



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •  
• МОСКВА •  
• КРАСНОДАР •  
2015



---

С. И. КУЗНЕЦОВ

**КУРС ФИЗИКИ  
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ  
ЧАСТЬ II  
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО  
И МАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ  
И ВОЛНЫ**

Издание четвертое,  
переработанное и дополненное

*ДОПУЩЕНО*

*НМС по физике Министерства образования и науки РФ  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся  
по техническим направлениям подготовки и специальностям*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2015

---

ББК 22.3я73

К 89

**Кузнецов С. И.**

**К 89** Курс физики с примерами решения задач. Часть II. Электричество и магнетизм. Колебания и волны: Учебное пособие / Под ред. проф. В. В. Ларионова. — 4-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 416 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1718-6**

В учебном пособии рассмотрены свойства материи, связанные с наличием в природе электрических зарядов, которые определяют возникновение электромагнитных полей. Даны разъяснения основных законов, явлений и понятий электромагнетизма. Рассмотрены законы, связанные с механическими и электромагнитными колебаниями и распространением волн. Раскрыты принципы теоретических и экспериментальных исследований электромагнитных волн и связь между оптическими и электромагнитными явлениями.

Подготовлено по программе курса физики высших технических учебных заведений в полном соответствии с требованиями образовательного Госстандарта. Соответствует инновационной политике и направлено на активизацию научного мышления и познавательной деятельности студентов.

Предназначено для межвузовского использования преподавателями и студентами технических направлений подготовки и специальностей очной и дистанционной формы обучения.

**ББК 22.3я73**

**Рецензенты:**

*А. В. ШАПОВАЛОВ* — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики ТГУ;

*А. Г. ПАРФЕНОВ* — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей информатики ТГПУ.

**Обложка**

*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2015

© С. И. Кузнецов, 2015

© Издательство «Лань»,

художественное оформление, 2015

Посвящается моим любознательным студентам,  
которые подвигли меня к переизданию этой книги.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

**К**урс физики в высших технических учебных заведениях охватывает все важнейшие разделы классической и современной физики. Выпускник технического университета обязан владеть одной из основных фундаментальных дисциплин — физикой, твердо усвоить принципы и подходы естественных наук, обеспечившие, особенно в последнее время, невиданный технический прогресс и резкое сокращение сроков между научными открытиями и их внедрением в жизнь.

Все это приводит к повышению требований, которые предъявляются к современному курсу физики в вузе. Эти требования находят свое выражение в обновлении материала по сравнению с традиционными курсами, в повышении научно-технического уровня и в использовании инновационных технологий.

Задача общей физики, не вдаваясь глубоко в подробности рассматриваемых теорий и не увлекаясь математикой, дать общее представление о физической картине мира, установить действующие в нем законы, изучить основные методы физических исследований и обозначить области применения этих законов и методов.

Цель книги — помочь студентам освоить материал программы, научиться активно применять теоретические ос-

новы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи и приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Учебное пособие включает четыре раздела и представляет систематическое изложение основ электродинамики. Рассмотрены механические и электромагнитные колебания и волны. При этом:

- учитываются наиболее важные достижения в развитии современной науки и техники;
- уделяется большое внимание физике различных явлений природы;
- анализируются решения большого количества физических задач, связанных с повышением ресурсоэффективности;
- приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

По способу представления изучаемого материала предлагаемый курс физики можно назвать двухуровневым. Главы и разделы, содержащие материал повышенной сложности, отмечены звездочкой (\*). Студент, имеющий желание получить хорошую оценку на экзамене, должен освоить материал как первого, так и второго уровня сложности.

Небольшой объем учебного пособия достигнут путем тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Ввиду краткости курса устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки.

В пособии приведено большое количество рисунков, схем, графиков и гистограмм, способствующих лучшему восприятию прочитанного материала.

Пособие разработано в соответствии с действующей программой курса общей физики и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям технических наук, техники и технологии.

Подготовлено на кафедре общей физики ТПУ и соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений.

Предназначено для межвузовского использования студентами технических специальностей, изучающими курс

физики по очной и дистанционной программам образования в течение трех семестров.

Наиболее полно материал курса изложен на сайте преподавателя: <http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SMIT>, в Web course tools ТПУ и в электронном читальном зале НТБ ТПУ: <http://www.lib.tpu.ru>.

Надеюсь, что книга сможет послужить студентам разных специальностей, действительно интересующихся проблемами точного знания.

---

## КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КНИГОЙ

Книга, господа, это множество  
нарезанных в четверку листов бумаги,  
напечатанных и собранных вместе,  
переплетенных и склеенных клейстером. Да-с.

*Ярослав Гашек.  
Похождения бравого солдата Швейка*

**П**орядок изложения в книге — систематический, но это не значит, что читатель обязан читать ее подряд — страницу за страницей, главу за главой. Главы в значительной степени независимы одна от другой и представляют собой самостоятельные дидактические единицы. Часто начало раздела покажется легкодоступным, но потом дорога постепенно пойдет вверх, становясь круче в конце главы и в дополнениях к ней. Поэтому читатель, нуждающийся скорее в общей информации, чем в приобретении специальных знаний, поступит правильно, если удовлетворится таким отбором материала, который может быть осуществлен по принципу избегания более детализированных рассматриваний.

Студент с ограниченной математической подготовкой пусть выбирает по своему вкусу. Звездочками отмечено то, что может быть опущено при первом чтении без серьезного ущерба для понимания последующего. Большой беды не будет, если при изучении книги читатель ограничится теми разделами или главами, которые представляют для него наибольший интерес.

Курсивом выделены основные определения и теоремы, которые необходимо запомнить. Жирным курсивом отмечены законы, новые термины и основные понятия, на которые необходимо обратить особое внимание. Для обозначения векторных величин на рисунках и в тексте используется курсивный шрифт со стрелкой.

Материал курса подобран и структурирован таким образом, чтобы облегчить самостоятельную работу студентов. Лучшему усвоению материала способствуют:

- четкость и корректность определений и формулировок;
- большое количество рисунков, дающих возможность наглядно представить физическую сущность процесса;
- однотипность оформления задач;
- проведение сопоставительного анализа различных процессов в рамках единого естественнонаучного представления.

Каждый из разделов начинается с изложения теоретического материала. Подача некоторых вопросов отличается от принятого в учебниках, чтобы избежать излишних математических выкладок при выводе формул. После прочтения теории следует проверить понимание и запоминание определений основных физических понятий и величин, понимание физического смысла формулировок и законов. Для этого в книге приведено большое количество вопросов и упражнений. Изучение каждого раздела курса физики рекомендуется завершить решением задач.

В пособии рассмотрены примеры решения задач, после тщательной проработки которых можно приступить к самостоятельному решению задач. Задачи, предлагаемые для самостоятельной работы, снабжены ответами, как в общем виде, так и в числовом.

Многие задачи предназначены, по существу, для углубления основного материала и даже порой частично заменяют длинные количественные выводы, не приводившиеся в тексте главы.

Большинство вопросов и задач не носит чисто формального характера; более трудные отмечены звездочкой. Не надо слишком огорчаться, если вы не сумеете выполнить некоторые из них. Дополнительное собрание задач могло бы облегчить использование пособия при самоподготовке и на практических занятиях.

Примеры решений не имеют цели научить решению задач: научить нельзя — можно только научиться. Но для этого существует единственный путь — самостоятельное решение большого числа задач. Примеры решения типо-

вых задач выполняют другую роль: они показывают последовательность физических рассуждений, применимость того или иного физического закона к данной задаче. Решение задач приводится в общем виде. Вычисления и проверка единиц измерений ради экономии места в ряде примеров опускаются.

Для удобства работы с данным пособием в приложении приведены фундаментальные физические константы, таблицы физических величин, некоторые справочные данные и сведения о размерностях физических величин. Более точные значения физических постоянных и таблицы физических величин приведены в справочнике «Фундаментальные константы. Таблицы физических величин», размещенном в электронном читальном зале НТБ ТПУ: <http://www.lib.tpu.ru/fulltext2/m/2010/m99.pdf>.

---

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Заставить человека думать — это значит  
сделать для него значительно больше,  
чем снабдить его определенным  
количеством инструкций.

*Чарльз Бэббидж*

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в интернациональной системе единиц (СИ).

СИ состоит из основных, дополнительных и производных единиц. Основными единицами являются: единица длины — метр (м); массы — килограмм (кг); времени — секунда (с); силы электрического тока — ампер (А); термодинамической температуры — кельвин (К); количества вещества — моль (моль); силы света — кандела (кд).

Дополнительные единицы: единица плоского угла — радиан (рад); единица телесного угла — стерadian (ср).

Производные единицы устанавливаются через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими величинами.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц (см. приложение).

2. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие абстракции, как материальная точка, абсолютно твердое тело, луч света.

3. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж.

4. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, т. е. составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.

5. Найдите решение полученной системы уравнений в виде алгоритма, отвечающего на вопрос задачи.

6. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей.

7. Подставьте в полученную формулу численные значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.

---

## ОБОЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

$A$	— работа
$A_{\text{вых}}$	— работа выхода электрона из металла
$\vec{B}$	— вектор индукции магнитного поля
$B_r$	— остаточная индукция
$c$	— скорость электромагнитной волны в вакууме
$C$	— емкость
$\vec{D}$	— вектор электрической индукции (электрического смещения)
$e$	— электрон
$\vec{E}$	— вектор напряженности электрического поля
$\vec{E}_{\text{ст}}$	— вектор напряженности поля сторонних сил
$G$	— проводимость проводников
$\vec{H}$	— вектор напряженности магнитного поля
$H_c$	— коэрцитивная сила
$i$	— мгновенное значение силы тока
$I$	— сила постоянного тока, действующее значение силы тока
$I_m$	— амплитудное значение силы тока
$j$	— плотность тока
$\vec{J}$	— вектор намагничивания
$L$	— коэффициент самоиндукции
$\vec{M}$	— вектор механического момента
$n$	— нейтрон, концентрация зарядов
$p$	— протон
$P$	— мощность тока
$\vec{P}_m$	— магнитный момент контура
$\vec{p}$	— электрический момент диполя
$q$	— заряд
$Q$	— количество тепла, добротность контура
$r$	— внутреннее сопротивление источника тока
$R$	— активное сопротивление проводников
$\vec{S}$	— вектор Умова — Пойнтинга

- $U$  — напряжение, падение напряжения, разность потенциалов, действующее значение напряжения
- $U_m$  — амплитудное значение напряжения
- $v$  — скорость электромагнитной волны в среде
- $W_C$  — энергия конденсатора
- $W_E$  — энергия электрического поля
- $\varepsilon_F$  — энергия Ферми
- $W_H$  — энергия магнитного поля
- $W_L$  — энергия катушки индуктивности
- $X_C$  — реактивное сопротивление конденсатора
- $X_L$  — реактивное сопротивление катушки индуктивности
- $Z$  — импеданс, полное сопротивление цепи
- $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость
- $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная
- $\eta$  — КПД источника
- $\lambda$  — линейная плотность электрических зарядов, длина волны
- $\mu$  — магнитная проницаемость среды
- $\mu_0$  — магнитная постоянная
- $\rho$  — объемная плотность электрических зарядов, удельное сопротивление проводников
- $\sigma$  — поверхностная плотность электрических зарядов, удельная электропроводность проводников
- $\tau$  — время релаксации, постоянная времени цепи, время затухания
- $\varphi$  — потенциал электрического поля, угол сдвига фаз между током и напряжением
- $\xi$  — волновая функция
- $\beta$  — коэффициент затухания
- $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость, логарифмический декремент затухания
- $\aleph$  — магнитная восприимчивость
- $\nu$  — частота колебаний
- $\omega$  — циклическая частота колебаний
- $E$  — ЭДС
- $P$  — коэффициент Пельтье
- $\Phi$  — поток вектора
- $\Phi_E$  — поток вектора напряженности электрического поля
- $\Phi_H$  — поток вектора напряженности магнитного поля
- $\Psi$  — потокосцепление

---

## ВВЕДЕНИЕ

**В**о второй части пособия рассмотрены вопросы электростатики, классической электродинамики и электромагнитные колебания и волны, включая экспериментальные законы и общую теорию методов. Возможно, это самый важный раздел физики, поскольку электромагнитные взаимодействия не только объясняют все электрические и магнитные явления, но и обеспечивают силы, благодаря которым вещество на атомном и молекулярном уровне существует как целое. Изучение электромагнитных взаимодействий на основе квантовой механики позволяет объяснить существование и свойства атомов, молекул и твердых тел.

Цель пособия — помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи.

Пособие ориентировано на организацию самостоятельной работы студентов. Для удобства работы в приложении приведены фундаментальные физические константы, таблицы физических величин, некоторые справочные данные и сведения о размерностях физических величин. Более точные значения физических постоянных и таблицы физических величин приведены в справочнике «Фундаментальные константы. Таблицы физических величин», размещенном в электронном читальном зале НТБ ТПУ: <http://www.lib.tpu.ru>.

Знание законов электромагнетизма играет огромную роль в решении большого количества проблем современ-

ной науки и техники и определяет развитие энергетики, транспорта, вычислительной техники, физики плазмы, термоядерного синтеза и т. д. Дефектоскопия, электромагнитные линзы, магнитная запись информации, поезда на магнитной подушке — вот далеко не полный перечень перспективных областей промышленного применения электромагнитного поля. В течение многих лет не ослабевает интерес к электромагнитным полям биологических объектов, повышено внимание к среде их обитания.

Для настоящего курса физики реализовано его мультимедийное сопровождение и создан электронный учебник, размещенный в электронном читальном зале НТБ ТПУ, в среде дистанционного обучения “MOODLE” (<http://mdl.lcg.tpu.ru>) и в корпоративной сети ТПУ WEB СТ (<http://e-le.lcg.tpu.ru>). Наиболее полно материал курса изложен на сайте преподавателя <http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SMIT>.

Автор считает приятным долгом выразить свою благодарность коллективу кафедры общей физики ТПУ за помощь в составлении и оформлении учебного пособия.

Автор с благодарностью примет все замечания и пожелания читателей, способствующие улучшению курса по адресу: [smit@tpu.ru](mailto:smit@tpu.ru).

---

# 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ТОК

## 1.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 1.1.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

**Электростатика** — раздел, изучающий статические (неподвижные) заряды и связанные с ними электрические поля.

Перемещение зарядов либо отсутствует, либо происходит так медленно, что возникающие при движении зарядов магнитные поля ничтожны. Сила взаимодействия между зарядами определяется только их взаимным расположением. Следовательно, энергия электростатического взаимодействия — потенциальная энергия.

Несмотря на обилие различных веществ в природе существуют только два вида электрических зарядов: заряды, подобные тем, которые возникают на стекле, потертом о шелк, и заряды, подобные тем, которые появляются на янтаре, потертом о мех. Первые были названы положительными, вторые — отрицательными зарядами. Так их назвал американский ученый Бенджамин Франклин в 1746 г. Одним из фундаментальных законов природы является закон сохранения электрического заряда: *алгебраическая сумма зарядов замкнутой системы сохраняется при любых процессах, проходящих внутри этой системы.*

*Электрические заряды не существуют сами по себе, а являются внутренними свойствами элементарных частиц — электронов, протонов и др.*

Опытным путем в 1914 г. американский физик Р. Милликен показал, что *электрический заряд дискретен.* За-

ряд любого тела составляет целое кратное от *элементарного электрического заряда*  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл:

$$q = \pm ne,$$

где  $n$  — целое число.

*Электрон* и *протон* являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

### 1.1.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ В ВАКУУМЕ. ЗАКОН КУЛОНА

*Точечным зарядом* ( $q$ ) называется заряженное тело, размеры которого пренебрежительно малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которым оно взаимодействует.

В результате опытов Кулон установил, что *сила взаимодействия точечных зарядов в вакууме пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$  — электрическая постоянная; множитель  $4\pi$  выражает сферическую симметрию закона Кулона.

В векторной форме закон Кулона имеет следующий вид:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (1.1.2)$$

где  $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$  — единичный вектор, направленный от положительного заряда к отрицательному.

В электростатике взаимодействие зарядов подчиняется *третьему закону Ньютона*: *силы взаимодействия между зарядами равны по величине и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, связывающей эти заряды* (см. рис. 1.1.1).

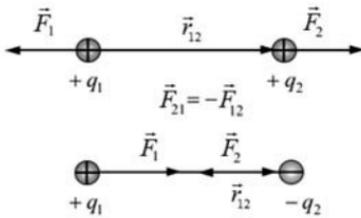


Рис. 1.1.1

Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как точечные заряды, необходимо разбивать эти тела на элементарные участки, а затем интегрировать по объему.

Закон Кулона справедлив при расстояниях  $10^{-15} < r < 10^7$  м. Внутри ядра действуют уже другие силы, не кулоновские.

### 1.1.3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

*Вокруг заряда всегда есть электрическое поле, основное свойство которого заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, действует сила.* Электрическое поле обеспечивает взаимодействие электрических зарядов.

*Электрические и магнитные поля — частный случай более общего — электромагнитного поля (ЭМП). Они могут порождать друг друга, превращаться друг в друга. Если заряды не движутся, то магнитное поле не возникает.*

*ЭМП — не абстракция, а объективная реальность — форма существования материи, обладающая определенными физическими свойствами, которые мы можем измерить.*

Не существует статических электрических полей, не связанных с зарядами, как не существует «голых», не окруженных полем зарядов.

Силовой характеристикой поля, создаваемого зарядом  $q$ , является отношение силы, действующей на заряд, к величине этого заряда, называемое *напряженностью электростатического поля*, т. е.

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.1.3)$$

или в векторной форме:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.1.4)$$

где  $r$  — расстояние от заряда до точки, где мы изучаем это поле.

Тогда

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

и при  $q = +1$

$$\vec{F} = \vec{E}.$$

**Вектор напряженности электростатического поля** равен силе, действующей в данной точке на помещенный в нее пробный единичный положительный заряд.

Направление вектора напряженности определяет направление силы, действующей на положительный заряд, помещенный в рассматриваемую точку.

Единица измерения напряженности электростатического поля — **вольт на метр** (В/м).

В СИ размерность напряженности  $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$  или  $\frac{\text{В}}{\text{м}}$ .

#### 1.1.4. СЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Одним из фундаментальных принципов физики является **принцип независимости действия сил, или принцип суперпозиции**, который распространяется и на электростатику.

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то на пробный заряд  $q$  действует со стороны заряда  $q_k$  такая сила, как если бы других зарядов не было.

Результирующая сила определится выражением

$$\vec{F} = \sum_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_k}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k} = \sum_k \vec{F}_k$$

— это математическая формулировка **принципа суперпозиции**.

Так как  $\vec{F} = q\vec{E}$ , то  $\vec{E}$  — результирующая напряженность поля в точке, где расположен пробный заряд; так же **подчиняется принципу суперпозиции**:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \sum_k \vec{E}_k. \quad (1.1.5)$$

*Напряженность результирующего поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в данной точке каждым из них в отдельности.*

### 1.1.5. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ

*Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми  $l$  значительно меньше расстояния до точек, где определяется поле системы, т. е.  $r \gg l$  (рис. 1.1.2).*

Здесь  $\vec{l}$  называют *плечо диполя* — вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между зарядами.

**Пример 1.** Найдем  $E_{\perp}$  в точке  $A$ , лежащей на прямой, проходящей через центр диполя и перпендикулярной к оси диполя (рис. 1.1.2):

$$E_{+} = E_{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{так как } l \ll r). \quad (1.1.6)$$

Из подобия заштрихованных треугольников можно записать

$$\frac{E_{\perp}}{E_{+}} = \frac{l}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{l}{r}.$$

Отсюда

$$E_{\perp} = E_{+} \frac{l}{r} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.1.7)$$

Обозначим вектор:  $\vec{p} = q\vec{l}$  — *электрический момент диполя* (или *дипольный момент*), это произведение положительного заряда диполя на плечо  $\vec{l}$ .

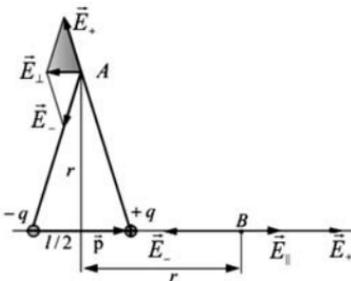


Рис. 1.1.2

Направление  $\vec{p}$  совпадает с направлением  $\vec{l}$ , т. е. от отрицательного заряда к положительному. Тогда, учитывая, что  $ql = p$ , получим

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{или} \quad \vec{E}_{\perp} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.1.8)$$

**Пример 2.** На оси диполя в точке  $B$  (рис. 1.1.2):

$$E_{\parallel} = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{или} \quad \vec{E}_{\parallel} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.1.9)$$

**Пример 3.** В произвольной точке ( $\varphi \approx \varphi_1 \approx \varphi_2$ ):

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}. \quad (1.1.10)$$

При  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ :

$$E_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

При  $\varphi = \varphi_2 = 0$ :

$$E_2 = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

*Из приведенных примеров видно, что напряженность электрического поля системы зарядов равна геометрической сумме напряженностей полей каждого из зарядов в отдельности (принцип суперпозиции).*

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем заключается закон сохранения заряда? Приведите примеры проявления закона.
2. Сформулируйте четыре закона сохранения, существующих в природе.
3. Что представляет собой электростатическое поле и как его можно изобразить графически?
4. Запишите, сформулируйте и объясните закон Кулона.
5. Какие поля называют электростатическими?
6. Что такое напряженность  $\vec{E}$  электростатического поля?
7. Каково направление вектора напряженности  $\vec{E}$ ? Единица напряженности в СИ.
8. Какая физическая величина является силовой характеристикой электростатического поля? Напишите ее формулу.
9. Дайте определение электрическому диполю. Что такое плечо диполя, электрический момент диполя?

10. Пользуясь принципом суперпозиции, найдите в поле двух точечных зарядов  $+q$  и  $+2q$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, точку, где напряженность поля равна нулю.
11. Чему равно отношение напряженностей электростатических полей в точке  $B$ , лежащей на продолжении оси диполя (рис. 1.1.2), и в точке  $A$ , лежащей на перпендикуляре, проходящем через середину  $O$  оси этого диполя, если  $OA = OB$ ?
12. Приведите формулу напряженности в точке  $C$ , расположенной произвольно по отношению к диполю.
13. Два одинаковых шарика, имеющих заряды по 400 нКл, соединены пружиной и находятся на гладком горизонтальном столе. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от  $L$  до  $4L$ . Найдите жесткость пружины, если известно, что ее длина в свободном состоянии  $2L$ , где  $L = 2$  см.
14. Два небольших тела массой 5 г каждое, заряженные одинаковым зарядом 1 мкКл, находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии 10 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен 0,5. Какую минимальную начальную скорость надо сообщить одному из тел, чтобы сдвинуть с места второе тело?
15. В поле силы тяжести закреплен точечный заряд  $-10$  мкКл, а под ним на расстоянии 5 м находится частица массой 9 г и зарядом 4 мкКл. Какую минимальную вертикальную скорость (в единицах СИ) надо сообщить частице, чтобы она долетела до закрепленного заряда?

## 1.2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### 1.2.1. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для того чтобы описать электрическое поле, нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически или графически. Для этого пользуются *силовыми линиями*. *Силовые линии* — это линии, касательная к которым в любой точке поля совпадает с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  (рис. 1.2.1).

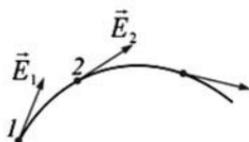


Рис. 1.2.1

Силовой линии приписывают определенное направление — от положительного заряда к отрицательному или в бесконечность.

Рассмотрим случай *однородного электрического поля*.

**Однородным** называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению, т. е.  $\vec{E} = \text{const}$ .

Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга. Такое поле можно создать между заряженными бесконечными параллельными пластинами, например между пластинами конденсатора (рис. 1.2.2).

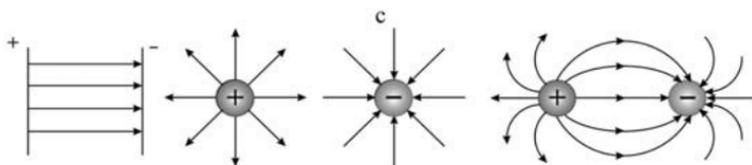


Рис. 1.2.2

Поле точечного заряда неоднородно. Для точечного заряда линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность и из бесконечности входят в отрицательный заряд. Так как  $E \sim 1/r^2$ , то и густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда. Так как площадь поверхности сферы, через которую проходят эти линии, сама возрастает пропорционально квадрату расстояния, то общее число линий остается постоянным на любом расстоянии от заряда.

Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному (рис. 1.2.2).

Из рисунка 1.2.2 видно, что густота силовых линий может служить и количественным показателем величины  $\vec{E}$ . Для этого необходимо, чтобы число силовых линий, пересекающих единичную площадку, нормальную к вектору напряженности, было равно модулю вектора напряженности  $|\vec{E}|$ .

### 1.2.2. ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ

Если силовые линии однородного электрического поля напряженностью  $\vec{E}$  пронизывают некоторую площадку  $S$ , то **поток вектора напряженности** будет определяться формулой

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES \cos \alpha = E_n S,$$

где  $E_n$  — произведение вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  к данной площадке (рис. 1.2.3а, б).

Полное число силовых линий, проходящих через поверхность  $S$ , называется **поток вектора напряженности**  $\Phi_E$  через эту поверхность.

В векторной форме можно записать, что  $\Phi_E = (\vec{E}, \vec{S})$  — скалярное произведение двух векторов, где вектор  $\vec{S} = \vec{n}S$ .

Таким образом, поток вектора  $\vec{E}$  есть скаляр, который в зависимости от величины угла  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Рассмотрим примеры, изображенные на рисунках 1.2.4 и 1.2.5.

На рисунке 1.2.4 поверхность  $A_1$  окружает положительный заряд, и поток здесь направлен наружу, т. е.  $\Phi_E > 0$ . Поверхность  $A_2$  окружает отрицательный заряд, здесь  $\Phi_E < 0$  и направлен внутрь. Общий поток через поверхность  $A$  равен нулю.

Поток будет не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Для конфигурации, изображенной на рисунке 1.2.5, поток через поверхность  $A$  — отрицательный.

Таким образом, **поток вектора напряженности зависит от заряда**.

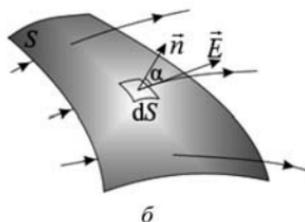
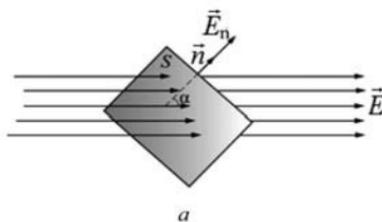


Рис. 1.2.3

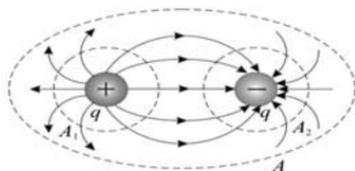


Рис. 1.2.4

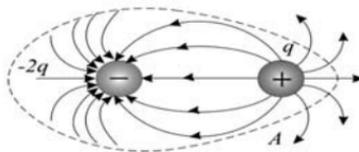


Рис. 1.2.5

### 1.2.3. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА

Пусть имеем положительный точечный заряд  $q$  (рис. 1.2.6).

Поток вектора напряженности через произвольную элементарную площадку  $dS$  будет равен

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = E_n dS. \quad (1.2.1)$$

В однородном поле  $\Phi_E = ES$ . В произвольном электрическом поле:

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.2.2)$$

Здесь  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ , т. е. ориентация  $dS$  в пространстве задается с помощью единичного вектора  $\vec{n}$ . Таким образом, направление вектора  $d\vec{S}$  совпадает с направлением  $\vec{n}$  внешней нормали к поверхности.

Подсчитаем поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , окружающую точечный заряд  $q$  (рис. 1.2.7). Окружим заряд  $q$  сферой  $S_1$ .

Центр сферы совпадает с центром заряда. Радиус сферы  $S_1$  равен  $R_1$ . В каждой точке поверхности  $S_1$  проекция  $\vec{E}$  на направление внешней нормали одинакова и равна

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_1^2}.$$

Тогда поток через  $S_1$ :

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Подсчитаем поток через сферу  $S_2$ , имеющую радиус  $R_2$ :

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

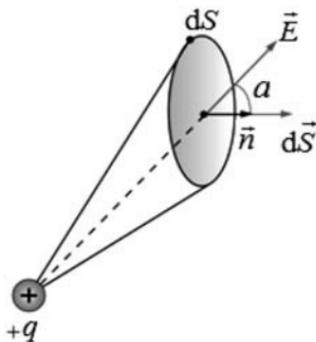


Рис. 1.2.6

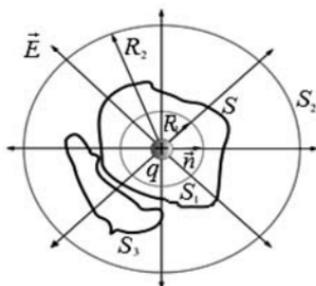


Рис. 1.2.7

Из непрерывности линии  $\vec{E}$  следует, что поток и через любую произвольную поверхность  $S$  будет равен этой же величине:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.2.3)$$

— теорема Гаусса для одного заряда.

Полученный результат справедлив не только для одного заряда, но и для любого числа произвольно расположенных зарядов, находящихся внутри поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0} \quad (1.2.4)$$

— теорема Гаусса для нескольких зарядов.

*Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .*

При вычислении потока через замкнутую поверхность вектор нормали  $\vec{n}$  следует считать направленным наружу. Линии  $\vec{E}$ , выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, создают положительный поток, линии же, входящие в объем, — отрицательный поток.

Если между нашими сферами расположить еще одну поверхность  $S_3$ , не охватывающую заряд, то, как видно из рисунка 1.2.7, каждая линия напряженности  $\vec{E}$  будет дважды пересекать эту поверхность: один раз с положительной стороны — войдет в поверхность  $S_3$ , другой раз — с отрицательной стороны — выйдет из поверхности  $S_3$ . В результате алгебраическая сумма линий напряженности, проходящая через замкнутую поверхность  $S_3$ , будет равна нулю, т. е. полный поток, проходящий через  $S_3$ , равен нулю.

Таким образом, для точечного заряда  $q$  полный поток через любую замкнутую поверхность  $S$  будет равен:

$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ , если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;

$\Phi_E = 0$ , если заряд расположен вне замкнутой поверхности.

Этот результат не зависит от формы поверхности, и знак потока совпадает со знаком заряда.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью  $\rho = dq/dV$ , различной в разных местах пространства. Здесь  $dV$  — **физически бесконечно малый объем**, под которым следует понимать *такой объем, который, с одной стороны, достаточно мал, чтобы в пределах его плотность заряда считать одинаковой, а с другой — достаточно велик, чтобы не могла проявиться дискретность заряда*, т. е. то, что любой заряд кратен целому числу элементарных зарядов электрона  $e^-$  или протона  $p^+$ .

Суммарный заряд объема  $dV$  будет равен

$$\sum q_i = \int_V \rho dV. \quad (1.2.5)$$

Тогда из теоремы Гаусса (2.3.4) можно получить

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.2.6)$$

— это еще одна форма записи теоремы Остроградского — Гаусса, если заряд неравномерно распределен по объему.

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство: в то время как само поле  $\vec{E}$  зависит от конфигурации всех зарядов, поток  $\Phi_E$  сквозь произвольную замкнутую поверхность определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности  $S$ . Это значит, что *если передвинуть заряды, то  $\vec{E}$  изменится всюду, и на поверхности  $S$ , а поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность останется прежним*.

#### 1.2.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА

С помощью дифференциальной формы теоремы можно рассчитать электростатическое поле при произвольном пространственном распределении зарядов. В ней установлена связь между объемной плотностью заряда  $\rho$  и изменением  $\vec{E}$  в окрестности данной точки пространства.

Пусть заряд распределен в пространстве  $\Delta V$  с объемной плотностью  $\langle \rho \rangle$ .

Тогда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0};$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\varepsilon_0};$$

$$\frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0}.$$

Теперь устремим  $\Delta V \rightarrow 0$ , стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом  $\langle \rho \rangle$  будет стремиться к  $\rho$  в данной точке, т. е.

$$\frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Величину, являющуюся пределом отношения  $\oint \vec{E} d\vec{S}$  к  $\Delta V$  при  $\Delta V \rightarrow 0$ , называют *дивергенцией поля*  $\vec{E}$  и обозначают  $\text{div} \vec{E}$ .

Тогда, по определению:

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S}. \quad (1.2.7)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из этого определения следует, что *дивергенция является скалярной функцией координат*. В декартовой системе координат дивергенция может быть представлена формулой

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad (1.2.8)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.2.9)$$

*Это теорема Остроградского — Гаусса в дифференциальной форме.*

Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор  $\vec{\nabla}$  (набла):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.2.10)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты осей (единичные векторы).

Сам по себе оператор  $\vec{\nabla}$  смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.2.11)$$

*Формула (1.2.11) — это тоже дифференциальная форма теоремы Остроградского — Гаусса.*

В тех точках поля, где  $\operatorname{div} E > 0$  (положительные заряды), — *источники* поля, где  $\operatorname{div} E < 0$  (отрицательные заряды) — *стоки*. *Линии  $\vec{E}$  выходят из источников и заканчиваются в стоках.*

### 1.2.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА

Продемонстрируем возможности теоремы Остроградского — Гаусса на нескольких примерах.

#### ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНОЙ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

*Поверхностная плотность заряда* на произвольной плоскости площадью  $S$  определяется по формуле

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

где  $dq$  — заряд, сосредоточенный на площади  $dS$ ;  $dS$  — физически бесконечно малый участок поверхности.

Пусть  $\sigma$  во всех точках плоскости  $S$  одинакова. Заряд  $q$  — положительный. Напряженность  $\vec{E}$  во всех точках будет иметь направление, перпендикулярное плоскости  $S$  (рис. 1.2.8).

Очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность  $\vec{E}$  будет одинакова по величине и противоположна по направлению.

Представим себе цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости,

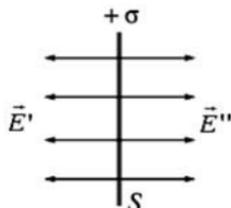


Рис. 1.2.8

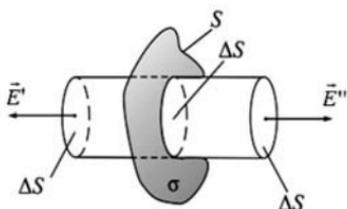


Рис. 1.2.9

и основаниями  $\Delta S$ , расположенными симметрично относительно плоскости (рис. 1.2.9).

Тогда  $E' = E'' = E$ .

Применим теорему Остроградского — Гаусса. Поток  $\Phi_E$  через боковую часть поверхности цилиндра равен нулю, так как  $E_n = 0$ . Для основания цилиндра  $E_n = E$ .

Суммарный поток через замкнутую поверхность (цилиндр) будет равен

$$\Phi_E = 2\Delta S E.$$

Внутри поверхности заключен заряд  $q = \sigma\Delta S$ . Следовательно, из теоремы Остроградского — Гаусса получим

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = 2\Delta S E = \sigma\Delta S \frac{1}{\epsilon_0},$$

откуда видно, что напряженность поля плоскости  $S$  равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.2.12)$$

Полученный результат не зависит от длины цилиндра. Это значит, что на любом расстоянии от плоскости  $E = \text{const}$ .

#### ПОЛЕ ДВУХ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть две бесконечные плоскости заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине поверхностной плотностью  $\sigma$  (рис. 1.2.10).

Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей:  $E = E_+ + E_-$ .

Тогда *внутри плоскостей*:

$$E = \sigma/\epsilon_0. \quad (1.2.13)$$

*Вне плоскостей* напряженность поля  $E = 0$ .

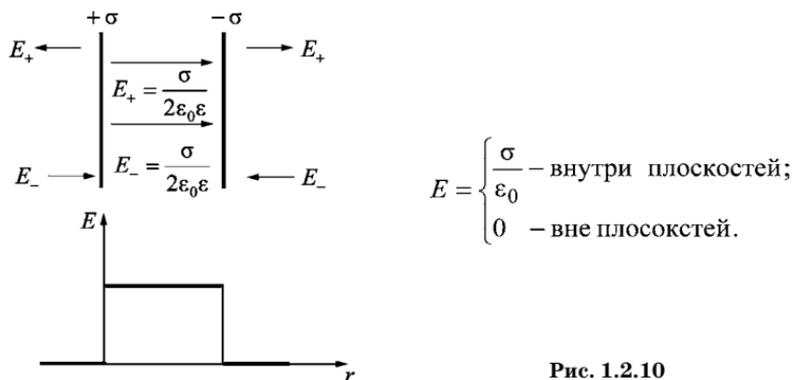


Рис. 1.2.10

Полученный результат справедлив и для плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями гораздо меньше линейных размеров плоскостей (плоский конденсатор).

ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО  
БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА (НИТИ)

Пусть поле создается бесконечной цилиндрической *поверхностью радиуса  $R$* , заряженной с постоянной линейной плотностью  $\lambda^+ = \frac{dq}{dl}$ , где  $dq$  — заряд, сосредоточенный на отрезке цилиндра (рис. 1.2.11).

Из соображения симметрии следует, что  $E$  в любой точке будет направлена вдоль радиуса, перпендикулярно оси цилиндра.

Представим вокруг цилиндра (нити) *коаксиальную замкнутую поверхность (цилиндр в цилиндре)* радиуса  $r$  и длиной  $l$ . Для оснований цилиндров  $E_n = 0$ , для боковой поверхности  $E_n = E(r)$ , т. е. зависит от расстояния  $r$ .

Следовательно, поток вектора  $\vec{E}$  через рассматриваемую поверхность равен  $\Phi_E = E(r)S = E(r)2\pi rl$ .

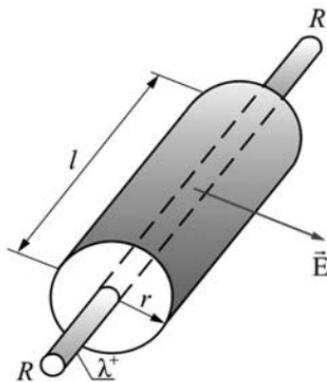


Рис. 1.2.11

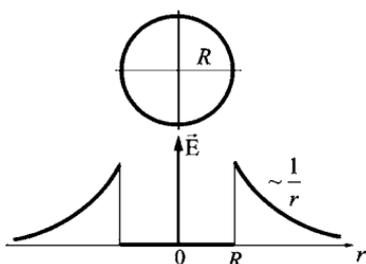


Рис. 1.2.12

При  $r \geq R$  на поверхности будет заряд  $q = \lambda l$ . По теореме Остроградского — Гаусса

$$E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \text{ отсюда}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{при } r \geq R. \quad (1.2.14)$$

Если  $r < R$ ,  $E(r) = 0$ , так как внутри замкнутой поверхности зарядов нет (рис. 1.2.12).

Если уменьшать радиус цилиндра  $R$  (при  $\lambda = \text{const}$ ), то можно вблизи поверхности получить поле с очень большой напряженностью и при  $R \rightarrow 0$  получить нить.

Если уменьшать радиус цилиндра  $R$  (при  $\lambda = \text{const}$ ), то можно вблизи поверхности получить поле с очень большой напряженностью и при  $R \rightarrow 0$  получить нить.

ПОЛЕ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ  
С ОДИНАКОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ,  
НО РАЗНЫМ ЗНАКОМ

Внутри меньшего и вне большего цилиндров поле будет отсутствовать,  $E = 0$  (рис. 1.2.13).

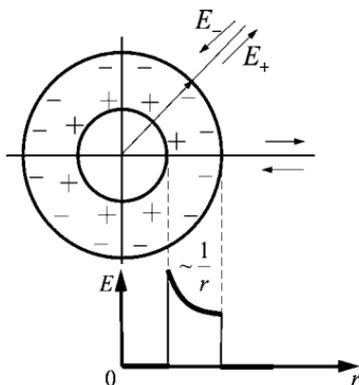


Рис. 1.2.13

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

В зазоре между цилиндрами поле определяется так же, как и в предыдущем случае:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Это справедливо и для бесконечно длинного цилиндра, и для цилиндров конечной длины, если зазор между цилиндрами намного меньше длины цилиндров (цилиндрический конденсатор).

ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ  
СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пустотелый шар (или сфера) радиуса  $R$  заряжен положительным зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Поле в данном случае будет центрально-симметричным,  $\vec{E}$  в любой точке проходит через центр шара;  $E = E(r)$  и силовые линии перпендикулярны поверхности в любой точке. Вообразим вокруг шара сферу радиуса  $r$  (рис. 1.2.14).

Если  $r \geq R$ , то внутрь воображаемой сферы попадет весь заряд  $q$ , распределенный по сфере.

Тогда

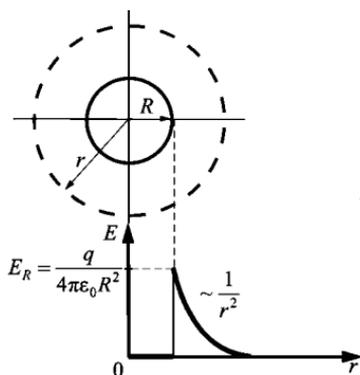
$$\Phi_E = E(r)S = E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда *поле вне сферы*:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.2.15)$$

*Внутри сферы* при  $r < R$  поле будет равно нулю, так как там нет зарядов:  $E(r) = 0$ .

Поле вне сферы тождественно полю точечного заряда той же величины, помещенному в центр сферы.



$$E = \begin{cases} 0 & \text{— внутри сферы;} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{— при } r \geq R \text{ вне сферы.} \end{cases}$$

Рис. 1.2.14

ПОЛЕ ОБЪЕМНОГО  
ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА

Для поля *вне шара* радиусом  $R$  (рис. 1.2.15) получается тот же результат, что и для пустотелой сферы, т. е. справедлива формула

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Но внутри шара при  $r < R$  сферическая поверхность будет содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда, равная  $\rho = \frac{q}{V}$ ;  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  — объем шара.

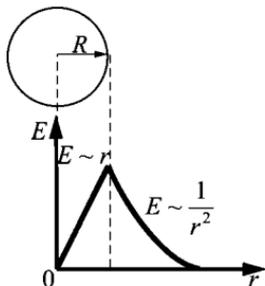
Тогда, по теореме Остроградского — Гаусса, запишем, что

$$\Phi_E = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

т. е. *внутри шара*:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (1.2.16)$$

Таким образом, внутри шара  $E \sim r$ .



$$E = \begin{cases} \rho \frac{r}{3\epsilon_0} & \text{внутри шара;} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R \text{ вне шара.} \end{cases}$$

Рис. 1.2.15

## ПОНДЕРМОТОРНЫЕ СИЛЫ

Между пластинами конденсатора действует сила взаимного притяжения (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}, \quad \text{или} \quad F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (1.2.17)$$

Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными**.

Тогда сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}, \quad (1.2.18)$$

где  $S$  — площадь обкладок конденсатора.

Так как  $\sigma = \frac{q}{S} = E\varepsilon_0$ , то

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2} \quad (1.2.19)$$

— это формула для расчета пондермоторной силы.

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем заключается физический смысл теоремы Остроградского — Гаусса для электростатического поля в вакууме?
2. Что такое линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов?
3. Как показать, что электростатическое поле является потенциальным?
4. Как записывается теорема Остроградского — Гауса в дифференциальной и интегральной формах?
5. Электрический диполь помещен внутрь замкнутой поверхности. Каков поток  $\Phi_E$  сквозь эту поверхность?
6. С помощью теоремы Остроградского — Гаусса рассчитайте и изобразите графически:
  - поле бесконечной равномерно заряженной плоскости (с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ );
  - поле двух (бесконечно длинных) параллельных равномерно заряженных плоскостей;
  - поле бесконечно длинного равномерно заряженного прямого цилиндра (нити);

- поле двух коаксиальных бесконечно длинных равномерно и равноименно заряженных цилиндров (цилиндрический конденсатор);
- поле сферы, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ ;
- поле двух concentрических равномерно и разноименно заряженных сферических поверхностей (сферический конденсатор);
- поле равномерно заряженного шара с объемной плотностью  $\rho$ .

### 1.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

#### 1.3.1. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Между электростатическими полями и гравитационными прослеживается аналогия в форме написания законов взаимодействия. Однако этим аналогия не ограничивается. Как и гравитационное поле, электростатическое можно описать с помощью **потенциала**. Для этого необходимо показать, что силы электростатического поля, так же как и гравитационные, **консервативны**, а само поле — **потенциально**.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом  $q$ . В любой точке этого поля на пробный точечный заряд  $q'$  действует сила  $\vec{F}$  (рис. 1.3.1), равная:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

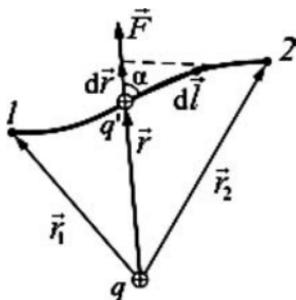


Рис. 1.3.1

где  $F(r)$  — модуль вектора силы  $\vec{F}$ ;  
 $\frac{\vec{r}}{r}$  — единичный вектор, определяющий положение заряда  $q'$  относительно  $q$ .

Из раздела «Физические основы механики» известно, что любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т. е. работа сил этого поля не за-

*висит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек.*

Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом  $q$  по перемещению заряда  $q'$  из точки 1 в точку 2.

Работа на пути  $dl$  равна

$$dA = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos \alpha,$$

где  $dr$  — приращение радиус-вектора  $\vec{r}$  при перемещении на  $dl$ ;  $dr = dl \cos \alpha$ , т. е.

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

Тогда полная работа при перемещении  $q'$  из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.3.1)$$

Таким образом, *работа электростатических сил зависит не от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения.* Следовательно, *силы поля консервативны, а само поле — потенциально.*

Этот вывод можно распространить и на поле, созданное системой зарядов, так как по принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k.$$

Итак, как и в механике, любое стационарное поле центральных сил является консервативными, т. е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения начальной и конечной точек. Именно таким свойством обладает электростатическое поле — поле, образованное системой неподвижных зарядов. Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 (см. рис. 1.3.2) заданного поля  $\vec{E}$  в точку 2, взять положительный еди-

ничный заряд  $q$ , то элементарная работа сил поля будет равна

$$dA = q\vec{E}d\vec{l}. \quad (1.3.2)$$

Тогда вся работа равна

$$A = q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \quad (1.3.3)$$

Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по **произвольному замкнутому пути**:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0. \quad (1.3.4)$$

Такой интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией вектора  $\vec{E}$** , а формула (1.3.4) носит название **теорема о циркуляции  $\vec{E}$** .

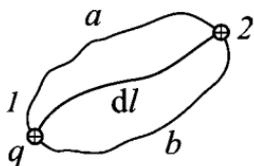


Рис. 1.3.2

Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части:  $1a2$  и  $2b1$  (рис. 1.3.2). Из сказанного выше следует, что:

$$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = - \int_2^1 \vec{E}d\vec{l}.$$

Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны.

Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q \oint \vec{E}d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} - q \int_2^1 \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

Поле, обладающее такими свойствами, называется **потенциальным**. Любое электростатическое поле является потенциальным.

### 1.3.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

В предыдущем параграфе было доказано, что электростатическое поле потенциально. Следовательно, для него можно ввести функцию состояния, зависящую от координат, — **потенциальную энергию**.

Исходя из принципа суперпозиции сил  $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$ , можно показать, что общая работа  $A$  будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k.$$

Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма.

Итак, электростатическое поле потенциально.

Работу сил электростатического поля можно выразить через *убыль потенциальной энергии* — разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2. \quad (1.3.5)$$

Это выражение для работы можно переписать в виде

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (1.3.6)$$

Сопоставляя формулы (1.3.5) и (1.3.6), получаем **выражение для потенциальной энергии** заряда  $q'$  в поле заряда  $q$ :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + \text{const}. \quad (1.3.7)$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной интегрирования.

Значение константы в выражении для  $W$  выбирают таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т. е. при  $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия обращалась в нуль.

Для системы зарядов суммарная потенциальная энергия складывается алгебраически:

$$W = \sum_k W_k. \quad (1.3.8)$$

### 1.3.3. ПОТЕНЦИАЛ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

Разные пробные заряды ( $q'$ ,  $q''$ , ...) будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями ( $W'$ ,  $W''$  и т. д.). Однако отношение  $W/q'$  будет для всех зарядов одним и тем же. Поэтому можно ввести скалярную величину, являющуюся *энергетической характеристикой собственно поля*, — **потенциал**:

$$\varphi = \frac{W}{q'}. \quad (1.3.9)$$

Из этого выражения следует, что **потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд**.

Подставив в (1.3.9) значение потенциальной энергии (1.3.7), получим для потенциала точечного заряда следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.3.10)$$

Потенциал, как и потенциальную энергию, определяют с точностью до постоянной интегрирования. Поскольку физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, договорились считать, что потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю. Когда говорят «потенциал такой-то точки», имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность*. Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\varphi,$$

т. е. **потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность (или наоборот — такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля)**. При этом  $\varphi > 0$ , если  $q > 0$ .

Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k q'}{r_k}. \quad (1.3.11)$$

Тогда и для потенциала  $\varphi = \sum_k \varphi_k$  или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k}, \quad (1.3.12)$$

*т. е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. А вот напряженности складываются при наложении полей — векторно. По этой причине потенциалы полей считать проще, чем напряженности.*

Вернемся к работе сил электростатического поля над зарядом  $q$ . Выразим работу через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.3.13)$$

Таким образом, работа над зарядом  $q$  равна произведению заряда на убыль потенциала, т. е.

$$\begin{aligned} A &= q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU; \\ A &= qU, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

где  $U$  — напряжение.

Аналогия с гравитационным полем:

$$A = mgh_1 - mgh_2 = m(gh_1 - gh_2),$$

где  $gh$  — смысл потенциала, а  $m$  — заряда гравитационного поля.

Итак, потенциал — скалярная величина, поэтому пользоваться и вычислять  $\varphi$  проще, чем  $\vec{E}$ . Приборы для измерения разности потенциалов широко распространены.

Формулу  $A_\infty = q\varphi$  можно использовать для установления единиц потенциала: *за единицу  $\varphi$  принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице.*

В СИ единица потенциала  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$ .

В физике часто используется единица энергии и работы, называемая электронвольт (эВ), — *это работа, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона при прохождении им разности потенциалов 1 В, т. е.*

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

### 1.3.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ

Итак, электростатическое поле можно описать либо с помощью векторной величины  $\vec{E}$ , либо с помощью скалярной величины  $\varphi$ . Очевидно, что между этими величинами должна существовать определенная связь. Найдем ее.

Изобразим перемещение заряда  $q$  по произвольному пути  $l$  (см. рис. 1.3.2) в электростатическом поле  $\vec{E}$ .

Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке  $dl$ , можно найти так:

$$dA = F_l dl = E_l q dl, \quad (1.3.15)$$

где  $E_l$  — проекция  $\vec{E}$  на  $d\vec{l}$ ;  $d\vec{l}$  — произвольное направление перемещения заряда.

С другой стороны, как мы показали, эта работа, если она совершена электростатическим полем, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии  $dl$ :

$$dA = -q d\varphi; \quad E_l q dl = -q d\varphi.$$

Отсюда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (1.3.16)$$

Для ориентации  $d\vec{l}$  (направление перемещения) в пространстве надо знать проекции  $\vec{E}$  на оси координат:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; & E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; & E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \\ \vec{E} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

По определению градиента *сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции*, т. е.

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

где  $\text{grad}\varphi$  — вектор, показывающий направление наибоыстрейшего увеличения функции.

Тогда коротко связь между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  записывается так:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \quad (1.3.18)$$

или так:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.3.19)$$

Знак «-» говорит о том, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

### 1.3.5. БЕЗВИХРЕВОЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Из условия  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  следует одно важное соотношение, а именно: *величина векторного произведения  $[\nabla, \vec{E}]$  для стационарных электрических полей всегда равна нулю*. Действительно, по определению, имеем

$$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0,$$

поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

Величина  $[\nabla, \vec{E}]$  называется *ротором*, или *вихрем*, и обозначается как  $\text{rot}\vec{E}$ .

Мы получаем *важнейшее уравнение электростатики*:

$$\text{rot}\vec{E} = 0. \quad (1.3.20)$$

Согласно теореме Стокса между контурным и поверхностным интегралами существует следующая связь:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S \text{rot}\vec{E} d\vec{S} = 0,$$

где контур  $L$  ограничивает поверхность  $S$ , ориентация которой определяется направлением вектора положительной нормали  $\vec{n}$ :  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ .

Таким образом, *кулоновское электростатическое поле — безвихревое.*

*Работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.*

### 1.3.6. СИЛОВЫЕ ЛИНИИ И ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением  $\vec{E}$ . Отсюда следует, что *напряженность  $\vec{E}$  равна разности потенциалов  $U$  на единицу длины силовой линии.*

Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить  $\vec{E}$  между двумя точками, измеряя  $U$  между ними, причем тем точнее, чем ближе точки. В однородном электрическом поле силовые линии — прямые. Поэтому здесь определить  $\vec{E}$  наиболее просто:

$$E = \frac{U}{l}. \quad (1.3.21)$$

Теперь дадим определение *эквипотенциальной поверхности*. *Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.* Уравнение этой поверхности:

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const}. \quad (1.3.22)$$

Графическое изображение силовых линий и эквипотенциальных поверхностей показано на рисунке 1.3.3.

Вектор напряженности  $\vec{E}$  в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности.

Эквипотенциальных поверхностей можно провести сколько угодно много. По густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине  $\vec{E}$ ; это будет при условии, что разность потенциалов между двумя соседни-

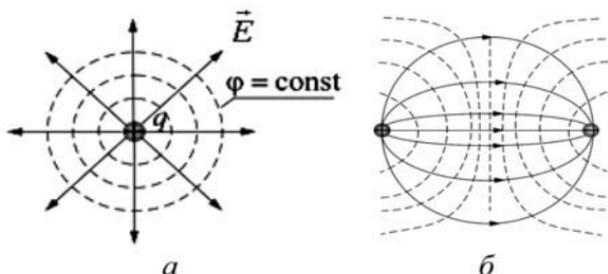


Рис. 1.3.3

ми эквипотенциальными поверхностями равна постоянной величине.

Формула  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$  выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям  $\phi$  найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т. е. по известным значениям  $\vec{E}$  в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом  $q$  при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть вычислена как

$$A_{12} = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

С другой стороны, работу можно представить в виде:

$$A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2).$$

Тогда

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру  $\phi_1 = \phi_2$  получим

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

т. е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности. Из обращения в нуль циркуляции вектора  $\vec{E}$  следует, что линии  $\vec{E}$  электростатического

поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах (*истоки*) и на отрицательных зарядах заканчиваются (*стоки*) или уходят в бесконечность (см. рис. 1.3.3).

Это соотношение верно только для электростатического поля. Впоследствии мы с вами выясним, что поле движущихся зарядов не является потенциальным и для него это соотношение не выполняется.

### 1.3.7. РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами.

РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ПОЛЯ,  
ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ  
ЗАРЯЖЕННЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Связь напряженности с потенциалом  $E = -\frac{d\varphi}{dl}$ .  
Тогда

$$d\varphi = -Edl, \quad (1.3.23)$$

где  $E = \sigma/\varepsilon_0$  — напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная в п. 1.2.5 с помощью теоремы Остроградского — Гаусса;  $\sigma = q/S$  — поверхностная плотность заряда.

Теперь, чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение (1.3.23):

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1) \quad \text{или} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \quad (1.3.24)$$

При  $x_1 = 0$  и  $x_2 = d$ :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \quad (1.3.25)$$

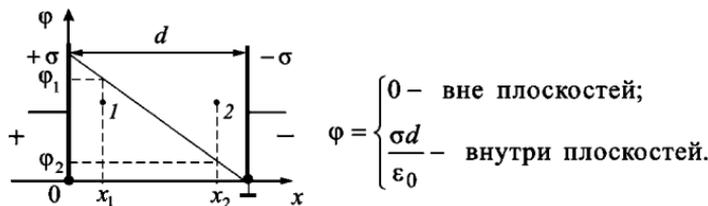


Рис. 1.3.4

На рисунке 1.3.4 изображена графическая зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния между плоскостями.

РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ПОЛЯ,  
ОБРАЗОВАННОГО ЗАРЯЖЕННОЙ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В п. 1.2.5 с помощью теоремы Остроградского — Гаусса была вычислена напряженность поля для бесконечного цилиндра. Воспользовавшись полученным результатом, найдем разность потенциалов для этой поверхности.

Так как  $d\varphi = -E dr$ , то  $\int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$ . Отсюда найдем разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.3.26)$$

На рисунке 1.3.5 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от  $r$ . (Здесь и далее  $E$  изображена сплошной линией, а  $\varphi$  — пунктирной.)

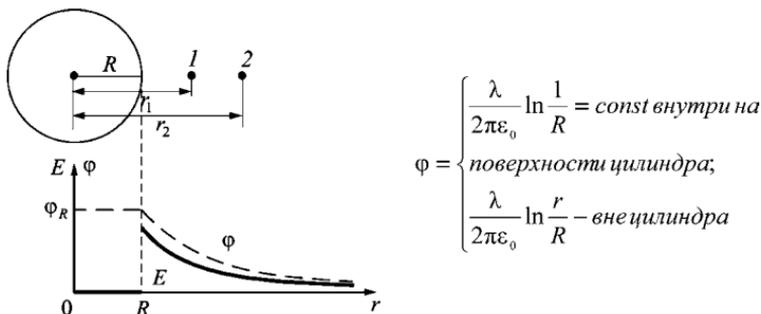


Рис. 1.3.5

РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕЖДУ  
ОБКЛАДКАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Проведя выкладки, как и в предыдущем случае, получим разность потенциалов, которая будет равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.3.27)$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем  $\varphi = \text{const}$ ,  $E = 0$ ; между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле, и  $\varphi$  и  $E$  равны нулю.

На рисунке 1.3.6 изображена зависимость напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от  $r$ .

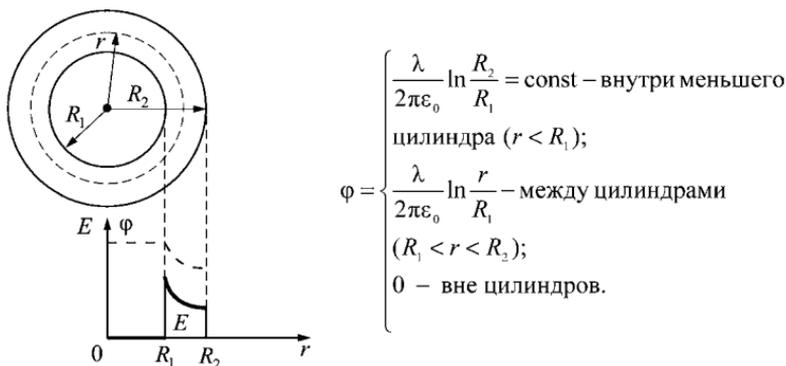


Рис. 1.3.6

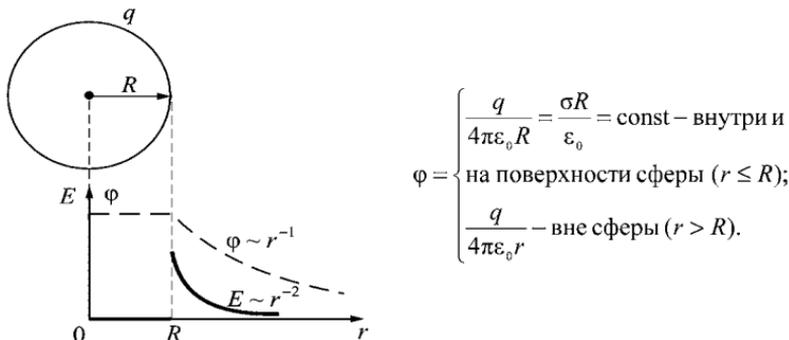


Рис. 1.3.7

РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ПОЛЯ,  
ОБРАЗОВАННОГО ЗАРЯЖЕННОЙ  
СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Напряженность поля сферы (рис. 1.3.7) определяется формулой

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как  $d\varphi = -E dr$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad \text{т. е. } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

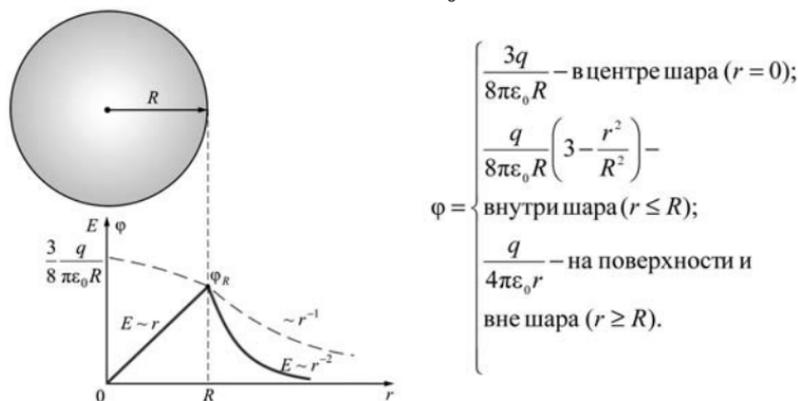
РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ ВНУТРИ  
РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ШАРА

Имеем диэлектрический шар (рис. 1.3.8), заряженный с объемной плотностью:

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$

Напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$



$$\varphi = \begin{cases} \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r=0); \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \\ \text{внутри шара } (r \leq R); \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \text{на поверхности и} \\ \text{вне шара } (r \geq R). \end{cases}$$

Рис. 1.3.8

Теперь найдем разность потенциалов внутри шара:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 E dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_1^2 r dr = - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\epsilon_0 2R^3}.$$

Отсюда находим потенциал шара.

Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы**:

- с помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать  $E$  и  $\varphi$  от различных заряженных поверхностей;
- напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность;
- потенциал поля — всегда непрерывная функция координат.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Какова связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля? Выведите ее и объясните. Каков физический смысл этих понятий?
2. Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?
3. Дайте определения потенциала данной точки электростатического поля и разности потенциалов двух точек поля. Каковы их единицы?
4. С помощью теоремы Остроградского — Гаусса рассчитайте и изобразите графически:
  - разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхностью;
  - разность потенциалов между обкладками конденсатора;
  - разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной сферической поверхностью;
  - \* разность потенциалов внутри равномерно заряженного шара.
5. По поверхности сферы радиусом 30 см распределен заряд 4 нКл. Чему равен потенциал в центре сферы?

## 1.4. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 1.4.1. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Все известные в природе вещества в соответствии с их способностью проводить электрический ток делятся на **три основных класса: диэлектрики, полупроводники и проводники**. Если *удельное сопротивление у проводников* равно  $\rho_{\text{пр}} = 10^{-8} - 10^{-6}$  Ом·м, то *у диэлектриков*  $\rho_{\text{д}} = 10^8 - 10^{18}$  Ом·м, а *полупроводники* занимают промежуточную область —  $\rho_{\text{д}} > \rho_{\text{п/п}} > \rho_{\text{пр}}$ .

В идеальном диэлектрике свободных зарядов, т. е. способных перемещаться на значительные расстояния (превосходящие расстояния между атомами), нет. Но это не значит, что диэлектрик, помещенный в электростатическое поле, не реагирует на него, что в нем ничего не происходит.

Любое вещество состоит из атомов, образованных положительными ядрами и отрицательными электронами. Поэтому в диэлектриках происходит *поляризация*.

*Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля называется поляризацией*. Способность к поляризации является основным свойством диэлектриков.

**Поляризация** диэлектрика включает составляющие — *электронную, ионную и ориентационную* (дипольную). На рисунке 1.4.1 проиллюстрированы механизмы этих видов поляризации.

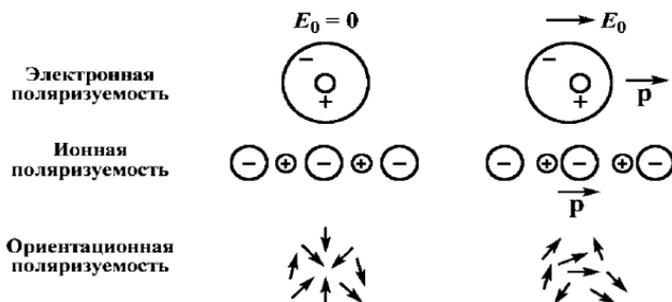


Рис. 1.4.1

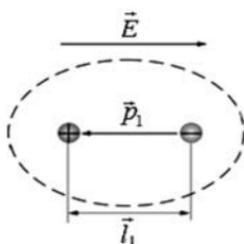


Рис. 1.4.2

Электронная поляризуемость обусловлена смещением электронной оболочки атома относительно ядра. Ионная поляризуемость вызвана смещением заряженных ионов по отношению к другим ионам. Ориентационная (дипольная) поляризуемость возникает, когда вещество состоит из молекул, обладающих постоянными электрическими дипольными моментами, которые могут более или менее свободно изменять свою ориентацию во внешнем электрическом поле.

Есть и другие виды поляризации. Главное в поляризации — смещение зарядов в электростатическом поле. В результате каждая молекула или атом образует электрический момент  $p$  (рис. 1.4.2):

Есть и другие виды поляризации. Главное в поляризации — смещение зарядов в электростатическом поле. В результате каждая молекула или атом образует электрический момент  $p$  (рис. 1.4.2):

$$p_1 = ql_1 \quad \text{или} \quad \vec{p}_1 = q\vec{l}_1. \quad (1.4.1)$$

Ясно, что электрический момент  $p$  пропорционален напряженности  $E$  — напряженности электростатического поля в месте нахождения молекулы, т. е. внутри вещества.

На рисунке 1.4.3 показан механизм поляризации некоторого объема диэлектрика.

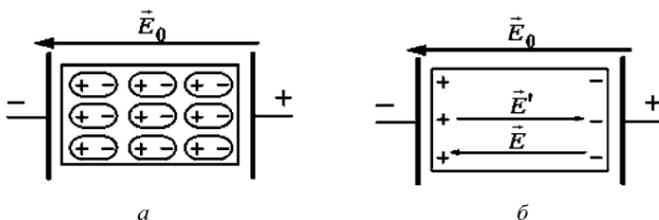


Рис. 1.4.3

Внутри диэлектрика электрические заряды диполей компенсируют друг друга. Но на внешних поверхностях диэлектрика, прилегающих к электродам, появляются заряды противоположного знака (поверхностно связанные заряды).

Пусть  $E'$  — электростатическое поле связанных зарядов. Оно направлено всегда против внешнего поля  $E_0$ .

Следовательно, *резльтирующее электростатическое поле внутри диэлектрика:*

$$E = E_0 - E'. \quad (1.4.2)$$

Итак, электростатическое поле внутри диэлектрика всегда меньше внешнего поля.

Поместим диэлектрик в виде параллелепипеда в электростатическое поле  $\vec{E}_0$  (рис. 1.4.4).

Электрический момент тела  $\vec{p}$  можно найти по формуле

$$\vec{p} = q\vec{l} = \sigma' S\vec{l} \quad \text{или} \quad p = \sigma' Sl \cos \varphi, \quad (1.4.3)$$

где  $\sigma'$  — поверхностная плотность связанных зарядов.

Введем новое понятие — **вектор поляризации**  $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\sum \vec{p}_k}{V}$  — **электрический момент единичного объема:**

$$\vec{P} = \sum_k^n \vec{p}_{1k} = n\vec{p}_1, \quad (1.4.4)$$

где  $n$  — концентрация молекул в единице объема;  $\vec{p}_1$  — электрический момент одной молекулы.

С учетом этого обстоятельства:

$$p = PV = PSl \cos \varphi \quad (1.4.5)$$

(так как  $V = Sl \cos \varphi$  — объем параллелепипеда).

Приравняем (1.4.3) и (1.4.5) и учтем, что  $P \cos \varphi = P_n$  — проекция  $\vec{P}$  на направление  $\vec{n}$  — вектора нормали.

Тогда

$$\sigma' = P_n. \quad (1.4.6)$$

**Поверхностная плотность поляризационных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации в данной точке поверхности.**

Отсюда следует, что **индуцированное в диэлектрике электростатическое поле  $E'$  будет влиять только на нормальную составляющую вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ .**

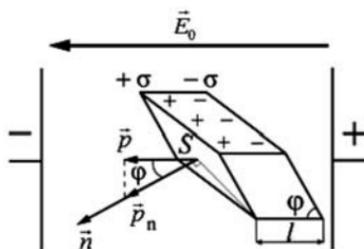


Рис. 1.4.4

Вектор поляризации можно представить так:

$$\vec{P} = n\vec{p}_1 = n\alpha\varepsilon_0\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \quad (1.4.7)$$

где  $\alpha$  — поляризуемость молекул;  $\chi = n\alpha$  — *диэлектрическая восприимчивость* — макроскопическая безразмерная величина, *характеризующая поляризацию единицы объема*.

Следовательно, и у результирующего поля  $\vec{E}$  изменяется по сравнению с  $\vec{E}_0$  только нормальная составляющая. Тангенциальная составляющая поля остается без изменения.

В векторной форме результирующее поле можно представить так:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (1.4.8)$$

*Результирующая электростатического поля в диэлектрике равна внешнему полю, деленному на диэлектрическую проницаемость среды  $\varepsilon$ :*

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (1.4.9)$$

*Величина  $\varepsilon = 1 + \chi$  характеризует электрические свойства диэлектрика. Физический смысл диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$  — величина, показывающая, во сколько раз электростатическое поле внутри диэлектрика меньше, чем в вакууме:*

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (1.4.10)$$

С учетом этого обстоятельства, при наличии диэлектрической среды, мы должны поправить все полученные нами в прошлых разделах формулы, например теорему Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{\sum q_k}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

или закон Кулона:

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

График зависимости напряженности поля шара от радиуса, с учетом диэлектрической проницаемости двух сред ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ), показан на рисунке 1.4.5.

Как видно из рисунка, напряженность поля  $\vec{E}$  изменяется скачком при переходе из одной среды  $\epsilon_1$  в другую  $\epsilon_2$ .

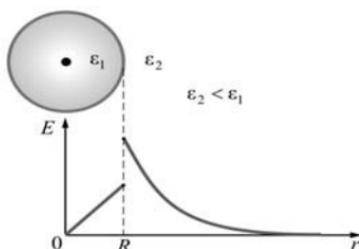


Рис. 1.4.5

### 1.4.2. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ДИЭЛЕКТРИКОВ

До сих пор мы рассматривали диэлектрики, которые приобретают электрический момент во внешнем электростатическом поле. Но есть и другие диэлектрики, например сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики.

#### СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

В 1920 г. была открыта *спонтанная* (самопроизвольная) *поляризация*. Сначала ее обнаружили у кристаллов сегнетовой соли ( $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), а затем и у других кристаллов. Всю эту группу веществ назвали *сегнетоэлектриками* (или *ферроэлектриками*). Детальное исследование диэлектрических свойств этих веществ было проведено в 1930–1934 гг. И. В. Курчатовым в Ленинградском физическом техникуме. Все сегнетоэлектрики обнаруживают резкую анизотропию свойств (сегнетоэлектрические свойства могут наблюдаться только вдоль одной из осей кристалла). У изотропных диэлектриков поляризация всех молекул одинакова, у анизотропных поляризация и, следовательно, вектор поляризации  $\vec{P}$  в разных направлениях разные. В настоящее время известно несколько сотен сегнетоэлектриков.

Рассмотрим *основные свойства сегнетоэлектриков*.

1. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  в некотором температурном интервале велика ( $\epsilon \sim 10^3 - 10^4$ ).

2. Значение  $\epsilon$  зависит не только от внешнего поля  $E_0$ , но и от предыстории образца.

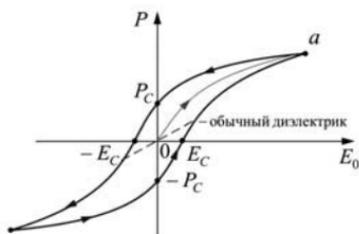


Рис. 1.4.6

ражена кривая поляризации сегнетоэлектрика — **петля гистерезиса**.

Здесь точка *a* — **состояние насыщения**.

При  $E_0 = 0$   $P \neq 0$ . Это говорит о том, что в кристаллах имеется **остаточная поляризованность**  $P_C$ ; чтобы ее уничтожить, необходимо приложить  $E_C$  — **коэрцитивную силу** противоположного направления.

4. Наличие точки Кюри — температуры, при которой сегнетоэлектрические свойства пропадают. При этой температуре происходит фазовый переход 2-го рода. (Например, для титанита бария она равна  $133^\circ\text{C}$ ; для сегнетовой соли —  $-18$ – $24^\circ\text{C}$ ; для дигидрофосфата калия —  $-150^\circ\text{C}$ ; для ниобата лития —  $1210^\circ\text{C}$ .)

Причиной сегнетоэлектрических свойств является самопроизвольная (спонтанная) поляризация, возникающая под действием особо сильного взаимодействия между частицами, образующими вещество.

Стремление к минимальной потенциальной энергии и наличие дефектов структуры приводят к тому, что сегнетоэлектрик разбит на **домены** (рис. 1.4.7). Без внешнего поля  $P$  электрический импульс кристалла равен нулю (рис. 1.4.7а).

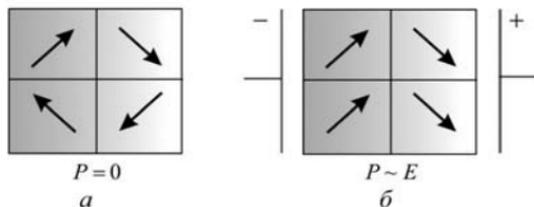


Рис. 1.4.7

3. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , а следовательно, и  $P$  нелинейно зависят от напряженности внешнего электростатического поля (**нелинейные диэлектрики**).

Это свойство называется **диэлектрическим гистерезисом**. На рисунке 1.4.6 изображена кривая поляризации сегнетоэлектрика — **петля гистерезиса**.

Во внешнем электростатическом поле домены ориентируются вдоль поля (рис. 1.4.7б).

Сегнетоэлектрики используются для изготовления многих радиотехнических приборов, например варикондов — конденсаторов с изменяемой емкостью.

Среди диэлектриков есть вещества, называемые *электреты*, — это диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электростатического поля.

Электреты являются формальными аналогами постоянных магнитов, создающих вокруг себя магнитное поле. Принципиальная возможность получения таких материалов была предсказана Фарадеем. Термин «электрет» был предложен Хевисайдом в 1896 г. по аналогии с английским «magnet» — постоянный магнит, а первые электреты получены японским исследователем Егучи в 1922 г. Егучи охладил в сильном электрическом поле расплав карнаубского воска и канифоли. Электрическое поле сориентировало полярные молекулы, и после охлаждения материал остался в поляризованном состоянии. Для уточнения технологии такие материалы называют *термоэлектретами*.

#### ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКИ

Некоторые диэлектрики поляризуются не только под действием электростатического поля, но и под действием механической деформации. Это явление называется *пьезоэлектрическим эффектом*.

Явление открыто братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 г.

Если на грани кристалла наложить металлические электроды (обкладки), то при деформации кристалла с помощью силы  $\vec{F}$  на обкладках возникнет разность потенциалов. Если замкнуть обкладки, то потечет ток.

Продемонстрировать пьезоэффект можно рисунком 1.4.8.

Сейчас известно более 1800 пьезокристаллов. Все сегнетоэлектрики обладают пьезоэлектрическими свойствами.

Возможен и обратный пьезоэлектрический эффект. Возникновение поляризации сопровождается механическими

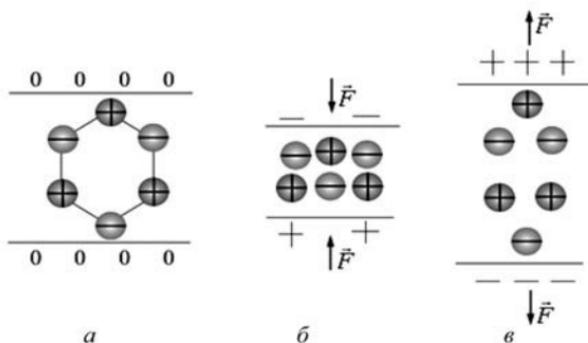


Рис. 1.4.8

деформациями. Если на пьезоэлектрический кристалл подать напряжение, то возникнут механические деформации кристалла, причем деформации будут пропорциональны приложенному электростатическому полю  $E_0$ .

#### ПИРОЭЛЕКТРИКИ

Кроме сегнетоэлектриков, спонтанно поляризованными диэлектриками являются *пироэлектрики* (от греч. *pyr* — огонь). Пироэлектрики — это кристаллические диэлектрики, обладающие спонтанной электрической поляризацией во всей температурной области, вплоть до температуры плавления.

