшим, для которого выполняются условия: стационарность, отсутствие последействия и ординарность [4, 5]. С другой стороны, в задекларированных условиях распределения наработки на отказ систему, состоящую из $N > 1$ изделий, можно представить как объединение простейших потоков [4, 5] длительностью t, что в конечном итоге приводит к тому же результату. Тогда эффективную оценку стационарного КГ изделия вычисляют по формуле:

$$G_{\text{изделия}} = (1 + VR / S(R+1))^{-1},$$

где $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$ – суммарная наработка всех изделий системы и самой системы (первый вариант), по второму варианту t – наработка системы, состоящей из N изделий (из N объединенных простейших потоков отказов), с суммарной наработкой всех изделий системы $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N = Nt$; $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$ – суммарное время восстановлений (случайная величина) этой системы; $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_N$ – суммарное число отказов (случайная величина) этой системы ($N = 1$) за время S, а по второму варианту – N $(N > 1)$ изделий за время t.

Пример 7.1. Сложное оборудование в количестве двух штук $N = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию на срок, равный одному году, с условием, что каждое изделие должно иметь наработку, равную 8760 ч. В качестве показателя надежности изделия в ТЗ установлен стационарный коэффициент готовности изделия $K_{\text{г}} = 0{,}99$. В процессе опытной эксплуатации обнаружен отказ. Из-за сложной логистики оборудование простояло на ремонте 500 ч.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа $NB!t(D=R)$, $N=2$.

1) Традиционная эффективная оценка.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила:

$G_{\text{изделие}} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 500 / (8760+8760))^{-1} = 0{,}972253$,
что не соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_3 = (1 + VR / S(R+1))^{-1}$.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила:

$G_{\text{изделие}} = (1 + VR / S(R+1))^{-1} = (1 + 1 \cdot 500 / (2 * 8760^2))^{-1} = 0{,}9971$, что соответствует требованиям ТЗ.

Пример 7.2. Сложное оборудование в количестве двух штук $N = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию. Первое изделие суммарно отработало 10000 ч и простояло в ремонте два раза $R = 2$ 200 и 300 ч соответственно. Второе изделие суммарно отработало 20000 ч и простояло в ремонте три раза $R = 3$ 200, 300 и 400 ч соответственно. В качестве показателя надежности изделия в ТЗ установлен стационарный коэффициент готовности изделия $K_{г} = 0{,}96$.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа $NB!t(D=R)$, $N=2$.

1) Традиционная эффективная оценка.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила:

$G_{\text{изделие}} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 1400 / 30000)^{-1} = 0{,}955414$, что не соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_2 = (1 + VR / S(R+1))^{-1}$.

Суммарное число отказов составило $R = 5$. Суммарное время восстановлений составило $V = 1400$ ч. Суммарное время работы составило $S = 30000$ ч. По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ системы составила:

$G_{\text{изделие}} = (1 + VR / S(R+1))^{-1} = (1 + 1400 \cdot 5 / (6 \cdot 30000))^{-1} = 0{,}9625$, что соответствует требованиям ТЗ.

7.3. Построение критерия эффективности оценок стационарного коэффициента готовности для плана испытаний типа *NB!R(D=R)*

Испытание с длительным временем восстановления $NB!R(D=R)$, $N = 1$ можно представить в виде двух совокупностей испытаний, проводимых по классическим планам NBR (мгновенное восстановление, $N = 1$) и $NB(D=R)$ (мгновенные отказы, $N = 1$).

Для любого из R отказов системы, состоящей из одного изделия $N = 1$, длительности восстановления и работы не зависят друг от друга и каждая имеет свою плотность распределения he^{-ht} и $\lambda e^{-\lambda t}$ соответственно. Зависимость факта появления отказов и, как следствие, восстановлений не влияет на продолжительности восстановления и работы. И, как следствие, независимы и их суммы, т.е. с.в. S, V. С целью построения математического ожидания EG следует знать функцию распределения сумм S, V и заданное число отказов R. Плотность функции вероятности суммы V независимых одинаково распределенных случайных времен восстановлений с плотностью распределения he^{-ht} имеет вид специального распределения Эрланга $\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}$ [4, 5]. Плотность функции вероятности суммы S независимых одинаково распределенных случайных наработок на отказ с плотностью распределения $\lambda e^{-\lambda t}$ тоже имеет вид специального распределения Эрланга $\frac{\lambda(\lambda S)^{(r-1)}e^{-\lambda S}}{(r-1)!}$ [4, 5].

Тогда математическое ожидание оценки G стационарного КГ системы рассчитывают по формуле:

$$E\left(G, D=d=r, R=r, \lambda, h\right)=\int_0^\infty\int_0^\infty G\frac{h(hV)^{(d-1)}e^{-hV}}{(d-1)!}\frac{\lambda(\lambda S)^{(r-1)}e^{-\lambda S}}{(r-1)!}dVdS\ .$$

Чтобы построить простой критерий эффективности смещенных оценок стационарного КГ системы, следует просуммировать абсолютные смещения $W(G)$ по всем параметрам выбранных законов распределения (T, H) и плана испытаний:

$$W\left(G\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{H_1}^{H_2}\int_{T_1}^{T_2} / m\left(G\right) / dTdH\ . \tag{7.4}$$

Заметим, что обычно при построении подобных функционалов проводится усреднение, однако в данном случае усреднение приводит к мизерным величинам, поэтому усреднение заменено на суммирование. Непосредственное вычисление функционала $W(G)$ формулы (7.4) весьма затруднительно, т.к. требует больших вычислительных мощностей. Поэтому формулу (7.4) следует упростить и привести к более практичному виду соответственно:

$$W_1=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=4}^{7}\sum_{r=1}^{10} / C /\ \ A_1=\sum_{j=1}^{4} / \sum_{i=4}^{7}\sum_{r=1}^{10} C / , \tag{7.5}$$

где $C\left(D=R, R=r, H=10^j, T=10^i\right)=\left(EG-\frac{T}{T+H}\right)$.

В основе сравнения эффективности смещенных оценок СНДО лежит минимизация функционала вида $Q(G) = (A(G)+1) \bullet W(G)$ на предложенных оценках $G(D=R, R, S, V)$.

Результаты подстановки предложенных оценок стационарного КГ изделия в формуле (7.5) для плана испытаний типа $NB!R(D=R)$, $N = 1$ представлены в таблице 7.2. Расчет проводился в системе «Mathcad». К ранее предложенным оценкам добавлена новая оценка

$$G_4 = \frac{1}{1 + \dfrac{V(R+0,4)}{S(R+0,9)}}.$$

Таблица 7.2

Результаты подстановки предложенных оценок стационарного КГ системы в формулу (7.5) для плана испытаний типа $NB!R(D=R)$

Вид оценки $K_г$	A	W	$Q = (A+1) \bullet W$
$G_1 = (1 + VR / SR)^{-1}$	60,953	61,157	3788
$G_2 = (1 + V(R+1) / SR)^{-1}$	177,871	177,871	31815
$G_3 = (1 + VR / S(R+1))^{-1}$	41,453	58,639	2489
$G_4 = (1 + V(R+0,4) / S(R+0,9))^{-1}$	*2,145*	57,198	179

Из таблицы 7.3 следует, что оценка $G_4 = (1 + V(R+0,4) / S(R+0,9))^{-1}$ в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок является эффективной в классе оценок $G = (1 + V(R+\alpha) / S(R+\beta))^{-1}$.

Заметим, что если число однотипных изделий N, поставленных на испытания, превышает единицу $N > 1$, то в предположении подчинения распределения наработки на отказ экспоненциальному закону (простейший поток отказов [4, 5]) вместо системы, представленной в виде одного изделия $N = 1$ и одного случайного временного отрезка испытаний S_1 системы, следует рассматривать систему, состоящую из $N > 1$ раз сосредоточенных однотипных изделий (или систем, состоящих из одного изделия), и последовательную случайную временную структуру как продолжение предыдущей случайной временной структуры системы $S = S_1$, т.е. $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N$, состоящую из N случайных временных отрезков испытаний изделий, каждое из которых работает независимо, а наступление событий в виде отказов и восстановлений происходит совместно на суммарном временном интервале. То есть систему можно представить в виде одного изделия, которое последовательно испытывают в течение времени $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N$. Такое возможно, так как однородный процесс Пуассона является простейшим, для которого выполняются условия: стационарность, отсутствие последействия и ординарность [4, 5]. Тогда оценку стационарного КГ изделия вычисляют по формуле:

$$G_{\text{изделия}} = (1 + V(R+0,5) \,/\, S(R+0,9))^{-1},$$

где $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_N$ – суммарная наработка системы (случайная величина), состоящей из N последовательно испытуемых однотипных изделий; $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$ – суммарное время восстановлений (случайная величина) этой системы; $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_N$ – суммарное нормированное число отказов системы.