*Пироэлектричество* — появление электрических зарядов на поверхности некоторых кристаллов при их нагревании или охлаждении. При нагревании один конец диэлектрика заряжается положительно, а при охлаждении он же — отрицательно. Появление зарядов связано с изменением существующей поляризации при изменении температуры кристаллов. Типичный пироэлектрик — турмалин.

Все пироэлектрики являются пьезоэлектриками, но не наоборот. Некоторые пироэлектрики обладают сегнетоэлектрическими свойствами. Из сказанного следует, что понятие «пироэлектрик» является более общим, чем «сегнетоэлектрик». Можно сказать, что сегнетоэлектрики есть пироэлектрики с восстанавливаемой внешним полем поляризацией.

В пьезоэлектриках *поляризация  $P$  линейно зависит* от величины внешнего электростатического поля  $E_0$ , т. е. пьезоэлектрики являются *линейными диэлектриками*.

В качестве примеров использования различных диэлектриков можно привести следующие:

- сегнетоэлектрики — электрические конденсаторы, ограничители предельно допустимого тока, запоминающие устройства;
- пьезоэлектрики — генераторы ВЧ и пошаговые моторы, микрофоны, наушники, датчики давления, частотные фильтры, пьезоэлектрические адаптеры;
- пьезоэлектрики — детекторы ИК-излучения, болометры (датчики инфракрасного излучения), электрооптические модуляторы.

#### 1.4.3. ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ $\vec{D}$

Имеем границу раздела двух сред с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , так что  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (рис. 1.4.9а).

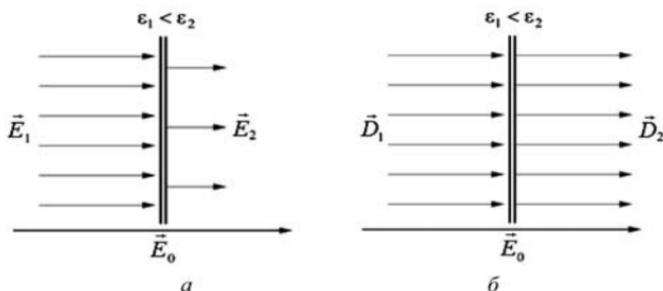


Рис. 1.4.9

Как было показано, в соответствии с (1.4.5):

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad \text{или} \quad E_1 = E_2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т. е. напряженность электростатического поля  $E$  изменяется скачком при переходе из одной среды в другую.

Главная задача электростатики — расчет электрических полей, т. е.  $\vec{E}$  в различных электрических аппаратах,

кабелях, конденсаторах и т. д. Эти расчеты сами по себе непросты, наличие разного сорта диэлектриков и проводников еще больше усложняет задачу.

Для упрощения расчетов была введена новая векторная величина — **вектор электрического смещения** (*электрическая индукция*):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (1.4.11)$$

Из предыдущих рассуждений  $\vec{E}_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$ . Тогда  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2$ . Отсюда

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (1.4.12)$$

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  остается неизменным при переходе из одной среды в другую (рис. 1.4.9б), и это облегчает расчет  $\vec{D}$ .

Зная  $\vec{D}$  и  $\varepsilon$ , легко рассчитать  $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ :

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Отсюда можно записать

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.4.13)$$

где  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$  — вектор поляризации;  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость среды, характеризующая поляризацию единичного объема среды.

Таким образом, вектор  $\vec{D}$  есть сумма (линейная комбинация) двух векторов различной природы:  $\vec{E}$  — главной характеристики поля и  $\vec{P}$  — поляризации среды.

В СИ  $[D] = [E] \cdot [\varepsilon_0] = \frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ , т. е. это заряд, протекающий через единицу поверхности.

Для точечного заряда в вакууме  $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ .

Для  $\vec{D}$  имеет место принцип суперпозиции, как и для  $\vec{E}$ , т. е.

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{D}_k.$$

#### 1.4.4. ПОТОК ВЕКТОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА ДЛЯ $\vec{D}$

Аналогично потоку для вектора  $\vec{E}$  ( $\Phi_E = \int_S \vec{E}_n dS$ ) мож-

но ввести понятие потока для вектора  $\vec{D}$  ( $\Phi_D$ ). Пусть произвольную площадку  $S$  пересекают линии вектора электрического смещения  $\vec{D}$  под углом  $\alpha$  к нормали  $\vec{n}$  (рис. 1.4.10):

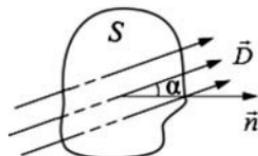


Рис. 1.4.10

$$\Phi_D = \int_S \vec{D}_n dS.$$

В однородном электростатическом поле  $\Phi_D = DS \cos \alpha = D_n S$ .

Теорему Остроградского — Гаусса для вектора  $\vec{D}$  получим из теоремы Остроградского — Гаусса для вектора  $\vec{E}$ :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Так как

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon},$$

то

$$\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \oint_S D_n dS = \frac{\sum q_k}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

**Теорема Остроградского — Гаусса для  $\vec{D}$ :**

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D}_n dS = \sum q_k. \quad (1.4.14)$$

Поток вектора  $\vec{D}$  через любую замкнутую поверхность определяется только свободными зарядами, а не всеми зарядами внутри объема, ограниченного данной поверхностью. Это позволяет не рассматривать связанные (поляризованные) заряды, влияющие на  $\vec{E}$ , и упрощает решение многих задач. В этом смысл введения вектора  $\vec{D}$ .

### 1.4.5. ИЗМЕНЕНИЕ $\vec{E}$ И $\vec{D}$ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Рассмотрим простой случай (рис. 1.4.11): два бесконечно протяженных диэлектрика с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , имеющих общую границу раздела, пронизывает внешнее электростатическое поле  $\vec{E}_0$ .

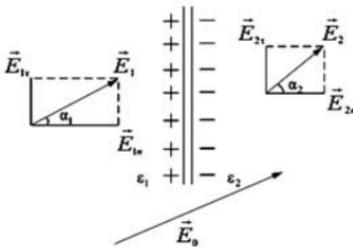


Рис. 1.4.11

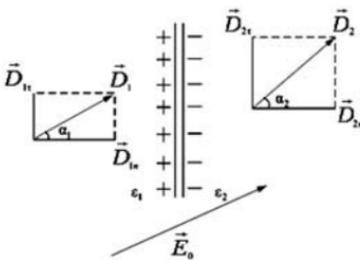


Рис. 1.4.12

Пусть  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ .

Из п. 1.4.3 мы знаем, что

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{ и } E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Образовавшиеся поверхностные заряды изменяют только *нормальную составляющую*  $\vec{E}$ , а тангенциальная составляющая остается постоянной (рис. 1.4.11):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{2n} E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т. е. направление вектора  $\vec{E}$  изменяется. **Это закон преломления вектора напряженности электростатического поля.**

Рассмотрим изменение вектора  $\vec{D}$  и его проекций —  $D_n$  и  $D_\tau$  (рис. 1.4.12).

Так как  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ , то имеем:

$$D_{1n} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}; \quad D_{2n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n};$$

$$\frac{D_{1n}}{D_{2n}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n}}{\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_0 \epsilon_2 \epsilon_1} = 1,$$

т. е.  $D_{1n} = D_{2n}$  — нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  не изменяется;

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1\tau}}{\epsilon_2 \epsilon_0 E_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2},$$

$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора  $\vec{D}$  увеличивается в  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$  раз;

вектор  $\vec{E}$  преломляется так, что  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ .

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{2\tau} D_{1n}}{D_{2n} D_{1\tau}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (1.4.15)$$

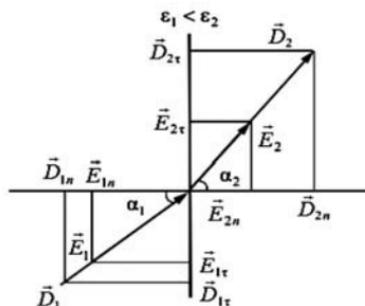


Рис. 1.4.13

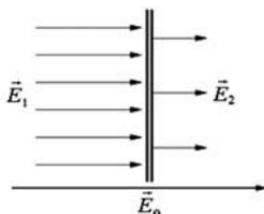
Это закон преломления вектора  $\vec{D}$ .

Проиллюстрируем на рисунке 1.4.13 закон преломления для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ .

Как видно из рисунка, при переходе из одной диэлектрической среды в другую вектор  $\vec{D}$  преломляется на тот же угол, что и  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ ). Входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  удаляются от нормали.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое поляризованность?
2. Что показывает диэлектрическая проницаемость среды?
3. Выведите связь между диэлектрической восприимчивостью вещества и проницаемостью среды.
4. В чем различие поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами?
5. Есть ли свободные заряды в идеальном диэлектрике?
6. Какие виды поляризуемости вы знаете?
7. Назовите три основных класса веществ в соответствии с их способностью проводить электрический ток.
8. Поясните нижеприведенный рисунок и укажите, где диэлектрическая проницаемость больше при построении рисунка.



9. Как определяется вектор электрического смещения? Что он характеризует?
10. Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля в диэлектрике.
11. Выведете и прокомментируйте условия для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух диэлектрических сред.
12. Сформулируйте закон преломления для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ .

## 1.5. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 1.5.1. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПРОВОДНИКЕ

В проводниках имеются электрически заряженные частицы — носители заряда (электроны в металлах, ионы в электролитах), способные перемещаться по всему объему проводника под действием внешнего электростатического поля. В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением твердых металлических проводников.

Носителями заряда в металлах являются электроны проводимости. Они возникают при конденсации паров металла за счет обобществления валентных электронов.

При отсутствии электростатического поля металлический проводник является электрически нейтральным — электростатическое поле, создаваемое положительными и отрицательными зарядами внутри него, компенсируется.

При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле электроны проводимости перемещаются (перераспределяются) до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не скомпенсирует внешнее поле.

Итак, *в любой точке внутри проводника*, находящегося в электростатическом поле,  $\vec{E} = 0$ ;  $d\varphi = 0$ , т. е.  $\varphi = \text{const}$ , в идеальном проводнике диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\text{ме}} \rightarrow \infty$ .

На поверхности проводника напряженность  $\vec{E}$  (рис. 1.5.1) должна быть направлена по нормали к этой поверхности, иначе под действием составляющей  $E_{\tau}$ , касательной к поверхности, заряды перемещались бы по провод-

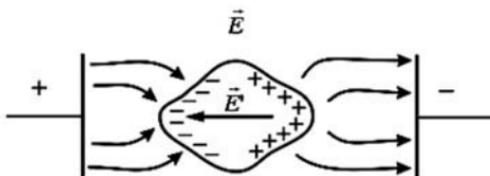


Рис. 1.5.1

нику, а это противоречило бы их статическому распределению.

Вне заряженного проводника поле есть, следовательно, должен быть вектор  $\vec{E}$ , и направлен он перпендикулярно поверхности.

Итак, в установившемся состоянии в проводнике, помещенном в электростатическое поле, имеем:

- появление у заряженной поверхности на металле заряда противоположного знака — **электростатическая индукция**. Этот процесс очень краток ( $\sim 10^{-8}$  с);
- **электростатическое экранирование** — *внутри проводника поле не проникает*;
- *во всех точках внутри проводника  $E = 0$ , а во всех точках на поверхности проводника  $E = E_n$  ( $E_\tau = 0$ )*;
- *весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле, эквипотенциален.*

Действительно, в любой точке внутри проводника

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E = 0, \text{ следовательно, } \varphi = \text{const.}$$

Поверхность проводника тоже эквипотенциальна:  $\varphi_{\text{пов}} = \text{const}$ , так как

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_\tau = 0;$$

- потенциал **на поверхности проводника** равен потенциалу внутри проводника;
- *в заряженном проводнике **некомпенсированные заряды** располагаются только на поверхности (их расталкивают кулоновские силы).*

Можно доказать последнее утверждение формально: проведем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность  $S$ , ограничив некоторый объем внутри проводни-

ка. Тогда согласно теореме Остроградского — Гаусса, так как  $E = 0$ , суммарный заряд  $q$  этого объема равен нулю:

$$q = \int_S D dS = \int_S E \epsilon \epsilon_0 dS = 0.$$

### 1.5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА

Выделим на поверхности  $S$  проводника площадку  $dS$  и построим на ней цилиндр с образующими, перпендикулярными к площадке  $dS$ , высотой  $dl$  (рис. 1.5.2):

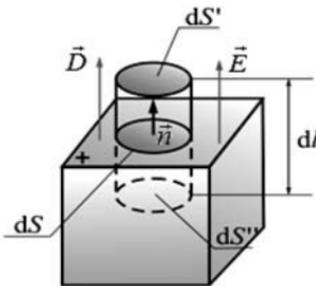


Рис. 1.5.2

$$dS' = dS'' = dS.$$

На поверхности проводника вектор напряженности поля  $\vec{E}$  и вектор электрического смещения  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  перпендикулярны поверхности. Поэтому поток  $\vec{D}$  сквозь боковую поверхность равен нулю.

Поток вектора электрического смещения  $\Phi_D$  через  $dS''$  тоже равен нулю, так как  $dS''$  лежит внутри проводника, где  $\vec{E} = 0$  и, следовательно,  $\vec{D} = 0$ . Отсюда следует, что поток  $d\Phi_D$  сквозь замкнутую поверхность равен потоку  $\vec{D}$  через  $dS'$ :

$$d\Phi_D = D_n dS.$$

С другой стороны, по теореме Остроградского — Гаусса:

$$d\Phi_D = dq = \sigma dS,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность зарядов на  $dS$ .

Из равенства правых частей следует, что  $D_n = \sigma$ .

Тогда

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.5.1)$$

Итак, напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов.

Были рассмотрены поля, создаваемые плоскостью, цилиндром, шаром, и везде получили, что  $E \sim \sigma$ . Этот вывод является общим, так как произвольные поверхности есть комбинации указанных выше простейших поверхностей.

### 1.5.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА НА ПРОВОДНИКЕ

Проверим экспериментально сделанные нами выводы.

1. *Заряженный кондуктор* (рис. 1.5.3).

В местах разной напряженности электростатического поля лепестки бумажки расходятся по-разному: на поверхности 1 — максимальное расхождение, на поверхности 2 заряд распределен равномерно ( $q = \text{const}$ ) и на ней имеем одинаковое расхождение лепестков. На поверхности 3 (внутри кондуктора) зарядов нет и лепестки не расходятся.

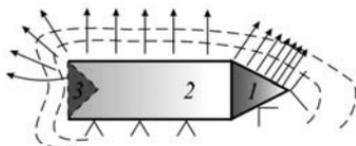


Рис. 1.5.3

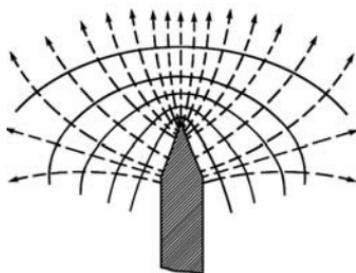


Рис. 1.5.4

Из рисунка 1.5.4 видно, что напряженность электростатического поля максимальна на острие заряженного проводника.

2. *Стекание электростатических зарядов с острия.*

Большая напряженность поля  $E$  на остриях — нежелательное явление, так как происходит утечка зарядов и ионизация воздуха. Ионы уносят электрический заряд, образуется как бы «электрический ветер» («огни святого Эльма»).

Есть наглядные эксперименты по этому явлению: сдувание пламени свечи электрическим ветром (см. рис. 1.5.5), колесо Франклина, или вертушка (рис. 1.5.6). На этом принципе построен электростатический двигатель.

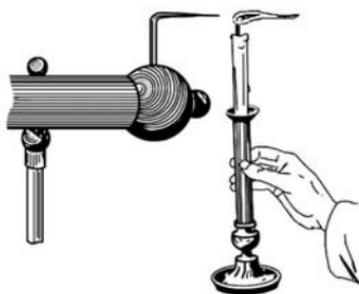


Рис. 1.5.5

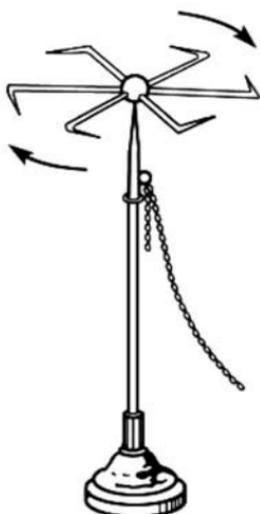


Рис. 1.5.6

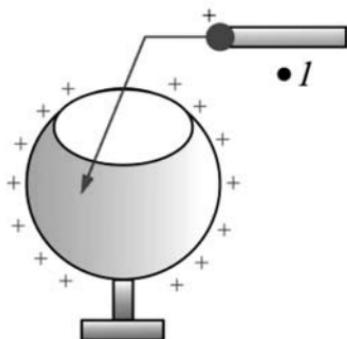


Рис. 1.5.7

### 3. Электростатический генератор.

Если заряженный металлический шарик привести в соприкосновение с поверхностью какого-либо проводника, то заряд шарика частично передается проводнику: шарик будет разряжаться до тех пор, пока их потенциалы не выравняются. Иначе обстоит дело, если шарик привести в соприкосновение с внутренней поверхностью полого проводника. При этом весь заряд с шарика стечет на проводник и распределится на внешней поверхности проводника (рис. 1.5.7).

Потенциал полого проводника может быть больше, чем потенциал шарика, тем не менее заряд с шарика стечет полностью. В точке 1 потенциал шарика меньше потенциала проводника ( $\varphi_{\text{ш}} < \varphi_{\text{пр}}$ ), но пока мы переносили шарик в полость, мы совершили работу по преодолению сил отталкивания и тем самым, увеличивая потенциальную энергию, увеличили потенциал шарика, т. е. когда мы вносим шарик, потенциал его становится больше, и заряд, как обычно, перетекает от большего потенциала к меньшему. Переноса с помощью шарика следующую порцию заряда,

мы совершаем еще бо2льшую работу. Это наглядный пример того, что потенциал — энергетическая характеристика. На этом принципе построен электростатический генератор Ван-де-Граафа.

В 1931 г. Роберт Ван-де-Грааф — американский ученый-физик — запатентовал высоковольтный *электростатический ускоритель*, принцип действия которого разработал в 1929 г., а в 1932–1933 гг. спроектировал и построил генератор с диаметром сферы 4,5 м. В 1936 г. он построил самый большой из традиционных генераторов постоянного напряжения.

Устройство *электростатического генератора Ван-де-Граафа* показано на рисунке 1.5.8.

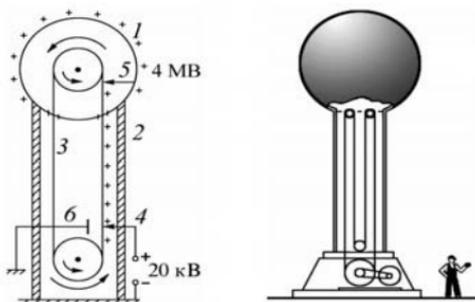


Рис. 1.5.8

Зарядное устройство 4 заряжает ленту транспортера 3 положительными зарядами. Лента переносит их вовнутрь металлической сферы 5, где происходит съем этих зарядов. Далее они стекают на внешнюю поверхность 1. Так, на поверхности сферы можно получить потенциал относительно земли в несколько миллионов вольт. Ограничением является ток утечки. Такие генераторы существуют в настоящее время. Например, в Массачусетском технологическом институте построен генератор с диаметром сферы 4,5 м и получен потенциал  $3-5 \cdot 10^6$  В.

В НИИ ядерной физики Томского политехнического университета имеется около десяти ускорителей различного класса. Один из них — ЭСГ, или генератор Ван-де-Граафа. Он изготовлен в специальной башне, и на нем был получен потенциал один миллион вольт.

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. Каковы напряженность и потенциал поля, а также распределение зарядов внутри и на поверхности заряженного проводника?
2. На чем основана электростатическая защита?
- 3.\* В однородном электростатическом поле заряд переносят из точки  $A$  в точку  $B$ . Сравните работу сил электростатического поля при переносе заряда из одной точки в другую вдоль различных траекторий.
4. Чему равна работа по перемещению зарядов вдоль эквипотенциальной поверхности?
5. Докажите, что в каждой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности электростатического поля ей перпендикулярен.
6. Нарисуйте линии напряженности и сечения эквипотенциальных поверхностей: а) для отрицательного точечного заряда; б) для двух одинаковых по модулю разноименных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга.
- 7.\* Электростатическое поле создано неподвижным положительным зарядом  $q_1$ . На некотором расстоянии от него расположили другой положительный заряд  $q_2$  ( $q_1 < q_2$ ). Увеличится или уменьшится при этом потенциал поля в точке  $A$ ; напряженность поля в точке  $A$ ?
8. Что такое электростатическое экранирование? Приведите пример экранирования.
9. Какова разность потенциалов между любой точкой на поверхности проводящего заряженного шара и любой точкой внутри шара?
10. Коснувшись пробным шариком внутренней поверхности заряженного полого металлического стакана, стрелка электрометра не отклоняется. Коснувшись же внешней поверхности — отклоняется. Поясните результаты данного опыта.
11. Почему вектор напряженности электростатического поля на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности?
12. На рисунке 1.5.3 изображен заряженный цилиндрический проводник с коническим выступом с одной стороны и впадиной — с другой. Пробный шарик на изолирующей ручке соединен проволокой с электрометром. Сравните показания прибора при перемещении шарика по цилиндрической, конической и внутренней поверхностям проводника. Объясните.
13. Имеется цилиндр из металлической сетки на изолирующей подставке. Внутренняя поверхность сетки соединена с одним электроскопом, наружная — с другим. Если сетку зарядить (например, натертой стеклянной палочкой), то листочки на электроскопе внутри сетки не расходятся, а листочки другого электроскопа расходятся. Поясните этот опыт.

## 1.6. КОНДЕНСАТОРЫ

### 1.6.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

При сообщении проводнику заряда на его поверхности появляется потенциал  $\varphi$ , но если этот же заряд сообщить другому проводнику, то потенциал будет другой. Это зависит от геометрических параметров проводника. Но в любом случае потенциал  $\varphi$  пропорционален заряду  $q$ :

$$q = C\varphi. \quad (1.6.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  называют *электроемкостью* — физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (1.6.2)$$

Единица измерения емкости в СИ — фарада;  $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл}/1 \text{ В}$ .

Если потенциал поверхности шара:

$$\varphi_{\text{шар}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}, \quad (1.6.3)$$

то

$$C_{\text{шар}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (1.6.4)$$

По этой формуле можно рассчитать емкость Земли. Если диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 1$  (воздух, вакуум) и  $R = R_{\text{Земли}}$ , то имеем, что  $C_3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$ , или  $700 \text{ мкФ}$ .

Чаще на практике используют более мелкие единицы емкости:  $1 \text{ нФ}$  (нанофарада) =  $10^{-9} \text{ Ф}$  и  $1 \text{ пкФ}$  (пикофарада) =  $10^{-12} \text{ Ф}$ .

Необходимость в устройствах, накапливающих заряд, есть, а уединенные проводники обладают малой емкостью. Опытным путем было обнаружено, что электроемкость проводника увеличивается, если к нему поднести другой проводник, за счет явления электростатической индукции.

**Конденсатор** — это устройство для накопления заряда и энергии электрического поля. Состоит из двух проводников в форме пластин, называемых *обкладками*, разделенных диэлектриком. Толщина диэлектрика мала по сравнению с размерами пластин (рис. 1.6.1).

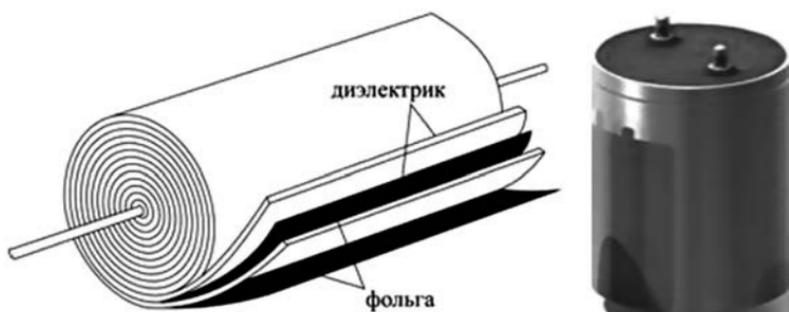


Рис. 1.6.1

Конструкция такова, что внешние, окружающие конденсатор тела, не оказывают влияния на его электроемкость. Это будет выполняться, если электростатическое поле будет сосредоточено внутри конденсатора, между обкладками.

Конденсаторы бывают плоские, цилиндрические и сферические.

Так как электростатическое поле находится внутри конденсатора, то линии электрического смещения начинаются на положительной обкладке, заканчиваются на отрицательной и никуда не исчезают. Следовательно, заряды на обкладках *противоположны по знаку, но одинаковы по величине*.

Емкость конденсатора равна отношению заряда к разности потенциалов между обкладками конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (1.6.5)$$

Помимо емкости, каждый конденсатор характеризуется  $U_{\text{раб}}$  (или  $U_{\text{пр}}$ ) — максимальное допустимое напряжение, выше которого происходит пробой между обкладками конденсатора.

### 1.6.2. СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

**Емкостные батареи** — комбинации параллельных и последовательных соединений конденсаторов (рис. 1.6.2, 1.6.3).

1. **Параллельное соединение конденсаторов** (рис. 1.6.2).

В данном случае общим является напряжение  $U$ :

$$q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U.$$

Суммарный заряд:

$$q = q_1 + q_2 = U(C_1 + C_2).$$

Результирующая емкость:

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2.$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов суммарная емкость:

$$C = \sum_k C_k.$$

Общая емкость больше самой большой емкости, входящей в батарею.

Сравните с параллельным соединением сопротивлений  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

2. **Последовательное соединение конденсаторов** (рис. 1.6.3).

Общим является заряд  $q$ :

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2};$$

$$U = \sum_k U_k = q \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.6.6)$$

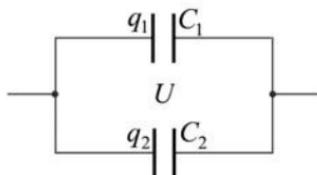


Рис. 1.6.2

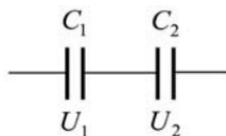


Рис. 1.6.3

Сравните с последовательным соединением сопротивлений  $R$ :

$$R = R_1 + R_2.$$

Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов *общая емкость меньше самой маленькой емкости*, входящей в батарею:

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}.$$

### 1.6.3. РАСЧЕТ ЕМКОСТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ КОНДЕНСАТОРОВ

Получим формулы для расчета емкостей плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов.

#### ЕМКОСТЬ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

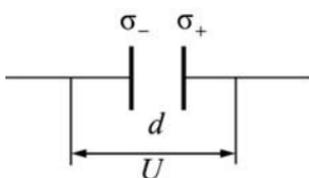


Рис. 1.6.4

Напряженность поля внутри конденсатора (рис. 1.6.4) равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Напряжение между обкладками равно

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d, \quad (1.6.7)$$

где  $d = x_2 - x_1$  — расстояние между пластинами.

Так как заряд  $q = \sigma S$ , то

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}. \quad (1.6.8)$$

Как видно из формулы, диэлектрическая проницаемость вещества очень сильно влияет на емкость конденсатора. Это можно увидеть и экспериментально: заряжаем электроскоп, подносим к нему металлическую пластину — получили конденсатор (за счет электростатической индукции потенциал увеличился). Если внести между пла-

стинами диэлектрик с  $\epsilon$  больше, чем у воздуха, то емкость конденсатора увеличится.

#### ЕМКОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора, изображенного на рисунке 1.6.5, может быть рассчитана по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где  $\lambda$  — линейная плотность заряда;  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы цилиндрических обкладок;  $l$  — длина конденсатора;  $q = \lambda l$ .

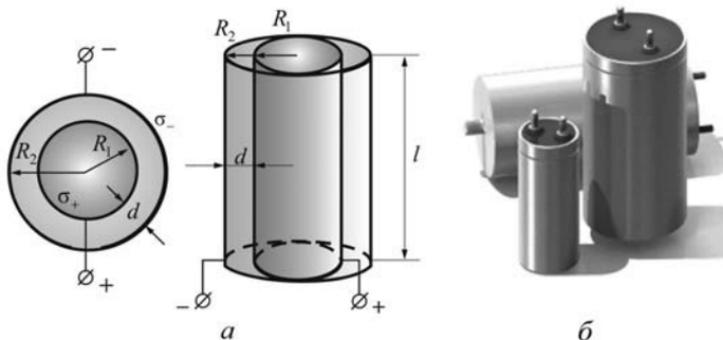


Рис. 1.6.5

Тогда, так как  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получим

$$C_{\text{цил}} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.6.9)$$

Понятно, что зазор между обкладками мал:  $d = R_2 - R_1$ , т. е.  $d \ll R_1$ .

Тогда

$$\ln \frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2 - R_1}{R_1};$$

$$C_{\text{цил}} \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l R_1}{R_2 - R_1} = \epsilon_0\epsilon \frac{S}{d}. \quad (1.6.10)$$

ЕМКОСТЬ ШАРОВОГО  
КОНДЕНСАТОРА (РИС. 1.6.6)

Из п. 3.6 мы знаем, что разность потенциала между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Тогда, так как  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получим

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

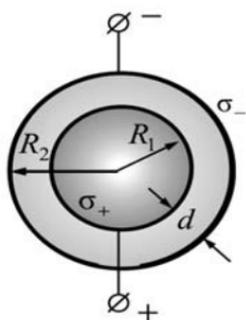


Рис. 1.6.6

Это емкость шарового конденсатора, где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы шаров.

В шаровом конденсаторе  $R_1 \approx R_2$ ,  $S = 4\pi R^2$ ,  $R_2 - R_1 = d$  — расстояние между обкладками.

Тогда

$$C_{\text{шар}} \approx \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2}{d} = \epsilon_0\epsilon \frac{S}{d}. \quad (1.6.11)$$

Таким образом, емкость шарового конденсатора с достаточной степенью точности можно рассчитать так же, как и емкость плоского и цилиндрического конденсаторов.

#### 1.6.4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В пределах электростатики невозможно дать ответ на вопрос, где сосредоточена энергия конденсатора. Поля и заряды, их образовавшие, не могут существовать обособленно. Их не разделить. Однако переменные поля могут существовать независимо от возбуждавших их зарядов (излучение Солнца, радиоволны...), и они переносят энергию. Эти факты заставляют признать, что *носителем энергии является электростатическое поле*.

При перемещении электрических зарядов силы кулоновского взаимодействия совершают определенную работу  $\delta A$ . Работа, совершенная системой, определяется убылью энергии взаимодействия  $-dW$  зарядов:

$$\delta A = -dW. \quad (1.6.12)$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов ( $q_1$  и  $q_2$ ), находящихся на расстоянии  $r_{12}$ , численно равна работе по перемещению заряда  $q_1$  в поле неподвижного заряда  $q_2$  из точки с потенциалом  $\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  в точку с потенциалом  $\varphi_1 + d\varphi_1$ :

$$\delta A = -q_1 d\varphi_1 = -d\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = -dW;$$

$$W = q_1 \varphi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + W_0.$$

Будем считать аддитивную постоянную  $W_0$  равной нулю. В этом случае  $W$  может быть и отрицательной величиной, если ( $q_1$  и  $q_2$ ) — заряды противоположного знака.

Аналогично можно рассчитать энергию двух зарядов, рассмотрев перемещение заряда  $q_2$  в поле неподвижного заряда  $q_1$  из точки с потенциалом  $\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  в точку с потенциалом  $\varphi_2 + d\varphi_2$ :

$$\delta A = -q_2 d\varphi_2 = -d\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\right) = -dW;$$

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (1.6.13)$$

Удобно записать энергию взаимодействия двух зарядов в симметричной форме:

$$W = \frac{1}{2}(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (1.6.14)$$

Взаимная энергия системы  $n$  зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \frac{q_k q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ki}} \quad (k \neq i). \quad (1.6.15)$$

Данная формула справедлива лишь в случае, если расстояние между зарядами заметно превосходит размеры самих зарядов.

**Рассчитаем энергию заряженного конденсатора.** Конденсатор состоит из двух первоначально незаряженных пластин. Будем постепенно отнимать у нижней

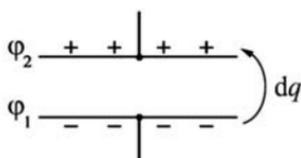


Рис. 1.6.7

пластины заряд  $dq$  и переносить его на верхнюю пластину (рис. 1.6.7).

В результате между пластинами возникнет разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$ . При переносе каждой порции заряда совершается элементарная работа:

$$\delta A = -dq(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Воспользовавшись определением емкости  $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ , получаем

$$\delta A = \frac{q dq}{C}.$$

Общая работа, затраченная на увеличение заряда пластин конденсатора от 0 до  $q$ , равна

$$A = \int_0^q \delta A = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.6.16)$$

При вычислении интеграла учтено, что емкость  $C$  не зависит от  $q$  и  $\varphi$ . Величина полной работы  $A$  равна энергии, запасенной конденсатором:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{qU}{2}. \quad (1.6.17)$$

Эту энергию можно также записать в виде

$$W = \frac{1}{2}C(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2}CU^2. \quad (1.6.18)$$

Запасание энергии конденсатором наглядно проявляется при его подключении к электрической лампочке. Лампочка вспыхивает и гаснет при разрядке конденсатора (рис. 1.6.8).

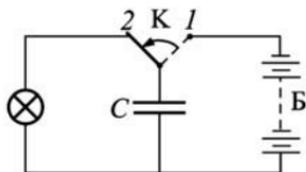


Рис. 1.6.8

Вспомним понятие **пндермоторные силы** — силы электрического взаимодействия между пластинами конденсатора (п. 1.2.4). Эту силу можно вычислить через энергию взаимодействия.

При незначительном перемещении одной пластины в поле другой совершается работа:

$$\delta A = -dW = Fdx.$$

Отсюда

$$F = -\frac{dW}{dx}.$$

Продифференцируем выражение для энергии конденсатора (1.6.17) и, подставив значение емкости конденсатора  $C$ , получим

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Модуль этого выражения дает величину **пондермоторной** силы:

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (1.6.19)$$

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Три одинаковых конденсатора один раз соединены последовательно, другой — параллельно. Во сколько раз и когда емкость батареи будет больше?
2. Может ли электростатика ответить на вопрос: где локализована энергия и что является ее носителем — заряды или поле? Почему?
3. Чему равна емкость (в мкФ) конденсатора, если при увеличении его заряда на 30 мкКл разность потенциалов между пластинами увеличивается на 10 В?
4. Во сколько раз увеличится емкость плоского конденсатора, если площадь пластин увеличить в 8 раз, а расстояние между ними уменьшить в 2 раза?
5. Плоский воздушный конденсатор присоединен к источнику напряжения с ЭДС 200 В. На сколько уменьшится напряженность (в кВ/м) электрического поля в конденсаторе, если расстояние между пластинами увеличить от 1 до 2 см?
6. С каким ускорением поднимается вертикально вверх пылинка массой  $10^{-7}$  г, несущая заряд 1,77 пКл, в плоском конденсаторе с поверхностной плотностью заряда на обкладках  $6$  нКл/м<sup>2</sup>?
7. С какой силой (в мН) притягиваются друг к другу обкладки плоского воздушного конденсатора? Заряд конденсатора 6 мкКл, напряженность поля в конденсаторе 3 кВ/м.
8. Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение 300 В каждый, но имеющие различные емкости 500 и

- 300 пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?
9. \* Одну пластину незаряженного конденсатора, обладающего емкостью 1 нФ, заземляют, а другую присоединяют длинным тонким проводом к удаленному проводящему шару радиусом 20 см, имеющему заряд 92 мкКл. Какой заряд (в мкКл) останется на шаре?
  10. \* Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?
  11. \* Два конденсатора, емкость одного из которых в 4 раза больше, чем емкость другого, соединили последовательно и подключили к источнику напряжения с ЭДС 75 В. Затем заряженные конденсаторы отключили от источника и друг от друга и соединили параллельно. Чему будет равно после этого напряжение на конденсаторах?

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ГРАВИТАЦИОННОГО  
И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ

Т а б л и ц а 1

Сравнительные характеристики	Виды полей	
	Гравитационное	Электростатическое
Масса, заряд	$m$	$q$
Сила	$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$	$F = k_0 \frac{qQ}{r^2}$
Напряженность поля	$G = \gamma \frac{M}{r^2}$	$E = k_0 \frac{Q}{r^2}$
Связь напряженности с силой	$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$	$E = \frac{\vec{F}}{q}$
Принцип суперпозиции	$\vec{G} = \sum \vec{G}_i$	$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$
Потенциал поля	$\varphi = \gamma \frac{M}{r}$	$\varphi = k_0 \frac{Q}{r}$
Сложение потенциалов	$\varphi = \sum \varphi_i$	$\varphi = \sum \varphi_i$
Связь $\vec{G}$ и $\varphi$	$\vec{G} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi$	$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi$

Продолжение табл. 1

Сравнительные характеристики	Виды полей	
	Гравитационное	Электростатическое
Работа по перемещению тела или заряда	$A = m \left( \frac{\gamma M}{r_2} - \frac{\gamma M}{r_1} \right) = m(\varphi_2 - \varphi_1)$	$A = q \left( \frac{k_0 Q}{r_2} - \frac{k_0 Q}{r_1} \right) = q(\varphi_2 - \varphi_1)$
Работа по замкнутому контуру	$A = \int_L \vec{F} d\vec{r} = 0$	$A = \int_L \vec{F} d\vec{r} = 0$
Циркуляция вектора напряженности	$\oint_L \vec{G} d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$
Потенциальная энергия	$W_n = \gamma \frac{mM}{r}$	$W_n = k_0 \frac{qQ}{r}$
Связь потенциала с энергией	$\varphi = \frac{W_n}{m}$	$\varphi = \frac{W_n}{q}$
Связь силы с энергией	$\vec{F} = -\text{grad}W_n$	$\vec{F} = -\text{grad}W_n$
Теорема Гаусса в интегральной форме	$\Phi_G = \oint_S \vec{G} d\vec{S} = 4\pi\gamma M$	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k_0 Q$
Теорема Гаусса в дифференциальной форме	$\text{div}\vec{G} = \nabla\vec{G} = 4\pi\gamma\rho$	$\text{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} = 4\pi k_0\rho$
Безвихревое поле	$\text{rot}\vec{G} = 0$	$\text{rot}\vec{E} = 0$

## 1.7. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 1.7.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Упорядоченное движение заряженных частиц называется электрическим током.

*Количественной мерой тока служит сила тока  $I$ , т. е. заряд, перенесенный сквозь рассматриваемую поверхность  $S$  (или через поперечное сечение проводника) в единицу времени, т. е.*

$$I = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1.7.1)$$

Ток, не изменяющийся по величине со временем, называется **постоянным током**:

$$I = \frac{q}{t},$$

отсюда видна размерность силы тока в СИ:  $1 \text{ А} = \text{Кл/с}$ .

**Плотность тока** — более подробная характеристика тока, чем сила тока  $I$ . Плотность тока характеризует ток локально, в каждой точке пространства, а  $I$  — это интегральная характеристика, привязанная не к точке, а к области пространства, в которой протекает ток.

Модуль вектора плотности тока численно равен отношению силы тока  $dI$  через элементарную площадку  $dS$ , перпендикулярную направлению движения носителей заряда, к ее площади:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (1.7.2)$$

Единица плотности тока —  $\text{А/м}^2$ .

За направление вектора  $j$  принимают направление вектора  $\vec{v}_{\text{др}}$  **положительных** носителей зарядов (раньше не знали о существовании отрицательных носителей зарядов и приняли так). Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{v}_{\text{др}+} + q_- n_- \vec{v}_{\text{др}-},$$

где  $q_+ n_+$  и  $q_- n_-$  — объемные плотности соответствующих зарядов.

Поле вектора  $\vec{j}$  можно изобразить графически с помощью **линий тока**, которые проводят так же, как и линии вектора напряженности  $\vec{E}$  (рис. 1.7.1).

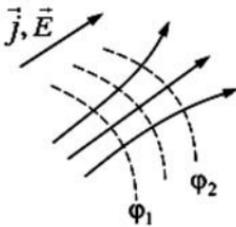


Рис. 1.7.1

### 1.7.2. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Если внутри проводника, по которому течет электрический ток, выделить какой-то объем, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$  (рис. 1.7.2), то согласно закону сохранения электрического заряда суммарный электри-

ческий заряд  $q$ , охватываемый поверхностью  $S$ , изменяется за время  $\delta t$  на  $\delta q = -I\delta t$ , тогда **в интегральной форме** можно записать:

$$\oint_S \vec{j} \delta \vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Это соотношение называется **уравнением непрерывности**. Оно является, по существу, выражением **закона сохранения электрического заряда**.

**Дифференциальная форма записи уравнения непрерывности** записывается так:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.7.3)$$

или

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.7.4)$$

В случае постоянного тока распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

Следовательно,

$$\oint \vec{j} \delta \vec{S} = 0 \quad (1.7.5)$$

— это **уравнение непрерывности для постоянного тока** (в интегральной форме).

Линии  $\vec{j}$  в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Поле вектора  $\vec{j}$  не имеет источника. В дифференциальной форме уравнение непрерывности для постоянного тока  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ .

### 1.7.3. СТОРОННИЕ СИЛЫ И ЭДС

Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, необходимо от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно отводить, а к другому концу — с большим потенциалом — подводить электрические заряды, т. е. необходим круговорот зарядов. Поэтому в замкнутой

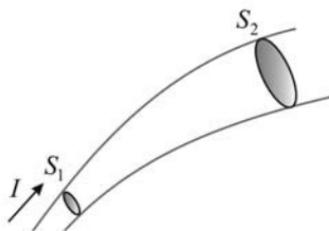


Рис. 1.7.2

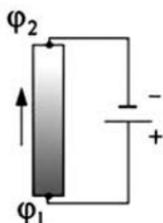


Рис. 1.7.3

цепи наряду с нормальным движением зарядов должны быть участки, на которых движение (положительных) зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т. е. против сил электрического поля (рис. 1.7.3).

Перемещение заряда на этих участках возможно лишь с помощью сил *неэлектрического происхождения* (сторонних сил): химические процессы, диффузия носителей заряда, вихревые электрические поля. Аналогия — насос, качающий воду в водонапорную башню, действует за счет негравитационных сил (электромотор).

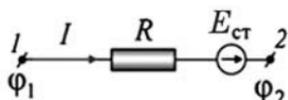


Рис. 1.7.4

Сторонние силы можно характеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по замкнутой цепи или ее участку зарядами (рис. 1.7.4).

Величина  $E$ , равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда в цепи, называется *электродвижущей силой* (ЭДС), действующей в цепи:

$$E = \frac{A}{q} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \right] = [\text{В}]. \quad (1.7.6)$$

Как видно из (1.7.6), размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, т. е. измеряется в вольтах.

#### 1.7.4. ЗАКОН ОМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УЧАСТКА ЦЕПИ

Рассмотрим неоднородный участок цепи, участок, содержащий источник ЭДС (т. е. участок, где действуют неэлектрические силы). Напряженность  $\vec{E}$  поля в любой точке цепи равна векторной сумме поля кулоновских сил и поля сторонних сил, т. е.  $\vec{E} = \vec{E}_к + \vec{E}_{ст}$ .

Величина, численно равная работе по переносу единичного положительного заряда суммарным полем кулоновских и сторонних сил на участке цепи (1–2), на-

зывается **напряжением**  $U_{12}$  на этом участке (рис. 1.7.4):

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{ct} d\vec{l}, \quad (1.7.7)$$

так как  $\vec{E}_q d\vec{l} = -d\phi$  или  $\int_1^2 \vec{E}_q d\vec{l} = \phi_1 - \phi_2$ .

Тогда

$$U_{12} = (\phi_1 - \phi_2) + E_{12}. \quad (1.7.8)$$

Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в случае, если на этом участке нет ЭДС, т. е. на однородном участке цепи. Запишем **обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащей источник ЭДС**:

$$IR_{12} = (\phi_1 - \phi_2) + E_{12}. \quad (1.7.9)$$

*Обобщенный закон Ома выражает закон сохранения энергии применительно к участку цепи постоянного тока. Он в равной мере справедлив как для пассивных участков (не содержащих ЭДС), так и для активных.*

В электротехнике часто используют термин **падение напряжения** — изменение напряжения вследствие переноса заряда через сопротивление:

$$U = IR. \quad (1.7.10)$$

**В замкнутой цепи** (рис. 1.7.5)  $\phi_1 = \phi_2$ :

$$IR_{\Sigma} = E \quad \text{или} \quad I = \frac{E}{R_{\Sigma}},$$

где  $R_{\Sigma} = R + r$ ;  $r$  — внутреннее сопротивление активного участка цепи.

Тогда **закон Ома для замкнутого участка цепи, содержащего источник ЭДС**, запишется в виде

$$I = \frac{E}{R+r}. \quad (1.7.11)$$

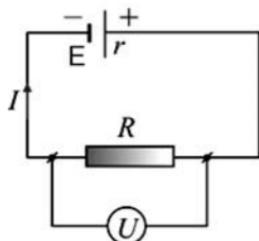


Рис. 1.7.5

### 1.7.5. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не содержащего ЭДС):

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1.7.12)$$

Для однородного линейного проводника выразим  $R$  через  $\rho$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1.7.13)$$

где  $\rho$  — удельное объемное сопротивление;  $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$ .

Найдем связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в бесконечно малом объеме проводника — закон Ома в дифференциальной форме.

Исходя из закона Ома (7.6.1), имеем

$$I = \frac{U}{R} = \frac{E dl}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{E dS}{\rho}.$$

А мы знаем, что

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{1}{\rho} E \quad \text{или} \quad \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Отсюда можно записать

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.7.14)$$

— это запись **закона Ома в дифференциальной форме**.

Здесь  $\sigma = 1/\rho$  — *удельная электропроводность*.

Размерность  $\sigma$  —  $[\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$ .

Плотность тока можно выразить через заряд электрона  $e$ , количество зарядов  $n$  и дрейфовую скорость  $\vec{v}$ :

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (1.7.15)$$

Пусть  $b = \frac{\vec{v}}{\vec{E}}$ . Тогда  $\vec{v} = b\vec{E}$  и плотность тока  $\vec{j} = enb\vec{E}$ .

Если удельную электропроводность  $\sigma$  выразить через  $e$ ,  $n$  и  $b$  ( $\sigma = enb$ ), то вновь получим выражение **закона Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

### 1.7.6. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ — ЛЕНЦА

Рассмотрим произвольный участок цепи, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через каждое сечение проводника проходит заряд

$$dq = Idt.$$

При этом работа силы электрического поля на данном участке:

$$dA = Udq = UI dt.$$

Разделив работу на время, получим выражение для мощности:

$$N = \frac{dA}{dt} = UI. \quad (1.7.16)$$

Полезно вспомнить и другие формулы для мощности и работы:

$$N = RI^2; \quad (1.7.17)$$

$$A = RI^2 t. \quad (1.7.18)$$

В 1841 г. манчестерский пивовар Джеймс Джоуль и в 1843 г. петербургский академик Эмилий Ленц установили закон теплового действия электрического тока.

Независимо друг от друга Джоуль и Ленц показали, что *при протекании тока в проводнике выделяется количество теплоты:*

$$Q = RI^2 t. \quad (1.7.19)$$

Если ток изменяется со временем, то

$$Q = \int_1^2 RI^2 dt.$$

*Это закон Джоуля — Ленца в интегральной форме. Отсюда видно, что нагревание происходит за счет работы, совершаемой силами поля над зарядом.*

Соотношение (1.7.19) имеет интегральный характер и относится ко всему проводнику с сопротивлением  $R$ , по

которому течет ток  $I$ . Получим закон Джоуля — Ленца в локально-дифференциальной форме, характеризуя тепловыделение в произвольной точке.

**Тепловая мощность тока** в элементе проводника  $\Delta l$  сечением  $\Delta S$ , объемом  $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$  равна

$$\Delta N = I^2 R = I \Delta \varphi = j \Delta S E \Delta l = j E \Delta V.$$

Удельная мощность тока:

$$w = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \vec{j} \vec{E}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Отсюда **закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме, характеризующий плотность выделенной энергии:**

$$w = \sigma \vec{E}^2. \quad (1.7.20)$$

Так как выделенная теплота равна работе сил электрического поля:

$$A = I U t,$$

то мы можем записать для мощности тока:

$$N = UI = RI^2. \quad (1.7.21)$$

**Мощность, выделенная в единице объема проводника**,  $w = \rho j^2$ .

Приведенные формулы справедливы для однородного участка цепи и для неоднородного.

**КПД источника тока.** Рассмотрим элементарную электрическую цепь, содержащую источник ЭДС с внутренним сопротивлением  $r$  и внешним сопротивлением  $R$  (рис. 1.7.6).

КПД всегда определяется как отношение полезной работы к затраченной:

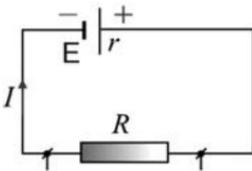


Рис. 1.7.6

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{U}{E} = \frac{R}{R+r}.$$

Таким образом имеем, что при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 1$ , но при этом ток в цепи мал и полезная мощность мала.

Условия, при которых полезная мощность будет максимальной:  $r = R$ , но при этом КПД будет равен 0,5.

Это утверждение хорошо иллюстрируется рисунком 1.7.7. Как видно из рисунка, максимальный КПД получается в данной цепи при уменьшении мощности.

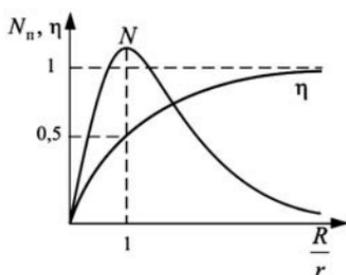


Рис. 1.7.7

#### ПРАВИЛА КИРХГОФА ДЛЯ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ

Расчет разветвленных цепей с помощью закона Ома довольно сложен. Эта задача решается более просто с помощью двух правил немецкого физика Г. Кирхгофа (1824–1887).

*Первое правило Кирхгофа утверждает, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле цепи, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

В случае установившегося постоянного тока в цепи ни в одной точке проводника, ни на одном из его участков не должны накапливаться электрические заряды; *узел* — любой участок цепи, где сходятся более двух проводников (рис. 1.7.8).

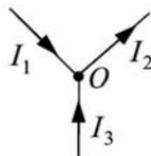


Рис. 1.7.8

Токи, сходящиеся к узлу, считаются положительными:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

Первый закон является следствием закона сохранения заряда.

*Второе правило Кирхгофа* является обобщением закона Ома для разветвленной цепи и следствием закона сохранения энергии.

Для произвольного замкнутого контура с произвольным числом разветвлений (рис. 1.7.9) можно записать для каждого элемента контура:

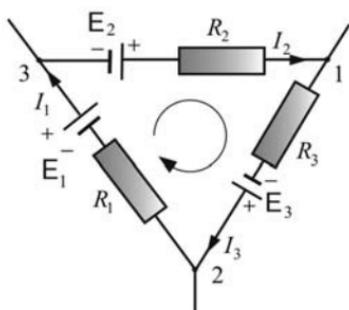


Рис. 1.7.9

$$\varphi_2 - \varphi_3 + E_1 = I_1 R_1;$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 + E_2 = I_2 R_2;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + E_3 = I_3 R_3.$$

Складывая эти уравнения, получим **второе правило Кирхгофа**:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k E_k.$$

В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма произведения тока на сопротивление равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре.

Обход контуров осуществляется по часовой стрелке, если направление обхода совпадает с направлением тока, то ток берется со знаком «+».

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называют силой тока? Плотностью тока? Каковы их единицы? Назовите условия возникновения и существования электрического тока.
2. Что такое сторонние силы? Какова их природа?
3. В чем заключается физический смысл электродвижущей силы, действующей в цепи? Напряжения? Разности потенциалов?
4. Почему напряжение является обобщенным понятием разности потенциалов?
5. Какова связь между сопротивлением и проводимостью, удельным сопротивлением и удельной проводимостью?
6. На чем основано действие термометров сопротивления?
7. Выведите законы Ома и Джоуля — Ленца. В чем заключается физический смысл удельной тепловой мощности тока?
8. Проанализируйте обобщенный закон Ома. Какие частные законы можно из него получить?
9. Как определяется КПД источника тока? Каковы условия получения максимального КПД, максимальной полезной мощности?
10. Как формулируются правила Кирхгофа? На чем они основаны?
11. Как составляются уравнения, выражающие правила Кирхгофа?
12. Определите сопротивление нихромовой проволоки длиной 1 м и массой 0,83 г. Удельное сопротивление нихрома  $10^{-6}$  Ом·м, плотность  $8300 \text{ кг/м}^3$ .

13. Проволоку длиной 1 м растянули так, что ее длина стала 110 см. На сколько процентов увеличилось при этом ее сопротивление?
14. \* Сколько витков проволоки следует вплотную намотать на фарфоровую трубку радиусом 10 см, чтобы изготовить реостат сопротивлением 50 Ом? Удельное сопротивление проволоки  $5 \cdot 10^{-6}$  Ом·м, ее диаметр 2 мм.
15. \* Амперметр имеет внутреннее сопротивление 0,02 Ом, его шкала рассчитана на силу тока 1,2 В. Определите сопротивление шунта, который надо присоединить к амперметру параллельно, чтобы им можно было измерять силу тока до 6 А.
16. \* За одну минуту через поперечное сечение проводника прошел заряд 100 Кл. При этом первые 10 с сила тока равномерно возрастала от нуля до некоторой величины  $I$ , а последние 10 с равномерно уменьшалась до нуля. Найдите ток  $I$ .

## 1.8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ, ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ЭЛЕКТРОЛИТАХ

### 1.8.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ

*Электрический ток в металлах — это упорядоченное движение электронов под действием электрического поля.*

Наиболее убедительное доказательство электронной природы тока в металлах было получено в опытах с инерцией электронов (опыт Толмена и Стюарта).

Катушка с большим числом витков тонкой проволоки (рис. 1.8.1) приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси. Концы катушки с помощью гибких проводов были присоединены к чувствительному баллистическому гальванометру. Раскрученная катушка резко тормозилась, и в цепи возникал кратковременный ток, обусловленный

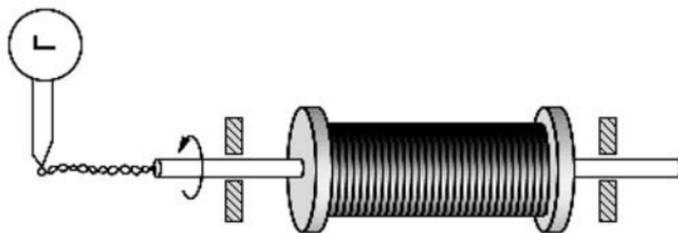


Рис. 1.8.1

инерцией носителей заряда. Полный заряд, протекающий по цепи, измерялся гальванометром.

При торможении вращающейся катушки на каждый носитель заряда  $e$  массой  $m$  действует *тормозящая сила*, которая играет роль *сторонней силы*, т. е. *силы неэлектрического происхождения*:

$$F = -m \frac{dv}{dt}.$$

Сторонняя сила, отнесенная к единице заряда, по определению является напряженностью  $E_{\text{ст}}$  поля сторонних сил:

$$E_{\text{ст}} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt}.$$

Следовательно, в цепи при торможении катушки возникает *электродвижущая сила*  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = E_{\text{ст}} l = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} l.$$

За время торможения катушки по *цепи протечет заряд*  $q$ , равный:

$$q = \int I dt = \frac{1}{R} \int \mathcal{E} dt = \frac{m}{e} \frac{lv_0}{R},$$

где  $l$  — длина проволоки катушки;  $I$  — мгновенное значение силы тока в катушке;  $R$  — полное сопротивление цепи;  $v_0$  — начальная линейная скорость проволоки.

*Хорошая электропроводность металлов объясняется высокой концентрацией свободных электронов, равной по порядку величины числу атомов в единице объема.*

Предположение о том, что за электрический ток в металлах ответственны электроны, возникло значительно раньше опытов Толмена и Стюарта. Еще в 1900 г. немецкий ученый П. Друде на основе гипотезы о существовании свободных электронов в металлах создал электронную теорию проводимости металлов. Эта теория получила развитие в работах голландского физика Х. Лоренца и носит название *классической электронной теории*. Согласно этой теории электроны в металлах ведут себя, как электронный газ, во многом похожий на идеальный газ.

Электронный газ заполняет пространство между ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Из-за взаимодействия с ионами электроны могут покинуть металл, лишь преодолев так называемый *потенциальный барьер*. Высота этого барьера называется *работой выхода*.

При обычных (комнатных) температурах у электронов не хватает энергии для преодоления потенциального барьера. Согласно теории Друде — Лоренца электроны обладают такой же средней энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного идеального газа. Это позволяет оценить среднюю скорость теплового движения электронов по формулам молекулярно-кинетической теории:  $v_{\text{теп}} = 10^5$  м/с.

При наложении внешнего электрического поля в металлическом проводнике, кроме теплового движения электронов, возникает их упорядоченное движение (дрейф), т. е. электрический ток. *Величина дрейфовой скорости электронов* лежит в пределах 0,6–6 мм/с. Таким образом, средняя скорость упорядоченного движения электронов в металлических проводниках на много порядков меньше средней скорости их теплового движения.

Малая скорость дрейфа не противоречит опытному факту, что ток во всей цепи постоянного тока устанавливается практически мгновенно. Замыкание цепи вызывает распространение электрического поля со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Через время  $\tau = l/c$  ( $l$  — длина цепи) вдоль цепи устанавливается стационарное распределение электрического поля, и в ней начинается упорядоченное движение электронов.

В классической электронной теории металлов предполагается, что движение электронов подчиняется законам механики Ньютона. В этой теории пренебрегают взаимодействием электронов между собой, а их взаимодействие с положительными ионами сводят только к соударениям. Предполагается также, что при каждом соударении электрон передает решетке всю накопленную в электрическом поле энергию, и поэтому после соударения он начинает движение с нулевой дрейфовой скоростью.

Несмотря на то что все эти допущения являются весьма приближенными, классическая электронная теория качественно объясняет законы электрического тока в металлических проводниках — закон Ома, закон Джоуля — Ленца — и объясняет существование электрического сопротивления металлов.

Закон Ома:

$$I = enS\bar{v}_d = \frac{1}{2} \frac{e^2 \tau n S}{m} E = \frac{e^2 \tau n S}{2ml} U.$$

Электрическое сопротивление проводника:

$$R = \frac{2m}{e^2 n \tau} \frac{l}{S}.$$

Закон Джоуля — Ленца:

$$\Delta Q = \frac{nSl\Delta t}{\tau} \frac{e^2 \tau^2}{2m} E^2 = \frac{ne^2 \tau S}{2m} U^2 \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t.$$

Однако в ряде вопросов классическая электронная теория приводит к выводам, находящимся в противоречии с опытом. Эта теория не может, например, объяснить, почему молярная теплоемкость металлов, так же как и молярная теплоемкость диэлектрических кристаллов, равна  $3R$  (закон Дюлонга и Пти). Классическая электронная теория не может также объяснить температурную зависимость удельного сопротивления металлов: теория дает  $\rho \sim \sqrt{T}$ , в то время как из эксперимента получается зависимость  $\rho \sim T$ .

Наиболее ярким примером расхождения теории и опытов является *сверхпроводимость*.

#### ЗОННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННОЙ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Качественное различие между металлами и полупроводниками (диэлектриками) состоит в характере зависимости удельной проводимости от температуры. У металлов с ростом температуры проводимость падает, а у полупроводников и диэлектриков — растет. При  $T \rightarrow 0$  К у чистых металлов проводимость  $\sigma \rightarrow \infty$ . У полупроводников

и диэлектриков при  $T \rightarrow 0$   $\sigma \rightarrow 0$ . Качественного различия между полупроводниками и диэлектриками в отношении электропроводности нет.

Проявление у одних веществ металлических свойств, а у других полупроводниковых и диэлектрических может быть последовательно объяснено только в рамках *квантовой теории*.

*Согласно квантовым представлениям энергия электронов в атоме может изменяться дискретным образом.* Причем согласно принципу Паули в одном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. В результате электроны не собираются на каком-то одном энергетическом уровне, а последовательно заполняют разрешенные энергетические уровни в атоме, формируя его электронные оболочки.

При сближении большого числа атомов и образовании кристаллической структуры химические связи между атомами образуются за счет электронов, находящихся во внешних, валентных, электронных оболочках.

Согласно принципу Паули атомы не могут сбиться в плотную массу, поскольку в этом случае в одном квантовом состоянии оказалось бы много частиц с *полуцелым спином* — *собственным моментом количества движения* ( $L = \hbar/2$ ). Такие частицы называются *фермионами*, и к ним, в частности, относятся электроны, протоны, нейтроны. Названы они так в честь итальянского физика Э. Ферми, впервые описавшего особенности поведения коллективов таких частиц. При сближении большого числа атомов в пределах твердого тела происходит расщепление исходного энергетического уровня валентного электрона в атоме на  $N$  подуровней, где  $N$  — число атомов, образующих кристалл. В результате образуется зона разрешенных энергетических уровней для электронов в твердом теле (см. рис. 1.8.2).

В металлах внешние валентные оболочки заполнены неполностью, например у атомов серебра во внешней оболочке  $5s^1$  находится один электрон, в то время как согласно принципу Паули могли бы находиться два электрона с различными ориентациями спинов, но второго электрона

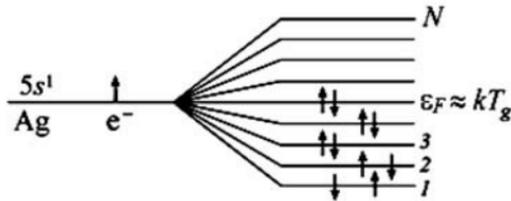


Рис. 1.8.2

во внешней оболочке атома серебра просто нет. При сближении  $N$  атомов  $\text{Ag}$  и расщеплении внешнего энергетического уровня  $5s^1$  на  $N$  подуровней каждый из них заполняется уже двумя электронами с различными ориентациями спинов. В результате при сближении  $N$  атомов серебра возникает энергетическая зона, наполовину заполненная электронами. Энергия, соответствующая последнему заполненному электронному уровню при  $0 \text{ К}$ , называется энергией Ферми ( $\varepsilon_F \approx kT_g$ ). Расстояние  $\Delta E$  между соседними энергетическими уровнями очень мало, поскольку  $N$  очень велико, до  $10^{23} \text{ см}^{-3}$ :

$$\varepsilon_F \sim 1 \div 10 \text{ эВ};$$

$$\Delta E = \varepsilon_F / N \ll kT \approx 0,025 \text{ эВ}.$$

Расстояние между соседними разрешенными уровнями электронов в металлах много меньше энергии теплового движения электронов даже при самых низких температурах. Если поместить проводник в электрическое поле, включив его, например, в замкнутую цепь с источником ЭДС, то электроны начнут перемещаться из точки проводника с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом, так как их заряд отрицателен. Но движение в электрическом поле означает увеличение энергии электрона, а по квантовым представлениям переход на более высокий энергетический уровень у электрона возможен, если этот соседний уровень свободен. В металлах таких свободных уровней для электронов, находящихся вблизи уровня Ферми, вполне достаточно, поэтому металлы являются хорошими проводниками электрического тока.

### 1.8.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

К числу полупроводников относятся многие химические элементы (германий, кремний, селен, теллур, мышьяк и др.), огромное количество сплавов и химических соединений. Почти все неорганические вещества окружающего нас мира — полупроводники. Самым распространенным в природе полупроводником является кремний, составляющий около 30% земной коры.

Качественное отличие полупроводников от металлов проявляется в зависимости сопротивления от температуры, изображенной на рисунке 1.8.3 (*а* — для полупроводников, *б* — для металлов).

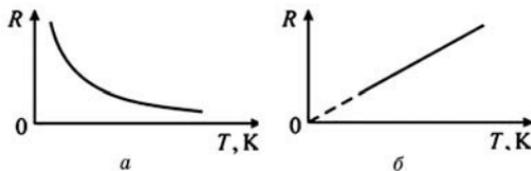


Рис. 1.8.3

#### ЗОННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

При образовании твердых тел возможна ситуация, когда энергетическая зона, возникшая из энергетических уровней *валентных электронов* исходных атомов, оказывается полностью заполненной электронами, а ближайшие доступные для заполнения электронами энергетические уровни отделены от *валентной зоны*  $E_V$  промежуточном неразрешенных энергетических состояний — так называемой *запрещенной зоной*  $E_g$  (рис. 1.8.4). Выше запрещенной зоны расположена зона разрешенных для электронов энергетических состояний — *зона проводимости*  $E_C$ .

Зона проводимости при 0 К полностью свободна, а валентная зона — полностью занята. Подобные зонные структуры

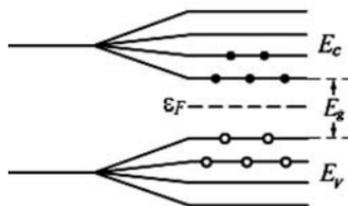


Рис. 1.8.4

характерны для кремния, германия, арсенида галлия (GaAs), фосфида индия (InP) и многих других твердых тел, являющихся полупроводниками.

При повышении температуры полупроводников и диэлектриков электроны способны получать дополнительную энергию  $kT$ , связанную с тепловым движением. У части электронов энергии теплового движения оказывается достаточно для перехода *из валентной зоны в зону проводимости*, где электроны под действием внешнего электрического поля могут перемещаться практически свободно.

В этом случае *в цепи с полупроводниковым материалом по мере повышения температуры полупроводника будет нарастать электрический ток*. Этот ток связан не только с движением электронов в зоне проводимости, но и с появлением *вакантных мест от ушедших в зону проводимости электронов* в валентной зоне, так называемых **дырок**. Вакантное место может быть занято валентным электроном из соседней пары, тогда дырка переместится на новое место в кристалле.

Если полупроводник помещается в электрическое поле, то *в упорядоченное движение вовлекаются не только свободные электроны, но и дырки, которые ведут себя, как положительно заряженные частицы*. Поэтому ток  $I$  в полупроводнике складывается из электронного  $I_n$  и дырочного  $I_p$  токов:  $I = I_n + I_p$ .

Электронно-дырочный механизм проводимости проявляется только у чистых (т. е. без примесей) полупроводников. Он называется **собственной электрической проводимостью полупроводников**. Электроны забрасываются в зону проводимости с *уровня Ферми*, который оказывается в собственном полупроводнике расположенным *посередине запрещенной зоны* (см. рис. 1.8.4).

Существенно изменить проводимость полупроводников можно, введя в них очень небольшие количества примесей. В металлах примесь всегда уменьшает проводимость. Так, добавление в чистый кремний 3% атомов фосфора увеличивает электропроводность кристалла в  $10^5$  раз.

*Небольшое добавление примеси к полупроводнику называется легированием.*

Необходимым условием резкого уменьшения удельного сопротивления полупроводника при введении примесей является отличие валентности атомов примеси от валентности основных атомов кристалла. *Проводимость полупроводников при наличии примесей называется примесной проводимостью.*

Различают два типа примесной проводимости — *электронную* и *дырочную*. *Электронная проводимость* возникает, когда в кристалл германия с четырехвалентными атомами введены пятивалентные атомы (например, атомы мышьяка As) (рис. 1.8.5).

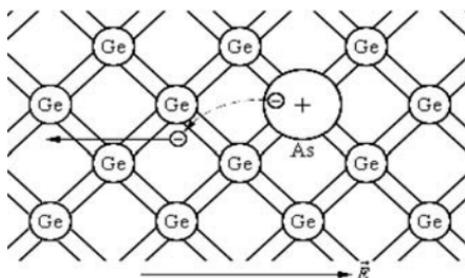


Рис. 1.8.5

Четыре валентных электрона атома мышьяка включены в образование ковалентных связей с четырьмя соседними атомами германия. Пятый валентный электрон оказался излишним. Он легко отрывается от атома мышьяка и становится свободным. Атом, потерявший электрон, превращается в положительный ион, расположенный в узле кристаллической решетки.

*Примесь из атомов с валентностью, превышающей валентность основных атомов полупроводникового кристалла, называется донорской примесью.* В результате ее введения в кристалле появляется значительное число свободных электронов. Это приводит к резкому уменьшению удельного сопротивления полупроводника — в тысячи и даже миллионы раз.

Удельное сопротивление полупроводника с большим содержанием примесей может приближаться к удельному сопротивлению металлического проводника. Такая

проводимость, обусловленная свободными электронами, называется электронной, а полупроводник, обладающий электронной проводимостью, называется **полупроводником *n*-типа**.

**Дырочная проводимость** возникает, когда в кристалл германия введены трехвалентные атомы, например атомы индия (рис. 1.8.6).

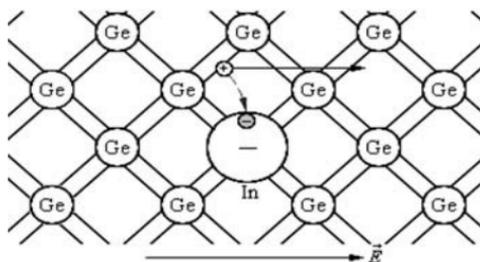


Рис. 1.8.6

На рисунке 1.8.6 показан атом индия, который создал с помощью своих валентных электронов ковалентные связи лишь с тремя соседними атомами германия. На образование связи с четвертым атомом германия у атома индия нет электрона. Этот недостающий электрон может быть захвачен атомом индия из ковалентной связи соседних атомов германия. В этом случае атом индия превращается в отрицательный ион, расположенный в узле кристаллической решетки, а в ковалентной связи соседних атомов образуется вакансия.

*Примесь атомов, способных захватывать электроны, называется акцепторной примесью.* В результате введения акцепторной примеси в кристалле разрывается множество ковалентных связей и образуются вакантные места (дырки). На эти места могут перескакивать электроны из соседних ковалентных связей, что приводит к хаотическому блужданию дырок по кристаллу.

Концентрация дырок в полупроводнике с акцепторной примесью значительно превышает концентрацию электронов, которые возникли из-за механизма собственной электропроводности полупроводника:  $n_p \gg n_n$ . Проводи-

мость такого типа называется *дырочной проводимостью*. Примесный полупроводник с дырочной проводимостью называется *полупроводником  $p$ -типа*. Основными носителями свободного заряда в полупроводниках  $p$ -типа являются дырки.

#### ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНЫЙ ПЕРЕХОД

В современной электронной технике полупроводниковые приборы играют исключительную роль. За последние три десятилетия они почти полностью вытеснили электровакуумные приборы.

В любом полупроводниковом приборе имеется один или несколько электронно-дырочных переходов. *Электронно-дырочный переход* (или  $n$ - $p$ -переход) — это область контакта двух полупроводников с разными типами проводимости.

На границе полупроводников (рис. 1.8.7) образуется двойной электрический слой, электрическое поле которого препятствует процессу диффузии электронов и дырок навстречу друг другу.

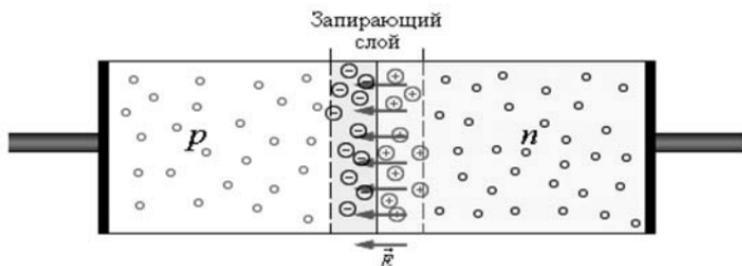


Рис. 1.8.7

Способность  $n$ - $p$ -перехода пропускать ток практически только в одном направлении используется в приборах, которые называются *полупроводниковыми диодами*. Полупроводниковые диоды изготавливаются из кристаллов кремния или германия. При их изготовлении в кристалл с каким-либо типом проводимости вплавляют примесь, обеспечивающую другой тип проводимости.

На рисунке 1.8.8 приведена типичная вольт-амперная характеристика кремниевого диода.

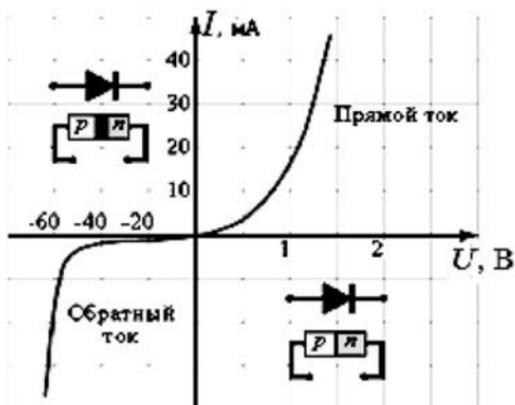


Рис. 1.8.8

Как следует из вольт-амперной характеристики, обратный ток до определенного значения напряжения (пробойного) равен нулю. При напряжении выше пробойного наступает пробой диода, он выходит из строя.

### 1.8.3. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

Существует одно явление, механизм которого оказалось возможным объяснить лишь в рамках квантовой теории. При некоторой определенной температуре  $T_{кр}$ , различной для разных веществ, сопротивление скачком уменьшается до нуля (рис. 1.8.9, кривая 2).

В 1908 г. голландскому физическому Г. Камерлинг-Оннесу удалось получить жидкий гелий с температурой кипения 4,44 К. Метод получения жидкого гелия оказался очень сложным и малоэффективным, и в течение долгого времени лишь лаборатория Камерлинг-Оннеса в Лейдене производила жидкий гелий.

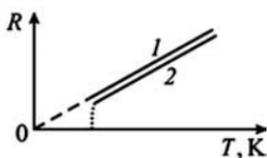


Рис. 1.8.9

Изучая поведение сопротивления ртути, охлаждаемой до гелиевых температур, Камерлинг-Оннес в 1911 г. впервые в мире наблюдал *исчезновение сопротивления ртути практически до нуля*. Это явление было названо *сверхпроводимостью*.

Камерлинг-Оннес писал: «При 4,3 К сопротивление ртути уменьшается до 0,084 Ом, что составляет 0,0021 от значения сопротивления, которое имела бы твердая ртуть при 0°C (39,7 Ом). Обнаружено, что при 3 К сопротивление падает ниже  $3 \cdot 10^{-6}$  Ом, что составляет  $10^{-7}$  от значения при 0°C». Отметим, что температурный интервал, в котором сопротивление уменьшалось до нуля, очень узок, и для некоторых металлов он составляет лишь  $10^{-3}$  К.

В 1957 г. Дж. Бардином, Л. Купером, Дж. Шриффером дано квантово-механическое объяснение природы сверхпроводимости (**теория БКШ**). Было показано, что хотя между электронами действуют силы кулоновского отталкивания, тем не менее в твердых телах при температуре перехода в сверхпроводящее состояние  $T_{кр}$  — критической температуре, между электронами начинают действовать силы притяжения, обусловленные обменом фононами между электронами (фононы — кванты упругих колебаний кристаллической решетки). Это притяжение приводит к образованию связанных электронных пар — куперовских пар.

Пары электронов уже не являются фермионами, и для них уже не действует принцип запрета Паули. Спаренные электроны являются бозонами — частицами с нулевым спином, и стремятся сконденсироваться. В результате такой конденсации образуется электрически заряженная, сверхтекучая электронная жидкость, обладающая свойствами сверхпроводимости.

Сверхпроводящее состояние является макроскопическим квантовым состоянием металла. Электрон, движущийся среди положительно заряженных ионов, поляризует решетку, т. е. электростатическими силами притягивает к себе ближайшие ионы. Благодаря такому смещению ионов в окрестности траектории электрона локально возрастает плотность положительного заряда. Второй электрон, движущийся вслед за первым, будет притягиваться областью с избыточным положительным зарядом. В результате косвенным образом за счет взаимодействия с решеткой между электронами 1 и 2 возникают силы притяжения (связанная куперовская пара).

Вещества в сверхпроводящем состоянии обладают исключительными свойствами. Практически наиболее важным их них является способность длительное время (многие годы) поддерживать без затухания электрический ток, возбужденный в сверхпроводящей цепи.

Научный интерес к сверхпроводимости возрастал по мере открытия новых материалов с более высокими критическими температурами. Значительный шаг в этом направлении произошел в 1986 г., когда было обнаружено, что у одного сложного керамического соединения  $T_{кр} = 35 \text{ К}$ . Уже в следующем 1987 г. физики сумели создать новую керамику с критической температурой 98 К, превышающей температуру жидкого азота (77 К).

Явление перехода веществ в сверхпроводящее состояние при температурах, превышающих температуру кипения жидкого азота, было названо *высокотемпературной сверхпроводимостью*. В 1988 г. было создано керамическое соединение на основе элементов Тl–Са–Ва–Cu–О с критической температурой 125 К.

Следует отметить, что до настоящего времени механизм высокотемпературной сверхпроводимости керамических материалов до конца не выяснен.

#### 1.8.4. ЭМИССИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ ПРОВОДНИКОВ

Уже отмечалось, при переходе границы раздела между проводником и вакуумом скачком изменяются напряженность и индукция электрического поля. С этим связаны специфические явления. Электрон свободен только в границах металла. Как только он пытается перейти границу «металл — вакуум», возникает кулоновская сила притяжения между электроном и образовавшимся на поверхности избыточным положительным зарядом (рис. 1.8.10).

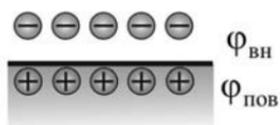


Рис. 1.8.10

Вблизи от поверхности образуется электронное облако, и на границе раздела формируется двойной электрический слой с разно-

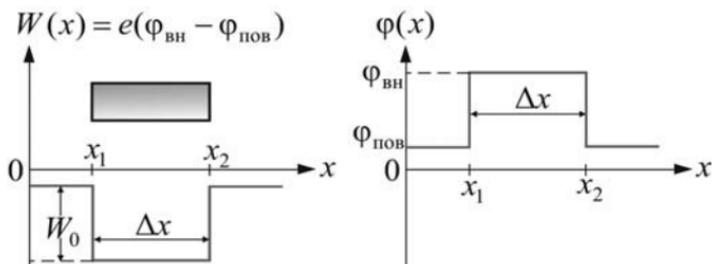


Рис. 1.8.11

стью потенциалов ( $\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пов}}$ ). Скачки потенциала на границе металла показаны на рисунке 1.8.11.

В занятом металлом объеме образуется потенциальная энергетическая яма, так как в пределах металла электроны свободны и их энергия взаимодействия с узлами решетки равна нулю. За пределами металла электрон приобретает энергию  $W_0$ . Это энергия притяжения  $W_0 < 0$ . Для того чтобы покинуть металл, электрон должен преодолеть потенциальный барьер и совершить работу:

$$A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пов}}). \quad (1.8.1)$$

Эту работу называют *работой выхода электрона из металла*. Для ее совершения электрону необходимо сообщить достаточную энергию —  $W \geq A_{\text{вых}}$ .

#### ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ

Величина работы выхода зависит от химической природы вещества, от его термодинамического состояния и от состояния поверхности раздела. Если энергия, достаточная для совершения работы выхода, сообщается электронам путем нагревания, то *процесс выхода электронов из металла называют термоэлектронной эмиссией*.

В классической термодинамике металл представляют в виде ионной решетки, заключающей в себе электронный газ. Считают, что сообщество свободных электронов подчиняется законам идеального газа. Следовательно, в соответствии с распределением Максвелла при температуре, отличной от 0 К, в металле есть какое-то количество электронов, тепловая энергия которых больше работы

выхода. Эти электроны и покидают металл. Если температуру увеличить, то увеличивается и число таких электронов.

*Явление испускания электронов нагретыми телами (эммитерами) в вакуум или другую среду называется термоэлектронной эмиссией.* Нагрев необходим для того, чтобы энергии теплового движения электрона было достаточно для преодоления сил кулоновского притяжения между отрицательно заряженным электроном и индуцируемым им на поверхности металла положительным зарядом при удалении с поверхности (см. рис. 1.8.11). Кроме того, при достаточно высокой температуре над поверхностью металла создается отрицательно заряженное электронное облако, препятствующее выходу электрона с поверхности металла в вакуум. Этими двумя и, возможно, другими причинами определяется величина работы выхода электрона из металла.

Явление термоэлектронной эмиссии было открыто в 1883 г. Т. Эдисоном, знаменитым американским изобретателем. Это явление наблюдалось им в вакуумной лампе с двумя электродами — анодом, имеющим положительный потенциал, и катодом с отрицательным потенциалом. Катодом лампы может служить нить из тугоплавкого металла (вольфрам, молибден, тантал и др.), нагреваемая электрическим током (рис. 1.8.12). Такая лампа называется вакуумным диодом. Если катод холодный, то ток в цепи *катод — анод* практически отсутствует. При повышении температуры катода в цепи *катод — анод* появляется электрический ток, который тем больше, чем выше

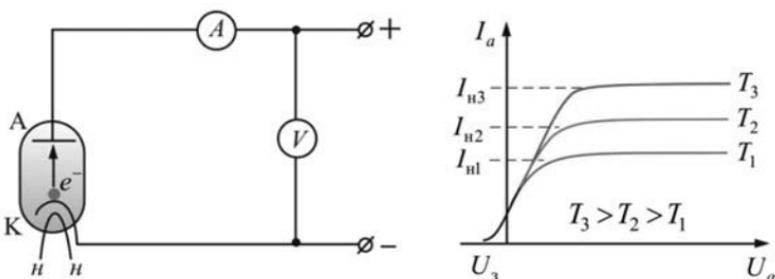


Рис. 1.8.12

температура катода. При постоянной температуре катода ток в цепи *катод — анод* возрастает с повышением разности потенциалов  $U$  между катодом и анодом и выходит к некоторому стационарному значению, называемому **током насыщения**  $I_n$ . При этом *все термоэлектроны, испускаемые катодом, достигают анода*. Величина тока анода не пропорциональна  $U$ , и поэтому *для вакуумного диода закон Ома не выполняется*.

На рисунке 1.8.11 показаны схема вакуумного диода и вольт-амперные характеристики (ВАХ)  $I_a(U_a)$ . Здесь  $U_3$  — задерживающее напряжение, при котором  $I = 0$ .

#### ХОЛОДНАЯ И ВЗРЫВНАЯ ЭМИССИЯ

*Электронную эмиссию, вызываемую действием сил электрического поля на свободные электроны в металле, называют холодной эмиссией, или автоэлектронной (АЭЭ)*. Для этого должна быть достаточной напряженность поля и должно выполняться условие

$$A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пов}}) \leq eEd, \quad (1.8.2)$$

где  $d$  — толщина двойного электрического слоя на границе раздела сред.

Обычно у чистых металлов  $d \approx 10^{-10}$  м и  $A_{\text{вых}} \approx 10^{-19}$  Дж = = 1 эВ. При  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл получим  $E = 10^{10}$  В/м. На практике же холодная эмиссия наблюдается при значении напряженности порядка  $10^6$ – $10^8$  В/м. Такое несовпадение относят на счет несостоятельности классических представлений для описания процессов на микроуровне.

Автоэлектронную эмиссию можно наблюдать в хорошо откачанной вакуумной трубке, катодом которой служит острие, а анодом — обычный электрод с плоской или мало изогнутой поверхностью. Напряженность электрического поля на поверхности острия с радиусом кривизны  $r$  и потенциалом  $U$  относительно анода равна

$$E = \frac{U}{r}.$$

При  $r \sim 10^{-2}$  мм и  $U \sim 10^3$  В  $E \sim 10^6$  В/см, что приведет к появлению слабого тока, обусловленного автоэлектронной

эмиссией с поверхности катода. Сила эмиссионного тока быстро нарастает с повышением разности потенциалов  $U$ . При этом катод специально не разогревается, поэтому эмиссия и называется холодной.

С помощью автоэлектронной эмиссии принципиально возможно получение плотности тока  $10^6$ – $10^8$  А/см<sup>2</sup>, но для этого нужны эмиттеры в виде совокупности большого числа микроострий, идентичных по форме, что практически невозможно, и, кроме того, увеличение тока до  $10^8$  А/см<sup>2</sup> приводит к взрывообразному разрушению микроострий и всего эмиттера.

Плотность тока АЭЭ в условиях влияния объемного заряда равна (закон Чайльда — Ленгмюра):

$$j = AE^{3/2} \leq 10^8 \text{ А/см}^2,$$

где  $A = \frac{4}{9} \epsilon_0 \left( \frac{2e}{m} \right) E^{3/2} r^{-1/2}$  — коэффициент пропорциональности, определяемый геометрией и материалом катода.

Проще говоря, закон Чайльда — Ленгмюра показывает, что плотность тока пропорциональна  $E^{3/2}$  (закон трех вторых).

Током автоэлектронной эмиссии при концентрации энергии в микрообъемах катода до  $10^4$  Дж·м<sup>-1</sup> и более (при общей энергии  $10^{-8}$  Дж) может инициироваться качественно иной вид эмиссии, обусловленный **взрывом микроострий на катоде** (рис. 1.8.13).

При этом появляется ток электронов, который на порядок превосходит начальный ток — **наблюдается взрывная электронная эмиссия** (ВЭЭ). ВЭЭ была открыта и изучена

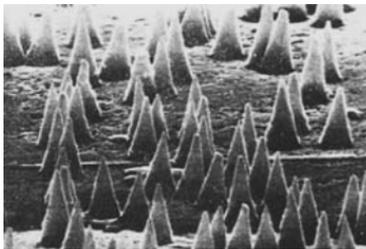


Рис. 1.8.13

в Томском политехническом институте в 1966 г. коллективом сотрудников под руководством Г. А. Месяца.

ВЭЭ — это единственный вид электронной эмиссии, позволяющий получить потоки электронов мощностью до  $10^{13}$  Вт с плотностью тока до  $10^9$  А/см<sup>2</sup>.

Ток ВЭЭ необычен по структуре. Он состоит из отдельных порций электронов по  $10^{11}$ – $10^{12}$  штук, имеющих характер электронных лавин, получивших название *эктонов* (начальные буквы «*explosive centre*») (рис. 1.8.14). Время образования лавин составляет  $10^{-9}$ – $10^{-8}$  с.

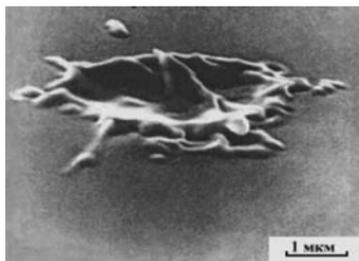


Рис. 1.8.14

Появление электронов в эктоне вызвано быстрым перегревом микроучастков катода и является, по существу, разновидностью термоэлектронной эмиссии. Существование эктона проявляется в образовании кратера на поверхности катода. Прекращение эмиссии электронов в эктоне обусловлено охлаждением зоны эмиссии за счет теплопроводности, уменьшения плотности тока, испарения атомов.

Взрывная эмиссия электронов и эктоны играют фундаментальную роль в вакуумных искрах и дугах, в разрядах низкого давления, в сжатых и высокопрочных газах, в микропромежутках, т. е. там, где в наличии есть электрическое поле высокой напряженности на поверхности катода.

Явление взрывной электронной эмиссии послужило основой для создания импульсных электрофизических установок, таких как сильноточные ускорители электронов, мощные импульсные и рентгеновские устройства, мощные релятивистские сверхвысокочастотные генераторы. Например, импульсные ускорители электронов имеют мощность  $10^{13}$  Вт и более при длительности импульсов  $10^{-10}$ – $10^{-6}$  с, токе электронов  $10^6$  А и энергии электронов  $10^4$ – $10^7$  эВ. Такие пучки широко используются для исследований в физике плазмы, радиационной физике и химии, для накачки газовых лазеров и пр.

#### ФОТОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ

Фотоэлектронная эмиссия (фотоэффект) заключается в «выбивании» электронов из металла при действии на него электромагнитного излучения.

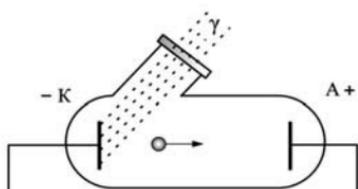


Рис. 1.8.15

Схема установки для исследования фотоэффекта и ВАХ аналогична показанной на рисунке 1.8.11. Здесь вместо разогрева катода на него направляют поток фотонов или  $\gamma$ -квантов (рис. 1.8.15).

Закономерности фотоэффекта еще в большей степени не согласуются с классической теорией, чем в случае холодной эмиссии. По этой причине мы рассмотрим теорию фотоэффекта при обсуждении квантовых представлений в оптике.

В физических приборах, регистрирующих  $\gamma$ -излучение, используют *фотоэлектронные умножители ФЭУ*. Схема прибора приведена на рисунке 1.8.16.

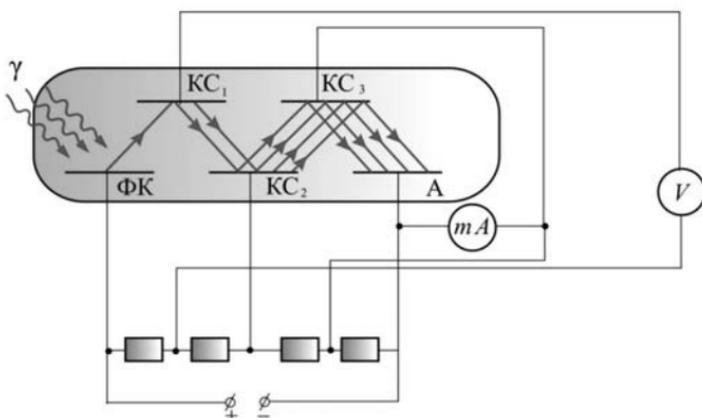


Рис. 1.8.16

В нем используют два эмиссионных эффекта: *фотоэффект* и *вторичную электронную эмиссию*, которая заключается в выбивании электронов из металла при бомбардировке последнего другими электронами. Электроны выбиваются светом из фотокатода ФК. Ускоряясь между ФК и первым эмиттером КС<sub>1</sub>, они приобретают энергию, достаточную, чтобы выбить большее число электронов из следующего эмиттера. Таким образом, умножение электронов происходит за счет увеличения их числа после-

довательном прохождении разности потенциалов между соседними эмиттерами. Последний электрод называют коллектором. Регистрируют ток между последним эмиттером и коллектором. Таким образом, ФЭУ служит усилителем тока, а последний пропорционален излучению, попадающему на фотокатод, что и используют для оценки радиоактивности.

### 1.8.5. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ПРОВОДНИКОВ

Как показывает опыт, на контакте двух различных металлов образуются *двойной электрический слой* и соответствующая разность потенциалов (рис. 1.8.17).

Появление двойного электрического слоя обусловлено различием работ выхода электронов из металлов. Чем она больше, тем меньше вероятность перехода электронами границы раздела. Поэтому со стороны металла с большей работой выхода накапливается отрицательный заряд, а с противоположной — положительный.

Это явление наблюдалось итальянским физиком Александром Вольта (1745–1827), который сформулировал два экспериментальных закона, известных как законы Вольта:

1) *на контакте двух разных металлов возникает разность потенциалов, которая зависит от химической природы и от температуры сплавов;*

2) *разность потенциалов на концах последовательно соединенных проводников не зависит от промежуточных проводников и равна разности потенциалов, возникающей при соединении крайних проводников при той же температуре.*

Результаты эксперимента можно объяснить с позиции классической электронной теории. Если принять, что потенциал за пределами металла равен нулю, то энергия электрона внутри металла с потенциалом  $\varphi_i$  определится выражением

$$W_i = e\varphi_i. \quad (1.8.3)$$

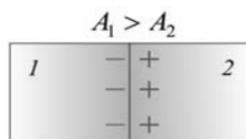


Рис. 1.8.17

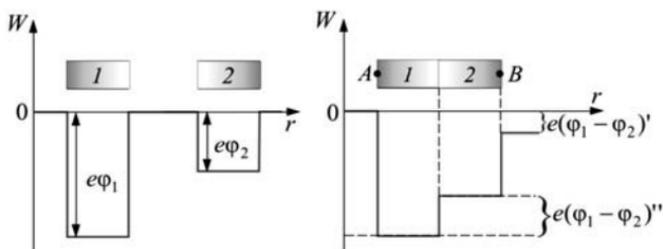


Рис. 1.8.18

При соединении двух разных металлов (рис. 1.8.18) с работами выхода:

$$A_1 = e\varphi_1 \quad \text{и} \quad A_2 = e\varphi_2$$

возникает избыточный переход электронов из второго металла в первый, так как  $A_2 < A_1$ .

В результате концентрация электронов  $n_1$  в металле 1 увеличивается по сравнению с  $n_2$ , что порождает обратный избыточный поток электронного газа за счет диффузии, противоположный потоку, обусловленному разностью работ выхода.

Установившаяся разность потенциалов в равновесном состоянии определяется как

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)' + (\varphi_1 - \varphi_2)'',$$

где  $(\varphi_1 - \varphi_2)'$  — разность потенциалов, обусловленная разными работами выхода электронов из металлов;  $(\varphi_1 - \varphi_2)''$  — разность потенциалов, возникающая на границе раздела за счет неодинаковой концентрации электронов в электронном газе.

Установившуюся разность потенциалов можно найти из выражения

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

*Явление возникновения контактной разности потенциалов и ее зависимость от температуры называют термоэлектрическим эффектом, или эффектом Зеебека. Эффект Зеебека (прямой термоэлектрический эффект) заключается в появлении разности потенциалов в термопарах.*

Схема термопары, состоящей из спая двух разных металлов — 1 и 2, подогреваемых горелкой, показана на рисунке 1.8.19.

На концах термопары возникает **термоЭДС**  $E$ :

$$E = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} (T_x - T_r) = \alpha (T_x - T_r), \quad (1.8.4)$$

где  $T_r$  — температура горячего спая;  
 $T_x$  — температура холодного спая.

Таким образом, термоЭДС термопары можно найти по формуле

$$E = \alpha (T_x - T_r),$$

где  $\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}$  — *постоянная термопары*.

Термопары применяют для измерения температуры. Батареи термопар используют как источники ЭДС для питания физических приборов.

**Эффектом Пельтье называют обратный термоэлектрический эффект.** Он заключается в том, что при пропускании тока через термопару ее спай поглощает или выделяет тепло в зависимости от направления тока. Количество поглощенного тепла пропорционально плотности тока:

$$Q_{II} = \Pi_{12} j, \quad (1.8.5)$$

где  $\Pi_{12}$  — **коэффициент Пельтье**, зависящий от материала контактирующих металлов.

Эффект используют при изготовлении холодильников. Этот термоэлектрический эффект проявляется более эффективно, если используются полупроводники.

### 1.8.6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ

**Электролитами** принято называть проводящие среды, в которых протекание электрического тока сопровождается переносом вещества. Носителями свободных зарядов в электролитах являются положительно и отрицательно заряженные ионы.

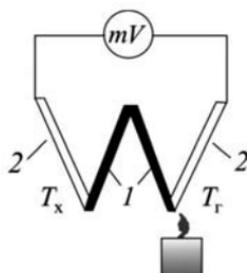


Рис. 1.8.19

Основными представителями электролитов, широко используемыми в технике, являются водные растворы неорганических кислот, солей и оснований. Прохождение электрического тока через электролит сопровождается выделением веществ на электродах. Это явление получило название *электролиза* (рис. 1.8.20).

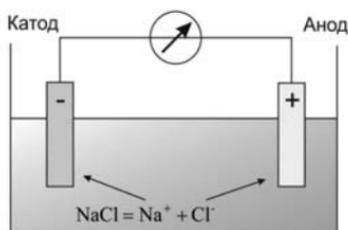


Рис. 1.8.20

Электрический ток в электролитах представляет собой перемещение ионов обоих знаков в противоположных направлениях. Положительные ионы движутся к отрицательному электроду (*катоду*), отрицательные ионы — к положительному электроду (*аноду*). Ионы обоих знаков появляются в вод-

ных растворах солей, кислот и щелочей в результате расщепления части нейтральных молекул. Это явление называется *электролитической диссоциацией*.

Закон электролиза был экспериментально установлен английским физиком М. Фарадеем в 1833 г.

**Первый закон Фарадея** определяет количества первичных продуктов, выделяющихся на электродах при электролизе: *масса  $m$  вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна заряду  $q$ , прошедшему через электролит:*

$$m = kq = kIt,$$

где  $k$  — *электрохимический эквивалент вещества:*

$$k = \frac{1}{F} \frac{\mu}{n},$$

где  $F = eN_A = 96\,485$  Кл/моль — *постоянная Фарадея.*

**Второй закон Фарадея** — *электрохимические эквиваленты различных веществ относятся, как их химические эквиваленты  $k_x$ :*

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}.$$

**Объединенный закон Фарадея** для электролиза:

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{n} It.$$

Электролитические процессы классифицируются следующим образом:

- получение неорганических веществ (водорода, кислорода, хлора, щелочей и т. д.);
- получение металлов (литий, натрий, калий, бериллий, магний, цинк, алюминий, медь и т. д.);
- очистка металлов (медь, серебро и т. д.);
- получение металлических сплавов;
- получение гальванических покрытий;
- обработка поверхностей металлов (азотирование, борирование, электрополировка, очистка);
- получение органических веществ;
- электродиализ и обессоливание воды;
- нанесение пленок при помощи электрофореза.

#### ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОЛИЗА

Электрохимические процессы широко применяются в различных областях современной техники, в аналитической химии, биохимии и т. д. В химической промышленности электролизом получают хлор и фтор, щелочи, хлораты и перхлораты, надсерную кислоту и персульфаты, химически чистые водород и кислород и т. д. При этом *одни вещества получают путем восстановления на катоде* (альдегиды, парааминофенол и др.), *другие — электроокислением на аноде* (хлораты, перхлораты, перманганат калия и др.).

Электролиз в гидрометаллургии является одной из стадий переработки металлосодержащего сырья, обеспечивающей получение товарных металлов. Электролиз может осуществляться с растворимыми анодами — процесс электрорафинирования или с нерастворимыми — процесс электроэкстракции. Главной задачей при электрорафинировании металлов является обеспечение необходимой чистоты катодного металла при приемлемых энергетических

расходах. В цветной металлургии электролиз используется для извлечения металлов из руд и их очистки.

Электролизом расплавленных сред получают алюминий, магний, титан, цирконий, уран, бериллий и др. На рисунке 1.8.21 приведена схема электролитического рафинирования меди. Для рафинирования (очистки) металла электролизом из него отливают пластины и помещают их в качестве анодов *1* в электролизер *З* (рис. 1.8.20). При пропускании тока металл, подлежащий очистке *1*, подвергается анодному растворению, т. е. переходит в раствор в виде катионов. Затем эти катионы металла разряжаются на катоде *2*, благодаря чему образуется компактный осадок уже чистого металла. Примеси, находящиеся в аноде, либо остаются нерастворимыми *4*, либо переходят в электролит и удаляются.

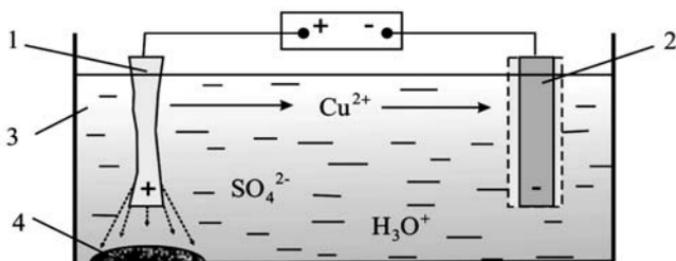


Рис. 1.8.21

**Гальванотехника** — область прикладной электрохимии, занимающаяся процессами нанесения металлических покрытий на поверхность как металлических, так и неметаллических изделий при прохождении постоянного электрического тока через растворы их солей. Гальванотехника подразделяется на *гальваностегию и гальванопластику*.

**Гальваностегия** — это электроосаждение на поверхность металла другого металла, который прочно связывается (сцепляется) с покрываемым металлом (предметом), служащим катодом электролизера (рис. 1.8.22).

Способом гальваностегии можно покрыть деталь тонким слоем золота или серебра, хрома или никеля. С помощью электролиза можно наносить тончайшие металличе-

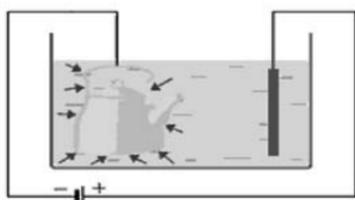


Рис. 1.8.22

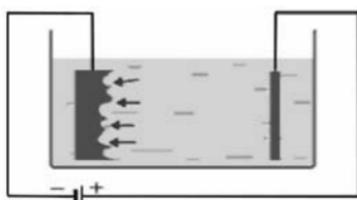


Рис. 1.8.23

кие покрытия на различные металлические поверхности. При таком способе нанесения покрытий деталь используют в качестве катода, помещенного в раствор соли того металла, покрытие из которого необходимо получить. В качестве анода используется пластинка из того же металла.

**Гальванопластика** — получение путем электролиза точных, легко отделяемых металлических копий значительной толщины с различных как неметаллических, так и металлических предметов, называемых матрицами (рис. 1.8.23).

С помощью гальванопластики изготовляют бюсты, статуи и т. д. Гальванопластика используется для нанесения сравнительно толстых металлических покрытий на другие металлы (например, образование «накладного» слоя никеля, серебра, золота и т. д.).

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Какими опытами была выяснена природа носителей электрического тока в металлах?
2. Каковы основные идеи теории Друде — Лоренца?
3. Сравните порядок средних скоростей теплового и упорядоченного движения электронов в металлах (при условиях, близких к нормальным и приемлемым в электротехнике).
4. Почему тепловое движение электронов не может привести к возникновению электрического тока?
5. Выведите на основе классической теории электропроводности металлов дифференциальную форму законов Ома и Джоуля — Ленца.
6. Как классическая теория проводимости металлов объясняет зависимость сопротивления металлов от температуры?
7. В чем заключаются трудности элементарной классической теории электропроводности металлов? Каковы границы ее применения?

8. В чем проявляется качественное отличие полупроводников от металлов?
9. Приведите зависимости удельного сопротивления от температуры для полупроводников и металлов.
10. Дайте понятие зонной модели электронно-дырочной проводимости полупроводников.
11. Что называется легированием?
12. Какие существуют типы примесной проводимости?
13. Чем отличаются полупроводниковые диоды от транзисторов?
14. Что такое сверхпроводимость?
15. Что называется электролизом? Где он применяется?
16. Сформулируйте законы Фарадея.
17. Дайте классификацию электролитическим процессам.
18. Как применяется электролиз в гидрометаллургии?
19. Каково практическое применение электролиза?
20. Чем отличается гальванопластика от гальваностегии?

## 1.9. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

### 1.9.1. ЯВЛЕНИЕ ИОНИЗАЦИИ И РЕКОМБИНАЦИИ В ГАЗАХ

В нормальном состоянии газы состоят из электрически нейтральных молекул и атомов и, следовательно, не могут проводить электрический ток. Поэтому газы являются хорошими электрическими изоляторами. Окружающий нас воздух является хорошим и самым дешевым диэлектриком, и его изолирующие свойства широко используются в различных устройствах высокого напряжения (ЛЭП, подстанциях, электростатических генераторах и др.).

Проделаем опыт: разорвем цепь источника тока, т. е. создадим в ней воздушный промежуток. Если включить в такую разорванную цепь гальванометр, то он покажет отсутствие электрического тока.

Поднесем к воздушному промежутку пламя газовой горелки. В пламени происходят интенсивные химические процессы, за счет энергии которых отдельные атомы могут возбуждаться и ионизироваться. Образующиеся в пламени горелки ионы и электроны переходят в газоразрядный промежуток и под действием приложенной к нему разности потенциалов начинают двигаться к электродам; в цепи появляется ток.

*Процесс ионизации заключается в том, что под действием высокой температуры или некоторых лучей молекулы газа теряют электроны и тем самым превращаются в положительные ионы.*

Таким образом, в результате происходит освобождение электронов из атомов и молекул, которые могут присоединиться к нейтральным молекулам или атомам, превращая их в отрицательные ионы. Ионы и свободные электроны делают газ проводником электричества.

Ионизация газа может происходить под действием коротковолнового излучения — ультрафиолетовых, рентгеновских и гамма-лучей, а также альфа-, бета- и космических лучей.

Установлено, что в нормальных условиях газы, например воздух, обладают электрической проводимостью, но очень ничтожной. Эта проводимость вызвана излучением радиоактивных веществ, имеющих на поверхности земли, а также космическими лучами, приходящими из мировых глубин. Однако равновесная концентрация ионов в воздухе не превышает нескольких десятков пар ионов в кубическом сантиметре. Для того чтобы воздух стал заметно проводить электрический ток, его надо подвергнуть воздействию интенсивных ионизаторов.

Итак, при ионизации газовых молекул под действием внешнего источника из молекулы обычно вырывается один электрон и остается положительный молекулярный ион с зарядом  $e^+$ , т. е. образуется пара — положительный ион и электрон. Вырвавшийся электрон обычно присоединяется к какой-либо другой молекуле и образует отрицательный молекулярный ион с зарядом  $e^-$ , опять образуется пара — положительный и отрицательный ионы. Оба типа ионов одновалентны ( $z = 1$ ), имеют одинаковую концентрацию  $n$ , но несколько различные подвижности:  $\mu_+$  и  $\mu_-$ . Под действием внешнего электрического поля эти ионы начинают двигаться и возникает *электрический ток*.

*Электрический ток, возникающий в процессе ионизации газа, — ток в газах — это встречный поток ионов и свободных электронов.*

Наряду с термином «**ионизация**» часто употребляют термин «**генерация**», характеризующий тот же самый процесс образования носителей зарядов в газе.

Одновременно с процессом ионизации идет обратный процесс — **рекомбинация** (иначе — **молизация**).

**Рекомбинация** — это **нейтрализация** при встрече разноименных ионов или **воссоединение** иона и электрона в нейтральную молекулу (атом).

**Факторы, под действием которых возникает ионизация в газе, называют внешними ионизаторами, а возникающая при этом проводимость называется несамостоятельной проводимостью.**

При данной мощности внешнего ионизатора в объеме газа устанавливается **равновесное состояние**, при котором число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за одну секунду в единице объема, равно числу пар рекомбинировавших ионов. При этом **скорость ионизации равна скорости рекомбинации**:

$$v_{\text{ген}} = v_{\text{рек}} \quad (1.9.1)$$

Таким образом, ионизованный газ способен проводить ток. Явление прохождения электрического тока через газ называется **газовым разрядом**. Газовые разряды можно разделить на два вида: **несамостоятельный и самостоятельный**.

### 1.9.2. НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

**Несамостоятельным газовым разрядом** называется такой разряд, который, возникнув при наличии электрического поля, может существовать только под действием внешнего ионизатора.

Рассмотрим физические процессы, имеющие место при несамостоятельном газовом разряде. Введем ряд обозначений: обозначим через  $N_0$  число молекул газа в исследуемом объеме  $V$ . Концентрация молекул  $n_0 = N_0/V$ . Часть молекул ионизирована. Обозначим число ионов одного знака через  $N$ ; их концентрация  $n = N/V$ . Далее, обозначим через  $\Delta n_i$  число пар ионов, возникающих под

действием ионизатора за одну секунду в единице объема газа.

Наряду с процессом ионизации в газе происходит рекомбинация ионов. Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов, а эти числа в свою очередь равны  $n$ . Следовательно, число пар ионов, рекомбинирующих за секунду в единице объема, пропорционально  $n^2$ :

$$\Delta n_r = rn^2, \quad (1.9.2)$$

где  $r$  — коэффициент рекомбинации.

В состоянии равновесия число возникающих ионов в единице объема равно числу рекомбинирующих:

$$\Delta n_i = \Delta n_r = rn^2. \quad (1.9.3)$$

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (1.9.4)$$

Схема эксперимента с газоразрядной трубкой изображена на рисунке 1.9.1.

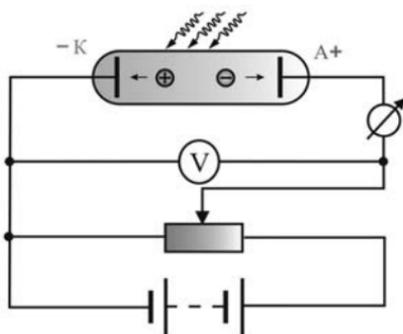


Рис. 1.9.1

Проанализируем далее действие электрического поля на процессы в ионизованных газах. Подадим постоянное напряжение на электроды. Положительные ионы будут направляться к отрицательному электроду, а отрицательные заряды — к положительному электроду. Таким образом,

часть носителей из газоразрядного промежутка будет уходить к электродам (в цепи возникнет электрический ток). Пусть из единицы объема уходит каждую секунду  $\Delta n_i$  пар ионов. Теперь условие равновесия можно представить в виде:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j. \quad (1.9.5)$$

1. Рассмотрим случай **слабого поля**:  $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ . В цепи будет протекать **слабый ток**. Плотность тока по величине пропорциональна концентрации носителей  $n$ , заряду  $q$ , переносимому каждым носителем, и скорости направленного движения положительных и отрицательных ионов ( $\vec{v}^+$  и  $\vec{v}^-$ ):

$$\vec{j} = nq(\vec{v}^+ + \vec{v}^-). \quad (1.9.6)$$

Скорость направленного движения ионов выражается через подвижность  $\mu$  и напряженность  $\vec{E}$  электрического поля:

$$\vec{v}^+ = \mu_+ \vec{E}; \quad \vec{v}^- = \mu_- \vec{E}. \quad (1.9.7)$$

**Подвижность** — физическая величина, численно равная скорости направленного движения ионов в газе под действием поля с напряженностью 1 В/м.

На основании (1.9.6) для плотности тока имеем

$$\vec{j} = nq(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}. \quad (1.9.8)$$

В слабом поле ( $\Delta n_j \ll \Delta n_r$ ) равновесная концентрация равна  $n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}$ . Подставим это выражение в (1.9.7):

$$\vec{j} = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}. \quad (1.9.9)$$

В последнем выражении множитель при  $\vec{E}$  не зависит от напряженности. Обозначив его через  $\sigma$ , получим **закон Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.9.10)$$

где  $\sigma = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(\mu_+ + \mu_-)$  — удельная электропроводность.

**Вывод:** в случае слабых электрических полей ток при несамостоятельном разряде подчиняется закону Ома.

2. Рассмотрим *сильное поле*. В этом случае  $\Delta n_j \ll \Delta n_r$  и  $\Delta n_i = \Delta n_j$ , т. е. все генерируемые ионы уходят из газоразрядного промежутка под действием электрического поля. Это объясняется тем, что за время, требующееся иону, чтобы пролететь в сильном поле  $\vec{E}$  от одного электрода к другому, ионы не успевают сколько-нибудь заметно рекомбинировать. Поэтому все ионы, производимые ионизатором, участвуют в создании тока и уходят на электроды. А так как число генерируемых ионизатором ионов в единицу времени ( $\Delta n_i$ ) не зависит от напряженности поля, то плотность тока будет определяться только величиной  $\Delta n_i$  и не будет зависеть от  $E$ . Другими словами, с дальнейшим увеличением приложенного напряжения ток перестает расти и *остается постоянным*.

*Максимальное значение тока, при котором все образующиеся ионы уходят к электродам, носит название тока насыщения.*

Дальнейшее увеличение напряженности поля ведет к образованию *лавины* электронов, когда возникшие под действием ионизатора электроны приобретают на длине свободного пробега (от столкновения до столкновения) энергию, достаточную для ионизации молекул газа (ударная ионизация). Возникшие при этом вторичные электроны, разогнавшись, в свою очередь, производят ионизацию и т. д. — происходит лавинообразное размножение первичных ионов и электронов, созданных внешним ионизатором, и усиление разрядного тока.

На рисунке 1.9.2 изображен процесс образования лавины.

Полученные результаты можно изобразить графически (см. рис. 1.9.3) в виде вольт-амперной характеристики несамостоятельного газового разряда.

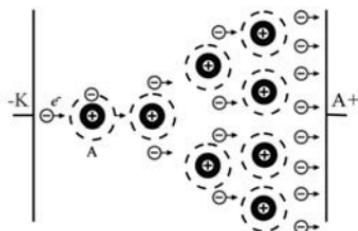


Рис. 1.9.2

**Вывод:** для несамостоятельного разряда при малых плотностях тока, т. е. когда основную роль в исчезновении зарядов из газоразрядного промежутка играет

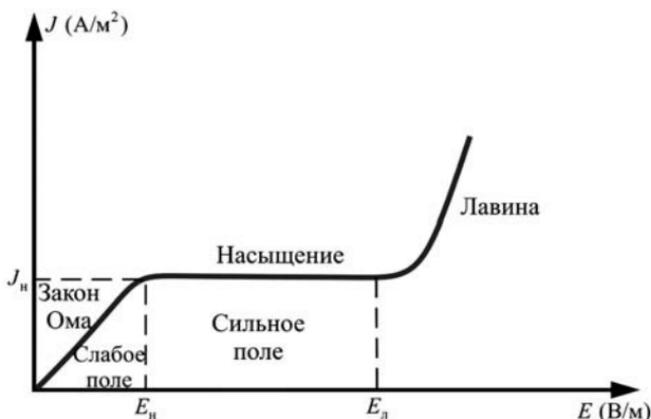


Рис. 1.9.3

процесс рекомбинации, имеет место закон Ома ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ); при больших полях ( $E \geq E_n$ ) закон Ома не выполняется — наступает явление насыщения, а при полях, превышающих  $E_d$ , — возникает лавина зарядов, обуславливающая значительное увеличение плотности тока.

### 1.9.3. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

Рассмотренный выше процесс возникновения и образования лавин за счет ударной ионизации не утрачивает характера несамостоятельного разряда, так как в случае прекращения действия внешнего ионизатора разряд быстро исчезает.

Однако возникновение и образование лавины зарядов не ограничивается процессом ударной ионизации. При дальнейшем сравнительно небольшом увеличении напряжения на электродах газоразрядного промежутка положительные ионы приобретают большую энергию и, ударяясь о катод, выбивают из него электроны, происходит **вторичная электронная эмиссия**. Возникшие свободные электроны на пути к аноду производят ударную ионизацию молекул газа. Положительные ионы на пути к катоду при электрических полях  $E = E_d$  сами ионизируют молекулы газа.

Если каждый выбитый с катода электрон способен ускориться и производить ударную ионизацию молекул

газа, то разряд будет поддерживаться и после прекращения воздействия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором развивается самостоятельный разряд, называется *напряжением замыкания*.

На основании сказанного *самостоятельным разрядом* будем называть такой газовый разряд, в котором носители тока возникают в результате тех процессов в газе, которые обусловлены приложенным к газу напряжением, т. е. данный разряд продолжается и после прекращения действия ионизатора.

Когда межэлектродный промежуток перекрывается полностью проводящей газоразрядной плазмой, наступает его *пробой*. Напряжение, при котором происходит пробой межэлектродного промежутка, называется *пробивным напряжением*. А соответствующая напряженность электрического поля носит название *пробивная напряженность*.

Рассмотрим условия возникновения и поддержания самостоятельного разряда.

При больших напряжениях между электродами газового промежутка ток сильно возрастает. Это происходит вследствие того, что возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваются с нейтральными молекулами газа и ионизируют их. В результате этого образуются *вторичные электроны* и *положительные ионы* (процесс 1, рис. 1.9.4). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны — к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения

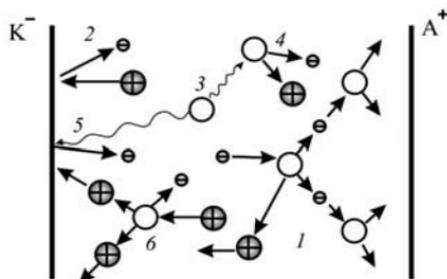


Рис. 1.9.4

электронов к аноду лавинообразно. Это и является причиной увеличения электрического тока. Описанный процесс называется *ударной ионизацией*.

Однако ударная ионизация под действием электронов недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Для этого необходимо, чтобы электронные лавины «воспроизводились», т. е. чтобы в газе под действием каких-то процессов возникали новые электроны. Это следующие процессы:

- ускоренные электрическим полем положительные ионы, ударяясь о катод, выбивают из него электроны (процесс 2);
- положительные ионы, сталкиваясь с молекулами газа, переводят их в возбужденное состояние; переход таких молекул в основное состояние сопровождается испусканием фотонов (процесс 3);
- фотон, поглощенный нейтральной молекулой, ионизирует ее, происходит процесс фотонной ионизации молекул (процесс 4);
- выбивание электронов из катода под действием фотонов (процесс 5);
- наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка наступает момент, когда положительные ионы, обладающие меньшей длиной свободного пробега, чем электроны, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа (процесс 6), и к отрицательной пластине устремляются ионные лавины. Когда возникают, кроме электронных лавин, еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения.

#### 1.9.4. ТИПЫ РАЗРЯДОВ

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов и параметров внешней цепи существуют четыре типа самостоятельных разрядов:

- тлеющий;
- искровой;
- дуговой;
- коронный.

1. *Тлеющий разряд* возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 1.9.5). Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый *катодной светящейся пленкой 2*.

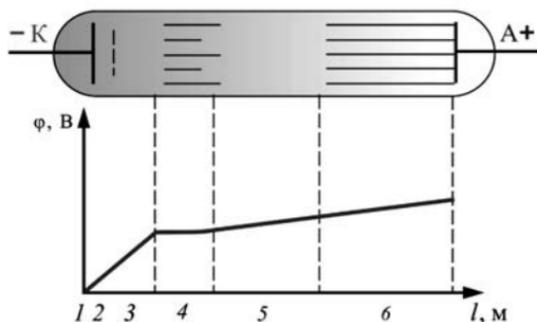


Рис. 1.9.5

Между катодом и пленкой находится *астоновое темное пространство 1*. Справа от светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, называемый *катодным темным пространством 3*. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют *тлеющим свечением 4*, с тлеющим пространством граничит темный промежуток — *фарадеево темное пространство 5*. Все перечисленные слои образуют *катодную часть* тлеющего разряда. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом. Эту часть называют *положительным столбом 6*.

При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство увеличиваются, а положительный столб укорачивается.

Измерения показали, что почти все падения потенциала приходится на первые три участка разряда (астоновое темное пространство, катодная светящаяся пленка и катодное темное пятно). Эту часть напряжения, приложенного к трубке, называют *катодным падением потенциала*.

В области тлеющего свечения потенциал не изменяется — здесь напряженность поля равна нулю. Наконец, в фарадеевом темном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растет.

Такое распределение потенциала вызвано образованием в катодном темном пространстве положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. В астоновом темном пространстве эти электроны, пролетевшие без столкновений в область катодного темного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают, т. е. интенсивность свечения газа уменьшается, но зато образуется много электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы вначале имеют очень малую скорость, и потому в катодном темном пространстве создается положительный пространственный заряд, что и приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие в катодном темном пространстве, проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов, коленарным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала. В области тлеющего свечения идет интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом тлеющее свечение есть в основном свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево темное пространство электроны и ионы проникают за счет диффузии. Вероятность рекомбинации здесь сильно падает, так как концентрация заряженных частиц невелика. Поэтому в фарадеевом темном пространстве имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны накапливают энергию и часто, в конце концов, возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано в основном переходами возбужденных молекул в основное состояние.

**2. Искровой разряд** возникает в газе обычно при давлениях порядка атмосферного. Он характеризуется прерывистой формой. По внешнему виду искровой разряд представляет собой пучок ярких зигзагообразных разветвляющихся тонких полос, мгновенно пронизывающих разрядный промежуток, быстро гаснущих и постоянно сменяющих друг друга (рис. 1.9.6). Эти полосы называют *искровыми каналами*.

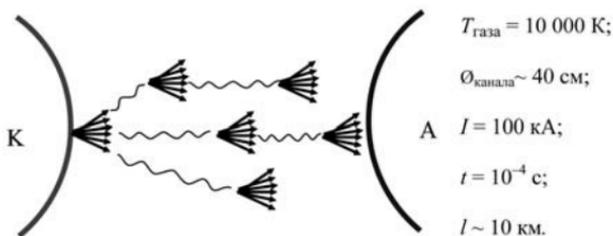


Рис. 1.9.6

После того как разрядный промежуток «пробит» искровым каналом, сопротивление его становится малым, через канал проходит кратковременный импульс тока большой силы, в течение которого на разрядный промежуток приходится лишь незначительное напряжение. Если мощность источника не очень велика, то после этого импульса тока разряд прекращается. Напряжение между электродами начинает повышаться до прежнего значения, и пробой газа повторяется с образованием нового искрового канала.

В естественных природных условиях искровой разряд наблюдается в виде молнии. На рисунке 1.9.7 изображен



Рис. 1.9.7

пример искрового разряда — молния продолжительностью 0,2–0,3 с, силой тока  $10^4$ – $10^5$  А, длиной 20 км.

**3. Дуговой разряд.** Если после получения искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд из прерывистого становится непрерывным, возникает новая форма газового разряда, называемая *дуговым разрядом* (рис. 1.9.8).

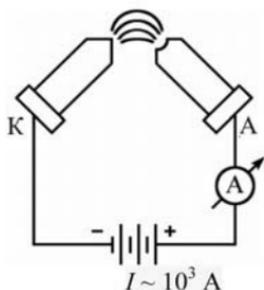


Рис. 1.9.8

При этом ток резко увеличивается, достигая десятков и сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт. Согласно Д. Ф. Миткевичу (1872–1951), дуговой разряд поддерживается главным образом за счет термоэлектронной эмиссии с поверхности катода. На практике — это сварка, мощные дуговые печи.

**4. Коронный разряд** (рис. 1.9.9) возникает в сильном неоднородном электрическом поле при сравнительно высоких давлениях газа (порядка атмосферного). Такое поле можно получить между двумя электродами, поверхность одного из которых обладает большой кривизной (тонкая проволочка, острие).

Наличие второго электрода необязательно, но его роль могут играть ближайшие окружающие заземленные метал-

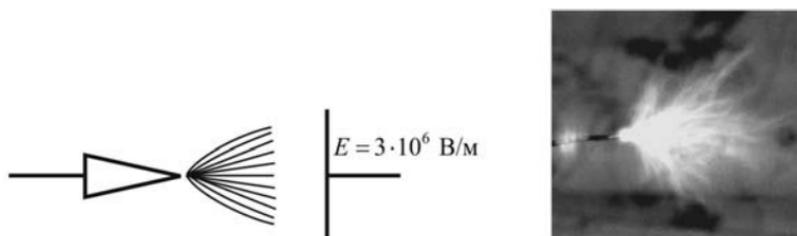


Рис. 1.9.9

лические предметы. Когда электрическое поле вблизи электрода с большой кривизной достигает примерно  $3 \cdot 10^6$  В/м, вокруг него возникает свечение, имеющее вид оболочки или короны, откуда и произошло название заряда.

#### 1.9.5. ПРИМЕНЕНИЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Глубокое понимание процессов, сопровождающих газовый разряд, привело к созданию ряда приборов и устройств, которые широко используются в различных областях науки и техники. Самые распространенные приборы, основанные на явлении газового разряда, можно разделить на следующие группы:

- тиратроны и газотроны тлеющего разряда;
- стабилитроны тлеющего и коронного разрядов;
- счетчики коммутаторные, векотроны;
- индикаторы тлеющего разряда;
- газотроны, тиратроны с наполненным катодом;
- импульсные водородные тиратроны с наполненным катодом;
- газоразрядные приборы очень разнообразны и различаются видом используемого разряда. Они предназначены для стабилизации напряжения, защиты от перенапряжения, выполнения переключательных функций, индикации электрического состояния для регистрации заряженных частиц и т. д.

Искровой разряд нашел широкое применение в науке и технике. С его помощью инициируют взрывы и процессы горения.

В последнее время для повышения защиты уязвимых и ответственных объектов, например пусковых комплексов ракет, пытаются реализовать различные формы управления молнией, в частности лазерное инициирование молнии. Лазерное инициирование основано на создании в воздухе ионизированного канала с помощью лазерного излучения.

### 1.9.6. ПОНЯТИЕ О ПЛАЗМЕ

В газовом разряде возникает большое количество положительных ионов вследствие высокой эффективности ударной ионизации, причем концентрация ионов и электронов одинакова. Такая система из электронов и положительных ионов, распределенных с одинаковой концентрацией, называется *плазмой*. Термин «плазма» был введен в 1929 г. американскими физиками И. Ленгмюром и Л. Тонксом.

Плазма, возникающая в газовом разряде, носит название газоразрядной; к ней относятся положительный столб тлеющего разряда, канал искрового и дугового разрядов.

Положительный столб представляет собой так называемую *неизотермическую плазму*. В такой плазме средние кинетические энергии электронов, ионов и нейтральных молекул (атомов) различны.

Вспомним связь между средней кинетической энергией молекул идеального газа (давление газа в тлеющем разряде невелико, поэтому его можно считать идеальным) и температурой:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Можно утверждать, что температуры компонентов плазмы различны. Так, электронная температура в тлеющем разряде в неоне при давлении 3 мм рт. ст. — порядка  $4 \cdot 10^4$  К, а температура ионов и атомов — 400 К, причем температура ионов несколько выше атомной температуры.

*Плазма, в которой выполняется равенство  $T_e = T_i = T_a$*  (где индексы «e», «i», «a» относятся к электронам,

ионам, атомам), *называется изотермической*. Такая плазма имеет место при ионизации с помощью высокой температуры (дуга, горячая при атмосферном и выше давлении, искровой канал); например, в дуге сверхвысокого давления (до 1000 атм) температура плазмы достигает 10 000 К, температура плазмы при термоядерном взрыве — порядка нескольких десятков миллионов градусов.

Плазма может возникнуть не только при прохождении тока через газ. Газ можно перевести в плазменное состояние и путем его нагревания до высоких температур. Внутренние области звезд (в том числе и Солнце) находятся в плазменном состоянии, температуры которых достигают  $10^8$  К.

Кулоновское дальнедействующее взаимодействие заряженных частиц в плазме приводит к качественному своеобразию плазмы, позволяющему считать ее особым, *четвертым, агрегатным состоянием вещества*.

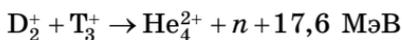
#### ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

- Сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями, связанное с ее высокой электропроводностью;
- специфическое коллективное взаимодействие частиц плазмы, осуществляющееся через усредненные электрические и магнитные поля, которые создают сами эти частицы;
- благодаря коллективным взаимодействиям плазма ведет себя как своеобразная упругая среда, в которой легко возбуждаются и распространяются различного рода колебания и волны (например, ленгмюровские колебания плазмы);
- во внешнем магнитном поле плазма ведет себя как диамагнитная среда;
- удельная электрическая проводимость  $\sigma$  полностью ионизованной плазмы не зависит от плотности плазмы и увеличивается с ростом термодинамической температуры пропорционально  $T^{3/2}$ . При  $T \geq 10^7$  К  $\sigma$  столь велика, что плазму можно приближенно считать идеальным проводником ( $\sigma \rightarrow \infty$ ).

Плазма — наиболее распространенное состояние вещества во Вселенной. Солнце и другие звезды состоят из полностью ионизованной высокотемпературной плазмы. Основным источником энергии излучения звезд — термодинамические реакции синтеза, протекающие в недрах звезд при огромных температурах. Холодные туманности и межзвездная среда также находятся в плазменном состоянии. Они представляют собой низкотемпературную плазму, ионизация которой происходит главным образом путем фотоионизации под действием ультрафиолетового излучения звезд. В околоземном пространстве слабоионизованная плазма находится в радиационных поясах и ионосфере Земли. С процессами, происходящими в этой плазме, связаны такие явления, как магнитные бури, нарушения дальней радиосвязи и полярные сияния.

Низкотемпературная газоразрядная плазма, образующаяся при тлеющем, искровом и дуговом разрядах в газах, широко используется в различных источниках света, в газовых лазерах, для сварки, резки, плавки и других видов обработки металлов.

Основной практический интерес к физике плазмы связан с решением проблемы управляемого термоядерного синтеза — процесс слияния легких атомных ядер при высоких температурах в управляемых условиях (рис. 1.9.10). Энергетический выход реактора составляет  $10^5$  кВт/м<sup>3</sup> в реакции



при плотности плазмы  $10^5$  см<sup>-3</sup> и температуре  $10^8$  К.

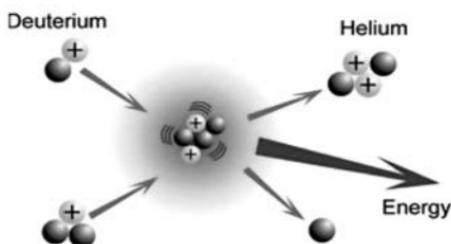


Рис. 1.9.10

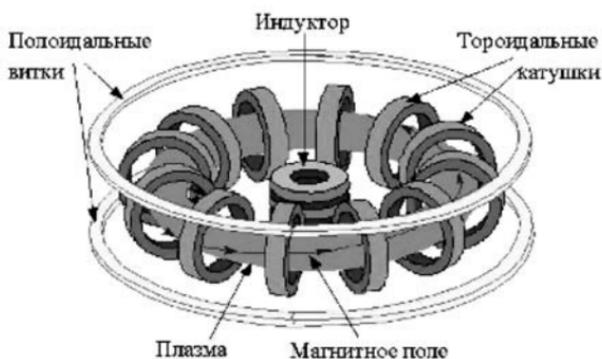


Рис. 1.9.11

Удерживать высокотемпературную плазму предлагается (И. Е. Тамм, А. Д. Сахаров, СССР, 1950) сильным магнитным полем в тороидальной камере с магнитными катушками, сокращенно — **ТОКАМАК** (рис. 1.9.11). Управление термоядерной реакцией в высокотемпературной плазме позволит человечеству в будущем получить практически неисчерпаемый источник энергии.

Низкотемпературная плазма ( $T \sim 10^3$  К) находит применение в газоразрядных источниках света, газовых лазерах, термоэлектронных преобразователях тепловой энергии в электрическую. Возможно создание плазменного двигателя, эффективного для маневрирования в космическом пространстве и длительных космических полетов.

Плазма служит в качестве рабочего тела в плазменных ракетных двигателях и *магнитогидродинамическом генераторе* (МГД-генератор).

Движение плазмы в магнитном поле используется в методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую. Этот метод осуществлен в МГД-генераторе, принципиальная схема которого показана на рисунке 1.9.12.

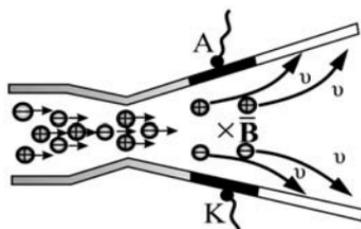


Рис. 1.9.12

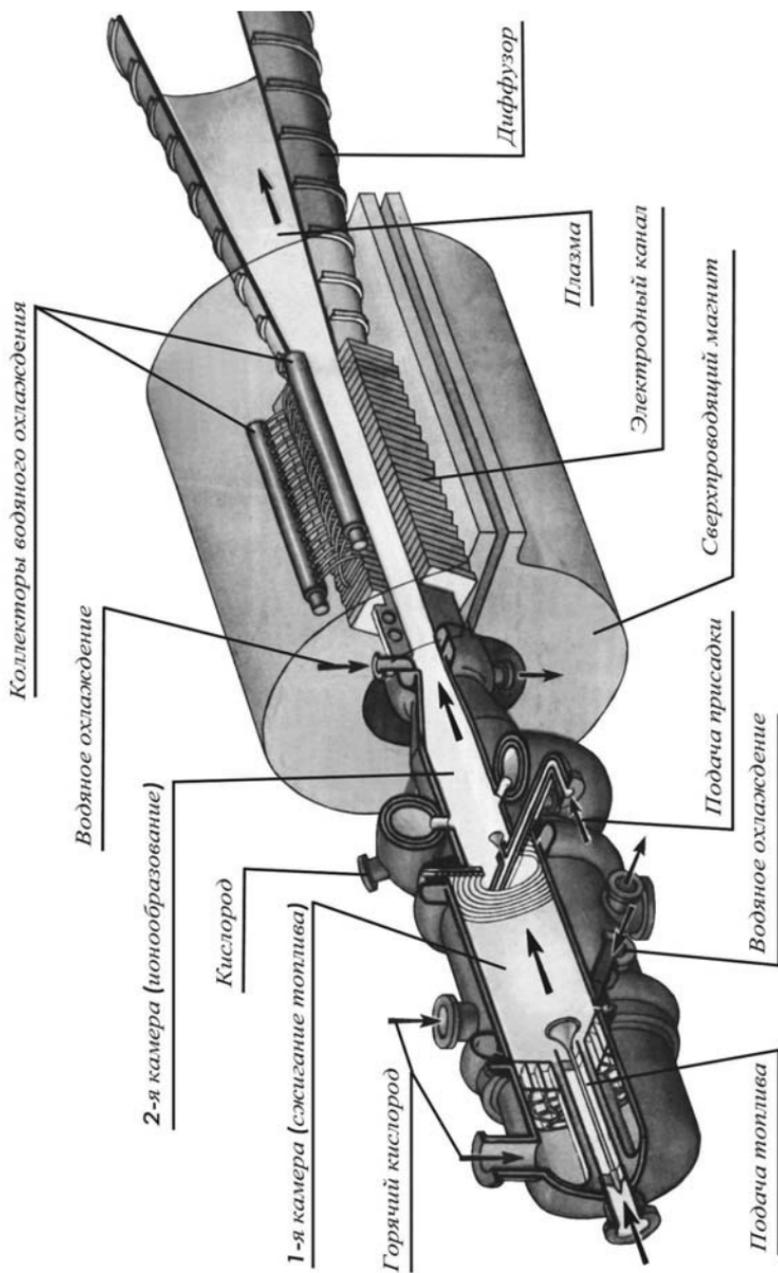


Рис. 1.9.13

Сильно нагретый ионизованный газ, образующийся в результате сгорания топлива и обогащения продуктов сгорания парами щелочных металлов, которые способствуют повышению степени ионизации газа, проходит через сопло и расширяется в нем. При этом часть внутренней энергии газа преобразуется в его кинетическую энергию. В поперечном магнитном поле (рис. 1.9.12) вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции поля направлен за плоскость чертежа, положительные ионы отклоняются под действием сил Лоренца к верхнему электроду А, а свободные электроны — к нижнему электроду К. При замыкании электродов на внешнюю нагрузку в ней идет электрический ток, направленный от анода А, МГД-генератора к его катоду К.

Более подробно устройство МГД-генератора показано на рисунке 1.9.13.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте определение процессам ионизации и рекомбинации.
2. Назовите два вида газовых разрядов.
3. Выполняется ли закон Ома при самостоятельном газовом разряде?
4. Как происходит газовый разряд в сильном поле? Дайте понятие тока насыщения.
5. Изобразите процесс образования лавины.
6. Приведите вольт-амперную характеристику самостоятельного газового разряда.
7. Какой разряд называется самостоятельным?
8. Каковы условия возникновения и поддержания самостоятельного разряда?
9. Охарактеризуйте типы самостоятельного газового разряда. В чем их особенности?
10. Приведите характеристики газовых разрядов.
11. Где применяются газовые разряды?
12. К какому типу газового разряда относится молния?
13. Может ли возникнуть ток насыщения при самостоятельном газовом разряде?
14. В чем отличие самостоятельного газового разряда от самостоятельного? Каковы условия, необходимые для его осуществления?
15. Дайте понятие плазмы.
16. В чем отличие равновесной плазмы от неравновесной?
17. Приведите важнейшие свойства плазмы.

18. Чем обусловлен практический интерес к физике плазмы?
19. Что такое ТОКАМАК?
20. \* Как используется плазма в магнитогидродинамическом генераторе?
21. \* Приведите примеры использования газоразрядных элементов в экранах плоских телевизоров.
22. \* Расскажите о методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую.
23. Опишите устройство МГД-генератора и принцип его работы.

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.1.** Четыре одинаковых положительных точечных заряда  $3 \cdot 10^{-9}$  Кл находятся в вершинах квадрата. Найдите величину заряда (в нКл), помещенного в центр квадрата, при котором система находится в равновесии.

**Дано:**

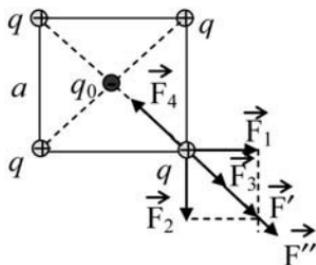
$$q = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_0 = ?$$

Так как по условию задачи система находится в равновесии, то должно выполняться условие равновесия:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0.$$

**Р е ш е н и е:**



Так как заряды в вершинах квадрата одинаковы, расстояния между ними одинаковы, то и силы, действующие на эти заряды, будут одинаковы. Поэтому на рисунке для простоты расставим силы, действующие только на один заряд. Для того, чтобы вся система находилась в равновесии, в центр квадрата необходимо поместить отрицательный заряд.

Сила, действующая на заряд, называется кулоновской силой и определяется по закону Кулона:

$$F_k = k_0 \frac{|q_1| |q_2|}{\epsilon r^2},$$

где  $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  (м/Ф), электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}$ ;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды. Так как среда в задаче не указана, считаем, что  $\epsilon = 1$  (заряды находятся в вакууме);  $r$  — расстояние между зарядами.

Пусть сторона квадрата будет  $a$ .

Из рисунка видно, что

$$F_1 = F_2 = k \frac{q^2}{a^2}; \quad F_3 = k \frac{q^2}{2a^2} = 0,5k \frac{q^2}{a^2}; \quad F_4 = 2k \frac{|q||q_0|}{a^2}.$$

Сначала просуммируем силы  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}'.$$

В скалярном виде результирующая сила находится по теореме Пифагора:

$$F' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = F_1 \sqrt{2} = 1,4 \frac{kq^2}{a^2}.$$

Теперь удобно сложить силы  $F_3$  и  $F'$ . Они направлены по одной прямой в одну сторону. Следовательно, их результирующая  $F''$  будет равна их скалярной сумме:

$$F'' = F' + F_3 = 1,4 \frac{kq^2}{a^2} + 0,5 \frac{kq^2}{a^2} = 1,9 \frac{kq^2}{a^2}.$$

Осталось сложить две силы  $F_4$  и  $F''$ . Эти силы в сумме должны давать ноль (условие равновесия). Согласно рисунку они направлены по одной прямой в противоположные стороны. Значит, модули этих сил должны быть равны:

$$\begin{aligned} 2 \frac{k|q||q_0|}{a^2} &= 1,9 \frac{kq^2}{a^2}; \\ 2|q_0| &= 1,9q. \end{aligned}$$

Тогда величина заряда, помещенного в центр квадрата  $|q_0| = 0,95q$ :

$$q_0 = -0,95q = -0,95 \cdot 3 \cdot 10^{-9} = -2,85 \cdot 10^{-9} \text{ (Кл)} \approx -2,9 \text{ (нКл)}.$$

Ответ:  $q_0 = -2,9$  нКл.

**Задача 1.2.\*** Одинаковые шарики, подвешенные на нитях равной длины, закрепленных в одной точке, зарядили одинаковыми одноименными зарядами. Шарики оттолкнулись, и угол между нитями стал равен  $60^\circ$ . После погружения шариков в жидкий диэлектрик угол между нитями уменьшился до  $50^\circ$ . Найдите диэлектрическую проницаемость среды. Выталкивающей силой пренебречь.

**Дано:**

$$\varepsilon_1 = 1$$

$$l_1 = l_2 = l$$

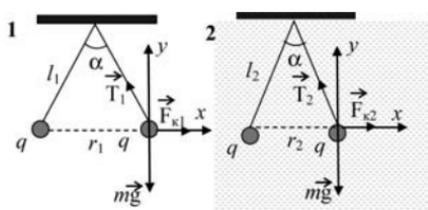
$$q_1 = q_2 = q$$

$$\alpha_1 = 60^\circ$$

$$\alpha_2 = 50^\circ$$

$$\varepsilon_2 = ?$$

**Решение:**



1. Оттолкнувшись, шарики разошлись на расстояние  $r_1$  и остались в этом положении (положение равновесия), следовательно, векторная сумма всех сил, действующих на шарик, равна нулю:  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ .

Тогда

$$\vec{F}_{к1} + \vec{T}_1 + m\vec{g} = 0.$$

Перепишем это уравнение в проекциях на оси  $x$  и  $y$ :

$$F_{к1} = T_1 \sin \frac{\alpha_1}{2}; \quad (1)$$

$$mg = T_1 \cos \frac{\alpha_1}{2}. \quad (2)$$

Поделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{F_{к1}}{mg} = \operatorname{tg} 30^\circ; \quad \frac{kq^2}{\varepsilon_1 r_1^2 mg} = \operatorname{tg} 30^\circ; \quad (3)$$

$$kq^2 = \varepsilon_1 r_1^2 mgtg 30^\circ.$$

2. После погружения шариков в жидкий диэлектрик угол между нитями уменьшился до  $50^\circ$ .

Сделав аналогичные преобразования для второго случая, получим выражение, схожее с выражением (3):

$$kq^2 = \varepsilon_2 r_2^2 mgtg 25^\circ. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), найдем  $\varepsilon_2$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 r_1^2 m g \operatorname{tg} 30^\circ &= \varepsilon_2 r_2^2 m g \operatorname{tg} 25^\circ; \\ \varepsilon_1 r_1^2 \operatorname{tg} 30^\circ &= \varepsilon_2 r_2^2 \operatorname{tg} 25^\circ.\end{aligned}$$

Выразим  $r_1$  и  $r_2$  через длину нити  $l$ :

$$\begin{aligned}r_1 &= 2l \sin 30^\circ; & r_2 &= 2l \sin 25^\circ; \\ \varepsilon_1 \cdot 4l^2 \sin^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ &= \varepsilon_2 \cdot 4l^2 \sin^2 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ; \\ \varepsilon_1 \cdot \sin^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ &= \varepsilon_2 \cdot \sin^2 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ.\end{aligned}$$

Из этого выражения найдем диэлектрическую проницаемость среды  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot \frac{\sin^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\sin^2 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ} = 1 \cdot \frac{0,25 \cdot 0,577}{0,179 \cdot 0,466} = 1,7.$$

Ответ:  $\varepsilon_2 = 1,7$ .

**Задача 1.3.** Маленький шарик массой 100 мг и зарядом 16,7 нКл подвешен на нити. На какое расстояние (в см) надо подвести к нему снизу одноименный и равный ему заряд, чтобы сила натяжения нити уменьшилась вдвое?

**Дано:**

$$\begin{aligned}m &= 100 \text{ мг} \\ q &= 16,7 \text{ нКл} \\ T_1 &= 2T_2 \\ k &= 1/4\pi\varepsilon_0 \\ g &= 10 \text{ м/с}^2\end{aligned}$$

**СИ:**

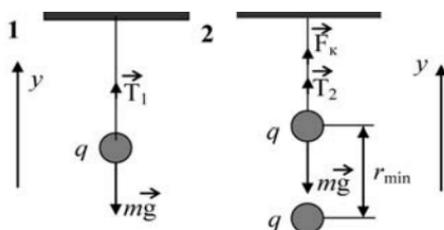
$$\begin{aligned}10^{-4} \text{ кг} \\ 16,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \\ 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2\end{aligned}$$

**Решение:**

1. В первом случае сила тяжести шарика уравновешивается силой натяжения нити:

$$T_1 = mg.$$

2. Во втором случае с появлением одноименного заряда первый шарик приподнимается вверх за счет кулоновской силы отталкивания. Сила натяжения нити при этом



уменьшается (в 2 раза по условию задачи). И шарик вновь достигает положения равновесия:

$$T_2 = mg - F_{\text{к}}.$$

Но по условию  $T_1 = 2T_2$ .

Тогда  $mg = 2mg - 2F_{\text{к}}$ ,

$$mg = 2mg - 2 \frac{kq^2}{r_{\text{min}}^2} \quad \text{или} \quad 2 \frac{kq^2}{r_{\text{min}}^2} = mg.$$

Выразим отсюда расстояние  $r_{\text{min}}$ , на которое надо подвести снизу одноименный и равный заряд:

$$\begin{aligned} r_{\text{min}}^2 &= 2 \frac{kq^2}{mg}; \\ r_{\text{min}} &= q \sqrt{\frac{2k}{mg}} = 16,7 \cdot 10^{-9} \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9}{10^{-4} \cdot 10}} = \\ &= 70,9 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 0,07 \text{ (м)} = 7 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $r_{\text{min}} = 7$  см.

**Задача 1.4.** Шар, диаметр которого 1 см и заряд 1 мкКл, погружен в масло плотностью  $800 \text{ кг/м}^3$ . Плотность материала шара  $8600 \text{ кг/м}^3$ . Определите направленную вертикально вверх напряженность электрического поля (в кВ/м), в которое надо поместить шар, чтобы он находился в равновесии.

**Дано:**

$$d = 10^{-2} \text{ м}$$

$$q = 10^{-6} \text{ Кл}$$

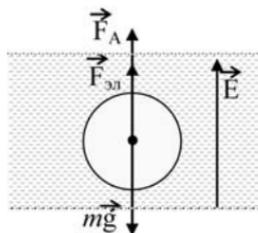
$$\rho_{\text{м}} = 800 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_{\text{ш}} = 8600 \text{ кг/м}^3$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$E = ?$$

**Решение:**



Шар плавает в масле. Значит, все силы, действующие на него, скомпенсированы.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

— условие равновесия.

$$F_A + F_{эл} = mg;$$

$$\rho_M gV + qE = \rho_{ш} Vg.$$

Из полученного выражения найдем напряженность электрического поля:

$$E = \frac{\rho_{ш} - \rho_M}{q} gV,$$

где  $V$  — объем шара.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Тогда

$$E = \frac{\rho_{ш} - \rho_M}{q} \frac{g\pi d^3}{6} = \frac{8600 - 800}{10^{-6}} \frac{10 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}}{6} =$$

$$= 40820 \text{ (В/м)} = 41 \text{ (кВ/м)}.$$

Ответ:  $E = 41$  кВ/м.

**Задача 1.5.** Точечный заряд  $q$  создает на расстоянии  $R$  от него электрическое поле с потенциалом  $\varphi_0 = 10$  В. Три концентрические сферы радиусами  $R$ ,  $2R$  и  $3R$  имеют равномерно распределенные по их поверхностям заряды  $q_1 = +2q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $q_3 = +q$  соответственно (см. рисунок). Каков потенциал поля в точке  $A$ , отстоящей от центра сфер на расстоянии  $2,5R$ ?

**Дано:**

$$\varphi_0 = 10 \text{ В}$$

$$q_1 = 2q$$

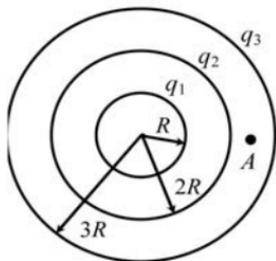
$$q_2 = -q$$

$$q_3 = +q$$

$$R_A = 2,5R$$

$$\varphi_A = ?$$

**Решение:**



Потенциал рассчитывается по формуле

$$\varphi_0 = k_0 \frac{q}{R}, \quad (1)$$

где (см. предыдущую задачу)  $k_0 = 9 \cdot 10^9$  (м/Ф).

Из формулы (1) выражаем величину заряда  $q$ :

$$q = \frac{\varphi_0 R}{k_0}. \quad (2)$$

Выразим все заряды через известный потенциал  $\varphi_0$ :

$$q_1 = 2q = 2 \frac{\varphi_0 R}{k}; \quad q_2 = -q = -\frac{\varphi_0 R}{k}; \quad q_3 = +q = \frac{\varphi_0 R}{k}. \quad (3)$$

Потенциал в точке  $A$  равен сумме потенциалов электрических полей, создаваемых каждым из зарядов отдельности:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \quad (4)$$

Распишем потенциал для каждой точки с учетом  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{kq_1}{r} = \frac{k}{2,5R} \cdot \frac{2\varphi_0 R}{k} = \frac{2\varphi_0}{2,5} = 0,8\varphi_0 = 8 \text{ (В)}; \\ \varphi_2 &= \frac{kq_2}{r} = \frac{k}{2,5R} \cdot \left(-\frac{\varphi_0 R}{k}\right) = -\frac{\varphi_0}{2,5} = -0,4\varphi_0 = -4 \text{ (В)}; \\ \varphi_3 &= \frac{kq_3}{r} = \frac{k}{3R} \cdot \frac{\varphi_0 R}{k} = \frac{\varphi_0}{3} = 3,34 \text{ (В)}. \end{aligned}$$

Подставим полученные значения в уравнение (4) и определим потенциал поля в точке  $A$ :

$$\varphi_A = 8 - 4 + 3,34 \approx 7,3 \text{ (В)}.$$

Ответ:  $\varphi_A = 7,3 \text{ В}$ .

**Задача 1.6.** Ртутный шарик, потенциал которого  $1,2 \text{ кВ}$ , разбивается на  $27$  одинаковых капелек. Определите потенциал каждой капельки.

**Дано:**

$$\varphi = 1,2 \cdot 10^3 \text{ В}$$

$$N = 27$$

$$\varphi_{\text{к}} = ?$$

Потенциал маленькой капли:

**Решение:**

Потенциал ртутного шарика равен

$$\varphi = \frac{kQ}{R}. \quad (1)$$

$$\varphi_{\text{к}} = \frac{kq}{r}. \quad (2)$$

Разделим (1) на (2):

$$\frac{\varphi}{\varphi_{\kappa}} = \frac{kQ}{R} \cdot \frac{r}{kq} = \frac{Qr}{qR}.$$

Таким образом, для решения задачи нужно найти соотношение между зарядами и радиусами ртутного шарика и маленькой капли. Совершенно очевидно, что если ртутный шарик делится на равные части, то и заряд делится поровну:

$$Q = Nq. \quad (3)$$

Кроме того, на 27 частей делится масса шарика  $M = Nm$ . Массу выразим через плотность и объем:

$$\rho V = N\rho V_{\kappa},$$

где  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  — объем ртутного шарика;  $V_{\kappa} = \frac{4}{3}\pi r^3$  — объем капли.

$$\rho \frac{4}{3}\pi R^3 = N\rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда  $R^3 = N \cdot r^3$ ,

$$R = r\sqrt[3]{N}. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (1), (2), (3) и (4), найдем потенциал маленькой капли:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\varphi_{\kappa}} &= \frac{kQ}{R} \cdot \frac{r}{kq_{\kappa}} = \frac{Nq_{\kappa} \cdot r}{r\sqrt[3]{N} \cdot q_{\kappa}} = \frac{N}{\sqrt[3]{N}} = \sqrt[3]{N^2}; \\ \varphi_{\kappa} &= \frac{\varphi}{\sqrt[3]{N^2}} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{\sqrt[3]{27^2}} = 133 \text{ (В)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\varphi_{\kappa} = 133 \text{ В}$ .

**Задача 1.7.** \* Электроны, ускоренные разностью потенциалов 1 кВ, влетают в электрическое поле отклоняющих пластин параллельно им, а затем попадают на экран, расположенный на расстоянии 0,1 м от конца пластин. На какое расстояние (в мм) сместится электронный луч на экране, если на пластины, имеющие длину 0,05 м и расположенные на расстоянии 0,01 м одна от другой, подать напряжение 100 В? Поле между пластинами считать однородным. Влиянием гравитационного поля пренебречь.

**Дано:**

$$\Delta\varphi = 10^3 \text{ В}$$

$$l = 0,1 \text{ м}$$

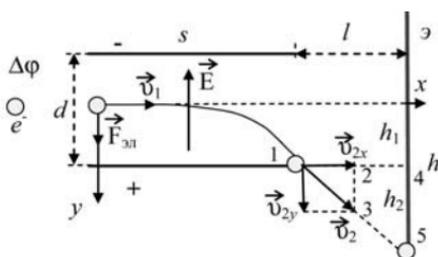
$$s = 0,05 \text{ м}$$

$$d = 0,01 \text{ м}$$

$$U = 100 \text{ В}$$

$$v_0 = 0$$

$$h = ?$$

**Решение:**Смещение электронов на экране  $\varepsilon$ :

$$h = h_1 + h_2,$$

где  $h_1$  — расстояние, которое проходит электрон при его движении в электрическом поле пластин, направленное вверх;  $h_2$  — расстояние, которое проходит электрон при его движении вне электрического поля.

Пройдя ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , электрон попадает в электрическое поле, где на него действует сила, которая смещает электрон. Электрон движется в двух направлениях  $x$  и  $y$ . Направление вдоль оси  $x$  — равномерное, вдоль  $y$  — ускоренное под действием силы  $F$ .

$$h_1 = v_{1y}t + \frac{at^2}{2}, \quad v_{1y} = 0;$$

$$h_1 = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Пройдя ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , электрон совершает работу:

$$A = q\Delta\varphi,$$

где  $q$  — заряд электрона.

При этом скорость электрона меняется от  $v_0$  до  $v_1$ , следовательно, меняется его кинетическая энергия. Значит, совершается работа:

$$A = \Delta W_{\text{к}} = \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2)$$

где  $m$  — масса электрона.