Пример 7.3. Сложное оборудование в количестве двух штук $n = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию на срок, который определялся для каждого изделия числом отказов $R = 1$. Отказ первого изделия произошел на 11000 ч и длился 400 ч. Отказ второго изделия произошел на 9000 ч и длился 600 ч. В качестве показателя надежности в ТЗ установлен стационарный КГ, равный $0,96$.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа $NB!R(D=R)$, $N=1$.

1) Традиционная оценка.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила:

$G_{изделие} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 1000 /20000)^{-1} = 0{,}952381$,

что не соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_4 = (1 + V(R+0{,}4) / S(R+0{,}9))^{-1}$.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила:

$G_{изделия} = (1 + V(R+0{,}4) / S(R+0{,}9))^{-1} = (1 + 1000 \bullet 2{,}4 / (20000 \bullet 2{,}9))^{-1} =$ $= 0{,}9602$, что соответствует требованиям ТЗ.

Пример 7.4. Сложное оборудование в количестве двух штук $n = 2$ было поставлено на опытную эксплуатацию. Срок первого изделия определялся числом отказов $R = 1$. Отказ первого изделия произошел на 10000 ч и длился 400 ч. Срок второго изделия определялся числом отказов $R = 2$. Отказы второго изделия произошли соответственно на 9000 и 11000 ч и длились 300 и 700 ч соответственно. В качестве показателя надежности в ТЗ установлен стационарный КГ, равный *0,96*.

Далее рассмотрим два решения примера. Испытаниям соответствует план типа $NB!R(D=R)$, $N=2$. Характеристики испытаний составили: $R = 3$, $S = 30000$ ч, $V = 1400$ ч.

1) Традиционная оценка.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила:

$G_{изделие} = (1 + V / S)^{-1} = (1 + 1400 /30000)^{-1} = 0{,}955414$, что не соответствует требованиям ТЗ.

2) С использованием эффективной оценки стационарного КГ $G_4 = (1 + V(R+0{,}4) / S(R+0{,}9))^{-1}$.

По результатам опытной эксплуатации оценка стационарного КГ изделия составила

$G_{\text{изделия}} = (1 + V(R+0,4) / S(R+0,9))^{-1} = (1 + 1400 \cdot 3,4 / (30000 \cdot 4))^{-1} =$
$= 0,96184$, что соответствует требованиям ТЗ.

Выводы к разделу 7

1. Построены простые критерии эффективности оценок стационарного КГ системы для различных планов испытаний с длительным временем восстановления (случай $N \geq 1$).

2. Оценка $G_2 = (1 + VR / S(R + 1))^{-1}$ является эффективной среди предложенных для плана испытаний типа $NB!t(D=R)$.

3. Оценка $G_4 = (1 + V(R+0,4) / S(R+0,9))^{-1}$ является эффективной среди предложенных для плана испытаний типа $NB!R(D=R)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в книге результаты являются прямым отражением ускоренного развития теории надежности за последние десятилетия, которое основано не в последнюю очередь и на работах российских ученых. В классе смещенных оценок получены эффективные оценки показателей надежности для различных планов испытаний: биномиального плана испытаний, плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий, плана с добавлением и специальных определительных планов испытаний для КГ. Полученные оценки показателей надежности имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации изделий различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.

Сформулирован общий подход к построению критерия эффективности смещенных оценок. Для различных планов испытаний построены критерии эффективности, которые позволяют однозначно определить эффективную оценку из числа предложенных оценок. Однако задача построения (получения) эффективных оценок (смещенных и нет) с хорошими статистическими свойствами остается по прежнему основной в теории надежности и ждет своего решения. К приведенным результатам не следует относиться как к догмам. Правильным будет – осуществление поиска новых подходов получения эффективных оценок.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Новые знания определяют развитие в начале использования и сдерживают его в конце. Чтобы определить развитие, следует отказаться от старых догм и приобрести новые.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Обозначения:

N – число испытуемых однотипных изделий ($N = n$ – число первоначально выставленных изделий);

τ – наработка (одинаковая для каждого изделия);

B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается;

Б – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается;

NБτ – тип плана – биномиальные испытания;

NВτ – тип плана – испытания с ограниченным временем испытаний τ и восстановлением;

T_0 – параметр экспоненциального закона распределения – средняя наработка на отказ;

$P_0(*)$ – расчетная ВБР за заданное время;

$\hat{P}$ – оценка ВБР за заданное время;

R – случайное число отказов;

r – наблюдаемое число отказов;

$\varDelta = N\tau/T_0$ – параметр пуассоновского распределения;

$S(R = r, \tau, s_i)$ – суммарная наработка;

s_i – моменты отказов, $i = 1,2, \dots, r$;

p – вероятность отказа объекта за одно испытание;

$b_N(r)$ – вероятность события получения r отказов группы из N объектов биномиального плана испытаний;

$\hat{p}(R, N) = R/N$ – несмещенная и эффективная оценка вероятности отказа одного изделия для биномиального плана;

E – символ математического ожидания;

q – плотность распределения априорная;

θ – параметр некоторого распределения;

$\hat{\theta}$ – оценка параметра некоторого распределения;

Q – априорное распределение с плотностью q;

Q_{R} – апосториорное распределение;

$\hat{Q}_{\mathrm{R}}$ – байесовская оценка, соответствующая априорному распределению с плотностью q;

t – реализация случайной величины T_0;

$A(\hat{\theta})$ – некоторый функционал;

Δ – шаг суммирования;

$\hat{v}$ – центрируемая оценка;

$P_{\mathrm{n}\Sigma}$, F_R – вероятностная функция;

γ – доверительная вероятность;

α – уровень значимости;

β – вероятность $> 0{,}5$;

$\hat{T}$ – некоторая оценка СНДО;

${C^k}_n$ – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Сокращения:

СНДО – средняя наработка на отказ;

ВБР – вероятность безотказной работы;

НДГ – нижняя доверительная граница;

ВДГ – верхняя доверительная граница;

ГПСС – гамма-процентный срок сохраняемости;

ГПНДО – гамма-процентная наработка на отказ;

ГПР – гамма-процентный ресурс;

ОГПР – остаточный гамма-процентный ресурс;

з.р. – закон распределения;

с.в. – случайная величина;

ЭРИ – электрорадиоизделия;

ТЗ – техническое задание.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Боровков А.А. Математическая статистика / А.А. Боровков. Новосибирск: Издательство Института математики, 1997. 772 с.
2. Шуленин В.П. Математическая статистика. Ч. 1. Параметрическая статистика / В.П. Шуленин. Томск: Изд-во НТЛ, 2012. 540 с.
3. Воинов В.Г. Несмещенные оценки и их применение / В.Г. Воинов, М.С. Никулин. М.: Наука, 1989. 440 с.
4. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. М.: Наука, 1965. 524 с.
5. Вопросы математической теории надежности / Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов и др.; под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.
6. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов / В.П. Савчук. М.: Наука, 1989. 328 с.
7. Ясногородский Р.М. Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пособие. СПб.: Наукоемкие технологии, 2019. 320 с.
8. Михайлов В.С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В.С. Михайлов // Надежность и контроль качества. 1988. № 9. С. 6–11.
9. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. 149 с.
10. Михайлов В.С. План испытаний с добавлением. Эффективные оценки показателей надежности / В.С. Михайлов // Надежность. 2020. № 1. С. 13–20.
11. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пособие. 2-е изд., исправл. и дополн. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 496 с.
12. Михайлов В.С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В.С. Михайлов // Надежность. 2016. № 4. С. 40–42.
13. Михайлов В.С. Оценка вероятности безотказной работы по результатам испытаний, не давших отказы / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2017. № 2 (18). С. 62–66.

14. Михайлов В.С. Исследование интегральных оценок потока отказов / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 2 (22). С. 3–10.
15. Михайлов В.С. Неявные оценки для плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением изделий / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 2 (26). С. 35–42.
16. Михайлов В.С. Исследование интегральных оценок / В.С. Михайлов // Тр. Межд. симпозиума Надежность и качество. 2018. Т. 1. С. 184–187.
17. Михайлов В.С. Статистическое оценивание остаточного гамма-процентного ресурса космической техники по результатам испытаний, не давших отказы и проводимых по плану с ограниченным временем и восстановлением / В.С. Михайлов // Космическая техника и технологии. 2019. № 4. С. 77–84.
18. Михайлов В.С. Неявные оценки для плана испытаний типа *NБτ* / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 1(21). С. 64–71.
19. Михайлов В.С. Оценки показателей надежности для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану / В.С. Михайлов, Н.К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 4 (24). С. 29–39.
20. Юрков Н.К. Частный случай нахождения эффективных оценок / Н.К. Юрков, В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 2 (26). С. 103–113.
21. Юрков Н.К. Оценка и прогнозирование остаточного ресурса по результатам биномиальных испытаний, не давших отказы / Н.К. Юрков, В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 3 (27). С. 62–69.
22. Михайлов В.С. Оценка гамма-процентного срока для биномиального плана испытаний / В.С. Михайлов // Надежность. 2019. № 2. С. 18–21.
23. Михайлов В.С. План испытаний с добавлением / В.С. Михайлов // Надежность. 2019. № 3. С. 12–20.
24. Михайлов В.С. Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы // Надежность. 2022. № 1. С. 30–37.
25. Михайлов В.С. Улучшение эффективности оценок различных планов испытаний однородной продукции // Надежность. 2022. № 2. С. 30–37.

26. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. М.: Наука, 1966. 228 с.
27. ГОСТ 27.002–2015. Надежность в технике. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2016. 23 с.
28. ГОСТ Р 50779.26–2007 Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения. М.: Стандартинформ, 2008. 27 с.
29. ГОСТ Р ИСО 3534-2–2019 Статистические методы. Словарь и условные обозначения. Ч. 2. Прикладная статистика. М.: Стандартинформ, 2019. 104 с.
30. Михайлов В.С. Исследование оценок на основе интегрального и байесовского подходов / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 1 (21). С. 28–39.
31. Крупкина Т. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Ч. 2. Электронный курс лекций / Т.В. Крупкина. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 237 с.
32. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры: учебник для вузов / А.И. Кострикин. М.: МЦНМО, 2004. 272 с.
33. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. Т. 1. 607 с.
34. РД 50-690–89. Надежность в технике. Методы оценки показателей надежности по экспериментальным данным. М.: Госстандарт, 1990. 132 с.
35. Швецова-Шиловская Т.Н. Расчетно-экспериментальный метод оценки показателей надежности технологического комплекса на основе результатов его испытаний с учетом априорной информации о надежности по результатам испытаний составных частей / Т.Н. Швецова-Шиловская, Т.В. Громова, Ф.П. Соколов, В.Г. Ратушенко // Надежность. 2013. № 2. С. 80–92.
36. Судаков Р.С. К вопросу об учете предварительной информации в схеме биномиальных испытаний / Р.С. Судаков, А.Н. Чеканов // Надежность и контроль качества. 1974. № 1. С. 24–28.
37. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Составные байесовские оценки // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 4 (28). С. 118–126.

38. Юрков Н.К., Михайлов В.С. Анализ возможностей по снижению объема испытаний на надежность // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 4 (28). С. 149–156.
39. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967. 299 с.
40. Рудковский Д.М., Михайлов В.С. Анализ смещения оценок стационарного коэффициента готовности для различных планов испытаний // Надежность. 2021. № 1. С. 17–22.
41. Белецкий Б.Р. Теория надежности радиотехнических систем (математические основы): уч. пособие для вузов. М.: Советское радио, 1978. 264 с.
42. Михайлов В.С., Рудковский Д.М. Анализ решения проблемы оценки контрольных уровней показателей надежности изделий космической техники по результатам испытаний, не давших отказы // Космонавтика и ракетостроение. 2020. № 1 (112). С. 134–143.
43. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.
44. Храмов С.М., Рудковский Д.М., Михайлов В.С. Анализ применимости байесовских оценок при решении практических задач надежности, использующих модели, предназначенные для групп однородной продукции // Надежность. 2022. № 3. С. 29–34.
45. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991. 448 с.
46. Михайлов В.С. Простой критерий эффективности смещенных оценок // Надежность. 2024. № 1. С. 25–33.
47. Михайлов В.С. Смещенные оценки в теории надежности. Киров: МЦИТО, 2022. 184 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

А.1. План испытаний с ограниченным временем и восстановлением. Количественные значения неявно заданной оценки $\widehat{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0,5})$

Таблица А.1 – Количественные значения неявно заданной оценки $\widehat{\boldsymbol{\Delta}}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0,5})$

R	$\beta = 0{,}5$
0	0,693148
1	1,678349
2	2,674061
3	3,672062
4	4,670910
5	5,670158
6	6,669640
7	7,669250
8	8,668953
9	9,668716
10	10,668526

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Б.1. Биномиальный план испытаний. Количественные значения неявно заданной оценки $\tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\beta};\mathbf{R})$

Таблица Б.1 – Количественные значения неявно заданной оценки $\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{R})$

R	n	$\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\beta}=0,5}$	$\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\beta}=0,6}$	$\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\beta}=0,81}$
0	1	0,500000	0,400000	0,19
0	2	0,292893	0,225403	0,1
1	2	0,707031	0,632446	0,435791
0	3	0,206299	0,156567	0,06783
1	3	0,500000	0,432861	0,278809
2	3	0,793457	0,736328	0,574707
0	4	0,159104	0,119888	0,051317
1	4	0,384766	0,329163	0,205933
2	4	0,614258	0,555420	0,40918
3	4	0,840881	0,795166	0,660156
0	5	0,129449	0,097120	0,041268
1	5	0,313721	0,265564	0,16333
2	5	0,500000	0,445313	0,31958
3	5	0,686157	0,635010	0,501953
4	5	0,870544	0,832520	0,717285
0	6	0,109101	0,081614	0,034511
1	6	0,264404	0,222534	0,135498
2	6	0,421387	0,373047	0,261719
3	6	0,578125	0,529175	0,407227
4	6	0,735535	0,690552	0,570313
5	6	0,890869	0,857422	0,758179

R	n	$\tilde{v}_{\beta=0,5}$	$\tilde{v}_{\beta=0,6}$	$\tilde{v}_{\beta=0,81}$
0	7	0,094276	0,070376	0,029654
1	7	0,226563	0,191528	0,115723
2	7	0,364014	0,320557	0,222656
3	7	0,500000	0,453857	0,34375
4	7	0,635864	0,589844	0,476563
5	7	0,771484	0,731445	0,62207
6	7	0,905701	0,877197	0,788574
0	8	0,082996	0,061857	0,025996
1	8	0,201111	0,168152	0,100586
2	8	0,320313	0,281067	0,19397
3	8	0,439941	0,396484	0,297607
4	8	0,559814	0,516479	0,410278
5	8	0,679443	0,638184	0,531494
6	8	0,798828	0,762878	0,663086
7	8	0,916992	0,891724	0,8125
0	9	0,074125	0,055178	0,023141
1	9	0,179565	0,149841	0,0896
2	9	0,286133	0,250000	0,171387
3	9	0,393066	0,353516	0,262573
4	9	0,500000	0,458984	0,360352
5	9	0,606445	0,562500	0,464966
6	9	0,713745	0,675781	0,576172
7	9	0,820374	0,787720	0,696533
8	9	0,925873	0,903198	0,831055
0	10	0,066967	0,049800	0,020852
1	10	0,162262	0,135132	0,080566

R	n	$\tilde{v}_{\beta=0,5}$	$\tilde{v}_{\beta=0,6}$	$\tilde{v}_{\beta=0,81}$
2	10	0,258545	0,225464	0,15387
3	10	0,354980	0,318359	0,234863
4	10	0,451660	0,412109	0,321289
5	10	0,547852	0,509277	0,413574
6	10	0,644897	0,606995	0,509766
7	10	0,741211	0,706299	0,613281
8	10	0,837708	0,807617	0,723755
9	10	0,932983	0,912415	0,846924

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В.1. План испытаний с добавлением. Количественные значения односторонних доверительных границ параметра p

Таблица В.1 – Количественные значения односторонних доверительных границ параметра p

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
0	0	0	3	0,05	0,631	0,5	0,206	0,95	0,017
0	0	0	3	0,1	0,536	0,5	0,206	0,9	0,034
0	0	0	3	0,15	0,438	0,5	0,206	0,85	0,051
0	0	0	3	0,2	0,415	0,5	0,206	0,8	0,072
0	0	0	3	0,25	0,369	0,5	0,206	0,75	0,091
0	0	0	3	0,3	0,331	0,5	0,206	0,7	0,112
1	1	0	3	0,05	0,751	0,5	0,385	0,95	0,094
1	1	0	3	0,1	0,679	0,5	0,385	0,9	0,141
1	1	0	3	0,15	0,626	0,5	0,385	0,85	0,179
1	1	0	3	0,2	0,582	0,5	0,385	0,8	0,212
1	1	0	3	0,25	0,543	0,5	0,385	0,75	0,243
1	1	0	3	0,3	0,508	0,5	0,385	0,7	0,272
2	1	1	3	0,05	0,864	0,5	0,500	0,95	0,135
2	1	1	3	0,1	0,804	0,5	0,500	0,9	0,196
2	1	1	3	0,15	0,755	0,5	0,500	0,85	0,244
2	1	1	3	0,2	0,711	0,5	0,500	0,8	0,287
2	1	1	3	0,25	0,674	0,5	0,500	0,75	0,326
2	1	1	3	0,3	0,637	0,5	0,500	0,7	0,359
2	2	0	3	0,05	0,788	0,5	0,445	0,95	0,128
2	2	0	3	0,1	0,724	0,5	0,445	0,9	0,182

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
2	2	0	3	0,15	0,676	0,5	0,445	0,85	0,225
2	2	0	3	0,2	0,635	0,5	0,445	0,8	0,262
2	2	0	3	0,25	0,599	0,5	0,445	0,75	0,296
2	2	0	3	0,3	0,564	0,5	0,445	0,7	0,328
3	2	1	3	0,05	0,919	0,5	0,670	0,95	0,312
3	2	1	3	0,1	0,882	0,5	0,670	0,9	0,388
3	2	1	3	0,15	0,850	0,5	0,670	0,85	0,442
3	2	1	3	0,2	0,822	0,5	0,670	0,8	0,484
3	2	1	3	0,25	0,796	0,5	0,670	0,75	0,522
3	2	1	3	0,3	0,770	0,5	0,670	0,7	0,557
3	3	0	3	0,05	0,795	0,5	0,454	0,95	0,130
3	3	0	3	0,1	0,732	0,5	0,454	0,9	0,186
3	3	0	3	0,15	0,685	0,5	0,454	0,85	0,230
3	3	0	3	0,2	0,644	0,5	0,454	0,8	0,268
3	3	0	3	0,25	0,608	0,5	0,454	0,75	0,302
3	3	0	3	0,3	0,575	0,5	0,454	0,7	0,335
0	0	0	4	0,05	0,523	0,5	0,159	0,95	0,013
0	0	0	4	0,1	0,438	0,5	0,159	0,9	0,026
0	0	0	4	0,15	0,377	0,5	0,159	0,85	0,040
0	0	0	4	0,2	0,331	0,5	0,159	0,8	0,054
0	0	0	4	0,25	0,293	0,5	0,159	0,75	0,069
0	0	0	4	0,3	0,260	0,5	0,159	0,7	0,085
1	1	0	4	0,05	0,657	0,5	0,314	0,95	0,076
1	1	0	4	0,1	0,582	0,5	0,314	0,9	0,112
1	1	0	4	0,15	0,532	0,5	0,314	0,85	0,142
1	1	0	4	0,2	0,488	0,5	0,314	0,8	0,169
1	1	0	4	0,25	0,454	0,5	0,314	0,75	0,194

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
1	1	0	4	0,3	0,422	0,5	0,314	0,7	0,218
2	1	1	4	0,05	0,751	0,5	0,385	0,95	0,094
2	1	1	4	0,1	0,679	0,5	0,385	0,9	0,141
2	1	1	4	0,15	0,626	0,5	0,385	0,85	0,179
2	1	1	4	0,2	0,582	0,5	0,385	0,8	0,212
2	1	1	4	0,25	0,543	0,5	0,385	0,75	0,243
2	1	1	4	0,3	0,508	0,5	0,385	0,7	0,272
2	2	0	4	0,05	0,708	0,5	0,380	0,95	0,109
2	2	0	4	0,1	0,641	0,5	0,380	0,9	0,155
2	2	0	4	0,15	0,593	0,5	0,380	0,85	0,191
2	2	0	4	0,2	0,554	0,5	0,380	0,8	0,222
2	2	0	4	0,25	0,520	0,5	0,380	0,75	0,251
2	2	0	4	0,3	0,489	0,5	0,380	0,7	0,278
3	2	1	4	0,05	0,835	0,5	0,549	0,95	0,229
3	2	1	4	0,1	0,784	0,5	0,549	0,9	0,292
3	2	1	4	0,15	0,745	0,5	0,549	0,85	0,338
3	2	1	4	0,2	0,712	0,5	0,549	0,8	0,376
3	2	1	4	0,25	0,681	0,5	0,549	0,75	0,410
3	2	1	4	0,3	0,653	0,5	0,549	0,7	0,441
4	2	2	4	0,05	0,902	0,5	0,614	0,95	0,249
4	2	2	4	0,1	0,857	0,5	0,614	0,9	0,320
4	2	2	4	0,15	0,821	0,5	0,614	0,85	0,373
4	2	2	4	0,2	0,788	0,5	0,614	0,8	0,417
4	2	2	4	0,25	0,757	0,5	0,614	0,75	0,456
4	2	2	4	0,3	0,728	0,5	0,614	0,7	0,492
3	3	0	4	0,05	0,723	0,5	0,397	0,95	0,112
3	3	0	4	0,1	0,659	0,5	0,397	0,9	0,161

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
3	3	0	4	0,15	0,612	0,5	0,397	0,85	0,199
3	3	0	4	0,2	0,573	0,5	0,397	0,8	0,232
3	3	0	4	0,25	0,539	0,5	0,397	0,75	0,263
3	3	0	4	0,3	0,507	0,5	0,397	0,7	0,291
4	3	1	4	0,05	0,861	0,5	0,609	0,95	0,303
4	3	1	4	0,1	0,818	0,5	0,609	0,9	0,367
4	3	1	4	0,15	0,784	0,5	0,609	0,85	0,412
4	3	1	4	0,2	0,755	0,5	0,609	0,8	0,449
4	3	1	4	0,25	0,727	0,5	0,609	0,75	0,482
4	3	1	4	0,3	0,704	0,5	0,609	0,7	0,510
4	4	0	4	0,05	0,726	0,5	0,398	0,95	0,113
4	4	0	4	0,1	0,661	0,5	0,398	0,9	0,161
4	4	0	4	0,15	0,615	0,5	0,398	0,85	0,199
4	4	0	4	0,2	0,575	0,5	0,398	0,8	0,233
4	4	0	4	0,25	0,541	0,5	0,398	0,75	0,263
4	4	0	4	0,3	0,510	0,5	0,398	0,7	0,292
0	0	0	5	0,05	0,451	0,5	0,129	0,95	0,010
0	0	0	5	0,1	0,367	0,5	0,129	0,9	0,021
0	0	0	5	0,15	0,316	0,5	0,129	0,85	0,032
0	0	0	5	0,2	0,275	0,5	0,129	0,8	0,044
0	0	0	5	0,25	0,234	0,5	0,129	0,75	0,056
0	0	0	5	0,3	0,214	0,5	0,129	0,7	0,069
1	1	0	5	0,05	0,582	0,5	0,264	0,95	0,063
1	1	0	5	0,1	0,510	0,5	0,264	0,9	0,093
1	1	0	5	0,15	0,461	0,5	0,264	0,85	0,117
1	1	0	5	0,2	0,422	0,5	0,264	0,8	0,140
1	1	0	5	0,25	0,389	0,5	0,264	0,75	0,161

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
1	1	0	5	0,3	0,360	0,5	0,264	0,7	0,182
2	1	1	5	0,05	0,657	0,5	0,314	0,95	0,076
2	1	1	5	0,1	0,582	0,5	0,314	0,9	0,112
2	1	1	5	0,15	0,532	0,5	0,314	0,85	0,142
2	1	1	5	0,2	0,488	0,5	0,314	0,8	0,169
2	1	1	5	0,25	0,454	0,5	0,314	0,75	0,194
2	1	1	5	0,3	0,422	0,5	0,314	0,7	0,218
2	2	0	5	0,05	0,640	0,5	0,332	0,95	0,095
2	2	0	5	0,1	0,574	0,5	0,332	0,9	0,135
2	2	0	5	0,15	0,528	0,5	0,332	0,85	0,166
2	2	0	5	0,2	0,491	0,5	0,332	0,8	0,193
2	2	0	5	0,25	0,459	0,5	0,332	0,75	0,218
2	2	0	5	0,3	0,430	0,5	0,332	0,7	0,242
3	2	1	5	0,05	0,754	0,5	0,462	0,95	0,180
3	2	1	5	0,1	0,698	0,5	0,462	0,9	0,233
3	2	1	5	0,15	0,656	0,5	0,462	0,85	0,272
3	2	1	5	0,2	0,621	0,5	0,462	0,8	0,306
3	2	1	5	0,25	0,590	0,5	0,462	0,75	0,335
3	2	1	5	0,3	0,563	0,5	0,462	0,7	0,363
4	2	2	5	0,05	0,811	0,5	0,500	0,95	0,189
4	2	2	5	0,1	0,753	0,5	0,500	0,9	0,247
4	2	2	5	0,15	0,710	0,5	0,500	0,85	0,290
4	2	2	5	0,2	0,673	0,5	0,500	0,8	0,326
4	2	2	5	0,25	0,625	0,5	0,500	0,75	0,359
4	2	2	5	0,3	0,610	0,5	0,500	0,7	0,390
3	3	0	5	0,05	0,664	0,5	0,355	0,95	0,101
3	3	0	5	0,1	0,600	0,5	0,355	0,9	0,144