Приравняем правые части уравнений (1) и (2) и выразим скорость  $v_1$ :

$$\begin{aligned} q\Delta\varphi &= \frac{mv_1^2}{2}; \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2q\Delta\varphi}{m}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как движение в горизонтальном направлении равномерное, расстояние  $s$ , равное длине пластин, электрон проходит с постоянной скоростью  $v_1$ :

$$\begin{aligned} s &= v_1 t; \\ t &= \frac{s}{v_1} = s \sqrt{\frac{m}{2q\Delta\varphi}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сила, вызывающая ускорение:

$$\begin{aligned} F &= qE = ma; \\ a &= \frac{qE}{m}; \quad E = \frac{U}{d}; \\ a &= \frac{qU}{md}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (3) и (4) в уравнение (1), получим

$$h_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{qUs^2}{2md} \cdot \frac{m}{2q\Delta\varphi} = \frac{Us^2}{4d\Delta\varphi}. \quad (6)$$

Расстояние  $h_2$  можно найти из подобия треугольников 1-2-3 и 1-4-5:

$$\frac{v_{2x}}{l} = \frac{v_{2y}}{h_2}; \quad h_2 = l \frac{v_{2y}}{v_{2x}},$$

где  $v_{2x} = v_1 \sqrt{\frac{2q\Delta\varphi}{m}}$ .

$$\begin{aligned} v_{2y} &= v_{1y} + at = 0 + \frac{qU}{md}; \quad s \cdot \sqrt{\frac{m}{2q\Delta\varphi}} = \frac{qUs}{md} \cdot \sqrt{\frac{m}{2q\Delta\varphi}}; \\ h_2 &= l \cdot \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = l \cdot \frac{qUs}{md} \cdot \sqrt{\frac{m}{2q\Delta\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{m}{2q\Delta\varphi}} = l \cdot \frac{qUs}{md} \cdot \frac{m}{2q\Delta\varphi} = \frac{lUs}{2d\Delta\varphi}. \end{aligned}$$

Тогда расстояние, на которое сместится электронный луч на экране:

$$h = h_1 + h_2 = \frac{Us^2}{4d\Delta\varphi} + \frac{lUs}{2d\Delta\varphi} = \frac{Us}{2d\Delta\varphi} \left( \frac{s}{2} + l \right);$$

$$h = \frac{100 \cdot 0,05}{2 \cdot 0,01 \cdot 1000} \left( \frac{0,05}{2} + 0,1 \right) = 0,03125 \text{ (м)} = 31,25 \text{ (мм)}.$$

Ответ:  $h = 31,25$  мм.

**Задача 1.8.** Шарик массой 40 мг заряжен положительно. Величина заряда — 1 нКл. Шарик движется из бесконечности с начальной скоростью 10 см/с. На какое минимальное расстояние (в см) может приблизиться шарик к покоящемуся положительному точечному заряду 1,33 нКл?

**Дано:**

$$m = 40 \text{ мг}$$

$$q_1 = 1 \text{ нКл}$$

$$v_1 = 0,1 \text{ м/с}$$

$$q_2 = 1,33 \text{ нКл}$$

$$r_{\min} = ?$$

**СИ:**

$$4 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$$

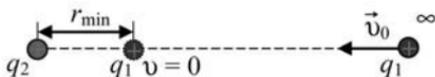
$$10^{-9} \text{ Кл}$$

$$1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

**Решение:**

На бесконечности полная энергия первого шарика будет равна его максимальной кинетической энергии:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv_0^2}{2}.$$



При приближении к одноименному заряду  $q_2$  увеличивается кулоновская сила отталкивания, и в некоторый момент времени заряд  $q_1$  останавливается. Его скорость становится равной нулю, а следовательно, равна нулю и кинетическая энергия. Она переходит в потенциальную энергию взаимодействия зарядов, т. е. закон сохранения механической энергии запишем в виде:

$$W_{\text{к}} = W_{\text{п}};$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{k|q_1||q_2|}{r_{\min}}.$$

Из полученного уравнения выразим  $r_{\min}$  — минимальное расстояние, на которое может приблизиться шарик с зарядом  $q_1$  к покоящемуся положительному точечному заряду  $q_2$ :

$$r_{\min} = \frac{2k|q_1||q_2|}{mv^2}.$$

Подставим численные значения и определим искомую величину:

$$r_{\min} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \cdot 1,33 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2}} = 0,06 \text{ (м)} = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ:  $r_{\min} = 6$  см.

**Задача 1.9.** Отрицательно заряженная пластина, создающая вертикально направленное однородное электрическое поле напряженностью  $10^4$  В/м, укреплена на горизонтальной плоскости. На нее с высоты 10 см падает шарик массой 20 г, имеющий положительный заряд  $10^{-5}$  Кл. Какой импульс шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе?

**Дано:**

$$E = 10^4 \text{ В/м}$$

$$h = 10 \text{ см}$$

$$m = 20 \text{ г}$$

$$q = 10^{-5} \text{ Кл}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$v_0 = 0$$

$$\Delta p = ?$$

**СИ:**

$$0,1 \text{ м}$$

$$0,02 \text{ кг}$$

**Решение:**

Импульс, который шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

В скалярной форме:

$$\Delta p = mv - (-mv) = 2mv. \quad (1)$$

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{эл}}.$$

В проекции на ось  $Oy$ :

$$ma = mg + F_{\text{эл}}; \quad F_{\text{эл}} = qE.$$

Тогда

$$ma = mg + qE.$$

Из этого уравнения выразим ускорение:

$$a = \frac{mg + qE}{m}.$$

Скорость найдем из уравнения равноускоренного движения с ускорением  $g$  и начальной нулевой скоростью:

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2h \frac{mg + qE}{m}}. \quad (2)$$

Полученное выражение для скорости (2) подставим в уравнение (1) и рассчитаем импульс, который шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе:

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2m \sqrt{2h \frac{mg + qE}{m}} = 2\sqrt{2mh(mg + qE)} = \\ &= 2\sqrt{2 \cdot 0,02 \cdot 0,1(0,02 \cdot 10 + 10^{-5} \cdot 10^4)} \approx 0,07 \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right). \end{aligned}$$

Ответ:  $\Delta p = 0,07$  кг·м/с.

**Задача 1.10.** Какой заряд (в мкКл) появится на заземленной проводящей сфере радиусом 3 см, если на расстоянии 10 см от ее центра поместить точечный заряд  $-20$  мкКл?

Дано:

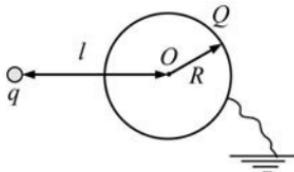
$$R = 0,03 \text{ м}$$

$$q = -20 \text{ мкКл}$$

$$l = 0,1 \text{ м}$$

$$Q = ?$$

Решение:



Если на некотором расстоянии от центра сферы поместить точечный заряд  $q$ , то на сфере появится заряд  $Q$ , который должен распределиться по сфере таким образом, чтобы потенциал всех точек внутри сферы и на ее поверхности стал равен нулю. Ясно, что в этом случае заряд будет распределен неравномерно. Но если приравнять нулю потенциал центра сферы, то его можно вычислить, используя метод суперпозиции:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 = 0. \quad (1)$$

Потенциал, создаваемый точечным зарядом  $q$ , равен

$$\varphi_1 = \frac{kq}{l}.$$

Тогда вклад зарядов, распределенных по сфере:

$$\varphi_2 = \sum \frac{k\Delta Q_i}{R} = k \frac{\sum \Delta Q_i}{R} = k \frac{Q}{R}.$$

Так как потенциал центра сферы равен нулю (1), то

$$0 = -\frac{kq}{l} + \frac{Q}{R}.$$

Отсюда определим заряд на заземленной проводящей сфере:

$$Q = \frac{qR}{l} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 0,03}{0,1} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл)} = 6 \text{ (мкКл)}.$$

Ответ:  $Q = 6$  мкКл.

**Задача 1.11.\*** Конденсатор зарядили до 100 В и подключили к нему резистор. Сразу после этого за некоторый интервал времени в цепи выделилось в виде тепла энергия 1 Дж, а за следующий такой же интервал — энергия 0,3 Дж. Определите емкость конденсатора (в мкФ). Принять, что за одинаковый интервал времени энергия конденсатора уменьшается в одинаковое число раз.

**Дано:**

$$U = 100 \text{ В}$$

$$W_1 = 1 \text{ Дж}$$

$$W_2 = 0,3 \text{ Дж}$$

$$C = ?$$

**Решение:**

Сила тока по определению:

$$I = \frac{dq'}{dt} = -\frac{dq}{dt}, \quad (1)$$

где  $q$  — заряд на конденсаторе, который можно определить из соотношения

$$q = CU. \quad (2)$$

По закону Ома:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3)$$

Решая совместно (1), (2) и (3), получим

$$-C \frac{dU}{dt} = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad -\frac{dU}{U} = \frac{dt}{CR}.$$

Проинтегрировав полученное выражение, имеем

$$\int_{U_0}^U \frac{dU}{U} = -\int \frac{dt}{CR} \Rightarrow \ln \frac{U}{U_0} = -\frac{t}{CR}. \quad (4)$$

1. За первый интервал времени  $t_1 = \Delta t$ :

$$\ln \frac{U_1}{U_0} = -\frac{\Delta t}{CR}.$$

Прологарифмировав это выражение, получим

$$U_1 = U_0 e^{-\frac{\Delta t}{CR}}.$$

Тогда энергию, которая выделится за этот интервал времени, запишем в виде:

$$W_1 = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}\right). \quad (5)$$

2. Энергия  $W_2$ , которая выделится за следующий интервал времени, рассчитывается аналогично:

$$\begin{aligned} t_2 &= \Delta t \cdot 2; \\ \ln \frac{U_2}{U_0} &= -\frac{2\Delta t}{CR}; \\ U_2 &= U_0 e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}; \\ W_2 &= \frac{CU_1^2}{2} - \frac{CU_2^2}{2} = \\ &= \frac{CU_0^2 e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}}{2} - \frac{CU_0^2 e^{-\frac{4\Delta t}{CR}}}{2} = \frac{CU_0^2 e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}}{2} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}\right). \end{aligned}$$

С учетом того, что согласно выражению (5):

$$\begin{aligned} \frac{CU_0^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}\right) &= W_1; \\ W_2 &= W_1 e^{-\frac{2\Delta t}{CR}}; \\ e^{-\frac{2\Delta t}{CR}} &= \frac{W_2}{W_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим полученное выражение (6) в выражение (5):

$$W_1 = \frac{CU_0^2}{2} \left(1 - \frac{W_2}{W_1}\right).$$

Отсюда определим емкость конденсатора:

$$C = \frac{2W_1^2}{U_0^2(W_1 - W_2)} = \frac{2 \cdot 1}{10^4 \cdot (1 - 0,3)} = 286 \cdot 10^{-6} \text{ (Ф)} = 286 \text{ (мкФ)}.$$

Ответ:  $C = 286 \text{ мкФ}$ .

**Задача 1.12.** Определите среднюю скорость (в мм/с) упорядоченного движения свободных электронов в медном проводнике сечением  $1 \text{ мм}^2$ , если сила тока в нем  $10 \text{ А}$ . Принять, что на каждый атом меди приходится по два электрона проводимости. Заряд электрона  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , молярная масса меди  $64 \text{ г/моль}$ , число Авогадро  $6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ , плотность меди  $8600 \text{ кг/м}^3$ .

**Дано:**

$$S = 1 \text{ мм}^2$$

$$I = 10 \text{ А}$$

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$\mu = 64 \text{ г/моль}$$

$$N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$\rho = 8600 \text{ кг/м}^3$$

**СИ:**

$$10^{-6} \text{ м}^2$$

$$64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

---


$$v = ?$$

**Решение:**

Если на каждый атом меди приходится по два электрона проводимости, то плотность тока в проводнике определим по формуле

$$j = 2qnv.$$

Отсюда можно выразить скорость электрона:

$$v = \frac{j}{2qn},$$

где  $n$  — концентрация электронов, которая по определению есть

$$n = \frac{N}{V},$$

где объем проводника  $V$  можно определить через плотность меди:

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Отсюда

$$n = \frac{\rho N}{m}.$$

Плотность тока по определению:

$$j = \frac{I}{S}.$$

Тогда формула для скорости электронов примет вид

$$v = \frac{I \cdot m}{2q\rho NS}.$$

Из соотношения  $\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$  найдем массу провода:

$$m = \mu \frac{N}{N_A}.$$

Тогда окончательно скорость:

$$v = \frac{I\mu N}{2q\rho NSN_A} = \frac{I\mu}{2q\rho SN_A};$$

$$v = \frac{10 \cdot 64 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8600 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} =$$

$$= 0,39 \cdot 10^{-3} \text{ (м/с)} = 0,39 \text{ (мм/с)}.$$

**Ответ:**  $v = 0,39$  мм/с.

**Задача 1.13.\*** Какое количество меди (в г) выделилось из раствора медного купороса за 100 с, если ток, протекающий через электролит, менялся по закону  $I(t) = (5 - 0,02t)$  А, где  $t$  — время в секундах? Электрохимический эквивалент меди  $3,3 \cdot 10^{-7}$  кг/Кл.

**Дано:**

$$t = 100 \text{ с}$$

$$I(t) = (5 - 0,02t) \text{ А}$$

$$k = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл}$$

$$m = ?$$

Сила тока по определению:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Отсюда

$$dq = Idt.$$

**Решение:**

Количество меди, выделившееся из раствора медного купороса, можно найти из закона Фарадея:

$$m = k \cdot q.$$

Для нахождения заряда полученное выражение необходимо проинтегрировать:

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} I dt = \int_{t_1}^{t_2} (5 - 0,02t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} 5 dt - \int_{t_1}^{t_2} 0,02t dt = 5t \Big|_{t_1}^{t_2} - 0,02 \frac{t^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= 5t \Big|_0^{100} - 0,02 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{100} = 400 \text{ (Кл);} \end{aligned}$$

$$m = k \cdot q = 3,3 \cdot 10^{-7} \cdot 400 = 1320 \cdot 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ (кг)} = 0,13 \text{ (г)}.$$

Ответ:  $m = 0,13 \text{ г}$ .

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задача 1.14.** Два шарика с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  имели вначале одинаковые по модулю и направлению скорости. После того как на некоторое время было включено однородное электрическое поле, направление скорости 1-го шарика повернулось на  $60^\circ$ , а модуль скорости уменьшился вдвое. Направление скорости 2-го шарика повернулось на  $90^\circ$ . Во сколько раз изменилась скорость второго шарика? Определите модуль отношения заряда к массе 2-го шарика, если для 1-го он равен  $k_1$ . Электрическим взаимодействием шариков пренебречь.

Ответ:  $k_2 = 4k_1/3$ ,  $v_2 = v_0/\sqrt{3}$ .

**Задача 1.15.** В плоском конденсаторе, расположенном горизонтально и находящемся в вакууме, взвешена заряженная капелька ртути на равном расстоянии от пластин конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора 2 см. К конденсатору приложена разность потенциалов 500 В. Внезапно разность потенциалов падает до 490 В, и равновесие капельки нарушается. Определите время, в течение которого капелька достигнет нижней пластины конденсатора.

Ответ:  $t = \sqrt{\frac{dU_1}{g(U_1 - U_2)}} = 0,32 \text{ с}$ .

**Задача 1.16.** Два шара, радиусы которых 50 и 80 мм, а потенциалы соответственно 120 и 50 В, соединяют проводом. Найдите заряд (в нКл), перешедший с одного шара на другой после их соединения.

$$\text{Ответ: } \Delta q = \frac{R_1}{k} \left( \varphi_1 - \frac{\varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2}{R_1 + R_2} \right) = 0,24 \text{ нКл.}$$

**Задача 1.17.\*** Найдите потенциальную электростатическую энергию системы (в нДж) четырех положительных зарядов, равных 1 нКл, расположенных в вакууме на расстоянии  $a = 1$  м друг от друга.

$$\text{Ответ: } W_{\text{пот}} = \frac{13kq^2}{3a} = 39 \text{ нДж.}$$

**Задача 1.18.** Заряженная положительным зарядом пылинка массой  $10^{-8}$  г находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Между пластинами создана разность потенциалов 6 кВ. Насколько необходимо изменить разность потенциалов, чтобы пылинка оставалась в равновесии, если ее заряд уменьшился на  $10^3$  элементарных зарядов? Расстояние между пластинами 5 см.

$$\text{Ответ: } \Delta U = U_2 - U_1 = 1426 \text{ В.}$$

**Задача 1.19.** Конденсатор состоит из двух концентрических сфер с радиусами  $r = 2$  см и  $R = 6$  см. Внутренняя сфера испускает с каждого квадратного сантиметра поверхности  $10^{10}$  электронов в секунду с начальными скоростями  $v_0 = 10^3$  м/с. Через какое время после начала испускания электронов заряд на конденсаторе перестанет возрастать?

$$\text{Ответ: } t = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2 S_0 t_0 R}{2e^2 n r (R - r)} = 10^{-10} \text{ с.}$$

**Задача 1.20.** Два одинаковых по размерам плоских конденсатора, один из которых воздушный, а второй заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной 5, соединены, как показано на рисунке 1.6.3. Конденсаторы зарядили до напряжения 100 В и отключили от источника напряжения. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость воздушного конденсатора  $C = 1$  мкФ.

$$\text{Ответ: } A = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2} \left( \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = 60 \text{ мДж.}$$

**Задача 1.21.\*** На пластинах плоского конденсатора находится заряд  $q = 10$  нКл. Площадь каждой пластины  $S = 100$  см<sup>2</sup>, диэлектрик — воздух. Определите силу  $F$ , с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Ответ:  $F = 565$  мкН.

**Задача 1.22.** Конденсатор емкостью  $C_1 = 3$  мкФ был заряжен до разности потенциалов  $U_1 = 40$  В. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью  $C_2 = 5$  мкФ. Какая энергия  $W'$  израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Ответ:  $W' = \frac{C_1 C_2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)} = 1,5$  мДж.

**Задача 1.23.** Плоский конденсатор имеет площадь пластин  $2000$  см<sup>2</sup>, расстояние между которыми  $0,5$  мм. В конденсаторе находится пластинка слюды ( $\epsilon = 7$ ) толщиной  $0,3$  мм, в остальной части — воздух. Определите емкость конденсатора (в нФ).

Ответ:  $C = 7,3$  нФ.

**Задача 1.24.** Энергия плоского воздушного конденсатора, отключенного от источника тока, равна  $20$  мкДж. Какую работу (в мкДж) нужно совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами такого конденсатора в 3 раза?

Ответ:  $A = \frac{q^2 2d_1}{2\epsilon\epsilon_0 S} = 2W = 40$  мкДж.

**Задача 1.25.\*** Сколько электроэнергии (в кДж) надо потратить для получения из подкисленной воды водорода, имеющего при температуре  $27^\circ\text{C}$  и давлении  $100$  кПа объем  $2,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, если электролиз ведется при напряжении  $5$  В, а КПД установки  $75\%$ ?

Ответ:  $W = \frac{pVF nU}{RT\eta} = 64$  кДж.

---

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### 2.1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### 2.1.1. МАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**В** 1820 г. датский ученый Ганс Христиан Эрстед открыл явление отклонения магнитной стрелки гальваническим током и тем самым сделал первый существенный шаг в выяснении характера связи электрических и магнитных явлений. Затем французские ученые Гей-Люссак и Араго наблюдали намагничивание железа постоянным током, идущим в проводнике. Ампер обнаружил притяжение между проводниками, по которым проходят параллельные токи, и отталкивание между противоположно направленными токами. Им же была выдвинута гипотеза о том, что свойства постоянных магнитов обусловлены циркулирующими в их толще постоянными круговыми токами (молекулярными токами).

Был сделан общий вывод: *вокруг всякого проводника с током есть магнитное поле.*

Итак, *вокруг всякого движущегося заряда, помимо электрического поля, существует еще и магнитное. Магнитное поле — это поле движущихся зарядов.* Известно, что оно обнаруживает себя по действию на магнитные стрелки или на проводники с токами, т. е. на движущиеся заряды.

Дальше мы увидим, что, подобно электрическому полю, оно обладает энергией и, следовательно, массой. Магнитное поле материально. Теперь можно дать следующее определение магнитного поля: *магнитное поле — это материя, связанная с движущимися зарядами и обнаруживающая себя по действию на магнитные стрелки и движущиеся заряды, помещенные в это поле.*

Для анализа магнитного поля используются контуры с током.

Возьмем такой контур с током  $I$  и поместим его в магнитное поле.

В магнитном поле контур с током будет ориентироваться определенным образом. Ориентацию контура в пространстве будем характеризовать направлением нормали  $\vec{n}$ , связанной с движением тока *правилом правого винта*, или «правилом буравчика» (рис. 2.1.1).

Итак, на контур с током в магнитном поле действует вращающий момент. Контур ориентируется в данной точке поля только одним способом. Примем положительное направление нормали  $\vec{n}$  за направление магнитного поля  $\vec{B}$  в данной точке. Вращающий момент прямо пропорционален величине тока  $I$ , площади контура  $S$  и синусу угла между направлением магнитного поля и нормали  $\vec{n}$ :

$$M \sim IS \sin(\vec{n}, \vec{B}),$$

где  $M$  — *вращающий момент*, или *момент силы*;  $IS = P_m$  — *магнитный момент* контура (аналогично  $ql = \vec{P}$  — электрический момент диполя).

*Направление вектора магнитного момента совпадает с положительным направлением нормали:*

$$\vec{P}_m = P_m \vec{n}. \quad (2.1.1)$$

Отношение момента силы к магнитному моменту  $\frac{M}{P_m}$

для данной точки магнитного поля будет одним и тем же и может служить характеристикой магнитного поля, названной *магнитной индукцией*:

$$B = \frac{M}{P_m \sin(\vec{n}, \vec{B})} \quad (2.1.2)$$

или

$$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{P_m},$$

где  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции, совпадающий с нормалью  $\vec{n}$ .

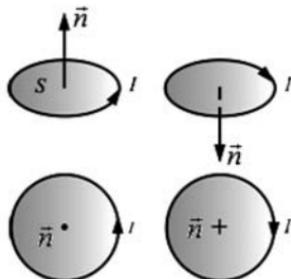


Рис. 2.1.1

По аналогии с электрическим полем  $\vec{E} = \vec{F}/q$ .

Магнитная индукция  $\vec{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля на ток (аналогично  $\vec{E}$  характеризует силовое действие электрического поля на заряд).

$\vec{B}$  — силовая характеристика магнитного поля, ее можно изобразить с помощью магнитных силовых линий.

Поскольку  $M$  — момент силы и  $P_m$  — магнитный момент являются характеристиками вращательного движения, то можно предположить, что магнитное поле — вихревое.

Условились за направление  $\vec{B}$  принимать направление северного конца магнитной стрелки. Силовые линии выходят из северного полюса, а входят соответственно в южный полюс магнита (рис. 2.1.2а).

Для графического изображения полей удобно пользоваться силовыми линиями (линиями магнитной индукции). Линиями магнитной индукции называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$  в этой точке.

Магнитные силовые линии всегда замкнуты — вихревое поле (рис. 2.1.2б).

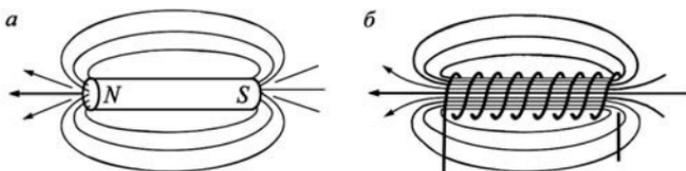


Рис. 2.1.2

### 2.1.2. ЗАКОН БИО — САВАРА — ЛАПЛАСА

Магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i.$$

Элемент тока длины  $dl$  (рис. 2.1.3) создает поле с магнитной индукцией:

$$dB = k \frac{Idl}{r^2} \quad (2.1.3)$$

или в векторной форме:

$$d\vec{B} = k \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.4)$$

Это и есть **закон Био — Савара — Лапласа**, полученный экспериментально.

Здесь  $I$  — ток;  $d\vec{l}$  — вектор, совпадающий с элементарным участком тока и направленный в ту сторону, куда течет ток;  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента тока в точку, в которой мы определяем  $d\vec{B}$ ;  $r$  — модуль радиуса-вектора;  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

Как видно из рисунка, *вектор магнитной индукции  $d\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через  $d\vec{l}$  и точку, в которой вычисляется поле.*

Направление  $d\vec{B}$  связано с направлением  $d\vec{l}$  «**правилom буравчика**»: *направление вращения головки винта дает направление  $d\vec{B}$ , поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.*

Таким образом, **закон Био — Савара — Лапласа** устанавливает величину и направление вектора  $d\vec{B}$  в произвольной точке магнитного поля, созданного проводником  $d\vec{l}$  с током  $I$ .

Модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется соотношением

$$dB = k \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (2.1.5)$$

где  $\alpha$  — угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ ;  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц.

В международной системе единиц СИ закон Био — Савара — Лапласа для вакуума можно записать так:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad (2.1.6)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная.

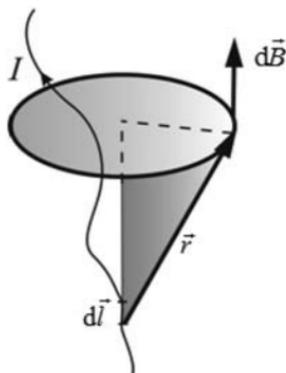


Рис. 2.1.3

### 2.1.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

В уравнении (2.1.6) заменим ток  $I$  на  $jS$ , где  $j$  — плотность тока. Векторы  $\vec{j}$  и  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление, значит:

$$I dl = S j dl.$$

Если все заряды одинаковы и имеют заряд  $q$ , то

$$\vec{j} = qn\vec{v}, \quad (2.1.7)$$

где  $n$  — число носителей заряда в единице объема;  $\vec{v}$  — дрейфовая скорость зарядов.

Если заряды положительные, то  $\vec{j}$  и  $\vec{v}$  имеют одно направление. Подставив (2.1.7) в (2.1.6), получим

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{S dlnq[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.8)$$

Обозначим  $dN = S dln$  — число носителей заряда в отрезке  $d\vec{l}$ . Разделив (2.1.8) на это число, получим выражение для *индукции магнитного поля, создаваемого одним зарядом*, движущимся со скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{B}_1 = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.9)$$

В скалярной форме *индукция магнитного поля одного заряда* в вакууме определяется по формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\vec{v}, \vec{r})}{r^2}. \quad (2.1.10)$$

Эта формула справедлива при скоростях заряженных частиц  $v \ll c$ .

### 2.1.4. НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Силовой характеристикой магнитного поля служит вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  поля, созданного одним зарядом в вакууме:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Еще одной характеристикой магнитного поля является *напряженность*.

*Напряженность магнитного поля называют векторную величину  $\vec{H}$ , характеризующую магнитное поле и определяемую для вакуума следующим образом:*

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (2.1.11)$$

Напряженность магнитного поля заряда  $q$ , движущегося в вакууме, равна

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.1.12)$$

Это выражение показывает **закон Био — Савара — Лапласа для  $\vec{H}$** .

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  является как бы аналогом вектора электрического смещения  $\vec{D}$  в электростатике.

### 2.1.5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРЯМОГО ТОКА

Применим закон Био — Савара — Лапласа для расчета магнитных полей простейших токов.

Рассмотрим магнитное поле прямого тока (рис. 2.1.4).

Все векторы  $d\vec{B}$  от произвольных элементарных участков  $d\vec{l}$  имеют одинаковое направление. Поэтому сложение векторов можно заменить сложением модулей.

Пусть точка, в которой определяется магнитное поле, находится на расстоянии  $b$  от провода. Из рисунка 2.1.4 видно, что:

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставив найденные значения  $r$  и  $dl$  в закон Био — Савара — Лапласа, получим

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ibd\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot b^2} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

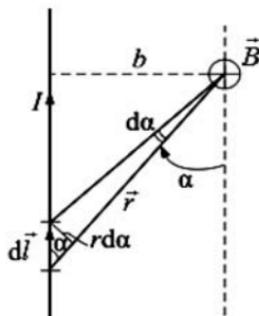


Рис. 2.1.4

Для *конечного проводника* угол  $\alpha$  изменяется от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ . Тогда

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (2.1.13)$$

Для *бесконечно длинного проводника*  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ . Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

или, что удобнее для расчетов,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (2.1.14)$$

Линии магнитной индукции прямого тока представляют собой систему концентрических окружностей, охватывающих ток (рис. 2.1.3).

Аналогичным образом можно вычислить магнитное поле кругового тока.

### 2.1.6. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

В природе нет магнитных зарядов. Это приводит к тому, что линии вектора  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца. Мы знаем, что поток любого вектора через поверхность равен разности числа линий, начинающихся у поверхности, и числа линий, оканчивающихся внутри поверхности:

$$\Phi = N_{\text{нач}} - N_{\text{оканч}}.$$

В соответствии с вышеизложенным можно сделать заключение, что *поток вектора  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность должен быть равен нулю.*

Таким образом, для любого магнитного поля и произвольной замкнутой поверхности  $S$  имеет место условие

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.1.15)$$

*Это теорема Гаусса для  $\Phi_B$  (в интегральной форме): поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.*

Этот результат является математическим выражением того, что *в природе нет магнитных зарядов* — источников магнитного поля, на которых начинались и заканчивались бы линии магнитной индукции.

Заменив поверхностный интеграл в (2.1.15) объемным, получим

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0, \quad (2.1.16)$$

где

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Это условие должно выполняться для любого произвольного объема  $V$ , а это, в свою очередь, возможно, если подынтегральная функция в каждой точке поля равна нулю. Таким образом, *магнитное поле обладает тем свойством, что его дивергенция всюду равна нулю:*

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.1.17)$$

В этом его отличие от электростатического поля, которое является потенциальным и может быть выражено скалярным потенциалом  $\phi$ , магнитное поле — *вихревое*, или *соленоидальное*.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Как, пользуясь магнитной стрелкой, можно определить знаки полюсов источников постоянного тока?
2. Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?
3. Что называют индукцией магнитного поля? Каково направление вектора  $\vec{B}$ ? Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока.
4. Записав закон Био — Савара — Лапласа, объясните его физический смысл.
5. Рассчитайте, применяя закон Био — Савара — Лапласа, магнитное поле: 1) прямого тока; 2) в центре кругового проводника с током.
6. Какой вывод можно сделать, сравнивая циркуляцию векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ?
7. Какая теорема доказывает вихревой характер магнитного поля? Как она формулируется?

8. Почему магнитное поле является вихревым?
9. Как найти магнитную индукцию конечного и бесконечно длинного проводника с током?
10. Что называют потоком вектора магнитной индукции? Запишите теорему Гаусса для магнитного поля, объяснив ее физический смысл.
11. Дайте определение магнитной индукции, напряженности магнитного поля.
12. В магнитном поле с индукцией  $B$  поместили две параллельные металлические пластины, расстояние между которыми равно  $d$ . Поток электронов со скоростью  $v$  между пластинами движется прямолинейно параллельно плоскости пластин. Какова разность потенциалов между пластинами?
13. Проводник массой 10 г и длиной 20 см подвешен в горизонтальном положении в вертикальном магнитном поле с индукцией 0,25 Тл. На какой угол (в градусах) от вертикали отклонятся нити, на которых подвешен проводник, если по нему пропустить ток силой 2 А? Массой нитей пренебречь.

## 2.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ЗАРЯДЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 2.2.1. ЗАКОН АМПЕРА

В современной записи в СИ закон Ампера выражается формулой

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (2.2.1)$$

где  $d\vec{F}$  — сила, с которой магнитное поле действует на бесконечно малый проводник  $d\vec{l}$  с током  $I$ .

Модуль силы, действующей на проводник:

$$dF = IdlB \sin(d\vec{l}, \vec{B}). \quad (2.2.2)$$

Если магнитное поле однородно и проводник перпендикулярен силовым линиям магнитного поля, то

$$F = IlB, \quad (2.2.3)$$

где  $I = qnvS$  — ток через проводник сечением  $S$ .

Направление силы  $\vec{F}$  определяется направлением векторного произведения, или правилом левой руки: *ориентируем пальцы по направлению первого вектора, второй вектор должен входить в ладонь и большой палец показывает направление векторного произведения.*

*Закон Ампера — это первое открытие фундаментальных сил, зависящих от скоростей.*

Из закона Ампера хорошо виден физический смысл магнитной индукции.  $B$  — величина, численно равная силе, с которой магнитное поле действует на проводник единичной длины, по которому течет единичный ток:

$$B = \frac{F}{Il}.$$

$$\text{Размерность индукции } [B] = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

### 2.2.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ

Пусть  $b$  — расстояние между двумя параллельными, бесконечно длинными проводниками (рис. 2.2.1). Задачу следует решать так: один из проводников с током  $I_2$  создаст магнитное поле, второй проводник с током  $I_1$  находится в этом поле.

Магнитная индукция, создаваемая током  $I_2$  на расстоянии  $b$  от него:

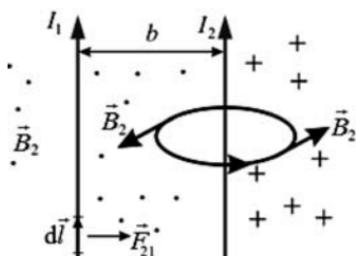


Рис. 2.2.1

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b}. \quad (2.2.4)$$

Если проводники  $I_1$  и  $I_2$  лежат в одной плоскости, то угол между  $B_2$  и  $I_1$  прямой, следовательно,  $\sin(\vec{l}, \vec{B}) = 1$ . Тогда сила, действующая на элемент проводника  $dl$  с током  $I_1$ :

$$F_{21} = B_2 I_1 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi b}. \quad (2.2.5)$$

На каждую единицу длины проводника действует сила:

$$F_{\text{ед}} = \frac{F_{21}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}. \quad (2.2.6)$$

(разумеется, со стороны первого проводника на второй действует точно такая же сила).

Результирующая сила равна одной из этих сил. Если эти два проводника будут воздействовать на третий, тогда их магнитные поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  нужно сложить векторно.

### 2.2.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАМКУ С ТОКОМ

На рисунке 2.2.2 показана рамка с током  $I$ , находящаяся в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ . Здесь  $\alpha$  — угол между  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  (направление нормали связано с направлением тока «правилом буравчика»).

Сила Ампера, действующая на сторону рамки длиной  $l$ , равна

$$F_1 = IlB,$$

где  $(\vec{B} \perp \vec{l})$ .

На другую сторону длиной  $l$  действует такая же сила. Получается «пара сил», или вращающий момент:

$$M = F_1 h = IlBbs \sin \alpha, \quad (2.2.7)$$

где плечо  $h = bs \sin \alpha$ .

Так как  $lb = S$  — площадь рамки, тогда можно записать

$$M = IBS \sin \alpha = P_m B \sin \alpha, \quad (2.2.8)$$

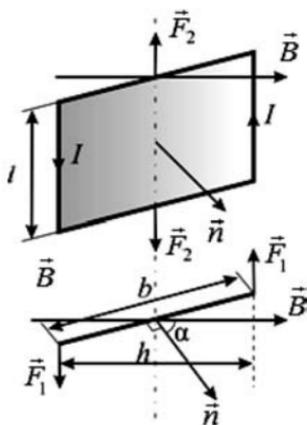


Рис. 2.2.2

где  $M$  — вращающий момент силы;  $P_m$  — магнитный момент.

Под действием этого вращающего момента рамка повернется так, что  $\vec{n} \parallel \vec{B}$  (рис. 2.2.3).

На стороны длиной  $b$  тоже действует сила Ампера  $F_2$ , растягивая рамку. Так как силы равны по величине и противоположны по направлению, рамка не смещается, в этом случае  $M = 0$  — состояние устойчивого равновесия.

Когда  $\vec{n}$  и  $\vec{B}$  антипараллельны, то снова  $M = 0$  (так как плечо

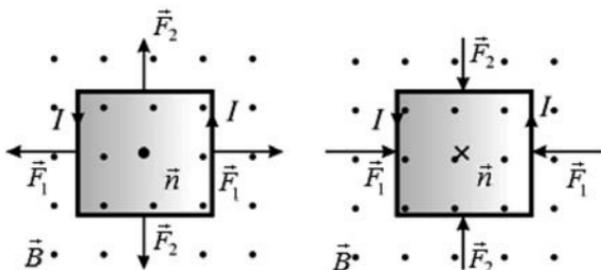


Рис. 2.2.3

равно нулю). Это состояние *неустойчивого равновесия*. Рамка сжимается, и, если чуть сместится, сразу возникает вращающий момент, возвращающий рамку в состояние *устойчивого равновесия*:  $\vec{n} \parallel \vec{B}$ .

В неоднородном поле рамка повернется и будет вытягиваться в область более сильного поля.

#### 2.2.4. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон Ампера используется для установления единицы силы тока — ампер.

*Ампер* — сила тока, неизменного по величине, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого сечения, расположенным на расстоянии один метр один от другого в вакууме, вызывает между этими проводниками силу в  $2 \cdot 10^{-7}$  Н/м:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

Здесь  $dl = 1$  м;  $b = 1$  м;  $I_1 = I_2 = 1$  А;  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Определим отсюда размерность и величину  $\mu_0$  в СИ:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \quad \text{или} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Из закона Био — Савара — Лапласа для прямолинейного проводника с током  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}$  тоже можно найти размерность индукции магнитного поля:

$$[B] = \frac{\text{Н} \cdot \text{А}}{\text{А}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1 \text{ Тл.}$$

Тесла — единица измерения индукции в СИ.

1 Тл равна магнитной индукции однородного магнитного поля, в котором на плоский контур с током, имеющим магнитный момент  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , действует вращающий момент  $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Другое определение: 1 Тл равна магнитной индукции, при которой магнитный поток сквозь площадку  $1 \text{ м}^2$ , перпендикулярную направлению поля, равен  $1 \text{ Вб}$ .

Единица измерения магнитного потока Вб получила свое название в честь немецкого физика Вильгельма Вебера (1804–1891) — профессора университетов в Галле, Геттингене, Лейпциге.

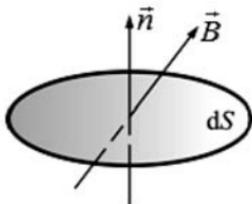


Рис. 2.2.4

Как мы уже говорили, магнитный поток  $\Phi$  через поверхность  $S$  — одна из характеристик магнитного поля (рис. 2.2.4):

$$d\Phi_B = B d\vec{S} \cos(d\vec{n}, \vec{B}); \quad \Phi = \int_S B_n dS.$$

Единица измерения магнитного потока в СИ:

$$[\Phi_B] = [B] \cdot [S] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}; \quad 1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}.$$

Напряженность магнитного поля  $H$  измеряется в  $\text{А} \cdot \text{м}^{-1}$ .

### 2.2.5. СИЛА ЛОРЕНЦА

**Электрический ток** — это совокупность большого числа  $n$  движущихся со скоростью  $v$  зарядов. Найдем силу, действующую на один заряд со стороны магнитного поля. По закону Ампера сила, действующая на проводник с током в магнитном поле,

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}], \quad (2.2.9)$$

но ток  $I = jS$ , причем  $j = qnv$ .

Тогда

$$d\vec{F} = qnvS[d\vec{l}, \vec{B}] = qnSdl[\vec{v}, \vec{B}].$$

Так как  $nSdl$  — число зарядов в объеме  $Sdl$ , тогда **для одного заряда**:

$$\frac{d\vec{F}}{nSdl} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

или

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.2.10)$$

**Сила Лоренца** — сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  положительный заряд (здесь  $\vec{v}$  — скорость упорядоченного движения носителей положительного заряда). Модуль силы Лоренца:

$$F_L = qvB\sin\alpha, \quad (2.2.11)$$

где  $\alpha$  — угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Из (2.2.11) видно, что на заряд, движущийся вдоль линии  $\vec{B}$ , не действует сила ( $\sin 0 = 0$ ).

Направлена сила Лоренца перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . К движущемуся положительному заряду применимо **правило левой руки**, или «правило буравчика» (рис. 2.2.5).

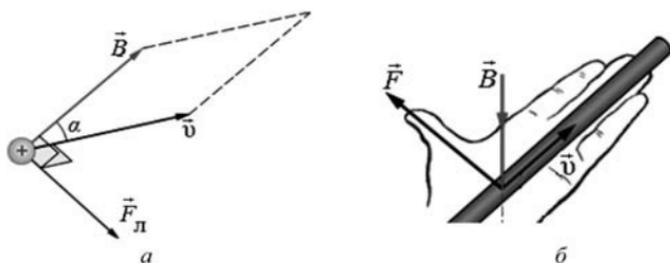


Рис. 2.2.5

Направление действия силы для отрицательного заряда противоположно, следовательно, к электронам применимо **правило правой руки**.

Так как сила Лоренца направлена перпендикулярно движущемуся заряду, т. е. перпендикулярно  $\vec{v}$ , **работа**

*этой силы всегда равна нулю.* Следовательно, действуя на заряженную частицу, сила Лоренца не может изменить кинетическую энергию частицы.

Часто лоренцевой силой называют сумму электрических и магнитных сил:

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.2.12)$$

здесь электрическая сила  $q\vec{E}$  ускоряет частицу, изменяет ее энергию.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных одинаковых токов противоположного направления. Начертите рисунок с указанием сил.
2. Назовите единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля. Дайте им определения.
3. Определите числовое значение магнитной постоянной.
4. Почему движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока?
5. Чему равна и как направлена сила, действующая на отрицательный электрический заряд, движущийся в магнитном поле?
6. Чему равна работа силы Лоренца при движении протона в магнитном поле? Ответ обосновать.
7. Проводник массой 10 г и длиной 20 см подвешен в горизонтальном положении в вертикальном магнитном поле с индукцией 0,25 Тл. На какой угол (в градусах) от вертикали отклонятся нити, на которых подвешен проводник, если по нему пропустить ток силой 2 А? Массой нитей пренебречь.
8. Проводник длиной 110 см согнули под углом  $60^\circ$  так, что одна из сторон угла равна 30 см, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией 2 мТл обеими сторонами перпендикулярно линиям индукции. Какая сила (в мН) будет действовать на этот проводник, если по нему пропустить ток силой 10 А?
9. Прямоугольный контур площадью  $150 \text{ см}^2$  с током силой 4 А, на который действует только однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, занял положение устойчивого равновесия. Какую после этого надо совершить работу (в мДж), чтобы медленно повернуть его на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон?
10. Прямой проводник длиной 20 см и массой 50 г подвешен горизонтально на двух легких нитях в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен горизонтально и перпендикулярно к проводнику. Какой ток надо пропустить через

проводник, чтобы одна из нитей разорвалась? Индукция поля 50 мТл. Каждая нить разрывается при нагрузке 0,4 Н.

11. Максимальный момент сил, действующих на прямоугольную рамку с током силой 50 А в однородном магнитном поле, равен 1 Н·м. Какова индукция поля, если ширина рамки 0,1 м, а длина 0,2 м?
12. Проволочная квадратная рамка массой 10 г со стороной 10 см может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. При какой минимальной силе тока в рамке она будет неподвижна и наклонена к горизонту под углом  $45^\circ$ ?

## 2.3. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### 2.3.1. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Связь между током и магнитным полем, образованным этим током, устанавливает эмпирический закон Био — Савара — Лапласа. Еще одной из форм связи является *теорема о циркуляции вектора магнитной индукции*.

Возьмем контур  $l$  (рис. 2.3.1), охватывающий прямой ток  $I$ , и вычислим для него циркуляцию вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , т. е.  $\oint \vec{B}_l d\vec{l}$ .

Вначале рассмотрим случай, когда контур лежит в плоскости перпендикулярно потоку (ток  $I$  направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку (линии  $\vec{B}$  прямого тока — окружности).

Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов:

$$B_l dl = B dl_B,$$

где  $dl_B$  — проекция  $dl$  на вектор  $\vec{B}$ , но

$$dl_B = R d\alpha,$$

где  $R$  — расстояние от прямой тока  $I$  до  $dl$ ;

$$B_l dl = B dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\alpha = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi}.$$

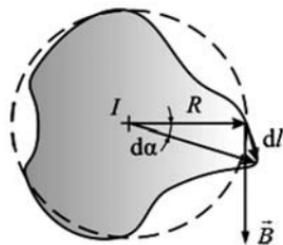


Рис. 2.3.1

Отсюда

$$\oint B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I \quad (2.3.1)$$

— это **теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$** : циркуляция вектора магнитной индукции равна току, охваченному контуром, умноженному на магнитную постоянную.

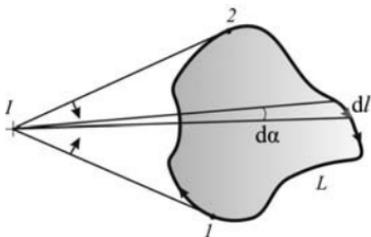


Рис. 2.3.2

Иначе обстоит дело, если ток не охватывается контуром (рис. 2.3.2).

При обходе радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (1–2), а потом в другом (2–1). Поэтому  $\oint d\alpha = 0$  и, следовательно,

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 0.$$

Итак,

$$\int B_l dl = \mu_0 I,$$

где  $I$  — ток, охваченный контуром  $L$ .

Эта формула справедлива и для тока произвольной формы, и для контура произвольной формы.

Если контур охватывает несколько токов, то

$$\oint B_l dl = \mu\mu_0 \sum I_i, \quad (2.3.2)$$

т. е. **циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром произвольной формы.**

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля  $\oint \vec{B}, d\vec{l} = \mu_0 I$  позволяет легко рассчитать величину  $B$  от бесконечного проводника с током (рис. 2.3.3):  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Итак, циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  отлична от нуля, если контур охватывает ток (сравните с циркуляцией вектора  $\vec{E}$ :  $\oint E_l dl = 0$ ).

Такие поля называются **вихревыми**, или **соленоидальными**.

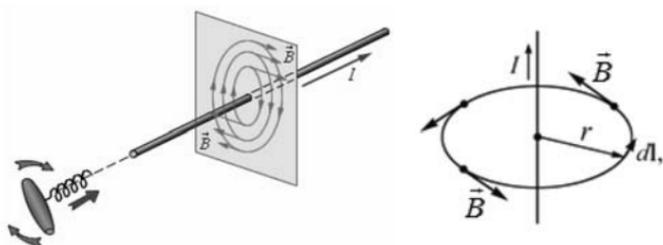


Рис. 2.3.3

Магнитному полю нельзя приписывать потенциал, как электрическому полю. Этот потенциал не был бы однозначным: после каждого обхода по контуру он получал бы приращение  $\mu_0 I$ .

Линии напряженности электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах. А магнитных зарядов в природе нет. Опыт показывает, что линии  $\vec{B}$  всегда замкнуты. Поэтому теорема Гаусса для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  записывается так:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

### 2.3.2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СОЛЕНОИДА

Соленоид является устройством, находящим широкое применение в электрических, электронных и радиоэлектронных цепях. Соленоид обладает рядом замечательных свойств: поле достаточно длинного соленоида сосредоточено практически внутри соленоида и является однородным. Соленоид способен концентрировать энергию магнитного поля.

Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  ( $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ ) для вычисления простейшего магнитного поля — бесконечно длинного соленоида, представляющего собой тонкий провод, намотанный плотно (виток к витку) на цилиндрический каркас (см. рис. 2.3.4).

*Соленоид можно представить в виде системы одинаковых круговых токов с общей прямой осью.*

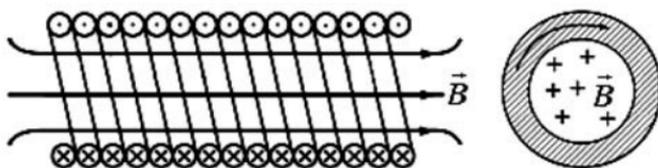


Рис. 2.3.4

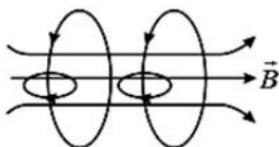


Рис. 2.3.5

Бесконечно длинный соленоид симметричен любой перпендикулярной к его оси плоскости. Взятые попарно (рис. 2.3.5), симметричные относительно такой плоскости витки создают поле, в котором вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости витка, т. е. *линии магнитной индукции имеют направление, параллельное оси соленоида внутри и вне его.*

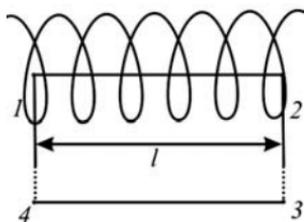


Рис. 2.3.6

Из параллельности вектора  $\vec{B}$  оси соленоида вытекает, что поле, как *внутри, так и вне соленоида, должно быть однородным.*

Возьмем воображаемый прямоугольный контур  $1-2-3-4-1$  и разместим его в соленоиде, как показано на рисунке 2.3.6.

По теореме о циркуляции можно записать

$$\oint_L B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl.$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю, так как вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен направлению обхода, т. е.  $B_l = 0$ .

Возьмем участок  $3-4$  на большом расстоянии от соленоида, где поле стремится к нулю, и пренебрежем третьим интегралом.

Тогда

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl = \mu \mu_0 \sum I_l,$$

где  $B_l = B$  — магнитная индукция на участке  $1-2$  — внутри соленоида;  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества.

Если отрезок  $l-2$  внутри соленоида, контур охватывает ток:

$$nI = \sum I_i,$$

где  $n$  — число витков на единицу длины;  $I$  — ток в соленоиде (в проводнике).

Тогда магнитная индукция *внутри соленоида*:

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (2.3.3)$$

*Вне соленоида*:

$$\sum I_i = 0 \quad \text{и} \quad \oint B_l dl = Bl = 0,$$

т. е.  $B = 0$ .

Бесконечно длинный соленоид аналогичен плоскому конденсатору: и тут, и там поле однородно и сосредоточено внутри.

Произведение  $nI$  — это *число ампер — витков на метр*.

*У конца полубесконечного соленоида*, на его оси, магнитная индукция равна

$$B = \frac{1}{2} \mu\mu_0 nI. \quad (2.3.4)$$

Практически, если длина соленоида много больше, чем его диаметр, формула (2.3.3) справедлива для точек вблизи середины, формула (2.3.4) — для точек около конца.

Если же катушка короткая, что обычно и бывает на практике, то *магнитная индукция в любой точке А, лежащей на оси соленоида, направлена вдоль оси (по «правилу буравчика») и численно равна алгебраической сумме индукций магнитных полей, создаваемых в точке А всеми витками*. В этом случае имеем:

- *в точке, лежащей на середине оси соленоида, магнитное поле будет максимальным:*

$$B_{\max} = \mu_0 \mu nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \quad (2.3.5)$$

где  $L$  — длина соленоида;  $R$  — радиус витков;

- *в произвольной точке конечного соленоида (см. рис. 2.3.7) магнитную индукцию можно найти по формуле*

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \mu nI (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (2.3.6)$$

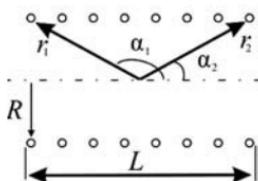


Рис. 2.3.7

На рисунке 2.3.8 изображены силовые линии магнитного поля  $\vec{B}$  для некоторых случаев:

- а) для намагниченного металлического стержня;
- б) для соленоида;
- в) для железных опилок, рассыпанных на листе бумаги, над магнитом.

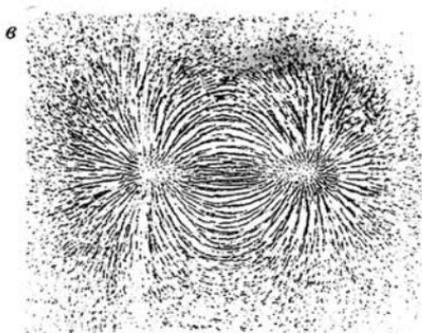
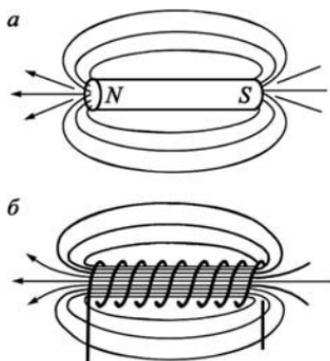


Рис. 2.3.8

### 2.3.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОРОИДА

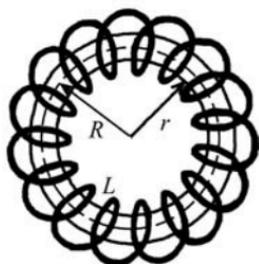


Рис. 2.3.9

Следовательно,

$$\oint_L \vec{B}_l dl = B2\pi r = BI, \quad (2.3.7)$$

где  $l = 2\pi r$  — длина контура.

Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток  $2\pi RnI$  ( $n$  — число витков на единицу длины).

Тогда в соответствии с теоремой о циркуляции вектора  $\vec{B}$  можно записать

$$B = \mu\mu_0 nI \frac{R}{r}. \quad (2.3.8)$$

Контур вне тороида токов не охватывает, поэтому  $B = 0$ .

Для тороида, где радиус тора намного больше радиуса витка, отношение  $R/r \approx 1$ , тогда магнитное поле  $B$  можно рассчитать по формуле (2.3.3):

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

В тороиде магнитное поле однородно только по величине, т. е. по модулю, но направление его в каждой точке различно.

#### 2.3.4. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длиной  $l$  (рис. 2.3.10). Этот контур находится во внешнем однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном к плоскости контура. При показанном на рисунке направлении тока  $I$  вектор  $\vec{B}$  сонаправлен с  $\vec{n}$ .

На элемент тока  $I$  (подвижный провод) длиной  $l$  действует сила Ампера, направленная вправо:

$$F = IlB.$$

Пусть проводник  $l$  переместится параллельно самому себе на расстояние  $dx$ . При этом совершится работа

$$\begin{aligned} dA &= Fdx = \\ &= IBldx = IBdS = Id\Phi. \end{aligned}$$

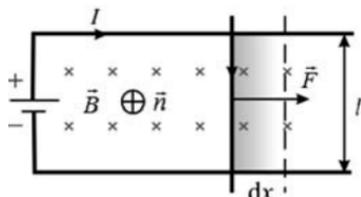


Рис. 2.3.10

Итак,

$$dA = Id\Phi. \quad (2.3.9)$$

*Работа, совершаемая проводником с током при перемещении, численно равна произведению тока на магнитный поток, пересеченный этим проводником.*

Формула остается справедливой, если проводник любой формы движется под любым углом к линиям вектора магнитной индукции.

*Выведем выражение для работы по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле.*

Рассмотрим прямоугольный контур с током  $1-2-3-4-1$  (рис. 2.3.11). Магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости контура. Магнитный поток  $\Phi_1$ , пронизывающий контур, направлен по нормали  $\vec{n}$  к контуру, поэтому  $\Phi_1 > 0$ .

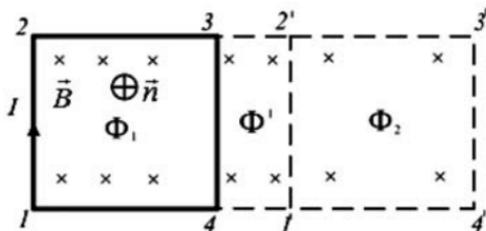


Рис. 2.3.11

Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение  $1'-2'-3'-4'-1'$ . Магнитное поле в общем случае может быть неоднородным, и новый контур будет пронизан магнитным потоком  $\Phi_2$ .

Площадка  $4-3-2'-1'-4$ , расположенная между старым и новым контуром, пронизывается потоком  $\Phi'$ .

Полная работа по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершаемых при перемещении каждой из четырех сторон контура:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41},$$

где  $A_{23}$ ,  $A_{41}$  равны нулю, так как эти стороны не пересекают магнитного потока при своем перемещении (очерчивают нулевую площадку);

$$A_{34} = I(\Phi' + \Phi_2).$$

Провод 1–2 перерезает поток  $(\Phi_2 + \Phi')$ , но движется против сил действия магнитного поля:

$$A_{12} = -I(\Phi_1 + \Phi').$$

Тогда общая работа по перемещению контура:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

или

$$A = I\Delta\Phi, \quad (2.3.10)$$

где  $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$  — это изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

*Работа, совершаемая при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле, равна произведению величины тока на изменение магнитного потока, сцепленного с этим контуром.*

Элементарную работу по бесконечно малому перемещению контура в магнитном поле можно найти по формуле

$$dA = Id\Phi. \quad (2.3.11)$$

Выражения (2.3.9) и (2.3.11) внешне тождественны, но физический смысл величины  $d\Phi$  различен.

Соотношение (2.3.11), выведенное нами для простейшего случая, остается справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле. Более того, если контур неподвижен, а меняется  $\vec{B}$ , то при изменении магнитного потока в контуре на величину  $d\Phi$  магнитное поле совершает ту же работу:  $dA = Id\Phi$ .

#### ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Одним из проявлений магнитной составляющей силы Лоренца в веществе служит эффект, обнаруженный в 1879 г. американским физиком Э. Г. Холлом (1855–1938). Эффект состоит в возникновении на боковых гранях проводника с током, помещенного в поперечное магнитное поле, разности потенциалов, пропорциональной величине тока  $I$  и индукции магнитного поля  $B$ .

Рассмотрим эффект, обусловленный действием лоренцевой силы  $\vec{f}$  на свободные заряды в проводнике. Представим себе проводник с током  $I$  в виде плоской ленты,

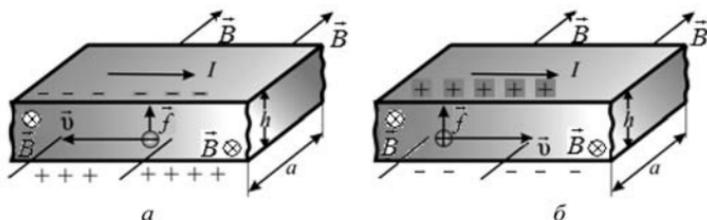


Рис. 2.3.12

расположенной в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , направленной от нас (рис. 2.3.12).

В случае, изображенном на рисунке 2.3.12а, верхняя часть проводника будет заряжаться отрицательно, в случае, изображенном на рисунке 2.3.12б, — положительно.

Это позволяет экспериментально определить знак носителя заряда в проводнике.

При равной концентрации носителей заряда обоих знаков возникает *холловская разность потенциалов*, если различна подвижность, т. е. дрейфовая скорость носителей заряда.

Подсчитаем величину холловской разности потенциалов ( $U_X$ ). Пусть  $E_X$  — напряженность электрического поля, обусловленного ЭДС Холла;  $h$  — толщина ленты проводника:

$$U_X = E_X h. \quad (2.3.12)$$

Перераспределение зарядов прекратится, когда сила  $qE_X$  уравновесит лоренцеву силу, т. е.

$$qE_X = qvB \quad \text{или} \quad E_X = Bv.$$

Плотность тока  $j = nvq$ , отсюда  $v = \frac{j}{nq}$ . Тогда  $E_X = B \frac{j}{nq}$ .

Подставим  $E_X$  в (2.3.12) и найдем  $U_X$ :

$$U_X = \frac{jBh}{nq} \quad \text{или} \quad U_X = \frac{BhI}{nqS} = \frac{BI}{qna} = \frac{RBI}{a}, \quad (2.3.13)$$

где  $R = 1/qn$  — коэффициент Холла.

Исследования ЭДС Холла привели к удивительным выводам. Металлы могут обладать проводимостью  $p$ -типа (Zn, Cd — у них дырки более подвижные, чем электроны). Это металлы с чуть перекрывающимися знаками, т. е. полуметаллы.

Из формулы (2.3.13) можно найти число носителей заряда:

$$n = \frac{IB}{qaU_x}. \quad (2.3.14)$$

Итак, измерение холловской разности потенциалов позволяет определить:

- знак заряда и тип носителей;
- количество носителей.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем заключается теорема о циркуляции вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ ?
2. Применив теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , рассчитайте магнитное поле прямого тока.
3. Применив теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , вычислите простейшие магнитные поля:
  - бесконечно длинного соленоида;
  - у конца полубесконечного соленоида;
  - в произвольной точке конечного соленоида.
4. Как рассчитать магнитное поле тороида?
5. Чем отличается работа при перемещении проводника с током от работы при перемещении контура с током в магнитном поле?
6. В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.
7. Какие правила необходимо использовать, для пояснения эффекта Холла (рис. 2.3.12)?
8. Какие данные о проводниках и полупроводниках можно получить на основе экспериментального исследования эффекта Холла?
9. Используя «правило левой руки» объясните, как будет заряжаться верхняя грань пластины с током на рисунке 2.3.12.

## 2.4. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### 2.4.1. ОПЫТЫ ФАРАДЕЯ. ИНДУКЦИОННЫЙ ТОК. ПРАВИЛО ЛЕНЦА

С момента открытия связи магнитного поля с током (что является подтверждением симметрии законов природы) делались многочисленные попытки получить *ток с помощью магнитного поля*. Задача была решена Майклом

Фарадеем в 1831 г. (Американец Джозеф Генри тоже открыл, но не успел опубликовать свои результаты. Ампер также претендовал на открытие, но не смог представить свои результаты.)

Из школьного курса физики опыты Фарадея хорошо известны (рис. 2.4.1–2.4.3).

Если подносить постоянный магнит к катушке или наоборот (рис. 2.4.1), то в катушке возникнет электрический ток. То же самое происходит с двумя близко расположенными катушками: если к одной из катушек подключить источник переменного тока, то в другой также возникнет переменный ток (рис. 2.4.2), но лучше всего этот эффект проявляется, если две катушки соединить сердечником (рис. 2.4.3).

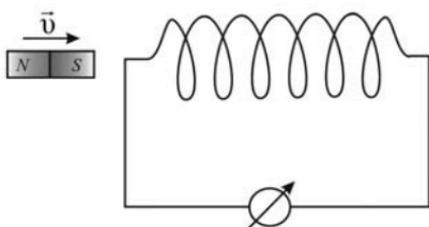


Рис. 2.4.1

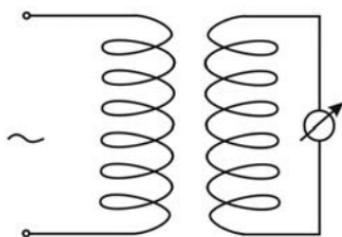


Рис. 2.4.2

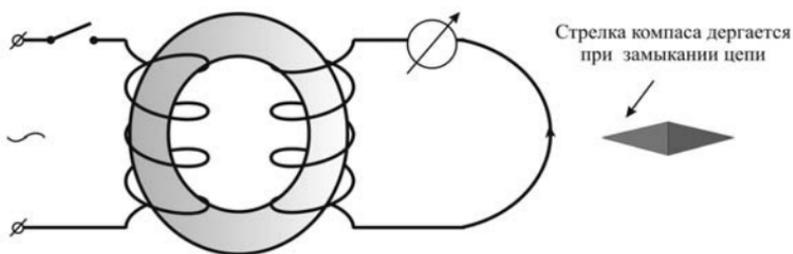


Рис. 2.4.3

По определению Фарадея, общим для этих опытов является следующее: *если поток вектора индукции, пронизывающий замкнутый, проводящий контур, меняется, то в контуре возникает электрический ток.*

*Это явление называют явлением электромагнитной индукции, а ток — индукционным. При этом явле-*

ние совершенно не зависит от способа изменения потока вектора магнитной индукции.

Итак, получается, что **движущиеся заряды (ток) создают магнитное поле, а движущееся магнитное поле создает (вихревое) электрическое поле и собственно индукционный ток.**

Для каждого конкретного случая Фарадей указывал направление индукционного тока.

В 1833 г. русский физик Э. Х. Ленц установил общее **правило нахождения направления тока: индукционный ток всегда направлен так, что магнитное поле этого тока препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.** Это утверждение носит название **правило Ленца.**

Заполнение всего пространства однородным магнетиком приводит (при прочих равных условиях) к увеличению индукции в  $\mu$  раз. Этот факт подтверждает то, что индукционный ток обусловлен изменением потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , а не потока вектора напряженности  $\vec{H}$ .

#### 2.4.2. ВЕЛИЧИНА ЭДС ИНДУКЦИИ

Для создания тока в цепи необходимо наличие электродвижущей силы. Поэтому явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменении магнитного потока в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $E_i$ . Наша задача, используя законы сохранения энергии, найти величину  $E_i$  и выяснить ее природу.

Рассмотрим перемещение подвижного участка 1–2 контура с током в магнитном поле  $\vec{B}$  (рис. 2.4.4).

Пусть сначала магнитное поле  $\vec{B}$  отсутствует. Батарея с ЭДС, равной  $E_0$ , создает ток  $I_0$ . За время  $dt$  батарея совершает работу

$$dA = E_0 I_0 dt. \quad (2.4.1)$$

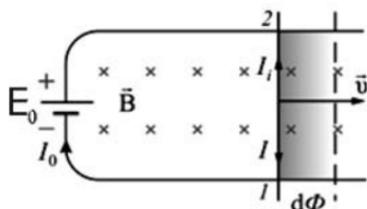


Рис. 2.4.4

Эта работа будет переходить в тепло, которое можно найти по закону Джоуля — Ленца:

$$Q = dA = E_0 I_0 dt = I_0^2 R dt,$$

где  $I_0 = \frac{E_0}{R}$ ,  $R$  — полное сопротивление всего контура.

Поместим контур в однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Линии  $\vec{B} \parallel \vec{n}$  и связаны с направлением тока «правилом буравчика». Поток  $\Phi$ , сцепленный с контуром, — положителен.

Каждый элемент контура испытывает механическую силу  $d\vec{F}$ . Подвижная сторона рамки будет испытывать силу  $\vec{F}_0$ . Под действием этой силы участок 1–2 будет перемещаться со скоростью  $v = dx/dt$ . При этом изменится и поток магнитной индукции. Тогда в результате электромагнитной индукции ток в контуре изменится и станет равным  $I = I_0 - I_i$ .

Изменится и сила  $\vec{F}_0$ , которая теперь станет равной результирующей силе  $\vec{F}$ . Эта сила за время  $dt$  произведет работу  $dA$ :

$$dA = F dx = I d\Phi.$$

Как и в случае, когда все элементы рамки неподвижны, источником работы является  $E_0$ .

При неподвижном контуре эта работа сводилась только лишь к выделению тепла. В нашем случае тепло тоже будет выделяться, но уже в другом количестве, так как ток изменился. Кроме того, совершается механическая работа. Общая работа за время  $dt$  равна

$$E_0 I dt = I^2 R dt + I d\Phi. \quad (2.4.2)$$

Умножим левую и правую часть выражения (2.4.2) на  $\frac{1}{IR dt}$ , получим

$$\frac{E_0}{R} = I + \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Отсюда

$$I = \frac{E_0 - \frac{d\Phi}{dt}}{R}. \quad (2.4.3)$$

Полученное выражение (2.4.3) мы вправе рассматривать как закон Ома для контура, в котором, кроме источника  $E_0$ , действует

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.4.4)$$

ЭДС индукции контура  $E_i$  равна скорости изменения потока магнитной индукции, пронизывающей этот контур.

Это выражение (2.4.4) для ЭДС индукции контура является универсальным, не зависящим от способа изменения потока магнитной индукции, и носит название **закон Фарадея**.

Знак «-» в выражении отражает **правило Ленца о направлении индукционного тока: индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим полем противодействовать изменению начального магнитного поля**.

Направление индукционного тока и направление  $\frac{d\Phi}{dt}$  связаны «правилом буравчика» (рис. 2.4.5).

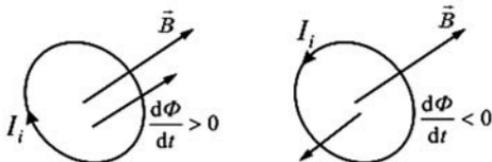


Рис. 2.4.5

Размерность ЭДС индукции:

$$[E_i] = \frac{[\Phi]}{[t]} = \frac{B \cdot c}{c} = B.$$

Если контур состоит из нескольких витков, то надо пользоваться понятием **потокосцепление (полный магнитный поток)**:

$$\Psi = \Phi N,$$

где  $N$  — число витков.

Итак, если

$$E_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \Phi_i;$$

$$\sum \Phi_i = \Psi.$$

Тогда **закон Фарадея** можно записать в следующем виде:

$$E_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.4.5)$$

### 2.4.3. ПРИРОДА ЭДС ИНДУКЦИИ

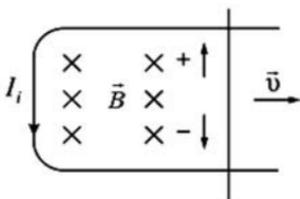


Рис. 2.4.6

Ответим на вопрос: что является причиной движения зарядов, причиной возникновения индукционного тока? Рассмотрим рисунок 2.4.6.

Проводник с током, изогнутый как показано на рисунке, замкнут подвижным проводником.

Если перемещать проводник в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , то под действием силы Лоренца электроны будут отклоняться вниз, а положительные заряды — вверх; возникает разность потенциалов. Это и будет  $E_i$  — **сторонняя сила**, под действием которой течет ток.

Для положительных зарядов  $\vec{F}_л = q^+[\vec{B}, \vec{v}]$ , для электронов  $\vec{F}_л = e^-[\vec{B}, \vec{v}]$ .

Если проводник неподвижен, а изменяется магнитное поле, какая сила возбуждает индукционный ток в этом случае?

Если взять обыкновенный трансформатор, то, как только замыкается цепь первичной обмотки, во вторичной обмотке сразу возникает ток. При этом сила Лоренца не участвует, так как она действует на движущиеся заряды.

Ответ был дан Дж. Максвеллом в 1860 г.: **всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве переменное электрическое поле  $E'$** . Оно и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. То есть  $E'$  возникает только при наличии переменного магнитного поля (на постоянном токе трансформатор не работает).

*Сущность явления электромагнитной индукции* совсем не в появлении индукционного тока (ток появляется тогда, когда есть заряды и замкнута цепь), а в воз-

*никновении вихревого электрического поля* (не только в проводнике, но и в окружающем пространстве, в вакууме).

Это поле имеет совершенно иную структуру, нежели поле, создаваемое зарядами. Так как оно не создается зарядами, то силовые линии не могут начинаться и заканчиваться на зарядах, как это было у нас в электростатике. Это поле вихревое, силовые линии его замкнуты.

Так как это поле перемещает заряды, оно обладает силой.

Введем вектор напряженности вихревого электрического поля  $\vec{E}'$ . Сила, с которой это поле действует на заряд:

$$\vec{F}' = q\vec{E}'.$$

Но когда заряд движется в магнитном поле, на него действует сила Лоренца:

$$\vec{F}'_L = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Эти силы должны быть равны:  $q\vec{E}' = q[\vec{v}, \vec{B}]$ . Отсюда

$$\vec{E}' = [\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.4.6)$$

где  $\vec{v}$  — скорость движения заряда  $q$  относительно  $\vec{B}$ .

Но для явления электромагнитной индукции важна скорость изменения магнитного поля  $\vec{B}$ . Поэтому можно записать

$$\vec{E}' = -[\vec{v}_B, \vec{B}], \quad (2.4.7)$$

где  $\vec{v}_B$  — скорость движения магнитного поля относительно заряда.

ЭДС индукции  $E_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Если площадь  $S$ , которую пронизывает магнитный поток, величина постоянная ( $S = \text{const}$ ), то можно записать

$$E_i = -S \frac{dB}{dt},$$

т. е. ЭДС индукции пропорциональна скорости изменения магнитного поля  $\frac{dB}{dt}$ .

#### 2.4.4. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ВИХРЕВОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ



Рис. 2.4.7

Чему равна циркуляция вектора вихревого электрического поля  $\vec{E}'$  в случае, изображенном на рисунке 2.4.7?

Работу вихревого электрического поля по перемещению заряда вдоль замкнутого контура  $L$  можно подсчитать по формуле

$$dA = q \oint_L \vec{E}' d\vec{l}. \quad (2.4.8)$$

С другой стороны, работа по перемещению единичного заряда вдоль замкнутой цепи равна ЭДС, действующей в этой цепи:

$$dA = E_i q. \quad (2.4.9)$$

Из сравнения (2.4.8) и (2.4.9) можно сделать заключение, что циркуляция вектора электрического поля равна

$$\oint_L \vec{E}' d\vec{l} = E_i. \quad (2.4.10)$$

Так как никаких других сторонних сил в цепи, где течет индукционный ток, нет, то можно записать

$$\oint_L \vec{E}' d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.4.11)$$

Эти выражения для циркуляции справедливы всегда, независимо от того, выполнен контур в виде линейного проводника, диэлектрика или речь идет о контуре (мысленном) в вакууме.

При движении заряда в проводнике из-за сопротивления устанавливается динамическое равновесие.

Если контур выполнен из диэлектрика, то каждый элемент его поляризуется в соответствии с действующим электрическим полем  $\vec{E}'$ .

Если заряд  $q$  движется в вакууме по контуру, то при каждом обходе контура механическая энергия его возрастает на величину

$$\frac{mv^2}{2} = \oint_L q \vec{E}' d\vec{l} = qE_i. \quad (2.4.12)$$

На использовании этого факта основан оригинальный ускоритель электронов — *бетатрон* (см. п. 2.5.3).

#### 2.4.5. ТОКИ ФУКО (ВИХРЕВЫЕ ТОКИ)

До сих пор мы рассматривали индукционные токи в линейных проводниках. Но индукционные токи будут возникать и в толще сплошных проводников при изменении в них потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . Они будут циркулировать в веществе проводника (напомним, что линии  $\vec{E}'$  замкнуты). Так как электрическое поле вихревое, то и токи называются вихревыми токами, или *токами Фуко*.

Если медную пластину отклонить от положения равновесия и отпустить так, чтобы она вошла со скоростью  $v$  в пространство между полосами магнита, то пластина практически остановится в момент ее вхождения в магнитное поле (рис. 2.4.8).

Замедление движения связано с возбуждением в пластине вихревых токов, препятствующих изменению потока вектора магнитной индукции. Поскольку пластина обладает конечным сопротивлением, токи индукции постепенно затухают и пластина медленно движется в магнитном поле. Если электромагнит отключить, то медная пластина будет совершать обычные колебания, характерные для маятника.

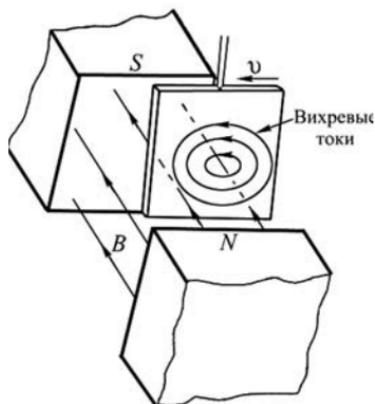


Рис. 2.4.8

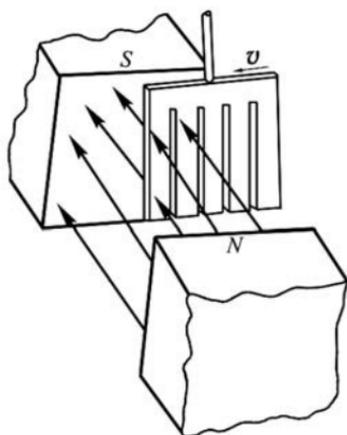


Рис. 2.4.9

Сила и расположение вихревых токов очень чувствительны к форме пластины. Если заменить сплошную медную пластину «гребенкой» — медной пластиной с пропилами, то вихревые токи в каждой части пластины возбуждаются меньшими потоками. Индукционные токи уменьшаются, уменьшается и торможение (рис. 2.4.9). Маятник в виде гребенки колеблется в магнитном поле почти без сопротивления. Этим опытом объясняется, почему сердечники электромагнитов, трансформаторов делают не из сплошного куска железа, а набранными из тонких пластин, изолированных друг от друга. В результате уменьшаются токи Фуко и выделяемое ими тепло.

Если взять медный диск диаметром  $\approx 5$  см и толщиной  $\approx 5$  мм и уронить его между полюсами электромагнитного поля, то он будет тормозиться. Если же сделать его в виде гребенки, то торможение будет почти незаметным.

Если взять медный диск диаметром  $\approx 5$  см и толщиной  $\approx 5$  мм и уронить его между полюсами электромагнитного поля, то он будет тормозиться. Если же сделать его в виде гребенки, то торможение будет почти незаметным.

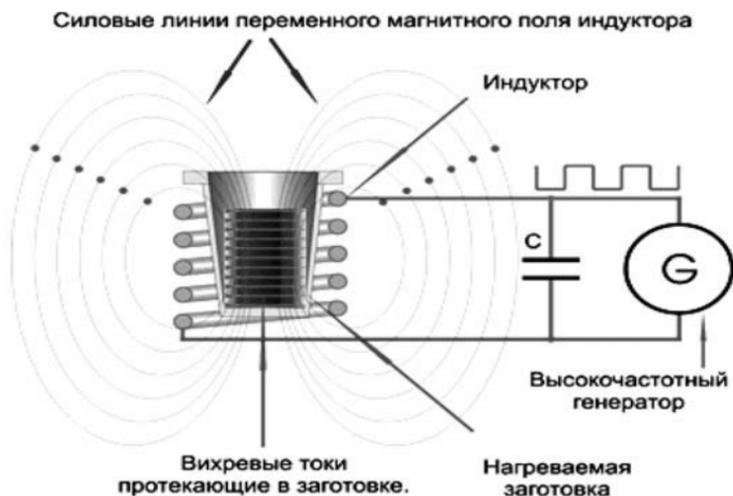


Рис. 2.4.10

та, то при выключенном магните диск падает с обычным ускорением. При включении магнитного поля  $B \approx 1$  Тл падение диска резко замедляется и его движение напоминает падение тела в очень вязкой среде.

Тормозящее действие тока Фуко используется для создания магнитных успокоителей — демпферов. Если под качающейся в горизонтальной плоскости магнитной стрелкой расположить массивную медную пластину, то возбуждаемые в медной пластине токи Фуко будут тормозить колебание стрелки. Магнитные успокоители такого рода используются в сейсмографах, гальванометрах и других приборах.

Токи Фуко применяются в электрометаллургии для плавки металлов (рис. 2.4.10). Металл помещают в переменное магнитное поле, создаваемое током частотой 500–2000 Гц. В результате индуктивного разогрева металл плавится, а тигль, в котором он находится, при этом остается холодным. Например, при подведенной мощности 600 кВт тонна металла плавится за 40–50 мин.

Вредное действие токов Фуко проявляется в разогреве сердечников трансформаторов (рис. 2.4.11). Чтобы избежать этого, приходится изготавливать сердечники не сплошными, а из пластин.

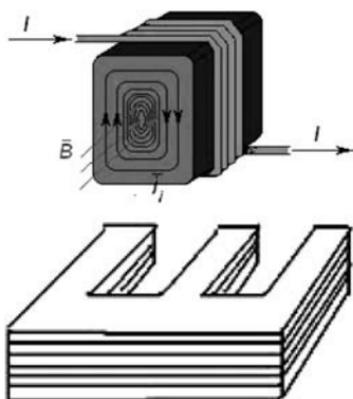


Рис. 2.4.11

#### 2.4.6. СКИН-ЭФФЕКТ

Если быстропеременный высокочастотный ток протекает по проводнику, то вихревые токи, индуцируемые в проводнике, препятствуют равномерному распределению плотности тока по поперечному сечению проводника — плотность тока на оси провода оказывается меньше, чем у его поверхности. Ток как бы вытесняется на поверхность провода, при этом вихревые токи по оси проводника текут

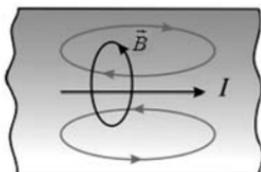


Рис. 2.4.12

против направления основного тока, а на поверхности — в том же направлении (рис. 2.4.12). Это явление называется скин-эффектом (от *англ.* skin — кожа, оболочка). Впервые это явление описано в 1885–1886 гг. английским физиком О. Хевисайдом, а обнаружено на опыте его соотечественником Д. Юзом в 1886 г.

При нарастании тока в проводе ЭДС индукции направлена против тока. Электрическое поле самоиндукции максимально на оси провода, что приводит к неравномерному распределению плотности тока. Плотность тока убывает от поверхности к оси провода примерно по экспоненциальному закону (рис. 2.4.13).

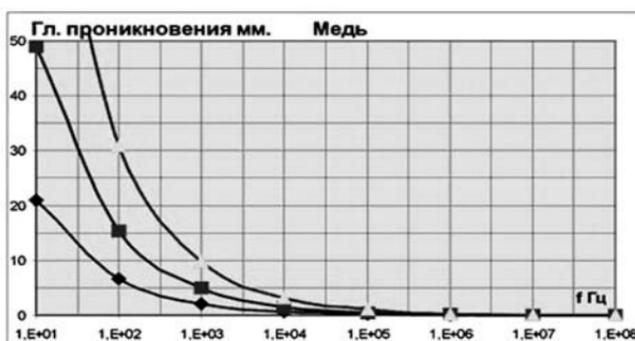


Рис. 2.4.13

При частоте  $\nu = 50$  Гц  $r_0 = 10$  мм ток практически равномерно распределен по объему проводов, исключая очень толстые кабели. Но при высокочастотных колебаниях ( $\nu \approx 100$  МГц  $= 10^8$  Гц) глубина проникновения  $r_0 \approx 7 \cdot 10^{-3}$  мм и ток почти целиком течет по поверхности провода. По этой причине с целью уменьшения потерь поверхность высокочастотных контуров серебрят. Провода для переменных токов высокой частоты, учитывая скин-эффект, сплетают из большого числа тонких проводящих нитей, изолированных друг от друга эмалевым покрытием — *литцендратом* (рис. 2.4.14).

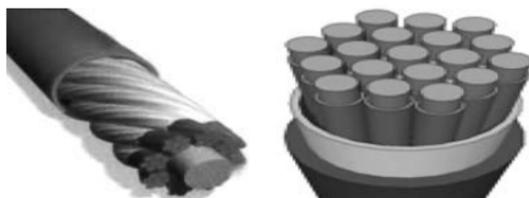


Рис. 2.4.14

ВЧ-токи используются для закалки поверхностей деталей: поверхностный слой разогревается быстро в ВЧ-поле, закаливается и становится прочным, но не хрупким, так как внутренняя часть детали не разогревалась и не закаливалась.

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. Что является причиной возникновения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре?
2. В чем заключается явление электромагнитной индукции? Проанализируйте опыты Фарадея.
3. Почему для обнаружения индукционного тока лучше использовать замкнутый проводник в виде катушки, а не в виде одного витка провода?
4. Сформулируйте правило Ленца, проиллюстрировав его примерами.
5. Как направлен индукционный ток?
6. Всегда ли при изменении магнитной индукции в проводящем контуре в нем возникает ЭДС индукции; индукционный ток?
7. Возникает ли индукционный ток в проводящей рамке, поступательно движущейся в однородном магнитном поле?
8. Покажите, что закон Фарадея есть следствие закона сохранения энергии.
9. Какова природа ЭДС электромагнитной индукции?
10. Выведите выражение для ЭДС индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. За счет чего ее можно увеличить?
11. Что такое циркуляция вектора вихревого электрического поля?
12. Чему равна циркуляция вектора вихревого электрического поля вдоль замкнутого контура?
13. Чему равна работа по перемещению единичного заряда вдоль замкнутой цепи?
14. На какую величину возрастает механическая энергия заряда движущегося в вакууме по контуру при каждом обходе контура?

15. Что такое вихревые токи? Вредны они или полезны?
16. Какое применение находят токи Фуко? Как можно с ними бороться?
17. Почему сердечники трансформаторов не делают сплошными?
18. Между полюсами сильного электромагнита сначала качается массивный маятник (рис. 2.4.8), затем — маятник с большим числом разрезов (рис. 2.4.9). Поясните поведение маятников при разомкнутой и замкнутой обмотках электромагнита.
19. Объясните как происходит индукционный разогрев металла с помощью токов Фуко.
20. Объясните явление вытеснения вихревых токов на поверхность проводника.
21. На каких частотах проявляется скин-эффект?
22. На какую глубину проникают высокочастотные токи?
23. Где используется скин-эффект и как с ним можно бороться?

## 2.5. УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

### 2.5.1. КЛАССИФИКАЦИЯ УСКОРИТЕЛЕЙ

*Ускорителями* заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетических заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т. д.). Ускорители являются основным инструментом исследований в физике элементарных частиц.

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка. Ускорители подразделяются на *непрерывные* (равномерный во времени пучок) и *импульсные* (в них частицы ускоряются порциями — импульсами). Последние характеризуются длительностью импульса.

По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители делятся на *линейные*, *циклические* и *индукционные*. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных траекториями частиц являются окружности или спирали.

Рассмотрим некоторые типы ускорителей заряженных частиц.

### 2.5.2. ЛИНЕЙНЫЕ УСКОРИТЕЛИ

1. *Линейный ускоритель.* Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым высоковольтным генератором (рис. 2.5.1). Заряженная частица проходит поле однократно: заряд  $q$ , проходя разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , приобретает кинетическую энергию  $W_k = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Таким способом частицы ускоряются до  $\approx 10$  МэВ. Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т. д.

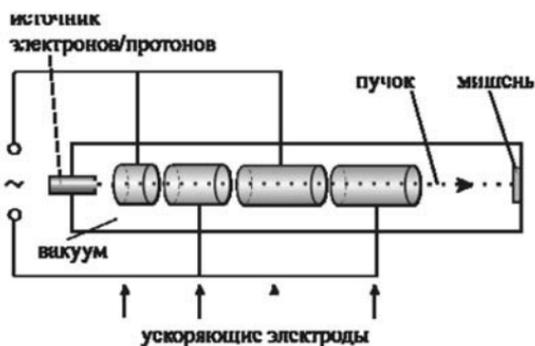


Рис. 2.5.1

2. *Линейный резонансный ускоритель.* Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, синхронно изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектронвольт, электроны — до десятков гигаэлектронвольт. Общий вид линейного ускорителя на бегущей волне приведен на рисунке 2.5.2. Заряженные частицы многократно проходят ускоряющий промежуток в двух резонаторах, изображенных на рисунке.



Рис. 2.5.2

### 2.5.3. ЦИКЛИЧЕСКИЕ УСКОРИТЕЛИ

1. **Циклотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Принципиальная схема циклотрона и его внешний вид приведены на рисунке 2.5.3.

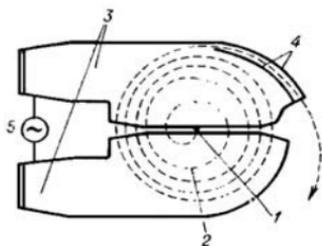


Рис. 2.5.3

Между полюсами сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов 3. К дуантам приложено переменное электрическое поле 5. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов.

Если заряженную частицу ввести в центр зазора 1 между дуантами, то она, ускоряемая электрическим и отклоняемая магнитными полями, войдет в дуант и опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы. К моменту ее выхода из первого дуанта полярность напряжения изменяется (при соответствующем подборе изменения напряжения между дуантами), поэтому частица вновь ускоряется и, переходя во второй дуант, описывает там полуокружность уже большего радиуса 2 и т. д.

Для непрерывного ускорения частицы в циклотроне необходимо выполнять условие синхронизма (условие «резонанса») — периоды вращения частицы в магнитном поле и колебаний электрического поля должны быть равны. При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом прохождении через зазор дополнительную энергию. На пос-

леднем витке, когда энергия частиц и радиус орбиты доведены до максимально допустимых значений, пучок частиц посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона 4.

В циклотронах заряженная частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  ускоряется до скоростей, при которых релятивистский эффект увеличения массы частицы практически не проявляется. Период обращения частицы:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Радиус траектории частицы:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 20 МэВ. Дальнейшее их ускорение в циклотроне *ограничивается релятивистским возрастанием массы со скоростью*, что приводит к увеличению периода обращения (он пропорционален массе), и синхронизм нарушается. Поэтому циклотрон совершенно неприменим для ускорения электронов (при  $W = 0,5$  МэВ  $m = 2m_0$ , при  $W = 10$  МэВ  $m = 28m_0$ ).

Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно, однако, осуществить, если применять предложенный в 1944 г. советским физиком В. И. Векслером (1907–1966) и в 1945 г. американским физиком Э. Мак-Милланом (1907–1991) *принцип автофазировки*. Его идея заключается в том, что для компенсации увеличения периода вращения частиц, ведущего к нарушению синхронизма, изменяют либо частоту ускоряющего электрического, либо индукцию магнитного полей, либо и то и другое. Принцип автофазировки используется в фазотроне, синхротроне и синхрофазотроне.

**2. Микротрон** (электронный циклотрон) — циклический резонансный ускоритель, в котором, как и в циклотроне, и магнитное поле, и частота ускоряющего поля постоянны во времени, но резонансное условие в процессе ускорения все же сохраняется за счет изменения кратности

ускорения  $q$ . Частица вращается в микротроне в однородном магнитном поле, многократно проходя ускоряющий резонатор. В резонаторе она получает такой прирост энергии, что ее период обращения изменяется на величину, равную или кратную периоду ускоряющего напряжения. Причем, если частица с самого начала вошла в резонанс с ускоряющим полем, этот резонанс сохраняется, несмотря на изменение периода обращения. В микротроне действует механизм автофазировки, так что частицы, близкие к равновесной орбите, также будут ускоряться.

Микротрон — ускоритель непрерывного действия, способен давать токи порядка 100 мА, максимальная достигнутая энергия — порядка 30 МэВ (Россия, Великобритания). Реализация больших энергий затруднительна из-за повышенных требований к точности магнитного поля, а существенное повышение тока ограничено электромагнитным излучением ускоряемых электронов.

Для длительного сохранения резонанса магнитное поле микротрона должно быть однородным. Такое поле не обладает фокусирующими свойствами по вертикали; соответствующая фокусировка производится электрическим полем резонатора. Предлагались варианты микротронов с меняющимся по азимуту магнитным полем (секторный микротрон), но сколько-нибудь значительного развития они пока не получили.

**3. Фазотрон** (синхроциклотрон) — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов,  $\alpha$ -частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий, примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, так как с ростом скорости частиц растет радиус их орбиты).

**4. Синхротрон** — циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. На рисун-

ке 2.5.4 схематически изображен синхротрон: 1 — инжектор электронов; 2 — поворотный магнит; 3 — пучок электронов; 4 — управляющий электромагнит; 5 — вакуумная тороидальная камера; 6 — ускоряющий промежуток.

Внешний вид Томского синхротрона на 1,5 ГэВ представлен на рисунке 2.5.5. Электроны в разных синхротронах ускоряются до энергий 5–10 ГэВ.

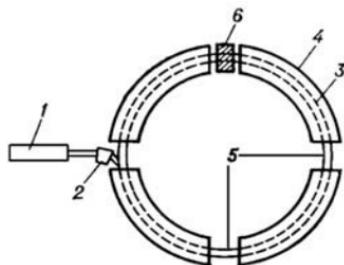


Рис. 2.5.4



Рис. 2.5.5

**5. Синхрофазотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона. Здесь управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. На рисунке 2.5.6 изображен Серпуховской синхрофазотрон У-70 с энергией 70 ГэВ.



Рис. 2.5.6

Рассмотрим действие лоренцевой силы и рассчитаем энергию протонного ускорителя, представляющего собой кольцевой магнит диаметром 2 км. Между полюсами этого магнита расположена тороидальная вакуумная камера, в которую инжесктирован пучок протонов. Если смотреть на ускоритель сверху (см. рис. 2.5.7), то пучок протонов движется по часовой стрелке со скоростью  $v$ , близкой к скорости света.

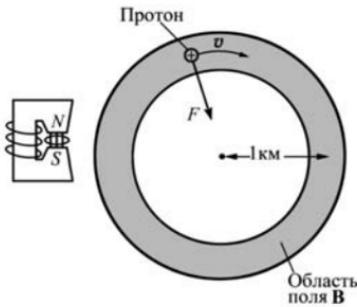


Рис. 2.5.7

На протон действует центробежная сила, направленная к центру. Если поле  $\vec{B}$  направлено из плоскости чертежа, то сила Лоренца  $\vec{F} = [\vec{v}, \vec{B}]$  всегда направлена к центру.

Центробежная сила равна

$$F_{\text{ц}} = m_r(v^2 / R),$$

где  $m_r$  — релятивистская масса протона. Так как эта сила обусловлена действием магнитного поля, она равна  $evB$ .

Тогда

$$m_r v^2 / R = evB.$$

Поскольку  $v \approx c$ , то можно записать, что  $m_r c^2 = ecBR$  — так можно рассчитать полную релятивистскую энергию протонов:

$$W = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,8 \cdot 10^3 = 8,64 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 540 \text{ ГэВ}.$$

Заметим при этом, что магнитное поле не увеличивает скорость или энергию частиц. Ускорение протонов осуществляется при каждом их обороте в кольце за счет электростатического поля, которое действует на коротком участке кольца.

Планируется построить в г. Серпухов протонный синхрофазотрон на энергию примерно 3000 ГэВ (диаметр установки примерно 6000 м).

В фазотронах, микротронах, синхротронах и синхрофазотронах частицы ускоряются до релятивистских скоростей.

Масса частицы  $m$  зависит от ее скорости  $v$ :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где  $m_0$  — масса покоя частицы;  $\beta = v/c$  — отношение скорости частицы  $v$  к скорости света  $c$  в вакууме.

Кинетическая энергия частицы  $W_{\text{к}}$ :

$$W_{\text{к}} = W - W_0,$$

где  $W = mc^2$  — полная энергия частицы;  $W_0 = m_0c^2$  — энергия покоя частицы.

Импульс релятивистской частицы:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\text{к}}(E_{\text{к}} + 2m_0c^2)}.$$

Период обращения релятивистской частицы:

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\pi E}{qBc^2}.$$

Радиус окружности траектории релятивистской частицы:

$$R = \frac{m_0v}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

**6. Бетатрон** — единственный циклический ускоритель (электронов) нерезонансного типа, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем.

Электродвижущая сила индукции, создаваемая переменным магнитным полем, может существовать и в отсутствие проводников. Энергия  $E_{\text{к}}$ , передаваемая вихревым электрическим полем единичному положительному заряду, равна контурному интегралу по замкнутой траектории  $L$ :

$$W_{\text{к}} = E = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Согласно закону Фарадея, этот интеграл равен изменению магнитного потока через замкнутый контур  $L$ . Таким образом, вихревое электрическое поле может действовать на сгусток электронов,двигающихся в изменяющемся магнитном поле, и ускорять их. При определенных условиях движение электронов происходит в переменном магнитном поле по орбите постоянного радиуса и является устойчивым, причем энергия электронов увеличивается за счет вихревого электрического поля, создаваемого

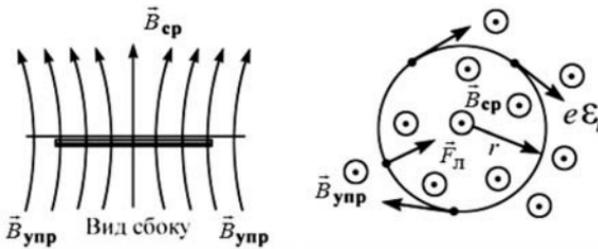


Рис. 2.5.8

изменяющимся магнитным потоком, пронизывающим орбиту частиц (рис. 2.5.8).

Как показано на рисунке 2.5.8, переменный центральный магнитный поток  $B_{cp}$  создает в бетатроне вихревую ЭДС индукции, ускоряющую электроны. В соответствии с выражением

$$\frac{mv^2}{2} = qE_i$$

при каждом обходе контура энергия электронов увеличивается на величину  $qE_i$ .

Удержание электронов на стационарной круговой орбите осуществляется управляющим магнитным полем  $B_{ynp}$ , определенным образом изменяющимся во времени.

Бетатрон (рис. 2.5.9а) состоит из тороидальной вакуумной камеры (рис. 2.5.9б), помещающейся между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 2.5.9б). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой  $\nu \approx 100$  Гц.

Переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряю-

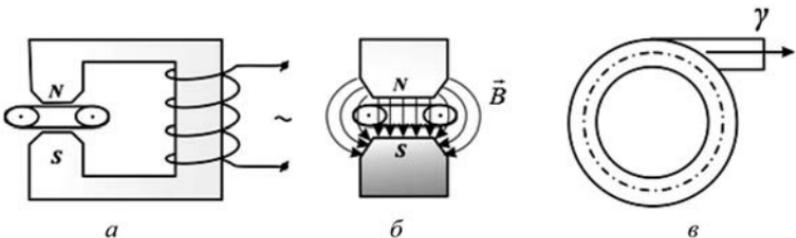


Рис. 2.5.9

щее электроны внутри тороида; во-вторых, удерживает электроны на орбите (силовые линии располагаются так, чтобы пучок электронов находился в состоянии устойчивого равновесия в центре тора).

За время порядка  $10^{-3}$  с электроны успевают сделать до  $10^6$  оборотов и приобрести энергию до 500 МэВ (сотни МэВ в разных ускорителях). При такой энергии скорость электронов близка к скорости света ( $v \approx c$ ).

Кроме того, сам же пучок электронов в данном случае выполняет роль вторичной обмотки трансформатора.

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны тормозятся в ней и испускают жесткие  $\gamma$ -лучи (или рентген), которые используются в ядерных исследованиях при неразрушающих методах контроля, в медицине и т. д.

Идея бетатрона запатентована в 1922 г. Дж. Слепяном. В 1928 г. Р. Видероз сформулировал условие существования равновесной орбиты — орбиты постоянного радиуса «условие 2:1». Первый действующий бетатрон был создан в 1940 г. Д. Керстом.

В СССР первые бетатроны были разработаны и созданы учеными Томского политехнического института (ныне — университет): профессорами А. А. Воробьевым, Л. М. Афаньевым, В. И. Горбуновым, В. А. Москалевым, Б. Н. Родиновым. В последующие годы в Институте интроскопии (НИИН ТПУ) под руководством профессора В. Л. Чахлова успешно разрабатываются и изготавливаются малогабаритные переносные бетатроны, применяемые в медицине, дефектоскопии и других прикладных и научных исследованиях.

Благодаря простоте конструкции, дешевизне и удобству пользования бетатроны нашли особо широкое применение в прикладных целях в диапазоне энергии 20–50 МэВ. Используется непосредственно сам электронный пучок или тормозное  $\gamma$ -излучение, энергия которого может плавно изменяться.

#### 2.5.4. БОЛЬШОЙ АДРОННЫЙ КОЛЛАЙДЕР

**Большой адронный коллайдер** (англ. Large Hadron Collider, LHC; сокращенно БАК) — ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжелых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. БАК является самой крупной экспериментальной установкой в мире (рис. 2.5.10).

Большим назван из-за своих размеров: длина основного кольца ускорителя составляет 26 659 м; адронным из-за того, что он ускоряет адроны, т. е. частицы, состоящие из кварков; коллайдером (англ. collide — сталкиваться) из-за того, что пучки частиц ускоряются в противоположных направлениях и сталкиваются в специальных точках столкновения (рис. 2.5.11).



Рис. 2.5.10

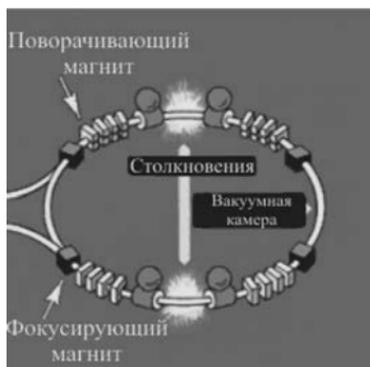


Рис. 2.5.11

Атомы водорода поступают строго дозированными порциями в камеру **линейного ускорителя** (рис. 2.5.12), там от них отделяют электроны, оставляя только ядра водорода. Протоны несут положительный заряд, что позволяет придавать им ускорение при помощи электрического поля. Эту стадию разгона частиц в линейном ускорителе можно сравнить с *первой ступенью космической ракеты*. На выходе отсюда протоны будут двигаться со скоростью, равной  $1/3$  скорости света. Теперь они готовы поступить в бустер или во *вторую ступень ракеты*.

Чтобы максимально повысить плотность потока частиц, их разделяют на четыре части, каждая из которых

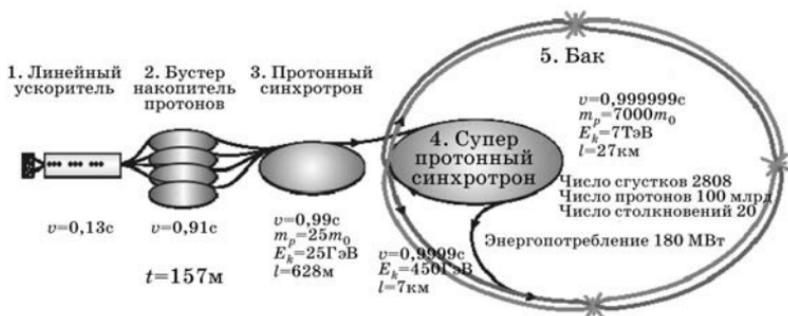


Рис. 2.5.12

поступает в отдельное кольцо *бустера* (накопителя). *Кольцевой ускоритель* разгоняет протоны до 91,6% скорости света, при этом собирает их в плотный пучок. После этого частицы из четырех колец собираются воедино и поступают в *протонный синхротрон* (это *третья ступень нашей ракеты*).

Протяженность синхротрона — 628 м, это расстояние протоны проходят за 1,2 с, разгоняясь до 99,9% скорости света. Но в результате такого ускорения в 25 раз увеличивается масса протонов, т. е. протоны не могут ускоряться, а становятся тяжелее. На этой стадии энергия каждой частицы равняется 25 млрд электронвольт.

Теперь начинается четвертая стадия. *Протонный суперсинхротрон* — огромное семкилометровое кольцо. Его задача — увеличить энергию протонов до 450 млрд электронвольт.

Далее пучки протонов будут готовы к перемещению в *Большой адронный коллайдер*. В нем проложены две вакуумные трубы, по ним в противоположных направлениях движутся пучки протонов. По одной трубе частицы движутся по часовой стрелке, по другой — против часовой стрелки. Эти трубы пересекаются в четырех местах, где установлены детекторы. Именно здесь протоны можно столкнуть друг с другом, причем энергия столкновения в два раза превышает запас энергии каждого протона.

В течение получаса в коллайдер поступают около 2800 порций частиц. Каждую секунду протоны проходят

27-километровый круг более 11 тыс. раз, постоянно получая импульсы ускоряющего электрического поля. Энергия каждого протона уже составляет 7 ТэВ, а масса в 7 тыс. раз больше нормальной. Общая энергия двух сталкивающихся протонов равна 14 ТэВ.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое ускорители заряженных частиц? Какие они бывают и чем характеризуются?
2. Как будет двигаться заряженная частица, влетевшая в однородное магнитное поле, к вектору  $\vec{B}$  под углом  $\pi/2$ ?
3. Когда заряженная частица движется в магнитном поле по спирали? От чего зависит шаг спирали? Ответы подтвердите выводами формул.
4. Почему для ускорения электронов не применяются циклотроны?
5. В чем заключается принцип автофазировки? Где он используется?
6. Чем отличается синхротрон от синхрофазотрона?
7. На какую величину увеличивается энергия электронов при каждом обходе контура в бетатроне?
8. Какая достигнута максимальная энергия протонов?

## 2.6. САМОИНДУКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 2.6.1. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ

До сих пор мы рассматривали изменяющиеся магнитные поля, не обращая внимания на то, что является их источником. На практике чаще всего магнитные поля создаются с помощью различного рода соленоидов, т. е. многовитковых контуров с током.

Здесь возможны два случая: при изменении тока в контуре изменяется магнитный поток, пронизывающий:

- этот же контур;
- соседний контур.

ЭДС индукции, возникающая в самом же контуре, называется **ЭДС самоиндукции**, а само явление — **самоиндукция**.

Если же ЭДС индукции возникает в соседнем контуре, то говорят о явлении **взаимной индукции**.

Ясно, что природа явления одна и та же, а разные названия использованы для того, чтобы подчеркнуть место возникновения ЭДС индукции.

Явление самоиндукции открыл в 1832 г. американский ученый Дж. Генри.

Явление самоиндукции можно определить следующим образом: ток  $I$ , текущий в любом контуре, создает магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий этот же контур. При изменении  $I$  будет изменяться  $\Phi$ . Следовательно, в контуре будет наводиться ЭДС индукции.

Так как магнитная индукция  $B$  пропорциональна току  $I$  ( $B = \mu\mu_0 n I$ ), следовательно:

$$\Phi = LI,$$

где  $L$  — коэффициент пропорциональности, названный индуктивностью контура.

Если внутри контура нет ферромагнетиков, то  $L = \text{const}$ , так как  $\mu = f(I) = f(H)$ .

Индуктивность контура  $L$  зависит от геометрии контура, числа витков, площади витка контура.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого контура, у которого при токе  $I = 1$  А возникает полный поток  $\Phi = 1$  Вб. Эта единица называется Генри (Гн).

Размерность индуктивности:

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Гн}.$$

Вычислим индуктивность соленоида  $L$ . Если длина соленоида  $l$  гораздо больше его диаметра  $d$  ( $l \gg d$ ), то к нему можно применить формулы для бесконечно длинного соленоида.

Тогда

$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{l},$$

где  $N$  — число витков. Поток через каждый из витков  $\Phi = BS$ .

Потокоцепление:

$$\Psi = NBS = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} NS = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I.$$

Но мы знаем, что  $\Phi = LI$ , откуда индуктивность соленоида:

$$L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu\mu_0 n^2 l S,$$

где  $n$  — число витков на единицу длины, т. е.  $n = N/l$ ,  $lS = V$  — объем соленоида.

Значит,

$$L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (2.6.1)$$

Из этой формулы можно найти размерность для магнитной постоянной:

$$[\mu_0] = \frac{[L][I]}{[S]} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

При изменении тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции, равная:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(IL) = -L \frac{dI}{dt}; \\ \mathcal{E}_i &= -L \frac{dI}{dt}. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Знак « $-$ » в этой формуле обусловлен правилом Ленца.

Явление самоиндукции играет важную роль в электротехнике и радиотехнике. Как мы увидим дальше, благодаря самоиндукции происходит перезарядка конденсатора, соединенного последовательно с катушкой индуктивности, в результате в такой  $LC$ -цепочке (колебательном контуре) возникают электромагнитные колебания.

### 2.6.2. ВЛИЯНИЕ САМОИНДУКЦИИ НА ТОК ПРИ ЗАМЫКАНИИ И РАЗМЫКАНИИ ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИНДУКТИВНОСТЬ

Рассмотрим несколько случаев влияния ЭДС самоиндукции на ток в цепи.

**Случай 1.** По правилу Ленца токи, возникающие в цепях вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы препятствовать изменению тока, текущего в цепи. Это приводит к тому, что при замыкании ключа  $K$  уста-

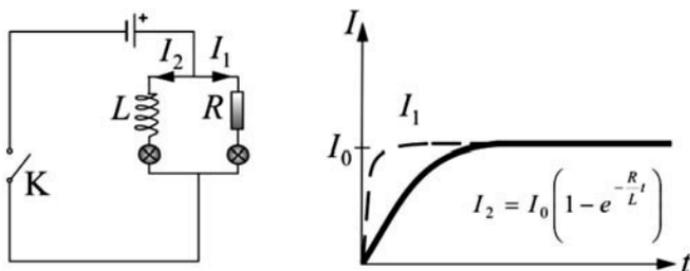


Рис. 2.6.1

новление тока  $I_2$  в цепи, содержащей индуктивность  $L$ , будет происходить не мгновенно, а постепенно (рис. 2.6.1).

Сила тока в этой цепи будет удовлетворять уравнению

$$I_2 = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (2.6.3)$$

Скорость возрастания тока будет характеризоваться *постоянной времени цепи*:

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (2.6.4)$$

В цепи, содержащей только активное сопротивление  $R$ , ток  $I_1$  установится практически мгновенно (пунктирная кривая на рис. 2.6.1).

**Случай 2.** При переводе ключа из положения 1 в 2 в момент времени  $t_0$  ток начнет уменьшаться, но ЭДС самоиндукции будет поддерживать ток в цепи, т. е. препятствовать резкому уменьшению тока (рис. 2.6.2). В этом случае убывание тока в цепи можно описать уравнением

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.6.5)$$

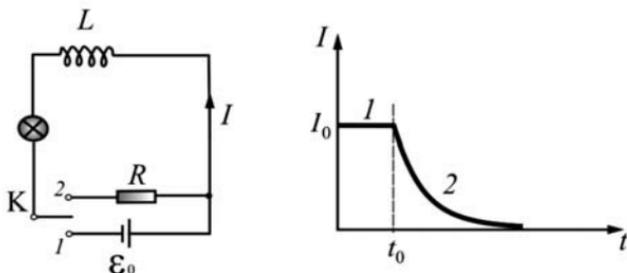


Рис. 2.6.2

Оба эти случая говорят, что чем больше индуктивность цепи  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ , тем больше постоянная времени  $\tau$  и тем медленнее изменяется ток в цепи.

**Случай 3.** Размыкание цепи, содержащей индуктивность  $L$ . Так как цепь разомкнута, ток не течет, поэтому на рисунке 2.6.3 изображена зависимость  $E_i(t)$ .

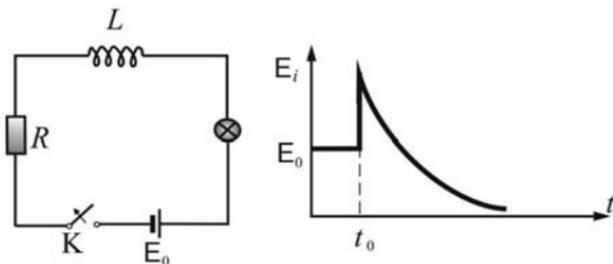


Рис. 2.6.3

При размыкании цепи в момент времени  $t_0$   $R \rightarrow \infty$ . Это приводит к резкому возрастанию ЭДС индукции, определяемой по формуле

$$E_i = -L \frac{dI}{dt}.$$

Происходит этот скачок вследствие большой величины скорости изменения тока  $\frac{dI}{dt}$ .

$E_i$  резко возрастает по сравнению с  $E_0$  и даже может быть в несколько раз больше  $E_0$ . Поэтому нельзя резко размыкать цепь, включающую в себя трансформаторы и другие индуктивности.

### 2.6.3. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

Возьмем два контура, расположенные недалеко друг от друга, как это показано на рисунке 2.6.4.

В первом контуре течет ток  $I_1$ . Он создает магнитный поток, который пронизывает и витки второго контура:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1. \quad (2.6.6)$$

При изменении тока  $I_1$  во втором контуре наводится ЭДС индукции:

$$E_{21} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (2.6.7)$$

Аналогично ток  $I_2$  второго контура создает магнитный поток, пронизывающий первый контур:

$$\Phi_1 = L_{12} I_2. \quad (2.6.8)$$

И при изменении тока  $I_2$  наводится ЭДС:

$$E_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (2.6.9)$$

Контуров называются *связанными*, а явление — *взаимной индукцией*. Коэффициенты  $L_{21}$  и  $L_{12}$  называются *взаимной индуктивностью*, или *коэффициентами взаимной индукции*, причем  $L_{21} = L_{12} = L$ .

Трансформатор является типичным примером двух связанных контуров. Рассмотрим индуктивность трансформатора и найдем коэффициент трансформации.

#### 2.6.4. ИНДУКТИВНОСТЬ ТРАНСФОРМАТОРА

Итак, явление взаимной индукции используется в широко распространенных устройствах — *трансформаторах*.

Трансформатор был изобретен русским ученым Яблочковым в 1876 г. для отдельного питания отдельных электрических источников света (свечи Яблочкова).

Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек ( $L_1$  и  $L_2$ ), намотанных на *общий сердечник* (см. рис. 2.6.5).

Когда в первой катушке идет ток  $I_1$ , в сердечнике возникает магнитная индукция  $\vec{B}$  и магнитный поток  $\Phi$  через поперечное сечение  $S$ .

Магнитное поле тороида можно рассчитать по формуле

$$B = \mu\mu_0 I_1 \frac{N_1}{l}.$$

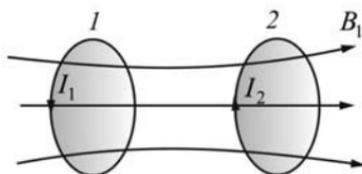


Рис. 2.6.4

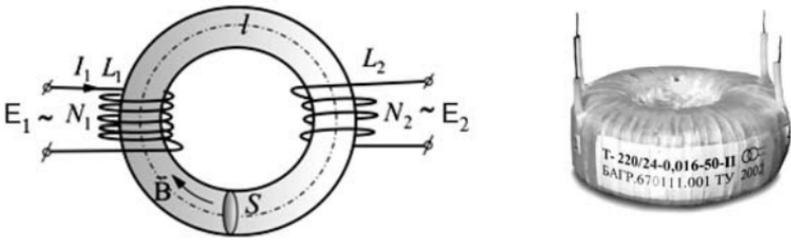


Рис. 2.6.5

Через вторую обмотку проходит полный магнитный поток  $\Psi_2$ , сцепленный со второй обмоткой:

$$\Psi_2 = N_2 BS = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1,$$

где  $\Psi_2 = N_2 \Phi$  — потокосцепление, которое можно найти по формуле

$$\Psi_2 = L_{21} I_1.$$

По определению взаимная индуктивность двух катушек равна

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

К первичной обмотке подключена переменная ЭДС  $E_1$ . По закону Ома ток в этой цепи будет определяться алгебраической суммой внешней ЭДС и ЭДС индукции:

$$E_1 = - \frac{d(N_1 \Phi)}{dt} + I_1 R_1,$$

где  $R_1$  — сопротивление обмотки;  $R_1$  делают малым (медные провода), и  $I_1 R_1 \rightarrow 0$ .

Тогда

$$E_1 \approx \frac{d(N_1 \Phi)}{dt} \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Во второй обмотке, по аналогии:

$$E_2 \approx N_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда

$$\frac{E_1}{E_2} \approx \frac{N_1}{N_2}. \quad (2.6.10)$$

Если пренебречь потерями, т. е. предположить, что  $R \approx 0$ , то

$$E_1 I_1 = E_2 I_2. \quad (2.6.11)$$

Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{E_2}{E_1} \approx \frac{N_2}{N_1}.$$

### 2.6.5. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим случай запаса энергии в схеме, изображенной на рисунке 2.6.2.

Сначала замкнем соленоид  $L$  на источник ЭДС  $E_0$ , в нем будет протекать ток  $I_0$ . Затем, в момент времени  $t_0$ , переключим ключ в положение 2 — замкнем соленоид на сопротивление  $R$ . В цепи будет течь убывающий ток  $I$ . При этом будет совершена работа  $dA = E_0 I dt$  или

$$dA = -L \frac{dI}{dt} I dt = -L I dI; \quad A = -L \int_I^0 I dI = \frac{LI^2}{2};$$

$$A = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.6.12)$$

Эта работа пойдет на нагревание проводников. Но откуда взялась эта энергия? Поскольку других изменений, кроме исчезновения магнитного поля в окружающем пространстве, не произошло, остается заключить, что энергия была локализована в магнитном поле. Значит, проводник с индуктивностью  $L$ , по которой течет ток  $I$ , обладает энергией:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.6.13)$$

Выразим энергию магнитного поля через параметры магнитного поля.

Для соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 l S = \mu\mu_0 n^2 V;$$

$$H = In.$$

Отсюда

$$I = \frac{H}{n}.$$

Подставим эти значения в формулу (2.6.13):

$$W = \frac{\mu\mu_0 n^2 V H^2}{2n^2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V. \quad (2.6.14)$$

Пусть  $w$  — плотность энергии, или энергия в объеме  $V$ .

Тогда

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (2.6.15)$$

Но так как  $B = \mu\mu_0 H$ , то

$$w = \frac{BH}{2} \quad \text{или} \quad w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (2.6.16)$$

Энергия однородного магнитного поля в длинном соленоиде может быть рассчитана по формуле

$$W = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V, \quad (2.6.17)$$

а плотность энергии:

$$w = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2. \quad (2.6.18)$$

Плотность энергии магнитного поля в соленоиде с сердечником будет складываться из энергии поля в вакууме и в магнетике сердечника:

$$w = w_{\text{вак}} + w_{\text{магнет}}.$$

Отсюда

$$w_{\text{магнет}} = w - w_{\text{вак}}.$$

Так как в вакууме  $\mu = 1$ , имеем плотность энергии магнитного поля:

$$w_{\text{магнет}} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu_0 (\mu - 1) H^2}{2}.$$

В таблице 2 приведены сравнительные характеристики электрического и магнитного полей.

Таблица 2

## Сравнительные характеристики электрического и магнитного полей

Электростатическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Точечный заряд	$q$	Ток	$I$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	Магнитная постоянная	$\mu_0$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$	Магнитная проницаемость	$\mu$
Диэлектрическая восприимчивость	$\chi = \epsilon - 1$	Магнитная восприимчивость	$\aleph = \mu - 1$
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}$	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{r}$
Напряженность электрического поля	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	Магнитная индукция	$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{P_m}$
Электростатическая индукция	$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}$	Напряженность магнитного поля	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum \vec{B}_i$
Поляризованность	$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$	Намагниченность	$\vec{J} = \aleph\vec{H}$
Емкость проводника	$C = \frac{q}{\phi} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0\mu Sl$
Энергия конденсатора	$W_c = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$	Энергия катушки с током	$W_L = \frac{LI^2}{2}$
Объемная плотность энергии	$w = \frac{ED}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$	Объемная плотность энергии	$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$
Циркуляция $\vec{E}$	$\oint_L \vec{E} dl = 0$	Циркуляция $\vec{B}$	$\oint_L \vec{H} = I_{\text{полн}}$
Теорема Гаусса	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Теорема Гаусса	$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$
Безвихревое поле	$\text{rot}\vec{E} = 0$	Созданное токами	$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\text{полн}}$
Созданное зарядами	$\text{div}\vec{D} = \nabla\vec{D} = \rho$	Вихревое поле	$\text{div}\vec{B} = \nabla\vec{B} = 0$

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем отличие явления самоиндукции от явления взаимной индукции? Какова природа этих явлений?
2. Проволочная катушка замкнута на амперметр и в нее вставлен магнит. Будет ли возникать индукционный ток в катушке, если магнит неподвижен? Почему?
3. Как определяется направление индукционного тока?
4. Два круговых проводника расположены перпендикулярно друг другу. Почему при изменении силы тока во втором проводнике в первом не будет возникать индукционный ток?
5. Два одинаковых полосовых магнита одновременно начинают падать с одной и той же высоты сквозь одинаково закрепленные катушки. Первый магнит проходит сквозь замкнутую катушку, второй — через разомкнутую. Какой из магнитов упадет позже? Почему?
6. Каким полюсом к наблюдателю повернется магнитная стрелка, находящаяся под проводом, если южный полюс полосового магнита выдвигать из катушки (рис. 2.4.3)?
7. Каков физический смысл знака «-» в законе электромагнитной индукции?
8. Где сосредоточена энергия магнитного поля?
9. Выразите энергию магнитного поля и плотность энергии через параметры магнитного поля.
10. Рассмотрите случай запаса энергии в схеме, изображенной на рисунке 2.6.2.

## 2.7. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

### 2.7.1. МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ ЭЛЕКТРОНОВ И АТОМОВ

Различные среды при рассмотрении их магнитных свойств называют *магнетиками*.

Все вещества в той или иной мере взаимодействуют с магнитным полем. У некоторых материалов магнитные свойства сохраняются и в отсутствие внешнего магнитного поля. Намагничивание материалов происходит за счет токов, циркулирующих внутри атомов, — вращения электронов и движения их в атоме. Поэтому намагничивание вещества следует описывать при помощи реальных атомных токов, называемых амперовскими токами.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов вещества ориентированы обычно беспорядочно, так что создаваемые ими магнитные поля компенсируют друг друга. При наложении внешнего магнитного поля атомы стремятся сориентироваться своими магнитными моментами  $\vec{P}_m$  по направлению внешнего магнитного поля, и тогда компенсация магнитных моментов нарушается, тело приобретает магнитные свойства — намагничивается. Большинство тел намагничивается очень слабо, и величина индукции магнитного поля  $B$  в таких веществах мало отличается от величины индукции магнитного поля в вакууме  $B_0$ . Если магнитное поле слабо усиливается в веществе, то такое вещество называется *парамагнетиком*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} > 1 \text{ (Ce}^{3+}, \text{Pr}^{3+}, \text{Ti}^{3+}, \text{V}^{3+}, \text{Fe}^{2+}, \text{Mg}^{2+}, \text{Li}, \text{Na}),$$

если ослабевает, то это *диамагнетик*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} < 1 \text{ (Bi, Cu, Ag, Au и др.).}$$

Но есть вещества, обладающие сильными магнитными свойствами. Такие вещества называются *ферромагнетиками*:

$$\mu = \frac{B}{B_0} \gg 1 \text{ (Fe, Co, Ni и др.).}$$

Эти вещества способны сохранять магнитные свойства и в отсутствие внешнего магнитного поля, представляя собой постоянные магниты.

Все тела при внесении их во внешнее магнитное поле *намагничиваются* в той или иной степени, т. е. создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее магнитное поле.

*Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов.*

Магнетики состоят из атомов, которые, в свою очередь, состоят из положительных ядер и, условно говоря, вращающихся вокруг них электронов.

Электрон, движущийся по орбите в атоме, эквивалентен замкнутому контуру с **орбитальным током**:

$$I = ev,$$

где  $e$  — заряд электрона;  $v$  — частота его вращения по орбите;

$$v = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}.$$

Орбитальному току соответствует **орбитальный магнитный момент** электрона:

$$\vec{P}_m = IS\vec{n} = \frac{e\vec{v}}{2\pi r}, \quad (2.7.1)$$

где  $S$  — площадь орбиты;  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к  $S$ ;  $\vec{v}$  — скорость электрона.

На рисунке 2.7.1 показано направление орбитального магнитного момента электрона.

Электрон, движущийся по орбите, имеет **орбитальный момент импульса**  $\vec{L}_e = m\vec{v}r$ , который направлен противоположно по отношению к  $\vec{P}_m$  и связан с ним соотношением

$$\vec{P}_m = \gamma\vec{L}_e. \quad (2.7.2)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $\gamma$  называется **гиромагнитным отношением** орбитальных моментов и равен

$$\gamma = -\frac{e}{2m}, \quad (2.7.3)$$

где  $m$  — масса электрона.

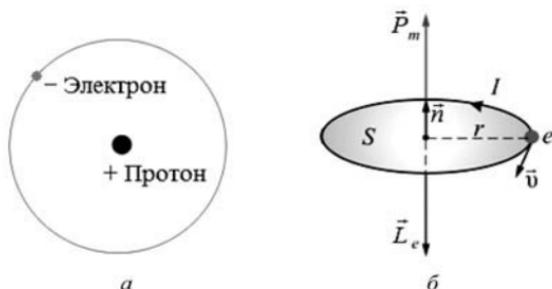


Рис. 2.7.1

Кроме того, электрон обладает *собственным моментом импульса*  $L_s$ , который называется *спином электрона*:

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (2.7.4)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ ;  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$  — постоянная Планка.

Спину электрона  $L_s$  соответствует *спиновый магнитный момент* электрона  $P_{ms}$ , направленный в противоположную сторону:

$$\vec{P}_{ms} = \gamma_s \vec{L}_s. \quad (2.7.5)$$

Величину  $\gamma_s$  называют *гиромагнитным отношением спиновых моментов*:

$$\gamma_s = -\frac{e}{m}. \quad (2.7.6)$$

Проекция спинового магнитного момента электрона на направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  может принимать только одно из следующих двух значений:

$$P_{msB} = \pm \mu_B = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \frac{l}{2m} L_s, \quad (2.7.7)$$

где  $\mu_B$  — квантовый магнитный момент электрона — **магнетон Бора**.

*Орбитальным магнитным моментом*  $\vec{P}_m$  атома называется геометрическая сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома:

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^Z \vec{P}_{mi}, \quad (2.7.8)$$

где  $Z$  — число всех электронов в атоме — порядковый номер элемента в Периодической системе Менделеева.

*Орбитальным моментом импульса*  $\vec{L}$  атома называется геометрическая сумма моментов импульса всех электронов атома:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^Z \vec{L}_{ei}. \quad (2.7.9)$$

Более подробно вышеназванные характеристики мы обсудим в разделе «Атомная и ядерная физика».

### 2.7.2. АТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

При внесении атома в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  на электрон, движущийся по орбите, эквивалентной замкнутому контуру с током, действует момент сил  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}]. \quad (2.7.10)$$

При этом изменяется орбитальный момент импульса электрона:

$$\frac{d\vec{L}_e}{dt} = [\vec{P}_m, \vec{B}] = [-\gamma\vec{B}, \vec{L}_e]. \quad (2.7.11)$$

Аналогично изменяется вектор орбитального магнитного момента электрона:

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = [-\gamma\vec{B}, \vec{P}_m]. \quad (2.7.12)$$

Из этого следует, что векторы  $\vec{L}_e$  и  $\vec{P}_m$  и сама орбита *прецессируют* вокруг направления вектора  $\vec{B}$ . На рисунке 2.7.2 показано прецессионное движение электрона и его орбитального магнитного момента, а также дополнительное (прецессионное) движение электрона.

Эта прецессия называется *ларморовской прецессией*. Угловая скорость этой прецессии  $\omega_L$  зависит только от

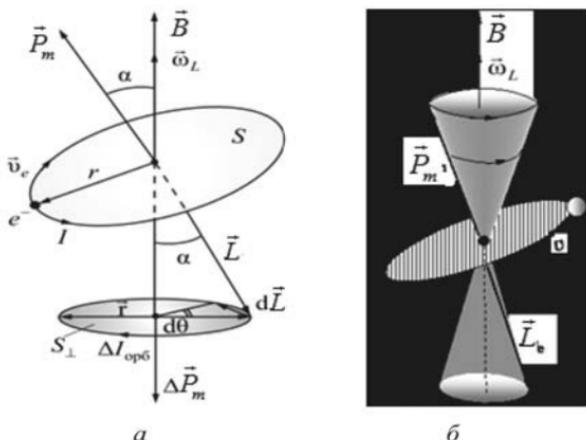


Рис. 2.7.2

индукции магнитного поля и совпадает с ней по направлению:

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m} \vec{B}. \quad (2.7.13)$$

**Теорема Лармора:** *единственным результатом влияния магнитного поля на орбиту электрона в атоме является прецессия орбиты и вектора  $\vec{P}_m$  — орбитального магнитного момента электрона с угловой скоростью  $\omega_L$  вокруг оси, проходящей через ядро атома параллельно вектору индукции магнитного поля.*

Прецессия орбиты электрона в атоме приводит к появлению дополнительного орбитального тока:

$$\Delta I_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi}, \quad (2.7.14)$$

направленного противоположно току  $I$ , и соответствующего ему наведенного орбитального магнитного момента:

$$\Delta \vec{P}_m = -\Delta I_{\text{орб}} S_{\perp} = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} \vec{B}, \quad (2.7.15)$$

где  $S_{\perp}$  — площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{B}$ .

Знак «-» говорит, что  $\Delta \vec{P}_m$  противоположен вектору  $\vec{B}$ .

Полный орбитальный магнитный момент атома равен векторной сумме:

$$\vec{P}_{ma} = \sum \vec{P}_{m_i} + \sum \Delta \vec{P}_{m_i}.$$

В общем случае орбитальный магнитный момент атома равен

$$\vec{P}_{ma} = -\frac{e^2 Z S_{\perp}}{4\pi m} \vec{B}. \quad (2.7.16)$$

### 2.7.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

При изучении магнитного поля в веществе различают два типа токов — **макротоки** и **микротоки**.

**Макротоками** называются токи проводимости и конвекционные токи, связанные с движением заряженных макроскопических тел.

**Микротоками** (молекулярными токами) называют токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

Магнитное поле в веществе является суперпозицией двух полей: внешнего магнитного поля, создаваемого макротоками, и внутреннего, или собственного, магнитного поля, создаваемого микротоками.

Характеризует магнитное поле в веществе вектор  $\vec{B}$ , равный геометрической сумме  $\vec{B}_{\text{внеш}}$  и  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{внеш}} + \vec{B}_{\text{внутр}}. \quad (2.7.17)$$

Количественной характеристикой намагниченого состояния вещества служит векторная величина — **намагниченность**  $\vec{J}$ , равная отношению магнитного момента малого объема вещества к величине этого объема:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{P}_{mi}, \quad (2.7.18)$$

где  $\vec{P}_{mi}$  — магнитный момент  $i$ -го атома из числа  $n$  атомов в объеме  $\Delta V$ .

Для того чтобы связать вектор намагниченности среды  $\vec{J}$  с током  $I_{\text{микро}}$ , рассмотрим равномерно намагниченный параллельно оси цилиндрический стержень длиной  $h$  и поперечным сечением  $S$  (рис. 2.7.3а). Равномерная намагниченность означает, что плотность атомных циркулирующих токов внутри материала  $I_{\text{микро}}$  повсюду постоянна.

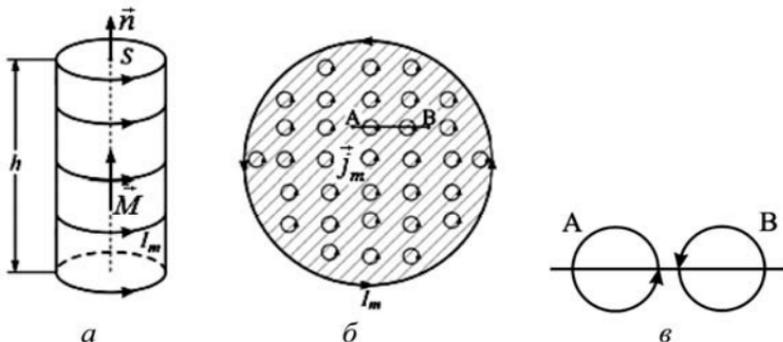


Рис. 2.7.3

Каждый атомный ток в плоскости сечения стержня, перпендикулярной его оси, представляет микроскопический кружок, причем все микротоки текут в одном направлении — против часовой стрелки (рис. 2.7.3б). В местах соприкосновения отдельных атомов и молекул (А, В) молекулярные токи противоположно направлены и компенсируют друг друга (рис. 2.7.3в). Нескомпенсированными остаются лишь токи, текущие вблизи поверхности материала, создавая на поверхности материала некоторый микроток  $I_{\text{микро}}$ , возбуждающий во внешнем пространстве магнитное поле, равное полю, созданному всеми молекулярными токами.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме можно обобщить на случай магнитного поля в веществе:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}), \quad (2.7.19)$$

где  $I_{\text{макро}}$  и  $I_{\text{микро}}$  — алгебраическая сумма макро- и микротоков сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур  $L$ .

Как видно из рисунка 2.7.4, вклад в  $I_{\text{микро}}$  дают только те молекулярные токи, которые наизаны на замкнутый контур  $L$ .

Алгебраическая сумма сил микротоков связана с циркуляцией вектора намагниченности соотношением

$$I_{\text{микро}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}. \quad (2.7.20)$$

Тогда закон полного тока можно записать в виде

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = I_{\text{макро}}. \quad (2.7.21)$$

Вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

называется напряженностью магнитного поля.

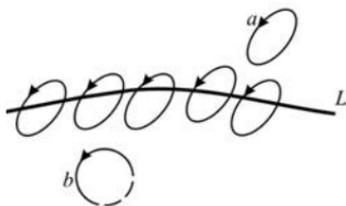


Рис. 2.7.4

Таким образом, **закон полного тока** для магнитного поля в веществе утверждает, что **циркуляция вектора напряженности** магнитного поля  $\vec{H}$  вдоль произвольного замкнутого контура  $L$  равна алгебраической сумме макротокков сквозь поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{H} dl = I_{\text{макро}}. \quad (2.7.22)$$

Выражение (2.7.22) — это закон полного тока в интегральной форме. В дифференциальной форме его можно записать как

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{макро}}. \quad (2.7.23)$$

Намагниченность изотропной среды с напряженностью  $\vec{H}$  связаны соотношением

$$\vec{J} = \vec{H} \aleph, \quad (2.7.24)$$

где  $\aleph$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий магнитные свойства вещества и называемый **магнитной восприимчивостью среды**. Он связан с магнитной проницаемостью соотношением  $\mu = 1 + \aleph$ .

#### 2.7.4. ДИАМАГНЕТИКИ И ПАРАМАГНЕТИКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Микроскопические плотности токов в намагниченном веществе чрезвычайно сложны и сильно изменяются даже в пределах одного атома. Но во многих практических задачах столь детальное описание является излишним, и нас интересуют средние магнитные поля, созданные большим числом атомов.

Магнетики можно разделить на три основные группы: **диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики**.

Зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля для разных материалов приведена на рисунке 2.7.5.

**Диамагнетизм** (от греч. dia — расхождение и магнетизм) — свойство веществ намагничиваться навстречу приложенному магнитному полю.

**Диамагнетиками** называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствие внешнего поля равны нулю, так как магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (например, инертные газы, водород, азот, NaCl и др.).

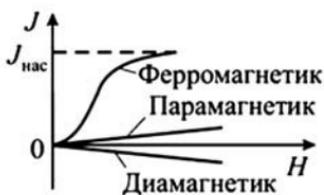


Рис. 2.7.5

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты. В пределах малого объема  $\Delta V$  изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты  $\Delta \vec{P}_m$  всех атомов одинаковы и направлены *противоположно вектору  $\vec{B}$* .

Вектор намагниченности диамагнетика равен

$$\vec{J} = \frac{n\Delta\vec{P}_m}{\Delta V} = n_0\Delta\vec{P}_m = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \aleph = \vec{H} \cdot \aleph, \quad (2.7.25)$$

где  $n_0$  — концентрация атомов;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\aleph$  — магнитная восприимчивость среды.

Для всех диамагнетиков  $\aleph < 0$ . Таким образом, вектор  $\vec{B}_{\text{внутр}}$  магнитной индукции собственного магнитного поля, создаваемого диамагнетиком при его намагничивании во внешнем поле  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ , направлен в сторону, противоположную  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ . (В отличие от диэлектрика в электрическом поле.)

У диамагнетиков  $|\aleph| \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ .

**Парамагнетизм** (от греч. пара — возле, рядом и магнетизм) — свойство веществ во внешнем магнитном поле намагничиваться в направлении этого поля, поэтому внутри парамагнетика к действию внешнего поля прибавляется действие наведенного внутреннего поля.

**Парамагнетиками** называются вещества, атомы которых имеют в отсутствие внешнего магнитного поля отличный от нуля магнитный момент  $\vec{P}_m$ .

Эти вещества намагничиваются в направлении вектора  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ .

К *парамагнетикам* относятся многие щелочные металлы, кислород  $O_2$ , оксид азота NO, хлорное железо  $FeCl_2$  и др.

В отсутствие внешнего магнитного поля намагниченность парамагнетика  $J = 0$ , так как векторы  $\vec{P}_{mi}$  разных атомов ориентированы беспорядочно.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле происходит преимущественная ориентация собственных магнитных моментов атомов  $\vec{P}_{mi}$  по направлению поля, так что парамагнетик намагничивается. Значения  $i$  для парамагнетиков положительны ( $i > 0$ ) и находятся в пределах  $\sim 10^{-5}$ – $10^{-3}$ , т. е. примерно как и у диамагнетиков.

### 2.7.5. ФЕРРОМАГНЕТИКИ

К *ферромагнетикам* (*ferrum* — железо) относятся вещества, магнитная восприимчивость которых положительна и достигает значений  $10^4$ – $10^5$ . Намагниченность  $\vec{J}$  и магнитная индукция  $\vec{B}$  ферромагнетиков растут с увеличением напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  нелинейно, и в полях  $\sim 8 \cdot 10^3$  А/м намагниченность ферромагнетиков достигает предельного значения  $\vec{J}_m$ , а вектор магнитной индукции растет линейно с  $\vec{H}$ :  $\vec{B} = \vec{J}_m \mu_0 + \vec{H} \mu_0$ .

Ферромагнитные свойства материалов проявляются только у веществ в твердом состоянии, атомы которых обладают постоянным спиновым, или орбитальным, магнитным моментом, в частности у атомов с недостроенными внутренними электронными оболочками. Типичными ферромагнетиками являются переходные металлы. В ферромагнетиках происходит резкое усиление внешних магнитных полей. Причем для ферромагнетиков  $i$  сложным образом зависит от величины магнитного поля. Типичными ферромагнетиками являются Fe, Co, Ni, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm, а также соединения ферромагнитных материалов с неферромагнитными:  $\text{Fe}_3\text{Al}$ ,  $\text{Ni}_3\text{Mn}$ ,  $\text{ZnCMn}_3$  и др.

Существенным отличием ферромагнетиков от диа- и парамагнетиков является наличие у ферромагнетиков самопроизвольной (спонтанной) намагниченности в отсутствие внешнего магнитного поля. Наличие у ферромагнетиков самопроизвольного магнитного момента  $\vec{J}$  в отсутствие внешнего магнитного поля означает, что

электронные спины и магнитные моменты атомных носителей магнетизма ориентированы в веществе упорядоченным образом.

*Ферромагнетики — это вещества, обладающие самопроизвольной намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий — магнитного поля, деформации, температуры.*

Ферромагнетики, в отличие от слабомагнитных диэлектриков и парамагнетиков, являются сильно магнитными веществами: внутреннее магнитное поле в них может в сотни раз превосходить внешнее поле.

*Основные отличия магнитных свойств ферромагнетиков:*

1. Нелинейная зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля  $H$  (рис. 2.7.6).

Как видно из рисунка 2.7.6, при  $H > H_S$  наблюдается магнитное насыщение.

2. При  $H < H_S$  зависимость магнитной индукции  $B$  от  $H$  нелинейная, а при  $H > H_S$  — линейная (рис. 2.7.7).

3. Зависимость относительной магнитной проницаемости от  $H$  имеет сложный характер (рис. 2.7.8), причем максимальные значения  $\mu$  очень велики ( $10^3$ – $10^6$ ).

Впервые систематические исследования  $\mu$  от  $H$  были проведены в 1872 г. А. Г. Столетовым (1839–1896) — выдающимся русским физиком, организатором физической лаборатории в Московском университете. На рисунке 2.7.9

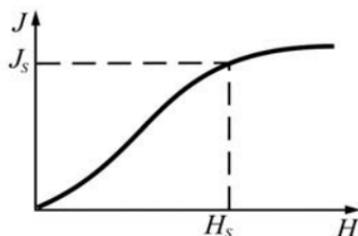


Рис. 2.7.6

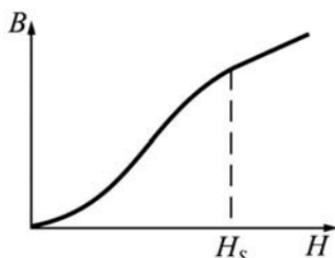


Рис. 2.7.7

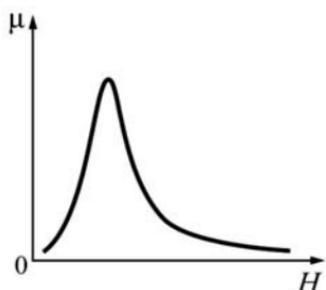


Рис. 2.7.8

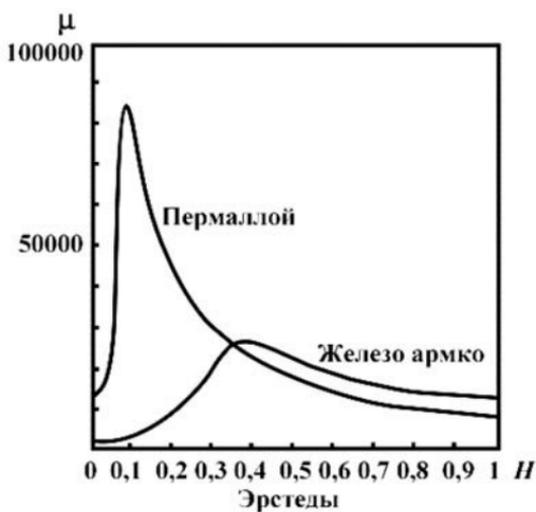


Рис. 2.7.9

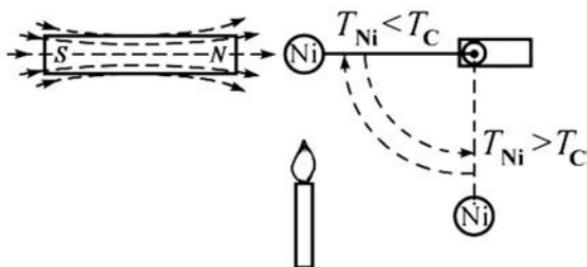


Рис. 2.7.10

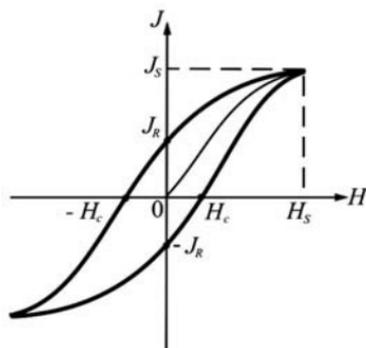


Рис. 2.7.11

изображена зависимость магнитной проницаемости некоторых ферромагнетиков от напряженности магнитного поля — кривая Столетова.

4. У каждого ферромагнетика имеется такая температура, называемая *точкой Кюри* ( $T_K$ ), выше которой это вещество теряет свои особые магнитные свойства.

Наличие температуры Кюри связано с разрушением при  $T > T_K$  упорядоченного состояния в магнитной подсистеме кристалла — параллельной ориентации магнитных моментов. Для никеля температура Кюри равна  $360^\circ\text{C}$ . Если подвесить образец никеля вблизи пламени горелки так, чтобы он находился в поле сильного постоянного магнита, то ненагретый образец может располагаться горизонтально, сильно притягиваясь к магниту (рис. 2.7.10). По мере нагрева образца и достижения температуры  $T > T_K$  ферромагнитные свойства у никеля исчезают и образец никеля падает. Остыв до температуры ниже точки Кюри, образец вновь притянется к магниту. Нагревшись, вновь падает и т. д., колебания будут продолжаться все время, пока горит свеча.

5. Существование *магнитного гистерезиса*.

На рисунке 2.7.11 показана *петля гистерезиса* — график зависимости намагниченности вещества от напряженности магнитного поля  $H$ .

Намагниченность  $J_S$  при  $H = H_S$  называется *намагниченностью насыщения*.

Намагниченность  $\pm J_R$  при  $H = 0$  называется *остаточной намагниченностью* (что необходимо для создания постоянных магнитов).

*Напряженность  $\pm H_c$  магнитного поля полностью размагниченного ферромагнетика называется коэрцитивной силой*. Она характеризует способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние.

Большой коэрцитивной силой (широкой петлей гистерезиса) обладают *магнитотвердые материалы*. Малую коэрцитивную силу имеют *магнитомягкие материалы*.

Измерение гиромангнитного отношения для ферромагнетиков показало, что элементарными носителями

магнетизма в них являются спиновые магнитные моменты электронов.

Самопроизвольно, при  $T < T_K$ , намагничиваются лишь очень маленькие монокристаллы ферромагнитных материалов, например никеля или железа. Для того чтобы постоянным магнитом стал большой кусок железа, необходимо его намагнитить, т. е. поместить в сильное магнитное поле, а затем это поле убрать. Оказывается, что при  $T < T_K$  большой исходный кусок железа разбит на множество очень маленьких ( $10^{-2}$ – $10^{-3}$  см), полностью намагниченных областей — доменов. Векторы намагниченности доменов в отсутствие внешнего магнитного поля ориентированы таким образом, что полный магнитный момент ферромагнитного материала равен нулю. Если бы в отсутствие поля кристалл железа был бы единым доменом, то это привело бы к возникновению значительного внешнего магнитного поля, содержащего значительную энергию (рис. 2.7.12а). Разбиваясь на домены, ферромагнитный кристалл уменьшает энергию магнитного поля. При этом, разбиваясь на косоугольные области (рис. 2.7.12г), можно легко получить состояние ферромагнитного кристалла, из которого магнитное поле вообще не выходит. В целом в монокристалле реализуется такое разбиение на доменные структуры, которое соответствует минимуму свободной энергии ферромагнетика. Если поместить ферромагнетик, разбитый на домены, во внешнее магнитное поле, то в нем начинается движение доменных стенок. Они перемеща-

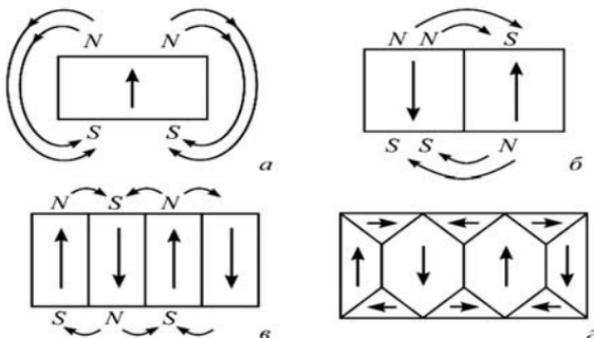


Рис. 2.7.12

ются таким образом, чтобы областей с ориентацией вектора намагниченности по полю стало больше, чем областей с противоположной ориентацией (рис. 2.7.12б–г). Такое движение доменных стенок понижает энергию ферромагнетика во внешнем магнитном поле. По мере нарастания магнитного поля весь кристалл превращается в один большой домен с магнитным моментом, ориентированным по полю (рис. 2.7.12а).

Ферромагнитные материалы играют огромную роль в самых различных областях современной техники. *Магнитомягкие материалы* используются в электротехнике при изготовлении трансформаторов, электромоторов, генераторов, в слаботочной технике связи и радиотехнике; *магнитожесткие материалы* применяют при изготовлении постоянных магнитов.

Широкое распространение в радиотехнике, особенно в высокочастотной радиотехнике, получили ферриты ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ), сочетающие ферромагнитные и полупроводниковые свойства.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему орбитальные магнитный и механический моменты электрона в атоме противоположно направлены?
2. Что называют гиромангнитным отношением?
3. Из каких магнитных моментов складывается магнитный момент атома?
4. Можно ли провести аналогию между намагничиванием диамагнетика и поляризацией диэлектрика с неполярными молекулами?
5. Можно ли провести аналогию между намагничиванием парамагнетика и поляризацией диэлектрика с полярными молекулами?
6. Что такое диамагнетики; парамагнетики? В чем различие их магнитных свойств?
7. Что такое намагниченность? Какая величина может служить ее аналогом в электростатике?
8. Запишите и объясните соотношения между магнитными проницаемостью и восприимчивостью для парамагнетика; для диамагнетика.
9. Выведите соотношение между векторами магнитной индукции, напряженности магнитного поля и намагниченности.

10. Объясните физический смысл циркуляции по произвольному замкнутому контуру векторов: 1)  $\vec{B}$ ; 2)  $\vec{H}$ ; 3)  $\vec{J}$ .
11. Что является элементарными носителями магнетизма в ферромагнетиках?
12. Проанализируйте теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  в веществе.
13. Объясните петлю гистерезиса ферромагнетика. Что такое магнитострикция?
14. Какие ферромагнетики являются магнитомягкими; магнитожесткими? Где их применяют?
15. Каков механизм намагничивания ферромагнетиков?
16. Какую температуру для ферромагнетика называют точкой Кюри?

## 2.8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

### 2.8.1. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Если в каком-либо проводнике течет переменный ток — ток проводимости, то внутри есть и переменное электрическое поле, т. е. ток смещения.

Магнитное поле проводника определяется *полным током*. Для плотности тока формулу можно записать так:

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{см}}. \quad (2.8.1)$$

В зависимости от электропроводности среды и частоты (поля) оба слагаемых играют разную роль:

- в *металлах* и на низких частотах  $j_{\text{см}} \ll j_{\text{пров}}$  (в скин-эффекте  $j_{\text{см}}$  не играет заметной роли);
- в *диэлектриках* и на высоких частотах  $j_{\text{см}}$  играет основную роль.

Оба члена в уравнении полного тока могут иметь одинаковые знаки и противоположные. Поэтому  $j_{\text{полн}}$  может быть как больше, так и меньше тока проводимости или равен нулю.

Если мы имеем разомкнутый проводник, то на его концах обрывается лишь ток проводимости. Поэтому если под током понимать полный ток, то окажется, что в природе все *переменные электрические токи — замкнуты*. Этот вывод сделан Дж. Максвеллом, выдающимся английским физиком-теоретиком.

## 2.8.2. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Если замкнуть ключ (рис. 2.8.1), то лампа при *постоянном* токе гореть не будет: емкость  $C$  разрывает цепь *постоянного* тока. Но вот в моменты включения лампа будет вспыхивать.

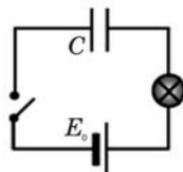


Рис. 2.8.1

При переменном токе — лампа горит, но в то же время нам ясно, что электроны из одной обкладки в другую не переходят — между ними изолятор (или вакуум). А вот если бы взять прибор, измеряющий магнитное поле, то в промежутке между обкладками мы обнаружили бы *магнитное поле* (рис. 2.8.2).

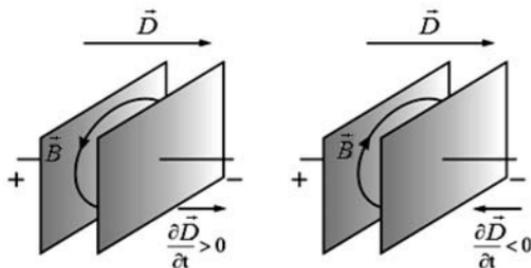


Рис. 2.8.2

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение *ток смещения*. Этот термин имеет смысл в таких веществах, как, например, диэлектрики. Там смещаются заряды под действием электрического поля. Но в вакууме зарядов нет — там смещаться нечему, а магнитное поле есть, т. е. название Максвелла «ток смещения» — не совсем удачное, но смысл, вкладываемый в него Максвеллом, — правильный.

Максвелл сделал вывод: всякое переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле.

Токи проводимости в проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике или в вакууме. Переменное электрическое поле в конденсаторе создает такое же магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток

проводимости, имеющий величину, равную току в металлическом проводнике.

Это утверждение позволяет (на базе нашего примера с конденсатором) найти величину тока смещения. В свое время мы с вами доказали, что поверхностная плотность поляризационных зарядов  $\sigma$  равна  $\vec{D}$  — вектору электрического смещения:

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon\varepsilon_0; & D &= E\varepsilon\varepsilon_0; \\ & & D &= \sigma.\end{aligned}\tag{2.8.2}$$

Если ток смещения выразить через полный заряд на поверхности диэлектрика и, следовательно, на обкладках конденсатора  $q = \sigma S$  ( $S$  — площадь обкладки):

$$I_{\text{см}} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial(\sigma S)}{\partial t}.$$

Тогда

$$I_{\text{см}} = S \frac{\partial D}{\partial t},\tag{2.8.3}$$

т. е. ток смещения пропорционален скорости изменения вектора электрического смещения  $\vec{D}$ . Поэтому он и получил такое название — ток смещения.

Плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\tag{2.8.4}$$

Вихревое магнитное поле ( $\vec{B}$ ), образующееся при протекании тока смещения, связано с направлением вектора  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  правилом правого винта.

Из чего складывается ток смещения?

Из раздела «Электростатика и постоянный ток» известно, что относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon = 1 + \chi$ , где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость среды.

Тогда

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E = (1 + \chi)\varepsilon_0 E$$

или

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 E \chi.$$

Отсюда видно, что  $\varepsilon_0 \chi E = \vec{P}_l$  — вектор поляризации. Следовательно,

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_l}{\partial t}. \quad (2.8.5)$$

В этой формуле  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  — плотность тока смещения в вакууме;  $\frac{\partial \vec{P}_l}{\partial t}$  — плотность тока поляризации, т. е. плотность тока, обусловленная перемещением зарядов в диэлектрике.

### 2.8.3. ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Итак, переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля. Переменное электрическое поле вызывает появление магнитного поля. Взаимно порождаясь, они могут существовать независимо от источников заряда или токов, которые первоначально создали одно из них. В сумме это есть электромагнитное поле (ЭМП). Превращение одного поля в другое и распространение в пространстве есть способ существования ЭМП. Конкретные проявления ЭМП — радиоволны, свет, гамма-лучи и т. д.

В 1860 г. знаменитый английский физик Джеймс Клерк Максвелл создал единую теорию электрических и магнитных явлений, в которой он использовал понятие *ток смещения*, дал *определение ЭМП* и предсказал существование в свободном пространстве *электромагнитного излучения*, которое *распространяется со скоростью света*.

Теорию ЭМП Максвелл сформулировал в виде системы нескольких уравнений. В учении об электромагнетизме эти уравнения Максвелла играют такую же роль, как уравнения (или законы) Ньютона в механике.

**Уравнение 1.** Мы знаем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}} = I_{\text{макро}} + I_{\text{см}},$$

но

$$I_{\text{см}} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}; \quad dI_{\text{пп}} = \vec{j} dS,$$

т. е.

$$I_{\text{пп}} = \int_S \vec{j} dS.$$

Тогда

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}. \quad (2.8.6)$$

Это уравнение является **обобщением закона Био — Савара — Лапласа** и показывает, что циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна сумме токов проводимости и токов смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур, и, другими словами, показывает связь между полным током и порождаемым им магнитным полем.

В дифференциальной форме это уравнение Максвелла выглядит так:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

**Уравнение 2.** Рассматривая явление электромагнитной индукции, мы сделали вывод, что ЭДС индукции  $E_i = \oint_L \vec{E}'_e d\vec{l}$ . Перейдем от вихревого электрического поля к магнитному:

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E}'_e d\vec{l} = E_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{E}'_e d\vec{l} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

Это уравнение описывает явление электромагнитной индукции (закон Фарадея) и устанавливает количественную связь между электрическими и магнитными полями:

*переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле.* В этом физический смысл уравнения.

В дифференциальной форме это уравнение выглядит так:

$$\operatorname{rot} \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Различие в знаках этого уравнения Максвелла соответствует закону сохранения энергии и правилу Ленца.

Если бы знаки при  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  и  $\frac{d\vec{D}}{dt}$  были одинаковы, то бесконечно малое увеличение одного из полей вызвало бы неограниченное увеличение обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей приводило бы к полному исчезновению обоих полей, т. е. различие в знаках является необходимым условием существования устойчивого ЭМП.

**Уравнение 3.** Следующие два уравнения выражают теорему Остроградского — Гаусса для электрического и магнитного полей (статических полей):

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2.8.8)$$

*Поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен сумме зарядов внутри этой поверхности.* Это уравнение показывает также, что силовые линии векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  начинаются и заканчиваются на зарядах.