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
3	3	0	5	0,15	0,554	0,5	0,355	0,85	0,177
3	3	0	5	0,2	0,516	0,5	0,355	0,8	0,207
3	3	0	5	0,25	0,485	0,5	0,355	0,75	0,234
3	3	0	5	0,3	0,456	0,5	0,355	0,7	0,260
4	3	1	5	0,05	0,795	0,5	0,535	0,95	0,256
4	3	1	5	0,1	0,742	0,5	0,535	0,9	0,312
4	3	1	5	0,15	0,710	0,5	0,535	0,85	0,353
4	3	1	5	0,2	0,679	0,5	0,535	0,8	0,386
4	3	1	5	0,25	0,652	0,5	0,535	0,75	0,415
4	3	1	5	0,3	0,627	0,5	0,535	0,7	0,442
5	3	2	5	0,05	0,875	0,5	0,641	0,95	0,330
5	3	2	5	0,1	0,835	0,5	0,641	0,9	0,398
5	3	2	5	0,15	0,804	0,5	0,641	0,85	0,445
5	3	2	5	0,2	0,777	0,5	0,641	0,8	0,480
5	3	2	5	0,25	0,753	0,5	0,641	0,75	0,515
5	3	2	5	0,3	0,729	0,5	0,641	0,7	0,543
4	4	0	5	0,05	0,670	0,5	0,359	0,95	0,101
4	4	0	5	0,1	0,606	0,5	0,359	0,9	0,144
4	4	0	5	0,15	0,561	0,5	0,359	0,85	0,179
4	4	0	5	0,2	0,524	0,5	0,359	0,8	0,209
4	4	0	5	0,25	0,491	0,5	0,359	0,75	0,236
4	4	0	5	0,3	0,462	0,5	0,359	0,7	0,262
5	4	1	5	0,05	0,805	0,5	0,557	0,95	0,275
5	4	1	5	0,1	0,761	0,5	0,557	0,9	0,333
5	4	1	5	0,15	0,727	0,5	0,557	0,85	0,375
5	4	1	5	0,2	0,697	0,5	0,557	0,8	0,408
5	4	1	5	0,25	0,671	0,5	0,557	0,75	0,438

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
5	4	1	5	0,3	0,647	0,5	0,557	0,7	0,464
5	5	0	5	0,05	0,671	0,5	0,360	0,95	0,101
5	5	0	5	0,1	0,607	0,5	0,360	0,9	0,144
5	5	0	5	0,15	0,562	0,5	0,360	0,85	0,179
5	5	0	5	0,2	0,524	0,5	0,360	0,8	0,209
5	5	0	5	0,25	0,492	0,5	0,360	0,75	0,236
5	5	0	5	0,3	0,462	0,5	0,360	0,7	0,262
0	0	0	6	0,05	0,393	0,5	0,109	0,95	0,008
0	0	0	6	0,1	0,319	0,5	0,109	0,9	0,017
0	0	0	6	0,15	0,271	0,5	0,109	0,85	0,027
0	0	0	6	0,2	0,235	0,5	0,109	0,8	0,036
0	0	0	6	0,25	0,206	0,5	0,109	0,75	0,047
0	0	0	6	0,3	0,182	0,5	0,109	0,7	0,058
1	1	0	6	0,05	0,521	0,5	0,227	0,95	0,053
1	1	0	6	0,1	0,452	0,5	0,227	0,9	0,079
1	1	0	6	0,15	0,407	0,5	0,227	0,85	0,100
1	1	0	6	0,2	0,371	0,5	0,227	0,8	0,120
1	1	0	6	0,25	0,341	0,5	0,227	0,75	0,138
1	1	0	6	0,3	0,314	0,5	0,227	0,7	0,156
2	1	1	6	0,05	0,582	0,5	0,264	0,95	0,063
2	1	1	6	0,1	0,510	0,5	0,264	0,9	0,093
2	1	1	6	0,15	0,461	0,5	0,264	0,85	0,117
2	1	1	6	0,2	0,422	0,5	0,264	0,8	0,140
2	1	1	6	0,25	0,389	0,5	0,264	0,75	0,161
2	1	1	6	0,3	0,360	0,5	0,264	0,7	0,182
2	2	0	6	0,05	0,584	0,5	0,295	0,95	0,085
2	2	0	6	0,1	0,520	0,5	0,295	0,9	0,119

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
2	2	0	6	0,15	0,476	0,5	0,295	0,85	0,147
2	2	0	6	0,2	0,441	0,5	0,295	0,8	0,171
2	2	0	6	0,25	0,411	0,5	0,295	0,75	0,193
2	2	0	6	0,3	0,385	0,5	0,295	0,7	0,214
3	2	1	6	0,05	0,686	0,5	0,397	0,95	0,149
3	2	1	6	0,1	0,626	0,5	0,397	0,9	0,193
3	2	1	6	0,15	0,584	0,5	0,397	0,85	0,228
3	2	1	6	0,2	0,549	0,5	0,397	0,8	0,257
3	2	1	6	0,25	0,519	0,5	0,397	0,75	0,283
3	2	1	6	0,3	0,484	0,5	0,397	0,7	0,307
4	2	2	6	0,05	0,729	0,5	0,421	0,95	0,153
4	2	2	6	0,1	0,667	0,5	0,421	0,9	0,201
4	2	2	6	0,15	0,622	0,5	0,421	0,85	0,237
4	2	2	6	0,2	0,585	0,5	0,421	0,8	0,269
4	2	2	6	0,25	0,553	0,5	0,421	0,75	0,297
4	2	2	6	0,3	0,524	0,5	0,421	0,7	0,323
3	3	0	6	0,05	0,609	0,5	0,322	0,95	0,092
3	3	0	6	0,1	0,551	0,5	0,322	0,9	0,130
3	3	0	6	0,15	0,508	0,5	0,322	0,85	0,161
3	3	0	6	0,2	0,469	0,5	0,322	0,8	0,188
3	3	0	6	0,25	0,442	0,5	0,322	0,75	0,212
3	3	0	6	0,3	0,415	0,5	0,322	0,7	0,235
4	3	1	6	0,05	0,735	0,5	0,475	0,95	0,221
4	3	1	6	0,1	0,683	0,5	0,475	0,9	0,271
4	3	1	6	0,15	0,646	0,5	0,475	0,85	0,307
4	3	1	6	0,2	0,615	0,5	0,475	0,8	0,337
4	3	1	6	0,25	0,588	0,5	0,475	0,75	0,363

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
4	3	1	6	0,3	0,563	0,5	0,475	0,7	0,388
5	3	2	6	0,05	0,808	0,5	0,554	0,95	0,267
5	3	2	6	0,1	0,760	0,5	0,554	0,9	0,325
5	3	2	6	0,15	0,725	0,5	0,554	0,85	0,367
5	3	2	6	0,2	0,696	0,5	0,554	0,8	0,402
5	3	2	6	0,25	0,669	0,5	0,554	0,75	0,432
5	3	2	6	0,3	0,644	0,5	0,554	0,7	0,459
6	3	3	6	0,05	0,847	0,5	0,578	0,95	0,270
6	3	3	6	0,1	0,799	0,5	0,578	0,9	0,333
6	3	3	6	0,15	0,763	0,5	0,578	0,85	0,378
6	3	3	6	0,2	0,731	0,5	0,578	0,8	0,415
6	3	3	6	0,25	0,688	0,5	0,578	0,75	0,447
6	3	3	6	0,3	0,677	0,5	0,578	0,7	0,476
4	4	0	6	0,05	0,624	0,5	0,329	0,95	0,092
4	4	0	6	0,1	0,562	0,5	0,329	0,9	0,132
4	4	0	6	0,15	0,518	0,5	0,329	0,85	0,163
4	4	0	6	0,2	0,483	0,5	0,329	0,8	0,191
4	4	0	6	0,25	0,452	0,5	0,329	0,75	0,216
4	4	0	6	0,3	0,425	0,5	0,329	0,7	0,240
5	4	1	6	0,05	0,756	0,5	0,506	0,95	0,247
5	4	1	6	0,1	0,707	0,5	0,506	0,9	0,299
5	4	1	6	0,15	0,671	0,5	0,506	0,85	0,337
5	4	1	6	0,2	0,642	0,5	0,506	0,8	0,367
5	4	1	6	0,25	0,615	0,5	0,506	0,75	0,395
5	4	1	6	0,3	0,592	0,5	0,506	0,7	0,419
6	4	2	6	0,05	0,840	0,5	0,623	0,95	0,359
6	4	2	6	0,1	0,801	0,5	0,623	0,9	0,416