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

где

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

**Уравнение 4.** Теорема Остроградского — Гаусса для магнитного поля:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.8.9)$$

*Это уравнение выражает то свойство магнитного поля, что линии вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  всегда замкнуты и что магнитных зарядов нет.*

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.8.10)$$

**Уравнения 5–7.** Наконец надо помнить, что величины, входящие в эти четыре уравнения, зависимы и между ними существует связь:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad (2.8.11)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad (2.8.12)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стр}}, \quad (2.8.13)$$

где  $\sigma$  — удельная проводимость;  $\vec{j}_{\text{стр}}$  — плотность сторонних токов.

Таблица 3

№	Название	Дифференциальная форма	Интегральная форма	Физический смысл
1	Закон индукции Фарадея	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	Вихревое электрическое поле порождается изменением магнитной индукции и наоборот
2	Обобщенный закон Био — Савара — Лапласа	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{пров}} + \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$	Вихревое магнитное поле порождается электрическим током и изменением электрической индукции
3	Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	Электрический заряд является источником электростатического поля
4	Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	Магнитная индукция не расходится (нет магнитных зарядов)
5	Электростатическая индукция	$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$	Связь электрической индукции с напряженностью электростатического поля	
6	Магнитная индукция	$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$	Связь магнитной индукции с напряженностью магнитного поля	
7	Плотность тока	$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стр}}$	Связь плотности тока с напряженностью электростатического поля (закон Ома в дифференциальной форме)	

Эти уравнения называются *уравнениями состояния* или *материальными уравнениями*. Вид этих уравнений определяется электрическими и магнитными свойствами среды. В общем случае уравнения состояния очень сложны и нелинейны.

Уравнения (2.8.6)–(2.8.13) составляют *полную систему уравнений Максвелла*. Они являются наиболее общими для электрических и магнитных полей в покоящихся средах. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах полностью эквивалентен.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид, приведенный в таблице 3.

#### 2.8.4. ПОЯСНЕНИЕ К ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Теория Максвелла — это последовательная теория единого электромагнитного поля (ЭМП), создаваемого произвольной системой зарядов и токов. В этой теории решается основная задача электродинамики — по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются характеристики электрического и магнитного полей. Эта теория явилась обобщением важнейших законов, описывающих электрические и магнитные явления (аналогично уравнениям Ньютона и началам термодинамики).

В теории Максвелла рассматриваются макроскопические поля, которые создаются макрозарядами и макротоками. Расстояния от источников полей до рассматриваемых точек много больше размеров атомов. Периоды изменения переменных электрических и магнитных полей много больше периодов внутренних процессов.

Теория Максвелла имеет феноменологический характер. В ней не рассматривается внутренний механизм явлений в среде. Среда описывается с помощью трех величин —  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$ .

Теория Максвелла является теорией близкодействия, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия, происходящие в электрических и магнитных полях, распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в данной среде.

### 2.8.5. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭМП

Как только Максвелл понял, что существует единое ЭМП, которое может существовать независимо от источника, он вычислил скорость распространения этого ЭМП.

Магнитное поле, создаваемое зарядом, движущимся в вакууме со скоростью  $\vec{v}$ , равно (из закона Био — Савара — Лапласа):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.8.14)$$

Но точечный заряд создает и электрическое поле на расстоянии  $r$ :

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.8.15)$$

Умножая (2.8.14) на  $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}$  и сравнивая (2.8.14) с (2.8.15), можно записать

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}].$$

Заряд движется со скоростью  $\vec{v}$ , но вместе с ним движется и электрическое поле с той же скоростью. Поскольку поле перемещается, следовательно, оно переменное, а переменное электрическое поле создает переменное магнитное поле.

Тогда

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}_E, \vec{E}],$$

где  $\vec{v}_E = \vec{v}$  — скорость распространения электрического поля.

С другой стороны, при рассмотрении явления электромагнитной индукции мы получили, что магнитное поле  $\vec{B}$ , двигаясь со скоростью  $\vec{v}_B$ , порождает вихревое электрическое поле  $\vec{E}'$ :

$$\vec{E}' = -[\vec{v}_B, \vec{B}].$$

Если переменное электрическое и магнитное поля порождают друг друга, то они обязаны двигаться с одинаковой скоростью (в противном случае явление электромагнитной индукции и ток смещения мы наблюдали бы от случая к случаю, изредка, а не всегда, в любом случае).

Итак,

$$\vec{v}_E = \vec{v}_B = \vec{v}_{\text{эмп}}.$$

Теперь, заменив  $\vec{B}$  на  $\vec{H}$ , можно записать:

$$\vec{E}' = -[\vec{v}_B, \vec{B}] = -\mu_0[\vec{v}, \vec{H}] = \mu_0[\vec{H}, \vec{v}];$$

$$\vec{B}' = \mu_0 \varepsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}']; \quad (2.8.16)$$

$$\vec{H}' = \varepsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}'] \quad (2.8.17)$$

(знак «'» указывает, что одно поле порождает другое и наоборот).

Поскольку вектор, выражаемый векторным произведением, всегда перпендикулярен к обоим перемножаемым векторам, то из (2.8.16) и (2.8.17) следует, что векторы  $\vec{v}, \vec{E}', \vec{H}'$  взаимно перпендикулярны (рис. 2.8.3).

При этом все три вектора образуют правовинтовую систему в направлении распространения:

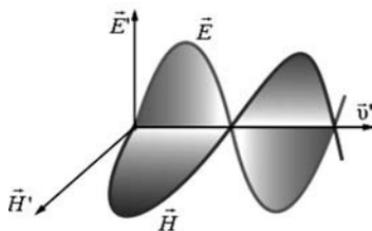


Рис. 2.8.3

$$\vec{E}' \rightarrow \vec{H}' \rightarrow \vec{v}.$$

Так как векторы взаимно перпендикулярны, то

$$\sin(\vec{v}, \vec{E}') = \sin(\vec{H}', \vec{v}) = \sin 90^\circ = 1.$$

Тогда абсолютные значения векторов:

$$E' = H' v \mu_0 \quad \text{и} \quad H' = E' \varepsilon_0$$

или

$$E' H' = H' v \mu_0 \varepsilon_0 v E' = 1.$$

Следовательно,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c;$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$$

— это и есть скорость распространения ЭМП в вакууме, и равна она скорости света  $c$ .

При распространении ЭМП в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

а так как в среде  $\varepsilon > 1$  и  $\mu > 1$ , то всегда скорость света в среде меньше скорости света в вакууме, т. е.  $v < c$ .

В отличие от других форм материи, ЭМП не может находиться в состоянии покоя. Оно всегда движется, причем в вакууме скорость распространения ЭМП всегда равна  $c$ , независимо от системы отсчета.

### 2.8.6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТРАКТОВКА МАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ (ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ)

Взаимодействие точечных неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона. Однако закона Кулона недостаточно для анализа взаимодействия движущихся зарядов. Такой вывод следует не из конкретных особенностей кулоновского взаимодействия, а обусловливается релятивистскими свойствами пространства и времени, релятивистскими уравнениями движения.

Релятивистское уравнение движения имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.8.18)$$

Требования релятивистской инвариантности уравнения движения приводят к тому, что силы оказываются связанными определенными соотношениями при переходе от одной ИСО к другой. Причем из формулы преобразо-

вания сил в релятивистской теории следует неизбежная зависимость силы от скорости.

**Магнитное поле является релятивистским эффектом, вытекающим из инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил.**

Кроме кулоновской силы  $\vec{F}_1 = q_0 \vec{E}_q$ , на движущийся заряд действует другая сила, отличающаяся от кулоновской. Она возникает в результате движения зарядов и называется магнитной. То есть движение зарядов создает в пространстве магнитное поле, или на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила  $\vec{F}_2 = q_0 [\vec{v}, \vec{B}_q]$ .

Из сравнения  $\vec{B}_q$  и  $\vec{E}_q$  видно, что при  $v < c$   $\vec{F}_2$  является величиной второго порядка малости относительно  $\vec{F}_1$  — силы кулоновского взаимодействия.

Следовательно, магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим по величине лишь при достаточно больших скоростях ( $v \approx c$ ) заряженных частиц.

Таким образом, при  $v \ll c$ ,  $F_2 \ll F_1$ , при  $v \approx c$ ,  $F_2 \approx F_1$ .

Полную силу, действующую на заряд  $q_0$  со стороны заряда  $q$ , можно записать как

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}_q + q_0 [\vec{v}, \vec{B}_q].$$

Таким образом, магнитное поле мы ввели исходя из инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил.

**СТО вскрывает физическую природу магнетизма как релятивистский эффект.**

Рассмотренное нами поле заряда  $q$  может быть и чисто электрическим, и одновременно электрическим и магнитным, в зависимости от того, в какой системе отсчета мы его наблюдаем.

Это обстоятельно подчеркивает единство электромагнитного поля, а проведенные нами выкладки свидетельствуют, что основным законом электричества и магнетизма является закон Кулона. Все остальные законы магнитостатики могут быть получены из закона Кулона, инвариантности заряда и релятивистского закона преобразования сил (полей).

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте закон полного тока. Что такое ток смещения?
2. Что является причиной возникновения вихревого электрического поля? Чем оно отличается от электростатического поля?
3. Чему равна циркуляция вихревого электрического поля?
4. Почему вводится понятия тока смещения? Что он собой по существу представляет?
5. Выведите и объясните выражение для плотности тока смещения.
6. Запишите, объяснив физический смысл, обобщенную теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля.
7. Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах, сравните их и объясните их физический смысл.
8. Почему постоянные электрические и магнитные поля можно рассматривать обособленно друг от друга? Запишите для них уравнения Максвелла в обеих формах и проанализируйте их.
9. Почему уравнения Максвелла в интегральной форме являются более общими?
10. Какие основные выводы можно сделать на основе теории Максвелла?
11. Приведите релятивистскую трактовку теории Максвелла.

**ПРИМЕРЫ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

**Задача 2.1.** Круглый виток провода замкнут на конденсатор емкостью  $20 \text{ мкФ}$ . Нормаль к плоскости витка составляет угол  $60^\circ$  с направлением вектора магнитной индукции. Определите скорость изменения индукции магнитного поля, если заряд на пластинах конденсатора равен  $10^{-9} \text{ Кл}$ . Диаметр витка  $8 \text{ см}$ .

**Дано:**

$$C = 20 \text{ мкФ}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$q = 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$d = 8 \text{ см}$$

$$\frac{dB}{dt} = ?$$

**СИ:**

$$2 \cdot 10^{-5} \text{ мкФ}$$

$$8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

**Решение:**

Контур пронизывает магнитный поток

$$\Phi = BSc \cos \alpha,$$

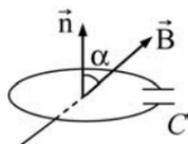
$$\text{где } S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Тогда

$$\Phi = B \frac{\pi d^2}{4} \cos \alpha.$$

Если индукция магнитного поля изменяется (по условию), то в контуре наводится ЭДС индукции:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cos\alpha. \quad (1)$$



Емкость конденсатора  $C = \frac{q}{U}$ , или для нашего случая  $C = \frac{q}{E_i}$ .

Отсюда

$$E_i = \frac{q}{C}. \quad (2)$$

Приравняем уравнения (1) и (2):

$$\frac{dB}{dt} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cos\alpha = \frac{q}{C}.$$

Из полученного выражения найдем скорость изменения индукции магнитного поля:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{q}{C} \frac{4}{\pi d^2 \cdot \cos\alpha} = \frac{10^{-9} \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 3,14 \cdot 64 \cdot 10^{-4}} = 0,02 \text{ (Тл/с)}.$$

Ответ:  $\frac{dB}{dt} = 0,02 \text{ Тл/с}$ .

**Задача 2.2.\*** Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле под углом  $45^\circ$  к линиям индукции и движется по спирали. Определите радиус спирали (в см), если частица смещается за один оборот вдоль линий индукции поля на  $6,28 \text{ см}$ .

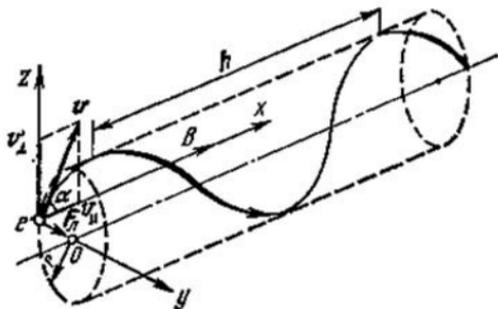
**Дано:**

$$\alpha = 45^\circ$$

$$h = 6,28 \text{ см}$$

$$R = ?$$

**Решение:**



Вдоль оси  $x$  движение равномерное, со скоростью  $v_{\parallel}$  и за время, равное периоду, частица проходит расстояние  $h = 6,28$  см.

$$h = v_{\parallel}T = v \cos \alpha T. \quad (1)$$

В плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , под действием силы Лоренца частица движется по окружности. Сила Лоренца действует только на вертикальную составляющую скорости  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ .

В этом случае согласно второму закону Ньютона

$$F_{\text{Л}} = ma_{\text{ц}} \quad \text{или} \quad qv_{\perp}B = ma_{\text{ц}}.$$

Тогда

$$qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R} \quad \text{или} \quad qB = \frac{mv_{\perp}}{R}.$$

Выразим отсюда радиус спирали, по которой движется частица:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}. \quad (2)$$

Исходя из (2), для того чтобы рассчитать радиус спирали, нужно знать скорость движения частицы.

Период при движении по окружности  $T = \frac{2\pi R}{v}$  или с учетом (2):

$$T = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3)$$

Таким образом, период не зависит от скорости движения частицы.

Подставим (3) в (1):

$$h = \frac{v \cos \alpha \cdot 2\pi m}{qB}.$$

Отсюда

$$v = \frac{qBh}{2\pi m \cdot \cos \alpha}. \quad (4)$$

Полученное выражение скорости (4) подставим в уравнение (2) и рассчитаем искомый радиус спирали:

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB} = \frac{m \sin \alpha}{qB} \cdot \frac{qBh}{2\pi m \cdot \cos \alpha} = \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{2\pi} = \frac{6,28 \cdot 1}{2 \cdot 3,14} = 1 \text{ (см)}.$$

Ответ:  $R = 1$  см.

**Задача 2.3.** В однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленной горизонтально, внесена конструкция, представленная на рисунке. Плоскость конструкции перпендикулярна силовым линиям магнитного поля. Перемычка  $AD$  свободно скользит без нарушения контакта. Определите индукцию  $B$  (в мТл), если перемычка достигла максимальной скорости  $1$  м/с. Плотность вещества перемычки  $8800$  кг/м<sup>3</sup>, удельное сопротивление  $1,75 \cdot 10^{-8}$  Ом·м. Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Дано:**

$$v_{\max} = 1 \text{ м/с}$$

$$\rho_{\text{пл}} = 8800 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_{\text{уд}} = 1,75 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$B = ?$$

**Решение:**

Выполним рисунок, расставив силы, действующие на перемычку:

$$F_A = mg,$$

где  $m$  — масса перемычки:

$$m = \rho_{\text{пл}} l S; \quad (1)$$

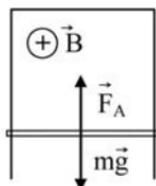
$F_A$  — сила Ампера, которая определяется выражением

$$F_A = IB l \sin \alpha.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между вектором магнитной индукции и единичным вектором  $\vec{l}$ , равным по величине длине проводника и по направлению совпадающим с направлением силы тока. По условию  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$ .

Тогда сила Ампера:

$$F_A = IB l. \quad (2)$$



Силу тока, входящую в полученное выражение, найдем из закона Ома:

$$I = \frac{E_i}{R}, \quad (3)$$

где  $R$  — сопротивление проводника, связанное с его удельным сопротивлением  $\rho_{\text{уд}}$  соотношением

$$R = \rho_{\text{уд}} \frac{l}{S}. \quad (4)$$

$E_i$  — ЭДС индукции, возникающая в движущемся проводнике:

$$E_i = v_{\text{max}} B l \sin \alpha_1.$$

$\alpha_1$  — угол между вектором магнитной индукции и вектором скорости.  $\alpha_1 = 90^\circ$ , а  $\sin \alpha_1 = 1$ .

Тогда

$$E_i = v_{\text{max}} B l. \quad (5)$$

С учетом (2)–(5) уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{v_{\text{max}} B^2}{\rho_{\text{уд}}} = \rho_{\text{пл}} g.$$

Выразим отсюда индукцию  $B$  магнитного поля и рассчитаем ее численное значение:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{\rho_{\text{пл}} \rho_{\text{уд}} g}{v_{\text{max}}}} = \sqrt{\frac{8800 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8} \cdot 10}{1}} = \\ &= 39 \cdot 10^{-3} \text{ (Тл)} = 39 \text{ (мТл)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $B = 39$  мТл.

**Задача 2.4.\*** По обмотке длинного цилиндрического соленоида радиусом 0,1 м протекает постоянный ток, создающий внутри соленоида однородное магнитное поле с индукцией 0,02 Тл. Между витками соленоида в него влетел по радиусу (перпендикулярно оси соленоида) протон со скоростью 240 м/с. Отклоняясь в магнитном поле, протон спустя некоторое время покинул соленоид. Определите время движения протона внутри соленоида (в мкс). Масса протона  $1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, заряд протона  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Дано:**

$R = 0,1 \text{ м}$

$B = 0,02 \text{ Тл}$

$v = 240 \text{ м/с}$

$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

$t \text{ (мкс)} = ?$

**Решение:**

При попадании протона в магнитное поле на него начинает действовать сила Лоренца:

$$F = qvB \sin \alpha.$$

Здесь угол  $\alpha$  — это угол между вектором магнитной индукции и вектором скорости протона. Из условия задачи понятно, что  $\alpha = 90^\circ$  и  $\sin \alpha = 1$ .

Тогда силу Лоренца запишем в виде

$$F = qvB. \quad (1)$$

Так как протон влетает в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, то в дальнейшем он будет двигаться по окружности. Следовательно,

$$qvB = ma_{\text{цс}},$$

где

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{r}.$$

Тогда

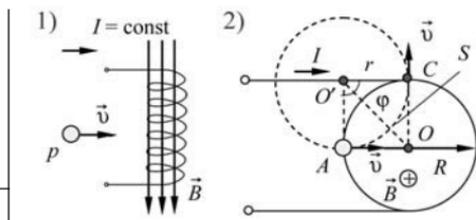
$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \text{или} \quad qB = \frac{mv}{r}.$$

Отсюда радиус окружности равен

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (2)$$

Расстояние, которое прошел протон внутри соленоида, равно длине дуги  $s$ . Это расстояние частица проходит с постоянной скоростью  $v$  за время  $t$ , т. е.

$$s = vt. \quad (3)$$



С другой стороны, длина дуги связана с углом поворота  $\varphi$  соотношением

$$s = \varphi r. \quad (4)$$

В уравнениях (3) и (4) приравняем правые части и выразим время  $t$  с учетом (2):

$$vt = \varphi r; \quad t = \frac{\varphi r}{v} = \frac{\varphi m}{qB}. \quad (5)$$

В треугольнике  $OA O'$ :  $OA = R$ ,  $O'A = r$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= \frac{R}{r} = \frac{RqB}{mv}; & \frac{\varphi}{2} &= \operatorname{arctg} \frac{RqB}{mv}; \\ \varphi &= 2 \operatorname{arctg} \frac{RqB}{mv}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим найденное выражение для угла  $\varphi$  в уравнение (5):

$$t = \frac{\varphi m}{qB} = 2 \frac{m}{Bq} \operatorname{arctg} \frac{RqB}{mv}. \quad (7)$$

После подстановки численных значений в уравнение (7) определим время движения протона внутри соленоида:

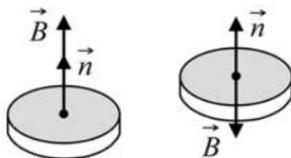
$$\begin{aligned} t &= 2 \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \operatorname{arctg} \frac{10^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^5} = \\ &= 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ (с)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $t = 0,8$  мкс.

**Задача 2.5.** Виток из проволоки сечением  $S$ , удельным сопротивлением  $\rho$  и диаметром  $D$  расположен в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  перпендикулярно к полю. Какой заряд пройдет по витку, если направление поля изменить на противоположное? Виток вытянуть в сложенную вдвое прямую? Площадь, ограниченная витком, уменьшалась равномерно.

**Дано:**

$S$	
$\rho$	
$D$	
$\Delta q = ?$	



**Решение:**

1. В магнитном поле виток площадью  $S_k$  пронизывает магнитный поток:

$$\Phi_1 = BS_k \cos \alpha.$$

Так как  $\alpha = 0$  (угол между вектором магнитной индукции и нормалью), то  $\cos \alpha = 1$ . Тогда  $\Phi_1 = BS_k$ .

Если изменить направление поля на противоположное, то  $\alpha = 180^\circ$  и  $\cos \alpha = -1$ . Изменится и магнитный поток:  $\Phi_2 = -BS_k$ .

Изменение магнитного потока вызовет возникновение ЭДС индукции в витке:

$$E_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t} = \frac{2BS_k}{\Delta t} = \frac{2B\pi D^2}{\Delta t \cdot 4} = \frac{\pi BD^2}{2\Delta t}.$$

Следовательно, по витку протечет индукционный ток:

$$I_i = \frac{E_i}{R} = -\frac{\pi BD^2}{2\Delta t R},$$

где  $R$  — сопротивление, которое можно определить как

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho \pi D}{S},$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения провода.

Тогда

$$I_i = -\frac{\pi BD^2 S}{2\Delta t \rho \pi D} = \frac{BDS}{2\Delta t \rho}.$$

Так как по определению  $I_i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ , то

$$\Delta q = I_i \Delta t = \frac{BDS}{2\rho \Delta t} \Delta t = \frac{BDS}{2\rho}.$$

2. Виток сложили вдвое в прямую, следовательно, площадь контура во втором случае будет равна нулю. Изменение площади контура:

$$\Delta S = S_k - 0 = S_k$$

и изменение магнитного потока:  $\Delta \Phi = BS_k$ .

Тогда

$$\Delta q = \frac{B\pi D^2 S}{4\rho\pi D} = \frac{BDS}{4\rho}.$$

Ответ: 1)  $\Delta q_i = \frac{BDS}{2\rho}$ ; 2)  $\Delta q_i = \frac{BDS}{4\rho}$ .

**Задача 2.6.** Пучок протонов влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции. В магнитном поле они движутся по дуге окружности радиусом 20 см и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени, если сила тока равна 0,1 мА. Удельный заряд протона  $9,6 \cdot 10^7$  Кл/кг.

**Дано:**

$$B = 0,1 \text{ Тл}$$

$$R = 0,2 \text{ м}$$

$$I = 10^{-4} \text{ А}$$

$$q/m = 9,6 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$$

$$P = ?$$

**Решение:**

В магнитном поле протон приобретает кинетическую энергию  $W_{к1}$ , равную

$$W_{к1} = \frac{mv^2}{2}.$$

Энергия пучка протонов:

$$W_{к} = N \frac{mv^2}{2},$$

где  $N$  — число протонов, попавших на мишень за время  $t$ :

$$N = \frac{Q}{q} = \frac{It}{q}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся в мишени:

$$P = \frac{W_{к}}{t} = \frac{N}{t} \frac{mv^2}{2}.$$

Скорость протона можно найти из уравнения движения по окружности в магнитном поле:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB; \quad v = \frac{q}{m} BR.$$

Тогда мощность:

$$P = \frac{It}{qt} \frac{m}{2} \frac{q^2}{m^2} BR = \frac{IB^2 R^2}{2} \frac{q}{m}.$$

Подставив численные значения, получим

$$P = 1,92 \text{ Вт.}$$

Ответ:  $P = 1,92 \text{ Вт.}$

**Задача 2.7.** Одна из возможностей значительного увеличения энергии соударяющихся частиц заключается в использовании встречных пучков этих частиц. Какую кинетическую энергию следовало бы сообщить протону, налетающему на покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия  $W_{\text{к экв}}$  в системе центра инерции была бы такой же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями  $W_1 = 10 \text{ ГэВ}$ ?

**Дано:**

$$W_{\text{к1}} = 10 \text{ ГэВ}$$

$$W_0 = 0,938 \text{ ГэВ}$$

$$W_{\text{к экв}} \text{ — ?}$$

**Решение:**

Если осуществить столкновение встречных пучков частиц, то эффект будет такой же, как при столкновении с неподвижным протоном с эквивалентной энергией  $W_{\text{к экв}}$ .

По теории относительности связь полной энергии  $E$  с импульсом релятивистской частицы:

$$W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4, \quad (1)$$

учитывая, что масса покоя частицы  $m_0$  и скорость света  $c$  в вакууме не зависят от выбора инерциальной системы отсчета. Следовательно, (1) можно записать

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 = \text{inv}, \quad (2)$$

т. е. разность квадрата полной энергии  $W$ , деленной на квадрат скорости света  $c$  в вакууме, и квадрат импульса этой частицы не зависят от выбора инерциальной системы отсчета.

Учитывая, что полная энергия  $W$  равна сумме кинетической энергии  $W_{\text{к}}$  и энергии покоя  $W_0$  частицы:

$$W = W_{\text{к}} + W_0, \quad (3)$$

уравнение (2) в системе отсчета, связанной с центром инерции протонов, запишется

$$\frac{(W_{\text{к экв}} + 2W_0)^2}{c^2} - p^2 = \frac{[2(W_{\text{к1}} + W_0)]^2}{c^2}, \quad (4)$$

где  $p$  — релятивистский импульс протона, налетающего на неподвижный протон:

$$p^2 = \frac{W_{\text{к экв}}(W_{\text{к экв}} + 2W_0)}{c^2}. \quad (5)$$

Подставив правую часть (5) в (4), после преобразований получим:

$$W_{\text{к экв}} = \frac{2_1(W_{\text{к1}} + 2W_0)}{W_0};$$

$$W_{\text{к экв}} = \frac{2 \cdot 10 \cdot (10 + 2 \cdot 0,938)}{0,938} = 250 \text{ (ГэВ)}.$$

Таким образом, способом встречных пучков теоретически можно получить энергию, в 25 раз превышающую кинетическую энергию движущихся протонов.

Ответ:  $W_{\text{к экв}} = 250$  ГэВ.

**Задача 2.8.** Найти амплитудное значение  $U_0$  ускоряющего напряжения на дуантах циклотрона, при котором расстояние между соседними траекториями протонов с радиусом  $R = 0,6$  м равно  $\Delta R = 1$  см. Частота генератора циклотрона  $\nu = 10$  МГц.

**Дано:**

$$R = 0,6 \text{ м}$$

$$\Delta R = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\nu = 10^7 \text{ Гц}$$

$$m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$U_0$  — ?

**Решение:**

Запишем скорость  $v_1$  протонов на траектории радиусом кривизны  $R_1 = R$ :

$$v_1 = 2\pi R\nu \quad (1)$$

и скорость  $v_2$  протонов на траектории радиусом кривизны  $R_2 = R + \Delta R$ :

$$v_2 = 2\pi(R + \Delta R)\nu. \quad (2)$$

Кинетическая энергия  $\Delta E_{\text{к}}$ , которую получает протон за один период:

$$\Delta W_{\text{к}} = 2qU_0 = \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2}. \quad (3)$$

Решая систему (1)–(3), получим

$$U_0 = \frac{\pi^2 v^2 m_0 (2R\Delta R + \Delta R^2)}{q}. \quad (4)$$

Учитывая, что  $(\Delta R \ll R)$ , выражение (4) можно упростить

$$U_0 \approx \frac{2\pi^2 v^2 R\Delta R m_0}{q}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$U_0 = \frac{2 \cdot 3,14^2 \cdot 0,6 \cdot 10^{-2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ В.}$$

Ответ:  $U_0 = 0,12 \text{ МВ.}$

**Задача 2.9.** Кинетическая энергия  $W_{\text{к}}$  протонов в Серпуховском синхрофазотроне достигает 76 ГэВ. Вычислите, пренебрегая действием вихревого электрического поля, максимальный импульс протона и максимальный радиус его орбиты, если индукция магнитного поля  $B$  в синхрофазотроне равна 1,07 Тл.

**Дано:**

$$W_{\text{к}} = 76 \text{ ГэВ} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}$$

$$m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$W_0 = 0,938 \text{ ГэВ} =$$

$$= 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$$

$$B = 1,07 \text{ Тл}$$

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

---


$$p - ? \quad R_{\text{max}} - ?$$

**Решение:**

Кинетическая энергия  $W_{\text{к}}$  протона больше энергии покоя

$$W_0 = m_0 c^2,$$

следовательно, необходимо учитывать релятивистские эффекты.

Из соотношения между энергией и импульсом частицы имеем

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{W^2 - W_0^2},$$

где  $W$  — полная энергия протона, учитывая, что кинетическая энергия протона  $W_{\text{к}} = W - W_0$ , получим

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{W_{\text{к}} (W_{\text{к}} + 2m_0 c^2)}.$$

Если учесть, что  $W_{\text{к}} \gg m_0 c^2$ , то импульс протона  $p \approx W_{\text{к}}/c$ .

Подставив числовые значения, определим

$$p = 1,2 \cdot 10^{-8} / 3 \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^{-17} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}.$$

Максимальный радиус орбиты протона:

$$R_{\max} = \frac{mv_{\max}}{qB} = \frac{p_{\max}}{qB} = \sqrt{\frac{W_{\kappa}(W_{\kappa} + 2m_0c^2)}{qBc}} \approx \frac{W_{\kappa}}{qBc};$$

$$R_{\max} = 1,2 \cdot 10^{-8} / (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,07 \cdot 3 \cdot 10^8) \approx 236 \text{ м}.$$

Создание сплошного электромагнита с диаметром около полукилометра представляет практически невыполнимую задачу. Поэтому в синхрофазотроне частицы движутся по окружности практически постоянного радиуса в узкой кольцевой вакуумной камере.

Ответ:  $p = 4 \cdot 10^{-17} \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ ;  $R_{\max} \approx 236 \text{ м}$ .

**Задача 2.10.** Электрон в бетатроне за один оборот приобретает кинетическую энергию  $\Delta W_{\kappa} = 15 \text{ эВ}$ , двигаясь по орбите радиусом  $r_0 = 0,3 \text{ м}$ . Вычислить скорость изменения магнитной индукции  $d\langle B \rangle / dt$ , считая эту скорость в течение интересующего нас промежутка времени постоянной.

**Дано:**

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,3 \text{ м} \\ \Delta W_{\kappa} &= 15 \text{ эВ} = \\ &= 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \\ e &= -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \end{aligned}$$

$$d\langle B \rangle / dt = ?$$

**Решение:**

Ускорение электронов в бетатроне осуществляется вихревым электрическим полем в нарастающем во времени магнитном поле.

Электрон в бетатроне за один оборот приобретает кинетическую энергию  $\Delta W_{\kappa}$ , равную работе  $A$  сил электрического вихревого поля:  $\Delta W_{\kappa} = A$ .

$$\Delta W_{\kappa} = e \oint_L E dl = 2\pi r_0 e E = e E_i$$

или

$$E_i = \Delta W_{\kappa} / e, \quad (1)$$

где  $E_i$  — ЭДС индукции, определяемая по закону Фарадея:

$$E_i = \frac{d\Phi}{dt} = -\pi r_0^2 \frac{d\langle B \rangle}{dt}, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — поток магнитной индукции, пронизывающий область в пределах площади  $S = \pi r_0^2$  орбиты электрона в момент времени  $t$ :  $\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$ .

Приравнявая левые части выражений (1) и (2), получим:

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = - \frac{\Delta W_{\text{к}}}{e\pi r_0^2},$$

$$\frac{d\langle B \rangle}{dt} = - \frac{2,4 \cdot 10^{-18}}{-1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,14 \cdot 0,3^2} \approx 53 \text{ Тл/с.}$$

Ответ:  $\frac{d\langle B \rangle}{dt} = 53 \text{ Тл/с.}$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задача 2.11.** С какой силой взаимодействуют два параллельных провода с токами силой 300 А, если длина проводов 50 м и каждый из них создает в месте расположения другого провода магнитное поле с индукцией 1,2 мТл?

Ответ:  $F = 18 \text{ Н.}$

**Задача 2.12.** Прямой проводник длиной 20 см и массой 50 г подвешен горизонтально на двух легких нитях в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен горизонтально и перпендикулярно к проводнику. Какой ток надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась? Индукция поля 50 мТл. Каждая нить разрывается при нагрузке 0,4 Н.

Ответ:  $I = 30 \text{ А.}$

**Задача 2.13.** Во сколько раз электрическая сила, действующая на электрон, больше магнитной силы, если напряженность электрического поля 1,5 кВ/м, а индукция магнитного поля 0,1 Тл? Скорость электрона равна 200 м/с и направлена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

Ответ:  $F_{\text{э}} / F_{\text{м}} = 75.$

**Задача 2.14.** В однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции влетают протон и альфа-частица. Во сколько раз скорость альфа-частицы больше

скорости протона, если сила, действующая со стороны магнитного поля на альфа-частицу, в 8 раз больше, чем сила, действующая на протон?

Ответ:  $\frac{v_a}{v_p} = 4$ .

**Задача 2.15.\*** Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $\Delta\varphi = 10^3$  В, движется в однородном магнитном поле под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вектору  $\vec{B}$ , модуль которого составляет  $B = 29$  мТл. Определите шаг винтовой линии электрона. Ответ представьте в см.

Ответ:  $h = 2$  см.

**Задача 2.16.** Медное кольцо радиусом 5 см помещают в однородное магнитное поле с индукцией 8 мТл перпендикулярно линиям индукции. Какой заряд (в мКл) пройдет по кольцу, если его повернуть на  $180^\circ$  вокруг оси, совпадающей с его диаметром? Сопротивление единицы длины кольца 2 мОм/м.

Ответ:  $q = 200$  мКл.

**Задача 2.17.\*** Чему равна максимальная ЭДС (в мВ), которая может возникнуть при движении самолета со скоростью 900 км/ч, если размах его крыльев 20 м? Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли 0,03 мТл, вертикальная составляющая 0,04 мТл.

Ответ:  $E = 250$  мВ.

**Задача 2.18.** По П-образной рамке, наклоненной под углом  $30^\circ$  к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

Ответ:  $v = 3$  м/с.

**Задача 2.19.** Сила тока, протекающего по обмотке катушки, изменяется на 5 А за 0,25 с. При этом возбуждается ЭДС самоиндукции 200 В. Определите индуктивность катушки.

Ответ:  $L = 10$  Гн.

**Задача 2.20.\*** Магнитное поле с индукцией  $B = 5 \cdot 10^{-4}$  Тл и электрическое поле  $E = 10$  В/см взаимно перпендикулярны и однородны. Электроны влетают в пространство

перпендикулярно векторам индукции магнитного поля и напряженности электрического поля. Каковы: 1) скорость электронов, если они не испытывают отклонения; 2) радиус кривизны траектории после выключения поля  $E$ ?

Ответ:  $v = 2 \cdot 10^6$  м/с;  $r = 0,023$  м.

**Задача 2.21.** Первичная обмотка силового трансформатора для накала радиолампы имеет 2200 витков и включена в сеть с напряжением 220 В. Какое количество витков должна иметь вторичная обмотка, если ее активное сопротивление 0,5 Ом, а напряжение накала лампы 3,5 В при силе тока накала 1 А.

Ответ:  $N = 10$ .

**Задача 2.22.** Внутренний диаметр дуантов циклотрона  $d = 1$  м. Индукция магнитного поля  $B = 1,20$  Тл. Ускоряющее напряжение  $U_m = 100$  кВ. Найти время  $\tau$ , в течение которого длится процесс ускорения.

Ответ:  $\tau = 4,7 \cdot 10^{-6}$  с.

**Задача 2.23.** Протоны ускоряются в циклотроне так, что максимальный радиус кривизны их траектории  $r_0 = 50$  см. Найти минимальную частоту  $\nu_{\text{мин}}$  генератора циклотрона, при которой в конце ускорения протоны будут иметь кинетическую энергию  $E_k = 20$  МэВ.

Ответ:  $\nu_{\text{мин}} = 20$  МГц.

**Задача 2.24.** В циклотроне требуется ускорять ионы гелия ( $\text{He}^{++}$ ). Частота  $\nu$  переменной разности потенциалов, приложенной к дуантам, равна 10 МГц. Какова должна быть индукция  $B$  магнитного поля циклотрона, чтобы период  $T$  обращения ионов совпал с периодом изменения разности потенциалов?

Ответ:  $B = 1,3$  Тл.

**Задача 2.25.** При каких значениях кинетической энергии  $W$  период  $T$  обращения электронов, протонов и  $\alpha$ -частиц в однородном магнитном поле на 1% больше периода обращения при нерелятивистских скоростях?

Ответ:  $W_e = 5,1$  кэВ;  $W_p = 9,4$  МэВ;  $W_\alpha = 37,3$  МэВ.

**Задача 2.26.** В бетатроне индукция магнитного поля на равновесной орбите радиуса  $r_0 = 20$  см изменяется за время  $\Delta t = 1$  мс практически с постоянной скоростью от

нуля до  $B = 0,40$  Тл. Найти энергию  $W_k$ , приобретаемую электроном за каждый оборот.

Ответ:  $W_k = 100$  эВ.

**Задача 2.27.** Среднее значение магнитной индукции  $\langle B \rangle$  поля, создаваемого магнитом бетатрона, изменяясь приблизительно по линейному закону, возрастает за время  $\tau = 1,00$  мс от нуля до значения  $B_m = 200$  мТл. Радиус орбиты электронов  $r_0 = 300$  мм. За время ускорения электроны прошли путь  $s = 1,7 \cdot 10^6$  м. Найти скорость  $v$  электронов в конце ускорения.

Ответ:  $v = 0,99995$  с.

**Задача 2.28.\*** В бетатроне магнитный поток внутри равновесной орбиты радиуса  $r_0 = 25$  см возрастает за время ускорения практически с постоянной скоростью  $d\Phi/dt = 5$  Вб/с. При этом электроны приобретают энергию  $W_k = 25$  МэВ. Найти число оборотов  $N$ , совершенных электроном за время ускорения, и соответствующее значение пройденного им пути  $s$ .

Ответ:  $N = 5 \cdot 10^6$  оборотов;  $s = 8 \cdot 10^6$  м.

---

## 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Бросая в воду камушки,  
смотри на круги, ими образуемые.  
Иначе такое бросание будет пустою забавою.

*Козьма Прутков.  
Плоды раздумья*

### 3.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Н**есмотря на большое число колебательных явлений, встречающихся в нашей жизни (звук, свет, радиоволны), существуют общие закономерности этих явлений. Поэтому основные учения о гармонических колебаниях, которые рассматриваются здесь, должны стать фундаментом для изучения любых видов колебаний.

#### 3.1.1. ВИДЫ И ПРИЗНАКИ КОЛЕБАНИЙ

В физике особенно выделяют колебания двух видов: *механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации.*

Для колебаний характерно превращение одного вида энергии в другой: кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т. д.

*Колебательным движением называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости во времени.*

Говоря о колебаниях или осцилляциях тела, мы подразумеваем повторяющееся движение его туда и обратно по одной и той же траектории. Иными словами, такое движение является *периодическим*. Простейшим примером периодического движения служат *колебания груза массой  $m$  на конце пружины* (см. рис. 3.1.1). Многие другие виды колебательных движений проявляют большое сходство с этими колебаниями, поэтому разберем этот пример подробно.

Если на пружину не действуют силы, то в этом случае она находится в *положении равновесия*:  $x = 0$  (рис. 3.1.1а).

Для того чтобы растянуть пружину на длину  $x$ , к ней надо приложить *внешнюю силу* (рис. 3.1.1б), которая по закону Гука определяется как

$$F_{\text{вн}} = +kx,$$

где  $k$  — жесткость пружины.

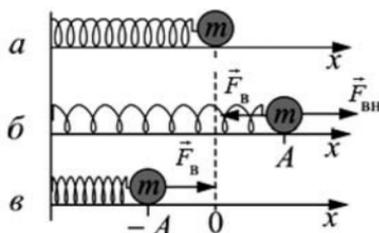


Рис. 3.1.1  
Колебание груза на пружине

Пружина действует на груз с *возвращающей силой*:

$$F_{\text{в}} = -kx,$$

которая стремится вернуть ее в *положение равновесия*.

Когда груз, проскочив положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его в точке  $x = -A$  (рис. 3.1.1в). Графически такой колебательный процесс изображен на рисунке 3.1.2.

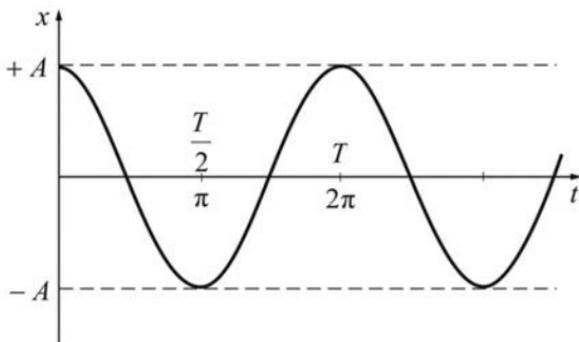


Рис. 3.1.2  
Гармонические колебания

Существуют три признака колебательного движения:

- **повторяемость (периодичность)** — движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- **ограниченность** пределами крайних положений;
- **действие силы**, описываемой функцией  $F = -kx$ .

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые *гармонические колебания*.

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например,  $F = -kx$ ), совершает *гармонические колебания*. Такую систему часто называют *гармоническим осциллятором*.

Периодический процесс можно описать уравнением

$$f(t) = f(t + nT).$$

По определению колебания называются *гармоническими*, если зависимость некоторой величины  $x = f(t)$  имеет вид (рис. 3.1.2):

$$x = A \cos \varphi \quad \text{или} \quad x = A \sin \varphi. \quad (3.1.1)$$

Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи,  $A$  и  $\varphi$  — параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

### 3.1.2. ПАРАМЕТРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

К параметрам гармонических колебаний относятся: смещение, амплитуда, фаза колебаний и т. д.

Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют *смещением*  $x$ .

*Максимальное смещение* — наибольшее расстояние от положения равновесия — называется *амплитудой* и обозначается буквой  $A$ .

Выражение, стоящее под знаком синуса или косинуса в формуле (3.1.2),  $\omega t + \varphi$  определяет смещение  $x$  в данный момент времени  $t$  и называется *фазой колебания*.

Величина  $\varphi$  называется *начальной фазой колебания* и определяет смещение в начальный момент времени ( $t = 0$ ).

Фаза измеряется в радианах и определяет *значение колеблющейся величины* в данный момент времени.

Так как синус и косинус изменяются в пределах  $+1$  до  $-1$ , то  $x$  может принимать значения от  $+A$  до  $-A$  (рис. 3.1.2).

Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от  $x = A$  к  $x = -A$  и обратно в  $x = A$ , называется *полным колебанием*.

**Частота колебаний**  $\nu$  определяется как *число полных колебаний в 1 с*. Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен одному полному колебанию в секунду. Очевидно, что

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (3.1.2)$$

$T$  — *период колебаний* — минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}. \quad (3.1.3)$$

$\omega_0$  — *циклическая (круговая) частота* — число полных колебаний за период:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (3.1.4)$$

*Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды*. Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменяем частоту колебаний этой системы.

Колебания характеризуются не только смещением, но и *скоростью*  $v_x$  и *ускорением*  $a_x$ .

Если смещение описывается уравнением  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , то по определению:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi); \quad (3.1.5)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.1.6)$$

В этих уравнениях  $v_m = \omega_0 A$  — *амплитуда скорости*;  
 $a_m = A\omega_0^2$  — *амплитуда ускорения*.

Из уравнений (3.1.5) и (3.1.6) видно, что скорость и ускорение также являются гармоническими колебаниями.

### 3.1.3. ГРАФИКИ СМЕЩЕНИЯ, СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

Параметры колебаний запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \varphi); \\ v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \varphi); \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

- *скорость колебаний тела максимальна и по абсолютной величине равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ( $x = 0$ ). При максимальном смещении ( $x = \pm A$ ) скорость равна нулю;*
- *ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.*

*Ускорение всегда направлено к положению равновесия, поэтому, удаляясь от положения равновесия, тело двигается замедленно, приближаясь к нему — ускоренно. Ускорение всегда прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения.*

Все эти выводы могут служить определением гармонического колебания.

Графики смещения, скорости и ускорения гармонических колебаний приведены на рисунке 3.1.3.

Начальная фаза  $\varphi_0$  определяется из начальных условий конкретной задачи (точно так же, как и амплитуда  $A$ ).

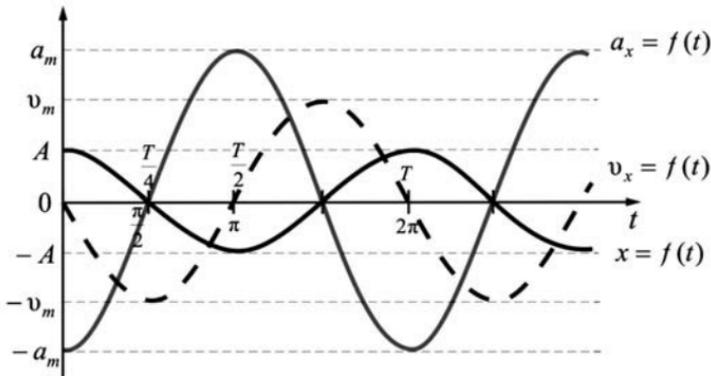


Рис. 3.1.3

Графики смещения скорости и ускорения гармонических колебаний

Найдем разность фаз  $\Delta\varphi$  между фазами смещения  $x$  и скорости  $v_x$ . Для этого воспользуемся системой уравнений (3.1.7):

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \varphi_x; \\ v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = -v_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) = -v_m \cos \varphi_v. \end{cases}$$

Отсюда видно, что:

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_v = \pi/2, \quad (3.1.8)$$

т. е. **скорость опережает смещение по фазе на  $\pi/2$ .**

Аналогично можно показать, что **ускорение** в свою очередь **опережает скорость по фазе на  $\pi/2$ :**

$$a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = a_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = a_m \cos \varphi_a.$$

Так как

$$-\cos \alpha = \cos(\pi + \alpha),$$

то

$$\varphi_a - \varphi_v = \omega_0 t + \varphi + \pi - \omega_0 t - \varphi - \pi/2 = \pi/2$$

или

$$\varphi_v - \varphi_a = -\pi/2. \quad (3.1.9)$$

Тогда **ускорение опережает смещение на  $\pi$ :**

$$\varphi_x - \varphi_a = -\pi, \quad (3.1.10)$$

т. е. **смещение и ускорение находятся в противофазе** (рис. 3.1.3).

### 3.1.4. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой  $m$ .

Исходя из второго закона Ньютона ( $F = ma$ ), можно записать

$$F_x = -m\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x, \quad (3.1.11)$$

где  $F_x$  — проекция силы на направление  $x$ .

Из этого выражения следует, что *сила  $F_x$  пропорциональна  $x$  и всегда направлена к положению равновесия* (поэтому ее и называют *возвращающей силой*). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил, удовлетворяющих уравнению (3.1.11), являются *упругие силы*. Силы же, имеющие иную природу, но удовлетворяющие (3.1.11), называются *квазиупругими*. Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \quad (3.1.12)$$

где  $k$  — коэффициент квазиупругой силы.

Сравнивая уравнения (3.1.11) и (3.1.12), видим, что  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси  $x$  проекция ускорения на эту ось  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Подставив выражения для  $a_x$  и  $F_x$  во второй закон Ньютона, получим *основное уравнение динамики гармонических колебаний*, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0; \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1.13)$$

Решением этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

т. е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является *гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону*.

Круговая частота незатухающих колебаний  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , но так как  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , то  $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Отсюда найдем *период колебаний*:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.1.14)$$

Из (3.1.14) видно, что *чем больше жесткость пружины  $k$ , тем меньше период* (больше частота), *а чем больше масса, тем период колебаний больше*.

### 3.1.5. ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Вычислим энергию тела массой  $m$ , совершающего гармонические колебания с амплитудой  $A$  и круговой частотой  $\omega_0$  (рис. 3.1.1):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

*Потенциальная энергия  $E_{\text{п}}$  тела*, смещенного на расстояние  $x$  от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила  $F_x = -kx$ , перемещая тело в положение равновесия:

$$F_x = -\frac{dE_{\text{п}}}{dx}; \quad dE_{\text{п}} = -Fdx = -kx dx;$$

$$E_{\text{п}} = k \int_0^x x dx \quad \text{или} \quad E_{\text{п}} = kx^2 / 2; \quad (3.1.15)$$

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.1.16)$$

*Кинетическая энергия:*

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.1.17)$$

Заменив в уравнении (3.1.16)  $k = m\omega_0^2$  и сложив почленно уравнения (3.1.16) и (3.1.17), получим выражение для *полной энергии*:

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

или

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2. \quad (3.1.18)$$

*Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.*

В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия не зависит от времени, поэтому и амплитуда  $A$  не зависит от времени.

Из уравнений (3.1.16) и (3.1.17) видно, что и потенциальная  $E_{\text{п}}$  и кинетическая  $E_{\text{к}}$  энергии пропорциональны квадрату амплитуды  $A^2$ .

На рисунке 3.1.4 приведены колебания груза под действием сил тяжести.

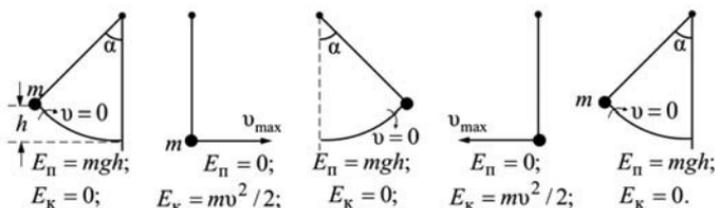


Рис. 3.1.4

Колебания груза массой  $m$  под действием силы тяжести

Из рисунка 3.1.4 и из формул (3.1.16) и (3.1.17) видно, что  $E_{\text{п}}$  и  $E_{\text{к}}$  изменяются периодически (при свободных незатухающих колебаниях). Однако период изменения энергии в два раза меньше, чем период изменения смещения скорости и ускорения.

При колебаниях, совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их сумма в любой момент времени постоянна.

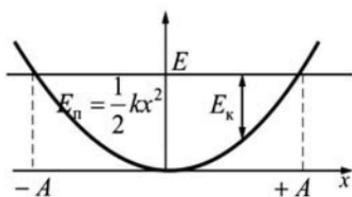


Рис. 3.1.5

Кривая потенциальной энергии тела, совершающего гармонические колебания

На рисунке 3.1.5 приведена кривая потенциальной энергии.

Горизонтальная линия соответствует определенному значению полной энергии:  $E = 1/2kA^2$ . Расстояние от этой линии до кривой равно кинетической энергии, а движение ограничено значениями  $x$ , заключенными в пределах от  $+A$  до  $-A$ . Эти результаты полностью согласуются с полным решением уравнения движения.

### 3.1.6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются: *пружинный, математический и физический маятники*, а также *колебательный контур* (для малых токов и напряжений).

**Пружинный маятник** — это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью  $k$ , совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$ .

Уравнение движения маятника:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0. \quad (3.1.19)$$

Из сравнения выражений (3.1.13) и (3.1.19) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  с циклической частотой  $\omega_0$  и периодом  $T$ , где

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}; \quad T = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

Эти формулы справедливы для упругих колебаний в пределах, когда выполняется закон Гука, т. е. когда мас-

са пружины мала по сравнению с массой тела и ее деформация не превышает предела упругости.

**Математическим маятником** называется идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (*шарик на длинной тонкой нити*) (рис. 3.1.6). Если масса произвольным образом распределена по всему телу, то маятник называют **физическим** (рис. 3.1.7).

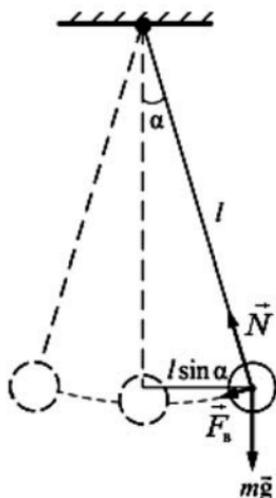


Рис. 3.1.6  
Математический маятник

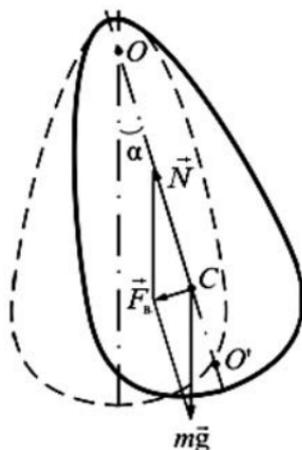


Рис. 3.1.7  
Физический маятник

Рассмотрим условия, при которых колебания математического маятника являются гармоническими.

Отклонения маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\alpha$ , образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от вертикали возникает **вращающий момент**, модуль которого  $|\vec{M}| = mgl \sin \alpha$ . Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и в этом отношении он аналогичен квазиупругой силе. Поэтому можно записать

$$M = -mgl \sin \alpha. \quad (3.1.20)$$

Уравнение динамики вращательного движения для маятника:

$$M = J\varepsilon,$$

где  $J = ml^2$  — момент инерции маятника;  $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  — угловое ускорение.

Тогда

$$ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\alpha = 0.$$

Рассмотрим колебания с *малой амплитудой*, т. е.  $\sin\alpha \approx \alpha$ , и введем обозначение  $g/l = \omega_0^2$ . Тогда получим *уравнение движения маятника*:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (3.1.21)$$

Это *уравнение динамики гармонических колебаний*. Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.1.22)$$

Следовательно, *при малых колебаниях угловое отклонение* математического маятника изменяется во времени по *гармоническому закону*.

Циклическая частота колебаний  $\omega_0 = \sqrt{g/l} = 2\pi/T$ .

Тогда период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3.1.23)$$

т. е. период  $T$  *зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения*.

**Физический маятник** — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , не совпадающую с центром масс  $C$  (рис. 3.1.7).

При отклонении этого тела от положения равновесия на угол  $\alpha$  также возникает *вращающий момент*, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl \sin\alpha,$$

где  $l$  — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника  $C$ .

Обозначим через  $J$  момент инерции маятника:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha. \quad (3.1.24)$$

В случае малых колебаний ( $\sin \alpha = \alpha$ ) уравнение (3.1.24) переходит в известное нам уравнение  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0$ . Его решение:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где  $\omega_0^2 = mgl/J$ .

Из выражения (3.1.23) следует, что физический маятник при малых отклонениях также совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы и момента инерции маятника. Аналогично уравнению (1.6.5) получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (3.1.25)$$

Величину момента инерции  $J$  иногда бывает трудно вычислить.

Сопоставляя уравнения (3.1.23) и (3.1.25), получим, что физический маятник с длиной  $l_{\text{пр}}$  будет иметь такой же период колебаний, как и математический:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}.$$

Здесь  $l_{\text{пр}}$  — *приведенная длина физического маятника* — это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка  $O'$  на продолжении прямой  $OC$ , отстоящая от точки подвеса  $O$  на расстоянии приведенной длины  $l_{\text{пр}}$ , называется *центром качаний* физического маятника. Применяя теорему Штейнера, получим

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = \frac{J_C}{ml} + l > l,$$

т. е.  $l_{\text{пр}}$  всегда больше  $l$ . Точки  $O$  и  $O'$  всегда будут лежать по обе стороны от точки  $C$ .

Точка подвеса  $O$  маятника и центр качаний  $O'$  обладают *свойством взаимозаменяемости*: если маятник *перевернуть* и подвесить за точку  $O'$ , то прежняя точка  $O$  станет центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится.

На этом свойстве основано определение ускорения силы тяжести  $g$  с помощью так называемого **оборотного маятника**. Это такой маятник, у которого имеются две точки подвеса и два груза, которые могут перемещаться вдоль оси маятника. Перемещением грузов добиваются того, что расстояние между точками подвеса будет соответствовать  $l_{\text{пр}}$ . Тогда, измерив период  $T$  и  $l_{\text{пр}}$ , легко рассчитать  $g$  по (3.1.25).

Физический и математический маятники совершают гармонические колебания при малых углах отклонения (меньше  $15^\circ$ ), т. е. длина дуги  $x = l\alpha$  мало отличается от длины хорды  $l\sin\alpha$  (менее 1%).

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое колебания? Свободные колебания? Гармонические колебания? Периодические процессы?
2. Почему возможен единый подход при изучении колебаний различной физической природы?
3. Дайте определение амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.
5. От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний?
6. Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.
7. Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?
8. Как можно сравнить между собой массы тела, измеряя частоты колебаний при подвешивании этих масс к пружине?
9. Что называется гармоническим осциллятором? Пружинным маятником? Физическим? Математическим?
10. Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.

11. Что такое приведенная длина физического маятника?
12. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях? Чем определяется период?
13. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний.

### 3.2. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

При всех сложениях колебаний различают сложение колебаний, совершающихся в одном направлении, и сложение колебаний, совершающихся во взаимно перпендикулярных направлениях.

#### 3.2.1. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

- аналитическим:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$v_x = -v_m \sin(\omega_0 t + \varphi);$$

$$a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

- графическим (рис. 3.1.2 и 3.1.3);
- геометрическим, с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм) (рис. 3.2.1).

Пусть гармоническое колебание описывается уравнением  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Проведем прямую  $Ox$  (опорную) и

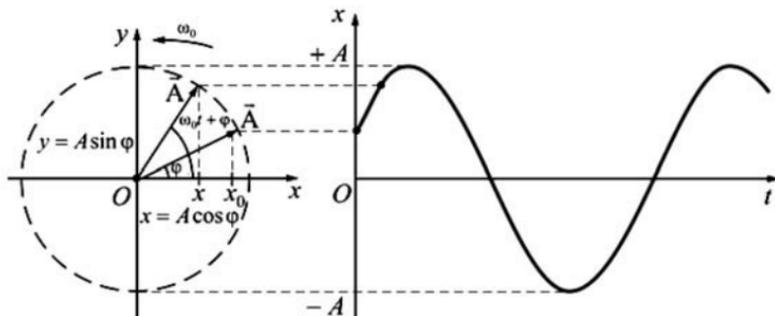


Рис. 3.2.1

Графическое представление колебаний (метод векторных диаграмм)

построим вектор  $\vec{A}$ , направленный из точки  $O$  под углом  $\varphi$  к опорной линии.

Обозначим через  $x_0$  проекцию вектора  $\vec{A}$  на опорную линию в момент времени  $t = 0$ :

$$x_0 = A \cos \varphi.$$

Вращение происходит против часовой стрелки, т. е.  $\omega_0 > 0$ . За промежуток времени  $t$  вектор амплитуды повернется на угол  $\omega_0 t$  и займет новое положение. Его проекция на опорную линию равна

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

*Вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.*

Проекция кругового движения на ось  $y$  также совершает гармоническое колебание  $y = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Этим представлением широко пользуются при сложении колебаний.

### 3.2.2. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ. БИЕНИЯ

Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.

Сложение колебаний будем проводить методом векторных диаграмм (рис. 3.2.2). Пусть колебания заданы уравнениями:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \quad (3.2.1)$$

Отложим из точки  $O$  вектор  $\vec{A}_1$  под углом  $\varphi_1$  к опорной линии и вектор  $\vec{A}_2$  под углом  $\varphi_2$ . Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью  $\omega_0$ , поэтому их разность фаз не зависит от времени ( $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ ). Такие колебания называют *когерентными*.

Известно, что суммарная проекция вектора  $\vec{A}$  равна сумме проекций  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  на эту же ось. Поэтому результирующее колебание может быть изображено вектором амплитуды, вращающимся вокруг точки  $O$  с той же угловой скоростью  $\omega_0$ , что и  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ . Результирующее колебание должно быть также гармоническим с частотой  $\omega$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3.2.3)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Из (3.2.2) следует, что амплитуда  $A$  результирующего колебания зависит от разности начальных фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Возможные значения  $A$  лежат в диапазоне  $|A_2 - A_1| \leq A \leq A_2 + A_1$  (амплитуда не может быть отрицательной).

**Рассмотрим несколько простых случаев.**

1. Разность фаз равна нулю или четному числу  $\pi$ , т. е.  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$  и

$$A = A_1 + A_2, \quad (3.2.4)$$

т. е. амплитуда результирующего колебания  $A$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания *синфазны*) (см. рис. 3.2.3).

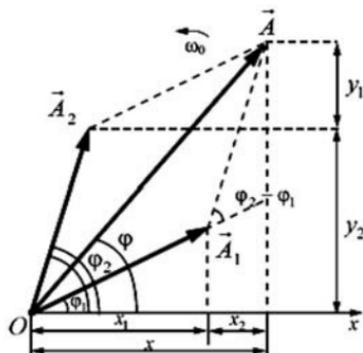


Рис. 3.2.2

Сложение гармонических колебаний одного направления ( $x_1$  и  $x_2$ ) методом векторных диаграмм

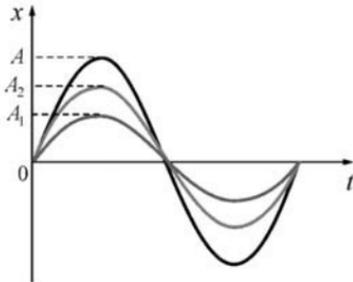


Рис. 3.2.3  
Синфазные колебания

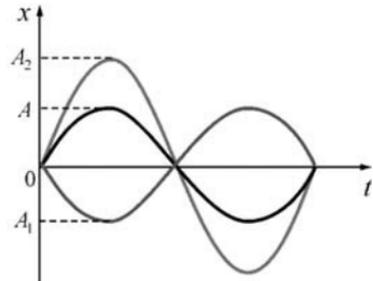


Рис. 3.2.4  
Колебания в противофазе

2. Разность фаз равна нечетному числу  $\pi$ , т. е.  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n + 1)$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ . Отсюда

$$A = |A_2 - A_1|. \quad (3.2.5)$$

Амплитуда результирующего колебания  $A$  равна разности амплитуд складываемых колебаний (колебания в *противофазе*) (рис. 3.2.4).

3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)]; \\ x_2 = A_2 \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)]. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что  $A \neq \text{const}$  и будет изменяться в соответствии с величиной  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ . В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой.

*Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются биениями.* Строго говоря, это уже не гармонические колебания.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны  $A$ , а частоты равны  $\omega_0$  и  $\omega_0 + \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$x_1 = A \cos \omega_0 t; \quad x_2 = A \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t.$$

Сложим эти выражения, пренебрегая  $\frac{\Delta\omega}{2}t$ , так как  $\frac{\Delta\omega}{2}t \ll 2\omega t$ :

$$\begin{aligned} x &= A[\cos\omega_0 t + \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t] = \\ &= \left(2A \cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\omega_0 t. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Результирующее колебание (3.2.6) можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A_6$ , которая изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_6 = \left|2A \cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|. \quad (3.2.7)$$

Тогда результирующее колебание:

$$x = A_6 \cos\omega_0 t.$$

Характер зависимости (3.2.7) показан на рисунке 3.2.5, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания, а огибающие их — график медленно меняющейся по уравнению (3.2.7) амплитуды.

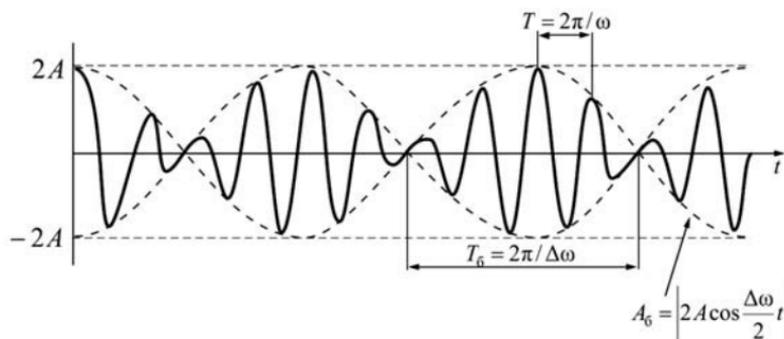


Рис. 3.2.5  
Модулированные колебания

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями — наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Вообще колебания вида  $x = A(t)\cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$  называются **модулированными**. Частные случаи: *амплитудная модуляция и модулирование по фазе или частоте*. **Биеение** — простейший вид модулированных колебаний.

### 3.2.3. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть некоторое тело колеблется и вдоль оси  $x$ , и вдоль оси  $y$ , т. е. участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \\ y &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Найдем уравнение результирующего колебания. Для простоты примем  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Разность фаз между обоими колебаниями равна  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Чтобы получить уравнение траектории, надо исключить из этих уравнений время  $t$ . Упростим выражения, выбрав начало отсчета так, чтобы  $\varphi_1 = 0$ , т. е.

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

В результате решения этих уравнений получим уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно  $x$  и  $y$  произвольно:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.2.9)$$

### 3.2.4. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ)

Рассмотрим некоторые частные случаи решений уравнения (3.2.9).

#### 1. Начальные фазы колебаний одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

т. е.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0.$$

Тогда уравнение (3.2.9) примет вид

$$y = x A_2 / A_1.$$

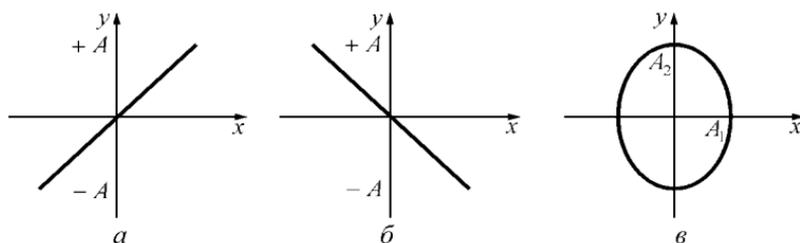


Рис. 3.2.6

Линейно (а, б) и эллиптически (в) поляризованные колебания

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис. 3.2.6а). Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми начальными фазами будут происходить колебания вдоль прямой, проходящей через начало координат. Такие колебания называются *линейно поляризованными*.

2. *Начальная разность фаз равна  $\pi$* , тогда  $\cos \pi = -1$ , следовательно, уравнение колебания в этом случае:

$$y = -xA_2/A_1, \quad (3.2.10)$$

т. е. точка тоже будет колебаться вдоль прямой, проходящей через начало координат, но прямая лежит в других четвертях по сравнению с первым случаем (рис. 3.2.6б).

Амплитуда результирующего колебания в обоих случаях равна

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (3.2.11)$$

3. *Начальная разность фаз равна  $\pi/2$* ,  $\sin(\pi/2) = 1$ ;  $\cos(\pi/2) = 0$ .

Тогда уравнение (3.2.9) примет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (3.2.12)$$

Это уравнение эллипса с полуосями  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 3.2.6в, табл. 4). Случай *эллиптически поляризованных колебаний*.

При  $A_1 = A_2$  получим уравнение окружности (*циркулярно-поляризованные колебания*).

Таблица 4

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	Угол сдвига фаз $\Delta\varphi$				
	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
1:1					
1:2					

4. Все остальные разности фаз дают эллипсы с различным углом наклона относительно осей координат.

Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются **фигурами Лиссажу** [Ж. Лиссажу (1822–1880) — французский физик]. В простейших случаях можно сравнить частоты по виду фигур.

В приведенных выше примерах рассматривались простейшие случаи, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Если  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу. В таблице 4 приведены несколько фигур Лиссажу для разных соотношений частот колебаний и заданной разности фаз  $\Delta\varphi$ .

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Опишите, какие вы знаете способы представления гармонических колебаний.
2. Что такое метод векторных диаграмм?
3. Что такое вращающийся вектор амплитуд?
4. Чем отличаются одинаково направленные колебания от перпендикулярно направленных?
5. Как найти результирующую амплитуду при одинаково направленных колебаниях?
6. Опишите простые случаи сложения одинаково направленных колебаний.

7. Что такое биение? Чему равна частота биений? Период?
8. Являются ли биения гармоническими колебаниями?
9. Что представляет собой амплитуда результирующих колебаний при биениях?
10. Что такое модулированные колебания?
11. Опишите сложение перпендикулярно направленных колебаний.
12. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Как получается окружность; прямая?
13. Что такое фигуры Лиссажу?
14. Как по виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний?
15. Как изменяется частота собственных колебаний с увеличением массы колеблющегося тела?

### 3.3. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения, и амплитуда колебаний постепенно уменьшается (затухает).

#### 3.3.1. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

*Свободными затухающими колебаниями* называются колебания, механическая энергия которых расходуется на работу против диссипативных сил (сил трения).

Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например, в маятнике). Тогда *сила трения* (или *сопротивления*):

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v},$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления;  $\vec{v}$  — скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси  $x$ :

$$ma_x = -kx - rv_x,$$

где  $kx$  — возвращающая сила;  $rv_x$  — сила трения.

Это уравнение можно переписать

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{r}{2m} &= \beta; \\ \frac{k}{m} &= \omega_0^2. \end{aligned}$$

Тогда однородное *дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее затухающее колебательное движение*, запишем так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.3.1)$$

Решение уравнения (2.3.1) имеет вид (при  $\beta \leq \omega_0$ ):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.3.2)$$

Здесь  $A_0$  и  $\varphi$  определяются из краевых условий задачи (начальных и граничных), а  $\beta$  и  $\omega$  — из самого уравнения.

Круговая частота  $\omega$  здесь уже не равна  $\omega_0$  ( $\omega \neq \omega_0$ ):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где  $\omega_0$  — круговая частота собственных колебаний (без затухания);  $\omega$  — круговая частота свободных затухающих колебаний.

Из этого выражения ясно, почему решение (3.3.2) будет только при  $\beta \leq \omega_0$ . Для колебаний под действием различных сил (квазиупругих) значения  $\omega$ ,  $\beta$ ,  $\omega_0$  будут различными. Например, для колебаний под действием упругой силы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \beta = \frac{r}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды. Поэтому называть  $\omega$  *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*. По этой же причине и период называется *условным периодом*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

называется *условным периодом* затухающих колебаний.

### 3.3.2. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ДЕКРЕМЕНТ ЗАТУХАНИЯ

Найдем так называемый *декремент затухания* — отношение значений амплитуды затухающих колебаний (рис. 3.3.1) в моменты времени  $t$  и  $t + T$ :

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T}.$$

*Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период  $T$ , называется логарифмическим декрементом затухания  $\chi$ :*

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \quad \chi = \beta T.$$

*Время релаксации  $\tau$  — время, в течение которого амплитуда  $A$  уменьшается в  $e$  раз:*

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta \tau} = e^1.$$

Отсюда

$$\beta \tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

*Коэффициент затухания  $\beta$  есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.*

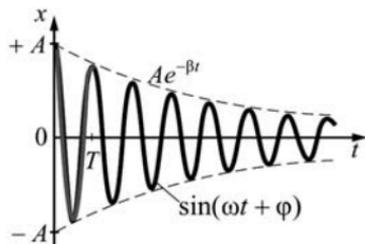


Рис. 3.3.1  
Затухающие колебания

Пусть  $N$  — число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Тогда

$$\tau = NT; \quad T = \frac{\tau}{N}; \quad \beta = \frac{1}{\tau}; \quad \chi = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, *логарифмический декремент затухания*  $\chi$  есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда  $A$  уменьшается в  $e$  раз. Если  $\chi = 0,01$ , то  $N = 100$ .

При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно

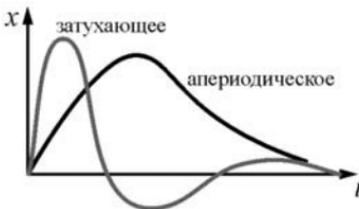


Рис. 3.3.2  
Аperiодический процесс

увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным *критическому* ( $r = r_{кр}$ , а  $\beta = \omega_0$ ), то круговая частота обращается в нуль ( $\omega = 0$ , а период  $T \rightarrow \infty$ ), колебания прекращаются. Такой процесс называется *аperiодическим* (рис. 3.3.2).

Отличия в следующем. При колебаниях тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае аperiодического движения энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения (например, маятник, опущенный в воду или дверной доводчик).

### 3.3.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим систему, на которую, кроме упругой силы ( $-kx$ ) и сил сопротивления ( $-rv$ ), действует добавочная периодическая сила  $F$  — *вынуждающая сила*. Для колебаний вдоль оси  $x$  запишем

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x$$

— *основное уравнение колебательного процесса*, или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x, \quad (3.3.3)$$

где  $f_x = F_x/m$  — вынуждающая сила, изменяющаяся по закону  $f_x = F_0 \cos \omega t$ .

Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы  $\omega$ . Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.3.4)$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (3.3.5)$$

Таким образом,  $A \sim F_0/m$  и  $\sim 1/\beta$ .

При постоянных  $F_0$ ,  $m$  и  $\beta$  амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы  $\omega$  и свободных незатухающих колебаний системы  $\omega_0$ .

Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta \omega}. \quad (3.3.6)$$

Проанализируем выражение (3.3.5).

1.  $\omega = 0$  (частота вынуждающей силы равна нулю).

Тогда

$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2}$$

— *статическая амплитуда* (колебания не совершаются).

2.  $\beta = 0$  (затухания нет).

С увеличением  $\omega$  (но при  $\omega < \omega_0$ ) амплитуда растет и при  $\omega = \omega_0$  резко возрастает ( $A \rightarrow \infty$ ). Это явление называется **резонанс**.

При дальнейшем увеличении  $\omega$  ( $\omega > \omega_0$ ) амплитуда опять уменьшается (рис. 3.3.3).

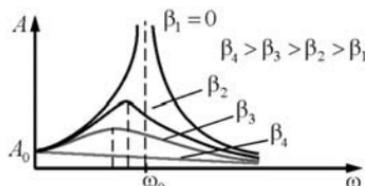


Рис. 3.3.3

Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний — резонанс

3.  $\beta \neq 0$ . Амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя. Для нахождения точки перегиба возьмем первую производную по  $\omega$  от подкоренного выражения (3.3.5) и, приравняв ее к нулю, получим

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.3.7)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  — резонансная частота.

*Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к  $\omega_{\text{рез}}$  называется резонансом.*

Для консервативной системы, т. е.  $\beta = 0$ , из (3.3.7) следует  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ ; для диссипативной  $\omega_{\text{рез}}$  несколько меньше собственной круговой частоты  $\omega_0$  (рис. 3.3.3).

С увеличением коэффициента затухания  $\beta$  явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при  $\beta_4 > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их для механических колебаний.
2. По какому закону изменятся амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
3. Почему частота затухающих колебаний должна быть меньше частоты собственных колебаний системы?
4. Что такое коэффициент затухания? Декремент затухания? Логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
5. При каких условиях наблюдается аperiodическое движение?
6. Что такое автоколебания? В чем их отличие от свободных незатухающих и вынужденных незатухающих колебаний? Где они применяются?
7. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и решите его.
8. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
9. Нарисуйте и проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения и скорости. В чем их аналогия?
10. Почему добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы?
11. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?
12. Что называется резонансом? Какова его роль в природе?

### 3.4. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

#### 3.4.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, увлекаемые частицы будут отставать по фазе от тех частиц, которые их увлекают.

При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды. Среда рассматривается как сплошная, т. е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Итак, колеблющееся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны. *Процесс распространения колебаний в среде называется волной.*

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и энергия. Поэтому *основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.*

Волны бывают *поперечными* (колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения) и *продольными* (сгущение и разрежение частиц среды происходит в направлении распространения).

Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, называется фронтом волны.

В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны (см. рис. 3.4.1 и 3.4.2).

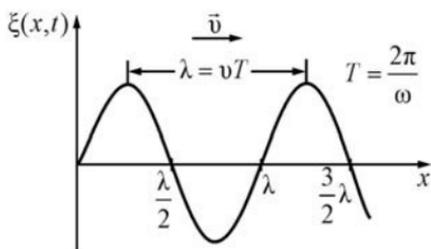


Рис. 3.4.1  
Графическое изображение  
распространяющейся  
волны  $\xi(x, t)$

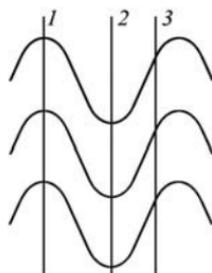


Рис. 3.4.2  
Волновые поверхности  
и волновой фронт

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны  $\lambda$  (рис. 3.4.1):

$$\lambda = vT, \quad (3.4.1)$$

где  $v$  — скорость распространения волны;  $T = 1/\nu$  — период;  $\nu$  — частота.

Отсюда скорость распространения волны можно найти по формуле

$$v = \lambda\nu. \quad (3.4.2)$$

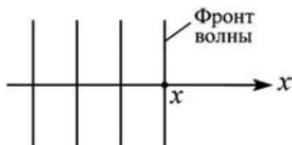


Рис. 3.4.3  
Плоские волны

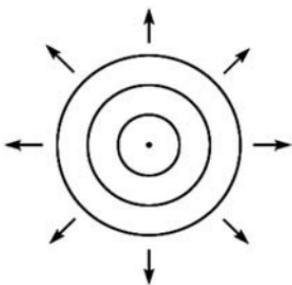


Рис. 3.4.4  
Сферические волны

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью** (рис. 3.4.2). Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом, т. е. волновых поверхностей бесконечное множество. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положение равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт только один, и он все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях волновые поверхности име-

ют форму плоскости или сферы соответственно, волны называются *плоскими* (рис. 3.4.3) или *сферическими* (рис. 3.4.4). В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне — систему концентрических сфер.

### 3.4.2. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛН

*Уравнением волны* называется выражение, которое дает *смещение* колеблющейся точки как функцию ее координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ :

$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t). \quad (3.4.3)$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени, так и координат (волна — это распространяющееся колебание, следовательно, периодически повторяющееся движение). Кроме того, точки, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\lambda$ , колеблются одинаковым образом.

#### УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Найдем вид функции  $\xi$  в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Пусть колебание точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , имеет вид (при начальной фазе  $\varphi = 0$ ):

$$\xi = \xi(0, t) = A \cos \omega t. \quad (3.4.4)$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению  $x$ . Чтобы пройти путь  $x$ , необходимо время  $\tau = x/v$ .

Следовательно, *колебания частиц в плоскости  $x$  будут отставать по времени на  $\tau$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , т. е.*

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad (3.4.5)$$

— это *уравнение плоской волны* (рис. 3.4.3).

Таким образом,  $\xi$  есть *смещение* любой из точек с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . При выводе мы пред-

полагали, что амплитуда колебания  $A = \text{const}$ . Это будет, если энергия волны не поглощается средой.

Такой же вид уравнение (3.4.5) будет иметь, если колебания распространяются вдоль оси  $y$  или  $z$ .

В общем виде *уравнение плоской волны* записывается так:

$$\xi = A \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{или} \quad \xi = A \cos \omega \left[ \left( t - \frac{r}{v} \right) + \varphi \right]. \quad (3.4.6)$$

Выражения (3.4.5) и (3.4.6) есть *уравнения бегущей волны*.

Уравнение волны можно записать и в другом виде.

Введем *волновое число*  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  или в векторной форме:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n},$$

где  $\vec{k}$  — *волновой вектор*;  $\vec{n}$  — нормаль к волновой поверхности.

Так как  $\lambda = vT$ , то  $k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi v}{v} = \frac{\omega}{v}$ . Отсюда  $v = \frac{\omega}{k}$ .

Тогда *уравнение плоской волны* запишется так:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx). \quad (3.4.7)$$

#### УРАВНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

В случае когда скорость волны  $v$  во всех направлениях постоянна, а источник точечный, волна будет *сферической* (рис. 3.4.4). Предположим, что фаза колебаний источника равна  $\omega t$  (т. е.  $\varphi = 0$ ). Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса  $r$ , будут иметь фазу  $\omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ . Амплитуда колебаний здесь, даже если волна не поглощается средой, не будет постоянной, она убывает по закону  $\frac{1}{r}$ . Следовательно, *уравнение сферической волны*:

$$\xi = \frac{A}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{или} \quad \xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (3.4.8)$$

где  $A$  равна амплитуде на расстоянии от источника, равном единице.

Уравнение (3.4.8) неприменимо для малых  $r$ , так как при  $r \rightarrow 0$  амплитуда стремится к бесконечности. То, что амплитуда колебаний  $A \sim \frac{1}{r}$ , следует из рассмотрения энергии, переносимой волной.

### 3.4.3. ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

**Фазовая скорость** — это скорость распространения фазы волны.

Зафиксируем какое-либо значение фазы волны и проследим, с какой скоростью фаза будет перемещаться вдоль оси  $x$ :

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const.}$$

Это уравнение дает связь между  $t$  и тем значением  $x$ , где зафиксированное значение фазы будет в данный момент времени. Следовательно,  $\frac{dx}{dt}$  — это есть **скорость перемещения данной фазы**, так как  $\omega = \text{const}$ , поэтому  $t - \frac{x}{v} = \text{const}$ . Возьмем производную по времени от обеих частей равенства:  $1 - \frac{1}{v} \frac{dx}{dt} = 0$ . Отсюда получим выражение для **фазовой скорости**:

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (3.4.9)$$

Итак, скорость распространения фазы есть скорость распространения волны, т. е.  $v$  в уравнении волны есть **фазовая скорость**. Для синусоидальной волны скорость переноса энергии равна фазовой скорости. Но синусоидальная волна не несет никакой информации, любой сигнал — это модулированная волна, т. е. несинусоидальная (негармоническая).

При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Здесь нет парадокса, так как **скорость перемещения фазы** — это не скорость передачи (распространения) энергии, которая не может распространяться со скоростью большей, чем скорость света  $c$ .

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ.  
ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Если свойства среды не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим *принцип суперпозиции* (наложения волн): при распространении в такой среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений частиц.

Строго монохроматическая волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин»:

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (3.4.10)$$

Фазовая скорость этой волны  $v = \omega/k$  или  $v = \lambda\nu$ .

С помощью такой волны нельзя передавать сигнал, так как в любой точке волны все «горбы» одинаковы. Сигнал должен отличаться, быть знаком (меткой) на волне. Но тогда волна уже не будет описываться уравнением (3.4.10).

Сигнал (импульс) можно представить (согласно теореме Фурье) в виде суперпозиции гармонических волн с

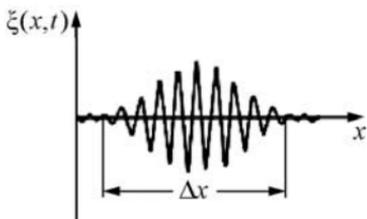


Рис. 3.4.5  
Волновой пакет  
или группа волн

частотами, заключенными в некотором интервале  $\Delta\omega$ . Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется *волновым пакетом* или *группой волн* (рис. 3.4.5). Чтобы суперпозицию можно было считать группой волн, необходимо условие  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Уравнение для группы волн:

$$\xi(x, t) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} E_{0\omega} \cos(\omega t - k_{\omega} x + \alpha_{\omega}) d\omega. \quad (3.4.11)$$

Этот волновой пакет может быть суммой двух волн с мало отличающимися частотами (рис. 3.4.6).

Там, где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет — гашение (результат интерференции).

**Дисперсия** — это зависимость фазовой скорости в среде от частоты.

Скорость, с которой перемещается центр пакета (точка с максимальным значением амплитуды  $A$ ), называется **групповой скоростью**  $u$ .

В диспергирующей среде  $u \neq v$ . Вместе с движением самого пакета происходит движение «горбов» внутри пакета. «Горбы» перемещаются со скоростью  $v$ , а пакет в целом — со скоростью  $u$ :

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (3.4.12)$$

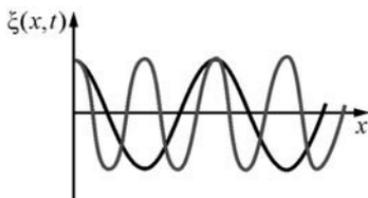
Из этой формулы следует, что в **диспергирующей среде**, в зависимости от знака  $\frac{dv}{d\lambda}$ , групповая скорость может быть больше или меньше фазовой.

**В отсутствие дисперсии**  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$  и  $u = v$ . Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому **скорость переноса энергии равна групповой скорости**.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что **поглощение энергии волны** в среде невелико. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Это случай из области аномальной дисперсии (рассмотрим позже).

#### 3.4.4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. **Волны накладываются друг на друга, не возмущая (не искажая друг друга). Это и есть принцип суперпозиции волн.**



**Рис. 3.4.6**  
Две волны, с мало отличающимися частотами

Если две волны, проходящие в какую-либо точку пространства, обладают постоянной разностью фаз, такие волны называются **когерентными**. При сложении когерентных волн возникает явление **интерференции**.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется **стоячей волной**. Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях (начальная фаза  $\varphi = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx); \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \right\}$$

Сложим эти уравнения, преобразуем их по формуле суммы косинусов и, учитывая, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , получим **уравнение стоячей волны**:

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos \omega t. \quad (3.4.13)$$

Обозначив  $A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ , выражение (3.4.13) можно записать как

$$\xi = A^* \cos \omega t.$$

В точках, где координаты удовлетворяют условию  $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = 1$ , суммарная амплитуда равна максимальному значению:  $A^* = 2A$  — это **пучности стоячей волны**.

**Координаты пучностей:**  $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda/2$ .

**В точках, координаты которых удовлетворяют условию**

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = 0$$

и суммарная амплитуда колебаний равна нулю;  $A^* = 0$  — это **узлы стоячей волны**.

**Координаты узлов:**

$$x_{\text{узел}} = \pm \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}.$$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженных волн. На границе, где происходит отражение волны, получается пучность, если среда, от которой происходит отражение, менее плотная (рис. 3.4.7а), и узел — если более плотная (рис. 3.4.7б).

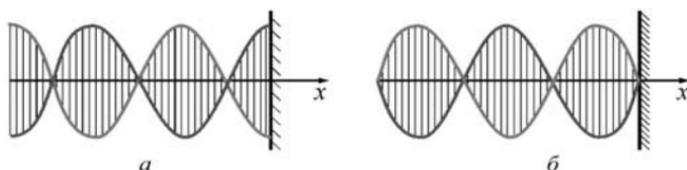


Рис. 3.4.7  
Стоячая волна

Если рассматривать *бегущую волну*, то в направлении ее распространения *переносится энергия* колебательного движения. **В случае же стоячей волны переноса энергии нет**, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.

### 3.4.5. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого *волновым*. Найдем *общий вид волнового уравнения*. Для этого продифференцируем дважды уравнение плоской волны  $\xi = A \cos(\omega t - kr)$  по времени  $t$  и всем координатам. Учтем при этом, что  $v = \omega/k$ . Окончательно получим для *волнового уравнения*:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (3.4.14)$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (3.4.14), описывает некоторую волну, причем корень квадратный

из величины, обратной коэффициенту при производной по времени  $1/v^2$ , есть фазовая скорость волны.

Используя оператор Лапласа  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , **волновое уравнение** можно записать в виде

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (3.4.15)$$

### 3.4.6. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя — более низким, чем сигнал того же электропоезда, но неподвижного.

*Эффектом Доплера называют изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника.*

Источник, двигаясь к приемнику, как бы сжимает пружину — волну (рис. 3.4.8).

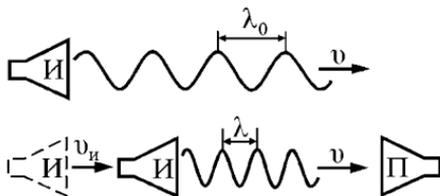


Рис. 3.4.8

Эффект Доплера — изменение частоты волн, регистрируемой приемником от движущегося источника

Данный эффект наблюдается при распространении звуковых волн (акустический эффект) и электромагнитных волн (оптический эффект).

#### АКУСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Пусть приемник звуковых волн П в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется от приемника со скоростью  $\vec{v}_н$  вдоль соединяющей их прямой (рис. 3.4.9а).

Источник смещается в среде за время, равное периоду  $T_0$  его колебаний, на расстояние  $v_{\text{и}}T_0 = \frac{v_{\text{и}}}{v_0}$ , где  $v_0$  — частота колебаний источника.

Поэтому при движении источника длина волны в среде  $\lambda$  отлична от ее значения  $\lambda_0$  при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + v_{\text{и}}T_0 = (v + v_{\text{и}})T_0 = \frac{(v + v_{\text{и}})}{v_0},$$

где  $v$  — фазовая скорость волны в среде.

Частота волны, регистрируемая приемником:

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{1 + v_{\text{и}}/v}.$$

Если вектор  $\vec{v}_{\text{и}}$  скорости источника направлен под произвольным углом  $\theta_1$  к радиусу-вектору  $\vec{R}$ , соединяющему неподвижный приемник с источником (рис. 3.4.9б), то

$$v = \frac{v_0}{1 + (v_{\text{и}}/v) \cos \theta_1}.$$

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью  $\vec{v}_{\text{п}}$  вдоль соединяющей их прямой (рис. 3.4.9в), то длина волны в среде  $\lambda = \lambda_0 = \frac{v}{v_0}$ . Однако скорость распространения волны относительно приемника

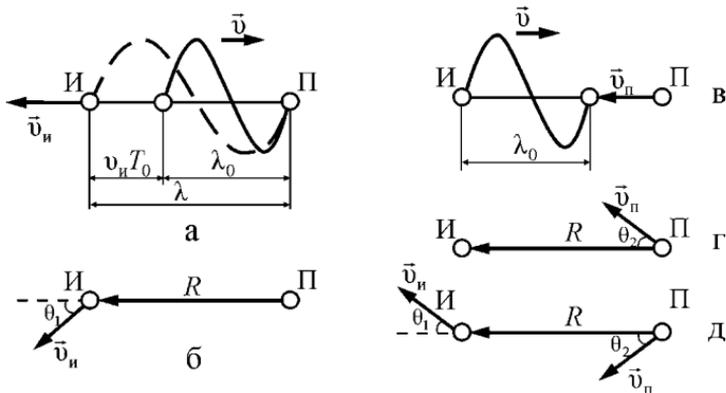


Рис. 3.4.9

Несколько случаев проявления эффекта Доплера

равна  $v + v_{\text{п}}$ , так что частота волны, регистрируемая приемником:

$$v = (v + v_{\text{п}}) / \lambda_0 = v_0(1 + v_{\text{п}} / v).$$

В том случае, когда скорость  $\vec{v}_{\text{п}}$  направлена под произвольным углом  $\theta_2$  к радиусу-вектору  $\vec{R}$ , соединяющему движущийся приемник с неподвижным источником (рис. 3.4.9г), имеем

$$v = v_0[1 + v_{\text{п}} / v] \cos \theta_2.$$

В самом общем случае, когда и приемник, и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями (рис. 3.4.9д):

$$v = v_0 \frac{1 + (v_{\text{п}} / v) \cos \theta_2}{1 + (v_{\text{п}} / v) \cos \theta_1}.$$

#### ОПТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

При движении источника и приемника электромагнитных волн относительно друг друга также наблюдается *эффект Доплера*, т. е. *изменение частоты волны*, регистрируемой приемником. В отличие от рассмотренного нами эффекта Доплера в акустике, закономерности этого явления для электромагнитных волн можно установить только на основе специальной теории относительности.

Соотношение, описывающее *эффект Доплера* для *электромагнитных волн* в вакууме, с учетом преобразований Лоренца имеет вид

$$v = \frac{v_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + (v / c) \cos \theta}. \quad (3.4.16)$$

При небольших скоростях движения источника волн относительно приемника релятивистская формула эффекта Доплера совпадает с классической формулой.

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается *продольный эффект Доплера*.

В случае сближения источника и приемника ( $\theta = \pi$ ):

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} > v_0, \quad (3.4.17)$$

а в случае их взаимного удаления ( $\theta = 0$ ):

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} < v_0. \quad (3.4.18)$$

Кроме того, из релятивистской теории эффекта Доплера следует существование *поперечного эффекта Доплера*, наблюдающегося при  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ , т. е. в тех случаях, когда источник движется перпендикулярно линии наблюдения (например, источник движется по окружности, приемник в центре):

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < v_0. \quad (3.4.19)$$

Поперечный эффект Доплера необъясним в классической физике. Он представляет чисто релятивистский эффект.

Как видно из формулы (3.4.19), поперечный эффект пропорционален отношению  $v^2/c^2$ , следовательно, он значительно слабее продольного, который пропорционален  $v/c$  (3.4.18).

#### ЗАКОН ХАББЛА

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости  $v' \cos \theta$  этих объектов по отношению к Земле: при  $v \ll c$  по формуле

$$v' \cos \theta \approx (1 - v/v_0)c. \quad (3.4.20)$$

Американский астроном Э. Хаббл в 1929 г. обнаружил явление, получившее название *космологического красного смещения* и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн). Оказалось, что для каждого объекта относительное смещение частоты

$z = (v_0 - v)/v_0$  ( $v_0$  — частота линии в спектре неподвижного источника,  $v$  — наблюдаемая частота) совершенно одинаково по всем частотам.

Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики.

Под Метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен  $R = 1,12 \cdot 10^{23}$  км. Существование этого явления было теоретически предсказано еще в 1922 г. советским ученым А. А. Фридманом на основе развития общей теории относительности.

Хаббл установил закон, согласно которому *относительное красное смещение  $z$  галактик растет пропорционально расстоянию  $r$  до них* (рис. 3.4.10).

*Закон Хаббла* можно записать в виде

$$v \cos \theta \approx cz = Hr, \quad (3.4.21)$$

где  $H$  — постоянная Хаббла. По самым современным оценкам  $H = 73,2$  км/(с·Мпк), 1 пк (парсек) — расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет (1 пк  $\approx 3,09 \cdot 10^{16}$  м).

Чем дальше находится галактика, тем больше ее красное смещение, поэтому больше скорость ее удаления.



Рис. 3.4.10

Зависимость скорости удаления галактик от расстояния до них

В 1990 г. на борту шаттла «Дискавери» был выведен на орбиту космический телескоп названный в честь Хаббла (рис. 3.4.11).

Астрономы давно мечтали о телескопе, который работал бы в видимом диапазоне, но находился за пределами земной атмосферы, сильно мешающей наблюдениям. «Хаббл» не только не обманул возлагавшихся на него надежд, но даже превзошел практически все ожидания. Он фантастически расширил «поле зрения» человечества, заглянув в немислимые глубины Вселенной. За время своей работы космический телескоп передал на Землю 700 тыс. великолепных фотографий (рис. 3.4.12). Он, в частности, помог астрономам определить точный возраст нашей Вселенной — 13,7 млрд лет; помог подтвердить существование во Вселенной странной, но оказывающей огромное влияние формы энергии — темной энергии; доказал существование сверхмассивных черных дыр; удивительно четко заснял падение кометы на Юпитер; показал, что процесс формирования планетных систем является широко распространенным в нашей Галактике; обнаружил небольшие протогалактики, зарегистрировав излучение, испущенное ими, когда возраст Вселенной составлял менее 1 млрд лет.

На эффекте Доплера основаны радиолокационные лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.). Лазерная анемометрия является незаменимым методом изучения потока жидкости или газа. Хаотическое тепловое движение



Рис. 3.4.11  
Космический телескоп «Хаббл»

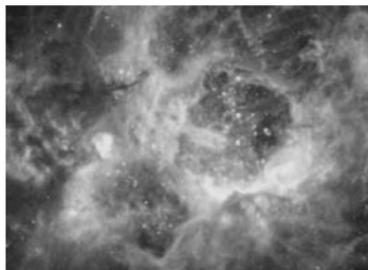


Рис. 3.4.12  
Фотография Галактики

атомов светящегося тела также вызывает уширение линий в его спектре, которое возрастает с увеличением скорости теплового движения, т. е. с повышением температуры газа. Это явление можно использовать для определения температуры раскаленных газов.

Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости этих объектов по отношению к Земле.

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое волна? Как объяснить распространение колебаний в упругой среде?
2. Что называется поперечной волной; продольной? Когда они возникают?
3. Что такое волновой фронт? Волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число? Фазовая и групповая скорость?
6. Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической? Каковы уравнения этих волн?
7. При каких условиях возникает интерференция волн?
8. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн? Ответ обосновать.
9. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
10. Чем стоячая волна отличается от бегущей?
11. Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны? Двумя соседними пучностями? Соседними пучностью и узлом?
12. Что такое звуковые волны? Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?
13. Может ли звук распространяться в вакууме?
14. От чего зависят громкость, высота и тембр звука?
15. Что такое эффект Доплера? Чему будет равна частота колебаний, воспринимаемых покоящимся приемником, если источник колебаний от него удаляется?
16. Какое влияние оказывает скорость ветра на эффект Доплера?
17. Как определить частоту звука, воспринимаемую приемником, если источник звука и приемник движутся?

- 18.\* Две когерентные волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются только амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
- 19.\* Две когерентные волны с одинаковым периодом распространяются в одном направлении. Разность хода равна четному числу полуволн. Что получится в результате интерференции?

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 3.1.** Шарик, подвешенный на нити длиной 1 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости (конический маятник). Найдите период обращения шарика, если маятник находится в лифте, движущемся с ускорением  $5 \text{ м/с}^2$ , направленным вниз. Нить составляет с вертикальным направлением угол  $60^\circ$ . Результат представьте в единицах СИ и округлите до целого числа.

**Дано:**

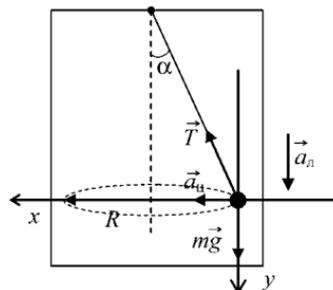
$$l = 1 \text{ м}$$

$$a_{\text{л}} = 5 \text{ м/с}^2$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$T_{\text{ш}} = ?$$



**Решение:**

В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

где

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{л}} + \vec{a}_{\text{ц}}.$$

В проекциях на оси  $x$  и  $y$ :

$$0x: T \sin \alpha = m a_{\text{ц}};$$

$$0y: mg - T \cos \alpha = m a_{\text{л}}.$$

$$T \sin \alpha = \frac{mv^2}{R}; \quad (1)$$

$$T \cos \alpha = mg - m a_{\text{л}}. \quad (2)$$

Здесь  $R$  — радиус окружности, по которой движется шарик.  $R = l \sin \alpha$ .

Разделим уравнение (1) на (2) и получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{R(g - a_n)}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{R(g - a_n)\operatorname{tg}\alpha}.$$

Период обращения шарика равен  $T_{\text{ш}} = \frac{2\pi R}{v}$ :

$$T_{\text{ш}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{R(g - a_n)\operatorname{tg}\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{(g - a_n)\operatorname{tg}\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g - a_n}} = 2 \text{ (с)}.$$

Ответ:  $T_{\text{ш}} = 2 \text{ с}$ .

**Задача 3.2.** Один из двух математических маятников совершил 10 колебаний, а другой за это же время — 6 колебаний. Разность длин маятников составляет 16 см. Определите длины маятников. Результат представьте в единицах СИ.

**Дано:**

$$N_1 = 10$$

$$N_2 = 6$$

$$\Delta l = 0,16 \text{ м}$$

$$l_1 = ?$$

$$l_2 = ?$$

**Р е ш е н и е:**

Запишем периоды колебаний математических маятников:

$$T_1 = \frac{t_1}{N_1} = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}};$$

$$T_2 = \frac{t_2}{N_2} = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Разделим первое уравнение на второе, получим

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; \quad \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{l_1}{l_2}.$$

Выразим отсюда длину первого маятника:

$$l_1 = l_2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = l_2 \left(\frac{6}{10}\right)^2 = 0,36 l_2.$$

Теперь, зная соотношение между длинами маятников и величину, на которую они отличаются, найдем их значения:

$$l_2 = l_1 + \Delta l = 0,36 l_2 + \Delta l.$$

Отсюда

$$0,64l_2 = \Delta l; \quad l_2 = \Delta l / 0,64 = 0,16 / 0,64 = 0,25 \text{ (м);}$$

$$l_1 = l_2 - \Delta l = 0,25 - 0,16 = 0,09 \text{ (м).}$$

Ответ:  $l_1 = 0,09$  м;  $l_2 = 0,25$  м.

**Задача 3.3.** Ареометр массой 0,2 кг плавает в жидкости. Если его погрузить немного в жидкость, а затем отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом 3,4 с. Считая колебания ареометра гармоническими и незатухающими, найдите плотность жидкости, в которой он плавает. Радиус вертикальной цилиндрической трубки ареометра равен 5,0 мм. Результат представьте в единицах СИ и округлите до целого числа.

**Дано:**

$$m = 0,2 \text{ кг}$$

$$T = 3,4 \text{ с}$$

$$r = 5,0 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$\rho_{\text{ж}} = ?$$

**Решение:**

Условие равновесия ареометра:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = 0,$$

где  $F_A$  — сила Архимеда, равная

$$F_A = \rho_{\text{ж}}g(V + Sh),$$

где  $V$  — объем ареометра без трубки;  $h$  — длина трубки;  $S$  — площадь поперечного сечения трубки.

$$mg = \rho_{\text{ж}}g(V + Sh).$$

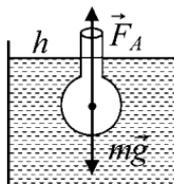
При погружении ареометра в жидкость на глубину  $x$ :

$$F_{A1} > mg; \quad F_{A1} = \rho_{\text{ж}}g[V + S(h + x)];$$

$$F_{\text{в}} = F_{A1} - mg = \rho_{\text{ж}}g[V + S(h + x)] - \rho_{\text{ж}}g(V + Sh) = \rho_{\text{ж}}gSx.$$

Эта сила является возвращающей силой и вызывает колебания около положения равновесия:

$$F_{\text{в}} = -kx.$$



Отсюда

$$k = \rho_{\text{ж}} g S = \rho_{\text{ж}} g \pi r^2.$$

Период колебаний ареометра:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_{\text{ж}} g \pi r^2}}.$$

Тогда

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{\rho_{\text{ж}} g \pi r^2}.$$

Выразим отсюда плотность жидкости:

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{4\pi m}{T^2 g r^2} = \frac{4\pi \cdot 0,2}{3,4^2 \cdot 10 \cdot 0,005^2} = 869 \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

Ответ:  $\rho_{\text{ж}} = 869 \text{ кг/м}^3$ .

**Задача 3.4.** На какую часть длины нужно уменьшить длину математического маятника, чтобы период его колебаний на высоте 10 км был бы равен периоду его колебаний на поверхности Земли? Ответ представьте в процентах и округлите до десятых.

**Дано:**

$$\begin{aligned} h &= 10 \text{ км} = 1000 \text{ м} \\ R_1 &= R_3 = 6400 \text{ км} = \\ &= 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} \\ R_2 &= R_3 + h \\ T_0 &= T_h \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta l}{l_1} = ?$$

**Решение:**

По условию задачи  $T_0 =$   
 $= T_h$ , где  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$  — период колебаний математического маятника на поверхности Земли;  $T_h = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g_h}}$  — период колебаний математического маятника на высоте  $h$  над поверхностью Земли.

Приравняем  $T_0$  и  $T_h$ :

$$2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g_h}}.$$

Отсюда

$$\frac{l_1}{g} = \frac{l_2}{g_h}. \quad (1)$$

Так как длину математического маятника уменьшили, следовательно, можно записать

$$l_2 = l_1 - \Delta l.$$

Ускорение свободного падения на высоте  $h$  над поверхностью Земли:

$$g = \frac{\gamma M_3}{R^2},$$

где  $R_1 = R_3 + h$ .

Подставим значения  $g$  в уравнение (1):

$$\frac{l_1 \cdot R_1^2}{\gamma \cdot M_3} = \frac{l_2 \cdot R_2^2}{\gamma \cdot M_3} \quad \text{или} \quad l_1 \cdot R_1^2 = l_2 \cdot R_2^2;$$

$$l_1 \cdot R_3^2 = (l_2 - \Delta l) \cdot (R_3 + h)^2.$$

Решая последнее уравнение относительно  $\frac{\Delta l}{l_1}$ , получаем

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{(R_3 + h)^2 - R_3^2}{(R_3 + h)^2} = \frac{6410^2 - 6400^2}{6410^2} = 0,003 = 0,3\%.$$

Ответ:  $\frac{\Delta l}{l_1} = 0,3\%$ .

**Задача 3.5.** Шарик массой  $0,1$  кг совершает синусоидальные колебания на пружине, прикрепленной к стене (см. рисунок). Жесткость пружины  $1000$  Н/м. На расстоянии, равном половине амплитуды колебания от положения равновесия, установили плиту, от которой шарик упруго отскакивает. Найдите период колебаний шарика в этом случае. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до сотых.

**Дано:**

$$m = 0,1 \text{ кг}$$

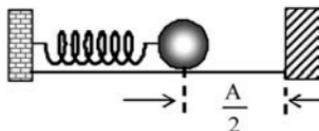
$$k = 1000 \text{ Н/м}$$

$$x = A/2$$

$$T_0 = ?$$

**Решение:**

В данной задаче период колебаний шарика:



$$T_0 = \frac{T}{2} + 2t,$$

где  $T$  — полный период колебаний шарика (без плиты);  $t$  — время, за которое шарик проходит расстояние  $A/2$  от положения равновесия до плиты.

Полный период колебаний пружинного маятника (без плиты) можно найти по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Время  $t$ , за которое шарик проходит расстояние  $A/2$  от положения равновесия до плиты, найдем из уравнения гармонического колебания:

$$x = A\sin\omega t.$$

С учетом значения  $x$ :

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega t; \quad \frac{1}{2} = \sin\omega t.$$

Тогда  $\omega t = \frac{\pi}{6}$ . Так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , то  $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$ . Отсюда  $t = \frac{T}{12}$ .

Теперь найдем период  $T_0$ , подставив выражение для времени  $t$  в первую формулу:

$$T_0 = \frac{T}{2} + 2 \cdot \frac{T}{12} = \frac{2}{3}T = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

$$T_0 = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{0,1}{1000}} = 0,04 \text{ (с)}.$$

Ответ:  $T_0 = 0,04$  с.

**Задача 3.6.** Тело совершает гармонические колебания с частотой 2 Гц и начальной фазой  $\pi/6$ . Определите минимальный промежуток времени, по истечении которого после начала колебаний кинетическая энергия тела будет равна потенциальной. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до сотых.

**Дано:**

$$\nu = 2 \text{ Гц}$$

$$\varphi_0 = \pi/6$$

$$E_k = E_p$$

$$t = ?$$

**Решение:**

По условию задачи  $E_k = E_p$ , т. е.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда

$$mv^2 = kx^2. \quad (1)$$

Пусть смещение тела описывается уравнением

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Тогда скорость тела:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Подставим полученные выражения для смещения и скорости в уравнение (1):

$$\begin{aligned} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) &= kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0); \\ m\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) &= k \sin^2(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Учтем, что  $k = m\omega^2$ :

$$\begin{aligned} m\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) &= m\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0); \\ \cos^2(\omega t + \varphi_0) &= \sin^2(\omega t + \varphi_0); \end{aligned}$$

$$1 = \frac{\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{\cos^2(\omega t + \varphi_0)} = \operatorname{tg}^2(\omega t + \varphi_0);$$

$$\operatorname{tg}^2(\omega t + \varphi_0) = 1.$$

Отсюда

$$\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{4},$$

где  $\omega = 2\pi\nu$ .

$$2\pi\nu t + \varphi_0 = \frac{\pi}{4}; \quad 2\pi\nu t = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Отсюда

$$t = \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot \nu} = \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot 1} = 0,02 \text{ (с)}.$$

Ответ:  $t = 0,02 \text{ с}$ .

**Задача 3.7.** На двух вращающихся в противоположные стороны валиках лежит горизонтально доска, как показано на рисунке. Расстояние между осями валиков равно 2 м. Коэффициент трения между доской и каждым из валиков равен 0,1. В начальный момент доска была положена так, что ее центр масс был смещен на некоторое расстояние  $x$  от средней линии  $OO$ . Покажите, что доска будет совершать гармонические колебания, и найдите циклическую частоту колебаний. Ответ представьте в единицах СИ.

**Дано:**

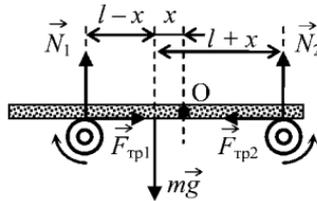
$$l = 2 \text{ м}$$

$$\mu = 0,1$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

$$\omega = ?$$

**Решение:**



Расставим силы, действующие на доску, — силы тяжести  $mg$ , нормальные к доске составляющие сил реакции валиков  $N_1$  и  $N_2$  и силы трения скольжения  $F_{\text{тр}}$ .

Так как доска смещена от положения равновесия влево на расстояние  $x$ , то действующие на нее силы трения скольжения  $F_{\text{тр}1} = \mu N_1$  и  $F_{\text{тр}2} = \mu N_2$  не равны.

Запишем условие равновесия моментов сил относительно валиков:

$$N_1 \cdot 2l = mg(l+x); \quad N_2 \cdot 2l = mg(l-x).$$

$$\text{Сила трения } F_{\text{тр}1} = \mu N_1.$$

Отсюда

$$N_1 = \frac{F_{\text{тр}1}}{\mu}; \quad \frac{F_{\text{тр}1} \cdot 2l}{\mu} = mg(l+x);$$

$$F_{\text{тр}1} = \frac{mg(l+x)}{2l}; \quad F_{\text{тр}2} = \frac{\mu mg(l-x)}{2l}.$$

Таким образом,  $F_{\text{тр}1} > F_{\text{тр}2}$  и равнодействующая этих сил направлена в сторону положения равновесия и вызывает колебательное движение доски:

$$F_p = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = \frac{\mu mg}{2l}(l+x-l+x) = \frac{\mu mgx}{l}.$$

Работа этой силы равна уменьшению потенциальной энергии:

$$F_p x = \frac{kx^2}{2}; \quad \frac{\mu mgx^2}{l} = \frac{kx^2}{2}.$$

$$\text{Так как } k = \omega^2 m, \text{ то } \frac{\mu mg}{l} = \frac{\omega^2 m}{2}, \quad 2\mu g = \omega^2 l.$$

Отсюда выразим циклическую частоту колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10}{2}} = 1 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ:  $\omega = 1$  рад/с.

**Задача 3.8.** Вдоль некоторой прямой распространяются колебания с периодом 0,25 с и скоростью 48 м/с. Спустя 10 с после возникновения колебаний в исходной точке на расстоянии 43 м от нее смещение оказалось равным 3 см. Определите в тот же момент времени смещение в точке, отстоящей на 45 м от источника колебаний. Результат представьте в сантиметрах и округлите до целого числа.

**Дано:**

$$T = 0,25 \text{ с}$$

$$v = 48 \text{ м/с}$$

$$t = 10 \text{ с}$$

$$l_1 = 43 \text{ м}$$

$$x_1 = 0,03 \text{ м}$$

$$l_2 = 45 \text{ м}$$

---


$$x_2 = ?$$

**Решение:**

$$x_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l_1}{v} \right); \quad x_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l_2}{v} \right).$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l_1}{v} \right)}{\sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l_2}{v} \right)}.$$

Выразим отсюда смещение  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{x_1 \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l_2}{v} \right)}{\sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{l_1}{v} \right)} = \frac{3 \cdot \sin \frac{2\pi}{0,25} \left( 10 - \frac{45}{48} \right)}{\sin \frac{2\pi}{0,25} \left( 10 - \frac{43}{48} \right)}.$$

Ответ:  $x_2 = 6$  см.

**Задача 3.9.** Смещение от положения равновесия точки среды, в которой распространяются синусоидальные колебания, находящейся на расстоянии 4 см от источника колебаний, через промежуток времени  $T/6$ , где  $T$  — период колебаний, равно половине амплитуды. Найдите длину волны. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до сотых.

**Дано:**

$$x = 4 \text{ см} = 0,04 \text{ м}$$

$$t = T/6$$

$$y = A/2$$

---


$$\lambda = ?$$

**Решение:**

Запишем уравнение поперечной гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Ox$ :

$$y(x, t) = A \cdot \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (1)$$

где  $y(x, t)$  — смещение точки среды с координатой  $x$  от положения равновесия, совершаемое в поперечной волне

в направлении оси  $Oy$ , перпендикулярной направлению распространения волны — оси  $Ox$ , в момент времени  $t$ ;  $A$  — амплитуда колебаний волны;  $v$  — скорость распространения волны.

Учитывая формулу  $\omega = 2\pi/T$  и условия задачи ( $t = T/6$ ,  $y = A/2$ ), представим уравнение (1) в виде:

$$\frac{A}{2} = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left( \frac{T}{6} - \frac{x}{v} \right); \quad \frac{1}{2} = \sin \frac{2\pi}{T} \left( \frac{T}{6} - \frac{x}{v} \right). \quad (2)$$

Поскольку  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , а  $\lambda = vT$ , то из уравнения (2) получим

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \left( \frac{T}{6} - \frac{x}{v} \right). \quad (3)$$

Решая уравнение (3) относительно  $\lambda$ , найдем

$$\lambda = 4x = 48 \text{ (см)}.$$

Ответ:  $\lambda = 0,48$  м.

**Задача 3.10.** На расстоянии 1088 м от наблюдателя ударяют молотком по стальному рельсу. Наблюдатель, приложив ухо к рельсу, услышал звук на 3 с раньше, чем он дошел до него по воздуху. Найдите скорость звука в стали. Ответ представьте в единицах СИ.

**Дано:**

$$l = 1088 \text{ м}$$

$$\Delta t = 3 \text{ с}$$

$$v_b = 340 \text{ м/с}$$

$$v_c = ?$$

**Решение:**

Звук в воздухе и в стали прошел одинаковое расстояние  $l$  за разное время:

$$l = v_b t; \quad l = v_c (t - \Delta t).$$

Решая совместно полученные выражения, находим скорость звука в стали:

$$t = \frac{l}{v_b}; \quad l = v_c \cdot \left( \frac{l}{v_b} - \Delta t \right);$$

$$v_c = \frac{l}{\frac{l}{v_b} - \Delta t} = \frac{1088}{\frac{1088}{340} - 3} = 5440 \text{ (м/с)}.$$

Ответ:  $v_c = 5440$  м/с.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задача 3.11.** Шарик, подвешенный на пружине, совершает колебания по закону  $x = A \cos(\pi t / 16)$ . За сколько секунд после начала движения шарик пройдет путь, численно равный трем амплитудам его колебаний?

Ответ:  $t = 24$  с.

**Задача 3.12.** Две материальные точки совершают гармонические колебания: первая — с циклической частотой 36 рад/с, вторая — с циклической частотой 9 рад/с. Во сколько раз величина максимального ускорения первой точки больше максимального ускорения второй, если амплитуды колебаний точек одинаковы?

Ответ: в 16 раз.

**Задача 3.13.** Импульс тела, совершающего гармонические колебания, изменяется с течением времени по закону  $p = p_0 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right)$ , где  $p_0$  — положительная константа. Через какое время после начала движения тело во второй раз достигнет положения равновесия?

Ответ:  $t = 7,3$  с.

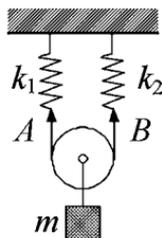
**Задача 3.14.** На тележку кладут кирпич и начинают катать ее по полу так, что ее координата изменяется по закону  $x = A \cos \omega t$ , где  $A = 10$  см. При какой максимальной циклической частоте  $\omega_{\max}$  кирпич не будет смещаться относительно тележки? Коэффициент трения между кирпичом и тележкой 0,5,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Ответ:  $\omega_{\max} = 7$  рад/с.

**Задача 3.15.** Собственная циклическая частота колебаний математического маятника на некоторой планете 5 рад/с. Чему равно ускорение силы тяжести на этой планете, если длина маятника 0,4 м?

Ответ:  $g_{\text{п}} = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 3.16.** К оси подвижного легкого блока, подвешенного на невесомой нерастяжимой нити  $AB$ , соединенной с двумя пружинами жесткостью  $k_1 = 10$  Н/м и  $k_2 = 20$  Н/м, прикреплено тело массой  $m = 100$  г (см. рисунок).



Блок может свободно скользить по нити. Пренебрегая трением в оси блока, определите период малых колебаний тела.

Ответ:  $T = 0,38$  с.

**Задача 3.17.** В маятниковых часах используется математический маятник с периодом колебаний 1 с. Часы помещают в ракету, которая начинает подниматься с постоянным ускорением. Чему равно это ускорение, если за 7 с подъема маятник часов совершает 8 полных колебаний?

Ответ:  $a = 3$  м/с.

**Задача 3.18.** На двух параллельных нитях подвешены одинаковые упругие шарики так, что они соприкасаются друг с другом и их центры находятся на одном уровне. Нить первого шарика длиной 40 см отводят на небольшой угол и отпускают. Через какое время после этого произойдет второе столкновение шариков, если длина нити второго шарика 10 см? Принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, ответ представить в мс.

Ответ:  $t = 628$  мс.

**Задача 3.19.** К динамометру, закрепленному вертикально, подвесили груз. При этом груз стал совершать гармонические колебания с циклической частотой 10 рад/с. Найдите деформацию пружины динамометра после полного прекращения колебаний груза. Ответ представить в см.

Ответ:  $\Delta l = 10$  см.

**Задача 3.20.** Небольшой шарик, подвешенный на легкой пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой 2 см. Полная энергия колебаний 0,3 мДж. При каком смещении от положения равновесия на шарик действует возвращающая сила 22,5 мН? Ответ представьте в мм.

Ответ:  $x = 15$  мм.

**Задача 3.21.** Стекло и деревянные шары, подвешенные на одинаковых пружинах, совершают колебания в вертикальной плоскости. Определите отношение периодов колебаний этих шаров, если радиус стеклянного шара в 4 раза меньше радиуса деревянного. Плотность стекла 2400 кг/м<sup>3</sup>, плотность дерева 600 кг/м<sup>3</sup>.

Ответ:  $T_1/T_2 = 1/4$ .

**Задача 3.22.** Телу массой  $m$ , подвешенному на пружине жесткостью  $k$ , в положении равновесия сообщают скорость  $v$ , направленную вертикально вниз. Определите путь, пройденный телом, за промежуток времени от  $t_1 = T/8$  до  $t_2 = T/4$ , считая возникающие колебания гармоническими.

Ответ:  $l = v \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Задача 3.23.** Найдите период вертикальных гармонических колебаний бутылки, плавающей на поверхности воды в вертикальном положении дном вниз, если ее масса 300 г, площадь дна 30 см<sup>2</sup>. Трением пренебречь, принять  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Ответ представить в мс.

Ответ:  $T = 628$  мс.

**Задача 3.24.** Человек, стоящий на берегу моря, определил, что расстояние между двумя следующими друг за другом гребнями, равно  $\Delta r = 12$  м. Кроме того, он подсчитал, что за 75 с мимо него прошло 16 волновых гребней. Определите скорость распространения волн.

Ответ:  $v = 2,4$  м/с.

**Задача 3.25.** Волна с частотой 10 Гц распространяется в некоторой среде, причем разность фаз в двух точках, находящихся на расстоянии 1 м одна от другой на одной прямой с источником колебаний, равна  $\pi$  рад. Найдите скорость распространения волны в этой среде.

Ответ:  $v = 20$  м/с.

**Задача 3.26.** Уравнение волны имеет вид  $y(x, t) = \sin 2,5\pi t$ . Найдите смещение от положения равновесия, скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии  $x = 20$  м от источника колебаний, для момента времени  $t = 1$  с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний  $v = 100$  м/с.

Ответ:  $x = 0$ ;  $v = 7,85$  м/с;  $a = 0$  м/с<sup>2</sup>.

---

## 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 4.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 4.1.1. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока и напряжения, если их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света  $c$ . Пусть  $l$  — длина электрической цепи. Тогда время распространения сигнала в данной цепи  $t = l/c$ . Если  $t \ll T$  ( $T$  — период колебаний электрического тока), то такие токи называются *квазистационарными*. При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным. Для частоты  $f = 50$  Гц условие квазистационарности выполняется при длине цепи  $\sim 100$  км.

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что токи квазистационарны.

#### 4.1.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ БЕЗ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В цепи, содержащей индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , могут возникать электрические колебания. Такая цепь называется *колебательным контуром* (рис. 4.1.1).

Колебания в контуре можно вызвать, либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле).

Поскольку активное сопротивление контура  $R = 0$ , полная энергия остается постоянной. Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна, и наоборот. Рассмотрим процессы, происходящие в колебательном контуре, в сравнении с колебаниями маятника (рис. 4.1.2).

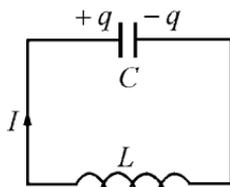


Рис. 4.1.1

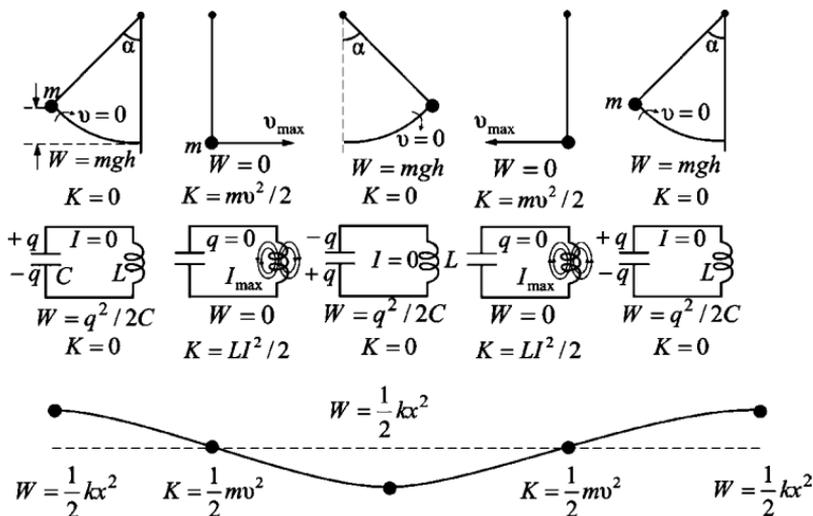


Рис. 4.1.2

Из сопоставления электрических и механических колебаний (рис. 4.1.2) следует, что энергия электрического поля  $W = \frac{q^2}{2C}$  аналогична потенциальной энергии  $mgh$  или  $1/2 kx^2$ , а энергия магнитного поля  $\frac{LI^2}{2}$  аналогична кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ ;  $L$  играет роль массы  $m$ ;  $1/C$  — роль коэффициента жесткости  $k$ . Наконец, заряду  $q$  соответствует смещение маятника из положения равновесия  $x$ , силе тока  $I$  — скорость  $v$ , напряжению  $U$  — ускорение  $a$ .

Ниже мы увидим, что эта аналогия сохраняется и в математических уравнениях. В соответствии со вторым

законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии) можно записать

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.1.1)$$

Но, так как  $I = \frac{dq}{dt}$ , тогда получим  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ .

Введем обозначение:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — *собственная частота контура*, отсюда получим *основное уравнение колебаний в контуре*:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.1.2)$$

Решением этого уравнения является выражение вида

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.1.3)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с собственной частотой контура  $\omega_0$ .

Для периода колебаний справедлива *формула Томсона*:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC};$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (4.1.4)$$

Продифференцируем выражение (4.1.3) по времени и получим выражение для тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.1.5)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда на  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} = \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.1.6)$$

Таким образом, ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ . На индуктивности, наоборот, напряжение опережает ток на  $\pi/2$ :

$$U_m = \frac{q_m}{C}; \quad I_m = \omega_0 q_m; \quad U_m C = \frac{I_m}{\omega_0};$$

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (4.1.7)$$

где  $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{вол}}$  — волновое сопротивление [Ом].

Выражение (4.1.7) — это закон Ома для колебательного контура.

#### 4.1.3. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением (рис. 4.1.3). Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.

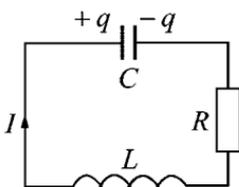


Рис. 4.1.3

По второму закону Кирхгофа:

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}; \quad (4.1.8)$$

$$\frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Пусть  $\beta = \frac{R}{2L}$  — коэффициент затухания и, учитывая, что собственная частота контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , получим уравнение затухающих колебаний в контуре с  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.1.9)$$

При  $\beta \leq \omega_0$ , т. е.  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega$  — частота затухающих колебаний контура,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

т. е.  $\omega < \omega_0$ .

На рисунке 4.1.4 показан вид затухающих колебаний заряда  $q$  и силы тока  $I$ . Если сравнить электрические затухающие колебания с механическими (рис. 3.3.1), то хорошо видны общие закономерности этих явлений: колебаниям  $q$  соответствует  $x$  — смещение маятника из положения равновесия, силе тока  $I$  — скорость  $v$ .

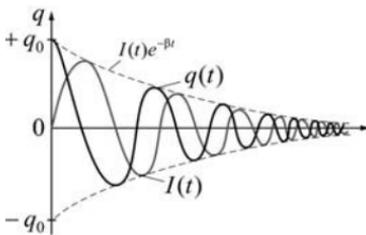


Рис. 4.1.4

Затухание принято характеризовать **логарифмическим декрементом затухания**  $\chi$ :

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (4.1.10)$$

где  $A$  — амплитуда  $I$ ,  $U$ ,  $q$ .

Найдем выражение  $\chi$  для электрических колебаний.

Так как

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Тогда

$$\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}.$$

Поскольку  $R$ ,  $L$ ,  $\omega$  определяются параметрами контура, следовательно,  $\chi$  является **характеристикой контура**.

Если затухание невелико, т. е.  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , то  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда

$$\chi = \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (4.1.11)$$

Колебательный контур часто характеризуют **добротностью**  $Q$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная  $\chi$ :  $Q = \frac{\pi}{\chi}$ , а так как  $\chi = \frac{1}{N}$ , где  $N$  — число колебаний, то  $Q = \pi N$ , т. е. **добротность  $Q$  тем больше, чем больше колебаний успевают совершиться, прежде чем амплитуда уменьшится в  $e$  раз.**

Добротность определяется и по-другому:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (4.1.12)$$

где  $W$  — энергия контура в данный момент;  $\Delta W$  — убыль энергии за один период, следующий за этим моментом.

При  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , т. е. при  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$  происходит **апериодический разряд** (рис. 4.1.5).

Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется **критическим сопротивлением**  $R_k$ . Найдем это сопротивление из равенства

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}.$$

Отсюда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{вол}}, \quad (4.1.13)$$

где  $R_{\text{вол}}$  — волновое сопротивление, определяемое параметрами  $L$  и  $C$ .

#### 4.1.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодическое воздействие. Рассмотрим этот вопрос кратко, используя аналогию с механическими колебаниями.

К контуру, изображенному на рисунке 4.1.6, подадим переменное напряжение  $U$ :

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (4.1.14)$$

Тогда уравнение (4.1.9) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (4.1.15)$$

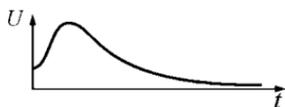


Рис. 4.1.5

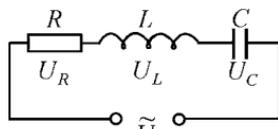


Рис. 4.1.6

Это **уравнение вынужденных электрических колебаний**, которое совпадает с аналогичным уравнением механических колебаний. Его решение имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.1.16)$$

где

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}.$$

Величина  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  называется **полным сопротивлением цепи**, или **импедансом** (от лат. impedio — препятствую). Импеданс представляет комплексное сопротивление для гармонических процессов  $Z = R + iX$ , где  $R$  — **активное сопротивление**, отвечающее за потерю мощности в цепи;  $X$  — **реактивное сопротивление**, определяющее величину энергии, пульсирующей в цепи с частотой  $2\omega$ :

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

На рисунке 4.1.7 изображены идеальные элементы цепи и соответствующий им импеданс.

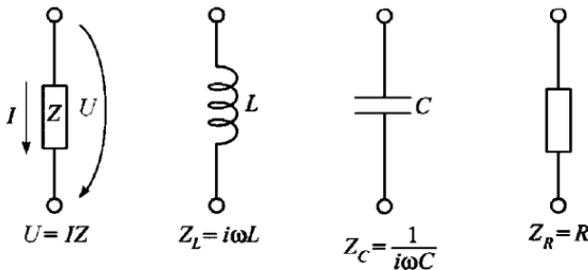


Рис. 4.1.7

#### РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

При последовательном соединении  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в контуре (рис. 4.1.6), когда  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , наблюдается **резонанс**. При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ( $\varphi = 0$ ).

**Резонансная частота** при напряжении на конденсаторе  $U_C$  равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{и} \quad Z = R.$$

Тогда  $U = U_R$ , а  $U_C$  и  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется **резонансом напряжения**, или **последовательным резонансом**.

Резонансные кривые для напряжения  $U$  изображены на рисунке 4.1.8. Они сходны с резонансными кривыми для ускорения  $a$  при механических колебаниях.

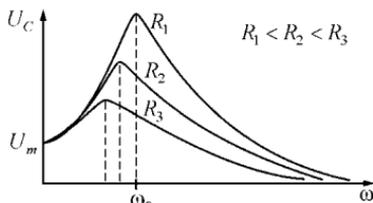


Рис. 4.1.8

Резонансные напряжения определяются выражением

$$U_{L_{\text{рез}}} = U_{C_{\text{рез}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m.$$

Таким образом, при последовательном резонансе на емкости можно получить усиление напряжения с амплитудой  $QU \gg U$  в узком диапазоне частот. Этот эффект широко используется в различных усилительных устройствах.

#### РЕЗОНАНС ТОКОВ

В цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные емкость и индуктивность (рис. 4.1.9), наблюдается другой тип резонанса.

Поскольку в таком контуре сопротивлением  $R$  можно пренебречь ( $R = 0$ ), то выражение для тока через емкость  $I_1$  примет вид

$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (4.1.17)$$

где

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C}; \quad \text{tg} \varphi_1 = -\infty,$$

так как

$$\varphi_1 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

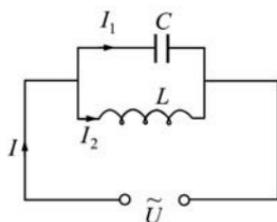


Рис. 4.1.9

Аналогично для тока через индуктивность (при  $R = 0$ ,  $C = \infty$ ):

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2), \quad (4.1.18)$$

где

$$I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = +\infty,$$

так как

$$\varphi_2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Из сравнения (4.1.17) и (4.1.18) вытекает, что разность фаз в ветвях цепи  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , т. е. токи противоположны по фазе:

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|. \quad (4.1.19)$$

Если  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то  $I_{m1} = I_{m2}$  и  $I_m = 0$ .

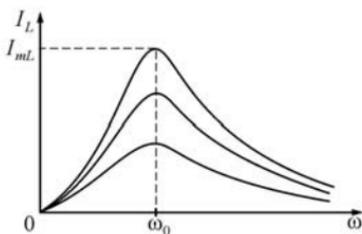


Рис. 4.1.10

Резонансные кривые для тока изображены на рисунке 4.1.10. Они соответствуют резонансным кривым для скорости при механических колебаниях.

Явление уменьшения амплитуды тока во внешней цепи и при этом **резкого увеличения**

**тока в катушке индуктивности** при приближении частоты приложенного напряжения  $\omega$  к  $\omega_{\text{рез}}$  называется **резонансом токов**, или **параллельным резонансом**.

Резонанс токов используется в резонансных усилителях, приемниках, а также в индукционных печах для разогрева металла.

#### 4.1.5. МОЩНОСТЬ, ВЫДЕЛЯЕМАЯ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенного значения напряжения на силу тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где  $U(t) = U_m \cos \omega t$  и  $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Раскрыв  $\cos(\omega t - \varphi)$ , получим

$$\begin{aligned} P(t) &= I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = \\ &= I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее *среднее значение за период колебания*. Учитывая, что

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}; \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0,$$

получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi, \quad (4.1.20)$$

где  $U_m \cos \varphi = RI_m$ , поэтому среднее значение мощности будет равно

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_m^2. \quad (4.1.21)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .

Величины  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  и  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  называются действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (4.1.21) можно записать в виде

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi, \quad (4.1.22)$$

где множитель  $\cos \varphi$  называется *коэффициентом мощности*.

Формула (4.1.22) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление  $X$ , то  $\cos \varphi = 1$  и  $P = UI$ . Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R = 0$ ), то  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

Если  $\cos \varphi$  имеет значение существенно меньше единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока  $I$ , что

приводит либо к выделению джоулевой теплоты, либо требует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому *на практике всегда стремятся увеличить  $\cos\varphi$* . Наименьшее допустимое значение  $\cos\varphi$  для промышленных установок составляет примерно 0,85.

ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ.  
УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему возможен единый подход при изучении колебаний различной физической природы?
2. Что такое периодические процессы? Гармонические колебания? Свободные колебания?
3. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре? Чем определяется их период?
5. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.
6. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами?
7. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их для механических и электромагнитных колебаний.
8. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?
9. Что такое коэффициент затухания? Декремент затухания? Логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
10. При каких условиях наблюдается аperiodическое движение?
11. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Проведите аналогию для механических и электромагнитных колебаний.
12. Нарисуйте и проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения (заряда) и скорости (тока). В чем их аналогия?
13. Почему добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы?
14. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?
15. Что называется резонансом? Какова его роль?
16. От чего зависит индуктивное сопротивление? Емкостное сопротивление? Что называется реактивным сопротивлением?

17. Какие характерные признаки резонанса напряжений, резонанса токов? Приведите графики резонанса токов и напряжений.
18. Проведите аналогию механических и электромагнитных колебаний при резонансе.
19. Как вычислить мощность, выделяемую в цепи переменного тока? Что называется коэффициентом мощности?

## 4.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### 4.2.1. ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Возможность существования электромагнитных волн предсказывал еще Майкл Фарадей в 1832 г., обобщая известные к тому времени данные по изучению электричества и магнетизма. Теоретически обосновал это предположение английский физик Дж. Максвелл.

В своей теории Максвелл дал определение электромагнитного поля и предсказал новый эффект: существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (электромагнитных волн) и его распространение в пространстве со скоростью света. Теоретически вычислил давление света.

Из теории Максвелла следует, что изменяющееся электрическое поле порождает в пустом пространстве магнитное поле. Изменяющееся магнитное поле приводит в свою очередь к появлению изменяющегося электрического поля и т. д. Анализируя свои уравнения, Максвелл пришел к заключению, что конечным итогом подобной связи изменяющихся полей будет появление волны, которая содержит электрическое и магнитное поля и способна распространяться в пустом пространстве.

Впервые электромагнитные волны были обнаружены в 1887 г. Генрихом Герцем, который в качестве источника электромагнитных колебаний использовал колебательный контур.

В колебательном контуре, образованном конденсатором  $C$  и катушкой  $L$  (см. рис. 4.2.1а), электрическое поле сосредоточено в зазоре между обкладками, а магнитное — внутри катушки.

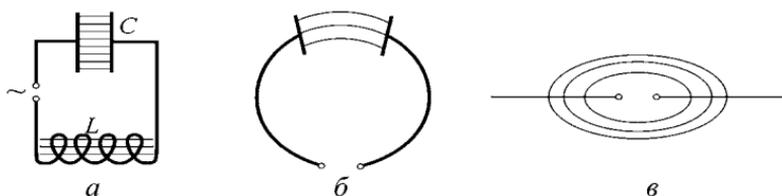


Рис. 4.2.1

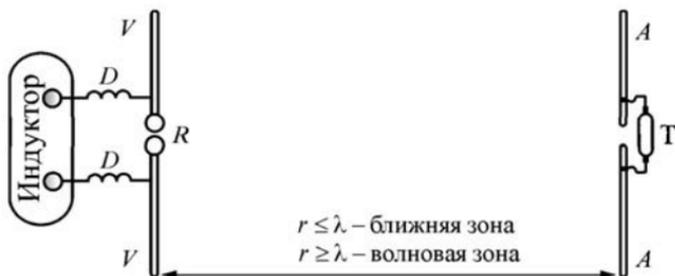


Рис. 4.2.2

В окружающем конденсатор и катушку пространстве поля практически равны нулю, поэтому заметного излучения электромагнитных волн не происходит. Для того чтобы контур излучал волны, необходимо увеличить расстояние между обкладками конденсатора и между витками катушки. В пределе мы приходим к прибору, названному впоследствии *вибратором Герца*. В процессе видоизменений, изображенных на рисунке 4.2.1б, в, сильно уменьшается емкость и индуктивность контура, что также выгодно, так как приводит к увеличению частоты колебаний, а следовательно, к уменьшению длины волны. С волнами меньшей длины легче экспериментировать. В своих исследованиях Герц достиг частот порядка  $10^8$  Гц и получил волны, длина которых составляла от 10 до 0,6 м.

Вибратор Герца имел несколько модификаций. В одной из них (рис. 4.2.2) он состоял из двух одинаковых металлических стержней  $V-V$ , разделенных регулируемым искровым промежутком  $R$  и соединенных через дроссели  $D$  с индуктором — источником высокого напряжения.

Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробойного значения, он пробивался электрической ис-

крой, замыкающей обе половины вибратора. В вибраторе возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. Максимальной интенсивностью обладали колебания с пучностью тока посередине вибратора и с длиной волны, равной примерно удвоенному расстоянию между концами вибратора (полуволновой вибратор). Уходу колебаний в индуктор препятствовали дроссели, соединяющие элементы вибратора с индуктором.

Для обнаружения электромагнитных волн Герц использовал *резонаторы* в виде проволочной рамки и иных форм. Наиболее простым являлся резонатор А–А (рис. 4.2.2), по форме повторяющий излучающий вибратор, а поэтому имеющий те же собственные частоты колебаний.

Когда электромагнитная волна достигает резонатора, она возбуждает в нем токи. Появление этих токов сопровождается проскакиванием искры в маленьком зазоре в центре резонатора или возбуждением свечения в небольшой газоразрядной трубке Т, подключенной к обоим половинкам резонатора.

Таким образом, *ЭМВ генерируются колеблющимися, т. е. движущимися с ускорением, электрическими зарядами*. Справедливо и такое утверждение: *движущийся с ускорением электрический заряд испускает электромагнитные волны*.

#### 4.2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭМВ

Одним из важнейших следствий уравнений Максвелла является существование ЭМВ. Можно показать, что для однородной и изотопной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что *векторы напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного поля удовлетворяют волновым уравнениям типа:*

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (4.2.1)$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (4.2.1), описывает некоторую волну. Следовательно, электромаг-

нитные поля действительно могут существовать в виде ЭМВ.

Фазовая скорость ЭМВ определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (4.2.2)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  — скорость света в вакууме;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные;  $\varepsilon$  и  $\mu$  — соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды.

Если подставить в выражение для  $c$  известные значения электрической и магнитной постоянных:  $\varepsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 1,256637061 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ , находим  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  — *скорость распространения электромагнитного поля в вакууме, которая равна скорости света*. Причем электромагнитное поле распространяется в виде периодических изменений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые взаимно перпендикулярны и перпендикулярны вектору скорости  $\vec{v}$  распространения электромагнитного поля.

Полученные Максвеллом результаты показали, что в вакууме *электромагнитное возмущение* распространяется со скоростью света и *представляет поперечные колебания*. В веществе скорость распространения электромагнитных возмущений меньше в  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  раз. Все это позволило Максвеллу сделать фундаментальный вывод об электромагнитной природе света.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде зависит от ее электрической и магнитной проницаемости. Величину  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  называют *абсолютным показателем преломления*. С учетом последнего имеем:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n} \quad \text{и} \quad n = \frac{c}{v}.$$

Следовательно, *показатель преломления* есть физическая величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их скорости в среде.

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют правовинтовую систему.

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда колеблются в одинаковых фазах, причем мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu \mu_0} H.$$

Следовательно,  $E$  и  $H$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д.

От уравнений (4.2.1) можно перейти к уравнениям:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (4.2.3)$$

где  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают лишь то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Уравнениям (4.2.3) удовлетворяют, в частности, плоские монохроматические электромагнитные волны (ЭМВ одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{и} \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (4.2.4)$$

где  $E_0$  и  $H_0$  — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны;  $\omega$  — круговая частота;  $k = \frac{\omega}{v}$  — волновое число;  $\varphi$  — начальная фаза колебаний в точках с координатой  $x = 0$ . В уравнениях (4.2.4) начальные фазы одинаковы, т. е. колебания электрического и магнитного векторов в ЭМВ происходят в одинаковых фазах.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие **заключения**:

- векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны, так как  $\vec{k}$  и  $\vec{v}$  направлены одинаково;
- электромагнитная волна является поперечной;
- электрическая и магнитная составляющие распространяются в одном направлении;
- векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  колеблются в одинаковых фазах.

#### 4.2.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭМВ

Как было сказано выше, экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании ЭМВ была осуществлена Герцем. Для получения волн Герц применял разные модификации изобретенного им вибратора, который возбуждал ряд цугов слабозатухающих волн (см. рис. 4.2.2).

В вибраторе во время колебаний устанавливалась стоячая волна тока и напряжения. Сила тока  $I$  была максимальна в середине вибратора (пучность тока) и обращалась в нуль на его концах (узлы тока). Напряжение  $U$  в середине вибратора имело узел на концах пучности. Таким образом, вибратор аналогичен струне, колеблющейся с основной (т. е. с наименьшей) частотой. Длина  $\lambda$  излучаемых вибратором волн приблизительно в 2 раза превышала длину вибратора (*полуволновой вибратор*).

Исследования излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Так как длина вибратора была равна  $\lambda/2$ , вследствие резонанса колебания в нем достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр.

В ходе своих исследований Герц обнаружил, что если расстояние между вибратором и приемником (резонатором) меньше одного метра, то поле вибратора в этой области соответствует излучению поля диполем и убывает обратно пропорционально кубу расстояния (эту зону назвали *ближней зоной*, здесь  $r \leq \lambda$ ). Однако на расстояниях более трех метров поле убывает значительно медленнее (это волновая зона, где  $r \geq \lambda$ ) и неодинаково в различных направлениях. В направлении оси вибратора поле практически исчезает на расстоянии 4 метров, а в направлении, перпендикулярном к оси вибратора, достигает расстояния 12 метров и более (рис. 4.2.3).

Для объяснения этих результатов Герц теоретически, на основе электродинамики Максвелла, анализирует из-

лучение вибратора. Здесь он впервые получает результат, что волновое поле на дальних расстояниях убывает очень медленно — обратно пропорционально расстоянию, а само поле распространяется со скоростью света. Векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  максимальны в направлениях, перпендикулярных направлению колебаний заряда в вибраторе; вдоль направления колебаний заряда — над и под антенной — поля обращаются в нуль. В результате своих исследований Герц дополнил теорию Максвелла теорией электромагнитного излучения, впервые получил электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом, и доказал их тождество с волнами света.

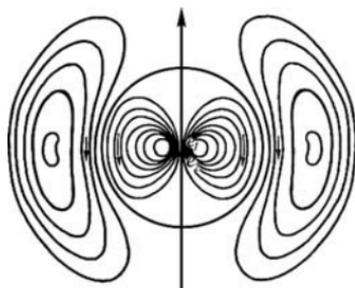


Рис. 4.2.3

Для исследования свойств электромагнитных волн Герц использовал металлические параболические зеркала и большую призму из твердой смолы — асфальта с основанием 1,2 м и высотой 1,5 м с преломляющим углом  $30^\circ$  (рис. 4.2.4а).

В своих опытах Герц установил полную аналогию электромагнитных и световых волн. Было показано, что для электромагнитных волн справедлив закон отражения и преломления. Кроме того, опыты Герца подтвердили соотношение  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , следующее из теории Максвелла.

Поместив излучающий вибратор в фокусе вогнутого зеркала, Герц получил направленную плоскую волну. На ее пути он расположил плоское зеркало и получил таким

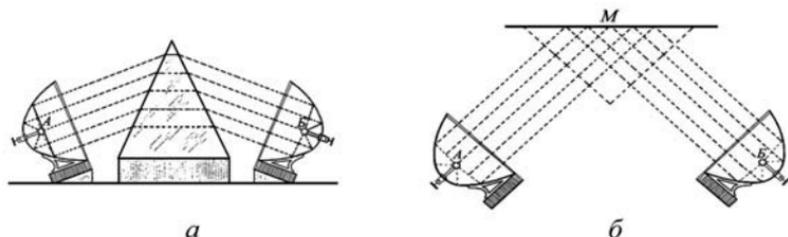


Рис. 4.2.4

образом стоячую волну. Измерив расстояние между узлами и пучностями волны, Герц нашел длину волны  $\lambda$ . Произведение  $\lambda$  на частоту колебаний вибратора  $\nu$  дало скорость ЭМВ, которая оказалась близкой к скорости света  $c$ . Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки проходили перпендикулярно к вектору  $\vec{E}$ , волна проникала сквозь решетку без помех. При расположении проволоки параллельно вектору  $\vec{E}$  волна сквозь решетку не проходила. Экспериментально была подтверждена поперечность ЭМВ.

Выводы, которые следовали из теории Максвелла.

Во-первых: *в любой точке векторы напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения  $\vec{v}$ .*

Во-вторых: *поля изменяют свое направление в пространстве: в одних точках вектор  $\vec{H}$  направлен к плоскости страницы, в других — от нее; аналогично ведет себя и вектор  $\vec{E}$ .*

В-третьих: *электрическое и магнитное поля находятся в фазе, т. е. они достигают максимума и обращаются в нуль в одних и тех же точках.*

Герц экспериментально подтвердил выводы теории Максвелла.

Если ЭДС генератора изменяется по синусоидальному закону, то и напряженность электрического поля и магнитного поля будет изменяться по синусоидальному закону. Строго говоря, это справедливо в точках, достаточно удаленных от источника (в волновой зоне, когда  $r > \lambda$ ).

Отметим также, что в ходе исследований свойств электромагнитных волн Герц сделал еще одно важнейшее открытие — *фотоэлектрический эффект* (вырывание электрических зарядов с поверхности металлов под действием света).

Опыты Герца были продолжены П. Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил ЭМВ длиной 4–6 мм и исследовал

прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн.

Дальнейшее развитие методики эксперимента позволило А. А. Глаголевой-Аркадьевой в 1923 г. сконструировать массовый излучатель, в котором короткие ЭМВ, возбужденные колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр между металлическими опилками, взвешенными в масле. Так были получены волны длиной  $\lambda$  от 50 мм до 80 мкм. Тем самым было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением. Позднее были получены волны в очень широком диапазоне частот.

Усовершенствовав вибратор Герца и применив свой приемник, профессор Петербургского электротехнического института А. С. Попов в 1896 г. впервые в мире наладил опытную радиотелеграфную связь и осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (первыми переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике. В 1899 г. Попов довел расстояние беспроволочной передачи сигналов до 50 км.

В 1901 г. была осуществлена радиотелеграфная связь через Атлантический океан. Изобретение электронных ламп (1904–1907) и применение их для генерирования незатухающих колебаний (1913) сделали возможным развитие радиотелеграфии и радиовещания. В 1920–1930-х гг. весь мир покрылся сетью мощных радиопередающих станций. Человечество вступило в новую эру коммуникационных отношений. Эффективность и невиданная до сих пор скорость прогресса в этой области были обеспечены фундаментальной теоретической базой, созданной Дж. Максвеллом и развитой в исследованиях Г. Герца, А. С. Попова, Г. Маркони и многих других ученых и инженеров.

ЭМВ отличаются друг от друга по способам генерации и регистрации, а также по своим свойствам. По этим признакам их делят на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и  $\gamma$ -излучение. Шкала ЭМВ изображена на рисунке 4.2.5.

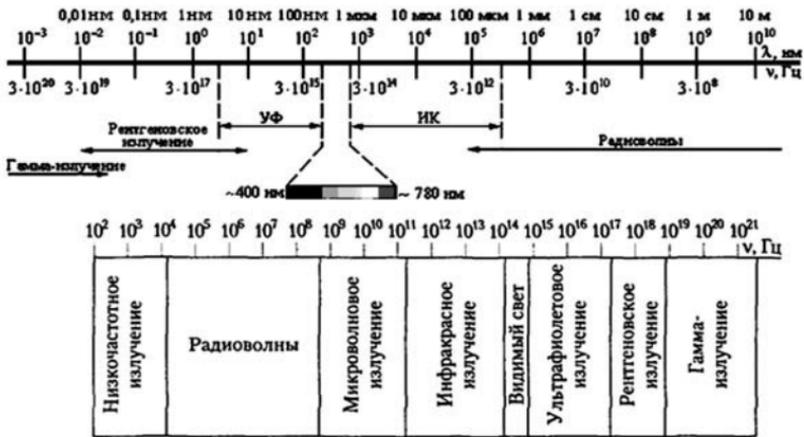


Рис. 4.2.5

Следует отметить, что границы между различными типами ЭМВ в значительной степени условны, так как при пограничных значениях  $\nu$  и  $\lambda$  эти волны мало чем отличаются друг от друга.

#### 4.2.4. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Мы уже много раз показывали, что электромагнитное поле обладает энергией. Значит, распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии (подобно тому, как распространение упругих волн в веществе связано с переносом механической энергии). Сама возможность обнаружения ЭМВ указывает на то, что они переносят энергию.

Для характеристики переносимой волной энергии русским ученым Н. А. Умовым были введены понятия о скорости и направлении движения энергии, о потоке энергии. Спустя десять лет после этого, в 1884 г., английский ученый Джон Пойнтинг описал процесс переноса энергии *с помощью вектора плотности потока энергии*.

Введем вектор  $d\vec{w} = \vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}$  — приращение плотности электромагнитной энергии, где сама величина  $w$  определяется интегралом

$$w = \int (\vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}).$$

Объемная плотность энергии  $w$  электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_э$  и  $w_м$  электрического и магнитного полей:

$$w = w_э + w_м = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Учитывая, что  $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ , получим, что плотность энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинакова, т. е.  $w_э = w_м$ . Поэтому

$$w = 2w_э = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \sqrt{\mu_0 \mu} E H.$$

Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$  распространения волны в среде, получим модуль **плотности потока энергии** — *поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени*:

$$S = wv = EH. \quad (4.2.5)$$

Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора  $[\vec{E}, \vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$  (рис. 4.2.6).

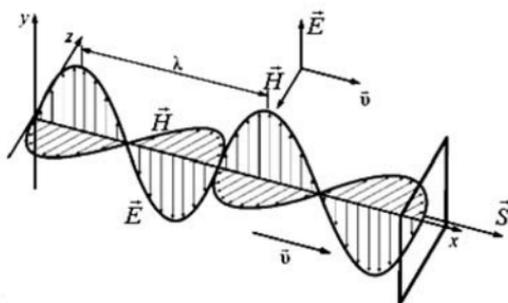


Рис. 4.2.6

**Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова — Пойнтинга:**

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.2.6)$$

Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

В сферической электромагнитной волне, излучаемой ускоренно двигающимися зарядами, векторы  $\vec{H}$  направлены по параллелям, векторы  $\vec{E}$  — по меридианам, а поток энергии  $\vec{S}$  — по нормали  $\vec{n}$  (рис. 4.2.7).

Вектор Умова — Пойнтинга зависит от пространства и времени, так как от него зависят модули векторов напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому часто пользуются параметром, называемым **интенсивностью**, — модуль среднего значения вектора Умова — Пойнтинга:

$$J = |\langle \vec{S} \rangle|. \quad (4.2.7)$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды:

$$J \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (4.2.8)$$

Зависимость интенсивности излучения от направления называют **диаграммой направленности**. Такая диаграмма для линейного излучателя показана на рисунке 4.2.8.

Как доказал Герц, диполь сильнее всего излучает в направлении, перпендикулярном по отношению к собственному направлению.

Ускоренно двигающиеся заряды излучают электромагнитную энергию в окружающее пространство. Вектор  $\vec{S}$

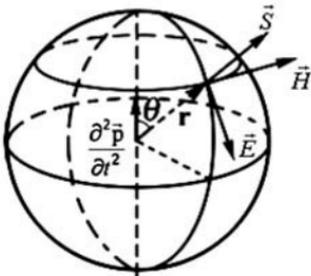


Рис. 4.2.7

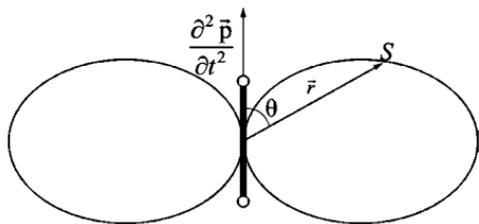


Рис. 4.2.8

направлен вдоль радиуса  $\vec{r}$  и убывает обратно пропорционально  $r^2$ . Излучение максимально в направлении, перпендикулярном вектору  $\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2}$ , и отсутствует вдоль этого вектора. Поэтому диаграмма направленности диполя имеет вид двух симметричных лепестков, как показано на рисунке 4.2.8.

#### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ МАССА И ИМПУЛЬС

Существование давления ЭМВ приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс.

Выражая импульс как  $p = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью света  $c$ ), получим

$$p = mc = \frac{E}{c}.$$

Отсюда

$$E = mc^2. \quad (4.2.9)$$

Это соотношение между массой и энергией ЭМП является универсальным законом природы, справедливым для любых тел, независимо от их внутреннего строения.

Импульс электромагнитного поля, связанного с движущейся частицей, — *электромагнитный импульс* — оказался пропорциональным скорости частицы  $v$ , что имеет место и в выражении для обычного импульса  $mv$ , где  $m$  — инертная масса заряженной частицы. Поэтому коэффициент пропорциональности в полученном выражении для импульса  $\vec{p}$  называют *электромагнитной массой*:

$$m_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 4\pi\epsilon_0}, \quad (4.2.10)$$

где  $e$  — заряд движущейся частицы;  $a$  — ее радиус.