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
6	4	2	6	0,15	0,771	0,5	0,623	0,85	0,456
6	4	2	6	0,2	0,746	0,5	0,623	0,8	0,488
6	4	2	6	0,25	0,723	0,5	0,623	0,75	0,515
6	4	2	6	0,3	0,702	0,5	0,623	0,7	0,540
5	5	0	6	0,05	0,626	0,5	0,330	0,95	0,092
5	5	0	6	0,1	0,564	0,5	0,330	0,9	0,132
5	5	0	6	0,15	0,520	0,5	0,330	0,85	0,163
5	5	0	6	0,2	0,485	0,5	0,330	0,8	0,191
5	5	0	6	0,25	0,453	0,5	0,330	0,75	0,216
5	5	0	6	0,3	0,426	0,5	0,330	0,7	0,238
6	5	1	6	0,05	0,762	0,5	0,513	0,95	0,250
6	5	1	6	0,1	0,713	0,5	0,513	0,9	0,304
6	5	1	6	0,15	0,678	0,5	0,513	0,85	0,342
6	5	1	6	0,2	0,649	0,5	0,513	0,8	0,374
6	5	1	6	0,25	0,623	0,5	0,513	0,75	0,401
6	5	1	6	0,3	0,599	0,5	0,513	0,7	0,426
6	6	0	6	0,05	0,625	0,5	0,330	0,95	0,092
6	6	0	6	0,1	0,564	0,5	0,330	0,9	0,132
6	6	0	6	0,15	0,521	0,5	0,330	0,85	0,163
6	6	0	6	0,2	0,485	0,5	0,330	0,8	0,191
6	6	0	6	0,25	0,454	0,5	0,330	0,75	0,216
6	6	0	6	0,3	0,426	0,5	0,330	0,7	0,240
0	0	0	7	0,05	0,348	0,5	0,094	0,95	0,007
0	0	0	7	0,1	0,280	0,5	0,094	0,9	0,015
0	0	0	7	0,15	0,237	0,5	0,094	0,85	0,023
0	0	0	7	0,2	0,205	0,5	0,094	0,8	0,031
0	0	0	7	0,25	0,172	0,5	0,094	0,75	0,040

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
0	0	0	7	0,3	0,158	0,5	0,094	0,7	0,050
1	1	0	7	0,05	0,469	0,5	0,201	0,95	0,046
1	1	0	7	0,1	0,375	0,5	0,201	0,9	0,069
1	1	0	7	0,15	0,363	0,5	0,201	0,85	0,087
1	1	0	7	0,2	0,330	0,5	0,201	0,8	0,104
1	1	0	7	0,25	0,301	0,5	0,201	0,75	0,121
1	1	0	7	0,3	0,279	0,5	0,201	0,7	0,136
2	1	1	7	0,05	0,521	0,5	0,227	0,95	0,053
2	1	1	7	0,1	0,452	0,5	0,227	0,9	0,079
2	1	1	7	0,15	0,407	0,5	0,227	0,85	0,100
2	1	1	7	0,2	0,371	0,5	0,227	0,8	0,120
2	1	1	7	0,25	0,341	0,5	0,227	0,75	0,138
2	1	1	7	0,3	0,314	0,5	0,227	0,7	0,156
2	2	0	7	0,05	0,536	0,5	0,266	0,95	0,077
2	2	0	7	0,1	0,475	0,5	0,266	0,9	0,107
2	2	0	7	0,15	0,433	0,5	0,266	0,85	0,132
2	2	0	7	0,2	0,400	0,5	0,266	0,8	0,154
2	2	0	7	0,25	0,372	0,5	0,266	0,75	0,173
2	2	0	7	0,3	0,348	0,5	0,266	0,7	0,192
3	2	1	7	0,05	0,625	0,5	0,348	0,95	0,126
3	2	1	7	0,1	0,566	0,5	0,348	0,9	0,165
3	2	1	7	0,15	0,524	0,5	0,348	0,85	0,195
3	2	1	7	0,2	0,491	0,5	0,348	0,8	0,221
3	2	1	7	0,25	0,462	0,5	0,348	0,75	0,244
3	2	1	7	0,3	0,436	0,5	0,348	0,7	0,266
4	2	2	7	0,05	0,659	0,5	0,364	0,95	0,129
4	2	2	7	0,1	0,596	0,5	0,364	0,9	0,169

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
4	2	2	7	0,15	0,552	0,5	0,364	0,85	0,199
4	2	2	7	0,2	0,517	0,5	0,364	0,8	0,228
4	2	2	7	0,25	0,486	0,5	0,364	0,75	0,253
4	2	2	7	0,3	0,458	0,5	0,364	0,7	0,275
3	3	0	7	0,05	0,569	0,5	0,295	0,95	0,084
3	3	0	7	0,1	0,510	0,5	0,295	0,9	0,120
3	3	0	7	0,15	0,468	0,5	0,295	0,85	0,148
3	3	0	7	0,2	0,435	0,5	0,295	0,8	0,173
3	3	0	7	0,25	0,407	0,5	0,295	0,75	0,195
3	3	0	7	0,3	0,382	0,5	0,295	0,7	0,216
4	3	1	7	0,05	0,681	0,5	0,426	0,95	0,193
4	3	1	7	0,1	0,628	0,5	0,426	0,9	0,238
4	3	1	7	0,15	0,590	0,5	0,426	0,85	0,271
4	3	1	7	0,2	0,560	0,5	0,426	0,8	0,298
4	3	1	7	0,25	0,534	0,5	0,426	0,75	0,322
4	3	1	7	0,3	0,510	0,5	0,426	0,7	0,345
5	3	2	7	0,05	0,745	0,5	0,484	0,95	0,223
5	3	2	7	0,1	0,694	0,5	0,484	0,9	0,274
5	3	2	7	0,15	0,656	0,5	0,484	0,85	0,312
5	3	2	7	0,2	0,626	0,5	0,484	0,8	0,344
5	3	2	7	0,25	0,599	0,5	0,484	0,75	0,371
5	3	2	7	0,3	0,570	0,5	0,484	0,7	0,396
6	3	3	7	0,05	0,775	0,5	0,500	0,95	0,225
6	3	3	7	0,1	0,721	0,5	0,500	0,9	0,279
6	3	3	7	0,15	0,682	0,5	0,500	0,85	0,317
6	3	3	7	0,2	0,650	0,5	0,500	0,8	0,350
6	3	3	7	0,25	0,621	0,5	0,500	0,75	0,379

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
6	3	3	7	0,3	0,595	0,5	0,500	0,7	0,404
4	4	0	7	0,05	0,584	0,5	0,305	0,95	0,085
4	4	0	7	0,1	0,524	0,5	0,305	0,9	0,122
4	4	0	7	0,15	0,482	0,5	0,305	0,85	0,151
4	4	0	7	0,2	0,449	0,5	0,305	0,8	0,177
4	4	0	7	0,25	0,420	0,5	0,305	0,75	0,200
4	4	0	7	0,3	0,394	0,5	0,305	0,7	0,222
5	4	1	7	0,05	0,708	0,5	0,463	0,95	0,224
5	4	1	7	0,1	0,656	0,5	0,463	0,9	0,272
5	4	1	7	0,15	0,623	0,5	0,463	0,85	0,306
5	4	1	7	0,2	0,563	0,5	0,463	0,8	0,334
5	4	1	7	0,25	0,568	0,5	0,463	0,75	0,359
5	4	1	7	0,3	0,545	0,5	0,463	0,7	0,382
6	4	2	7	0,05	0,787	0,5	0,561	0,95	0,310
6	4	2	7	0,1	0,744	0,5	0,561	0,9	0,363
6	4	2	7	0,15	0,712	0,5	0,561	0,85	0,400
6	4	2	7	0,2	0,685	0,5	0,561	0,8	0,430
6	4	2	7	0,25	0,662	0,5	0,561	0,75	0,456
6	4	2	7	0,3	0,640	0,5	0,561	0,7	0,480
7	4	3	7	0,05	0,841	0,5	0,617	0,95	0,338
7	4	3	7	0,1	0,801	0,5	0,617	0,9	0,398
7	4	3	7	0,15	0,770	0,5	0,617	0,85	0,441
7	4	3	7	0,2	0,744	0,5	0,617	0,8	0,474
7	4	3	7	0,25	0,721	0,5	0,617	0,75	0,503
7	4	3	7	0,3	0,699	0,5	0,617	0,7	0,529
5	5	0	7	0,05	0,589	0,5	0,307	0,95	0,085
5	5	0	7	0,1	0,529	0,5	0,307	0,9	0,122