И даже если тело не обладает никакой иной массой, оказывается, что между импульсом и скоростью заряженной частицы существует соотношение

$$\vec{p} = m_{\text{эл}} \vec{v}. \quad (4.2.11)$$

Это соотношение как бы раскрывает происхождение массы — это электродинамический эффект. Движение заряженной частицы сопровождается возникновением магнитного поля. Магнитное поле сообщает телу дополнительную инертность — при ускорении затрачивается работа на создание магнитного поля, при торможении — работа против затормаживающих сил индукционного происхождения. По отношению к движущемуся заряду электромагнитное поле является средой, неотделимой от заряда. В общем случае можно записать, что полный импульс равен сумме механического и электромагнитного импульсов; возможно, что другие поля вносят и иные вклады в полную массу частицы, но определенно в полной массе есть электромагнитная часть:

$$m = m_{\text{мех}} + m_{\text{эл}}; \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Если учесть релятивистские эффекты сокращения длины и преобразования электрических и магнитных полей, то для электромагнитного импульса получается также релятивистски инвариантная формула:

$$\vec{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (4.2.12)$$

Таким же образом изменяется релятивистский механический импульс.

#### ВОПРОСЫ К ЧИТАТЕЛЮ. УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое электромагнитная волна? Какова скорость ее распространения?
2. Что такое поперечная волна; продольная? Когда они возникают?
3. Что такое волновой фронт; волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число? Фазовая и групповая скорости?
6. При каких условиях возникает интерференция волн? Назовите условия интерференционных максимума и минимума.
7. Две когерентные волны с одинаковым периодом распространяются в одном направлении. Разность хода равна четному числу полуолн. Что получится в результате интерференции?
8. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн?
9. Что может служить источником электромагнитных волн?

10. Каковы физические процессы, приводящие к возможности существования электромагнитных волн?
11. Почему Герц в своих опытах использовал открытый колебательный контур?
12. Как можно представить себе шкалу электромагнитных волн и каковы источники излучения разных видов волн?
13. Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?
14. Почему слагаемое  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в уравнении Максвелла  $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$  нужно для понимания распространения электромагнитной волны?
15. Запишите волновое уравнение для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  переменного электромагнитного поля. Проанализируйте его решения и объясните физический смысл.
16. Как определяется фазовая скорость электромагнитных волн?
17. Как определить объемную плотность энергии в электромагнитной волне?
18. В чем заключается физический смысл вектора Умова — Пойнтинга? Чему он равен?
19. Почему важна задача об излучении диполя?
20. В чем заключается физический смысл диаграммы направленности излучения диполя?

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 4.1.** Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 30 мкГн и плоского конденсатора с площадью пластин 100 см<sup>2</sup>. Расстояние между пластинами 0,1 мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной 750 м? Ответ округлите до целого числа.

**Дано:**

$$L = 30 \text{ мкГн} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$$

$$S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2$$

$$d = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м}$$

$$\lambda = 750 \text{ м}$$

---


$$\varepsilon = ?$$

**Решение:**

Резонансная частота  $\omega_p$  колебаний в контуре равна собственной частоте  $\omega_0$  колебательного контура:

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$\omega_p = 2\pi\nu_p = 2\pi \frac{c}{\lambda_p}.$$

Приравняем правые части этих уравнений:

$$2\pi \frac{c}{\lambda_p} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad 4\pi^2 \frac{c^2}{\lambda_p^2} = \frac{1}{LC}.$$

Отсюда емкость конденсатора:

$$C = \frac{\lambda_p^2}{4\pi^2 c^2 L}.$$

Кроме того, емкость плоского конденсатора можно выразить через его геометрические размеры:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$

Приравняем правые части этих уравнений:

$$\frac{\lambda_p^2}{4\pi^2 c^2 L} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$

Из полученного выражения найдем диэлектрическую проницаемость среды между пластинами конденсатора:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_p^2 d}{4\pi c^2 \varepsilon_0 S};$$

$$\varepsilon = \frac{750^2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 5,9 \approx 6.$$

Ответ:  $\varepsilon = 6$ .

**Задача 4.2.** Контур состоит из катушки индуктивностью 28 мкГн, сопротивления 1 Ом и конденсатора емкостью 2222 пФ. Какую мощность будет потреблять контур, если в нем поддерживать незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе 5 В? Результат представьте в милливаттах и округлите до целого числа.

**Дано:**

$$L = 28 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$R = 1 \text{ Ом}$$

$$C = 2222 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$$

$$U_m = 5 \text{ В}$$

$$P = ?$$

**Решение:**

Мощность, которую будет потреблять контур, найдем из выражения

$$P = I_d^2 R,$$

где  $I_d$  — действующее значение

силы тока. Его можно определить через амплитудное значение силы тока:

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Тогда мощность контура:

$$P = \frac{I_m^2 R}{2}.$$

Закон сохранения энергии в колебательном контуре:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Тогда

$$I_m^2 = \frac{CU_m^2}{L}.$$

Отсюда мощность, потребляемая контуром:

$$P = \frac{CU_m^2 R}{2L};$$

$$P = \frac{2222 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 1}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-6}} = 992 \cdot 10^{-6} \text{ (Вт)} \approx 1 \text{ (мВт)}.$$

Ответ:  $P = 1$  мВт.

**Задача 4.3.** К сети переменного тока с действующим напряжением 220 В и частотой 50 Гц присоединена цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора сопротивлением 92 Ом, конденсатора емкостью 40 мкФ и катушки индуктивностью 0,1 Гн. Найдите амплитуду тока, протекающего в цепи. Ответ представьте в единицах СИ.

**Дано:**

$$U = 220 \text{ В}$$

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$R = 92 \text{ Ом}$$

$$C = 40 \text{ мкФ} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$$

$$L = 0,1 \text{ Гн}$$

---


$$I_{\max} = ?$$

**Решение:**

Запишем закон Ома для цепи переменного тока:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z} = \frac{U\sqrt{2}}{Z},$$

где  $U_{\max}$  — амплитуда напряжения;  $U$  — действующее напряжение;  $Z$  — полное сопротивление элект-

рической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где  $X_L = \omega L$  — реактивное индуктивное сопротивление катушки индуктивности;  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  — реактивное емкостное сопротивление конденсатора емкостью  $C$ .

$$I_{\max} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}};$$

$$I_{\max} = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{92^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}\right)^2}} = 3 \text{ (А)}.$$

Ответ:  $I_{\max} = 3 \text{ А}$ .

**Задача 4.4.** Рамка вращается в однородном магнитном поле и содержит 100 витков медного провода сечением  $0,5 \text{ мм}^2$ . Длина одного витка  $0,4 \text{ м}$ . Определите действующее значение силы тока в проводнике сопротивлением  $5,64 \text{ Ом}$ , присоединенном к концам рамки. Максимальная ЭДС, возникающая в рамке, равна  $2 \text{ В}$ . Ответ представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

**Дано:**

$$N = 100$$

$$S = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$$

$$l_1 = 0,4 \text{ м}$$

$$R_{\text{пр}} = 5,64 \text{ Ом}$$

$$E_{\max} = 2 \text{ В}$$

$$\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$$

$$I = ?$$

**Решение:**

Сопротивление медного провода:

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho l_1 N}{S} = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 0,4 \cdot 100}{5 \cdot 10^{-7}} = 1,36 \text{ (Ом)};$$

$$R_{\text{общ}} = R + R_{\text{пр}} = 1,36 + 5,64 = 7 \text{ (Ом)}.$$

Действующее значение силы тока можно найти через связь с максимальным значением силы тока:

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_{\max}}{\sqrt{2}R_{\text{общ}}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 7} = 0,2 \text{ (А)}.$$

Ответ:  $I = 0,2 \text{ А}$ .

**Задача 4.5.** В колебательном контуре происходят свободные незатухающие колебания с энергией 5 мДж. Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в 2 раза. Какую работу совершили при этом против электрических сил? Ответ представьте в миллиджоулях.

**Дано:**

$$W_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$$

$$d_2 > d_1$$

$$v_2 = 2v_1$$

---


$$A = ?$$

**Решение:**

Работа, совершаемая против сил электрического поля:

$$A = \Delta W = W_2 - W_1,$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — энергия электрического поля до и после раздвижения пластин.

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}; \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2}.$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{q^2 2C_2}{2C_1 q^2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d_2} \frac{d_1}{\varepsilon \varepsilon_0 S} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Отсюда

$$W_2 = W_1 \frac{d_1}{d_2}. \quad (1)$$

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 d}{S}; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = 2\pi\nu.$$

$$\begin{cases} 2\pi\nu_1 = \sqrt{\frac{d_1}{L\varepsilon\varepsilon_0 S}}; \\ 2\pi\nu_2 = \sqrt{\frac{d_2}{L\varepsilon\varepsilon_0 S}}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}} \quad \text{или} \quad \left( \frac{\nu_1}{2\nu_1} \right)^2 = \frac{d_1}{d_2}.$$

Отсюда  $d_2 = 4d_1$ .

Подставим найденное соотношение в уравнение (1):

$$W_2 = W_1 \cdot \frac{d_2}{d_1} = W_1 \cdot \frac{4d_1}{d_1} = 4W_1.$$

Тогда

$$A = W_2 - W_1 = 4W_1 - W_1 = 3W_1 = 3 \cdot 5 = 15 \text{ (мДж)}.$$

Ответ:  $A = 15$  мДж.

**Задача 4.6.** В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности 5 мА, а амплитуда колебаний заряда конденсатора 2,5 нКл. В некоторый момент времени заряд конденсатора 1,5 нКл. Определите силу тока в катушке в этот момент.

**Дано:**

$$\begin{aligned} I_{\max} &= 5 \text{ мА} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А} \\ q_{\max} &= 2,5 \text{ нКл} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \\ q &= 1,5 \text{ нКл} = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \end{aligned}$$

$$I = ?$$

Энергия магнитного поля:

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}.$$

Для некоторого произвольного момента времени можно записать закон сохранения энергии:

$$W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = W_{\text{эл max}}.$$

Учитывая приведенные выше выражения для энергии электрического и магнитного полей, получаем

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C}.$$

Выразим из данного уравнения ток:

$$LI^2 = \frac{1}{C}(q_{\max}^2 - q^2); \quad I = \sqrt{\frac{1}{LC}(q_{\max}^2 - q^2)}. \quad (1)$$

Для нахождения неизвестных нам значений индуктивности катушки  $L$  и емкости конденсатора  $C$  запишем закон сохранения энергии в идеальном колебательном кон-

туре для предельных моментов времени: когда вся энергия электромагнитного поля перешла в энергию магнитного поля и когда она вся перешла в энергию электрического поля:

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C}; \quad LC = \frac{q_{\max}^2}{I_{\max}^2}.$$

Подставим в (1):

$$I = \sqrt{\frac{I_{\max}^2}{q_{\max}^2} (q_{\max}^2 - q^2)} = \frac{I_{\max}}{q_{\max}} \sqrt{q_{\max}^2 - q^2};$$

$$I = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-9}} \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{6,25 - 2,25} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ (А)}.$$

Ответ:  $I = 4 \text{ мА}$ .

**Задача 4.7.** В электрической цепи (см. рисунок)  $C_1 = C_2 = 0,01 \text{ мкФ}$ . До замыкания ключа  $K$  напряжение на первом конденсаторе равно  $100 \text{ В}$ , второй конденсатор не заряжен. Определите амплитуду колебаний силы тока через катушку индуктивностью  $1 \text{ мкГн}$  после замыкания ключа. Активным сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до целого числа.

**Дано:**

$$C = C_1 = C_2 = 10^{-8} \text{ Ф}$$

$$U_1 = 220 \text{ В}$$

$$U_2 = 2$$

$$L = 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$R = 0$$

$$I_{\max} = ?$$

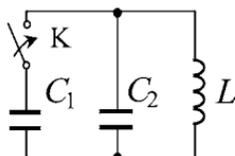
**Решение:**

До замыкания:

$$q_1 = C_1 U_1 = 100 \cdot 10^{-8} = 10^{-6} \text{ (Кл)}.$$

После замыкания ключа заряд на каждом конденсаторе:

$$q' = q'_1 = q'_2 = \frac{q_1}{2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ (Кл)}.$$



Соответственно напряжение на конденсаторе после замыкания ключа:

$$U_2 = \frac{q'}{C} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{10^{-8}} = 50 \text{ (В)}.$$

Найдем общую емкость конденсаторов при параллельном соединении:

$$C_0 = C_1 + C_2 = 2C = 2 \cdot 10^{-8} \text{ (Ф)}.$$

Так как после замыкания ключа в контуре будут происходить электромагнитные колебания, то запишем закон сохранения энергии для данного колебательного контура:

$$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{C_0 U_{\max}^2}{2}.$$

Выразим отсюда амплитуду колебаний силы тока:

$$I_{\max} = U_2 \sqrt{\frac{C_0}{L}} = 50 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-8}}{10^{-6}}} = 5\sqrt{2} = 7 \text{ (А)}.$$

Ответ:  $I_{\max} = 7 \text{ А}$ .

**Задача 4.8.** Колебательный контур (см. рисунок) содержит конденсатор емкостью  $C = 30 \text{ мкФ}$  и две катушки с индуктивностями  $L_1 = 700 \text{ нГн}$  и  $L_2 = 300 \text{ нГн}$ . Конденсатор при разомкнутом ключе  $K$  заряжен до напряжения  $100 \text{ В}$ . Найдите амплитуду колебаний тока в контуре после замыкания ключа  $K$ . Ответ представьте в килоамперах и округлите до десятых.

**Дано:**

$$C = 30 \text{ мкФ} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$$

$$L_1 = 700 \text{ нГн} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$$

$$L_2 = 300 \text{ нГн} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$$

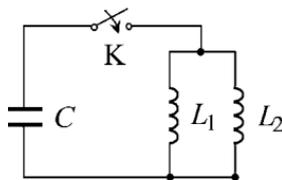
$$U_{\max} = 100 \text{ В}$$

$$I_{\max} = ?$$

**Решение:**

Катушки  $L_1$  и  $L_2$  соединены параллельно. Их суммарная индуктивность определяется соотношением

$$\frac{1}{L_0} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$



Отсюда

$$L_0 = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{7 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-7}}{7 \cdot 10^{-7} + 3 \cdot 10^{-7}} = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ (Гц)}.$$

Из закона сохранения энергии для колебательного контура:

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

найдем амплитуду колебаний силы тока после замыкания ключа  $K$ :

$$I_{\max} = U_{\max} \sqrt{\frac{C}{L}} = 100 \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-5}}{2,1 \cdot 10^{-7}}} \approx 1,2 \text{ (кА)}.$$

Ответ:  $I_{\max} = 1,2 \text{ кА}$ .

**Задача 4.9.** К источнику постоянного тока параллельно подключены конденсатор емкостью  $C = 20 \text{ мкФ}$  и катушка с индуктивностью  $L = 0,02 \text{ Гн}$ . При этом напряжение на конденсаторе  $U_1 = 100 \text{ В}$ , а сила тока в катушке  $I_1 = 2 \text{ А}$ . Затем источник отключают. Какой заряд будет на конденсаторе в момент, когда сила тока в катушке  $I_2 = 1 \text{ А}$ ? Потерями энергии на нагревание пренебречь.

**Дано:**

$$C = 20 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$$

$$L = 0,02 \text{ Гн}$$

$$U_1 = 100 \text{ В}$$

$$I_1 = 2 \text{ А}$$

$$I_2 = 1 \text{ А}$$

$$q = ?$$

**Решение:**

Согласно закону сохранения энергии сумма электрической энергии заряженного конденсатора и энергии магнитного поля тока остается постоянной:

$$W_{1\text{эл}} + W_{1\text{м}} = W_{2\text{эл}} + W_{2\text{м}},$$

где  $W_{1\text{эл}}$ ,  $W_{2\text{эл}}$  — начальная и конечная энергия конденсатора;  $W_{1\text{м}}$ ,  $W_{2\text{м}}$  — начальная и конечная энергия магнитного поля силы тока.

Выразив значения этих энергий, получим:

$$\frac{CU_1^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2} = \frac{q}{2C} + \frac{LI_2^2}{2};$$

$$q = \sqrt{C^2 U_1^2 + LC I_1^2 - LC I_2^2} = \sqrt{C[U_1^2 + L(I_1^2 - I_2^2)]}.$$

Подставим численные значения и рассчитаем искомый заряд  $q$ :

$$q = \sqrt{2 \cdot 10^{-5} \cdot [2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot (4 - 1)]} \approx 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ (Кл)}.$$

Ответ:  $q = 2,3 \text{ мКл}$ .

**Задача 4.10.** Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны  $\lambda_1 = 300 \text{ м}$ . При этом расстояние между пластинами  $d_1 = 4,8 \text{ мм}$ . Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был настроен на длину волны  $\lambda_2 = 240 \text{ м}$ ?

**Дано:**

$$\lambda_1 = 300 \text{ м}$$

$$d_1 = 4,8 \text{ мм} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\lambda_2 = 240 \text{ м}$$

$$d_2 = ?$$

**Решение:**

Длина волны в первом случае:

$$\lambda_1 = cT_1,$$

во втором:

$$\lambda_2 = cT_2,$$

где  $c$  — скорость электромагнитных волн в вакууме,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $T_1, T_2$  — периоды колебаний контура.

Для определения периода используем формулу Томпсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Подставим выражение для периода в формулы для длин волн:

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC_1}; \quad \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2},$$

где  $L$  — индуктивность катушки;  $C_1, C_2$  — емкости конденсатора.

Так как

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2};$$

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{L \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}}; \quad \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{L \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}}.$$

Разделив почленно эти уравнения, имеем

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}.$$

Отсюда

$$d_2 = d_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 = 4,8 \cdot \left( \frac{300}{240} \right)^2 = 7,5 \text{ (мм)}.$$

Ответ:  $d_2 = 7,5$  мм.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Задача 4.11.** В колебательном контуре частота собственных колебаний  $\nu_1 = 30$  кГц при замене конденсатора стала равна  $\nu_2 = 40$  кГц. Какой будет частота колебаний в контуре: а) при параллельном соединении обоих конденсаторов; б) при последовательном соединении. Ответ представьте в кГц.

Ответ:  $\nu_{\text{пар}} = 24$  кГц;  $\nu_{\text{пос}} = 50$  кГц.

**Задача 4.12.** Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны 300 м. При этом расстояние между пластинами конденсатора 6,4 мм. Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был настроен на длину волны 240 м? Ответ представьте в мм.

Ответ:  $d = 10$  мм.

**Задача 4.13.\*** Катушка индуктивностью  $L = 31$  мГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью каждой пластины  $S = 20$  см<sup>2</sup> и расстоянием между ними  $d = 1$  см. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$ , заполняющей пространство между пластинами, если амплитуда силы тока  $I_m = 0,2$  мА, а амплитуда напряжения  $U_m = 10$  В?

Ответ:  $\varepsilon = 7$ .

**Задача 4.14.** В колебательном контуре сила тока с течением времени изменяется по закону  $I = 0,01 \cos 1000t$ . Емкость конденсатора в контуре 10 мкФ. Найдите индуктивность контура и максимальное напряжение на обкладках конденсатора.

Ответ:  $L = 0,1$  Гн,  $U_{\text{max}} = 1$  В.

**Задача 4.15.** Колебательный контур составлен из дросселя с индуктивностью  $L = 0,2$  Гн и конденсатора емкостью  $C = 10^{-5}$  Ф. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно 1 В, сила тока в контуре 0,01 А. Найдите максимальную силу тока в этом контуре. Ответ представьте в мА.

Ответ:  $I_{\max} = 12$  мА.

**Задача 4.16.** Электродвижущая сила синусоидального тока для фазы  $\varphi = 30^\circ$  равна  $E = 120$  В. Найдите амплитудное и действующее значения электродвижущей силы.

Ответ:  $E_m = 240$  В,  $E_d = 170,2$  В.

**Задача 4.17.\*** Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется с течением времени по закону  $U = U_m \sin(\omega t + \pi/6)$ . В момент времени  $t = T/12$  напряжение 10 В. Найдите амплитуду напряжения, циклическую частоту, частоту тока, если период колебаний  $T = 0,01$  с.

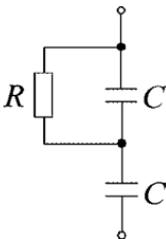
Ответ:  $U_m = 11,5$  В,  $\omega = 628$  Гц,  $\nu = 100$  Гц.

**Задача 4.18.** К городской сети переменного тока с действующим напряжением 127 В присоединена цепь, состоящая из последовательно включенных активного сопротивления  $R = 199$  Ом и конденсатора емкостью  $C = 40$  мкФ. Определите амплитуду силы тока в цепи.

Ответ:  $I_m = 1,4$  А.

**Задача 4.19.** Цепь, находящаяся под напряжением  $U = 120$  В, состоит из последовательно соединенных активного сопротивления  $R = 6$  Ом и реактивных  $X_L = X_C = 10$  Ом. Найдите силу тока в цепи и напряжение на каждом сопротивлении.

Ответ:  $I = 20$  А,  $U_R = 200$  В,  $U_X = 120$  В.

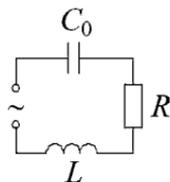


**Задача 4.20.** В сеть переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц последовательно подключены два конденсатора емкостью 1 мкФ каждый. Параллельно одному из конденсаторов включен резистор сопротивлением  $R = 100$  Ом (см. рисунок). Найдите тепловую мощность, выделяемую в цепи.

Ответ:  $N = 0,15$  Вт.

**Задача 4.21.** Резонанс в последовательном колебательном контуре (см. рисунок), содержащем конденсатор ем-

костью  $C_0 = 1 \text{ мкФ}$ , наступает при частоте  $\nu_1 = 400 \text{ Гц}$ . Если параллельно конденсатору емкостью  $C_0$  подключить конденсатор емкостью  $C$ , то резонансная частота становится  $\nu_2 = 100 \text{ Гц}$ . Найдите емкость конденсатора  $C$ . Ответ представьте в мкФ.



Ответ:  $C = 15 \text{ мкФ}$ .

**Задача 4.22.** Вторичная обмотка трансформатора, имеющая  $N = 100$  витков, пронизывается магнитным потоком, изменяющимся со временем по закону  $\Phi = 0,01 \cos 314t$ . Напишите зависимость ЭДС вторичной обмотки от времени, найдите действующее значение ЭДС.

Ответ:  $E = 314 \sin 314t$ ,  $E_d = 222 \text{ В}$ .

**Задача 4.23.** \* Радиолокатор работает в импульсном режиме. Частота повторения импульсов  $\nu = 1700 \text{ Гц}$ , длительность импульса  $t = 0,8 \text{ мкс}$ . Определите максимальную и минимальную дальность обнаружения цели данным радиолокатором.

Ответ:  $l_{\max} = 90 \text{ км}$ ;  $l_{\min} = 120 \text{ м}$ .

**Задача 4.24.** Напряжение, при котором зажигается или гаснет неоновая лампа, включенная в сеть переменного тока, соответствует действующему значению напряжения в этой сети. В течение каждого полупериода лампа горит  $2/3$  мс. Найдите частоту переменного тока.

Ответ:  $\nu = 375 \text{ Гц}$ .

**Задача 4.25.** К генератору переменного тока подключена электропечь, сопротивление которой  $200 \text{ Ом}$ . За 5 мин работы печи в ней выделяется  $270 \text{ кДж}$  теплоты. Какова при этом амплитуда силы тока, протекающего через печь?

Ответ:  $I = 3 \text{ А}$ .

**Задача 4.26.** Мгновенное значение ЭДС в момент  $T/6$  равно  $110 \text{ В}$ . Найдите действующее значение ЭДС в сети, если  $U = U_{\max} \cos \omega t$ .

Ответ:  $E_d = 156 \text{ В}$ .

**Задача 4.27.** Определите мощность, выделяемую на сопротивлении величиной  $R = 30 \text{ Ом}$  в цепи переменного тока с амплитудой силы тока  $I_{\max} = 0,15 \text{ А}$ .

Ответ:  $N = 0,15 \text{ Вт}$ .

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**В**о второй части курса физики рассмотрены основные вопросы одного из самых важных разделов физики — «Электричество и магнетизм».

В разделе «Электростатика и постоянный ток» рассмотрены основные понятия электростатики: точечный заряд, напряженность и потенциал электростатического поля. Описаны связи и законы, действующие в электростатике. Достаточно подробно рассмотрены примеры вычисления электростатических полей с помощью теоремы Остроградского — Гаусса. Рассмотрено поведение диэлектриков и проводников в электростатическом поле. Рассмотрены условия возникновения и законы постоянного тока.

В разделе «Электромагнетизм» показано условие существования магнитного поля, рассмотрены силовые характеристики магнитного поля — магнитная индукция и напряженность магнитного поля. Рассмотрены законы электромагнетизма: закон Био — Савара — Лапласа, теорема Гаусса для вектора магнитной индукции, закон Ампера, закон Фарадея. Рассмотрена сила, действующая на движущиеся в магнитном поле заряды (сила Лоренца).

Подробно изложена единая теория электрических и магнитных явлений Максвелла, дана релятивистская трактовка магнитным явлениям.

В разделе «Механические колебания и волны» рассмотрены важнейшие вопросы классической и современной

физики, касающиеся механических и электромагнитных колебаний и распространения волн.

Несмотря на огромные успехи, которые достигла электродинамика начиная со времен исследований Эрстеда, Ампера и до наших дней, перед ней стоит целый ряд нерешенных проблем. Например, проблемы физики плазмы — разработка методов разогрева плазмы и создание управляемых термоядерных реакторов, являющихся источником безграничной энергии; квантовой электроники — существенное повышение КПД лазеров, расширение длин волн излучения и т. д.

Решение стоящих перед современной электродинамикой задач является важнейшим условием научно-технического прогресса.

# ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

## ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Закон Кулона:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}.$$

Закон сохранения заряда:

$$\sum q_i = \text{const.}$$

Напряженность электростатического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}; \quad E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Результирующая напряженность электростатического поля двух зарядов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos\alpha}.$$

Линейная плотность заряда:

$$\lambda = dq / dl.$$

Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = dq / dS.$$

Объемная плотность заряда:

$$\rho = dq / dV.$$

Электрический момент диполя:

$$\vec{p} = q\vec{l}.$$

Напряженность поля электрического диполя:

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\varphi + 1}.$$

## 2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:

для одного заряда:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0};$$

для нескольких зарядов:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{или} \quad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя параллельными разноименно заряженными бесконечными плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Напряженность поля нити (цилиндра) и напряженности поля между двумя цилиндрами выражается по одной формуле

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

**3. ПОТЕНЦИАЛ И РАБОТА  
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.  
СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ**

Работа по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2:

$$dA = Fdl \cos \alpha; \quad A = q \int_1^2 \vec{F} d\vec{l}; \quad A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности  $\vec{E}$ :

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}.$$

Потенциал электростатического поля:

$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{A_\infty}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Потенциал системы зарядов:

$$\varphi = \sum \varphi_i.$$

Связь между потенциалом и напряженностью:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi; \quad \vec{E} = -\nabla\varphi.$$

Потенциал поля диполя:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos \alpha.$$

Потенциальная энергия диполя:

$$W = -\vec{p}\vec{E} = pE \cos \alpha.$$

Механический момент, действующий на диполь в электростатическом поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}] \quad \text{или} \quad M = pE \cos \alpha.$$

Работа в потенциальном поле:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU.$$

Безвихревой характер электростатического поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{или} \quad [\nabla, \vec{E}] = 0.$$

Потенциал поля между заряженными плоскостями:

$$\varphi = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

#### 4. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Результирующее поле внутри диэлектрика:

$$E = E_0 - E'.$$

Электрический момент одной молекулы:

$$\vec{p}_1 = q\vec{l}.$$

Вектор поляризации:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_1 = n\vec{p}_1 = n\alpha\varepsilon_0\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}.$$

Диэлектрическая восприимчивость:

$$\chi = n\alpha.$$

Диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon = 1 + \chi$ :

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Связь диэлектрической восприимчивости с поляризуемостью молекулы  $\alpha$ :

$$\frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{1}{3} \alpha n.$$

Вектор электрического смещения (электрическая индукция):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Связь вектора  $\vec{D}$  с напряженностью и поляризуемостью:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{j=1}^n q_i.$$

Закон преломления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{D_{2\tau}}{D_{1\tau}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

### 5. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Электростатическое экранирование:

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E = 0; \quad \varphi = \text{const.}$$

Электрическая емкость уединенного проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Электрическая емкость шара:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Электрическая емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln r_2 / r_1} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Емкость сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1} \approx \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Емкость параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = \sum_{j=1}^n C_j.$$

Емкость последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}.$$

Энергия взаимодействия двух зарядов:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

Энергия заряженного уединенного проводника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Объемная плотность энергии:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Пондермоторные силы в конденсаторе:

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S}.$$

## 6. ЭМИССИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ИЗ ПРОВОДНИКОВ. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦАХ ПРОВОДНИКОВ

Работа выхода электрона из металла проводников:

$$A_{\text{вых}} = e(\varphi_{\text{вн}} - \varphi_{\text{пв}}).$$

Закон Чайльда — Ленгмюра:

$$j = AE^{3/2}.$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{m\nu^2}{2} + A_{\text{вых}}.$$

ТермоЭДС термопары:

$$E = \alpha(T_r - T_x).$$

Эффект Пельтье:

$$Q_{II} = \Pi_{12}j.$$

## 7. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Связь напряженности и потенциала с плотностью распределения зарядов в пространстве:

$$\nabla E = \frac{1}{\varepsilon} \rho \quad \text{и} \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \rho.$$

Сила постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Сила тока:

$$I = \frac{\partial q}{\partial t} = \oint_S \vec{j} \partial \vec{S}.$$

Плотность тока:

$$j = \frac{I}{S}.$$

Вектор плотности тока:

$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{v}_{др+} + q_- n_- \vec{v}_{др-}.$$

Уравнение непрерывности в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{j} \partial \vec{S} = - \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Дифференциальная форма:

$$\nabla \vec{j} = - \frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{или} \quad \text{div} \vec{j} = - \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Уравнение непрерывности для постоянного тока:

$$\oint_S \vec{j} \partial \vec{S} = 0; \quad \nabla \vec{j} = - \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Электродвижущая сила, действующая в цепи:

$$E = \frac{A}{q}; \quad E = \oint E_{\text{ст}} dt.$$

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Сопротивление при последовательном соединении:

$$R = \sum R_i.$$

Сопротивление при параллельном соединении:

$$R = \sum \frac{1}{R_i}.$$

Сопротивление однородного проводника:

$$R = \frac{\rho l}{S}.$$

Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t).$$

Проводимость:

$$\sigma = \frac{1}{R}.$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

Обобщенный закон Ома:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}{R}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Работа силы электрического поля:

$$A = RI^2t.$$

Мощность тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Мощность, выделяемая в единице объема проводника:

$$w = \rho j^2.$$

Закон Джоуля — Ленца:

$$dQ = IUdt = I^2Rdt = \frac{U^2}{R} dt.$$

Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме:

$$w = jE = \sigma E^2.$$

КПД источника тока:

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{U}{E} = \frac{R}{R+r}.$$

Первое правило Кирхгофа:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Второе правило Кирхгофа:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k E_k.$$

## 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ, МЕТАЛЛАХ И ЭЛЕКТРОЛИТАХ

Плотность тока в газах:

$$\vec{j} = nq(\vec{v}^+ + \vec{v}^-).$$

Удельная электропроводность:

$$\sigma = q \sqrt{\frac{\Delta n_j}{r}} (\mu_+ + \mu_-).$$

Закон Ома для тока в газах:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Закон Ома для тока в металлах:

$$I = enS\vec{v}_d = \frac{1}{2} \frac{e^2 \tau n S}{m} E = \frac{e^2 \tau n S}{2ml} U.$$

Электрическое сопротивление проводника:

$$R = \frac{2m}{e^2 \tau n} \frac{l}{S}.$$

Первый закон Фарадея:

$$m = kq = kIt.$$

Электрохимический эквивалент вещества:

$$k = \frac{\mu}{Fn}.$$

Второй закон Фарадея:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}.$$

Объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{n} It.$$

## ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### 1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Магнитный момент контура с током:

$$P_m = IS \quad \text{или} \quad \vec{P}_m = IS\vec{n}.$$

Момент силы, вращающий рамку с током в магнитном поле:

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}] \quad \text{или} \quad M = P_m B \sin \alpha = ISB \sin \alpha.$$

Магнитная индукция:

$$B = \frac{M_{\max}}{P_m \sin(\vec{n}, \vec{B})}.$$

Потенциальная (механическая) энергия контура с током в магнитном поле:

$$E_{\text{п, мех}} = \vec{P}_m \vec{B} = P_m B \cos \alpha.$$

Принцип суперпозиции для магнитных полей:

$$\vec{B} = \sum B_i.$$

Модуль магнитной индукции при сложении двух полей:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha}.$$

Закон Био — Савара — Лапласа для элемента проводника с током:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}; \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha.$$

Индукция магнитного поля движущегося заряда:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin[\vec{v}, \vec{r}]}{r^2}.$$

Магнитная индукция конечного проводника:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Индукция бесконечно длинного проводника:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}.$$

Магнитная индукция в центре кругового тока:

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Магнитная индукция кругового тока на расстоянии  $x$  от центра:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}; \quad B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2P_m}{x^3}.$$

Напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}.$$

## 2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ЗАРЯДЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Закон Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}] \quad \text{или} \quad \vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}].$$

Модуль вектора силы Ампера:

$$F = IlB\sin\alpha.$$

Сила взаимодействия двух параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$  на расстояние  $b$ :

$$F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{b}.$$

Сила Лоренца:

$$\vec{F}_л = q[\vec{v}, \vec{B}]; \quad F_л = qvB\sin\alpha; \quad \vec{F}_л = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле:

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1).$$

Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле:

$$dA = Id\Phi'.$$

Магнитная индукция внутри бесконечного длинного соленоида:

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

Магнитное поле в произвольной точке внутри конечного соленоида:

$$B = \frac{1}{2} \mu\mu_0 nI (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Магнитное поле на середине оси соленоида:

$$B_{\max} = \mu\mu_0 nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

Холловская поперечная разность потенциалов:

$$U_X = \frac{1}{en} \frac{IB}{a} = R \frac{IB}{a}.$$

Коэффициент Холла:

$$R = \frac{1}{qn}.$$

Число носителей заряда:

$$n = \frac{IB}{qaU_X}.$$

### 3. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Закон Фарадея:

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{или} \quad E_i = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

ЭДС индукции:

$$E_i = -S \frac{dB}{dt}.$$

Работа по перемещению заряда вихревым электрическим полем:

$$A = q \oint_L \vec{E}' d\vec{l} = qE_i.$$

#### 4. УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Радиус траектории нерелятивистской частицы:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Шаг винтовой линии траектории:

$$h = vT \cos \alpha.$$

Период обращения нерелятивистской частицы:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Импульс релятивистской частицы:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{W_k (W_k + 2m_0 c^2)}.$$

Кинетическая энергия частицы:

$$W_k = W - W_0 = mc^2 - m_0 c^2.$$

Период обращения релятивистской частицы:

$$T = \frac{2\pi m}{qB \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2\pi W}{qBc^2}.$$

Радиус окружности траектории релятивистской частицы:

$$R = \frac{m_0 v}{qB \sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Энергия, передаваемая вихревым электрическим полем единичному заряду:

$$\frac{mv^2}{2} = \oint_L q \vec{E}' d\vec{l} = qE_i.$$

### 5. САМОИНДУКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

Индуктивность соленоида и тороида:

$$L_{\text{сол}} = \mu\mu_0 n^2 I S.$$

ЭДС самоиндукции контура:

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида, имеющего  $N$  витков:

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}.$$

Постоянная времени цепи:

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Ток при замыкании цепи:

$$I = I_0 (1 - e^{-t/\tau}).$$

Ток при размыкании цепи:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}.$$

Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Работа в цепи с убывающим током:

$$dA = \mathcal{E}_i I dt.$$

Энергия проводника с током  $I$  и индуктивностью  $L$ :

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Энергия магнитного поля:

$$W = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V.$$

Плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2}.$$

Энергия магнитного поля в длинном соленоиде:

$$W = \frac{1}{2} = \mu\mu_0 n^2 I^2 V.$$

Плотность энергии в длинном соленоиде:

$$w = \frac{1}{2} = \mu\mu_0 n^2 I^2.$$

## 6. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

Парамагнетики:

$$\mu = \frac{B}{B_0} > 1.$$

Диамагнетики:

$$\mu = \frac{B}{B_0} < 1.$$

Ферромагнетики:

$$\mu = \frac{B}{B_0} \gg 1.$$

Частота вращения электрона на орбите:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}.$$

Орбитальный ток:

$$I = e\nu.$$

Орбитальный магнитный момент электрона:

$$\vec{P}_m = IS\vec{n} = \frac{e\vec{v}}{2\pi r}.$$

Орбитальный момент импульса электрона:

$$\vec{L}_e = m\vec{v}r.$$

Связь магнитного момента и момента импульса:

$$\vec{P}_m = \gamma \vec{L}_e.$$

Гиромагнитное отношение:

$$\gamma = -\frac{e}{2m}.$$

Собственный момент импульса электрона (спин электрона):

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar.$$

Спиновый магнитный момент электрона:

$$\vec{P}_{ms} = \gamma_s \vec{L}_s.$$

Гиромагнитное отношение спиновых моментов:

$$\gamma_s = -\frac{e}{m}.$$

Квантовый магнитный момент (магнетон Бора):

$$\mu_B = \pm \frac{e\hbar}{2m}.$$

Орбитальный магнитный момент атома:

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^Z \vec{P}_{mi}.$$

Орбитальный момент импульса атома:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^Z \vec{L}_{ei}.$$

Угловая скорость ларморовской прецессии:

$$\omega_L = -\frac{e}{2m} \vec{B}.$$

Намагниченность:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{P}_{mi}.$$

Напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

Связь намагниченности с напряженностью:

$$\vec{J} = \vec{H}\aleph.$$

Магнитная восприимчивость среды:

$$\aleph = \mu - 1.$$

### 7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Полная система уравнений Максвелла:  
в интегральной форме:

$$\oint_L H dl = - \iint_S \left( j + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS; \quad \oint_S D dS = - \int \rho dV;$$

$$\oint_L E dl = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} dS; \quad \oint_S B dS = 0;$$

в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{H} = j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

Материальные уравнения или уравнения состояния:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{\text{стр}}.$$

Скорость распространения ЭМП в среде:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

## МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Уравнение гармонического колебания:

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Частота колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклическая частота:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu}.$$

Скорость колебаний:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Ускорение колебаний:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Амплитуда скорости:

$$v_m = \omega_0 A.$$

Амплитуда ускорения:

$$a_m = \omega_0^2 A.$$

Уравнение движения материальной точки:

$$F_x = -m\omega_0^2 x.$$

Квазиупругая сила:

$$F_x = -kx.$$

Дифференциальное уравнение динамики гармонических колебаний материальной точки под действием упругих и квазиупругих сил:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Циклическая частота незатухающих колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Период незатухающих колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия тела:

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Кинетическая энергия тела:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Полная энергия:

$$W = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Уравнение динамики вращательного движения математического маятника:

$$M = J\varepsilon.$$

Вращающий момент:

$$M = -mgl \sin \alpha.$$

Момент инерции маятника:

$$J = ml^2.$$

Дифференциальное уравнение математического маятника:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Решение уравнения:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Циклическая частота математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Циклическая частота физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}.$$

Приведенная длина физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}.$$

## 2. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнения двух когерентных колебаний одного направления:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Результирующая амплитуда:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза:

$$\text{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Модулированные колебания:

$$x = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Биения:

$$x = A_0 \cos \omega_0 t = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos \omega_0 t.$$

Амплитуда биений:

$$A_0 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right).$$

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Линейно поляризованные колебания:

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \quad \text{или} \quad y = -\frac{A_2}{A_1} x.$$

Эллиптически поляризованные колебания:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

### 3. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Сила трения (сопротивления):

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}.$$

Второй закон Ньютона для затухающих прямолинейных колебаний:

$$ma_x = -kx - rv_x.$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение уравнения:

$$x = A_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi).$$

Коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{r}{2m} = \frac{1}{\tau}.$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(T+t)} = \beta T = \frac{1}{N}.$$

Время релаксации:

$$\tau = NT.$$

Частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Условный период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Вынужденные механические колебания:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Резонансная частота:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Резонансная амплитуда:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}.$$

## 4. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Длина волны:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

Волновое уравнение:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Уравнение плоской волны:

$$\xi = A \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{или} \quad \xi = A \cos(\omega t - kx).$$

Волновой вектор:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}.$$

Волновое число:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{vT}.$$

При затухании плоской волны в среде:

$$\xi = A \exp(-\beta t) \cos(\omega t - kx).$$

Уравнение сферической волны:

$$\xi = \frac{A}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \quad \text{или} \quad \xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr).$$

При затухании сферической волны в среде:

$$\xi = \frac{A}{r} \exp(-\beta t) \cos(\omega t - kr).$$

Фазовая скорость:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu.$$

Групповая скорость:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Разность фаз колебаний двух точек среды:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x.$$

Суперпозиция двух волн с близкими частотами:

$$\xi = \left[ 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right] \cos(\omega t - kx).$$

Уравнение стоячей волны:

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\omega t \quad \text{или} \quad \xi = 2A \cos kx \cos\omega t.$$

Координаты пучностей стоячей волны:

$$x_{\text{пучн}} = \pm \frac{n\lambda}{2}.$$

Координаты узлов стоячей волны:

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}.$$

Фазовая скорость продольных волн в упругой среде:  
в твердых телах:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{G}{\rho}};$$

в газах:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}.$$

Амплитуда звукового давления:

$$P_0 = 2\pi P \rho v A.$$

Средняя объемная плотность энергии звукового поля:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \xi_0^2 = \frac{1}{2} \frac{P_0^2}{\rho v^2} = \rho \omega^2 A^2.$$

Энергия звукового поля, заключенного в объеме  $V$ :

$$W = wV.$$

Поток звуковой энергии:

$$\Phi = \frac{W}{t}.$$

Интенсивность звука (плотность потока звуковой энергии):

$$I = \frac{\Phi}{S} = \langle w \rangle v.$$

Связь интенсивности с мощностью звука:

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}.$$

Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме:

$$v = \frac{v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \theta}.$$

Продольный оптический эффект Доплера:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}}.$$

Поперечный оптический эффект Доплера:

$$v = v_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Эффект Доплера в акустике:

$$v = \frac{(v \pm v_{\text{пр}})}{v \mp v_{\text{ист}}} v_0.$$

Закон Хаббла:

$$v \cos \theta \approx cz = Hr.$$

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Переменный ток:

$$I = I_0 \sin \omega t.$$

Напряжение:

$$U = I_0 R \sin \omega t.$$

Емкость в цепи переменного тока:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Заряд конденсатора:

$$q = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t.$$

Реактивное емкостное сопротивление:

$$R_C = \frac{I_0}{\omega C}.$$

Индуктивность в цепи переменного тока:

$$U = LI_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Реактивное индуктивное сопротивление:

$$R_L = \omega L.$$

Закон Ома для переменного тока:

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Реактивное сопротивление:

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$I = \frac{\mathbf{E}}{Z} = \frac{\mathbf{E}}{R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Дифференциальное уравнение колебаний в контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение уравнения:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Собственная частота контура:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Закон Ома для контура:

$$U_m = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Уравнение затухающих колебаний в колебательном контуре:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решение уравнения:

$$q = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi).$$

Коэффициент затухания:

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Частота затухающих колебаний контура:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Добротность контура:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\chi} = \pi N_e.$$

Время затухания:

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

Число колебаний за время затухания:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}.$$

Критическое сопротивление:

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{вол}}.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

Решение уравнения вынужденных колебаний:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда колебаний заряда:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}}.$$

Резонансная частота:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Последовательный резонанс (резонанс напряжений):

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Параллельный резонанс (резонанс токов):

$$\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Работа переменного тока за  $dt$ :

$$A = P_t dt = U_m I_m \sin \omega t dt.$$

Работа за период  $T$ :

$$A = \frac{1}{2} I_m U_m T.$$

Средняя мощность:

$$\langle P \rangle = I_m U_m = \frac{1}{2} R I_m^2.$$

Действующие (эффективные) значения тока и напряжения:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Волновые уравнения ЭМВ:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Решение уравнений:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kr); \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kr).$$

Скорость распространения электромагнитных волн в среде:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Скорость света в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Абсолютный показатель преломления среды:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Объемная плотность энергии ЭВМ:

$$w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}.$$

Плотность потока энергии:

$$S = wv = EH.$$

Вектор Умова — Пойнтинга:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Интенсивность ЭВМ:

$$J = \langle \vec{S} \rangle \quad \text{или} \quad J = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}.$$

Давление света:

$$P = J \frac{1+K}{c} \quad \text{или} \quad P = J \frac{1+K}{c} \cos \theta.$$

## ГЛОССАРИЙ

- Автоэлектронная эмиссия** — испускание электронов проводящими твердыми и жидкими телами под действием внешнего электрического поля достаточно высокой напряженности.
- Бетатрон** — циклический ускоритель электронов, в котором электроны ускоряются вихревым электрическим полем, индуцируемым переменным магнитным полем.
- Взаимодействие** — процесс воздействия объектов друг на друга. В физике известны четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.
- Вибратор Герца** — открытый колебательный контур, состоящий из двух стержней, разделенных небольшим промежутком. При подключении стержней к источнику высокого напряжения, создающему искру в промежутке между ними, вибратор Герца излучает электромагнитные волны.
- Вихревые электрические токи** — индукционные токи, возникающие в сплошных проводниках.
- Волновое число** — модуль волнового вектора  $k$ . Волновое число определяет пространственный период волны (длину волны  $l$ ) в направлении ее распространения:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .
- Волновой вектор** — вектор  $k$ , определяющий направление распространения и пространственный период плоской монохроматической волны.
- Волны** — изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченной областей пространства.
- Время жизни** — время, в течение которого вероятность обнаружить систему в данном состоянии уменьшается в  $e$  раз.
- Вторичная электронная эмиссия** — испускание электронов твердыми и жидкими телами при их бомбардировке первичными электронами.
- Газовый разряд** — процесс протекания электрического тока в газе. В зависимости от условия осуществления разряда различают самостоятельные и несамостоятельные разряды.

**Гармонические колебания** — колебания, при которых физическая величина изменяется во времени по синусоидальному закону.

**Декремент затухания** — количественная характеристика скорости затухания колебаний в линейной системе. Представляет собой натуральный логарифм отношения двух последующих максимальных отклонений колеблющейся величины в одну и ту же сторону.

**Диамагнетизм** — возникновение в диамагнетике намагниченности, направленной навстречу внешнему магнитному полю.

**Диэлектрики** — вещества, относительно плохо проводящие электрический ток (по сравнению с проводниками). Внешнее электростатическое поле приводит к перераспределению электрических зарядов и появлению (или изменению) электрического дипольного момента в любом объеме диэлектрика, т. е. к его поляризации.

**Дуговой разряд** — самостоятельный разряд в газе, протекающий при сравнительно небольшом напряжении и при большой плотности тока. Основной причиной дугового разряда является интенсивная термоэлектронная эмиссия раскаленного катода.

**Емкостное сопротивление** — реактивная часть сопротивления двухполюсника, в котором синусоидальный ток опережает по фазе приложенное напряжение подобно тому, как это имеет место в обычном электрическом конденсаторе.

**Емкость электрическая** — характеристика проводящего тела, мера его способности накапливать электрический заряд. Численно электрическая емкость  $C$  равна заряду  $q$ , который необходимо сообщить уединенному телу для изменения его потенциала  $j$  на единицу.

**Закон Кулона** — основной закон электростатики. Два неподвижных точечных заряда взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и диэлектрической проницаемости среды, в которой находятся заряды.

**Закон сохранения электрического заряда** — физический закон, в соответствии с которым в замкнутой системе взаимодействующих тел алгебраическая сумма электрических зарядов (полный электрический заряд) остается неизменной при всех взаимодействиях.

**Закон Джоуля — Ленца** — количество теплоты  $Q$ , выделяющейся в единицу времени на участке электрической цепи с сопротивлением  $R$  при протекании по нему постоянного тока  $I$ , равно  $Q = RI^2$ .

- Запрещенная зона** — область значений энергии в спектре идеального кристалла, которую не могут иметь электроны, фотоны, а также некоторые другие квазичастицы.
- Затухание колебаний** — уменьшение амплитуды колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой.
- Индуктивность** — физическая величина, характеризующая связь между скоростью изменения тока в проводнике и возникающей при этом ЭДС самоиндукции.
- Интенсивность излучения** — энергетическая характеристика электромагнитного излучения, распространяющегося в заданном направлении, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний.
- Интерференция волн** — взаимное усиление или ослабление двух (или большего числа) волн при их наложении друг на друга при одновременном распространении в пространстве.
- Ион** — электрически заряженная частица, образующаяся при отрыве или присоединении одного или нескольких электронов (или других заряженных частиц) к атому, молекуле, радикалу и другому иону.
- Искровой разряд** — нестационарный электрический разряд в газе, возникающий в электрическом поле при давлении газа до нескольких атмосфер. Искровой разряд имеет вид пучка ярких зигзагообразных каналов.
- Колебания** — движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.
- Лавина электронная** — неуклонно нарастающий процесс размножения электронов в результате ионизации атомов и молекул, как правило, электронным ударом.
- Легирование полупроводников** — дозированное введение в полупроводник примесей с целью изменения их электрических свойств.
- Линейный ускоритель** — ускоритель заряженных частиц, в котором ускоряемые частицы проходят сквозь систему трубчатых электродов. Заряженные частицы, поступающие в камеру, ускоряются постоянным электрическим полем в пространстве.
- Линии магнитной индукции** — воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции в этой точке. Линии магнитной индукции замкнуты.
- Магнитная индукция** — векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся или смещающуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля в заданной точке.
- Магнитная проницаемость** — физическая величина, показывающая, во сколько раз вектор магнитной индукции в одно-

родной среде отличается от вектора магнитной индукции в той же точке пространства в вакууме. В зависимости от значения магнитной проницаемости вещества подразделяются на парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики.

**Магнитное поле** — силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды (токи) и на тела, обладающие магнитным моментом. Вместе с электрическим полем образует единое электромагнитное поле.

**Магнитный гистерезис** — отставание состояния намагниченности ферромагнетика от изменений внешнего магнитного поля.

**Магнитострикция** — изменение формы и размеров тела при намагничивании. В ферромагнетиках магнитострикция достигает значительных величин.

**Намагниченность вещества** — физическая величина, равная разности индукций магнитного поля в веществе и в вакууме.

**Напряженность магнитного поля** — векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на магнитный полюс носителя магнитного момента со стороны магнитного поля.

**Однородное электрическое поле** — электрическое поле, напряженность которого одинакова во всех точках пространства.

**Оптическое излучение** — электромагнитное излучение с длиной волны от 100 до 10 000 нм. В зависимости от длины волны оптическое излучение подразделяется на ультрафиолетовое, видимое и инфракрасное.

**Плазма** — частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

**Плотность электрического тока** — сила тока, приходящаяся на  $1 \text{ м}^2$  площади поперечного сечения проводника.

**Показатель преломления света** — мера оптической плотности среды, равная отношению скорости света в вакууме к скорости света в среде.

**Поляризация диэлектрика** — смещение положительных и отрицательных связанных зарядов в макрообъеме диэлектрика в противоположные стороны, что приводит к появлению поверхностных связанных зарядов.

**Правило Ленца** — индукционный ток всегда имеет такое направление, что его собственный магнитный поток компенсирует изменения внешнего магнитного потока, вызвавшие этот ток.

**Работа выхода электрона** — наименьшая работа, которую нужно совершить для извлечения электрона, не связанного с атомом, из поверхности вещества в вакууме.

**Радиоволны** — электромагнитные волны, с длиной волны от 0,05 мм до 10 000 000 м. Радиоволны используются для передачи информации без проводов.

- Рекомбинация** — взаимодействие заряженных частиц противоположного знака, приводящее к образованию нейтральных атомов или молекул. При этом выделяется энергия в виде электромагнитного излучения.
- Самоиндукция** — явление возникновения электродвижущей силы в электрической цепи при изменении протекающего в ней электрического тока.
- Сегнетоэлектрики** — кристаллические диэлектрики, у которых диэлектрическая проницаемость есть величина переменная, зависящая от приложенного к кристаллу напряжения.
- Скин-эффект** — неоднородное распределение переменного тока и связанного с ним электромагнитного поля по сечению проводника. При высоких частотах ток течет в основном в тонком поверхностном слое проводника (в скин-слое) и прямо пропорционален полному заряду, находящемуся внутри этой поверхности.
- Термоэлектронная эмиссия** — явление испускания электронов нагретыми телами (эмиттерами). Для вылета электрона из вещества необходимо, чтобы его кинетическая энергия была достаточна для преодоления его связи с веществом. Термоэлектронная эмиссия используется в электровакуумных приборах.
- Точка Кюри** — температура, выше которой вещество, обладавшее свойствами ферромагнетика, теряет эти свойства.
- Фаза колебаний** — аргумент, периодически изменяющейся функции, описывающей колебательный или волновой процесс.
- Фазовая скорость** — скорость распространения в пространстве фронта монохроматической волны. Фазовая скорость волн в среде зависит от частоты распространяющегося колебания.
- Фазотрон** — циклический ускоритель тяжелых заряженных частиц, в котором ускорение частиц обеспечивается высокочастотным электрическим полем изменяющейся частоты, а пространственная устойчивость частиц в процессе ускорения — стационарным магнитным полем.
- Ферриты** — общее название сложных окислов, содержащих железо и другие элементы. Большинство ферритов является ферромагнетиками и проявляет полупроводниковые или диэлектрические свойства.
- Ферромагнетик** — железо, никель, кобальт или другое вещество, которое имеет высокую магнитную проницаемость (намного превышающую единицу). Ферромагнетики применяются для изготовления постоянных магнитов сердечников трансформаторов, электродвигателей и т. д.
- Фотоэлектронный умножитель** — фотоэлектронный прибор, преобразующий световой поток в усиленный электрический сигнал в результате вторичной электронной эмиссии.

- Фотоэффект** — явление, связанное с освобождением электронов твердого тела или жидкости под действием электромагнитного излучения. Различают внутренние, внешние и вентильные фотоэффекты.
- Циклотрон** — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц, в котором частота ускоряющего поля и управляющее магнитное поле постоянно во времени.
- Электрический диполь** — система двух разноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга.
- Электрический ток** — направленное движение свободных носителей электрического заряда в веществе или в вакууме.
- Электрическое напряжение** — скалярная величина, численно равная работе, совершаемой суммарным полем сторонних и кулоновских сил при перемещении единичного положительного заряда на участке электрической цепи.
- Электродвижущая сила** — характеристика источника энергии в электрической цепи. Электродвижущая сила измеряется отношением работы сторонних сил по перемещению заряда вдоль контура к величине этого заряда.
- Электродинамика классическая** — область физики, в которой изучаются классические (неквантовые) свойства электромагнитного поля и движения электрических зарядов, взаимодействующих друг с другом посредством этого поля.
- Электромагнитная индукция** — явление возникновения ЭДС в проводнике при его движении в магнитном поле или при изменении окружающего его магнитного поля. При этом в замкнутом проводящем контуре возникает индукционный ток.
- Электромагнитное поле** — особый вид материи, посредством которого осуществляются электромагнитные взаимодействия, представляющий собой единство электрического и магнитного полей.
- Электронная эмиссия** — испускание электронов телами под влиянием внешних воздействий: нагревания, потока фотонов, электронов, ионов или сильного электрического поля. В зависимости от характера внешнего воздействия различают термоэлектронную, фотоэлектронную, ионно-электронную и автоэлектронную эмиссии.
- Электростатическая индукция** — появление электрических зарядов разного знака на противоположных участках проводника или диэлектрика в электростатическом поле.
- Эффект Холла** — возникновение в проводнике или полупроводнике с током, находящемся в магнитном поле, поперечной разности потенциалов. Причиной эффекта Холла является отклонение электронов, движущихся в магнитном поле под действием силы Лоренца.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Т а б л и ц а П1

## Значения фундаментальных констант

Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e = 1836,15152$
Элементарный заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e = 1,7588047 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Атомная единица массы	$1 \text{ а. е. м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Т а б л и ц а П2

## Греческий алфавит

Α α	альфа	Η η	эта	Ν ν	ню	Τ τ	тау
Β β	бета	Θ θ	тэта	Ξ ξ	кси	Υ υ	ипсилон
Γ γ	гамма	Ι ι	йота	Ο ο	омикрон	Φ φ	фи
Δ δ	дельта	Κ κ	капша	Π π	пи	Χ χ	хи
Ε ε	эпсилон	Λ λ	лямбда	Ρ ρ	ро	Ψ ψ	пси
Ζ ζ	дзета	Μ μ	мю	Σ σ	сигма	Ω ω	омега

Таблица ПЗ

**Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований**

Множитель	Приставка	Обозначение
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	тера	Т
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	гига	Г
$1\ 000\ 000 = 10^6$	мега	М
$1000 = 10^3$	кило	к
$100 = 10^2$	гекто	г
$10 = 10^1$	дека	да
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д
$0,01 = 10^{-2}$	санتي	с
$0,001 = 10^{-3}$	милли	м
$0,000001 = 10^{-6}$	микро	мк
$0,000000001 = 10^{-9}$	нано	н
$0,000000000001 = 10^{-12}$	пико	п
$0,000000000000001 = 10^{-15}$	фемто	ф
$0,000000000000000001 = 10^{-18}$	атто	а

Таблица П4

**Производные единицы СИ,  
имеющие собственные наименования**

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение	Через другие единицы СИ	Через основные единицы СИ
Частота	герц	Гц		$s^{-1}$
Сила	ньютон	Н		$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж	Н/м	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Количество электричества, электрический заряд	кулон	Кл	А·с	с·А

Продолжение табл. П4

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение	Через другие единицы СИ	Через основные единицы СИ
Электрическое напряжение, электрический потенциал	вольт	В	Вт/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая емкость	фарада	Ф	Кл/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	В/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Электрическая проводимость	сименс	См	А/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Освещенность	люкс	лк		$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$

Таблица П5

**Работа выхода электрона из металлов**

Металл	А, эВ	Металл	А, эВ	Металл	А, эВ
Алюминий	3,74	Висмут	4,62	Железо	4,36
Калий	2,15	Литий	2,39	Молибден	4,27
Никель	4,84	Серебро	4,28	Цезий	1,89
Барий	2,29	Вольфрам	4,50	Золото	4,58
Кобальт	4,25	Медь	4,47	Натрий	2,27
Платина	5,29	Титан	3,92	Цинк	3,74

Таблица П6

**Подвижность ионов в электролитах,  $\text{м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$**

$\text{NO}_3^-$	$6,4 \cdot 10^{-8}$
$\text{Ag}^+$	$5,6 \cdot 10^{-8}$
$\text{Cl}^-$	$6,8 \cdot 10^{-8}$
$\text{H}^+$	$3,3 \cdot 10^{-8}$
$\text{K}^+$	$6,7 \cdot 10^{-8}$

Таблица П7

**Диэлектрические проницаемости**

Диэлектрик	$\epsilon$	Диэлектрик	$\epsilon$
Вода	81	Керосин	2,0
Полиэтилен	2,3	Стекло	6,0
Воздух	1,00058	Парафин	2,0
Слюда	7,5	Фарфор	6,0
Воск	7,8	Плексиглас	3,5
Спирт	26	Эбонит	2,7

Таблица П8

**Удельное электросопротивление  
некоторых материалов, Ом·м·10<sup>6</sup>**

Серебро	0,016	Константан	0,4–0,51
Медь	0,017	Нихром	1,1
Алюминий	0,029	Фехраль	1,2
Никелин	0,4–0,44	Хромель	1,3
Манганин	0,42	Уголь для дуговых ламп	40–50

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

## ОСНОВНАЯ

1. *Тюрин, Ю. И.* Физика. Ч. 2. Электричество и магнетизм : учеб. пособие / Ю. И. Тюрин, И. П. Чернов, Ю. Ю. Крючков. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2003. — 738 с.
2. *Савельев, И. В.* Курс общей физики : в 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика : учеб. пособие. — 7-е изд., стер. — СПб. : Изд-во «Лань», 2007. — 496 с.
3. *Бондарев, Б. В.* Курс общей физики : в 3 кн. Кн. 2. Электромагнетизм. Волновая оптика. Квантовая физика : учеб. пособие / Б. В. Бондарев, Н. П. Калашников, Г. Г. Спирын. — 2-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2005. — 438 с.
4. *Детлаф, А. А.* Курс физики : учеб. пособие / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. — 4-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2002. — 718 с.
5. *Трофимова, Т. И.* Курс физики : учеб. пособие. — 14-е изд., перераб. и доп. — М. : Издат. центр «Академия», 2007. — 560 с.
6. *Иродов, И. Е.* Электромагнетизм. Основные законы. — 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 319 с.
7. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики : в 5 т. Т. 3. Электричество : учеб. пособие. — 3-е изд., стер. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 656 с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. *Чернов, И. П.* Физика: сборник задач. Ч. 2. Электричество и магнетизм : учеб. пособие / И. П. Чернов, В. В. Ларионов, Ю. И. Тюрин. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2004. — 448 с.
2. *Трофимова, Т. И.* Курс физики. Задачи и решения : учеб. пособие / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. — М. : Издат. центр «Академия», 2004. — 592 с.
3. *Иродов, И. Е.* Задачи по общей физике. — 12-е изд., стер. — СПб. : Изд-во «Лань», 2007. — 416 с.
4. *Кузнецов, С. И.* Электростатика. Постоянный ток : учеб. пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2007. — 132 с.
5. *Кузнецов, С. И.* Электромагнетизм : учеб. пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2007. — 92 с.
6. *Кузнецов, С. И.* Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика : учеб. пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2007. — 170 с.
7. *Кузнецов, С. И.* Краткий курс физики : учеб. пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2011. — 187 с.
8. *Кузнецов, С. И.* Справочник по физике : учеб. пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2012. — 224 с.
9. *Кузнецов, С. И.* Электричество и магнетизм. Электромагнитные колебания и волны : учеб. пособие. — Томск : Изд-во ТПУ, 2011. — 248 с.

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	6
Как пользоваться книгой .....	9
Методические указания к решению задач .....	12
Обозначения физических величин .....	14
Введение .....	16
<b>1. Электростатика и постоянный ток .....</b>	<b>18</b>
1.1. Электростатическое поле в вакууме .....	18
1.1.1. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда ....	18
1.1.2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона .....	19
1.1.3. Электростатическое поле. Напряженность поля .....	20
1.1.4. Сложение электростатических полей. Принцип суперпозиции .....	21
1.1.5. Электростатическое поле диполя .....	22
<b>Вопросы к читателю. Упражнения .....</b>	<b>23</b>
1.2. Теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля .....	24
1.2.1. Силовые линии электростатического поля .....	24
1.2.2. Поток вектора напряженности .....	25
1.2.3. Теорема Остроградского — Гаусса .....	27
1.2.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского — Гаусса .....	29
1.2.5. Вычисление электрических полей с помощью теоремы Остроградского — Гаусса .....	31
Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости .....	31

Поле двух равномерно заряженных плоскостей .....	32
Поле равномерно заряженного бесконечно длинного цилиндра (нити) .....	33
Поле двух коаксиальных цилиндров с одинаковой линейной плотностью, но разным знаком .....	34
Поле равномерно заряженной сферической поверхности .....	35
Поле объемного заряженного шара .....	36
Пондермоторные силы .....	37
<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> .....	37
<b>1.3. Потенциальная энергия и работа электростатического поля.</b>	
Связь напряженности с потенциалом .....	38
1.3.1. Работа сил электростатического поля .....	38
1.3.2. Потенциальная энергия .....	40
1.3.3. Потенциал. Разность потенциалов .....	42
1.3.4. Связь между напряженностью и потенциалом .....	44
1.3.5. Безвихревой характер электростатического поля .....	45
1.3.6. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности .....	46
1.3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей .....	48
Разность потенциалов между точками поля, образованного двумя бесконечными заряженными плоскостями .....	48
Разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхностью .....	49
Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора .....	50
Разность потенциалов между точками поля, образованного заряженной сферической поверхностью .....	51
Разность потенциалов внутри равномерно заряженного шара .....	51
<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> .....	52
<b>1.4. Диэлектрики в электростатическом поле</b> .....	53
1.4.1. Поляризация диэлектриков .....	53
1.4.2. Различные виды диэлектриков .....	57
Сегнетоэлектрики .....	57

	Пьезоэлектрики . . . . .	59
	Пироэлектрики . . . . .	60
1.4.3.	Вектор электрического смещения $\vec{D}$ . . . . .	61
1.4.4.	Поток вектора электрического смещения. Теорема Остроградского — Гаусса для $\vec{D}$ . . . . .	63
1.4.5.	Изменение $E$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков . . . . .	64
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	65
1.5.	Проводники в электростатическом поле . . . . .	66
1.5.1.	Напряженность и потенциал электростатического поля в проводнике . . . . .	66
1.5.2.	Определение напряженности поля вблизи поверхности заряженного проводника . . . . .	68
1.5.3.	Экспериментальная проверка распределения заряда на проводнике . . . . .	69
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	72
1.6.	Конденсаторы . . . . .	73
1.6.1.	Электрическая емкость . . . . .	73
1.6.2.	Соединение конденсаторов . . . . .	75
1.6.3.	Расчет емкостей различных конденсаторов . . . . .	76
	Емкость плоского конденсатора . . . . .	76
	Емкость цилиндрического конденсатора . . . . .	77
	Емкость шарового конденсатора . . . . .	78
1.6.4.	Энергия электростатического поля . . . . .	78
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	81
	Сравнительные характеристики гравитационного и электростатического полей . . . . .	82
1.7.	Постоянный электрический ток . . . . .	83
1.7.1.	Характеристики электрического тока . . . . .	83
1.7.2.	Уравнение непрерывности . . . . .	84
1.7.3.	Сторонние силы и ЭДС . . . . .	85
1.7.4.	Закон Ома для неоднородного участка цепи . . . . .	86
1.7.5.	Закон Ома в дифференциальной форме . . . . .	88
1.7.6.	Работа и мощность тока. Закон Джоуля — Ленца . . . . .	89
	Правила Кирхгофа для разветвленных цепей . . . . .	91
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	92
1.8.	Электрический ток в металлах, полупроводниках и электролитах . . . . .	93
1.8.1.	Электрический ток в металлах . . . . .	93
	Зонная модель электронной проводимости металлов . . . . .	96

1.8.2.	Электрический ток в полупроводниках . . . . .	99
	Зонная модель электронно-дырочной проводимости полупроводников . . . . .	99
	Электронно-дырочный переход . . . . .	103
1.8.3.	Сверхпроводимость . . . . .	104
1.8.4.	Эмиссия электронов из проводников . . . . .	106
	Термоэлектронная эмиссия . . . . .	107
	Холодная и взрывная эмиссия . . . . .	109
	Фотоэлектронная эмиссия . . . . .	111
1.8.5.	Контактные явления на границе раздела двух проводников . . . . .	113
1.8.6.	Электрический ток в электролитах . . . . .	115
	Практическое применение электролиза . . . . .	117
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	119
1.9.	Электрический ток в газах . . . . .	120
1.9.1.	Явление ионизации и рекомбинации в газах . . . . .	120
1.9.2.	Независимый газовый разряд . . . . .	122
1.9.3.	Самостоятельный газовый разряд . . . . .	126
1.9.4.	Типы разрядов . . . . .	128
1.9.5.	Применение газового разряда . . . . .	133
1.9.6.	Понятие о плазме . . . . .	134
	Важнейшие свойства плазмы . . . . .	135
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	139
	<b>Примеры решения задач</b> . . . . .	140
	<b>Задачи для самостоятельного решения</b> . . . . .	157
2.	<b>Электромагнетизм</b> . . . . .	160
2.1.	Магнитное поле . . . . .	160
2.1.1.	Магнитные взаимодействия . . . . .	160
2.1.2.	Закон Био — Савара — Лапласа . . . . .	162
2.1.3.	Магнитное поле движущегося заряда . . . . .	164
2.1.4.	Напряженность магнитного поля . . . . .	164
2.1.5.	Магнитное поле прямого тока . . . . .	165
2.1.6.	Теорема Гаусса для вектора магнитной индукции . . . . .	166
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	167
2.2.	Силы, действующие на движущиеся заряды в магнитном поле . . . . .	168
2.2.1.	Закон Ампера . . . . .	168
2.2.2.	Взаимодействие двух параллельных проводников с током . . . . .	169
2.2.3.	Воздействие магнитного поля на рамку с током . . . . .	170
2.2.4.	Единицы измерения магнитных величин . . . . .	171

2.2.5.	Сила Лоренца . . . . .	172
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	174
2.3.	Циркуляция вектора магнитной индукции . . . . .	175
2.3.1.	Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции . . . . .	175
2.3.2.	Магнитное поле соленоида . . . . .	177
2.3.3.	Магнитное поле тороида . . . . .	180
2.3.4.	Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле . . . . .	181
	Эффект Холла . . . . .	183
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	185
2.4.	Явление электромагнитной индукции . . . . .	185
2.4.1.	Опыты Фарадея. Индукционный ток. Правило Ленца . . . . .	185
2.4.2.	Величина ЭДС индукции . . . . .	187
2.4.3.	Природа ЭДС индукции . . . . .	190
2.4.4.	Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля . . . . .	192
2.4.5.	Токи Фуко (вихревые токи) . . . . .	193
2.4.6.	Скин-эффект . . . . .	195
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	197
2.5.	Ускорители заряженных частиц . . . . .	198
2.5.1.	Классификация ускорителей . . . . .	198
2.5.2.	Линейные ускорители . . . . .	199
2.5.3.	Циклические ускорители . . . . .	200
2.5.4.	Большой адронный коллайдер . . . . .	208
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	210
2.6.	Самоиндукция и взаимная индукция . . . . .	210
2.6.1.	Явление самоиндукции . . . . .	210
2.6.2.	Влияние самоиндукции на ток при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность . . . . .	212
2.6.3.	Взаимная индукция . . . . .	214
2.6.4.	Индуктивность трансформатора . . . . .	215
2.6.5.	Энергия магнитного поля . . . . .	217
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	220
2.7.	Магнитные свойства вещества . . . . .	220
2.7.1.	Магнитные моменты электронов и атомов . . . . .	220
2.7.2.	Атом в магнитном поле . . . . .	224
2.7.3.	Магнитное поле в веществе . . . . .	225
2.7.4.	Диамагнетики и парамагнетики в магнитном поле . . . . .	228
2.7.5.	Ферромагнетики . . . . .	230
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	235
2.8.	Уравнения Максвелла . . . . .	236

2.8.1. Закон полного тока . . . . .	236
2.8.2. Ток смещения . . . . .	237
2.8.3. Единая теория электрических и магнитных явлений. Система уравнений Максвелла . . . . .	239
2.8.4. Пояснение к теории классической электродинамики . . . . .	243
2.8.5. Скорость распространения ЭМП . . . . .	244
2.8.6. Релятивистская трактовка магнитных явлений (общие положения) . . . . .	246
<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	248
<b>Примеры решения задач</b> . . . . .	248
<b>Задачи для самостоятельного решения</b> . . . . .	261
<b>3. Механические колебания и волны</b> . . . . .	265
3.1. Гармонические колебания . . . . .	265
3.1.1. Виды и признаки колебаний . . . . .	265
3.1.2. Параметры гармонических колебаний . . . . .	267
3.1.3. Графики смещения, скорости и ускорения . . . . .	269
3.1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний . . . . .	271
3.1.5. Энергия гармонических колебаний . . . . .	272
3.1.6. Гармонические осцилляторы . . . . .	274
<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	278
3.2. Сложение гармонических колебаний . . . . .	279
3.2.1. Способы представления колебаний . . . . .	279
3.2.2. Сложение гармонических колебаний. Биения . . . . .	280
3.2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . . .	284
3.2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи) . . . . .	284
<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	286
3.3. Влияние внешних сил на колебательные процессы . . . . .	287
3.3.1. Свободные затухающие механические колебания . . . . .	287
3.3.2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания . . . . .	289
3.3.3. Вынужденные механические колебания . . . . .	290
<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	292
3.4. Упругие волны . . . . .	293
3.4.1. Распространение волн в упругой среде . . . . .	293

3.4.2.	Уравнения плоской и сферической волн . . . .	295
	Уравнение плоской волны . . . . .	295
	Уравнение сферической волны . . . . .	296
3.4.3.	Фазовая скорость.	
	Принцип суперпозиции.	
	Групповая скорость . . . . .	297
	Принцип суперпозиции.	
	Групповая скорость . . . . .	298
3.4.4.	Интерференция волн.	
	Стоячие волны . . . . .	299
3.4.5.	Волновое уравнение . . . . .	301
3.4.6.	Эффект Доплера . . . . .	302
	Акустический эффект Доплера . . . . .	302
	Оптический эффект Доплера . . . . .	304
	Закон Хаббла . . . . .	305
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	308
	<b>Примеры решения задач</b> . . . . .	309
	<b>Задачи для самостоятельного решения</b> . . . . .	319
<b>4.</b>	<b>Электромагнитные</b>	
	<b>колебания и волны</b> . . . . .	322
4.1.	Электрические колебания . . . . .	322
4.1.1.	Квазистационарные токи . . . . .	322
4.1.2.	Свободные колебания	
	в электрическом контуре	
	без активного сопротивления . . . . .	322
4.1.3.	Свободные затухающие	
	электрические колебания . . . . .	325
4.1.4.	Вынужденные электрические колебания.	
	Резонанс . . . . .	327
	Резонанс напряжений . . . . .	328
	Резонанс токов . . . . .	329
4.1.5.	Мощность, выделяемая	
	в цепи переменного тока . . . . .	330
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	332
4.2.	Электромагнитные волны . . . . .	333
4.2.1.	Генерация электромагнитных волн . . . . .	333
4.2.2.	Дифференциальные уравнения ЭМВ . . . . .	335
4.2.3.	Экспериментальные исследования ЭМВ . . . .	338
4.2.4.	Энергия и импульс	
	электромагнитного поля . . . . .	342
	Электромагнитная масса и импульс . . . . .	345
	<b>Вопросы к читателю. Упражнения</b> . . . . .	346
	<b>Примеры решения задач</b> . . . . .	347
	<b>Задачи для самостоятельного решения</b> . . . . .	357
	<b>Заключение</b> . . . . .	360

<b>Основные законы и формулы</b> . . . . .	362
Электростатика и постоянный ток . . . . .	362
1. Электростатическое поле в вакууме . . . . .	362
2. Теорема Остроградского — Гаусса и ее применение . . . . .	363
3. Потенциал и работа электростатического поля. Связь напряженности с потенциалом . . . . .	364
4. Диэлектрики в электростатическом поле . . . . .	365
5. Проводники в электростатическом поле . . . . .	366
6. Эмиссия электронов из проводников. Контактные явления на границах проводников . . . . .	367
7. Постоянный электрический ток . . . . .	368
8. Электрический ток в газах, металлах и электролитах . . . . .	370
Электромагнетизм . . . . .	371
1. Магнитное поле . . . . .	371
2. Силы, действующие на движущиеся заряды в магнитном поле . . . . .	373
3. Явление электромагнитной индукции . . . . .	374
4. Ускорители заряженных частиц . . . . .	375
5. Самоиндукция и взаимная индукция . . . . .	376
6. Магнитные свойства вещества . . . . .	377
7. Уравнения Максвелла . . . . .	379
Механические колебания и волны . . . . .	380
1. Гармонические колебания . . . . .	380
2. Сложение гармонических колебаний . . . . .	382
3. Влияние внешних сил на колебательные процессы . . . . .	383
4. Упругие волны . . . . .	385
Электромагнитные колебания и волны . . . . .	387
1. Электромагнитные колебания . . . . .	387
2. Электромагнитные волны . . . . .	391
<b>Глоссарий</b> . . . . .	393
<b>Приложение</b> . . . . .	399
<b>Список литературы</b> . . . . .	403
Основная . . . . .	403
Дополнительная . . . . .	403

*Сергей Иванович КУЗНЕЦОВ*

**КУРС ФИЗИКИ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.  
ЧАСТЬ II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

*Под редакцией профессора В. В. Ларионова*

*Учебное пособие*

*Издание четвертое, переработанное и дополненное*

Зав. редакцией физико-математической литературы

*Н. Р. Нигмадзянова*

Ответственный редактор *Н. А. Сметанина*

Технический редактор *Е. Е. Егорова*

Корректор *Т. А. Кошелева*

Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*

Верстка *М. И. Хетерели*

Выпускающие *Н. А. Крылова, Т. С. Симонова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10

от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.

Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 11.08.14.

Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.

Печать офсетная. Усл. п. л. 17,64. Тираж 700 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии

с качеством предоставленных материалов в ГУП ЧР «ИПК «Чувашия»»

Мининформполитики и массовых коммуникаций ЧР.

428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.

Тел.: (8352) 56-00-23