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
5	5	0	7	0,15	0,486	0,5	0,307	0,85	0,151
5	5	0	7	0,2	0,452	0,5	0,307	0,8	0,177
5	5	0	7	0,25	0,423	0,5	0,307	0,75	0,201
5	5	0	7	0,3	0,397	0,5	0,307	0,7	0,223
6	5	1	7	0,05	0,719	0,5	0,475	0,95	0,227
6	5	1	7	0,1	0,669	0,5	0,475	0,9	0,280
6	5	1	7	0,15	0,635	0,5	0,475	0,85	0,315
6	5	1	7	0,2	0,605	0,5	0,475	0,8	0,344
6	5	1	7	0,25	0,581	0,5	0,475	0,75	0,370
6	5	1	7	0,3	0,558	0,5	0,475	0,7	0,393
7	5	2	7	0,05	0,805	0,5	0,594	0,95	0,350
7	5	2	7	0,1	0,765	0,5	0,594	0,9	0,402
7	5	2	7	0,15	0,734	0,5	0,594	0,85	0,439
7	5	2	7	0,2	0,711	0,5	0,594	0,8	0,468
7	5	2	7	0,25	0,689	0,5	0,594	0,75	0,493
7	5	2	7	0,3	0,668	0,5	0,594	0,7	0,516
6	6	0	7	0,05	0,590	0,5	0,307	0,95	0,085
6	6	0	7	0,1	0,529	0,5	0,307	0,9	0,122
6	6	0	7	0,15	0,487	0,5	0,307	0,85	0,151
6	6	0	7	0,2	0,453	0,5	0,307	0,8	0,177
6	6	0	7	0,25	0,424	0,5	0,307	0,75	0,200
6	6	0	7	0,3	0,397	0,5	0,307	0,7	0,223
7	6	1	7	0,05	0,721	0,5	0,478	0,95	0,231
7	6	1	7	0,1	0,672	0,5	0,478	0,9	0,280
7	6	1	7	0,15	0,637	0,5	0,478	0,85	0,313
7	6	1	7	0,2	0,609	0,5	0,478	0,8	0,344
7	6	1	7	0,25	0,583	0,5	0,478	0,75	0,371

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
7	6	1	7	0,3	0,560	0,5	0,478	0,7	0,395
7	7	0	7	0,05	0,590	0,5	0,307	0,95	0,085
7	7	0	7	0,1	0,529	0,5	0,307	0,9	0,122
7	7	0	7	0,15	0,486	0,5	0,307	0,85	0,151
7	7	0	7	0,2	0,453	0,5	0,307	0,8	0,177
7	7	0	7	0,25	0,424	0,5	0,307	0,75	0,200
7	7	0	7	0,3	0,397	0,5	0,307	0,7	0,223
0	0	0	8	0,05	0,250	0,5	0,082	0,95	0,006
0	0	0	8	0,1	0,250	0,5	0,082	0,9	0,013
0	0	0	8	0,15	0,211	0,5	0,082	0,85	0,020
0	0	0	8	0,2	0,182	0,5	0,082	0,8	0,027
0	0	0	8	0,25	0,159	0,5	0,082	0,75	0,035
0	0	0	8	0,3	0,140	0,5	0,082	0,7	0,044
1	1	0	8	0,05	0,429	0,5	0,180	0,95	0,041
1	1	0	8	0,1	0,368	0,5	0,180	0,9	0,061
1	1	0	8	0,15	0,328	0,5	0,180	0,85	0,077
1	1	0	8	0,2	0,298	0,5	0,180	0,8	0,093
1	1	0	8	0,25	0,272	0,5	0,180	0,75	0,107
1	1	0	8	0,3	0,250	0,5	0,180	0,7	0,121
2	1	1	8	0,05	0,469	0,5	0,201	0,95	0,046
2	1	1	8	0,1	0,375	0,5	0,201	0,9	0,069
2	1	1	8	0,15	0,363	0,5	0,201	0,85	0,087
2	1	1	8	0,2	0,330	0,5	0,201	0,8	0,104
2	1	1	8	0,25	0,301	0,5	0,201	0,75	0,121
2	1	1	8	0,3	0,279	0,5	0,201	0,7	0,136
2	2	0	8	0,05	0,494	0,5	0,241	0,95	0,069
2	2	0	8	0,1	0,436	0,5	0,241	0,9	0,098

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
2	2	0	8	0,15	0,397	0,5	0,241	0,85	0,120
2	2	0	8	0,2	0,366	0,5	0,241	0,8	0,139
2	2	0	8	0,25	0,340	0,5	0,241	0,75	0,157
2	2	0	8	0,3	0,317	0,5	0,241	0,7	0,175
3	2	1	8	0,05	0,573	0,5	0,309	0,95	0,094
3	2	1	8	0,1	0,515	0,5	0,309	0,9	0,144
3	2	1	8	0,15	0,475	0,5	0,309	0,85	0,171
3	2	1	8	0,2	0,443	0,5	0,309	0,8	0,194
3	2	1	8	0,25	0,416	0,5	0,309	0,75	0,215
3	2	1	8	0,3	0,391	0,5	0,309	0,7	0,219
4	2	2	8	0,05	0,600	0,5	0,320	0,95	0,111
4	2	2	8	0,1	0,538	0,5	0,320	0,9	0,147
4	2	2	8	0,15	0,496	0,5	0,320	0,85	0,175
4	2	2	8	0,2	0,462	0,5	0,320	0,8	0,198
4	2	2	8	0,25	0,433	0,5	0,320	0,75	0,220
4	2	2	8	0,3	0,407	0,5	0,320	0,7	0,241
3	3	0	8	0,05	0,531	0,5	0,273	0,95	0,079
3	3	0	8	0,1	0,474	0,5	0,273	0,9	0,112
3	3	0	8	0,15	0,435	0,5	0,273	0,85	0,137
3	3	0	8	0,2	0,403	0,5	0,273	0,8	0,160
3	3	0	8	0,25	0,377	0,5	0,273	0,75	0,180
3	3	0	8	0,3	0,353	0,5	0,273	0,7	0,200
4	3	1	8	0,05	0,633	0,5	0,386	0,95	0,171
4	3	1	8	0,1	0,580	0,5	0,386	0,9	0,212
4	3	1	8	0,15	0,543	0,5	0,386	0,85	0,242
4	3	1	8	0,2	0,514	0,5	0,386	0,8	0,267
4	3	1	8	0,25	0,488	0,5	0,386	0,75	0,289

R	k	m	n	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
4	3	1	8	0,3	0,465	0,5	0,386	0,7	0,310
5	3	2	8	0,05	0,688	0,5	0,431	0,95	0,192
5	3	2	8	0,1	0,635	0,5	0,431	0,9	0,238
5	3	2	8	0,15	0,598	0,5	0,431	0,85	0,271
5	3	2	8	0,2	0,567	0,5	0,431	0,8	0,299
5	3	2	8	0,25	0,541	0,5	0,431	0,75	0,324
5	3	2	8	0,3	0,516	0,5	0,431	0,7	0,348
6	3	3	8	0,05	0,711	0,5	0,440	0,95	0,193
6	3	3	8	0,1	0,655	0,5	0,440	0,9	0,240
6	3	3	8	0,15	0,616	0,5	0,440	0,85	0,274
6	3	3	8	0,2	0,584	0,5	0,440	0,8	0,303
6	3	3	8	0,25	0,555	0,5	0,440	0,75	0,328
6	3	3	8	0,3	0,530	0,5	0,440	0,7	0,353
4	4	0	8	0,05	0,550	0,5	0,285	0,95	0,080
4	4	0	8	0,1	0,492	0,5	0,285	0,9	0,114
4	4	0	8	0,15	0,452	0,5	0,285	0,85	0,141
4	4	0	8	0,2	0,420	0,5	0,285	0,8	0,165
4	4	0	8	0,25	0,393	0,5	0,285	0,75	0,187
4	4	0	8	0,3	0,368	0,5	0,285	0,7	0,207
5	4	1	8	0,05	0,664	0,5	0,427	0,95	0,205
5	4	1	8	0,1	0,613	0,5	0,427	0,9	0,249
5	4	1	8	0,15	0,580	0,5	0,427	0,85	0,280
5	4	1	8	0,2	0,552	0,5	0,427	0,8	0,306
5	4	1	8	0,25	0,523	0,5	0,427	0,75	0,329
5	4	1	8	0,3	0,505	0,5	0,427	0,7	0,351
6	4	2	8	0,05	0,738	0,5	0,509	0,95	0,271
6	4	2	8	0,1	0,692	0,5	0,509	0,9	0,320

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
6	4	2	8	0,15	0,659	0,5	0,509	0,85	0,355
6	4	2	8	0,2	0,632	0,5	0,509	0,8	0,383
6	4	2	8	0,25	0,608	0,5	0,509	0,75	0,408
6	4	2	8	0,3	0,587	0,5	0,509	0,7	0,430
7	4	3	8	0,05	0,784	0,5	0,550	0,95	0,287
7	4	3	8	0,1	0,740	0,5	0,550	0,9	0,342
7	4	3	8	0,15	0,707	0,5	0,550	0,85	0,379
7	4	3	8	0,2	0,679	0,5	0,550	0,8	0,412
7	4	3	8	0,25	0,655	0,5	0,550	0,75	0,439
7	4	3	8	0,3	0,632	0,5	0,550	0,7	0,464
8	4	4	8	0,05	0,807	0,5	0,560	0,95	0,289
8	4	4	8	0,1	0,760	0,5	0,560	0,9	0,345
8	4	4	8	0,15	0,726	0,5	0,560	0,85	0,384
8	4	4	8	0,2	0,696	0,5	0,560	0,8	0,416
8	4	4	8	0,25	0,671	0,5	0,560	0,75	0,444
8	4	4	8	0,3	0,647	0,5	0,560	0,7	0,470
5	5	0	8	0,05	0,557	0,5	0,288	0,95	0,080
5	5	0	8	0,1	0,498	0,5	0,288	0,9	0,114
5	5	0	8	0,15	0,458	0,5	0,288	0,85	0,142
5	5	0	8	0,2	0,426	0,5	0,288	0,8	0,166
5	5	0	8	0,25	0,398	0,5	0,288	0,75	0,188
5	5	0	8	0,3	0,373	0,5	0,288	0,7	0,209
6	5	1	8	0,05	0,680	0,5	0,443	0,95	0,214
6	5	1	8	0,1	0,631	0,5	0,443	0,9	0,260
6	5	1	8	0,15	0,596	0,5	0,443	0,85	0,289
6	5	1	8	0,2	0,568	0,5	0,443	0,8	0,320
6	5	1	8	0,25	0,544	0,5	0,443	0,75	0,344

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
6	5	1	8	0,3	0,522	0,5	0,443	0,7	0,366
7	5	2	8	0,05	0,762	0,5	0,549	0,95	0,318
7	5	2	8	0,1	0,719	0,5	0,549	0,9	0,367
7	5	2	8	0,15	0,689	0,5	0,549	0,85	0,400
7	5	2	8	0,2	0,664	0,5	0,549	0,8	0,428
7	5	2	8	0,25	0,642	0,5	0,549	0,75	0,452
7	5	2	8	0,3	0,622	0,5	0,549	0,7	0,474
8	5	3	8	0,05	0,822	0,5	0,622	0,95	0,379
8	5	3	8	0,1	0,784	0,5	0,622	0,9	0,433
8	5	3	8	0,15	0,756	0,5	0,622	0,85	0,469
8	5	3	8	0,2	0,733	0,5	0,622	0,8	0,499
8	5	3	8	0,25	0,712	0,5	0,622	0,75	0,523
8	5	3	8	0,3	0,693	0,5	0,622	0,7	0,546
6	6	0	8	0,05	0,555	0,5	0,287	0,95	0,080
6	6	0	8	0,1	0,500	0,5	0,287	0,9	0,114
6	6	0	8	0,15	0,459	0,5	0,287	0,85	0,142
6	6	0	8	0,2	0,426	0,5	0,287	0,8	0,166
6	6	0	8	0,25	0,399	0,5	0,287	0,75	0,188
6	6	0	8	0,3	0,374	0,5	0,287	0,7	0,209
7	6	1	8	0,05	0,685	0,5	0,448	0,95	0,215
7	6	1	8	0,1	0,636	0,5	0,448	0,9	0,262
7	6	1	8	0,15	0,602	0,5	0,448	0,85	0,295
7	6	1	8	0,2	0,573	0,5	0,448	0,8	0,323
7	6	1	8	0,25	0,549	0,5	0,448	0,75	0,347
7	6	1	8	0,3	0,527	0,5	0,448	0,7	0,369
8	6	2	8	0,05	0,770	0,5	0,563	0,95	0,331
8	6	2	8	0,1	0,727	0,5	0,563	0,9	0,381

R	*k*	*m*	*n*	Гамма	ВДГ	0,5	Среднее	Альфа	НДГ
8	6	2	8	0,15	0,701	0,5	0,563	0,85	0,415
8	6	2	8	0,2	0,676	0,5	0,563	0,8	0,443
8	6	2	8	0,25	0,655	0,5	0,563	0,75	0,465
8	6	2	8	0,3	0,635	0,5	0,563	0,7	0,484
7	7	0	8	0,05	0,559	0,5	0,288	0,95	0,080
7	7	0	8	0,1	0,500	0,5	0,288	0,9	0,114
7	7	0	8	0,15	0,459	0,5	0,288	0,85	0,142
7	7	0	8	0,2	0,427	0,5	0,288	0,8	0,166
7	7	0	8	0,25	0,399	0,5	0,288	0,75	0,188
7	7	0	8	0,3	0,374	0,5	0,288	0,7	0,209
8	7	1	8	0,05	0,686	0,5	0,448	0,95	0,215
8	7	1	8	0,1	0,637	0,5	0,448	0,9	0,262
8	7	1	8	0,15	0,603	0,5	0,448	0,85	0,295
8	7	1	8	0,2	0,574	0,5	0,448	0,8	0,323
8	7	1	8	0,25	0,550	0,5	0,448	0,75	0,347
8	7	1	8	0,3	0,528	0,5	0,448	0,7	0,369
8	8	0	8	0,05	0,559	0,5	0,288	0,95	0,080
8	8	0	8	0,1	0,500	0,5	0,288	0,9	0,114
8	8	0	8	0,15	0,459	0,5	0,288	0,85	0,142
8	8	0	8	0,2	0,427	0,5	0,288	0,8	0,166
8	8	0	8	0,25	0,398	0,5	0,288	0,75	0,188
8	8	0	8	0,3	0,374	0,5	0,288	0,7	0,209

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Г.1. Термины и определения

Оценка: Статистика, используемая для оценивания неизвестного параметра θ.

Статистика: Полностью определенная функция случайных величин.

Интервальная оценка: Интервал, ограниченный верхней и нижней границами статистики.

Доверительный интервал: Интервальная оценка (T_0, T_1) параметра θ со статистиками T_0 и T_1 в качестве границ интервала, для которых $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$, где α – уровень доверия. Уровень доверия отражает долю случаев, когда доверительный интервал накрывает истинное значение параметра для длинной серии повторяемых случайных выборок при одинаковых условиях. Доверительный интервал не отражает вероятность того, что полученный по наблюдениям доверительный интервал содержит истинное значение параметра (интервал может как накрывать, так и не накрывать истинное значение).

Односторонний доверительный интервал: доверительный интервал, одна из конечных точек которого равна +∞ или –∞ либо является естественной границей значений случайной величины.

Смещение: см. разделы 1.4 и 1.6.

Несмещенная оценка: Оценка, смещение которой равно нулю.

Независимые события: Пара таких событий, что вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей.

Вероятность события, A, P(A): Действительное число из замкнутого промежутка [0, 1], приписываемое событию.

Функция распределения (случайной величины X); F(x): Функция x, задающая вероятность события.

Вероятностная функция: То же самое, что и функция распределения**.**

Параметр: Признак семейства распределений.

Случайная величина: Функция, определенная на пространстве элементарных событий, значениями которой являются упорядоченные наборы действительных чисел.

Распределение (вероятностей): Вероятностная мера, изменяющаяся от нуля до единицы, индуцированная случайной величиной.

Центрируемая оценка: см. раздел 1.6.

Характеристика: Отличительное свойство.

Модель распределения: Установленное распределение или установленный вид распределения.

Модель надежности: То же самое, что и модель распределения.

Модель отказов: Модель, определяющая механизм развития процессов, приводящих к отказу изделия.

Отказ: Прекращение способности элемента исполнять требуемую функцию**.**

Величина: Конкретное числовое значение количественной характеристики, служащее для сравнения, т.е. величина характеризуется (определяется, формулируется) конкретным числом.

Наблюдаемое значение: Конкретное количественное значение исследуемой характеристики, полученное в результате единичного наблюдения.

Реализация: Синоним «наблюдаемое значение», «данная величина».

Научное издание

Михайлов Виктор Сергеевич

КРИТЕРИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СМЕЩЕННЫХ ОЦЕНОК
В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Монография

Печатается в авторской редакции

Корректор *О.С. Зотова*
Оформление обложки *М.И. Руяткина*

Подписано в печать 25.03.2024
Формат 60×90/8. Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Печать цифровая. Усл. печ. л. 32,5. Тираж 50 экз. Заказ № 133

Отпечатано в типографии ФГУП «ЦНИИХМ»
115487, Москва, ул. Нагатинская, д. 16А